

delta

MATEMATYKA — FIZYKA — ASTRONOMIA — INFORMATYKA

II-6.63.10³⁴ .1.s P=3.141592

NR 1 (608) 2025

CENA 8 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3008 I NR IND 35 550 X
MIESIECZNIK

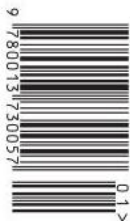
www.deltami.edu.pl

**„Delta” zdobywcą
Nagrody Głównej 20. edycji
konkursu „Popularyzator Nauki”!**



**Suwak
logarytmiczny,
czyli od mnożenia
do dodawania**

str. 4









Nakład: 2800 egz.



Z wielką radością informujemy, że dokładnie rok po obchodach 50-lecia istnienia DELTA została uhonorowana Nagrodą Główną w XX edycji konkursu „Popularyzator nauki”. Konkurs organizowany jest przez serwis Nauka w Polsce, wydawany przez Fundację Polskiej Agencji Prasowej. Nagradzane są w nim osoby i instytucje, które przybliżają ludzi do nauki i naukę do ludzi. Jesteśmy dumni z tej działalności i z pewnością wraz z naszymi Autorami będziemy ją dla Was, naszych Czytelników, kontynuować.

SPIS TREŚCI NUMERU 1 (608) 2025

O przydziale miejsc na przedmiotach <i>Oskar Skibski</i>	str. 1
Od mnożenia do dodawania <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 4
 Zadania	str. 6
Papierem na księżyc <i>Grzegorz Szymanek</i>	str. 7
 Człowiek ukryty w genomie <i>Marta Fikus-Kryńska</i>	str. 10
Odwzorowania addytywne i geometria <i>Franciszek Hansdorfer</i>	str. 11
 Aktualności Późny koniec XX wieku	str. 13
Trzecie prawo Keplera i analiza wymiarowa <i>Grzegorz Łukaszewicz</i>	str. 14
Co nieco o energii <i>Ludwik Lehman</i>	str. 17
Klub 44	str. 20
 Prosto z nieba: Nieunikniona kolizja?	str. 22
 Niebo w styczniu	str. 23
 Dla jakich n istnieje...? <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ;
dr Tomasz Greczyło, prof. UWr; dr Adam Gregosiewicz;
prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska;
dr hab. Artur Jeż, prof. UWr; prof. dr hab. Bartosz Klin;
dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wymolek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Jan Horubała,
Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT, www.poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

O przydziale miejsc na przedmiotach

Oskar SKIBSKI*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Podobno zdarzało się nawet, że studenci z wysoką średnią rejestrowali się na jakiś przedmiot „dla kogoś”, a potem na papierowych druczkach w Sekcji Studenckiej oddawali mu to miejsce.

W dyskusjach i opracowaniu tej metody uczestniczyło sporo osób: Marcin Engel, Agata Janowska, Piotr Kępczyński, Paulina Kubera, Adam Malinowski, Konrad Mocarski, Jakub Piotrowicz, Barbara Próchniak, Oskar Skibski i Piotr Skowron (kolejność alfabetyczna).

Kilka miesięcy temu Samorząd Studentów Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego zaproponował, aby zmienić sposób, w jaki odbywa się rejestracja studentów na przedmioty. Do tej pory, w uproszczeniu, działała ona tak: każdy student wybierał przedmioty, na które chciałby się zapisać; następnie po kolei rozpatrywani byli studenci, w kolejności malejącej średniej ocen, i każdemu przydzielane były miejsca na wszystkich przedmiotach, które wybrali i na które były jeszcze wolne miejsca. Studenci nie byli zbyt zadowoleni z tego systemu, i trudno im się dziwić. Jednym z problemów było to, że student nie wiedział, ile przedmiotów powinien wybrać, bo nie miał pewności, ile z nich dostanie, a ileś zaliczyć musi. Większym problemem było jednak to, że system ten bardzo mocno premiował osoby z wysoką średnią. Można argumentować, że student z najwyższą średnią powinien mieć pierwszeństwo rejestracji na pewną liczbę przedmiotów przed studentem ze średnią najniższą. Ale czy powinien też mieć pierwszeństwo na wszystkich przedmiotach przed studentem ze średnią tylko odrobinę niższą?

Pierwszym naturalnym krokiem do uzdrowienia systemu było wprowadzenie limitu na liczbę przedmiotów, jakie może dostać jeden student, oraz zmiana tego, co deklarują studenci – lepiej, aby podawali oni kolejność przedmiotów, na które chcą się zarejestrować, od najbardziej pożądanego do najmniej. Trudniejszym problemem jest jednak wyrównanie szans studentów. Najrówniej byłoby oczywiście, gdyby w kółko każdemu studentowi przydzielał jeden przedmiot. Ten system, znany na przykład z wyboru drużyn na lekcjach wf, nazywa się *Round Robin* (lub rzadziej, ale po polsku, *algorytmem karuzelowym*). Jednak czy tak powinna działać rejestracja na przedmioty? Czy ciężko wypracowana średnia nie powinna odgrywać większej roli? Czy dałoby się zrobić tak, aby osoby ze zbliżoną średnią były traktowane tak równo, jak się da, ale większa różnica w średnich przekładała się na lepszą sytuację?

Pewnie, że się da! W wyniku wielu rozmów i negocjacji powstał algorytm, który ze względu na swoją uderzającą sprawiedliwość nazwany został *Robin Hoodem*.

Przydział miejsc na przedmiotach (*Robin Hood*)

Krok 1: Każdy student podaje ranking przedmiotów, na jakie chciałby się zapisać.

Krok 2: Umieszczamy wszystkich studentów na wspólnej liście i sortujemy malejąco względem średniej ocen.

Krok 3: Bierzemy pierwszą osobę z listy i przydzielamy jej przedmiot, na którym zależy jej najbardziej spośród tych, na których są jeszcze wolne miejsca (jeżeli jeszcze nie osiągnęła pewnego z góry ustalonego limitu).

Krok 4: Zmniejszamy średnią wybranej osobie o stałą $c = 0,5$ i przesuwamy ją odpowiednio w dół na liście.

Krok 5: Powtarzamy kroki 3 i 4, aż skończą się nam miejsca na przedmiotach lub nikt nie będzie chciał już żadnego z dostępnych przedmiotów.

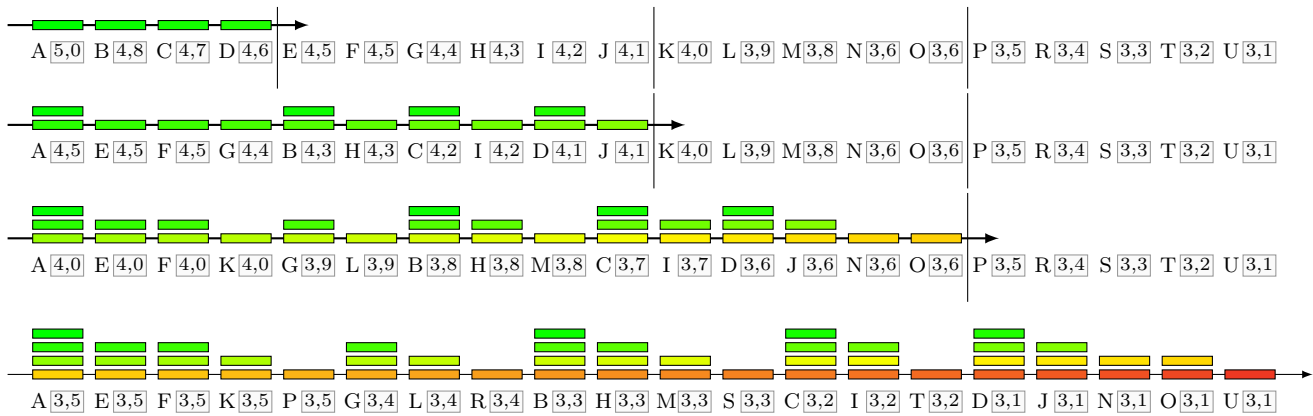
HURRA
JESTEM!



Ile powinna wynosić stała c , jest kwestią do dyskusji. Łatwo zauważyć, że gdyby zmienić ją na 0, to uzyskalibyśmy obecny system, a dla 5 to zwykły Round Robin.

A co ta stała oznacza? Ustalmy dwóch studentów i popatrzmy, jak przeplatają się ich wybory. Jeżeli dwie osoby mają różnicę średnich mniejszą niż c , to są traktowane tak równo, jak się da – będą wybierać na zmianę, zaczynając od tej z wyższą średnią. Jeżeli z kolei ta różnica jest pomiędzy $k \cdot c$ a $(k + 1) \cdot c$, to student z wyższą średnią najpierw wybierze k przedmiotów, a potem będą wybierać na zmianę, zaczynając od tego z wyższą średnią. Na przykład dla najwyższej średniej 5,0 i najniższej 3,1, najlepszy student wybierze 4 przedmioty przed najgorszym.

Możemy się spierać, czy metoda jest fajna, czy nie. W szanowanym czasopiśmie, jakim jest *Delta*, skupimy się jednak na konkretnych, czyli zbadamy, jakie ma teoretyczne własności. Ale najpierw ilustracja.



Ilustracja prezentuje kolejność wyborów w Robin Hoodzie, a kolejne wiersze odpowiadają przydziałowi miejsc na przedmiotach po 4, 14, 29 i 49 krokach procedury. Kolorowe prostokąty symbolizują przydzielane miejsca, a kolor odpowiada kolejności, w której miejsce zostało przyznane – pierwsze miejsca są zielone, a ostatnie czerwone. Jak widzimy, studenci z najwyższą średnią ($> 4,5$) wybierają po pierwszym przedmiocie, po czym zmniejszamy im średnią o 0,5. W ten sposób „wtasowują się” oni w studentów ze średnią pomiędzy 4,0 a 4,5, i razem z nimi wybierają po kolejnym przedmiocie.

Aby opowiedzieć o własnościach Robin Hooda, wprowadźmy trochę oznaczeń. Załóżmy, że mamy n ponumerowanych studentów. Przyjmijmy, że każdy student ma listę rankingową wszystkich przedmiotów, bez remisów. Dla dwóch przedmiotów a, b będziemy pisać $a \succ_i b$, jeżeli student i woli przedmiot a od b . Dla uproszczenia zignorujemy limit przedmiotów, jaki może mieć jeden student: nie zmienia on wiele, a komplikuje analizę. Będziemy więc każdemu studentowi przydzielać jak najwięcej miejsc.

Między studentów będziemy rozdzielać pewien zbiór miejsc na przedmiotach. Dla ułatwienia ten zbiór będzie po prostu multizbiorem przedmiotów, czyli „zbiorem”, w którym przedmiot pojawia się tyle razy, ile jest na nim miejsc. Szukamy pewnego *podziału* tych miejsc, czyli listy $(A_i) = (A_1, \dots, A_n)$ takiej, że A_1, \dots, A_n są zbiorami przedmiotów dla studentów $1, \dots, n$ (nie multizbiorami!), które połączone dadzą multizbiór wszystkich miejsc.

Co możemy powiedzieć o preferencjach studenta dla zbiorów przedmiotów? Aby uniknąć spekulacji, czy lepiej mieć dwa średnie przedmioty, czy jeden fajny i jeden słaby, będziemy porównywać tylko niektóre zbiory. Powiemy, że osobie i podoba się zbiór A co najmniej tak samo jak B (oznaczane $A \succeq_i B$), jeżeli $|A| \geq |B|$ oraz najbardziej lubiany przedmiot z A jest co najmniej tak lubiany jak ulubiony z B , drugi z A co najmniej tak lubiany jak drugi z B itd. Łatwo zauważyć, że $A \succeq_i B$ oraz $B \succeq_i A$ implikuje $A = B$. Będziemy więc pisać $A \succ_i B$, jeżeli $A \succeq_i B$ i $A \neq B$.

Jedną z podstawowych własności dobrego podziału jest to, że nie da się go łatwo poprawić, to znaczy tak pozmienić, aby nikt na tym nie stracił, a ktoś zyskał.

Podział (A_i) jest *optymalny w sensie Pareto*, jeżeli nie istnieje podział (B_i) taki, że $B_i \succeq_i A_i$ dla każdego studenta i oraz $B_i \succ_i A_i$ dla przynajmniej jednego studenta.

Czy podział uzyskany przez Robin Hooda jest w tym sensie optymalny? Tak. Można powiedzieć nawet więcej – dowolny podział uzyskany przez kolejne przydzielanie studentom miejsc na ich ulubionych dostępnych przedmiotach jest optymalny, niezależnie od kolejności, w jakiej będzie się te osoby wybierać. Aby to zobaczyć, wystarczy po kolei rozpatrywać przyznane miejsca. Czy student wybierający jako pierwszy może preferować podział, w którym nie ma przedmiotu, który dostał w pierwszej kolejce? Oczywiście nie. A spośród takich podziałów, czy student, który wybiera jako drugi, może preferować podział bez przedmiotu, który dostał w drugiej kolejce? Nie – jeżeli nie jest to jego ulubiony

Przykładowo dla dwóch przedmiotów m, p (matematyka i polski) możemy mieć multizbiór $O = \{m, m, m, p, p\}$ oznaczający 3 miejsca na matematyce i 2 na polskim.

Formalnie, $A \succeq_i B$, jeżeli $|A| \geq |B|$ i możemy tak uporządkować przedmioty $A = \{a_1, \dots, a_h\}$ i $B = \{b_1, \dots, b_\ell\}$, aby zachodziło $a_j = b_j$ lub $a_j \succ_i b_j$ dla każdego $j \in \{1, \dots, \ell\}$.

przedmiot, to znaczy, że na ulubionym było tylko jedno miejsce, którego nie może dostać, nie krzywdząc w ten sposób pierwszego studenta. I tak dalej.

Drunk Robin: Wybieramy dowolnego studenta i przydzielamy mu jego ulubiony dostępny przedmiot. Powtarzamy, dopóki są jeszcze jakieś miejsca.

Nazwijmy taki algorytm przydziału Drunk Robinem (definicja na marginesie). Okazuje się, że wszystkie optymalne podziały da się nim uzyskać!

Twierdzenie. *Podział jest optymalny w sensie Pareto wtedy i tylko wtedy, gdy da się go uzyskać algorytmem Drunk Robin.*

Jeżeli w grafie wszystkie wierzchołki mają krawędzie wychodzące, to zawsze znajdziemy w nim cykl, podążając uparcie za strzałkami wychodzącymi – studentów (na świecie) mamy skończoną liczbę, więc w końcu ktoś się powtórzy.

Dowód. Uzasadniliśmy już, że Drunk Robin daje tylko podziały optymalne. Załóżmy, że mamy podział optymalny i rozpatrzmy graf, w którym wierzchołkami są studenci, a skierowana krawędź (i, j) istnieje, jeżeli j posiada jakiś przedmiot, który i woli od wszystkich swoich przedmiotów. Gdyby ten graf miał cykl, to podział nie byłby optymalny – każdy student mógłby dostać bardziej lubiany przedmiot w zamian za któryś mniej lubiany. Skoro graf nie ma cyklu, to musi istnieć wierzchołek bez krawędzi wychodzących, czyli który nikomu nie zazdrości żadnego przedmiotu. Możemy mu zatem pozwolić wybierać jako pierwszemu. Następnie kasując jego ulubiony przedmiot z jego zbioru oraz jedno miejsce ze zbioru dostępnych miejsc, dostaniemy mniejszy podział, który też jest optymalny: gdyby nie był i istniałby lepszy podział, po dodaniu skasowanego przedmiotu dostalibyśmy podział lepszy niż oryginalny, przecząc jego optymalności. Postępując dla niego i kolejnych mniejszych podziałów analogicznie, otrzymamy kolejność, w której każdy student wybiera ulubiony dostępny przedmiot. \square

Podziały uzyskane z Drunk Robina mogą być jednak bardzo niesprawiedliwe. W jaki sposób możemy opisać fakt, że podział jest sprawiedliwy? Nie możemy wymagać, aby wszyscy dostali miejsce na ulubionym przedmiocie. Moglibyśmy jednak chcieć, aby każda osoba miała zbiór nie więcej niż o jeden przedmiot gorszy niż każda inna. O tym właśnie mówi następująca własność:

Podział (A_i) jest *wolny od zazdrości z dokładnością do jednego przedmiotu (EF1)*, jeżeli dla dowolnych dwóch studentów i, j zachodzi $A_j = \emptyset$ albo istnieje przedmiot $p \in A_j$, taki że $A_i \succeq_i A_j \setminus \{p\}$.

Round Robin: Układamy studentów w listę. Bierzemy pierwszego, przydzielamy mu jego ulubiony dostępny przedmiot i przesuwamy go na koniec listy. Powtarzamy, dopóki są jeszcze jakieś miejsca.

Rozważmy 2 studentów, zbiór miejsc $\{a, b, c, d\}$ (na każdym przedmiocie jedno miejsce), podział $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$ i preferencje: $a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 d$ oraz $b \succ_2 c \succ_2 d \succ_2 a$. Podział ten jest optymalny w sensie Pareto i spełnia EF1, ale nie da się go uzyskać algorytmem Round Robin.

Dla modelu, w którym nie ma limitu przedmiotów, jakie może mieć jeden student, definicja Robin Hooda wygląda tak:

Robin Hood: Wybieramy studenta z najwyższą średnią, przydzielamy mu jego ulubiony dostępny przedmiot i zmniejszamy mu średnią o $c = 0,5$. Powtarzamy, dopóki są jeszcze jakieś miejsca.

Łatwo zobaczyć, że podziały uzyskane Round Robinem spełniają tę własność: pierwszy przedmiot wybrany przez studenta i jest dla niego lepszy lub taki sam jak drugi wybrany przez studenta j , drugi wybrany przez i jest lepszy lub taki sam jak trzeci wybrany przez j itd. Co ciekawe, istnieją jednak podziały optymalne w sensie Pareto, które spełniają EF1, a nie da się ich uzyskać algorytmem Round Robin. Przykład znajduje się na marginesie.

A czy podziały uzyskane Robin Hoodem spełniają EF1? Nie, ale to dobrze – chcemy przecież, aby wyższa średnia przełożyła się na znacząco lepszy zbiór przedmiotów. Niech p_i będzie pewnym priorytetem, czyli u nas średnią studenta i . Możemy zdefiniować następujący wariant własności EF1:

Podział (A_i) jest *wolny od zazdrości z dokładnością do jednego przedmiotu, uwzględniając priorytety (EF1-p)*, jeżeli dla dowolnych dwóch studentów i, j zachodzi:

- jeżeli $(p_j - p_i)/c \in [\ell, \ell + 1)$ dla $\ell \in \mathbb{N}$, to istnieje $P \subseteq A_j$, $|P| \leq \ell + 1$ taki, że $A_i \succeq_i A_j \setminus P$,
- jeżeli $(p_j - p_i)/c \in (\ell, \ell + 1]$ dla $\ell \in \mathbb{N}$, to istnieje $P \subseteq A_j$, $|P| \leq \ell$ taki, że $A_j \setminus P \succeq_j A_i$.

Łatwo sprawdzić, że gdy priorytety są równe, własność ta sprowadza się do EF1. Przy priorytetach spełnialność wynika z kolejności, w jakiej studenci wybierają przedmioty: dla $(p_j - p_i)/c \in [\ell, \ell + 1)$ student j wybiera ℓ lub $\ell + 1$ przedmiotów przed studentem i , więc po wyrzuceniu $\ell + 1$ ulubionych przedmiotów studentowi j student i będzie wolał swój zbiór.

Nasz algorytm zastosowaliśmy do przydziału miejsc na przedmioty, ale można go też stosować w codziennym życiu, np. do podziału czekoladek z bombonierki. Starszym Czytelnikom sugerujemy przyjąć za priorytet wiek, tylko ile powinno wynosić c ? Nie będziemy osądzać, jeżeli zostaniecie przy $c = 0,5$.

Od mnożenia do dodawania

Michał MIŚKIEWICZ*

*Don't know much about geography
Don't know much trigonometry
Don't know much about algebra
Don't know what a slide rule is for*

“Wonderful world”, Sam Cooke

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Źródło: Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, 2nd edition, 1991. Interesująca nas historia jest na str. 307–315.

Poniższy żart pokazuje, że mnożenie może się okazać trudniejsze od dodawania.

Noah sent his animals to “go forth and multiply”, but a pair of snakes told him “we can't multiply, we're adders!”.

$$\begin{array}{r} 1,284 \\ + 2,117 \\ \hline 3,401 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,284 \\ \times 2,117 \\ \hline 8988 \\ 1284 \\ 1284 \\ + 2568 \\ \hline 2,718228 \end{array}$$

Rys. 1. Dodawanie i mnożenie „pod kreską” liczb 1,284 i 2,117. Drugi z algorytmów ma zauważalnie większą złożoność

Oprócz wzoru na iloczyn cosinusów zamianie mnożenia na prostsze operacje może służyć tożsamość $xy = ((x+y)^2 - (x-y)^2)/4$. Oparta na niej metoda (*quarter square multiplication*) stała się jednak popularna dopiero dużo później. Znając stosunek bohatera piosenki do trygonometrii i algebry, można mieć niemal pewność, że nie byłby on zadowolony z żadnego z tych wzorów.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Rys. 2. Przodek tablic logarytmicznych: tablica kolejnych potęg dwójki. Podobne ciągi są obecne w pracach Archimedeasa, były też regularnie publikowane w XVI wieku, np. w *Arithmetica integra* Michaela Stifela (1544)

Od powstania piosenki Sama Cooke’a minęły 64 lata. Wśród dziedzin wiedzy, które jej bohater wymienia jako swoje słabe strony, jedna w międzyczasie wypadła z programów nauczania. Mianowicie, młodszy Czytelnik ma pełne prawo nie wiedzieć, do czego służy suwak logarytmiczny (*slide rule*). Warto ten stan zmienić. W *Delcie* można już było o suwaku przeczytać w Δ_{81}^8 i Δ_{01}^{12} , ale myślę, że i tak warto powiedzieć kilka słów o idei jego działania wraz z historycznym kontekstem.

Do czego zatem służy suwak logarytmiczny? Otóż do tego, by zamiast działania mnożenia można było wykonywać dodawanie. No dobrze, a dlaczego miałyby nam na tym zależeć (pomijając żarty o rozmnażaniu żmij)? Jako odpowiedź przytoczmy szkolne „działania pod kreską”, dla przykładu przedstawione na marginesie dla liczb 1,284 i 2,117. Widać, że mnożenie jest dużo bardziej pracochłonne: dla dwóch liczb n -cyfrowych znalezienie sumy wymaga około n operacji, a iloczynu – około n^2 .

Jak mnożyć, dodając? Ta trudność dała się we znaki astronomom XVI wieku ze względu na ilość i dokładność obliczeń koniecznych w ich pracy. Dla jej pokonania opracowali metodę o nazwie *prosthaphaeresis*, od greckich słów oznaczających dodawanie i odejmowanie. Opierała się na tożsamościach trygonometrycznych, takich jak

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) / 2,$$

oraz na użyciu tablic trygonometrycznych. Tablice takie dobrze znają maturzyści, ponieważ w trakcie egzaminu mogą odczytywać z nich wartości funkcji sin, cos, tg dla wielokrotności 1° ; w XVI wieku były jednak w użyciu tablice dużo dokładniejsze (np. co do sekundy kątowej). A metoda wygląda następująco:

1. Odnajdujemy w tablicy nasze czynniki jako wartości cosinusa. Ze zrozumiałych względów nie znajdziemy tam 1,284 i 2,117, ale 0,1284 i 0,2117 już tak – odpowiadają one w przybliżeniu kątom $\alpha = 82,623^\circ$ i $\beta = 77,778^\circ$.
2. Wykonujemy dodawanie i odejmowanie (stąd wzięła się nazwa metody): $\alpha + \beta = 160,401^\circ$, $\alpha - \beta = 4,845^\circ$.
3. Odczytujemy przybliżone wartości cosinusa tych kątów: $\cos(\alpha + \beta) = -0,94206$, $\cos(\alpha - \beta) = 0,99643$, a na koniec bierzemy średnią: 0,027185. Ostateczny wynik wymaga jeszcze przesunięcia przecinka: 2,7185.

Otrzymaliśmy w ten sposób $1,284 \cdot 2,117 \approx 2,7185$, co może nie zachwyca, ale oczywiście dokładność obliczeń można dowolnie zwiększać, sięgając po coraz lepsze tablice.

Niedługo później wymyślono tablice logarytmiczne, niejako szyte na miarę rozważanego przez nas problemu. Jako bezpośredniego przodka takich tablic możemy wskazać tablicę potęg dwójki (na marginesie). Umożliwia ona szybkie mnożenie liczb z drugiego wiersza tablicy. Przykładowo, iloczyn 32 i 64 moglibyśmy wyznaczyć pod kreską, możemy też jednak odczytać z tablicy, że są to potęgi 2^5 i 2^6 , dając więc po wymnożeniu $2^{11} = 2048$. Ponownie udało nam się oszukać przeznaczenie i dodać zamiast pomnożyć. Opisana metoda ma jednak oczywistą podstawową wadę: liczby w drugim rzędzie tablicy nie są równo rozmieszczone na prostej, a im dalej, tym odległości między nimi większe. W rezultacie metoda jest mało praktyczna, bo w typowej sytuacji nie znajdziemy w drugim rzędzie interesujących nas czynników, nawet w przybliżeniu.

Krótką historią logarytmu. Problem ten rozwiążali niezależnie John Napier (1550–1617) i Jost Bürgi (1552–1632), jednak ze względu na pierwszeństwo publikacji (1614 vs. 1620) to ten pierwszy wpłynął na dalsze losy matematyki.

n	$1,0001^n$
0	1,0000
1	1,0010
2	1,0020
3	1,0030
...	...
2499	1,28388
2500	1,28401
2501	1,28414
...	...
7499	2,11671
7500	2,11692
7501	2,11713
...	...
9999	2,71787
10000	2,71815
10001	2,71842

Rys. 3. Tablica logarytmiczna podobna do oryginalnej tablicy Bürgiego. Napier jako podstawę przyjął $1 - 10^{-7}$, a więc liczbę mniejszą od jedynki

We współczesnym języku kinematyczny opis Napiera sprowadza się do równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Otrzymujemy z nich $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$, a więc po uwzględnieniu warunków początkowych $y(x) = -\ln(x)$.

We wzorze (*) za liczbę x można przyjąć dowolną liczbę zespoloną, a tożsamość $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ (tzw. prawo grupowe) nadal pozostaje w mocy. Funkcję cosinus można zdefiniować (i tak się zazwyczaj robi!) jako $\cos(x) := (e^{ix} + e^{-ix})/2$. Wzór na iloczyn cosinusów nie jest wtedy twierdzeniem geometrycznym, ale banalną konsekwencją prawa grupowego: obie strony okazują się równe $\frac{1}{4}(e^{ix+iy} + e^{-ix-iy} + e^{ix-iy} + e^{-ix+iy})$.

Pomysł jest prosty: aby liczby z drugiego wiersza były gęściej (i równiej) rozmieszczone, należy jako podstawę wziąć liczbę bliższą jedynki, na przykład 1,0001. Podnosząc tę liczbę do kolejnych potęg, otrzymujemy dość długą tablicę, której część jest przedstawiona na marginesie. Interesujące nas liczby odnajdujemy w sensownym przybliżeniu na pozycjach 2500 i 7500, co po dodaniu daje 10 000, więc jako przybliżony iloczyn odczytujemy 2,71815. Tak jak dla prostaphaeresis, tak i tutaj dokładność można dowolnie zwiększać. Poraża za to prostota samej procedury – nic dziwnego, że pomysł Napiera upowszechnił się jeszcze przed publikacją Bürgiego. Niedługo później, gdzieś pomiędzy rokiem 1620 a 1630, wymyślono *suwak logarytmiczny*, poręczne narzędzie oparte na tablicy logarytmicznej. Ale o tym potem.

Wróćmy na chwilę do zagadnienia większej dokładności. Jeśli w którymś miejscu po prawej stronie widzimy liczbę x , to liczbę po lewej nazywamy *logarytmem* z x o podstawie 1,0001, co zapisujemy jako $\log_{1,0001}(x)$ – ponownie nazwa pochodzi od dwóch greckich słów, tym razem oznaczających stosunek (*logos*) i liczbę (*arithmos*). Wynik w oczywisty sposób zależy od przyjętej podstawy, i tę zależność łatwo prześledzić, próbując podstaw postaci $1 + 10^{-k}$ dla kolejnych naturalnych k . Okazuje się, że przy zwiększaniu k liczba $\log_{1+10^{-k}}(x)$ z grubsza wydłuża się o kolejne zera. Gdybyśmy chcieli móc zestawiać tablice o różnej dokładności, to warto umówić się, że wszystkie liczby w lewej kolumnie podzielimy przez 10^k , czyli obok x wpiszemy liczbę $10^{-k} \log_{1+10^{-k}}(x)$. Dla dużych k tak określona funkcja przybliża tak zwany *logarytm naturalny*, oznaczany przez $\ln(x)$. Jest to logarytm o podstawie $e \approx 2,71828$. Liczba e nazywana jest liczbą Eulera lub Napiera, albo też – podstawą logarytmu naturalnego!

Warto tu napomknąć, że ów *naturalny* logarytm pochodzi od samego Napiera. Chociaż swoją tablicę wyznaczył on poprzez potęgowanie konkretnej liczby bliskiej jedynce, to jako definicję logarytmu podał następujący opis kinematyczny, poniżej nieco tylko uwspółcześniony. W chwili $t = 0$ punkty x, y na osi liczbowej są odpowiednio w 1, 0 oraz mają prędkość jednostkową $-x$ w lewo, a y w prawo. Przy tym prędkość y jest stała, a prędkość x jest proporcjonalna do odległości od zera. Jako logarytm z $x(t)$ definiujemy wtedy $-y(t)$.

Z opisu tego rzeczywiście wynika, że y jest logarytmem naturalnym z x (z minusem). Podnoszenie $1 - 10^{-7}$ do kolejnych potęg – to właśnie robił Napier – odpowiada dyskretyzacji problemu, czyli przyjęciu, że prędkość $x(t)$ zmienia się skokowo w odstępach czasowych $\Delta t = 10^{-7}$. Zastosowanie dyskretyzacji sugeruje, że Napier był świadomy zbieżności przy $\Delta t \rightarrow 0$, co równoważne jest zbieżności $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ przypisywanej... Eulerowi.

Dygresja o teorii Eulera. Obecnie typowy wykład analizy matematycznej nie odzwierciedla historycznego rozwoju tej dziedziny, a zamiast tego referuje dokonania Leonharda Eulera (1707–1783). Wprowadził on funkcję wykładniczą zadaną szeregiem

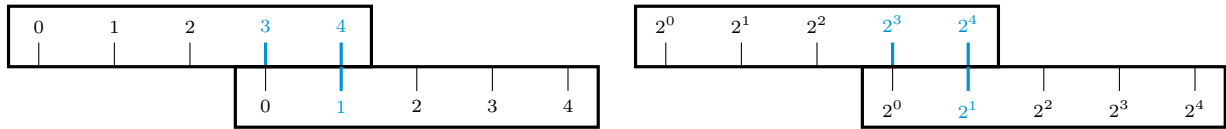
$$(*) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

lub równoważnie jako granicę $(1 + \frac{x}{n})^n$ przy $n \rightarrow \infty$. Dowiódł, że jest to funkcja odwrotna do logarytmu naturalnego, czyli spełnione są równości $e^{\ln(x)} = x$ (dla $x > 0$) i $\ln(e^y) = y$ (dla $y \in \mathbb{R}$). W szczególności e^1 to dokładnie e , natomiast e^n jest równe n -krotnemu iloczynowi $e \cdot \dots \cdot e$, i ogólnie zachodzi wzór $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

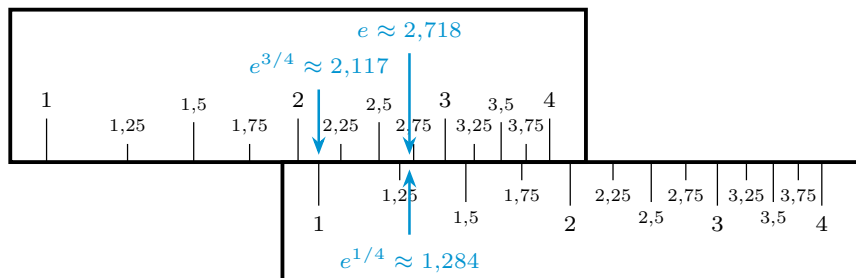
Nie należy jednak dać się zmylić: liczby takie jak $e^{\sqrt{2}}$ nie wymagają od nas $\sqrt{2}$ -krotnego mnożenia, a jedynie podstawienia $x = \sqrt{2}$ do nieskończonej sumy (*). Funkcja e^x to zatem coś więcej niż potęgowanie. Ta uwaga niesie ze sobą wiele pożytecznych konsekwencji, między innymi pozwala wyjaśnić rzecz następującą. Czy zdziwiło wcześniej Czytelnika, że funkcja \cos podobnie jak \ln „zamienia mnożenie na dodawanie”? Otóż obie te funkcje są spokrewnione z funkcją e^x , co wyjaśnia ich magiczne własności – szersze wyjaśnienie na marginesie.

Powrót do suwaka. Zestawiając razem dwie zwyczajne linijki, otrzymujemy prosty przyrząd do dodawania. By dodać na nim liczby 3 i 1, przesuwamy linijki

tak, by trójka pojawiła się nad zerem, a wówczas wynik odczytujemy powyżej jedynki. Zgodnie z oczekiwaniami, wyszło 4. Ale spójrzmy na małą modyfikację:



Pod każdą etykietą na obu linijkach dopisaliśmy dwójkę, w ten sposób podmieniając ciąg arytmetyczny $0, 1, 2, \dots$ na ciąg geometryczny $2^0, 2^1, 2^2, \dots$. Tak jak w przypadku rysunku 2, dodawanie zamieniło się na mnożenie potęg dwójki, u nas konkretnie: $8 \cdot 2 = 16$. Ta modyfikacja to właśnie *suwak logarytmiczny*. Oczywiście standardowy suwak dla wygody użytkownika uwzględnia na swojej skali takie liczby, jak $1, 2, 3, \dots$, a nie tylko potęgi dwójki. W tym kontekście naturalne jest pytanie: *a gdzie te liczby umieścić?*, na które odpowiedzią jest właśnie logarytm: liczba y pojawia się w odległości $\log(y)$ od początku linijki (wybór podstawy logarytmu jest tu drugorzędny). Poniżej widać, jak można za pomocą takiego przyrządu pomnożyć liczby $e^{1/4} \approx 1,284$ i $e^{3/4} \approx 2,117$:



Bohater piosenki Sama Cooke'a miał silne, choć trudne do wyrażenia w słowach przekonanie, że umiejętność dodawania jest wystarczająca. Wystarczająca nie tylko do tego, by mnożyć, ale też by spełnić marzenie o odwzajemnionej miłości. Lubię więc myśleć, że co nieco jednak wiedział o naturze suwaka logarytmicznego. Posłuchajmy sami:

*But I do know one and one is two
And if this one could be with you
What a wonderful world this would be*

“Wonderful world”, Sam Cooke



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1804. Dane są trójmiany kwadratowe $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{2025}(x)$ z tymi samymi współczynnikami przy x^2 oraz tymi samymi współczynnikami przy x , ale z różnymi wyrazami wolnymi. Każdy z tych trójmianów ma dwa pierwiastki rzeczywiste. Niech x_i będzie jednym z pierwiastków trójmianu $f_i(x)$. Jakie wartości może przyjmować suma

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{2025}(x_{2024}) + f_1(x_{2025})?$$

M 1805. Wyznaczyć wszystkie liczby złożone n takie, że dla dowolnego przedstawienia n na dwa czynniki całkowite dodatnie $n = xy$ liczba $x + y$ jest potęgą dwójki.

M 1806. Dany jest (mn) -kąt foremny. Wśród jego wierzchołków dokładnie m jest pokolorowanych na czerwono, a n na niebiesko (żaden wierzchołek nie jest pokolorowany dwukrotnie). Udowodnić, że pewien odcinek, którego końce znajdują się w czerwonych punktach, jest równy pewnemu odcinkowi, którego końce znajdują się w niebieskich punktach.

Rozwiązania na str. 24

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1111. Rozmiary kątowe tarczy słonecznej obserwowanej z powierzchni Ziemi wynoszą około $0,5^\circ$ (przybliżony „pomiar” można wykonać np. oceniając, ile razy szerokość kciuka wyciągniętej ręki jest większa od widzianej średnicy tarczy słonecznej). Oszacuj temperaturę powierzchni Słońca. Przyjmij, że średnia temperatura powierzchni Ziemi jest bliska 0°C .

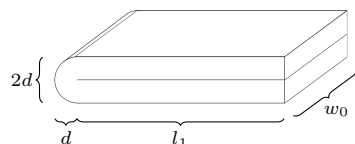
F 1112. W naczyniu o objętości V znajduje się gaz pod ciśnieniem p_0 . Dysponujemy pompką o objętości skoku tłoka równej $v \ll V$. Potrzebujemy zmniejszyć ciśnienie w naczyniu do wartości p bez zmieniania temperatury gazu. Ile ruchów tłoka musimy wykonać i z jaką dokładnością osiągniemy wymagane ciśnienie?

Papierem na księżyc

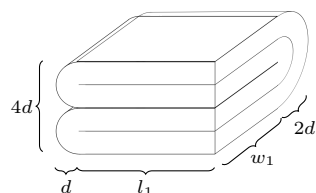
Grzegorz SZYMANEK*

* Student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

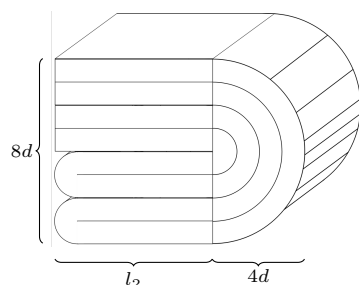
Znanym faktem jest, że zginając kartkę wpół, dokonujemy jej dwukrotnego pogrubienia. Z każdym zgięciem następne jest coraz trudniejsze – aż do momentu, w którym dokonanie jeszcze jednego jest już niemożliwe. Nasuwa się więc nieuchronne pytanie: ile właściwie razy można zgiąć daną kartkę wpół? Tę właśnie liczbę spróbujemy wyznaczyć, przyjmując, że kartkę zginąć będziemy naprzemiennie po długości i szerokości. Niech n oznacza liczbę dokonanych zgięć; $\mathcal{L}_n, \mathcal{W}_n, \mathcal{D}_n$ – odpowiednio: długość, szerokość i grubość kartki po n zgięciach. Na początek zdefiniujemy założenia, na których będziemy bazować podczas dalszego zgłębiania pomysłu:



Rys. 1. Pierwsze zgięcie – wykonane równoległe do krawędzi szerokości



Rys. 2. Drugie zgięcie – wykonane równoległe do krawędzi długości



Rys. 3. Trzecie zgięcie – wykonane równoległe do krawędzi szerokości

1. Złożenie kartki wpół oznacza, że na „zewnątrz” zgięcia powstaje łuk kolisty o takiej długości, by suma „zewnątrznej” powierzchni odpowiadała powierzchni kartki przed złożeniem.
2. „Wewnętrzna” część zgięcia jest punktowa – kartka zostaje w tym miejscu „złamana”.
3. Konsekwencją punktów 2 i 3 jest fakt, że objętość kartki na obszarze zgięcia maleje dwukrotnie. Przyjąć więc można jedną z dwóch możliwych interpretacji:
 - średnia gęstość kartki na zgięciu jest dwukrotnie większa niż przed wykonaniem zgięcia,
 - po wykonaniu zgięcia po stronie przeciwnej niż nowo utworzony łuk powstaje klin „kompensujący” ubytek w objętości.
 Niezależnie od tego, którą z powyższych opcji przyjmijemy, warunki 1 i 2 pozostają spełnione.

Tym samym możemy rozpocząć naszą przygodę. W celu ułatwienia obliczeń wprowadzmy oznaczenia (jak na rysunkach): l_m – długość płaszczyzny kartki (bez łuku), w_u – adekwatnie, szerokość płaszczyzny, d – początkowa grubość kartki, gdzie m oraz u należą do zbioru $\{0, 1, 2, \dots\}$. W pierwszej kolejności wyrażmy grubość kartki po n zgięciach:

$$\mathcal{D}_n = d \cdot 2^n.$$

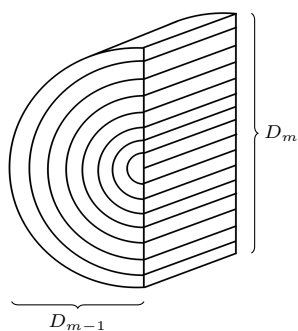
Dalej przyjmijmy następującą definicję długości i szerokości: operację rozpoczynamy od wykonania zgięcia równoległego do krawędzi szerokości \mathcal{W} , następnie do krawędzi długości \mathcal{L} , znowu \mathcal{W} itd. Długość i szerokość wybieramy więc, określając kolejność wykonywanych zgięć (l_0 sprzecznie z lingwistyczną konwencją nie musi być większe od w_0).

$n = 1$	$\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_0$ $2l_1 + \pi d = l_0 + 0$ $l_1 = \frac{1}{2}(l_0 - \pi d)$ $\mathcal{L}_1 = l_1 + d$	$n = 3$	$\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_2$ $2l_2 + 4\pi d = \mathcal{L}_2 = l_1 + d$ $l_2 = \frac{1}{2}(l_1 + d - \pi \cdot 4d)$ $\mathcal{L}_3 = l_2 + 4d$	$n = 5$	$\mathcal{W}_5 = \mathcal{W}_4$ $2l_3 + 16\pi d = \mathcal{L}_4 = l_2 + 4d$ $l_3 = \frac{1}{2}(l_2 + 4d - \pi \cdot 16d)$ $\mathcal{L}_5 = l_3 + 16d$
$n = 2$	$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$ $2w_1 + 2\pi d = \mathcal{W}_1 = w_0 + 0$ $w_1 = \frac{1}{2}(w_0 - \pi \cdot 2d)$ $\mathcal{W}_2 = w_1 + 2d$	$n = 4$	$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_3$ $2w_2 + 8\pi d = \mathcal{W}_3 = w_2 + 2d$ $w_2 = \frac{1}{2}(w_1 + 2d - \pi \cdot 8d)$ $\mathcal{W}_4 = w_2 + 8d$	$n = 6$	$\mathcal{L}_6 = \mathcal{L}_5$ $2w_3 + 32\pi d = \mathcal{W}_5 = w_4 + 8d$ $w_3 = \frac{1}{2}(w_2 + 8d - \pi \cdot 32d)$ $\mathcal{W}_6 = w_3 + 32d$

Mając tę postać, można już utworzyć wzór ogólny na l_m (oczywiście dla $m > 0$):

$$l_m = \frac{1}{2}(l_{m-1} + [4^{m-2}]d - \pi \cdot 4^{m-1}d).$$

Rozwijając powyższą rekurencję (podstawiamy kolejno wzory pod l_{m-1} , potem l_{m-2} itd.), dostajemy sumę, którą można na powrót zwinąć, stosując wzór na sumę ciągu geometrycznego, i zastępujemy tym samym wzór



Rys. 4. Skrajny przypadek (kartki nie da się już złożyć)

rekurencyjny iteracyjnym:

$$l_m = \frac{1}{2^m} l_0 + d \left[\frac{1}{2^{m-1}} \frac{1-8^{m-1}}{1-8} \right] - \pi d \left[\frac{1}{2^m} \frac{1-8^m}{1-8} \right].$$

Wyobraźmy sobie teraz przypadek skrajny, po którego przekroczeniu wykonanie następnego zgięcia będzie niemożliwe (rys. 4).

Widać, że zachodzić musi:

$$l_m \geq 0.$$

Z tego warunku, po krótkich przekształceniach, otrzymujemy nierówność:

$$m \leq \log_8 \left(\frac{\frac{7}{d} l_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right).$$

Podobne wyprowadzenie przeprowadzamy dla szerokości w_u i otrzymujemy:

$$u \leq \log_8 \left(\frac{\frac{7}{2d} w_0 - 2 + \pi}{8\pi - 2} \right) + 1.$$

Wystarczy teraz określić liczbę zgięć wzdłuż krawędzi \mathcal{L} i \mathcal{W} .

Ponieważ liczba zgięć jest liczbą całkowitą oraz zachodzą nierówności postaci $m, u \leq \dots$, mamy:

$$m = \left\lfloor \log_8 \left(\frac{\frac{7}{d} l_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right) \right\rfloor,$$

$$u = \left\lfloor \log_8 \left(\frac{\frac{7}{2d} w_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right) \right\rfloor.$$

Powyższe równości określają maksymalną liczbę zgięć kolejno dla krawędzi \mathcal{L} i \mathcal{W} (przy założeniu, że przy zginaniu jednej z krawędzi było możliwe zgięcie tej drugiej).

Jeśli $m > u$, mamy ciąg zgięć (np. tutaj $m = n + 3$):

$$\underbrace{\mathcal{L} \xrightarrow{1} \mathcal{W} \xrightarrow{1} \mathcal{L} \xrightarrow{2} \mathcal{W} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{u} \mathcal{W} \xrightarrow{m-2} \mathcal{L}}_{\text{Cały możliwy do wykonania ciąg zgięć}} \xrightarrow{m-1} \mathcal{L} \xrightarrow{m} \mathcal{L}.$$

Czyli całkowita liczba zgięć dla $m > u$ to $n = 2u + 1$.

Jeśli natomiast $m \leq u$, mamy ciąg zgięć (np. tutaj $m = u - 3$):

$$\underbrace{\mathcal{L} \xrightarrow{1} \mathcal{W} \xrightarrow{1} \mathcal{L} \xrightarrow{2} \mathcal{W} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{m} \mathcal{L} \xrightarrow{u-2} \mathcal{W}}_{\text{Cały możliwy do wykonania ciąg zgięć}} \xrightarrow{u-1} \mathcal{W} \xrightarrow{u} \mathcal{W}.$$

Czyli całkowita liczba zgięć dla $m \leq u$ to $n = 2m$. Ogólny wzór na n ma postać:

$$n = \begin{cases} 2u + 1 & \text{dla } m > u \\ 2m & \text{dla } m \leq u \end{cases} \quad \text{dla: } \begin{cases} m = \left\lfloor \log_8 \left(\frac{\frac{7}{d} l_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right) \right\rfloor \\ u = \left\lfloor \log_8 \left(\frac{\frac{7}{2d} w_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right) \right\rfloor \end{cases}$$

Przetestujmy teraz nasz algorytm. Biurowa kartka papieru w formacie A4 ma standardowo wymiary: $297 \times 210 \times 0,1$ mm. Podstawiając je odpowiednio do ustalonych wzorów, sprawdzimy, ile razy można zgiąć kartkę wzdłuż długości i szerokości (pamiętając jednocześnie, że długość w naszym problemie to krawędź, w poprzek której wykonujemy pierwsze zagięcie).

$$\text{dla } l_0 = 297 \text{ mm i } w_0 = 210 \text{ mm}$$

$$m = \lfloor 4,27 \rfloor = 4$$

$$u = \lfloor 3,77 \rfloor = 3$$

$$m > u \Rightarrow \boxed{n = 2u + 1 = 7}$$

dla $l_0 = 210$ mm i $w_0 = 297$ mm

$$m = \lfloor 4.103 \rfloor = 4$$

$$u = \lfloor 3.937 \rfloor = 3$$

$$m > u \Rightarrow \boxed{n = 2u + 1 = 7}$$

Widać, że kartkę papieru w formacie A4 można zgiąć co najwyżej 7 razy, co zgadza się z popularną miejską legendą.

Po przeprowadzeniu podobnych obliczeń dla kartki A3 o tej samej grubości ($297 \times 420 \times 0,1$ mm) okazało się, że bardziej opłacalnym jest przyjąć $l_0 = 297$ mm i $w_0 = 420$ mm (krótsza krawędź jest zginana jako pierwsza), co daje nam maksymalną liczbę zgięć równą 8.

Papierem na Księżyc. Dochodzimy do miejsca, w którym spełnimy obietnicę z tytułu. Spróbujmy ustalić wymiary kartki papieru o grubości $d = 0,1$ mm potrzebnej do zbudowania połączenia między powierzchniami Ziemi i Księżyca wyłącznie przez wielokrotne zginanie jej wpół. Średnia odległość między powierzchniami Ziemi i Księżyca wynosi około 376 291 km. Policzymy, ile razy należałoby złożyć naszą kartkę papieru, aby osiągnąć do Księżyca.

$$D_n = S_{zk} = 376\,291 \text{ km} = 376\,291 \cdot 10^6 \text{ mm} = 0,1 \text{ mm} \cdot 2^n,$$

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{376\,291 \cdot 10^6 \text{ mm}}{0,1 \text{ mm}} \right) \right\rceil = \lceil 41,775 \rceil = 42.$$

$n = 42$ jest liczbą parzystą, więc mamy przypadek $n = 2m$, czyli nastąpi taka sama liczba zgięć wzdłuż długości i szerokości $m = u = 21$. Kontynuujemy obliczenia, przywołując wzory na m i u , i otrzymujemy wymiary ($l_0 \times w_0$):

$$2546,85 \text{ au} \times 5093,7 \text{ au}$$

(1 au $\approx 150 \cdot 10^6$ km).

Układ Słoneczny. Chcąc wyobrazić sobie rozmiar naszej kartki, możemy porównać ją z rozmiarami Układu Słonecznego, którego promień szacowany jest na około $R_s = 4\,498\,252\,900$ km (średnia odległość Neptuna od Słońca). Porównajmy pole powierzchni kartki P_k z powierzchnią Układu Słonecznego P_s (a raczej polem powierzchni koła o krawędzi zarysowanej przez uśrednioną orbitę Neptuna):

$$P_k = l_0 \cdot w_0 = 2,903271 \cdot 10^{23} \text{ km}^2,$$

$$P_s = \pi R_s^2 = 6,356786 \cdot 10^{19} \text{ km}^2,$$

$$\frac{P_k}{P_s} = 4567,1995.$$

Przez fakt posiadania bez mała 4600-krotności powierzchni aktualnie zamieszkiwanego przez nas układu planetarnego oczywistym jest, że nasza kartka bez wątpienia zasługuje na miano megastruktury.

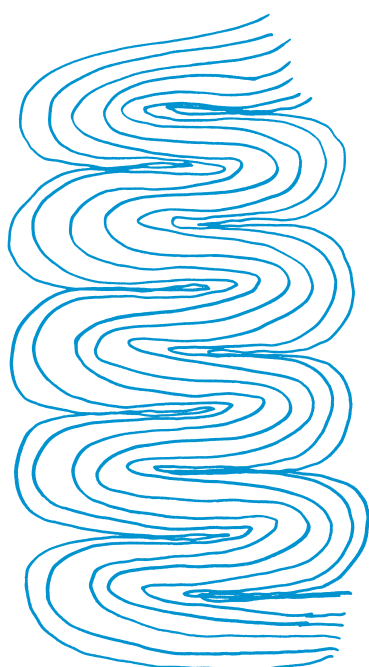
Dla zobrazowania skali wielkości naszej kartki możemy porównać ją z najodleglejszym od Ziemi obiektem wysłanym przez człowieka – sondą misji Voyager I (korzystając z danych na moment: 00:00 UTC 01.01.2025):

$$V_{v_I} = 16,9995 \frac{\text{km}}{\text{s}}, \quad R_{v_I} = 24\,798\,697\,389 \text{ km}, \quad t = \frac{\sqrt{\frac{P_k}{\pi}} - R_{v_I}}{V_{v_I}}.$$

Zakładając, że sonda będzie leciała ze stałą prędkością V_{v_I} – osiągnie punkt, w którym pole powierzchni $P_{v_I} = \pi R_{v_I}^2$ stycznego do niego koła (ze środkiem w Słońcu) będzie identyczne z polem naszej kartki papieru, w 2545 roku.

Alternatywy. Ostatecznie wartym nadmienia jest fakt, iż powyższe ustalenia poprawne są wyłącznie dla składania naprzemiennego (wzdłuż krawędzi \mathcal{L} i \mathcal{W}).

Analogiczną metodą Czytelnik może wyprowadzić wzór dla kolejnych złożeń równoległe do wyłącznie jednej, wybranej krawędzi kartki papieru. Tym sposobem ustalić można, na przykład, przewidywaną liczbę złożeń całej rolki papieru toaletowego.



Człowiek ukryty w genomie

W połowie lutego 2001 roku amerykański noblista, mikrobiolog, David Baltimore we wstępniaku do magazynu Nature wyznał: „Widziałem wiele ekscytujących odkryć z biologii w ciągu ostatnich 40 lat, jednak czułem ciarki na plecach, gdy czytałem artykuł opisujący zarys naszego genomu”.

Zapowiadał w ten sposób pracę, w której konsorcjum Human Genome Project opisywało wstępne wyniki sekwencjonowania ludzkiego DNA. Start projektu w 1990 roku ogłosił sam James Watson, który porównał zadanie rozszyfrowania informacji ukrytej w ludzkim DNA do misji lądowania człowieka na Księżycu.

Przez kilkanaście lat napięcie rosło, oczekiwania były olbrzymie, miało się przecież okazać, jak na poziomie cząsteczek realizowane jest powstanie człowieka. Jednym z ważniejszych parametrów, o którym dyskutowano, była liczba genów zakodowanych w naszym DNA. Wiadomo było już sporo o liczbie genów u innych organizmów. np. bakteria *Escherichia coli* ma ich około 4 tysięcy, maleńka roślina, rzodkiewnik pospolity – 25,5 tysiąca, a mierzący 1 mm nicien *Caenorhabditis elegans* około 20 tysięcy.

Dziś mogę fantazjować, że może tuż po ciarkach u noblisty pojawiły się krople potu, bowiem wstępny wynik był zadziwiający: ogłoszono, że genom ludzki koduje między 20 tysięcy a 30 tysięcy genów. Ta skromna liczba mogła podsuwać wątpliwości, czy w opisie funkcjonowania żywych komórek nie popełniono fundamentalnego błędu?

Tu muszę doprecyzować, co w tej wyliczance oznacza słowo „gen”. Definiowano go jako fragment DNA, w którym zakodowana jest informacja o budowie białka. Białko zaś to cząsteczka, która się składa z łańcucha nie mniej niż 100 aminokwasów.

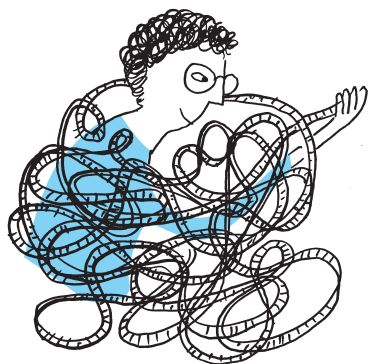
Analiza całego genomu ludzkiego wykazała, że sekwencje, które kodują białka, to jedynie 1 do 2% całości. Powstało zatem pytanie: co znajduje się w pozostałej „ciemnej materii” (*dark genome*)?

Po ponad 20 latach wiemy więcej, choć wiele pozostaje do wyjaśnienia.

Najwięcej jest reliktyw z przeszłości, fragmentów samorzutnie kopiujących się, pradawnych wirusów i innych aktywnych elementów, które są skutkiem procesów zachodzących w DNA. Dużą część genomu stanowią sekwencje kodujące różne typy RNA, cząsteczek, które mają fundamentalne funkcje dla życia komórki. Biorą udział w tworzeniu struktur niezbędnych do produkcji białek. Wiele z nich, w tym bardzo krótkie, reguluje działanie genów: ilość produkowanych białek, to, jak długo są produkowane i jak szybko są degradowane. Nie można też zapomnieć o fragmentach pełniących funkcje strukturalne – dzięki niektórym bardzo długie cząsteczki DNA mogą być pakowane do struktur odpornych na uszkodzenia mechaniczne, co jest krytyczne w trakcie podziałów komórkowych; inne sprawiają, że cząsteczki DNA nie ulegają skracaniu; a dzięki innym DNA może być duplikowany.

Czas eksploracji jeszcze się nie skończył. John Prensner, neuroonkolog dziecięcy z Bostonu po bezskutecznych, poszukiwaniach genów związanych z nowotworami u dzieci wrócił do analizy genomu, zmieniając kryteria wyszukiwania. Podstawą były sporadyczne informacje o istnieniu w komórkach cząsteczek będących łańcuchami aminokwasów krótszych niż 100. Prensner przyznaje, że było mu trudno uzyskać finansowanie dla badań nad takimi minibiałkami, gdyż uznawano je dotąd za komórkowe „śmieci”, szybko ulegające degradacji. Udało mu się jednak zgromadzić międzynarodowe grono, które podjęło się poszukiwania minibiałek. Dzięki analizie wielu prac badawczych i baz danych kanoniczna definicja „białko to więcej niż 100 aminokwasów” została w końcu podważona.

Okazało się, że spośród 7264 sekwencji, które mogłyby kodować minibiałka, około jedna czwarta jest aktywna, dzięki czemu powstaje około 3000 różnych minibiałek (jedna sekwencja DNA może kodować więcej niż jedno białko).



Jedno z nich, ASDURF, jest na przykład produkowane w nadmiarze w komórkach rdzeniaka zarodkowego, trudnego do zdiagnozowania nowotworu dziecięcego. Jego nadprodukcja wydłuża czas życia komórek nowotworowych. Inne badania wskazują na rolę mikrobiałek w rozwoju otyłości, raka trzustki i w chorobach metabolicznych.

Co zatem stanowi esencję „człowieka” na poziomie cząsteczek? Jako jedyny gatunek, który jest w stanie analizować własny genom, musimy wciąż zachować pokorę dla złożoności rozwiązań natury i cierpliwie szukać dalszych odpowiedzi. Bo przecież wiadomo było, że to nie może być proste. . .

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Odwzorowania addytywne i geometria

Franciszek HANSDORFER

Artykuł jest skrótem pracy z 45. edycji Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. Z pełną jej wersją można zapoznać się na stronie deltami.edu.pl. Autor chciałby bardzo podziękować dr. hab. Mariuszowi Skalbnie za opiekę merytoryczną.

Rozważmy zbiór

$$K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Do tego zbioru należą zatem liczby $1 + 2\sqrt{2}$ czy $\frac{2}{3} + \frac{1}{8}\sqrt{2}$. Oczywiście należą do niego wszystkie liczby wymierne (wystarczy wziąć $b = 0$), w tym liczby 0 i 1. Ponadto jeśli wezmę dowolne dwie liczby z K , to ich suma i różnica również należą do K . Tak samo jest z iloczynem, o czym przekonuje nas poniższa równość:

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}.$$

Operacja dzielenia też nie wyprowadza poza K , w czego uzasadnieniu pomaga szkolna sztuczka na pozbywanie się niewymierności z mianownika:

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}.$$

Strukturę, której elementy możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić z wyróżnionymi elementami 0 (którego dodanie nic nie zmienia) i 1 (mnożenie przez które nic nie zmienia), nazywamy *ciałem*. Ciałem jest zatem zbiór liczb rzeczywistych, wymiernych, lecz również opisany tu zbiór K .

Zdefiniujmy teraz funkcję $\sigma : K \rightarrow K$ wzorem:

$$\sigma(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}.$$

Dla $x \in K$ liczbę $\sigma(x)$ nazywa się często *sprzężeniem* x .

Przekształcenie σ w ten sposób zdefiniowane ma ciekawe własności. Zaczniemy od tego, że dobrze się ono zachowuje ze względu na dodawanie i mnożenie. Niech $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \sigma(x + y) &= \sigma(a + c + (b + d)\sqrt{2}) = a + c - (b + d)\sqrt{2} \\ &= a - b\sqrt{2} + c - d\sqrt{2} = \sigma(x) + \sigma(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(xy) &= \sigma((a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})) = \sigma(ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd) \\ &= \sigma((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}) = (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2} \\ &= (a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = \sigma(x)\sigma(y). \end{aligned}$$

Przedstawione tu własności pozwalają nazwać funkcję σ *automorfizmem* ciała K .

Pokazaliśmy, że σ jest *addytywna* i *multiplikatywna*. Co istotne, zachowuje ona elementy neutralne dodawania i mnożenia, czyli 0 i 1 – rzeczywiście, $\sigma(0) = 0$ oraz $\sigma(1) = 1$.

Chociaż σ jest bardzo *porządną* funkcją z algebraicznego punktu widzenia, to z analitycznego punktu widzenia już taka regularna nie jest. Wykażemy mianowicie, że σ nie jest ciągła w żadnym punkcie. Przypomnijmy najpierw definicję Heinego ciągłości funkcji:

f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Niech więc $x_0 = a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$.

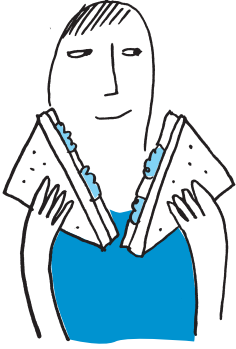
Definiujemy teraz ciąg $x_n = a + b\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})^n$. Ponieważ $|1 - \sqrt{2}| < 1$, więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + b\sqrt{2} = x_0.$$

Korzystając z własności funkcji σ , mamy:

$$\sigma(x_n) = \sigma(a + b\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})^n) = a - b\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})^n.$$

JAKA
PYSZNA
ANALIZA



Ponieważ $1 + \sqrt{2} > 1$, więc ciąg $(\sigma(x_n))$ jest rozbieżny. Zatem:

$$\sigma(x_n) \not\rightarrow \sigma(x_0).$$

Dowiedliśmy więc, że σ jest nieciągła w dowolnie wybranym punkcie $x_0 \in K$.

Spróbujemy teraz zbadać funkcję σ pod względem geometrycznym. W tym celu potrzebujemy odpowiednika funkcji σ zdefiniowanego na „płaszczyźnie”. Niech więc $F : K^2 \rightarrow K^2$ będzie dla $x, y \in K$ określone wzorem:

$$F(x, y) = (\sigma(x), \sigma(y)).$$

Tak zdefiniowane F ma bardzo ciekawe, paradoksalne wręcz, własności. Z jednej strony F jest bardzo nieregularne, bo wszędzie nieciągłe, co wynika z wyżej udowodnionej nieciągłości σ .

Z drugiej jednak strony F jest bardzo regularne, gdyż jest addytywne. Otóż dla $x_1, y_1, x_2, y_2 \in K$ mamy:

$$\begin{aligned} F((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\sigma(x_1 + x_2), \sigma(y_1 + y_2)) \\ &= (\sigma(x_1) + \sigma(x_2), \sigma(y_1) + \sigma(y_2)) = F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Analogicznie możemy uzasadnić, że dla dowolnych $\alpha, x_1, x_2 \in K$ zachodzi $F(\alpha \cdot (x_1, x_2)) = \sigma(\alpha) \cdot F(x_1, x_2)$.

Co dla nas najważniejsze, z geometrycznego punktu widzenia F zachowuje pewne podstawowe własności geometryczne. Po pierwsze, F zachowuje współliniowość punktów. Wynika to z faktu, że jeśli $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ i $Z = (z_1, z_2)$ są współliniowymi punktami z K^2 , to $X - Y = \alpha \cdot (X - Z)$ dla pewnej liczby $\alpha \in K$, a stąd $F(X) - F(Y) = \sigma(\alpha) \cdot (F(X) - F(Z))$. Dlatego obrazami prostych (w obcięciu do K^2) w przekształceniu F są proste. Ponieważ jednak funkcja σ może zmienić znak lub zamienić liczbę o module większym od 1 na taką o module mniejszym od 1 (np. dla $\alpha = 1 + \sqrt{2}$), obrazami odcinków nie są odcinki.

Ponadto F zachowuje **równość odległości**, czyli dla $X, Y, Z, T \in K^2$ mamy:

$$(1) \quad d(X, Y) = d(Z, T) \implies d(F(X), F(Y)) = d(F(Z), F(T)),$$

gdzie przez $d(\cdot, \cdot)$ oznaczamy euklidesową odległość na płaszczyźnie. Sprawdzenie jest proste. Niech $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$, $Z = (z_1, z_2)$, $T = (t_1, t_2)$. Ponieważ $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d((z_1, z_2), (t_1, t_2))$, więc

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = (t_1 - z_1)^2 + (t_2 - z_2)^2.$$

Do obu stron przykładamy funkcję σ :

$$(\sigma(y_1) - \sigma(x_1))^2 + (\sigma(y_2) - \sigma(x_2))^2 = (\sigma(t_1) - \sigma(z_1))^2 + (\sigma(t_2) - \sigma(z_2))^2.$$

Zatem

$$d(F(X), F(Y)) = d(F(Z), F(T)).$$

To, że F zachowuje równość odległości, nie oznacza jednak, że jest izometrią.

Na przykład dla punktów $P_1 = (1, 1 + \sqrt{2})$, $P_2 = (2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$,

$Q_1 = (-1, 1 + \sqrt{2})$, $Q_2 = (0, 2 + 2\sqrt{2})$ mamy $d(P_1, P_2) = d(Q_1, Q_2)$. Ale na

mocy (1) mamy też $d(F(P_1), F(P_2)) = d(F(Q_1), F(Q_2))$, jednakże, jak można zobaczyć na rysunku 1 (lub obliczyć), $d(P_1, P_2) \neq d(F(P_1), F(P_2))$.

Poza tym F zachowuje prostopadłość wektorów. Niech $X, Y, Z \in K^2$ i załóżmy, że $\sphericalangle YXZ = 90^\circ$, czyli $\langle X - Y, X - Z \rangle = 0$:

$$(x_1 - y_1)(x_1 - z_1) + (x_2 - y_2)(x_2 - z_2) = 0.$$

Po przyłożeniu funkcji σ do obu stron otrzymujemy:

$$(\sigma(x_1) - \sigma(y_1))(\sigma(x_1) - \sigma(z_1)) + (\sigma(x_2) - \sigma(y_2))(\sigma(x_2) - \sigma(z_2)) = \sigma(0) = 0,$$

czyli

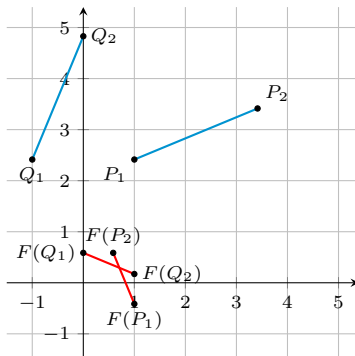
$$\sphericalangle F(Y)F(X)F(Z) = 90^\circ.$$

W ogólności przekształcenie F nie zachowuje jednak kątów między prostymi, co ilustruje rysunek 2.

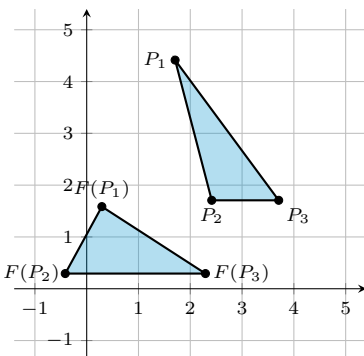
Przekształcenie F godzi w sobie sprzeczne natury: *dziką* naturę analityczną

(nigdzie nie jest ciągłe) i *ładną* naturę algebraiczno-geometryczną (jest

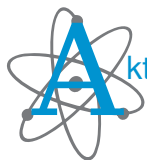
addytywne, zachowuje równość odległości i prostopadłość wektorów). Zachęcam Czytelnika do własnych badań nad jego własnościami!



Rys. 1

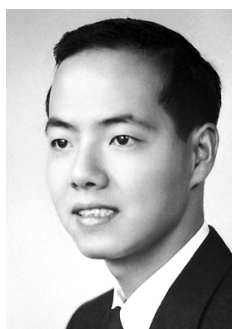


Rys. 2. Przekształcenie F może zamienić wierzchołki trójkąta ostrokątnego na rozwartokątnego. Na powyższym rysunku mamy $P_1 = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 3 + \sqrt{2})$, $P_2 = (1 + \sqrt{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_3 = (3 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$



Późny koniec XX wieku

Była wojna, więc nie chodził do zwykłej szkoły, ale uczył się z książek. Choć nigdy nie skończył liceum, został przyjęty na inżynierię chemiczną na uniwersytecie. Jednak nauczyciele, zauważywszy jego talent do fizyki, nakłonili go do zmiany kierunku. Po drugim roku został wysłany na studia doktoranckie do USA. Na University of Chicago pracował pod kierunkiem Enrico Fermiego – był jego jedynym doktorantem z fizyki teoretycznej. Fermi pracował z nim specyficzną metodą: kiedy nie rozumiał jakiegoś zagadnienia fizycznego, kazał mu przygotować dla siebie wykład na ten temat, a potem zasypywał go pytaniami. Po doktoracie sformułował hipotezę o niezachowaniu parzystości w oddziaływaniach cząstek elementarnych zwanych kaonami. Hipoteza ta po doświadczalnym potwierdzeniu doprowadziła go do Nagrody Nobla w wieku 31 lat.



Tsung-Dao Lee (1957)

Była wojna, jako sześciolatek musiał prawie rok czekać na łasce obcych ludzi, aż jego żydowskim rodzicom uda się wyjechać z hitlerowskich Niemiec i przejąć opiekę nad dziećmi. Wcześniej jego rodzinę próbowano deportować do Polski, ale nasz kraj właśnie zamknął granicę dla żydowskich uchodźców. Rodzice zdołali jednak wysłać go razem z bratem *Kindertransportem* do Wielkiej Brytanii. Na uniwersytecie studiował chemię, bo wydawała się w miarę pewną inwestycją w przyszłość, ale nauczyciele przekonali go, że po fizyce też można się utrzymać. Prowadził doświadczenia z technologią komunikacyjną, która dziś umożliwia łączność telefonii komórkowej. Myślał, że doświadczenia nie wychodziły, bo gnieźdzące się w antenie gołębie zanieczyszczały ją białym materiałem dielektrycznym. Jednak po usunięciu zanieczyszczeń antena nadal szumiała. Okazało się, że ten szum to mikrofalowe promieniowanie tła pochodzące z Wielkiego Wybuchu, a jego odkrycie warte jest Nagrody Nobla. Po odebraniu lauru z rąk szwedzkiego króla poleciał do Moskwy, aby przedstawić wykład noblowski naukowcom, którym sowieckie władze nie pozwalały opuszczać kraju.



Arno Penzias (1982).
Fotograf: Willy Pragher, CC BY 3.0 DE

Była wojna, gdy jako dwunastolatek wysadził w powietrze szafę w rodzinnym mieszkaniu, zaspokajając swoją ciekawość chemika-amatora. Pięć lat wcześniej zmarła jego matka, emigrantka z Polski. Ojciec, który uciekł z Białorusi po zwycięstwie bolszewików, oddał go do rodziny zastępczej. Do domu rodzinnego wrócił dopiero, gdy pojawiła się w nim macocha, dla której ojciec zmienił swoje i jego nazwisko na mniej słowiańskie. Kiedy jako początkujący fizyk otrzymał propozycję pracy nad teorią nadprzewodnictwa, nie wiedział, że celu tego nie udało się osiągnąć Einsteinowi, Bohrowi, Heisenbergowi, Pauliemu i Feynmanowi. Nie przeszkodziło mu to w sformułowaniu tej teorii, zwanej dziś od inicjałów jej twórców teorią BCS, za co otrzymał Nagrodę Nobla. W późniejszym wieku porzucił fizykę na rzecz neurobiologii i opracował używaną do dziś teorię plastyczności synaptycznej. Jego nazwiskiem został obdarzony jeden z głównych bohaterów serialu *The Big Bang Theory*.



Leon Cooper (1972)

Tsung-Dao Lee, Arno Penzias i Leon Cooper mogą być śmiało określani jako naukowcy, którzy uformowali ważne elementy dwudziestowiecznej fizyki. Ich losy są zawężone z ciemnymi stronami tego stulecia, a ich sukcesy zaliczają się do największych triumfów ludzkiego umysłu odkrywającego tajemnice przyrody. Ich odejście w 2024 roku, podobnie jak Petera Higgsa czy J.D. Bjorkena, symbolizuje koniec pewnej epoki w nauce. Niektórzy narzekają, że wraz z odejściem tych uczonych minął złoty wiek nauki, który przyniósł osiągnięcia naukowe, z jakimi nie mogą równać się osiągnięcia ostatnich dekad. Niewątpliwie jednak był to okres, w którym wielkie odkrycia były dokonywane w małych zespołach lub zgoła pojedynczo. I ta wizja samotnego naukowca-geniusza została z nami zdecydowanie na dłużej.

Krzysztof TURZYŃSKI

Trzecie prawo Keplera i analiza wymiarowa

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Johannes Kepler (1571–1630)

Najogólniejsza forma trzeciego prawa Keplera wyraża się wzorem $r_{\text{mean}}^3 \propto T^2$ (\propto – „proporcjonalne do”), gdzie T jest czasem obiegu planety po orbicie eliptycznej, a r_{mean} jest „średnią odległością” planety od Słońca.

Kepler obsesyjnie poszukiwał pitagorejskich harmonii w Układzie Słonecznym. Tak pisze o odkryciu swojego trzeciego prawa w 1618 roku:

Lecz teraz, odkąd osiemnaście miesięcy temu [zajaśniało] pierwsze światło, trzy miesiące temu jasny dzień, a kilka dni temu rozblysło pełnym blaskiem słońce mych cudownych spekulacji – nic mnie już nie powstrzyma. Oddaję się swobodnie świętemu szaleństwu. „Harmonices Mundi”, wg Jerzy Kierul: „Kepler”, PIW, 2007.

Drogi, którymi ludzie dochodzą do poznania niebios, wydają mi się nie mniej godne podziwu niż same niebios.

(Johannes Kepler)

Celem tego artykułu jest przybliżenie Czytelnikowi problemów związanych ze sformulowaniem przez Keplera jego trzeciego prawa, *wiążącego czas obiegu planety po orbicie eliptycznej z parametrami opisującymi jej wymiary*, oraz pokazanie, jak analiza wymiarowa, która wyrosła z próby rozszerzenia na fizykę greckich koncepcji podobieństwa geometrycznego, stosunku i proporcji, może pomóc w *odkryciu tego prawa fizycznego* w jego współczesnym sformułowaniu. Na koniec rozważymy główne założenia metody analizy wymiarowej, jej podstawy metafizyczne oraz zalety i ograniczenia.

Postawmy się w sytuacji, w której niewiele wiemy i poszukujemy powyższego związku w postaci równania algebraicznego postaci $f(T_o, r_{\text{mean}}) = \text{const}$, gdzie T_o oznacza czas obiegu planety po elipsie, natomiast r_{mean} oznacza jedną ze średnich odległości planety od Słońca, np. średnią arytmetyczną czy średnią geometryczną z obu półosi, a , b , elipsy lub jeszcze inną „średnią odległość”.

Postępując ścieżką metody *analizy wymiarowej*, musimy najpierw dociec, jakie wielkości są ważne w naszym zagadnieniu. Rozsądnym jest przyjęcie, że ważnymi parametrami są czas obiegu planety po elipsie T_o , wymiary półosi elipsy a , b , masa planety m , masa Słońca M_s oraz stała grawitacji G . Ruch odbywa się w centralnym polu grawitacyjnym, $\vec{F} = -G \frac{M_s m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$.

Oznaczmy przez $[X]$ jednostkę, w jakiej mierzymy wielkość X . Mamy

$$(1) \quad [a] = L, [b] = L, [m] = M, [M_s] = M, [T_o] = T, [G] = \frac{L^3}{MT^2},$$

gdzie L , M , T są pewnymi jednostkami *wielkości fundamentalnych*: długości, masy i czasu, w mechanice Newtona. Tutaj stała grawitacji G jest *wielkością pochodną*, mierzona w jednostce będącej kombinacją potęg jednostek wielkości fundamentalnych. Rozwiązanie naszego problemu powinno być zawarte w relacji postaci

$$(2) \quad f(a, b, m, M_s, T_o, G) = 0,$$

w której zmiennymi są liczby dodatnie wyrażające długość, masę, czas i stałą grawitacji, mierzone w jednostkach danych w (1).

Załóżmy, że powyższa relacja jest *niezmiennicza* ze względu na zmianę jednostek, z L, M, T na jednostki L', M', T' postaci $L' = \alpha L, M' = \beta M, T' = \gamma T$, gdzie α, β, γ są dowolnymi liczbami dodatnimi. Oznacza to, że w jednostkach L', M', T' relacja

(2) ma tę samą postać $f(a', b', m', M'_s, T'_o, G') = 0$. Mamy zatem

$$(3) \quad f\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}, \frac{m}{\beta}, \frac{M_s}{\beta}, \frac{T_o}{\gamma}, \frac{G\gamma^2\beta}{\alpha^3}\right) = 0.$$

Wybierając $\alpha = a$, $\beta = M_s$, $\gamma = T_o$ i oznaczając

$$\Pi_1 = \frac{b}{a}, \quad \Pi_2 = \frac{m}{M_s}, \quad \Pi_3 = \frac{GM_s T_o^2}{a^3},$$

otrzymujemy

$$(4) \quad f(1, \Pi_1, \Pi_2, 1, 1, \Pi_3) = f\left(1, \frac{b}{a}, \frac{m}{M_s}, 1, 1, \frac{GM_s T_o^2}{a^3}\right) = 0,$$

gdzie teraz Π_1, Π_2, Π_3 są wielkościami *bezwymiarowymi*. Przyjmijmy, że równanie (4) można rozwiązać ze względu na Π_3 , czyli wyrazić tę zmienną poprzez dwie pozostałe przy użyciu pewnej funkcji ψ :

$$(5) \quad \frac{GM_s T_o^2}{a^3} = \psi(\Pi_1, \Pi_2) = \psi\left(\frac{b}{a}, \frac{m}{M_s}\right).$$

Mając do dyspozycji wzór (5), Kepler wiedziałby, że jest na dobrym tropie. Natychmiast zauważyłby, że ponieważ orbity eliptyczne wszystkich znanych mu planet Układu Słonecznego są zbliżone do okręgów, a masy planet są zanedbywalne w porównaniu z masą Słońca, więc prawie strony wzoru dla poszczególnych planet powinny być liczbami niewiele oscylującymi wokół wartości $\psi(1, 0)$. Warto przypomnieć, że Mikołaj Kopernik, idąc za tradycją starożytnych, traktował orbity planet jako okręgi. Nie mógłby zresztą odkryć elipsy, ponieważ nie dysponował wystarczająco dokładnymi obserwacjami. Kepler miał już dokładniejsze dane, oparte na obserwacjach Tycho Brahego. W obliczeniach prowadzących do oryginalnego keplerowskiego sformułowania trzeciego prawa, z jedną stałą dla wszystkich planet, Merkury sprawiał mu kłopot ze względu na swój mimośród, który jest od jednego do dwóch rzędów większy niż mimośrodów innych znanych wtedy planet. Kepler wykluczył więc go z rozważań. Czy dobrze zrobił?

Okazało się, że nie, ale Kepler nie mógł jeszcze skorzystać z mechaniki Newtona, powstała dopiero później. Jej konsekwencją jest piękny wzór:

$$(6) \quad \frac{GM_s T_o^2}{r_{\text{mean}}^3} = \frac{4\pi^2}{(1 + \frac{m}{M_s})(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

będący Newtonowską wersją trzeciego prawa Keplera. Przypatrzmy mu się dokładniej. Zawiera on jawnie wszystkie istotne dla astronomów parametry dynamiczne i geometryczne: stałą grawitacji G , masę Słońca M_s , czas obiegu planety po orbicie T_o i jedną z naturalnych średnich z obu półosi planety, średnią geometryczną $r_{\text{mean}} = \sqrt{ab}$, określającą średnią odległość planety od Słońca – po lewej stronie równania oraz stosunek masy planety do masy Słońca $\frac{m}{M_s}$ i mimośród planety $e = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$ określający jej kształt – po prawej stronie równania.

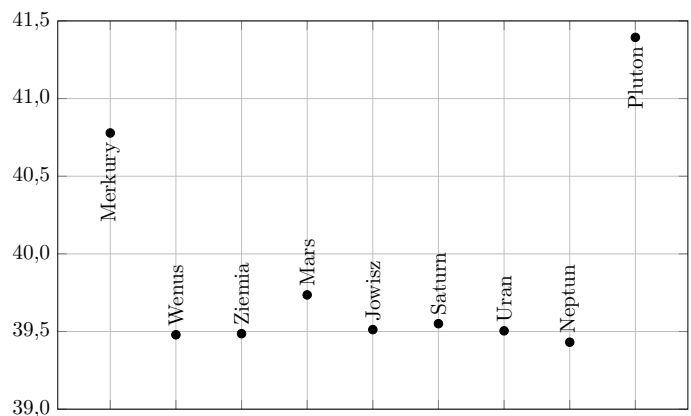
W przypadku, gdy masy planet są zanedbywalne w porównaniu z masą Słońca, a ich mimośrodów są bardzo małe, to w granicy $\frac{m}{M_s} \rightarrow 0$, $e \rightarrow 0$ prawa strona jest wtedy równa $4\pi^2$, czyli z dokładnością do czterech miejsc po przecinku 39,4784.

Sprawdźmy teorię Newtona. W tym celu należy popatrzeć w niebo i mierzyć. Napięcie rośnie, gdyż jej niezgodność z trzecim prawem Keplera, które dość dokładnie zgadza się z obserwacjami astronomicznymi, zaprzeczalaby jej uniwersalności. Mamy następujące

dane astronomiczne (za średni promień orbity przyjmujemy tu $r_{\text{mean}} = \sqrt{ab}$):

Ciało niebieskie	Okres obiegu w latach	Średni promień orbity w km $\times 10^{-6}$	Wielokrotność masy Ziemi	Mimośród orbity
Słońce	—	—	332 488,0	—
Merkury	0,241	57,3	0,0543	0,2056
Wenus	0,615	108,2	0,8136	0,0068
Ziemia	1,000	149,6	1,0000	0,0167
Mars	1,881	227,4	0,1069	0,0934
Jowisz	11,863	777,9	318,35	0,0484
Saturn	29,447	1425,7	95,3	0,0539
Uran	84,017	2869,0	14,58	0,0473
Neptun	164,791	4498,3	17,26	0,0086
Pluton	248,021	5812,8	< 0,1	0,2488

Stąd otrzymujemy interesujący nas diagram pokazujący wartości $\frac{GM_s T_o^2}{r_{\text{mean}}^3}$ dla kolejnych ciał Układu Słonecznego.

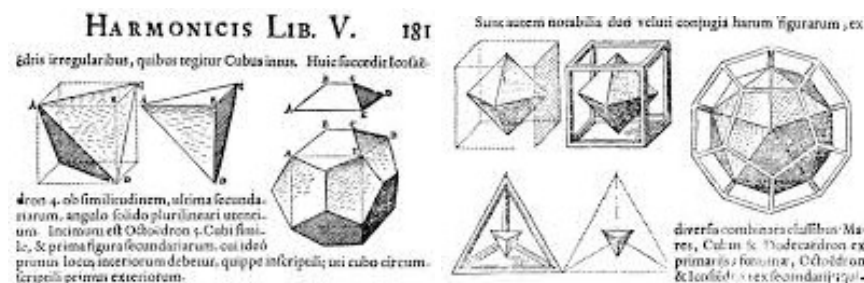


Przyglądając się powyższemu diagramowi, widzimy, że przeprowadzone obliczenia rzeczywiście potwierdzają teorię Newtona. Większe odchylenia dla Merkurego i Plutona od stałej granicznej $4\pi^2$ wynikają z ich dużych mimośrów.

Możemy teraz powrócić do wzoru (5). Dokonując prostego rachunku na wzorze (6), możemy napisać wzór (5) w ostatecznej formie jako

$$(7) \quad \frac{GM_s T_o^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{1 + \frac{m}{M_s}}.$$

Wzory (6) i (7) są równoważne i oba reprezentują trzecie prawo Keplera. Ze wzorów (5) i (7) wynika, że stała $\psi(1, 0)$ jest równa $4\pi^2$.



Pomysły Keplera z wielościanami



Układ planet i harmonie w muzyce

Prowadzone są dyskusje, jak rozszyfrować oryginalne sformułowanie trzeciego prawa Keplera.

Jest jednak całkowicie pewne i dokładne, że stosunek czasów okresowych dowolnych dwóch planet jest dokładnie stosunkiem potęgi 3/2 średnich odległości, to jest samych kul; pod warunkiem jednak, że średnia arytmetyczna obu średnic orbity eliptycznej będzie nieco mniejsza niż dłuższa średnica. „Harmonices Mundi”

Średnia odległość planety od Słońca względem zmiennej p wyraża się poprzez całkę

$$r_p = \frac{1}{p} \int r(p) dp,$$

gdzie r jest promieniem wodzącym planety po orbicie eliptycznej.

Na przykład średnie mierzone względem czasu (t), długości łuku (s) i kąta obrotu (θ) dla ruchu po okręgu z centrum pola sił w jego centrum są równe sobie (równe promieniowi okręgu), natomiast dla elipsy o półosiach a , b różnią się od siebie, $r_t = a(1 + e^2/2)$, $r_s = a$, $r_\theta = b$, [Stein, 1977].

Gwoli ścisłości historycznej należy powiedzieć, że nie ma pewności co do tego, jak Kepler rozumiał swoje trzecie prawo, gdyż w „Harmonices Mundi” nie określa on w jasny sposób, co rozumie przez „średnią odległość”, a zgodność jego oryginalnego trzeciego prawa z jego pomiarami orbitalnymi ruchu planet dotyczyła tylko orbit o bardzo małych mimośrodkach. Jak wspomnieliśmy, Merkury sprawiał mu kłopot, podobnie jak później wielu innym [Dembny, 2023]. Oryginalne sformułowanie Keplera nie mogło być sformulowaniem (7), gdyż nie występuje w nim mimośrodek, natomiast w zasadzie mogło być sformulowaniem (6). W artykule [Vijaya, 2019] można znaleźć wnikliwą rekonstrukcję rozumowania Keplera, prowadzącą do propozycji oryginalnej keplerowskiej „średniej odległości”.

Oczywiście Kepler nie wiedział jeszcze nic o Uranie i Plutonie. (Pluton został wykreślony z listy planet przez Międzynarodową Unię Astronomiczną, IAU, bez zgodnego poparcia społeczności, nie tylko astronomów, w 2006 roku).

Krótkie podsumowanie metody analizy wymiarowej. W rozważanym powyżej zagadnieniu najpierw wyodrębniliśmy *istotne* dla jego rozwiązania wielkości fizyczne. Następnie *przyjeliśmy* długość, masę i czas jako wielkości fundamentalne, a stałą grawitacji jako wielkość pochodną, dającą się przedstawić jako iloczyn potęg wielkości fundamentalnych. Dalej *postulowaliśmy* istnienie pewnej relacji między istotnymi wielkościami, *niezmienniczej* ze względu na skalowanie. Korzystając z niezmienniczości tej relacji, otrzymaliśmy, poprzez odpowiednie skalowanie, relację wiążącą ze sobą trzy bezwymiarowe wielkości. Relacja ta zawierała w sobie trzecie prawo Keplera. *Matematyczne uzasadnienie* przeprowadzonych operacji jest zawarte w najważniejszym twierdzeniu metody analizy wymiarowej, tzw. **Twierdzeniu II**, [Barenblatt, 2003], [Birkhoff, 1960], [Cantwell, 2002].

Powyższy przykład pokazuje zarówno siłę, jak i pewne ograniczenia analizy wymiarowej. O sile tej metody świadczy to, że przy jej pomocy wyprowadziliśmy trzecie prawo Keplera, niewiele wiedząc o fizyce zagadnienia. Metoda ta pozwala znaleźć prawidłową odpowiedź w rozmaitych sytuacjach, gdy nie mamy wielu danych. Potrzebna jest natomiast świadomość pozwalająca założyć czy zgadnąć, od jakich wielkości ta odpowiedź może zależeć. Zauważmy, że gdybyśmy w definicji Π_3 użyli masy planety, a nie masy Słońca, to obliczenia dla lewej strony wzoru (6) byłyby rozstrzelone. Sama analiza wymiarowa nie podpowiada, który wybór, M_s czy m , jest właściwy. Potrzebna zatem jest wiedza i intuicja fizyczna. Ten fakt świadczy o pewnym ograniczeniu analizy wymiarowej.

We wstępie do monografii [Barenblatt, 2003] (patrz też uzupełniający materiał filmowy) przedstawiony jest przykład pokazujący, jak w rękach takich uczonych jak Geoffrey I. Taylor i John von Neumann analiza wymiarowa pozwoliła oszacować mechaniczny efekt eksplozji atomowej. Był rok 1940 i była to bardzo cenna informacja dla celów wojennych. Ciekawe przykłady zastosowań analizy wymiarowej w matematyce i fizyce są przytoczone w artykule [Wójcik, 2024].

Ogólne uwagi o analizie wymiarowej w fizyce

Poniżej przedstawiamy kilka ogólnych uwag dotyczących analizy wymiarowej w fizyce, w szerszym kontekście modelowania matematycznego.

W fizyce nie ma uniwersalnych fundamentalnych wielkości, są one sprawą wygody i konwencji, nawet w danej teorii fizycznej. Przyjmowane w mechanice newtonowskiej długość (L), masa (M) i czas (T) jako wielkości fundamentalne to też tylko wybór. Sam Newton wolał wybrać pęd (P), siłę (F) i prędkość (V). Przy takim wyborze długość, masa i czas są wielkościami pochodnymi, z $L = PF^{-1}V$, $M = PV^{-1}$ i $T = PF^{-1}$. Zwróćmy też uwagę, że w układzie SI jednostki masy, długości i czasu są

zdefiniowane w kategoriach konkretnych wielkości działania, prędkości i częstości, które wtedy powinniśmy przyjąć jako wielkości podstawowe [Grozier, 2020].

Zakłada się, że w fizyce wszystkie prawa powinny być niezależne od wyboru jednostek, czyli móc być wyrażone w postaci bezwymiarowej.

Nie wchodzimy tu w głębsze rozważania dotyczące tego *metafizycznego założenia* (jest ono dyskutowane np. w [Birkhoff, 1960], [Grozier, 2020]). W fizyce pozorna „oczywistość” danego założenia nie może być dowodem na jego prawdziwość czy uniwersalność. Newtonowska niezależność czasu i przestrzeni to przykład pozornie oczywistego założenia. Już Leibniz się z tym założeniem nie zgadzał, ale trzeba było długo czekać, aby potwierdzić, że tego założenia nie można przyjąć jako uniwersalnej prawdy o rzeczywistości fizycznej.

W swoim magnum opus James Clerk Maxwell napisał: *Równania, do których dochodzimy, muszą być takie,*

aby osoba dowolnego narodu, zastępując różne symbole wartościami liczbowymi wielkości mierzonych w jego własnych jednostkach narodowych, uzyskała prawdziwy wynik [Maxwell, „Treatise” (1873), art. 2]. Wcześniej, w 1822 roku, zwrócił też na ten wymóg uwagę Joseph Fourier w „Théorie Analytique de la Chaleur”. Fourier jako pierwszy stwierdził, że istnieją pewne „jednostki podstawowe”, w kategoriach których każda wielkość fizyczna ma pewne „wymiały” możliwe do zapisania jako wykładniki. Jeszcze wcześniej Galileusz i Newton posługiwali się elementami analizy wymiarowej w pewnych rozumowaniach [Birkhoff, 1960].

Niezależność praw fizyki od wyboru jednostek to inaczej ich niezmienniczość ze względu na grupę transformacji skalowania. Wiemy, że np. równania mechaniki Newtona są też niezmiennicze ze względu na grupę transformacji Galileusza. Grupy transformacji, względem których dane równanie jest niezmiennicze, nazywamy grupami symetrii tego równania [Cantwell, 2002], [Łukaszewicz, 2021]. Analiza wymiarowa jest tylko częścią teorii symetrii równań (zarówno algebraicznych, jak i różniczkowych), wyrażających prawa fizyki w ramach rozmaitych jej modeli

(np. mechaniki klasycznej, hydrodynamiki, mechaniki kwantowej). Symetrie są niezwykle ważne w całej fizyce, są ściśle związane z zasadą najmniejszego działania i prawami zachowania.

- G. I. Barenblatt, *Scaling*, CUP, 2003.
<https://www.youtube.com/watch?v=wr-e9rGWx0c>
- G. Birkhoff, *Hydrodynamics. A Study in Logic, Fact and Similitude*, Princeton University Press, 1960.
- B. Cantwell, *Introduction to Symmetry Analysis*, CUP, 2002.
- M. Dembny, I. Palusiński, G. Łukaszewicz, *Uran, Neptun i Wulkan – trzy planety, z których jedna nigdy nie istniała*, cz. III, Δ_{23}^{11} .
- J. Grozier, *Should physical laws be unit-invariant?*, „Studies in the history and philosophy of science” Part A, Vol. 80 (2020), str. 9–18.
- Gopi Krishna Vijaya, *Original form of Kepler’s Third Law and its misapplication in Propositions XXXII-XXXVII in Newton’s Principia (Book I)*, „Heliyon” 5 (2019), DOI: 10.1016/j.heliyon.2019.e01274.
- G. Łukaszewicz, *Równania różniczkowe i geometria, II*, Δ_{21}^7 .
- Sherman K. Stein, „Mean Distance” in *Kepler’s Third Law*, „Mathematics Magazine”, Vol. 50, no. 3, 160–162 (1977).
- A. Wójcik, *Czy metr może być kwadratowy?*, Δ_{24}^5 .

Co nieco o energii

Ludwik LEHMAN

Energia to kluczowe pojęcie nie tylko w fizyce, lecz także w innych naukach przyrodniczych. Jednak bardzo trudno znaleźć w miarę precyzyjną definicję energii. Z jednej strony to nie dziwi. Podstawowe pojęcia są do zdefiniowania najtrudniejsze. *Co to jest czas? Kiedy nikt mnie nie pyta, wiem. Ale kiedy chcę wytłumaczyć komuś, kto o to pyta, już nie wiem.* To stwierdzenie św. Augustyna dobrze pokazuje, na czym polega dylemat operowania podstawowymi pojęciami. Jednak patrząc z drugiej strony, potrzebujemy odpowiednich nazw oraz ich choćby roboczych, intuicyjnych definicji. *W fizyce nazwy pomagają wytworzyć stan umysłu, w jakim postrzegamy pojęcie fizyczne. Dobra nazwa wywołuje w umyśle obraz, który wypukla najważniejsze własności pojęcia i tym samym, w sposób podświadomy, intuicyjny pomaga zapoczątkować owocne badania. Zła nazwa może wytworzyć blokadę umysłową, która przeszkadza w prowadzeniu badań.* Tak trafnie napisał Kip S. Thorne w książce „Czarne dziury i krzywizny czasu”. Gdy zamienimy w tym cytacie słowo „nazwa” na „definicja pojęcia” – otrzymamy równie trafne spostrzeżenie.

Podręczniki akademickie raczej unikają mierzenia się z „intuicyjną” definicją energii, zaczynając od operacyjnych definicji energii kinetycznej, potencjalnej etc. Na przykład tak robią Kittel, Knight i Ruderman w „Mechanice” (część tzw. kursu berkeleyjskiego). Słynne „Feynmana wykłady z fizyki” w podrozdziale *Co to jest energia?* oferują historyjkę o Piekielnym Piotrusiu i jego klockach oraz podsumowanie: *fizyka współczesna nie mówi właściwie, czym jest energia.* Halliday, Resnick i Walker w „Podstawach Fizyki” (w wydaniu z 2012 roku) piszą tylko: *Termin energia ma w rzeczywistości tak szerokie znaczenie, że trudno jest podać jego klarowną definicję.* Następnie przechodzą do operacyjnego wprowadzania rodzajów energii. Hasło *energia* w „Słowniku fizycznym” (Wiedza Powszechna, 1992) rozpoczyna się następująco: *uniwersalna wielkość fizyczna, nadająca się do opisu wszelkiego rodzaju procesów i oddziaływań występujących w przyrodzie. Najistotniejszą cechą e. jest to, że podlega ona zasadzie zachowania.*



E. jest funkcją stanu układu fizycznego. Wreszcie Wikipedia (dostęp 20.11.2024) podaje: Energia (gr. ενεργεια energieia od έργον ergon „praca”) – skalarna wielkość fizyczna charakteryzująca stan układu fizycznego (materii) jako jego zdolność do wykonania pracy.

Właśnie tak – jako zdolność do wykonania pracy – najczęściej określa się energię na poziomie podstawowym. Niestety taka definicja cierpi na schorzenie przypominające błędne koło. Podstawowym operacyjnym określeniem energii jest wzór obowiązujący w mechanice klasycznej i w szczególnej teorii względności (podajemy go na poziomie podstawowym):

$$(1) \quad \Delta E = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}.$$

Przyrost energii ciała (układu ciał) jest równy iloczynowi skalarnemu siły działającej na to ciało i przemieszczenia (punktu przyłożenia siły). Właśnie iloczyn po prawej stronie nazywamy pracą. Przyrost energii ciała jest równy wykonanej nad tym ciałem pracy. Z kolei sama energia to zdolność do wykonania pracy. Doprawdy niewielki jest pożytek z takiego definiowania, najpierw W przez E , a zaraz potem E przez W .

Żeby ciało mogło wykonać pracę, musi być zdolne działać siłą. Siła – przypomnijmy – jest miarą oddziaływania. Pojęcie energii służy do alternatywnego opisu oddziaływania. Każde oddziaływanie można opisać za pomocą sił lub przekazu energii. Zatem energię lepiej byłoby określić następująco: **energia ciała jest miarą jego zdolności do oddziaływań**. Taka definicja dobrze się sprawdza przy zderzeniach cząstek (nie tylko) elementarnych. Wtedy obserwujemy cząstki powstające w wyniku oddziaływań. Właśnie energia zderzających się cząstek (w układzie środka masy) narzuca ograniczenia na to, jakie produkty mogą w ten sposób powstać. Można ją zatem interpretować jako maksymalną zdolność do oddziaływań.

Określając energię jako miarę zdolności do oddziaływania, usuwamy wspomniane wyżej zapętlenie. Jednak pojawia się problem. Czy zdolność do oddziaływań może być ujemna? Przecież energia potencjalna może być ujemna. Właśnie teraz trzeba przypomnieć znaną, ale rzadko przypominaną prawdę: energia realnych obiektów fizycznych jest zawsze dodatnia. Wyraźnie wynika to z najsłynniejszego wzoru nauk ścisłych:

$$(2) \quad E = mc^2.$$

Wzór ten określa energię wewnętrzną – znacznie częściej zwaną spoczynkową – każdego ciała. Ta zależność pozwala obliczyć energię całkowitą każdego nieoddziałującego z otoczeniem ciała w układzie jego środka masy. Dotyczy to również układów ciał (każde ciało niebędące cząstką elementarną jest de facto układem ciał). Zatem energia potencjalna oddziaływania składników układu jest tu wliczona.

Zwróćmy też uwagę na to, że zgodnie ze wzorem (2) energia całkowita jest określona jednoznacznie. W szczególnej teorii względności energia i pęd tworzą tzw. czterowektor energii-pędu, a wzór (2) określa jego niezmienniczą długość. Warto pamiętać o tym bliskim związku energii i pędu również w fizyce newtonowskiej, uniknie się wtedy wielu nieporozumień. Wzór (1) warto stosować łącznie z równaniem określającym zmianę pędu:

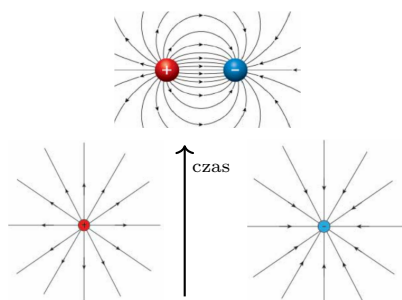
$$(3) \quad \Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t.$$

Z równań (1) i (3) bezpośrednio wynika także zasada zachowania energii i pędu. Doprawdy wielkie bogactwo treści kryją w sobie dwa tak niepozorne i proste wzory! Jak zatem pogodzić ze sobą możliwość dowolnego ustalenia wartości energii potencjalnej z bezwzględną wartością energii wynikającą z wzoru Einsteina (2)? Rozpatrzmy to na przykładzie energii elektrycznej. Każdy ładunek jest źródłem pola elektrycznego, które jest realnym obiektem fizycznym istniejącym również bez towarzystwa ładunków, np. w fali elektromagnetycznej. Pole to ma zawsze energię dodatnią. Przyjrzyjmy się dwóm przeciwnym punktowym ładunkom znajdującym się początkowo nieskończenie daleko od siebie (rys. 1).

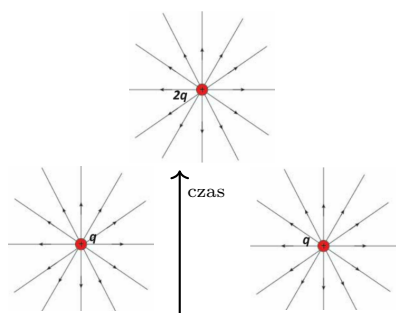
Podobne błędne koło pojawia się również w opisie przemian termodynamicznych. Jednak ze względu na niemożliwość obliczenia przyrostów energii w zderzeniach wszystkich cząstek wprowadzamy makroskopową wielkość zwaną przekazanym ciepłem.

Nie zaglądamy na razie pod horyzont czarnych dziur i do próżni kwantowej, bo to zbyt nowa fizyka.

Patrz tekst *Energia wewnętrzna czy spoczynkowa, Δ_{24}* .



Rys. 1



Rys. 2

Energia pola ładunku punktowego okazuje się nieskończenie wielka. Ten problem rozwiązuje się w kwantowej teorii pola dzięki tzw. procedurze renormalizacji.

Jeśli poczekamy dostatecznie długo, zobaczymy, że ładunki zbliżają się do siebie wskutek kulombowskiego przyciągania. Ponieważ rośnie ich energia kinetyczna, maleje energia wspólnego pola elektrycznego. Gdy ładunki się zetkną, pole całkowicie zniknie. Ponieważ pole nie jest widoczne, a poruszające się ładunki zaobserwować bardzo łatwo, fizycy właśnie im przypisali niewidoczną energię pola. Nazwali ją energią potencjalną dwóch ładunków i dla wygody ustalili, że dla ładunków nieskończenie od siebie odległych jest ona równa zero, tak jak siła między nimi. Niestety w rozważanym przypadku energia pola jest wtedy największa! Zatem tak określona energia potencjalna dwóch różnoimiennych ładunków jest zawsze ujemna (w granicy równa zero). Jednak energia ich pola jest zawsze dodatnia (równa zero tylko wtedy, gdy pole całkowicie zniknie).

Przyjrzyjmy się temu trochę bliżej. Możemy stwierdzić, że praca wykonana przez siłę elektryczną (równa energii kinetycznej ładunków tuż przed ich anihilacją) jest równa początkowej energii pola elektrycznego. Jeśli energię pola pochodzącego od pojedynczego ładunku q oznaczymy jako $E(q)$, to energią pola dwóch znajdujących się nieskończenie daleko od siebie ładunków będzie $2E(q)$, możemy zatem napisać:

$$(4) \quad W = 2E(q).$$

Rozważmy teraz inny proces. Niech dwa ładunki dodatnie o wartości q będą nieskończenie daleko od siebie (rys. 2).

Jeśli chcemy je połączyć w jeden ładunek o wartości $2q$, to teraz my musimy wykonać pracę o tej samej wartości co poprzednio. Wynikiem tego procesu jest jedno pole ładunku $2q$ powstałe z początkowych dwóch pól dzięki wykonanej pracy. Zatem:

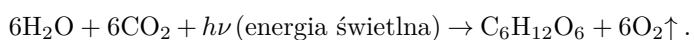
$$(5) \quad E(2q) = 2E(q) + W.$$

Wstawiając do równania (5) wzór (4), otrzymujemy:

$$E(2q) = 4E(q).$$

Pole ładunku $2q$ różni się od pola ładunku q tylko natężeniem w każdym punkcie, a powyższy wzór mówi, że energia pola pochodzącego od ładunku $2q$ jest czterokrotnie większa od energii pola ładunku q . Stąd możemy wywnioskować, że gęstość energii pola elektrycznego jest wprost proporcjonalna do kwadratu natężenia. Konkretny wzór określający gęstość tej energii łatwo otrzymujemy dla kondensatora płaskiego, bo tam pole jest jednorodne i zajmuje ograniczony obszar.

Warto przypomnieć inną ważną cechę energii – jest ona funkcją stanu. Niestety wielu o tym nie pamięta. Paul G. Hewitt w znakomitym kursie podstawowym fizyki („Fizyka wokół nas”) przedstawia energię w następujący sposób: *Chociaż z pojęciem tym spotykamy się na co dzień, to jednak energię trudno zdefiniować. Nie jest ona rzeczą, lecz łączy w sobie pojęcie rzeczy z pojęciem procesu, tak jakby była jednocześnie i rzeczownikiem, i czasownikiem. (...) Sama materia jest swoistym koncentratem energii, o czym świadczy słynny wzór Einsteina...* Takie „mistyczne” traktowanie energii i mieszanie tego pojęcia z pojęciem materii jest – niestety – mocno rozpowszechnione. Co chwila można się o taki mistycyzm potknąć przy lekturze tekstów popularnonaukowych, nieraz pisanych przez wybitnych fizyków. Nie warto cytować licznych przykładów, podajmy tylko jeden – powszechnie stosowany zapis reakcji fotosyntezy:



Ten pochodzi z Wikipedii. Co tu się nie zgadza? Otóż w reakcji uczestniczą różne cząsteczki oraz...

energia świetlna! Obok realnych cząsteczek w reakcji uczestniczy funkcja stanu nazywana energią. A przecież wystarczy zamiast „energia świetlna” napisać „fotony”, będące tak samo realnymi obiektami jak elektrony czy atomy.

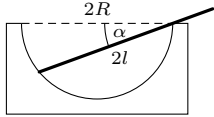
Zmierzamy już do końca, więc podsumujmy. Energia to funkcja stanu układu fizycznego określająca jego zdolność do oddziaływań z innymi układami. W skrócie – energia jest miarą zdolności do oddziaływań. Trochę to podobne do popularnej „intuicyjnej” definicji masy – to miara bezwładności ciała. Czemu jednak energia jest tak ściśle związana z masą słynnym wzorem Einsteina? Okazało się, że masa wszystkich cząstek elementarnych pochodzi z ich oddziaływania z polem Higgsa. Więc może nie jest tak tajemnicze to, że zdolność cząstki do oddziaływania (z polem Higgsa) jest równocześnie miarą jej bezwładności?

Mam nadzieję, że Kip S. Thorne by się w tym momencie uśmiechnął. Bo dobra definicja wielkości fizycznej pomaga zrozumieć jej istotne cechy i może zapoczątkować „owocne badania”.

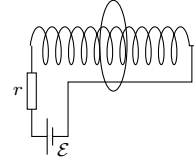
Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2025



Rys. 1



Rys. 2

782. Potencjał w środku odosobnionego pierścienia jest równy $\varphi_O = \sum_i kq_i/a = kQ/a$, stąd ładunek pierścienia $Q = a\varphi_O/k$. Potencjał uziemionej sfery oraz w jej wnętrzu wynosi zero i pochodzi od naładowanego pierścienia oraz ładunków indukowanych na sferze. Ładunki indukowane nie są rozłożone równomiernie, dlatego najłatwiej jest wyrazić potencjał w środku sfery:

$$0 = kQ/\sqrt{a^2 + b^2} + kQ_{\text{ind}}/b.$$

Szukany ładunek indukowany dany jest wzorem:

$$Q_{\text{ind}} = -Qb/k\sqrt{a^2 + b^2} = -4\pi\epsilon_0 ab\varphi_O/\sqrt{a^2 + b^2}.$$

783. Będziemy zakładać, że ładunek q jest dodatni, a pole magnetyczne skierowane w górę. Wprowadzmy układ współrzędnych, którego początek umieszczamy w punkcie zawieszania, oś z skierowana jest pionowo w górę, a osie x i y leżą w płaszczyźnie poziomej. Równanie ruchu kulki ma postać:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_L,$$

gdzie $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ jest wektorem położenia kulki, $|\mathbf{r}| = l$ jest długością wahadła, siła naprężenia nici $\mathbf{T} = -T\mathbf{r}/l$. Dla małych drgań $T \cong mg$. W tym przybliżeniu kulka porusza się praktycznie w płaszczyźnie poziomej, a składowe siły Lorentza wynoszą (rys. 4):

$$F_{Lx} = F_L \sin \beta = qv_y B_0, F_{Ly} = -F_L \cos \beta = -qv_x B_0, F_{Lz} = 0.$$

Równanie ruchu w rzucie na osie x, y ma postać:

$$(1) \quad ma_x = -mgx/l + qv_y B_0, ma_y = -mgy/l - qv_x B_0.$$

W nieobecności pola magnetycznego wahadło wykonuje drgania w jednej płaszczyźnie z częstością $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Gdy pole $B_0 \neq 0$, siła Lorentza zakrzywia tor kulki, ale ponieważ nie wykonuje pracy, maksymalne wychylenie nici z położenia równowagi pozostaje stałe. Z zasady zachowania energii

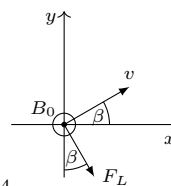
$$\frac{m(v_{\text{max}})^2}{2} = mgl(1 - \cos \alpha_{\text{max}}) = 2mgl \sin^2 \left(\frac{\alpha_{\text{max}}}{2} \right) = \frac{mgl(\alpha_{\text{max}})^2}{2},$$

$$v_{\text{max}} = \alpha_{\text{max}} \sqrt{gl}.$$

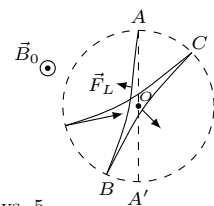
Ponieważ maksymalna siła Lorentza jest mała w porównaniu z maksymalną siłą zwracającą $F_{Z\text{max}}$,

$$\frac{F_{L\text{max}}}{F_{Z\text{max}}} = \frac{qB_0 v_{\text{max}}}{mg\alpha_{\text{max}}} = \frac{qB_0}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\omega_B}{\omega_0} \ll 1,$$

gdzie $\omega_B = qB_0/m$ jest częstością ruchu obrotowego cząstki naładowanej, poruszającej się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym. W czasie półokresu drgań pole magnetyczne w niewielkim stopniu zakrzywia trajektorię kulki.



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z fizyki nr 790, 791

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

790. Jednorodny pręt o długości $2l$ opiera się na krawędzi nieruchomej, półkolistej czaszy o promieniu R (rys. 1). Jaki kąt α tworzy pręt z płaszczyzną poziomą w położeniu równowagi? Tarcie zanedbujemy.

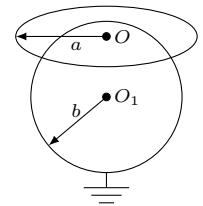
791. O jaką wielkość zmieni się natężenie prądu w kołowej pętli z nadprzewodnika, gdy nałożymy ją na długą zwojnicę podłączoną do baterii o sile elektromotorycznej \mathcal{E} (rys. 2). Całkowity opór obwodu ze zwojnicą wynosi r , liczba zwojów N , współczynnik samoindukcji zwojnicy L_0 , a pętli L . Indukcję wzajemną zanedbujemy.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2024

Przypominamy treść zadań:

782. Potencjał w środku odosobnionego, naładowanego, drucianego pierścienia o promieniu a wynosi φ_O . Pierścień ten zbliżono do uziemionej przewodzącej sfery o promieniu b tak, że tylko środek pierścienia znajduje się na powierzchni sfery (rys. 3). Znaleźć ładunek indukowany na sferze.

783. Mała kulka o masie m naładowana ładunkiem q zawieszona jest na nieważkiej i nierozciągliwej nici w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0 skierowanej pionowo. Kulkę odchyłono o mały kąt z położenia równowagi i puszczono swobodnie. Po jakim czasie płaszczyzna wahań wahadła obróci się o kąt 2π ? Maksymalna siła Lorentza działająca na kulkę jest mała w porównaniu z maksymalną siłą zwracającą. Nie uwzględniamy efektów związanych z obrotem Ziemi.



Rys. 3

Korzystając z wprowadzonych oznaczeń, możemy przepisać równania (1) w postaci:

$$(2) \quad d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 x + \omega_B dy/dt, \quad d^2y/dt^2 = -\omega_0^2 y - \omega_B dx/dt.$$

Równania (2) są równaniami liniowymi, obowiązuje więc zasada superpozycji – dowolna kombinacja liniowa dwóch rozwiązań tych równań jest też rozwiązaniem.

Gdy nie ma pola magnetycznego, równania (2) są niezwiązane.

Dwa rozwiązania opisujące drgania w płaszczyznach xz i yz mają postać:

$$(3) \quad x_1 = A \cos \omega t, y_1 = 0 \text{ oraz } x_2 = 0, y_2 = A \sin \omega t, \text{ gdzie } \omega = \omega_0.$$

Dodając i odejmując stronami te rozwiązania, otrzymujemy rozwiązania opisujące ruchy wahadła stożkowego w kierunkach przeciwnym i zgodnym ze wskazówkami zegara:

$$(4) \quad x_3 = x_1 + x_2 = A \cos \omega t, y_3 = y_1 + y_2 = A \sin \omega t; \\ x_4 = A \cos \omega t, y_4 = -A \sin \omega t$$

i odwrotnie $x_1 = (x_3 + x_4)/2$.

W przypadku $B_0 \neq 0$ rozwiązania (3) nie spełniają już równań (2), natomiast rozwiązania (4) spełniają je, gdy $\omega^2 = \omega_0^2 - \omega_B \omega$, stąd

$$\omega = -\omega_B/2 \pm \sqrt{\omega_0^2 + \omega_B^2/4} \cong -\omega_B/2 \pm \omega_0.$$

Zgodnie z zasadą superpozycji równania (2) spełniają również rozwiązania:

$$x = \frac{(x_3 + x_4)}{2} = A \left[\cos \left(\omega_0 + \frac{\omega_B}{2} \right) + \cos \left(\omega_0 - \frac{\omega_B}{2} \right) \right]$$

$$= A \cos \omega_0 \cos \left(\frac{\omega_B}{2} \right),$$

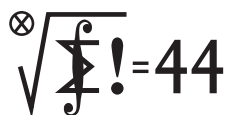
$$y = \frac{(y_3 + y_4)}{2} = A \sin \omega_0 \sin \left(\frac{\omega_B}{2} \right).$$

Równania opisują drgania wahadła z częstością ω_0 w płaszczyźnie, która sama obraca się z częstością $\omega_B/2$. Tor kulki w płaszczyźnie xy ilustruje rys. 5.

Szukany czas obrotu płaszczyzny wahań o kąt 2π wynosi:

$$t = 4\pi/\omega_B = 4\pi m/|qB_0|.$$

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 883 ($WT = 1,82$) i 884 ($WT = 1,61$) z numeru 6/2024

Michał Adamaszek	Kopenhaga	46,32
Szymon Kitowski	Warszawa	41,11
Witold Bednarek	Łódź	40,58
Mikołaj Pater		39,58
Krzysztof Zygan	Lubin	39,38
Andrzej Daniluk	Warszawa	37,89
Tomasz Wietecha	Tarnów	35,18
Andrzej Kurach	Ryjewo	33,24
Jędrzej Biedrzycki		32,29
Krzysztof Kamiński	Pabianice	30,48

Pan Michał Adamaszek, autor wielu znakomych zadań – teraz już Weteran do kwadratu: trzykrotnie trzy razy czterdzieści cztery!

885. Każdy element $x \in M$ ma w zbiorze M dokładnie jeden element odwrotny (mod p), który będziemy oznaczać x^{-1} ; tj. taki, że $xx^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Dany w zadaniu warunek przepisujemy jako równanie

$$(1) \quad ff(x) = x^{-1} \quad \text{dla wszystkich } x \in M$$

(notacja „oszczędna”: $f \circ f = ff$). Gdy funkcja f spełnia równanie (1), wówczas $ffff(x) = x$, skąd wniosek, że f jest bijekcją zbioru M na M – czyli jest permutacją zbioru M – który wobec tego rozpada się na rozłączne cykle tej permutacji. Skoro $ffff$ jest identycznością, długość cyklu może wynosić jedynie 1, 2 lub 4.

Gdy x wchodzi do cyklu długości 1 lub 2, to $ff(x) = x$, więc zgodnie z (1) $x = x^{-1}$, co oznacza, że $x = 1$ lub $x = p-1$. Działanie funkcji f w obrębie zbioru $\{1, p-1\}$ może mieć jedną z dwóch postaci:

$$(2) \quad [1 \mapsto 1, p-1 \mapsto p-1] \quad \text{lub} \quad [1 \mapsto p-1 \mapsto 1].$$

Pozostała część zbioru M , czyli zbiór $L = \{2, \dots, p-2\}$ musi być już sumą cykli długości 4. Tak więc $p \equiv 3 \pmod{4}$; dla $p \equiv 1 \pmod{4}$ nie istnieje ani jedna funkcja f o badanej własności.

Dalej przyjmijmy, że $p = 4n + 3$ (dla pewnego $n \in \mathbb{N}$); więc L to suma n cykli długości 4.

Z każdej pary $\{x, x^{-1}\}$ wybierzmy jeden element – np. mniejszą liczbę. Wybrane elementy utworzą zbiór (mocy $2n$), który nazwiemy K (przykładowo, dla $p = 11$ zbiór $K = \{2, 3, 5, 7\}$). Każdy 4-cykl zawiera dwa elementy $a, b \in K$ oraz ich odwrotności; przy tym działanie f w takiej czwórce ma jedną z dwóch postaci:

$$(3) \quad [a \mapsto b \mapsto a^{-1} \mapsto b^{-1} \mapsto a] \quad \text{lub} \quad [a \mapsto b^{-1} \mapsto a^{-1} \mapsto b \mapsto a].$$

Możliwe rozbicia zbioru L na n dopuszczalnych czwórek odpowiadają rozbiciom K na n par $\{a, b\}$. Jest $(2n - 1)!!$

Zadania z matematyki nr 893, 894

Redaguje Marcin E. KUCZMA

893. Punkty A, B, C, D, E leżą w tym porządku na linii prostej, przy czym $CA = CE$, $CB = CD$. Poza tą prostą, po jednej jej stronie, leżą punkty K i L takie, że trójkąty AKB i DLE mają ostre kąty przy wierzchołkach A, B i D, E , a suma miar tych czterech ostrych kątów wynosi 180° . Proste KB i LD przecinają się w punkcie N ; proste AK i EL przecinają się w punkcie M ; punkty M, N leżą po różnych stronach prostej KL , a ponadto $MN \perp AE$. Dowieść, że $CK = CL$.

894. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych (x, y, z) spełniające równanie

$$\frac{x + y + xyz}{yz + 1} = \frac{2025}{44}.$$

Zadanie 894 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2024

Przypominamy treść zadań:

885. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą nieparzystą i niech $M = \{1, 2, \dots, p-1\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f: M \rightarrow M$ takich, że dla każdego $x \in M$ liczba $xf(f(x)) - 1$ dzieli się przez p .

886. W trójkącie ostrokątnym o bokach długości a, b, c kąty wewnętrzne przy przeciwległych wierzchołkach mają miary (odpowiednio) α, β, γ . Wykazać, że wartość ilorazu

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a + b + c}$$

wyraża się przez długości promieni okręgów opisanego i wpisanego. Wyjaśnić, czy uzyskany wzór jest słuszny również dla trójkątów rozwartokątnych.

takich rozbić. [Uzasadnienie: bierzemy najmniejszą liczbę $a \in K$ i łączymy ją w parę z dowolnym innym elementem $b \in K$ ($2n - 1$ możliwości); bierzemy najmniejszą liczbę różną od a, b i łączymy ją w parę z dowolnym niewykorzystanym elementem ($2n - 3$ możliwości) itd.]. Uzyskaną wartość mnożymy przez 2^n (by uwzględnić swobodę wyboru jednej z opcji (3) w każdej z n czwórek). To daje liczbę dopuszczalnych permutacji w obrębie zbioru L . Jeszcze jedno pomnożenie przez 2 (uwzględniające wybór (2) w zbiorze $\{1, p-1\}$) daje ostateczny wynik: liczba funkcji f , o jakie pyta zadanie, wynosi 0, gdy p ma postać $4k + 1$, oraz $2^{n+1}(2n - 1)!!$, gdy $p = 4n + 3$.

886. Gdy trójkąt ABC jest ostrokątny, środek O okręgu opisanego leży wewnątrz niego. Odległość punktu O od boków a, b, c oznaczmy przez d_a, d_b, d_c . W trójkącie OBC (równoramiennym) $d_a = R \cos \alpha$ jest wysokością, a jego pole wynosi $\frac{1}{2}ad_a$. Analogicznie wyrażają się pola trójkątów OCA i OAB ; suma tych trzech pól to pole trójkąta ABC , wyrażające się też jako iloczyn $\frac{1}{2}(a + b + c)r$ (R i r to promienie okręgów opisanego i wpisanego). Zatem

$$\frac{1}{2}aR \cos \alpha + \frac{1}{2}bR \cos \beta + \frac{1}{2}cR \cos \gamma = \frac{1}{2}(a + b + c)r,$$

czyli

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a + b + c} = \frac{r}{R}.$$

Ten wzór jest nadal słuszny, gdy trójkąt ABC jest rozwartokątny; np. $\alpha > 90^\circ$. Wtedy $\cos \alpha < 0$, odległość d_a równa jest nie $R \cos \alpha$, lecz $-R \cos \alpha$; ale też trójkąt OBC leży na zewnątrz trójkąta ABC i jego pole należy odjąć od sumy pól trójkątów OCA, OAB , obliczając pole ABC . Minusy się redukują, wynik r/R pozostaje w mocy. [Można było od razu na starcie określić d_a jako odległość opatrzoną znakiem (*signed distance*), wtedy rozważanie przypadków staje się zbędne].

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Przez wiele lat astronomowie uważali, że Droga Mleczna zderzy się ze swoją galaktyką sąsiadką – Andromedą. Symulacje na podstawie nowych danych wykazują jednak, że prawdopodobieństwo wystąpienia tej kolizji to tylko 50%, przynajmniej w ciągu następnych 10 miliardów lat. Co się zmieniło?

Nasza galaktyczna „dzielnica” Wszechświata zwana jest Grupą Lokalną. Znajdują się w niej dwie duże galaktyki spiralne: nasza Droga Mleczna i galaktyka Andromedy (zwana też M31) oraz około 100 znanych mniejszych galaktyk.

W Grupie Lokalnej jest prawdopodobnie wiele małych galaktyk, które nie zostały jeszcze odkryte.

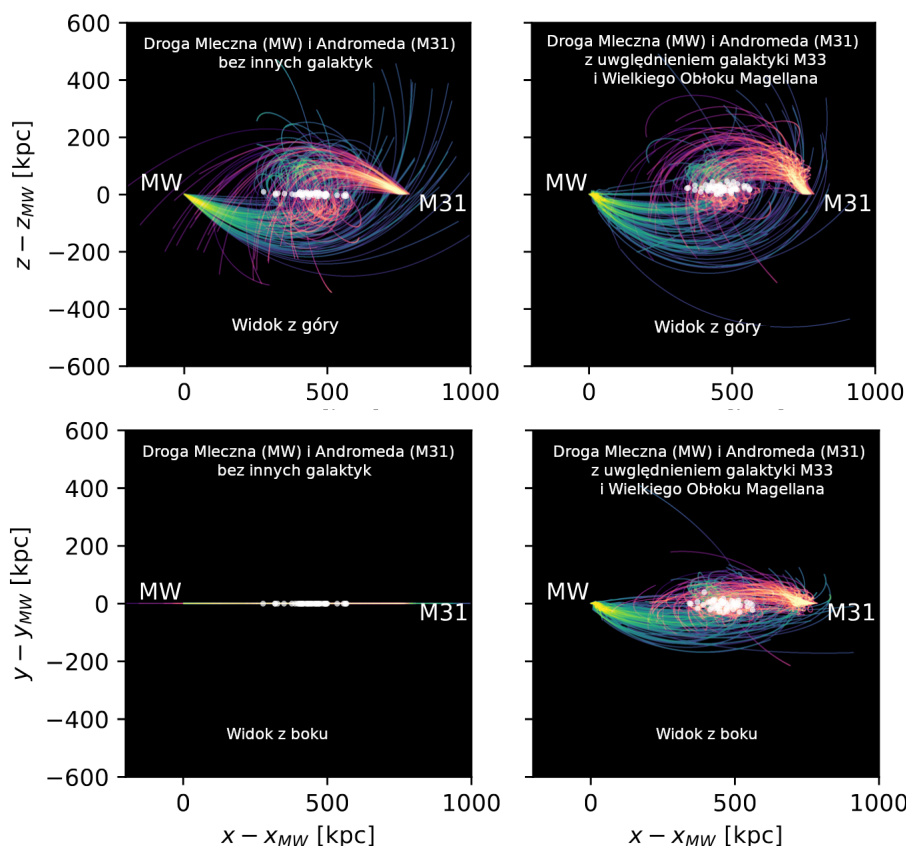
Dotychczasowe badania Grupy Lokalnej sugerowały, że nasza Galaktyka i Andromeda są na kursie kolizyjnym. Zderzenie dwóch galaktyk miałyby nastąpić za około 4 miliardy lat, a kolejne zderzenia w odstępach 2 miliardy lat dałyby początek nowej, dużej galaktyce eliptycznej (powstałej z połączenia Andromedy i Drogi Mlecznej) pełnej gwiazd rozproszonych na nowych orbitach. Ziemia, Słońce i pozostałe planety naszego Układu Słonecznego przetrwałyby zderzenie, ale cały Układ Słoneczny znalazłby się na obrzeżach nowo powstałej galaktyki eliptycznej.

Te badania mają jednak już kilka dobrych dekad. W międzyczasie poszerzyła się nasza wiedza na temat mas, orbit oraz dokładnych prędkości galaktyk

należących do Grupy Lokalnej. Wykonaliśmy też nowe obserwacje z wykorzystaniem europejskiej sondy kosmicznej Gaia oraz Kosmicznego Teleskopu Hubble’a. Naukowcy na podstawie nowych badań zoptymalizowali i poprawili symulacje szacujące prawdopodobieństwo zderzenia Drogi Mlecznej z Andromedą. Wzięli też pod uwagę, wcześniej zaniedbywany, możliwy wpływ innych galaktyk Grupy Lokalnej na kurs kolizyjny Andromedy i Drogi Mlecznej. Okazało się, że był to strzał w dziesiątkę. Odkryto bowiem, że w szczególności dwie pobliskie galaktyki – satelity (M33 i Wielka Mgławica Magellana) mogą mieć kolosalny wpływ na to, czy do zderzenia w ogóle dojdzie! Uwzględnienie tylko tych dwóch galaktyk zmniejszyło prawdopodobieństwo zderzenia Drogi Mlecznej i Andromedy w ciągu najbliższych 10 miliardów lat do blisko 50% – w połowie scenariuszy do zderzenia nie doszło.

Oczywiście autorzy publikacji prezentującej wyniki badań są ostrożni i twierdzą, że modele i symulacje muszą być jeszcze udoskonalone, aby można było dokładnie ustalić, jakie będą trajektorie ruchu galaktyk, a w konsekwencji, z jakim prawdopodobieństwem Andromeda zderzy się z naszą Galaktyką. Mogą nam pomóc nadchodzące obserwacje z sondy Gaia, które dostarczą informacji o ruchach właściwych i masie galaktyk Grupy Lokalnej. Okazało się, że nieunikniona katastrofa wcale taka nieunikniona nie jest.

Możliwe orbity ruchu Drogi Mlecznej (MW) i Andromedy (M31). Kolorowe linie pokazują różne możliwe trajektorie ruchu galaktyk w ciągu najbliższych 10 miliardów lat lub do momentu zderzenia, jeżeli nastąpi ono wcześniej. Na rysunkach po lewej stronie trajektorie ruchu bez uwzględnienia wpływu innych galaktyk Grupy Lokalnej, po prawej z uwzględnieniem wpływu galaktyki M33 i Wielkiego Obłoku Magellana. Wykresy w górnym panelu pokazują widok „z góry”, a wykresy na dole widok „od boku”. Rysunek pochodzi z arXiv:2408.00064.



Artykuł oparty na publikacji: Till Sawala, Jehanne Delhomelle, Alis J. Deason et al., „Apocalypse When? No Certainty of a Milky Way – Andromeda Collision”, arXiv:2408.00064.

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Od początku roku dzień wydłuża się zarówno o świcie, jak i o zmierzchu. Jednak tempo wydłużania dnia zwiększa się wyraźnie dopiero około 20 stycznia, gdy Słońce przekroczy równoleżnik -20° deklinacji w drodze na północ. Od tego momentu na naszych szerokościach geograficznych dnia przybywa o ponad 2 godziny na miesiąc.

Styczeń zacznie się dobrą widocznością Księżyca i planet na wieczornym niebie. Na początku roku ekliptyka przyjmuje korzystne nachylenie do widnokregu po zachodzie Słońca i zbliża się do horyzontu nad ranem. Srebrny Glob przeszedł przez nów jeszcze w grudniu, wędrując przy tym pod ekliptyką, i od drugiego dnia miesiąca jego sierp ozdobi niebo po zmierzchu, na którym po zachodniej stronie widoczne są planety Wenus i Saturn.

Druga planeta od Słońca przez cały miesiąc przejdzie od gwiazdozbioru Koziorożca przez Wodnika do Ryb, osiągając 10 stycznia maksymalną elongację wschodnią, wynoszącą 47° . W tym czasie jasność Wenus zwiększy się do $-4,5^m$, a średnica jej tarczy przekroczy $32''$ przy fazie zmniejszającej się do 37%. Po drodze, 18 stycznia, Wenus minie Saturna, do którego zbliży się na 2° . Planeta wyraźnie poprawi swoje warunki obserwacyjne, wznosząc się o zmierzchu na ponad 30° . 3 stycznia 2° na południe od Wenus przejdzie Księżyc w fazie 16%.

Ostatnia z widocznych gołym okiem planet zbliża się do marcowej koniunktji ze Słońcem i swojej równonocy. W styczniu Saturn świeci blaskiem $+1,1^m$, prezentując tarczę o średnicy $16''$. Jego pierścienie stają się coraz węższe i coraz trudniej je dostrzec przez teleskop, szczególnie przy małych powiększeniach. 7 i 23 stycznia na tarczy planety pojawi się cień Tytana, jej największego księżycy, co da się dostrzec nawet przez niewielkie teleskopy. 4 stycznia Saturn zbliży się na mniej niż $30'$ do gwiazdy 7. wielkości 85 Aqr, która może przypominać jeden z jego księżyców, ale warto pamiętać, że nawet Tytan świeci o prawie 2^m słabiej. Tego samego dnia dojdzie do zakrycia obu ciał niebieskich przez Księżyc w fazie 25%. Saturn zniknie za ciemnym brzegiem księżycowej tarczy około godziny 18:40 i pojawi się po jej jasnej stronie godzinę później.

6 stycznia Księżyc przejdzie przez I kwadrę, a 4 dni później dotrze do gwiazdozbioru Byka, zwiększając fazę do 80%. Noc z 9 na 10 stycznia Srebrny Glob zacznie jakież 5° od Plejad, by około godziny 3 zakryć ich południowo-wschodnią część z gwiazdą Merope. Niestety do zakryć dojdzie nisko nad widnokregiem. Następnej nocy Srebrny Glob minie Jowisza w odległości 5° . Planeta powoli słabnie, do końca miesiąca zmniejszając blask do $-2,4^m$, a średnicę tarczy do $44''$.

13 stycznia przed północą naszego czasu naturalny satelita Ziemi osiągnie pełnię, zajmując pozycję niecałe 4° od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt, a o godzinie 5:30 zbliży się na $0,5^\circ$ do Marsa. Czerwona Planeta 12 stycznia przejdzie najbliżej Ziemi (96 mln km), by 4 dni później znaleźć się w opozycji do Słońca. 23 stycznia Mars zbliży się na 2° do Polluksa.

Jak zawsze zimowe opozycje Marsa, mimo tego, że planeta wznosi się wysoko na niebie, należą do tych niekorzystnych, i w tym sezonie średnica jego tarczy nie przekroczy $15''$. Również jego jasność nie zrobi dużego wrażenia, osiągnie maksymalnie $-1,4^m$, czyli

porównywalnie z Syriuszem. Oczywiście przy tej jasności planeta nadal wyprzedzi pod tym względem wszystkie pozostałe naturalne ciała niebieskie w swoim sąsiedztwie, poza Księżycem, ale zarówno jej średnica kątowna, jak i jasność nie zachwycą tych, którzy pamiętają wygląd jej tarczy podczas tzw. Wielkich Opozycji w 2018 czy 2003 roku. Niestety dla nas wtedy planeta przechodzi przez opozycję latem i wędruje nisko nad widnokregiem. Jest to jedna z tych rzeczy, których szczerze możemy zazdrościć mieszkańcom półkuli południowej naszej planety, mających Marsa wysoko na niebie podczas jego największych opozycji.

Księżyc powędruje dalej i 16 stycznia wszędzie 2° od Regulusa w Lwie, a 5 dni później rano, mając tarczę oświetloną w połowie, pokaże się $0,5^\circ$ od Spiki w Pannie. Styczniowy nów przypada 29. dnia miesiąca. Do tego czasu 25 stycznia oświetlona w 20% tarcza Księżyca zajmie pozycję około 3° od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona.

Jak co roku na początku stycznia promieniują meteory z roju Kwadrantydów. Ich radiant położony jest na północ od Wolarza, a zatem nigdy u nas nie zachodzi. Kwadrantydy najlepiej obserwować rano, gdy ich radiant wznosi się na ponad 60° . Są to meteory o średniej prędkości, zderzają się z naszą atmosferą z prędkością 41 km/s. W okolicach maksimum aktywności można spodziewać się nawet 80 zjawisk na godzinę.

4 lutego przewidywane jest maksimum aktywności długookresowej gwiazdy zmiennej R Leo. Może ona osiągnąć blask nawet $+4,4^m$, jest wtedy dostrzegalna gołym okiem. R Leo znajduje się jakież 5° od Regulusa, niedaleko gwiazd 6. wielkości 18 i 19 Leonis, z którymi można porównywać jej blask. Ma też wyraźnie widoczną wiśniową barwę. Łatwo ją zatem zidentyfikować przez lornetkę. Pod koniec stycznia gwiazda góruje około godziny 1 na wysokości 50° .

Ariel MAJCHER



Rozwiązanie zadania M 1804.

Odpowiedź: Jediną możliwą wartością jest 0.

Niech i -ty trójmian ma postać $f_i(x) = ax^2 + bx + c_i$ dla $i = 1, 2, \dots, 2025$. Wtedy

$$f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1,$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z tego, że $f_1(x_1) = 0$. Podobnie otrzymujemy równości $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \dots, f_{2025}(x_{2024}) = c_{2025} - c_{2024}$ oraz $f_1(x_{2025}) = c_1 - c_{2025}$. Dodając otrzymane równości, dostajemy, że

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{2025}(x_{2024}) + f_1(x_{2025}) = (c_2 - c_1) + \dots + (c_1 - c_{2025}) = 0.$$



Rozwiązanie zadania M 1805.

Odpowiedź: $n = 15$.

Podstawiając $x = 1, y = n$, otrzymujemy, że $n = 2^k - 1$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k . Niech teraz $n = ab$, gdzie $a \geq b > 2$, i niech $a + b = 2^t$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej t . Gdyby $a = b = 2^{t-1}$, to $ab = 2^{2(t-1)}$, a to jest sprzeczność – mamy zatem $a > b$. Oczywiście zachodzi $k > t$. Ponadto

$$2^k + 2^t = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1),$$

$$2^k - 2^t = ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1).$$

Mnożąc te równości, otrzymujemy, że liczba $(a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)$ jest podzielna przez 2^{2t} .

Zauważmy jednak, że dwójka występuje w pierwszej potędze w rozkładzie na czynniki pierwsze jednej z liczb $b - 1$ lub $b + 1$, a w rozkładzie drugiej z tych liczb w potędze nie większej niż $t - 1$. Tak samo jest z liczbami $a - 1$ i $a + 1$. Zatem podzielność liczby $(a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)$ przez 2^{2t} jest możliwa tylko wtedy, gdy 2^{t-1} dzieli jedną z liczb $b - 1$ i $b + 1$ oraz jedną z liczb $a - 1$ i $a + 1$. Ponieważ $a < b < 2^t$, więc $b = 2^{t-1} - 1$ i $a = 2^{t-1} + 1$.

Wtedy jednak $k = 2t - 2$ i w szczególności $2^k - 1$ jest podzielne przez 3. Możemy zatem założyć, że w naszym rozumowaniu wybraliśmy $b = 3$. Wtedy $a = 5$, zatem $n = 15$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.



Rozwiązanie zadania M 1806.

Opiszmy okrąg na (mn) -kącie foremny i założmy, że długość każdego łuku pomiędzy sąsiednimi wierzchołkami jest równa 1. Niech A_1, A_2, \dots, A_m oznaczają czerwone wierzchołki, a B_1, B_2, \dots, B_n wierzchołki niebieskie. Rozważmy mn łuków postaci $A_i B_j$, które skierowane są „od” A_i „do” B_j w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Każdy taki łuk może mieć długość równą jednej z liczb $1, 2, \dots, mn - 1$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją dwa różne łuki, $A_{i_1} B_{j_1}$ i $A_{i_2} B_{j_2}$, o tej samej długości. Łatwo zauważyć, że wtedy odcinki $A_{i_1} A_{i_2}$ i $B_{j_1} B_{j_2}$ mają żądaną własność.



Rozwiązanie zadania F 1111.

Niech D oznacza średnicę Słońca, d średnicę Ziemi, T_S temperaturę bezwzględną powierzchni Słońca, a $T_Z = 273$ K temperaturę powierzchni Ziemi (0°C). Słońce wypromieniowuje energię proporcjonalnie do swej powierzchni, $4\pi D^2/4$, i do czwartej potęgi temperatury, T_S^4 , a Ziemia, w odległości R , absorbuje część tej energii równą stosunkowi powierzchni jej „tarczy”, $\pi d^2/4$, do powierzchni sfery o promieniu R ($4\pi R^2$) i wypromieniowuje proporcjonalnie do T_Z^4 i całkowitej jej powierzchni, $4\pi d^2/4$ – współczynnik proporcjonalności jest ten sam, co w przypadku Słońca. Kątowa średnica Słońca równa $0,5^\circ$ oznacza, że $D/R \approx \pi/360$. Otrzymujemy równanie:

$$\left(\pi \frac{d^2}{4}\right) \left(\frac{1}{4\pi R^2}\right) 4\pi \left(\frac{D^2}{4}\right) T_S^4 = 4\pi \left(\frac{d^2}{4}\right) T_Z^4,$$

skąd wynika, że

$$\left(\frac{T_S}{T_Z}\right)^4 = 16 \left(\frac{R^2}{D^2}\right) = 16 \left(\frac{360}{\pi}\right)^2,$$

czyli

$$T_S \approx 21,4 T_Z.$$

Po podstawieniu $T_Z = 273$ K otrzymujemy $T_S \approx 5840$ K. Astronomowie przyjmują $T_S = 5772$ K, a więc nasze przybliżenie jest nadspodziewanie dobre. Dzięki efektowi cieplarnianemu średnia temperatura powierzchni Ziemi jest nieco wyższa od przyjętej w rozwiązaniu i wynosi około $14,76^\circ\text{C}$.



Rozwiązanie zadania F 1112.

Podczas odpompowywania gazu należy wykonywać powolne ruchy tłoka pompy, aby zapewnić warunki, w których gaz będzie podlegał przemianie izotermicznej. Po wykonaniu jednego ruchu tłoka ciśnienie zmniejszy się od p_i do p_{i+1} :

$$p_{i+1} = p_i \left(\frac{V}{V+v}\right).$$

Zmniejszenie ciśnienia od p_0 do p będzie więc wymagało

$$x = \ln \frac{p_0}{p} / \ln \frac{V}{V+v}$$

ruchów tłoka. W ogólnym przypadku x nie będzie liczbą całkowitą, ale wypadnie pomiędzy dwoma wartościami całkowitymi: $n < x < n + 1$. Przyjmijmy $x = n + q$ z $0 < q < 1$. Mamy wówczas:

$$p = p_n \left(\frac{V}{V+v}\right)^q = p_{n+1} \left(\frac{V}{V+v}\right)^{q-1}.$$

Możemy zakończyć pompowanie z ciśnieniem równym p_n lub p_{n+1} . Oszacujmy, jaki popełnimy błąd, przyjmując każdą z tych wartości:

$$\Delta_+ = p_n - p = p_n \left(1 - \left(\frac{V}{V+v}\right)^q\right) = p_n \left(1 - \left(1 - \frac{v}{V+v}\right)^q\right) \approx p_n \frac{qv}{V+v}.$$

Analogicznie dla $\Delta_- = p - p_{n+1}$:

$$\Delta_- \approx p_n \frac{(1-q)v}{V+v}.$$

Najlepszą oceną popełnionego błędu będzie więc:

$$\Delta = \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2} = p_n \left(\frac{v}{2(V+v)}\right) \approx p \left(\frac{v}{2(V+v)}\right).$$



Dla jakich n istnieje...?

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Zajmiemy się tu zadaniami, w których należy wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których istnieje pewien zadany obiekt. Trzeba pamiętać, że rozwiązanie takiego zadania składa się z dwóch części:

- w przypadku tych n , dla których dany obiekt istnieje, wystarczy podać jego konstrukcję albo (co się zdarza w trudniejszych zadaniach) udowodnić jego istnienie metodami pośrednimi, takimi jak na przykład zasada szufladkowa;
- dla tych n , dla których nie istnieje dany obiekt, trzeba przeprowadzić dowód jego nieistnienia, najczęściej metodą nie wprost – przez założenie istnienia i doprowadzenie do sprzeczności.

Zwykle jedna z tych dwu części jest łatwiejsza. Pozwala to postawić odpowiednią hipotezę, co często ułatwia rozwiązanie trudniejszej części, ponieważ wiemy już, co chcemy wykazać.

Jako przykład rozwiążemy następujące zadanie z VII Wielkopolskiej Ligi Matematycznej.

Przykład. Nazwijmy *grubym* prostokąt o bokach x i y spełniających warunek $\frac{1}{2}x < y < 2x$. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których z kafelków o wymiarach $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times n$ można ułożyć gruby prostokąt (każdy z kafelków musi być użyty dokładnie jeden raz).

Rozwiązanie. Pole takiego prostokąta jest równe $\frac{1}{2}n(n+1)$, dodatkowo jeden z boków ma długość co najmniej n . W takim razie drugi bok ma długość co najwyżej $\lfloor \frac{1}{2}(n+1) \rfloor$, co jest równe $\frac{1}{2}n$ dla n parzystych. Ale wówczas otrzymany prostokąt nie jest gruby. Udowodniliśmy zatem, że dla parzystych n taki prostokąt nie istnieje.

W przypadku nieparzystych n możemy skonstruować gruby prostokąt, tak jak na rysunku obok.

	$(n-1)/2$	$(n+1)/2$
...		...
2	$n-2$	
1	$n-1$	
n		

Widoczny tu motyw parzystości często pojawia się w tego typu zadaniach.

Zadania

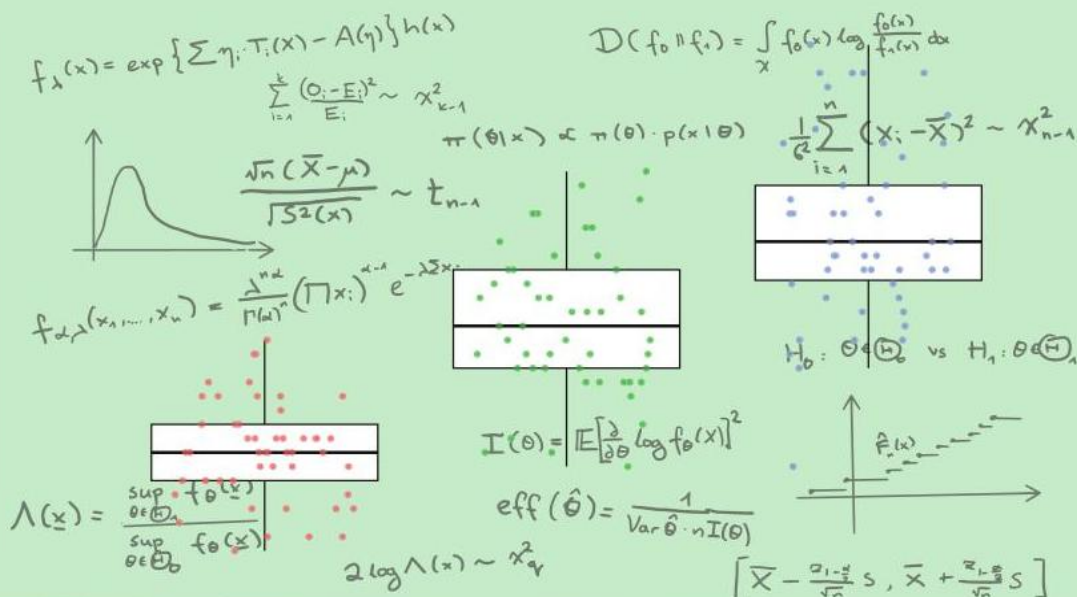
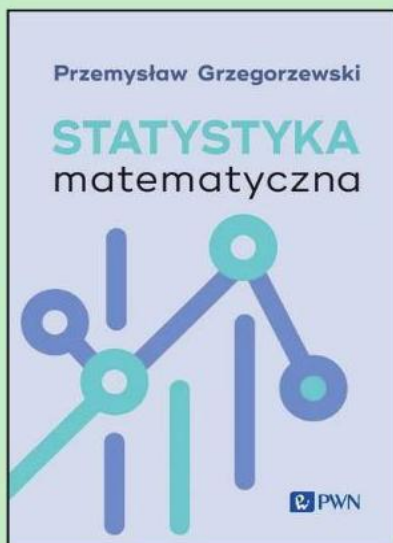
1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 4$, dla których istnieje n -kąt, którego każdy kąt wewnętrzny ma 90° lub 270° .
2. Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n zbiór $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ można rozbić na dwa rozłączne n -elementowe podzbiory o jednakowych sumach?
3. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których istnieje n -ścian wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami.
4. Niech n będzie liczbą nieparzystą. Z $\frac{n^3-1}{2}$ niebieskich prostopadłościaków o wymiarach $1 \times 1 \times 2$ i jednego zielonego o wymiarach $1 \times 1 \times 1$ chcemy zbudować sześcian o krawędzi n , ale środek powstałego sześcianu ma leżeć w środku zielonego klocka. Wyznaczyć wszystkie n , dla których jest to możliwe.
5. Znaleźć wszystkie całkowite dodatnie n , dla których istnieje ciąg (x_0, x_1, \dots, x_n) o następujących własnościach: $x_0 = 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ oraz $|x_k| = |x_{k-1} + 1|$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$. (LII OM, zmodyfikowane)
6. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: z n prostokątów o wymiarach $1 \times n, 2 \times n, \dots, n \times n$ można ułożyć kwadrat. (LXXV OM)

Problem otwarty

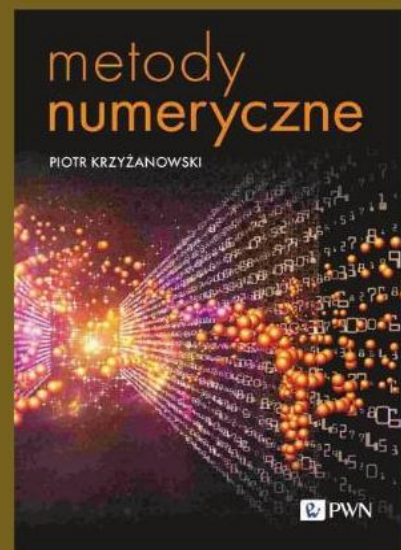
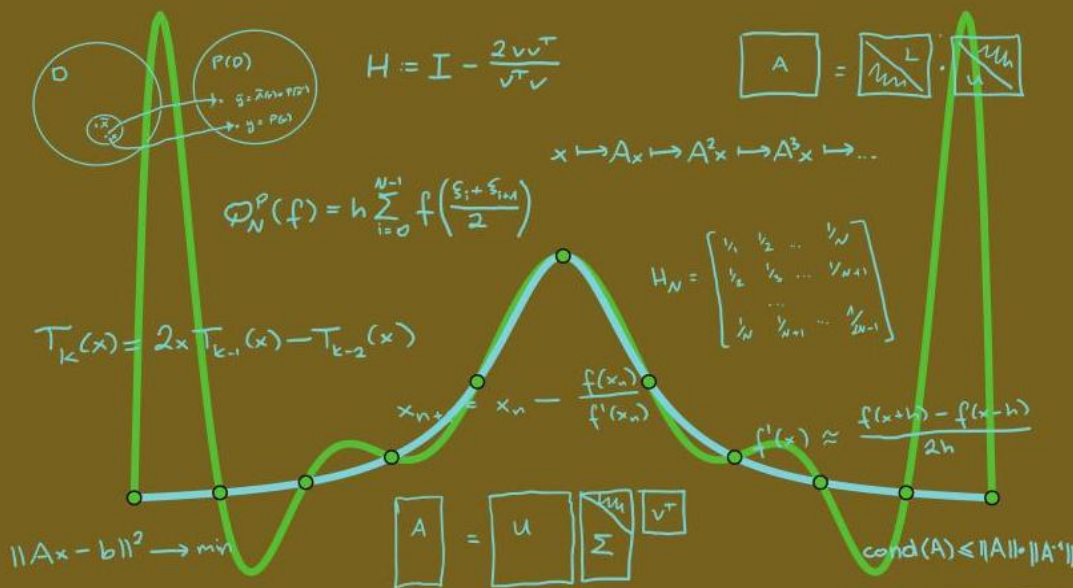
7. Na płaszczyźnie znajduje się n punktów czerwonych, n zielonych i n niebieskich. Każda prosta przechodzi albo przez co najwyżej jeden z tych punktów, albo przez dwa punkty jednakowego koloru, albo przez trzy punkty różnych kolorów. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości n . (Problem autorski, częściowe rozwiązanie w Matematycznym Kalendarzu Adwentowym 2021).

Wskazówki do zadań
 1. Każde dwa sąsiednie boki są prostopadłe, więc $n \geq 4$ musi być parzyste.
 2. Liczba $1 + 2 + \dots + 2n = n(2n + 1)$ musi być parzysta, więc liczba n również.
 3. Liczba krawędzi takiego wielościanu jest równa $\frac{3}{2}n$, więc n musi być parzyste. Dla $n = 4$ mamy czworoscian foremny; a dla parzystych $n < 4$ można skleić podstawami dwa przystające prostokąty o boku $n/2$.
 4. Zauważmy, że analogiczna konstrukcja na płaszczyźnie jest wykonalna dla każdego nieparzystego n . Jeśli $n = 4k + 1$, to jako środkową warstwę sześcianu bierzemy konstrukcję z płaszczyzny, a dodatkowo z góry i z dołu dokładamy prostopadłościaki $n \times n \times 2k$. W przypadku $n = 4k + 3$ kolorujemy sześciany jednostkowe sześcianu $n \times n \times n$ w czarno-białą szachownicę. Niech środkowy sześcianik będzie czarny – wśród pozostałych jest wtedy więcej białych niż czarnych, z czego można wywnioskować, że konstrukcja jest wykonalna.
 5. Niech $s_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k$. Podniestmy tu danej w zadaniu równości do kwadratu, zsumowaliśmy stronami dla $k = 1, 2, \dots, n$ i prostych przekształceniach otrzymamy $2s_n + n + 1 = (s_n + 1)^2$, więc $s_n = 0 \iff |s_n + 1| = \sqrt{n+1}$. Wniosekujemy stąd, że $n = m^2 - 1$ dla pewnego naturalnego m . Osiągalności dowodzimy indukcyjnie, rozważając wszystkie możliwe wartości x_n .
 6. Liczba $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ musi być kwadratem, więc $n = 2k^2 - 1$ dla pewnej całkowitej k ; a stąd bok kwadratu ma długość kn . W celu wykonalności konstrukcji można ułożyć k^2 kwadratów $n \times n$.
 7. Znana jest mi konstrukcja dla $n = 1, 2, 3, 4$ i nic więcej.

Polecamy podręczniki Autorów delty



„Naukowcy odkryli, że każdy przyjaciel przedłuża nasze życie o 1,23 roku!”, „Z badań wynika, że jedzenie czekolady wpływa na poglądy polityczne!” – tego typu hasła przedostają się czasem do tzw. masowych mediów. I dobrze, że się przedostają, wszak często stoi za nimi solidna praca ludzi nauki, w których głos powinniśmy się wsłuchiwać. Interpretacja takich stwierdzeń nie jest jednak zupełnie oczywista i aby je dobrze zrozumieć, warto znać podstawowe narzędzia statystyki matematycznej pozwalające na ich formułowanie. Chętnym do poszerzenia wiedzy w tym zakresie serdecznie polecamy podręcznik „Statystyka matematyczna” Przemysława Grzegorzewskiego, który w świetny sposób łączy ścisłość i precyzję matematycznego opisu podstawowych technik statystycznych z przedstawianiem intuicji i motywacji stojących za wprowadzanym formalizmem. Z pewnością jego lektura będzie wartościowa zarówno dla tych, którzy dopiero zapoznają się ze statystyką, jak i dla korzystających z niej praktyków, którzy chcieliby poznać matematyczne umocowanie stosowanych metod.



Wielu ludzi zdaje się sądzić, że matematyk musi być sprawny w liczeniu, co niekoniecznie jest prawdą. Niewątpliwie jednak znaczna część zastosowań matematyki ostatecznie kończy się obliczeniem jakichś wielkości. O tym, jak te obliczenia przeprowadzać mądrze i efektywnie, traktuje wspólny dział matematyki i informatyki, jakim jest analiza numeryczna. A tym wszystkim, którzy odczuwają potrzebę zgłębienia jej tajników, gorąco rekomendujemy książkę „Metody numeryczne” Piotra Krzyżanowskiego. Można się z niej dowiedzieć, jak (często z pozoru proste) pytania matematyczne prowadzą do nietrywialnych obliczeniowych trudności, do których rozwiązania zaprzęgane są bardzo eleganckie twierdzenia i rozumowania. Każdy rozdział, oprócz dogłębnego, a jednocześnie przyjaznego czytelnikowi, przedstawienia teorii, zawiera krótkie podsumowanie oraz wiele umiejętnie dobranych zadań. Co bardzo ważne, znajdziemy w nim też część „Sprawdźmy to w praktyce”, w której omawiana technika jest pokazywana „w działaniu” na przykładzie rzeczywistego zastosowania. Całość została niewątpliwie starannie przemyślana – to wprost doskonały materiał do nauki!