



delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

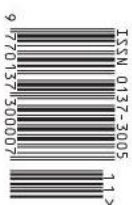
II-633-10-115 IT-3141592

NR 11 (606) 2024

CENA 8 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK







www.deltami.edu.pl

Ile liter
zmieści się
na płaszczyźnie?
str.8

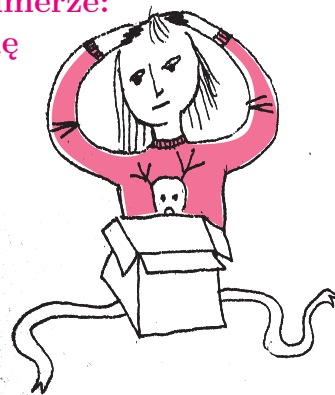


Nakład: 2800 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 11 (606) 2024

Sprawiedliwy podział smoczych jaj <i>Mikołaj Czarnecki, Michał Korniak</i>	str. 1
Liczby (nie)naturalne <i>Jakub Filipek</i>	str. 4
 Zadania	str. 6
 Aktualności Nagrody Nobla 2024	str. 7
Ile liter zmieści się na płaszczyźnie? <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 8
O sortowaniu równoległym <i>Przemysław Kiciak</i>	str. 10
Byłe nie dodawać <i>Paweł Rafał Bieliński</i>	str. 12
Równania różniczkowe jako hieroglify <i>Jose A. Langa, Grzegorz Łukaszewicz</i>	str. 14
Ile jest sześćścianów? <i>Heinz Schumann, Bronisław Pabich</i>	str. 18
 Kto pyta, nie błądzi <i>Marta Fikus-Kryńska</i>	str. 20
Klub 44	str. 21
 Prosto z nieba: Supernowa 1987A	str. 22
 Niebo w listopadzie	str. 23
 Tożsamości algebraiczne <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze:
Jak wymieniać się
prezentami?



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ;
dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz;
prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszufiska;
dr hab. Artur Jeż, prof. UW; prof. dr hab. Bartosz Klin;
dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek,
Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT, www.poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numer archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Sprawiedliwy podział smoczych jaj

Mikołaj CZARNECKI*, Michał KORNIAK*

* Studenci, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski

Artykuł opisuje wyniki uzyskane przez
autorów, pod opieką Oskara Skibskiego.

Formalnie nasz problem zdefiniować
możemy następująco. Mamy dany ciąg
 k wypraw, czyli podzbiorów W_1, \dots, W_k
zbioru krasnoludów $N = \{1, \dots, n\}$.
Udział krasnoluda i to
 $u_i = \sum_{i \in W_j} 1/|W_j|$ dla $i \in N$. Staramy
się znaleźć całkowitoliczbowy podział
 k jaj z wypraw, $x_1 + \dots + x_n = k$,
w którym każda liczba $x_i \in \mathbb{N}$ jest bliska
 u_i , na przykład spełnia $\lfloor u_i \rfloor \leq x_i \leq \lceil u_i \rceil$.

Dla przykładu, jeżeli zbiory uczestników
kolejnych wypraw to $W_1 = \{A, B, C\}$,
 $W_2 = \{B, D\}$, $W_3 = \{A, B\}$
i $W_4 = \{A, B, C, D\}$, to udziały kolejnych
wojowników wynoszą odpowiednio
 $u_A = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \approx 1,08$,
 $u_B = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \approx 1,58$,
 $u_C = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \approx 0,58$, $u_D = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75$.

Jeżeli nasz problem przypomina Ci,
Czytelniku, przydział miejsc
w parlamencie, zajrzyj na trzecią stronę
artykułu.

Chcemy więc, aby dla każdego $S \subseteq N$
zachodziło $\sum_{i \in S} x_i \geq |\{j : W_j \subseteq S\}|$.
O tej własności można myśleć jak
o *stabilności* – żadnej grupie nie oplaca
się wyłamać i dzielić się samemu jajami,
które zdobyli jej członkowie.

Jeżeli nasz problem przypomina Ci teraz,
Czytelniku, definicję rdzenia w grach
koalicyjnych, zajrzyj na trzecią stronę
artykułu.

Krasnoludy żyją w okolicy Zaczarowanej Góry, w której znajduje się jaskinia smoka. Raz do roku smok składa jedno Zaczarowane Jajo, którego skorupa jest wysoce cenioną przez każdego krasnoluda ozdobą. Aby je ukraść, Król zbiera drużynę, która udaje się na misję do jaskini Smoka. Po wielu latach Król, w obliczu nadchodzącej śmierci, postanowił rozdać drogocenne ozdoby swoim najbardziej zasłużonym wojownikom. Jaj nie można jednak dzielić, bo po stłuczeniu tracą swą wartość. W jaki sposób władca powinien rozdzielić jaja między wojowników?

Król był sprawiedliwym władcą i dlatego najpierw postanowił ocenić zasługi każdego wojownika. Przejrzał swoje zapiski i za każdą wyprawę, w której k wojowników zdobyło jajo, każdemu jej uczestnikowi dodał $1/k$ jaja. Po przejrzaniu wszystkich wypraw wiedział już, jaki był udział każdego wojownika w zebranych przez lata jajach. Udziały nie były jednak liczbami całkowitymi, więc aby rozdzielić jaja, Król postanowił skorzystać ze swojego (chwalonego przez poddanych) intelektu.

Pierwszy (zły) pomysł Króla. *No dobrze, wiadomo, że wojownik, którego udział jest równy 3,6 jaja, musi dostać ich przynajmniej 3. Odłożę dla każdego wojownika po części całkowitej jego udziału, a jutro zastanowię się, co zrobić z resztą. Już dość się dzisiaj namęczyłem.* Zadowolony Król poszedł spać, a następnego dnia pod prysznicem (pod którym zawsze przychodzą do głowy najlepsze pomysły) doznał olśnienia. *Wiem! Dam pozostałe jaja tym wojownikom, których ułamkowe części ich udziałów są największe! Oni są teraz najbardziej poszkodowani! W ten sposób sprawiedliwie zaokrąglę udziały i wszyscy wojownicy będą zadowoleni!*

Władca ogłosił swoją decyzję podczas uroczystej kolacji. Niestety wojownicy nie byli zachwyceni. Okazało się, że uczestnikami pierwszych trzech wypraw byli dwaj doświadczeni wojownicy, Alojzy i Bonifacy. Należało im się zatem po 1,5 jaja. W kolejnych pięciu wyprawach udział brała natomiast trójka młodych poszukiwaczy przygód: Cecyl, Dorian i Eugeniusz. Należało im się zatem po 1,(6) jaja. W ogólnym rozrachunku, rozdzielając osiem jaj z tych wypraw, Król dał po jednym każdemu z wojowników, a pozostałe trzy rozdał krasnoludom z największą resztą, czyli Cecylowi, Dorianowi i Eugeniuszowi. Alojzy i Bonifacy zaczęli protestować: przecież wspólnie zdobyli trzy jaja, a król dał im łącznie tylko dwa! Król zrozumiał, że jeśli chce uniknąć buntu części swoich wojowników, musi znaleźć lepszy sposób na podział łupu.

Jak uniknąć buntu? Król myślał intensywnie przez kolejny tydzień, codziennie przez pół godziny. Czy w ogóle da się tak zaokrąglić udziały krasnoludów, aby każda grupa dostała przynajmniej tyle jaj, ile sama przyniosła, czyli tyle, ile było wypraw złożonych tylko z wojowników tej grupy?

Szukając w swoim pomysle źródła konfliktu, władca zauważył pewną zależność. Jeżeli każdy krasnolud dostanie tylko jaja pochodzące z wypraw, w których brał udział, to nigdy nie nastąpi sytuacja, w której członkowie pewnej grupy dostaną kolektywnie mniej, niż sami wypracowali. Czy jednak da się znaleźć takie dopasowanie jaj do uczestników wypraw, aby każdy dostał swój udział zaokrąglony do liczby całkowitej?

Jestem na to za stary. Niech sami sobie radzą – pomyślał król. Rozłożył wszystkie jaja na stole i przy każdym umieścił tabliczkę z informacją o tym, jacy wojownicy zdobyli to jajo. Następnie zwołał wszystkich krasnoludów i rzekł:

Wojownicy! Bierzcie na zmianę po jednym jajku, przy którym widnieje wasze imię, aż nie uzyskacie części całkowitej swojego udziału! Jeżeli nie będzie wolnego jaja z waszym imieniem, to spróbujcie się wymieniać: poproście pewnego współtowarzysza waszej wyprawy, aby oddał wasze wspólne jajo, a sam wzięł

wolne ze stołu. Jeżeli takiego nie będzie, to niech poprosi kolejnego o jajo i tak dalej – ktoś wreszcie powinien móc wziąć jajo ze stołu.

Krasnoludy szamotały się trochę, ale już po kwadransie każdy krasnolud miał tyle jaj, ile powinien mieć!

Czy król miał szczęście? Okazuje się, że nie! Powyższa procedura zawsze przydzieli krasnoludom pożądaną liczbę jaj!

Aby to pokazać, założmy nie wprost, że jest pewien krasnolud, powiedzmy Eugeniusz, który nie ma jeszcze części całkowitej swojego udziału i nie może już wziąć żadnego jaja ze stołu ani się powymieniać, aby je dostać. Niech M będzie zbiorem krasnoludów, do którego należy Eugeniusz oraz wszystkie inne krasnoludy, które były z Eugeniuszem na wyprawie, a także te, które były na wyprawie z tymi, z którymi był on na wyprawie. Niech m oznacza łączną liczbę jaj posiadanych przez krasnoludy z M . Ile wynosi m ?

- Na pewno mają oni mniej jaj niż wynosi suma ich udziałów, bo wszyscy mają nie więcej niż swoje udziały, a Eugeniusz ma mniej; ich łączny udział w wyprawie W_i to $|W_i \cap M|/|W_i|$, więc $m < \sum_{W_i \cap M \neq \emptyset} |W_i \cap M|/|W_i|$.
- Z drugiej strony, jeżeli pewien krasnolud miałby jajo, w którego zdobyciu uczestniczył ktoś z M , to sam też należałby do M . Wynika z tego, że wszystkie jaja z wypraw krasnoludów z M są w ich posiadaniu: $m \geq |\{i : W_i \cap M \neq \emptyset\}| = \sum_{W_i \cap M \neq \emptyset} 1$.

Obie nierówności prowadzą do sprzeczności, z czego wynika, że na koniec procedury wszyscy muszą mieć już części całkowite swoich udziałów.

Co zrobić z pozostałymi jajami? Krasnoludy, których udział był całkowity, miały już cały swój udział. Pozostałe jednak wciąż liczyły na dodatkowe jajo. Skoro wcześniejsza metoda okazała się tak skuteczna, ucieszony król postanowił ją kontynuować:

Poddani! Ustawcie się w kolejce zgodnie z tym, ile jeszcze Wam brakuje do całego udziału (czyli w kolejności największych części ułamkowych), i niech każdy spróbuje tak jak poprzednio wziąć jedno dodatkowe jajo.

Gdy krasnoludy ustawiły się zgodnie z tą kolejnością (remisy były rozstrzygane osobistymi preferencjami Króla) i zaczęły brać jaja, i się wymieniać, okazało się, że udało się rozdzielić wszystkie pozostałe jaja pomiędzy wojowników!

Ponownie okazuje się, że taki obrót spraw nie był dziełem przypadku, a powyższa procedura zawsze rozdystrybuuje wszystkie jaja pomiędzy wojowników.

Aby to pokazać, założmy nie wprost, że na koniec procedury zostały jaja, których żaden krasnolud, który nie ma jeszcze całego swojego udziału, nie mógł wziąć w swojej kolejce, a więc tym bardziej na koniec procedury. Niech K będzie zbiorem krasnoludów, które mogą zdobyć pozostałe jaja. Musi zatem być tak, że każdy wojownik w tym zbiorze ma już co najmniej swój pełny udział. Niech k oznacza to, ile mają już łącznie jaj.

- Na pewno mają oni nie mniej jaj niż suma ich udziałów. Ich udział w wyprawie W_i to $|W_i \cap K|/|W_i|$, więc $k \geq \sum_{W_i \cap K \neq \emptyset} |W_i \cap K|/|W_i|$.
- Z drugiej strony, każde jajo, w zdobyciu którego uczestniczył ktoś spoza K , musi być wzięte przez krasnoluda spoza K . W przeciwnym razie ktoś spoza K mógłby się wymienić z kimś z K , aby zostało mniej jaj. Zatem krasnoludy z K posiadają wyłącznie jaja z wypraw, do których należały tylko krasnoludy z K . Część z tych jaj jest jeszcze niewzięta, gdyż zostały wolne jaja, więc takich jaj jest więcej niż k : $k < |\{i : W_i \subseteq K\}| \leq |\{i : W_i \cap K \neq \emptyset\}|$.

Obie nierówności prowadzą do sprzeczności. Zatem na koniec procedury wszystkie jaja będą rozdane!

Coś mi to przypomina...

Królowi udało się wymyślić, jak podzielić jaja, ale czy rozwiązania jego problemu nie dało się już znaleźć w przepastnej królewskiej bibliotece?

Jeżeli nasz problem tym razem przypomina Ci, Czytelniku, szukanie skojarzeń w grafie dwudzielnym, zajrzyj na trzecią stronę artykułu.



Kontynuując przykład z marginesu, krasnolud A mógł wziąć jajo z wyprawy W_4 , a B – jajo z wyprawy W_2 . Potem ustawili się w kolejności D, B, C, A . Krasnolud D nie miał na stole już jaja ze swoim imieniem, dlatego musiał się wymienić – wziął jajo z wyprawy W_2 od krasnoluda B , a ten w zamian wziął jajo z wyprawy W_1 ze stołu. Potem krasnolud B wziął ze stołu jajo z wyprawy W_3 i procedura zakończyła się podziałem $4 = 1 + 2 + 0 + 1$.

Można pokazać, że uzyskany przez Króla podział jest najbliższym (w sensie odległości euklidesowej) stabilnym zaokrągleniem wektora udziałów.

Jaja to miejsca w parlamencie? Bardzo podobnym problemem do naszego wydaje się przydział miejsc w parlamencie. W tym problemie daną mamy liczbę miejsc k oraz liczby głosów (g_1, \dots, g_n) , jakie uzyskały kolejne partie. Niech $G = \sum_i g_i$. Staramy się rozdzielić k miejsc w parlamencie między partie w taki sposób, aby procent zdobytych miejsc był bliski procentowi głosów: $u_i = g_i/G$.

Metoda wymyślona przez króla pod prysznicem odpowiada *metodzie największych reszt*: przydzielamy wszystkim partiom po $\lfloor u_i \rfloor$ miejsc, a potem po jednym dodatkowym miejscu przyznajemy tym z nich, dla których $u_i - \lfloor u_i \rfloor$ jest największe. *Metoda D'Hondta*, stosowana w Polsce, także dałaby niestabilny podział, a na dodatek mogłaby dać komuś więcej niż $\lceil u_i \rceil$ (np. ktoś z udziałem 2,5 mógłby dostać 4 jaja). Nawet gdyby król znał te metody, za bardzo by mu one nie pomogły – wykorzystują tylko liczby u_i , więc nie mogą być stabilne.

O problemie podziału miejsc w parlamencie pisaliśmy w *Delcie* Δ_{12}^{11} .

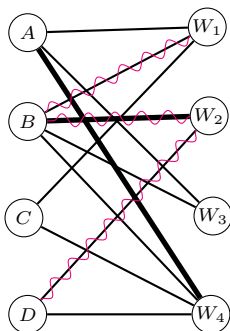
O grach koalicyjnych pisaliśmy między innymi w *Delcie* Δ_{20}^{11} oraz Δ_{22}^4 .

Gry pozytywne to gry, w których dywidendy wszystkich koalicji są nieujemne. *Dywidenda* koalicji S w grze (N, v) jest nadwyżką koalicji S , czyli wartością koalicji pomniejszoną o nadwyżkę podkoalicji: definiuje się ją jako $\Delta_v(S) = v(S) - \sum_{T \subseteq S} \Delta_v(T)$ przy założeniu $\Delta_v(\emptyset) = 0$.

Jaja to wypłata w grze koalicyjnej? Bardziej adekwatnym modelem wydają się gry koalicyjne. Gra koalicyjna to para (N, v) , gdzie N to zbiór graczy i $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ to funkcja przypisująca każdej *koalicji* (czyli po prostu grupie) graczy pewną wartość, przy czym $v(\emptyset) = 0$. Podstawowym problemem jest podział wartości $v(N)$ pomiędzy graczy: $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Mówi się, że podział jest w *rdzeniu*, jeżeli wypłata każdej koalicji jest co najmniej równa jej wartości: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$. Najsłynniejszym sposobem podziału jest *wartość Shapleya*.

Jeżeli potraktujemy krasnoludów jako graczy, to za wartość koalicji $v(S)$ możemy przyjąć liczbę jaj zdobytych przez nich bez pomocy innych: $v(S) = |\{j : W_j \subseteq S\}|$. Łatwo sprawdzić, że przy takiej definicji udział to właśnie wartość Shapleya, a nasza stabilność jest równoważna byciu w rdzeniu. Dla różnych zbiorów jaj możemy dostać wszystkie całkowitoliczbowe *gry pozytywne*. Wiadomo, że wartość Shapleya takich gier jest w rdzeniu, ale czy pewne jej zaokrąglenie też jest? Do dnia dzisiejszego świat tego nie wiedział, ale nasz artykuł pokazuje, że tak! Można nawet pokazać, że jest to prawdą dla wszystkich gier wypukłych!

Jaja to wierzchołki w grafie? Najbardziej przydatne okazuje się spojrzenie na nasz problem jako na graf dwudzielny: krasnoludy będą wierzchołkami po lewej, a jaja – po prawej stronie. Krawędziami łączymy teraz każde jajo z krasnoludami, którzy uczestniczyli w jego zdobyciu. Użyjemy pojęcia *skojarzenia* – jest to podzbiór krawędzi, w których każdy wierzchołek jest końcem nie więcej niż jednej krawędzi; wierzchołki, które są końcami, nazywamy skojarzonymi. Powielmy wierzchołek każdego krasnoluda $\lceil u_i \rceil$ razy. Teraz nasz problem sprowadza się do znalezienia skojarzenia, w którym wszystkie wierzchołki z prawej strony są skojarzone i użyliśmy nie mniej niż $\lceil u_i \rceil$ wierzchołków każdego krasnoluda. Tylko jak to zrobić? I czy tak się w ogóle da?



Graf dwudzielny reprezentujący przykład z marginesu: 4 krasnoludy i 4 jaja z ich wypraw. Linie pogrubione to skojarzenie uzyskane po przydzieleniu pierwszych jaj. Zawijane kolorowe linie odpowiadają ścieżce powiększającej, czyli wymianie, dzięki której D dostaje jajo.

Twierdzenie Halla (patrz Δ_{24}^{10}): Niech A_i będzie zbiorem wierzchołków połączonych z wierzchołkiem i . Pełne skojarzenie lewej strony w prawą istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru wierzchołków S z lewej strony zachodzi

$$|S| \leq \left| \bigcup_{i \in S} A_i \right|.$$

Podążając za mądrością króla, najpierw przydzielmy części całkowite. Zakryjmy po jednym wierzchołku każdego krasnoluda i znajdziemy skojarzenie, w którym to wszystkie wierzchołki z lewej są skojarzone. Korzystając z *Twierdzenia Halla*, możemy wykazać (podobnie jak w naszym dowodzie), że zawsze jest to możliwe. Następnie po kolei odkrywamy po jednym wierzchołku i , jeżeli się da, powiększamy skojarzenie. Znowu można wykazać, że w ten sposób skojarzymy wszystkie jaja.

A jak te skojarzenia znaleźć? Załóżmy, że po pewnej liczbie kroków mamy już pewne skojarzenie, czyli przyporządkowanie jaj. Aby je powiększyć, możemy znaleźć *ścieżkę powiększającą*, czyli ścieżkę, która zaczyna się i kończy na wierzchołku nieskojarzonym i w której na zmianę mamy krawędź ze skojarzenia i nie (przykład można zobaczyć na marginesie). Zamienienie krawędzi ze skojarzenia na pozostałe ze ścieżki powiększa skojarzenie o jedną krawędź. *Twierdzenie Berge'a* mówi, że skojarzenie jest maksymalne wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje względem niego żadna ścieżka powiększająca, więc jeżeli skojarzenie nie jest jeszcze maksymalne, to na pewno nam się uda znaleźć taką ścieżkę. A czym są ścieżki powiększające w naszej procedurze? No tak, to system zamian wymyślony przez króla. Trzeba przyznać, że niezłe to król wymyślił...

Liczby (nie)naturalne

Jakub FILIPEK*

* Student MISMaP, Uniwersytet Warszawski



„Liczby naturalne stworzył Bóg, cała reszta to praca człowieka” – powiedział pod koniec XIX wieku Leopold Kronecker – matematyk o niemałym dorobku naukowym. Na to zdanie można patrzeć na wiele sposobów, jest to wszak jeden ze sloganów *intuicjonizmu* – a więc poglądu filozoficznego na matematykę, którego postulaty prowadzą do odrzucenia niekonstruktywnych dowodów, a czasem nawet zbiorów nieskończonych.

Ale dzisiaj zostaniemy przy liczbach naturalnych. Przyjrzymy się temu, czego Kronecker nie mógł jeszcze wiedzieć o liczbach, a już konkretniej – o arytmetyce. Zbliżywszy się do fragmentu współczesnej Gödłowskiej logiki, zobaczymy, że „liczby naturalne” nie muszą być tak naturalne, oraz dowiemy się, że zasady, którymi rządzą się te *prawdziwe* liczby, są przed nami ukryte.

Ile razy jedynekę?

Arytmetyka jest prosta. Zaczynamy od liczby 0, potem mówimy, że następną jest 1, a następnie *deklarujemy*, że osiągniemy *każdą* liczbę naturalną poprzez dodawanie jedynki. Chciałoby się powiedzieć – poprzez dodawanie jedynki odpowiednią *liczbę* razy. Ale tego wprost prawa arytmetyki nie mówią. Powyższa „deklaracja” (o dodawaniu jedynki) nosi dumne miano **zasady indukcji matematycznej**. Przyjrzyjmy się jej sformułowaniu. Przez $\varphi(n)$ będziemy rozumieć, że liczba n ma własność φ . Może to być dowolna własność arytmetyczna, na przykład $n \leq 5$ albo $n \cdot 2 + 3 = 7$. Przy takim oznaczeniu zasadę indukcji matematycznej zapisujemy następująco:

$$[\varphi(0) \wedge (\forall n \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))] \Rightarrow (\forall n \varphi(n)).$$

Słownie: jeżeli 0 ma własność φ oraz jeżeli posiadanie własności φ przez n pociąga za sobą $\varphi(n+1)$, to już wszystkie liczby naturalne mają własność φ . Istotnie, nie mówimy tutaj, ile razy należy dodawać jedynekę. Można się domyślać, że nieskończenie wiele razy. Czy może zatem istnieć liczba, która jest nieskończoną sumą jedynek? Intuicja podpowiada, że każda liczba jest skończona. Zwykło się nawet mówić „nieskończoność nie jest liczbą”. Okazuje się, że sprawa jest nieco bardziej delikatna.

Arytmetyka – zbiór zasad

Chodzi o to, że próbujemy zapisać zasady, którymi rządzi się arytmetyka – *aksjomaty* – a później spojrzeć, jaka matematyczna struktura spełnia te zasady. Nie wskazujemy na konkretny model, który intuicyjnie znamy. Odróżniamy zatem struktury matematyczne, które realizują aksjomaty arytmetyki od szczególnej z nich – \mathbb{N} , której elementy będą nazywał *prawdziwymi* liczbami naturalnymi, w odróżnieniu od pozostałych struktur spełniających aksjomaty arytmetyki, te będą nazywał po prostu liczbami. Takie aksjomatyczne podejście jest w matematyce bardzo skuteczne i stosowane konsekwentnie od początku XX wieku – Kronecker (1823–1891) nie doczekał się nietypowych struktur arytmetycznych. Logika I rzędu, a więc taka, której system dowodowy jest skuteczny, ma swoje ograniczenia. Nie da się na przykład zapisać w niej aksjomatów, które zagwarantują, że w strukturze matematycznej będzie \aleph_0 elementów – czyli tyle, ile jest *prawdziwych* liczb naturalnych.

Matematycy przyjęli jednak pewien zestaw aksjomatów arytmetyki, nazwanych zbiorczo **arytmetyką Peano**, na cześć włoskiego matematyka Giuseppe Peano (1858–1932), który zaproponował ich pierwszą, historyczną już teraz, wersję. W obecnej wersji aksjomaty Peano mówią, że operacje dodawania i mnożenia są łączne i przemienne, zachodzi rozdzielnosc mnożenia względem dodawania, a zero oraz jeden są elementami neutralnymi, odpowiednio, dodawania i mnożenia (czyli $n + 0 = n$ oraz $n \cdot 1 = n$). Ponadto wprowadzają porządek (\leq), który jest zgodny z operacjami dodawania i mnożenia oraz stanowią, że zero jest najmniejszym elementem, a jedynka jest najmniejszą liczbą większą niż zero.



Wielkimi krokami nadchodzi kolejna edycja Ogólnopolskiej Matematycznej Konferencji Studentów „OMatKo!!!”. Już po raz jedenasty uczestnicy będą mieli okazję zanurzyć się w fascynujący świat nauki. Konferencja obfitować będzie w liczne prezentacje, wykłady, konkursy i okazje do integracji, wszystko to w gronie miłośników matematyki. Wydarzenie odbędzie się na Politechnice Wrocławskiej w dniach 6–8 grudnia 2024 r.

„OMatKo!!!” to największe tego rodzaju wydarzenie w Polsce, skierowane do studentów i doktorantów, oferujące możliwość rozwoju naukowego oraz zaprezentowania własnych badań. Uczestnicy mogą wygłaszać referaty lub prezentować tematy w formie plakatów. Serdecznie zapraszamy również koła naukowe do udziału i opowiedzenia o swoich zainteresowaniach. To także doskonała okazja do spotkania potencjalnych pracodawców i wymiany doświadczeń z innymi entuzjastami matematyki. To właśnie uczestnicy tworzą niepowtarzalny klimat konferencji.

Szczegółowe informacje będą pojawiać się na mediach społecznościowych konferencji. Zachęcamy do obserwowania:

– Facebooka:

<https://web.facebook.com/omatkopwr/>

– Instagrama:

<https://www.instagram.com/omatko.pwr/>



Jeszcze jednym, ciekawym aksjomatem jest

$$\forall n, m [n \leq m \Rightarrow \exists k (n + k = m)].$$

Jeżeli liczba m jest większa od liczby n , to możemy przedstawić m jako $n + k$ dla pewnej liczby k . Dlaczego powiedziałem, że ten aksjomat jest ciekawy? Otóż do spółki z poprzednimi gwarantuje, że $n + 1$ jest najmniejszą liczbą większą niż n . Dopiero teraz nasza lista aksjomatów opisuje struktury, w których istnieje jednoznacznie wyznaczona *następna* liczba.

Nieskończone liczby

Okazuje się jednak, że powyższe aksjomaty uzupełnione o zasadę indukcji opisują znacznie większą klasę struktur niż tylko prawdziwe liczby naturalne \mathbb{N} . W szczególności istnieje taka struktura matematyczna, która zawiera element większy od każdej prawdziwej liczby naturalnej, jednocześnie spełniając teorię Peano, a więc będąc strukturą arytmetyczną. Zauważmy najpierw, że jeśli wprowadzimy nową stałą c , a do aksjomatów Peano dorzucimy zdanie

$$c \geq 0,$$

to otrzymamy teorię niesprzeczną, a więc taką, która ma model – jest możliwa do zrealizowania. W modelu stała c przyjmie konkretną wartość. Dla $c \geq 0$ możemy wybrać na przykład $c = 10$. Podobnie dla dowolnego zdania

$$c \geq m,$$

gdzie m jest równe $1, 2, 3, 4, \dots$, możemy wybrać model, w którym c przyjmie wartość gwarantującą realizowanie naszej teorii.

Przedstawię teraz szkic dowodu *Twierdzenia o zwartości Logiki I rzędu*.

Rozważmy teorię – a więc zbiór aksjomatów – składającą się z aksjomatów Peano oraz zdań powyższego typu dla wszystkich m naturalnych. Jest to oczywiście nieskończona teoria, ale to nie stanowi żadnego problemu. Załóżmy, że jest to teoria sprzeczna. Każda sprzeczna teoria dowodzi każdego zdania – na mocy zasady „z fałszu wynika wszystko”. Weźmy zatem *dowód* fałszywego zdania – na przykład $0 \neq 0$. Tutaj zachowujemy czujność – przez dowód rozumiemy *skończone* rozumowanie, a więc korzystające ze skończonej liczby aksjomatów. Ale wcześniej zobaczyliśmy, że każdy skończony fragment naszej teorii jest niesprzeczny, bo można było wybrać odpowiednią wartość dla c . Fragment ten nie może więc dowodzić zdania $0 \neq 0$. W takim razie cała (nieskończona) teoria jest niesprzeczna, ponieważ, jak widać, nie istnieje dowód $0 \neq 0$ – to już wystarcza do niesprzeczności. Oznacza to, że istnieje model dla tej teorii, a więc pewna struktura arytmetyczna, w której stała c przyjmuje wartość większą od każdej prawdziwej liczby naturalnej.

Doszliliśmy więc do zaskakującego wniosku, że istnieje struktura arytmetyczna, w której występują nieskończone liczby. Co więcej, okazuje się, że korzystając z arytmetyki, nie można stwierdzić, czy dana liczba jest skończona, czy nie. Gdyby się dało, to istniałaby formuła φ rozstrzygająca skończoność liczby. Dla takiej formuły $\varphi(x)$ jest prawdziwe, gdy x jest skończony, a fałszywe, gdy x jest nieskończony. Wówczas zachodzi

$$\varphi(0) \wedge (\forall n \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)),$$

ponieważ każda skończona liczba plus jeden wciąż jest skończona. Tylko że wtedy zasada indukcji prowadzi do

$$\forall n \varphi(n),$$

czyli nasza formuła nie rozstrzyga dobrze o skończoności liczb.

Oto krajobraz, który się przed nami rozciągnął: gdy opisaliśmy arytmetykę, której się nauczyliśmy, okazało się, że jej zasady mogą być spełnione przez struktury bogatsze od liczb naturalnych, a nasza arytmetyka nic sobie z tego nie robi – nie zauważa nawet różnicy między *prawdziwymi* liczbami a nieskończonymi elementami. Liczby naturalne wyglądają jak tylko szczególny przypadek ogólnej struktury arytmetycznej...

Dla Czytelnika Wnikliwego: istnienie modelu dla teorii niesprzecznej wynika z twierdzenia o pełności.



Niedostępna teoria

Spróbujmy się im jednak bliżej przyjrzeć. Rozważmy listę wszystkich możliwych zdań, które są realizowane w strukturze prawdziwych liczb naturalnych \mathbb{N} . Na tej liście pojawią się wszystkie oczywistości pokroju $0 = 0$, jak i wszystkie najbardziej wysublimowane twierdzenia arytmetyczne. Wśród nich będą z całą pewnością nieudowodnione i niesformułowane dotychczas twierdzenia teorii liczb. Jest dość jasne, że nie da się wypisać wszystkich tych zdań – choćby dlatego, że jest ich nieskończenie wiele. Ale możemy zadać sobie pytanie, czy istnieje jakikolwiek przepis, który powie nam, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy nie. Taki przepis moglibyśmy zaimplementować jako program komputerowy i dostawać (być może po bardzo długim czasie) odpowiedzi – tak lub nie.

Co ciekawe, od prawie stu lat wiemy, że taki algorytm nigdy nie powstanie. Jest to konsekwencja I twierdzenia Gödla o niezupełności. Mówi ono mniej więcej tyle, że każda teoria zupełna, która potrafi odtworzyć arytmetykę, jest nieobliczalna. Zupełna teoria to taka, która jest zbiorem *wszystkich* zdań prawdziwych w pewnej strukturze, a nieobliczalność oznacza, że nie istnieje taki algorytm, którego działanie opisaliśmy powyżej. Umiejętność odtworzenia arytmetyki jest trochę bardziej subtelną własnością, ale być może zadowoli nas stwierdzenie, że praktycznie każda niebanalna teoria, z którą obcuje się w matematyce, tę zdolność posiada.

Nasza sytuacja wygląda następująco: mamy ograniczony dostęp do zasad, którymi rządzą się prawdziwe liczby naturalne. Posługujemy się zatem obliczalnymi teoriami, takimi jak arytmetyka Peano, godząc się z konieczności na większą ogólność. A co to mówi o Matematyce? W opinii autora jeden wniosek jest jasny. Matematyka nie jest taka prosta, na jaką może wyglądać, nawet na poziomie tak podstawowym jak arytmetyka. Ale nie powinno nas to zaskakiwać. Zaskakiwać może jednak to, że nie wszystko, nawet o liczbach naturalnych, można udowodnić. A więc Matematyka nie jest czarno-biała. Ma swoje szarości. . .



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1798. W pola tabeli 9×9 wpisano liczby całkowite od 1 do 81 (w każdym polu znajduje się jedna liczba, wszystkie liczby są różne). Okazało się, że dowolne dwie liczby różniące się o 3 znajdują się w sąsiednich polach. Udowodnić, że różnica liczb wpisanych w pewne dwa narożne pola jest podzielna przez 6.

M 1799. Pięć krawędzi pewnego czworościanu jest stycznych do sfery. Udowodnić, że istnieje inny zbiór pięciu krawędzi tego czworościanu, z których każda jest styczna do pewnej sfery (niekoniecznie tej samej co wcześniej).

M 1800. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n!)! \leq (n-1)!^{n!} \cdot n!^{(n-1)!}.$$

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1107. Z brzegu balkonu, na wysokości H nad ziemią, Jacek upuszcza pionowo ołowiane kulki, każda o masie m . Stara się jak najdokładniej trafić w wyznaczony punkt. Dysponuje najprecyzyjniejszą dostępną aparaturą. Na podstawie zasady nieoznaczoności Heisenberga oszacuj typową odległość od celu, w jakiej będą lądowały kulki Jacka?

F 1108. Belka o masie m i długości L spoczywa na poziomym, płaskim podłożu. Współczynnik tarcia między powierzchnią belki i podłożem wynosi μ . Belka jest jednorodna, tzn. masa przypadająca na jednostkę jej długości jest stała i wynosi ρ . Jaka jest najmniejsza wartość F_{min} poziomej, punktowej (tzn. przyłożonej w jednym punkcie belki) siły potrzebnej do przesunięcia belki? Przyspieszenie ziemskie wynosi g . Pomijamy różnicę wartości współczynników tarcia statycznego i kinetycznego.

Rozwiązania na str. 24



Nagrody Nobla 2024

Na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego kilka lat temu narodziła się nowa świecka tradycja. Na początku października, we wtorek przed południem, w największej auli zbierają się pracownicy, studenci i inni zainteresowani, aby wspólnie obejrzeć transmisję ogłoszenia laureatów Nagrody Nobla z Fizyki. Spotkanie rozpoczyna się około pół godziny przed planowanym ogłoszeniem, aby był czas na dyskusję i dzielenie się przewidywaniami. Zebrani typują nazwiska potencjalnych laureatów, odkrycia warte wyróżnienia czy choćby dziedziny, które komitet mógłby w danym roku nagrodzić.

Nie inaczej było 8 października 2024 roku. Na tablicy pojawiła się długa lista wytypowanych nazwisk. Po ogłoszeniu laureatów okazało się, że żaden z nich nie figurował na liście. Werdykt Komitetu Noblowskiego był zaskoczeniem nie tylko dla zgromadzonych w auli, ale również dla wielu komentatorów, których opinie pojawiły się w Internecie po jego ogłoszeniu. Wątpliwości dotyczą jednak nie wagi odkryć dokonanych przez nagrodzonych naukowców, a tego, czy odkrycia te należą do tej właśnie dziedziny, w której przyznano Nagrodę, czyli do fizyki.

Laureaci, John Hopfield i Geoffrey Hinton, uważani są za pionierów tzw. sztucznej inteligencji, czy też uczenia maszynowego. Aktualnie są to bardzo popularne pojęcia kojarzone głównie z modelami językowymi, chatbotami, z którymi można pogawędzić praktycznie na dowolny temat w przeglądarce internetowej, zlecić napisanie tekstu, rozwiązanie zadania albo wygenerowanie obrazka. Wydaje się, że są to narzędzia czysto informatyczne. Nagroda powinna być więc przyznana w dziedzinie „informatyka”. Czy zdecydowano przyznać ją w dziedzinie fizyki tylko dlatego, że informatyka (podobnie jak matematyka) nie należy do dziedzin, w których przyznawana jest Nagroda Nobla?

Komitet Noblowski publikuje zawsze obszernie uzasadnienie swojej decyzji. Zainteresowanym polecam zapoznanie się z tymi tekstami. Ich lektura jest co roku bardzo pouczająca. Pierwszą refleksją, jaka naszła mnie po przeczytaniu tegorocznego uzasadnienia, jest to, jak bardzo różne dziedziny nauki przenikają się i wzajemnie stymulują. John Hopfield jest fizykiem, ale ostatnie akademickie stanowisko, jakie piastował przed emeryturą, to profesor biologii molekularnej. Jego zainteresowania naukowe przekraczają granice różnych tradycyjnie rozumianych dziedzin. Wymienione przez Komitet Noblowski prace Hopfielda dotyczą sieci neuronowych, ale metody przez niego stosowane wywodzą się wprost z fizyki statystycznej, teorii służącej do opisu układów oddziałujących spinów lub układów złożonych z cząstek obdarzonych momentem magnetycznym, takich jak np. ferromagnetyki. Teraz, po 40 latach od publikacji tych przełomowych dla rozwoju całej nowej dziedziny nauki, jaką są sieci neuronowe i uczenie maszynowe, okazuje się, że kluczowe znaczenie miał wkład inspirowany dziedziną z pozoru bardzo odległą. Co mogą mieć wspólnego układy spinów czy materiały magnetyczne z neuronami? Okazuje się, że coś wspólnego mają. Chodzi o to, jak w złożonych układach pojawiają się pewne kolektywne zjawiska, które mogą być wykorzystywane do zapamiętywania lub przetwarzania informacji. Jak widać, dostrzeganie takich analogii może być inspiracją do ważnych odkryć naukowych.

Drugi laureat, Geoffrey Hinton, z wykształcenia jest psychologiem poznawczym. Razem z byłym doktorantem

pierwszego laureata, Terrencem Sejnowskim (który zaczął karierę jako fizyk), twórczo rozwinął pomysły Johna Hopfielda. W swoich pracach zastosowali metody inspirowane pracami Ludwiga Boltzmanna. Opracowany przez nich model sieci neuronowej nazwany został nawet *maszyną Boltzmanna*, na cześć tego dziewiętnastowiecznego pioniera fizyki statystycznej, twórcy kinetycznej teorii gazów i statystycznego objaśnienia drugiej zasady termodynamiki.

Tegoroczni laureaci oraz ich współpracownicy przekraczali granice między dziedzinami: fizyką, biologią, psychologią, informatyką. Wskazówka dla młodych, rozpoczynających swoją przygodę z nauką badaczy może być taka, że warto poszerzać swoje horyzonty i czerpać z innych dziedzin nauki. Czy młodemu Geoffreyowi Hintonowi, gdy zajmował się swoją pracą dyplomową z psychologii eksperymentalnej, przyszło kiedyś do głowy, że otrzyma Nagrodę Nobla z Fizyki?

Komitet Noblowski wymienia liczne zastosowania sieci neuronowych w badaniach w tradycyjnie rozumianej fizyce. Metody te stosuje się coraz częściej, zwłaszcza tam, gdzie trzeba przetwarzać ogromne ilości danych: z akceleratorów (odkrycie cząstki Higgsa), detektorów fal grawitacyjnych, sieci radioteleskopów (pierwsze zdjęcie czarnej dziury) itp. Tych zastosowań będzie coraz więcej we wszystkich dziedzinach nauki i naszego życia codziennego. Najlepszym tego przykładem jest przyznana następnego dnia Nagroda Nobla z Chemii. Otrzymali ją Demis Hassabis i John M. Jumper za wykorzystanie sztucznej inteligencji do przewidywania struktury prawie wszystkich znanych białek oraz David Baker za projektowanie całkiem nowych białek. Po tych dwóch nagrodach pojawiły się nawet żarty, że Literacką Nagrodę Nobla powinien otrzymać któryś z popularnych modeli językowych za swoją twórczość. Wiemy już jednak, że w tym roku do tego jeszcze nie doszło, i ostatecznie „tylko” dwie Nagrody Nobla przyznano za odkrycia związane z AI.

Powinniśmy być chyba wdzięczni Komitetowi Noblowskiemu za zwrócenie uwagi na fakt, że korzenie tej bardzo modnej obecnie dziedziny sięgają znacznie szerzej, poza ciasne ramy czystej informatyki, i czerpią doświadczenia z prac fizyków, którzy również zajmują się różnymi aspektami przetwarzania informacji. Warto też pewnie posłuchać Geoffreya Hintona, który po tym, jak rozwojowi AI poświęcił wiele lat swojego życia, zaczął niedawno ostrzegać przed zagrożeniami, jakie potencjalnie może nieść rozwój tej technologii, jeżeli nie obwaruje się go odpowiednimi zabezpieczeniami.

Szymon CHARZYŃSKI

Ile liter zmieści się na płaszczyźnie?

Łukasz RAJKOWSKI*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Tytułowe pytanie może brzmieć dosyć dziwnie. Płaszczyzna jest nieskończona, więc i liter na niej możemy napisać nieskończenie wiele (dysponując, jak to matematycy, nieskończonym czasem). Nie od dziś wiadomo jednak, że nieskończoności są różne, jedne mniejsze, drugie większe. Która z tych nieskończoności odpowiada na tytułowe pytanie? I czy zależy to od litery, której ono dotyczy? Nad tym właśnie zastanowimy się w niniejszym artykule.

Czytelnikom, którym obce jest rozróżnianie między nieskończonościami, polecamy *Deltowy* wykład na ich temat autorstwa Michała Korcha, zwłaszcza odcinek *Nieskończoność 4. Nie każda jest taka sama*, Δ_{19}^6 . Poniżej w pigułce prezentuję istotne dla nas wiadomości – dla tych, którzy potrzebują jedynie krótkiego przypomnienia w tym zakresie. Powiemy, że dwa zbiory są równoliczne, jeśli ich elementy można „połączyć w pary”, czyli jeśli istnieje między nimi bijekcja. Równoliczne są zatem zbiory liczb naturalnych i liczb parzystych, a odpowiednia bijekcja między tymi zbiorami to funkcja $f(n) = 2n$. Każdy zbiór, który jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, nosi nazwę *przeliczalnego*. Przeliczalne są wszystkie nieskończone podzbiory zbioru liczb naturalnych, jak również pewne jego nadzbiory (np. zbiór liczb wymiernych). Przeliczalne są również zbiory par, trójek, czwórek itp. elementów pochodzących ze zbioru przeliczalnego (np. przeliczalny jest zbiór par liczb naturalnych, co mocno wiąże się z przeliczalnością zbioru liczb wymiernych). Przykładem zbioru nieprzeliczalnego jest zbiór liczb rzeczywistych, a nawet sam odcinek $[0, 1]$. Jego „liczba elementów” nosi nazwę *continuum*; jest to również liczba punktów na płaszczyźnie czy w przestrzeni.

Wracając do tytułowego problemu, zaznaczmy od razu, że nie chcemy, aby litery się przecinały. Za przecinające się literki już w przedszkolu można było dostać deszczową chmurkę zamiast uśmiechniętego słoneczka, czego oczywiście chcemy uniknąć. Weźmy na warsztat najprostszą w zapisie literę, czyli I. Czy na płaszczyźnie starczy miejsca na continuum egzemplarzy, czy „tylko” przeliczalnie wiele? Okazuje się, że I specjalnie się nie rozpycha, i możemy upakować jej continuum. Wystarczy dla każdej liczby rzeczywistej t narysować kreskę od punktu $(t, 0)$ do punktu $(t, 1)$. Każda taka kreska (przynajmniej, zerowej grubości) może śmiało reprezentować literę I, i postawiliśmy ich continuum (rys. 1). Na więcej nie mamy co liczyć, gdyż na płaszczyźnie jest tylko (aż?) continuum punktów.



Rys. 1. Continuum liter I na płaszczyźnie, na czarno zaznaczono jedną z nich



Rys. 2. Continuum liter N na płaszczyźnie. Literę trzeba przesuwac „pod kątem”, by uniknąć nachodzenia na siebie

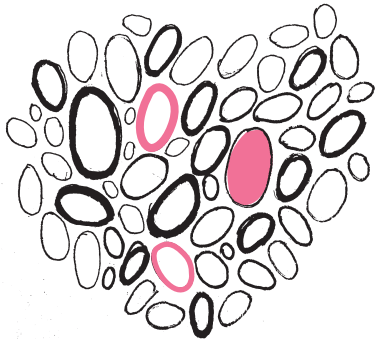


Rys. 3. Continuum liter O na płaszczyźnie

To, co zadecydowało o sukcesie całej operacji, to możliwość przesuwania I w ustalonym kierunku tak, by żadna z przesuniętych wersji nie zahaczała o pozostałe. To samo moglibyśmy wykonać w przypadku N (rys. 2), Z, M czy W. Dla każdej z tych liter możemy bowiem wskazać kierunek taki, że każda prosta w tym kierunku przecina naszą literę co najwyżej raz. Niektórzy matematycy, zwani topologami, mogliby w tym momencie uśmiechnąć się z politowaniem, ponieważ dla nich wszystkie te litery są niejako tożsame z I, gdyż są po prostu jej powyginanymi wersjami, i wniosek co do liczebności możliwych do upchania egzemplarzy powinien być ten sam. Cóż, gdyby, mając napisać na kartce N, nabazgrali \sim , to od razu zobaczyliby w zeszycie burzowe chmurzysko, i mina by im zrzedła. My będziemy staranni!

Można w tym momencie nabrać podejrzeń, że każdą literę możemy napisać na płaszczyźnie continuum razy. Przyjrzyjmy się jednak literze O. Tutaj przesuwanie już nie zadziała – niewielkie przesunięcia skutkują przecięciami, obojętnie w jakim kierunku zostaną wykonane. Możemy jednak powiększać tę literę niczym pompowany balonik. Dostaniemy wówczas koncentryczne okręgi o różnych promieniach (rys. 3). Ponieważ promień możemy wybrać dowolny, liter O również możemy zmieścić continuum.

Takie rozwiązanie może się jednak nie podobać. Mało który przedszkolak poproszony o napisanie na kartce kilku liter O umieściłby pewne dwie jedna wewnątrz drugiej. Możemy zatem w tym wypadku chcieć nie tylko, by litery się nie przecinały, lecz również by rozłączne były zamknięte przez nie obszary płaszczyzny. Gdy dołożymy takie wymaganie, odpowiedź na nasze pytanie

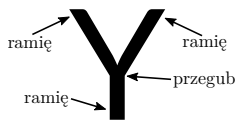


ulegnie zmianie. Zauważmy bowiem, że wewnątrz każdej litery O na płaszczyźnie musi się znaleźć punkt o współrzędnych wymiernych, niezależnie od tego, jak koślawo ją napiszemy. Jest to konsekwencja faktu, że między dowolnymi dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi znajduje się liczba wymierna. Punkty przypisane różnym literom muszą być różne, skoro ich wnętrza są rozłączne. Ponieważ liczb wymiernych jest przeliczalnie wiele, tyle jest również ich par, czyli punktów o współrzędnych wymiernych. Dowodzi to, że liter O o rozłącznych wnętrzach można umieścić na płaszczyźnie tylko przeliczalnie wiele. To samo tyczy się wszystkich liter „zamykających” jakiś fragment płaszczyzny: A, B, P czy R.

Spróbujmy teraz naszych sił z literą Y. Wydaje się, że nie zajmuje ona zbyt wiele miejsca – przede wszystkim nie ma żadnego „brzuska”, więc nie jesteśmy w stanie, używając poprzedniego argumentu, uzasadnić, że zmieści się tylko przeliczalnie wiele jej egzemplarzy. Można powiedzieć, że składa się ona z trzech połączonych liter I, co pozwala nabrać podejrzeń, że na płaszczyźnie znajdzie się miejsce na ich continuum. Jednak podstawowe zastosowane dotychczas sztuczki w tym wypadku się nie sprawdzają – zarówno przesuwanie, jak i skalowanie (które działało w przypadku litery O) nie dają pożądanego rezultatu. Intuicja może podpowiadać, że odpowiednio ją wyginając (nawet kosztem niskich not za styl), będziemy na tyle blisko litery I, że continuum powinno być w zasięgu ręki. Ta intuicja jest jednak błędna, o czym przekonuje poniższe rozumowanie.

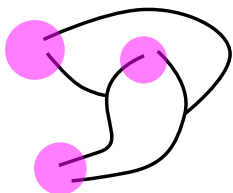
Rozważmy zatem dowolny zbiór nieprzecinających się liter Y na płaszczyźnie. Udowodnimy, że musi on być co najwyżej przeliczalny. Dla ułatwienia dalszego rozumowania, wprowadźmy pojęcie koła *wymiernego*, to znaczy takiego, że zarówno jego promień, jak i obie współrzędne środka są wymierne. Wymiernych kół jest zatem przeliczalnie wiele, podobnie jak ich par, trójek, czwórek itp.

Przyjrzyjmy się teraz igrekowej anatomii. Litera Y ma trzy ramiona łączące się w punkcie, który nazwiemy *przegubem* (rys. 4). Jakbyśmy takiej litery Y nie napisali, możemy wskazać trzy rozłączne i wymierne koła, z których każde



Rys. 4. Anatomia litery Y

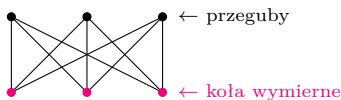
- (a) zawiera koniec jednego z jej ramion,
- (b) nie przecina żadnego z pozostałych ramion, w szczególności nie zawiera przegubu.



Rys. 5. Dwie malownicze litery Y, którym przypisaliśmy tę samą trójkę kół

Każdej napisanej przez nas literze Y przypisujemy w ten sposób trójkę wymiernych kół. Jak już wspomnieliśmy, takich trójek jest przeliczalnie wiele. To oczywiście nie koniec dowodu – dwie litery Y mogą mieć przypisany ten sam zestaw trzech wymiernych kół, jak pokazuje rys. 5. Okazuje się jednak, że jeden zestaw nie może być współdzielony przez *trzy* litery Y. Stwierdzenie to, które zaraz uzasadnimy, implikuje, że liter Y napisaliśmy co najwyżej przeliczalnie wiele.

Przypuśćmy zatem, że jest inaczej – i że pewnym trzem literom Y przyporządkowaliśmy tę samą trójkę kół wymiernych. Mamy trzy koła wymierne i trzy przeguby, każdy przegub jest połączony kreską z każdym kołem wymiernym i kreski te nie przecinają się (bo nie przecinają się napisane przez nas litery Y). Polecam Czytelnikowi choć jedną próbę narysowania takiej konfiguracji. Nie udało się, prawda? I nie bez powodu – jest to niemożliwe! Problem ten przybiera różne postaci, w jednej z nich należy trzy domy podłączyć do źródeł wody, elektryczności i gazu tak, aby przyłącza nie przecinały się. A w formalnym żargonie jest to stwierdzenie nieplanarności pełnego grafu dwudzielnego $K_{3,3}$ (rys. 6). Nie da rady i już – krótkie wyjaśnienie oparte na *wzorze Eulera* można odnaleźć w *Deltoidzie* z Δ_{11}^8 .



Rys. 6. Pełny graf dwudzielny $K_{3,3}$, którego nie można narysować na kartce tak, by połączenia między wierzchołkami nie przecinały się



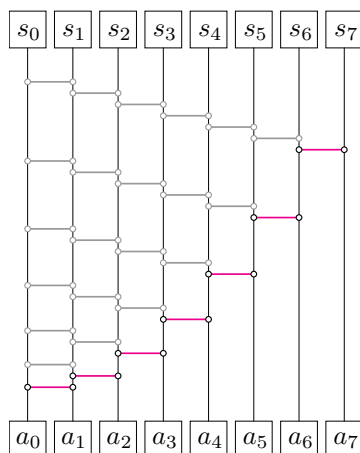
Rys. 7. Litera Y (na czarno) jako podlitera innych liter

Ponieważ Y może zmieścić się na płaszczyźnie co najwyżej przeliczalnie wiele razy, to to samo dotyczy wszystkich liter, które zawierają Y jako „podliterę”. Przykładami są T czy K, lecz również wspomniane wcześniej A i P (rys. 7), i to nawet jeśli dopuścimy „zawieranie” liter jedna w drugiej. Czytelnikowi proponujemy rozstrzygnięcie tytułowego pytania dla każdej z pozostałych liter alfabetu. Nie trzeba dodawać, że próby praktyczne są skazane na niepowodzenie...

O sortowaniu równoległym

Przemysław KICIAK*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Sieć sortująca algorytmu sortowania przez wstawianie. Na dole znajduje się ciąg dany, a na górze – posortowany

Wiele algorytmów sortowania działa w ten sposób, że pary elementów na kolejno wskazanych miejscach są porównywane i jeśli drugi element z pary powinien poprzedzać pierwszy, przestawiane. Urządzenie lub procedurę porządkującą w ten sposób parę elementów nazywamy **komparatorem**.

W niektórych algorytmach kolejność porównywanych par jest z góry ustalona, w związku z czym wynik porównania może spowodować co najwyżej pominięcie użycia komparatora dla pewnych dalszych par. Takie algorytmy możemy zilustrować za pomocą tzw. **sieci sortującej**. Rysunek 1 przedstawia taką sieć dla popularnego algorytmu sortowania przez wstawianie (*Insertion sort*). Sam algorytm jest następujący: kolejne elementy ciągu są „przesuwane w lewo”, dopóki nie napotkają elementu mniejszego od siebie (lub trafią na początek ciągu). W naszej ilustracji pionowe kreski symbolizują miejsca w sortowanej tablicy, a poziome kreski przedstawiają wywołania komparatora (w kolejności od dołu do góry), przy czym kolorem szarym są zaznaczone wywołania pomijane, gdy poprzednie wywołanie komparatora nie spowodowało przestawienia elementów. Liczba kolorowych kresek jest optymistyczną złożonością czasową tego algorytmu, a liczba wszystkich możliwych wywołań komparatora to złożoność pesymistyczna. Dla ciągu o długości n ta pierwsza złożoność to $n - 1$, a ta druga jest równa $\frac{1}{2}(n^2 - n)$.

W algorytmach sekwencyjnych w danej chwili działa co najwyżej jeden komparator. Najszybsze algorytmy sekwencyjne mają złożoność pesymistyczną rzędu $n \log n$ (choć nie da się ich tak pięknie zilustrować, jako że porównania i przestawiania są osobnymi operacjami i można w nich przestawiać inne elementy niż te, które właśnie zostały porównane). Mając natomiast do dyspozycji $h = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ wątków obliczeniowych, z których każdy wywoła komparator w tej samej chwili, można jednocześnie uporządkować h par elementów. Wykorzystuje to algorytm sortujący ciąg w czasie rzędu $\log^2 n$. Można go zaimplementować na karcie graficznej, której kilkanaście tysięcy lub skromne kilkaset procesorów szybko posortuje nawet bardzo długi ciąg. Działanie algorytmu objaśnimy, pokazując sortowanie ciągów złożonych tylko z zer i jedynek. Takie podejście jest usprawiedliwione przez:

Twierdzenie. *Dowolny algorytm sortowania przy użyciu sieci komparatorów, poprawnie sortujący wszystkie ciągi o długości n składające się z zer i jedynek, poprawnie sortuje też ciągi n elementów dowolnego zbioru liniowo uporządkowanego.*

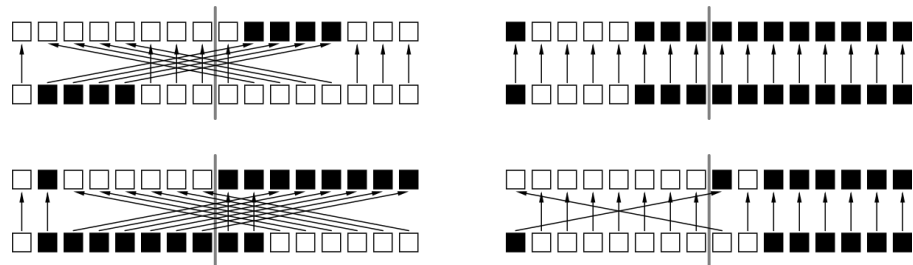
Dowód tego twierdzenia, zwanego **zasadą zerojedynkową**, jest podany w książce [1]. Ważny w dowodzie jest fakt, że jeśli drugi element z pary porządkowanej przez komparator nie jest mniejszy niż pierwszy (czyli w szczególności jeśli elementy są równe), to te elementy nie są przestawiane.

Zanim przedstawimy zapowiadany algorytm sortowania, przyjmijmy jeszcze następujące definicje: **ciągiem bitonicznym** nazwiemy ciąg będący połączeniem dwóch ciągów monotonicznych: niemalejącego, po którym następuje nierosnący (mówimy o **ciągu typu rm**) albo nierosnącego, po którym następuje niemalejący (to jest **ciąg typu mr**). Dowolny ciąg monotoniczny (a w szczególności ciąg jednoelementowy) jest ciągiem bitonicznym obu tych typów.

Zauważmy, że ciągi zer i jedynek typu *rm* ma wszystkie jedynki skupione obok siebie, więc zera mogą występować tylko na jego początku i na końcu, a w ciągu typu *mr* wszystkie zera znajdują się obok siebie. Przyjrzymy się zatem porządkowaniu ciągów bitonicznych zer i jedynek.

Na zerojedynkowych ciągach bitonicznych długości $2h$ będziemy przeprowadzać następującą operację: dzielimy je na dwie części równej długości i każemy komparatorom porządkować (jednocześnie) pary złożone z i -tych elementów każdej z połówek. Przykłady zastosowania tej operacji przedstawione są na rysunku 2; wyniki takiego porządkowania są pokazane nad każdym ciągiem. Możemy zauważyć, że w każdym przypadku powstają dwa ciągi bitoniczne o długości h , przy czym jeśli liczba zer nie przekracza h , to wszystkie zera znajdują się w pierwszym z nich, a w przeciwnym przypadku wszystkie jedynki trafią do drugiej połowy tablicy z elementami ciągu. Nietrudne uzasadnienie słuszności tej obserwacji dla dowolnego ciągu bitonicznego pozostawiam Czytelnikowi. Podkreślimy raz jeszcze, że mając do dyspozycji h wątków obliczeniowych, przedstawioną operację możemy wykonać w jednym kroku.

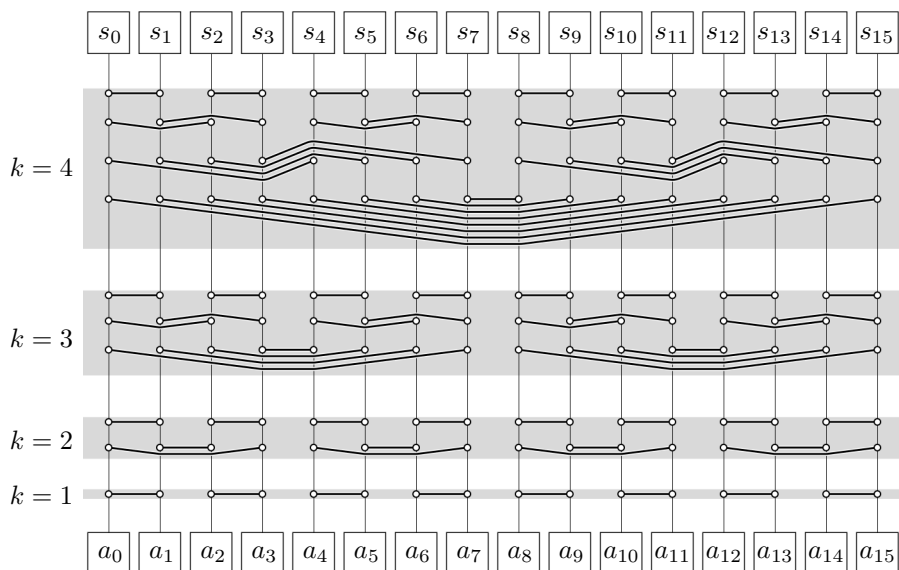
Powyższe spostrzeżenia pozwalają skonstruować oparty na komparatorach algorytm sortujący zerojedynkowe ciągi bitoniczne długości 2^k w k krokach (jeśli mamy do dyspozycji 2^{k-1} wątków obliczeniowych). Pierwszy krok został przedstawiony powyżej, w drugim kroku zajmujemy się każdym z dwóch powstałych ciągów bitonicznych z osobna (na każdy przeznaczając 2^{k-2} wątków), w trzecim kroku mamy do czynienia z czterema ciągami bitonicznymi, i tak dalej... W ostatnim kroku etapu powstają bitoniczne ciągi o długości 1 i wtedy cały ciąg o długości 2^k jest posortowany.



Rys. 2. Cztery przykłady działania komparatorów na połowach ciągów bitonicznych. Białe kwadraty oznaczają 0, a czarne 1. Z ciągu danego (na dole) komparatory tworzą ciąg pokazany wyżej



Poszukiwany algorytm sortujący dowolny ciąg długości n działa na podstawie powyższych spostrzeżeń. Dla ciągu długości $n = 2^m$ składa się on z m etapów. W k -tym etapie otrzymywane są posortowane podciągi o długości 2^k . Pierwszy etap, w jednym kroku, porządkuje pary sąsiednich elementów: pierwszy z drugim, trzeci z czwartym itd. W k -tym etapie pary sąsiednich fragmentów ciągu o długości 2^{k-1} , posortowanych niemalejąco, są scalane w jeden fragment, przy czym wcześniej odwracamy kolejność elementów drugiego fragmentu, dzięki czemu uzyskujemy ciąg bitoniczny typu rm . Tak uzyskane ciągi bitoniczne długości 2^k sortowane są w k krokach przy pomocy opisanej wcześniej procedury. Kolejne wywołania komparatora zilustrowane są na poniższym rysunku (podobnie jak poprzednio, należy go czytać „od dołu”).



Rys. 3. Sieć sortująca dla ciągów długości $n = 16$. To, że w ramach każdego etapu pierwsze równoległe wywołania komparatora układają się w „koncentryczne łuki”, wynika z opisanego wcześniej odwracania co drugiego z obecnych na danym etapie podciągów celem uzyskania ciągów bitonicznych

Całkowita liczba kroków sortowania w algorytmie wykonującym m etapów jest równa $\frac{1}{2}(m^2 + m)$, a więc algorytm ten ma rząd złożoności $\log^2 n$. Jeśli liczba elementów ciągu nie jest potęgą dwójki, to możemy w wyobraźni dopisać na końcu ciągu elementy o wartości ∞ tak, aby otrzymać ciąg o długości $2^{\lceil \log_2 n \rceil}$. W implementacji komparator, który miałby sięgnąć poza koniec danego ciągu, natychmiast kończy działanie.

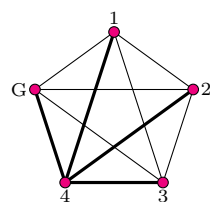
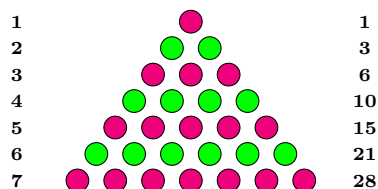
Gdybyśmy mieli 2^{19} procesorów, to do posortowania miliona (a nawet $2^{20} = 1048576$) elementów wystarczyłoby 210 kroków. Takiego sprzętu większość Czytelników w domu nie ma, ale karta graficzna, która ma tylko 1024 procesory, posortuje milion elementów w $210 \cdot 512 = 107520$ krokach, na jakie całe obliczenie zostanie podzielone przez sterownik. Opis (w postaci abstrakcyjnej) i formalny dowód poprawności tego algorytmu można znaleźć w książce [1], a pełna, działająca na karcie graficznej implementacja w języku GLSL (i różne jej zastosowania) jest przedstawiona w książce [2].

Literatura:

- [1] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein: *Wprowadzenie do algorytmów*, WNT, Warszawa, 2005.
- [2] P. Kiciak: *OpenGL i GLSL (nie taki krótki kurs)*, wyd. II, WSA, Warszawa, 2024.

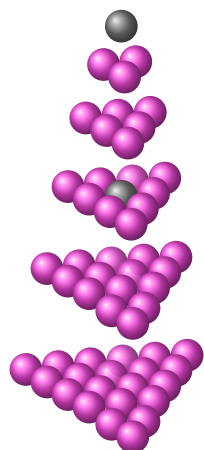
Byle nie dodawać Paweł Rafał BIELIŃSKI*

* Nauczyciel, Warszawa



Można też to zagadnienie rozumieć jako zliczanie krawędzi w grafie pełnym

Liczby piramidalne nazywa się też *czworościennymi*, gdyż typowa piramida ma 4, a nie 3, strony.



Jak głosi legenda opowiadana o młodym Gaussie, pewnego dnia postawiono go przed zadaniem obliczenia sumy liczb naturalnych od 1 do 40 włącznie. Młodego Gaussa najwyraźniej mało co odrzucało bardziej niż perspektywa dodawania garstki całkiem niedużych liczb, więc zamiast tego, z użyciem pewnej chytrej sztuczki, wyprowadził ogólny wzór na n -tą *liczbę trójkątną*:

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

My także spróbujemy tego dokonać, ale wykorzystamy w tym celu interpretację kombinatoryczną podanej sumy. Następnie zaś przekonamy się, że nasza metoda pięknie się uogólnia i pozwala unikać dodawania nawet w wyraźnie trudniejszych sytuacjach.

Liczby trójkątne

Wyobraźmy sobie przyjęcie dla fanów gier karcianych, na które oprócz gospodarza przybyło n gości. Na takim przyjęciu ktoś powinien zagrać w garibaldkę – grę dla dwóch osób. Na ile sposobów można wybrać dwójkę chętnych do tej gry?

Łatwo tę wartość obliczyć, uwzględniając kolejność przybywania gości. Kiedy na miejsce przybył pierwszy z nich, zastał jedynie gospodarza i mógłby co najwyżej zagrać z nim. Kiedy wszedł drugi, pojawiły się nowe opcje, bo teraz ten właśnie przybyły gość może zagrać z dowolną z dwóch już obecnych osób. Podobnie trzeci z przybyłych mógłby zagrać w parze z którąś z trzech obecnych osób. I tak dalej: dla k -tego gościa istnieje na tym przyjęciu dokładnie k dwójek, w których jest on ostatnim przybyłym członkiem. Zatem możliwych dwójek jest dokładnie $1 + 2 + 3 + \dots + n$. Innymi słowy, pogrupowaliśmy możliwe dwójki graczy według najpóźniej przybyłej osoby i okazało się, że ich łączna liczba jest n -tą liczbą trójkątną.

Z drugiej strony nie jest wcale trudno obliczyć ową liczbę bez takiego grupowania: przecież aby wybrać dwóch graczy, wystarczy wybrać jednego, dowolnego – to zrobimy na $n + 1$ sposobów – a następnie drugiego spośród pozostałych n . W ten sposób jednak policzylibyśmy każdą dwójkę dwukrotnie, bo każdy z dwóch jej członków mógł być wybrany jako ten pierwszy. Dochodzimy zatem do wniosku, że szukana liczba dwójek wynosi $\frac{1}{2}n(n + 1)$. Z całej tej opowieści wynika zaś tożsamość:

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Możemy teraz odpowiedzieć na pytanie Gaussa: sumą liczb naturalnych od 1 do 40 włącznie jest $\frac{40 \cdot 41}{2} = 820$.

Liczby piramidalne

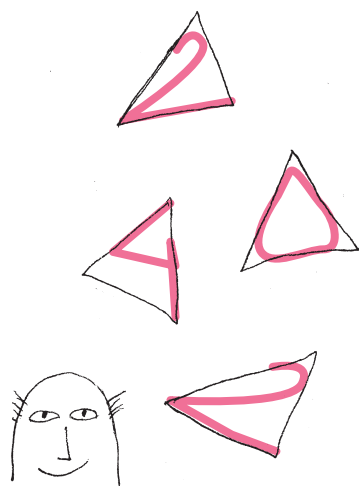
Zbadamy teraz dalsze możliwości zastosowanej powyżej metody. Obliczymy mianowicie n -tą *liczbę piramidalną*, równą sumie kolejnych liczb trójkątnych:

$$P(n) = T(1) + T(2) + T(3) + \dots + T(n).$$

Celowo nie podstawiamy tu żadnego wzoru za $T(k)$, ponieważ będziemy chcieli korzystać przede wszystkim z opisanej powyżej interpretacji kombinatorycznej.

Wyobraźmy więc sobie przyjęcie dla fanów gier karcianych, na które oprócz dwojga gospodarzy przybyło n gości. Na takim przyjęciu ktoś powinien zagrać w preferansa – grę dla trzech osób. Na ile sposobów można wybrać taką trójkę graczy?

Podobnie jak ostatnio, rozważmy gości przyjęcia w kolejności ich przybywania, pamiętając o dwojgu obecnych przez cały czas gospodarzy. Gdy przybywa pierwszy gość, powstaje pierwsza możliwa trójka. W chwili przybycia drugiego pojawiają się nowe opcje, mianowicie te trójki, w których skład on wchodzi. Ogólnie, gdy przybywa k -ty gość, pojawia się pewna liczba nowych możliwości. Kluczowa obserwacja: trójek z udziałem właśnie przybyłego jest dokładnie tyle, co dwójek bez niego. Tych z kolei jest $T(k)$, bo bez tego gościa dostępnych jest



$k + 1$ osób (właśnie dlatego w tej opowieści mamy drugiego gospodarza). Wobec tego opisana liczba rzeczywiście jest równa $T(1) + T(2) + T(3) + \dots + T(n)$, czyli $P(n)$.

Znowu możemy jednak ominąć kolejność przybywania gości. Wystarczy zauważyć, że trójka graczy to jeden, wybrany spośród $n + 2$, i jeszcze dwójka spośród $n + 1$ graczy, wybrana na $T(n)$ sposobów. I znowu, uwzględniając, że w trójce dowolny gracz mógłby być tym pierwszym, otrzymujemy odpowiedź w nowej postaci: $\frac{1}{3}(n + 2)T(n)$. Po lekkim uporządkowaniu dochodzimy do tożsamości

$$P(n) = T(1) + T(2) + T(3) + \dots + T(n) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}.$$

W ten sposób możemy łatwo – i bez dodawania – obliczyć np. $P(22)$, czyli sumę 22 początkowych liczb trójkątnych. Wynosi ona znaczące

$$\frac{22 \cdot 23 \cdot 24}{6} = 2024.$$

Dalej, wyżej!

Pokusimy się obecnie o daleko idące uogólnienie. Będziemy rozważać liczby trójkątne oraz piramidalne jako szczególne przypadki liczb piramidalnych pewnego wymiaru, równego tu odpowiednio 2 lub 3. Przyjmijmy, że liczba piramidalna danego wymiaru jest sumą początkowych liczb piramidalnych wymiaru o 1 niższego – można to interpretować jako układanie kulek w wielowymiarowe piramidalne stosy, tak jak dla liczb trójkątnych i piramidalnych.

Oznaczmy przez $P_0(n)$ n -tą liczbę piramidalną wymiaru 0, umawiając się przy tym, że $P_0(n) = 1$ dla każdego n . Dalej, dla danego $w > 0$ niech $P_w(n) = P_{w-1}(1) + P_{w-1}(2) + P_{w-1}(3) + \dots + P_{w-1}(n)$. Łatwo można zobaczyć, że wówczas $P_1(n) = n$, $P_2(n) = T(n)$ oraz $P_3(n) = P(n)$, czyli przyjęta przez nas konwencja rzeczywiście obejmuje wcześniejsze rozważania.

Czy możemy wyprowadzić ogólny wzór na $P_w(n)$? Okazuje się, że tak, a ponadto wystarczy powtórzyć rozumowanie przedstawione powyżej. Wyobraźmy sobie bowiem przyjęcie dla fanów gier karcianych, na którym obecnych jest $w - 1$ gospodarzy oraz n gości i chcemy, rozegrać partię w -ysięcia – gry dla w graczy.

Z jednej strony, gdy najwyższy numer gościa wśród grających wynosi k , to pozostałych możemy wybrać na $P_{w-1}(k)$ sposobów. Rozpatrując kolejno możliwe k , dochodzimy do wniosku, że grających można wybrać na $P_{w-1}(1) + P_{w-1}(2) + P_{w-1}(3) + \dots + P_{w-1}(n)$, czyli $P_w(n)$ sposobów.

Z drugiej strony natomiast można wybrać w graczy, wybierając najpierw jednego, a następnie pozostałych. Uwzględniając, że wśród $n + w - 1$ graczy można wybrać tego pierwszego na $n + w - 1$ sposobów, mamy nowy wzór na szukaną liczbę: $\frac{n+w-1}{w}P_{w-1}(n)$. Podstawiając za $P_{w-1}(n)$, a następnie za $P_{w-2}(n)$ i tak dalej, dojdziemy do wzoru:

$$P_w(n) = \frac{n(n + 1)(n + 2) \dots (n + w - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots w},$$

gdzie jedynekę w mianowniku dopisaliśmy głównie dla estetyki. Innymi słowy, jest to iloczyn w kolejnych liczb naturalnych, zaczynający się od n , podzielony przez iloczyn w kolejnych liczb naturalnych, ale tym razem zaczynając od 1. To nad wyraz elegancki wynik, nieprawdaż?

Pogłówkuj i Ty! Wyzwania

Oblicz, tj. przedstaw w postaci zwartego wzoru. Wszystkie chwytysą dozwolone!

1. $n \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2 + (n - 2) \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n$.
2. $nT(1) + (n - 1)T(2) + (n - 2)T(3) + \dots + 1 \cdot T(n)$.
3. $T(n) \cdot T(1) + T(n - 1) \cdot T(2) + T(n - 2) \cdot T(3) + \dots + T(1) \cdot T(n)$.
4. $T(2n) - T(2n - 1) + T(2n - 2) - \dots + T(2) - T(1)$.
5. $T(1) + T(3) + T(5) + \dots + T(2n - 1)$.

Jeśli, Drogi Czytelniku, przeżywasz tutaj małe *déjà vu*, to być może z powodu uderzająco podobnego zagadnienia, o którym pisał Wojciech Guzicki w Δ_{95}^7 .

Czytelnik Edukowany, znający *symbol Newtona* i jego interpretację kombinatoryczną, może zaatakować rozpatrywany problem z jeszcze jednej strony. W ten sposób odkryje kombinatoryczny dowód wzoru $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Wskazówki do wyzwań zamieściliśmy na stronie 21, w numerze znajdują się także odpowiedzi.

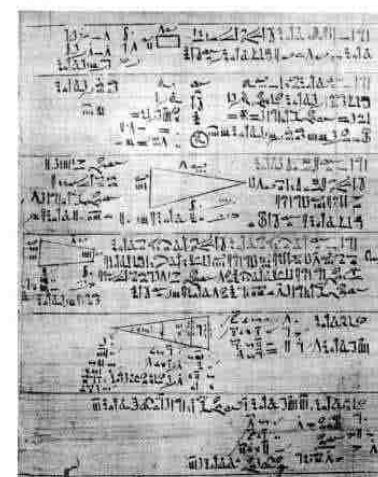
Równania różniczkowe jako hieroglify

Jose A. LANGA*, Grzegorz ŁUKASZEWICZ**

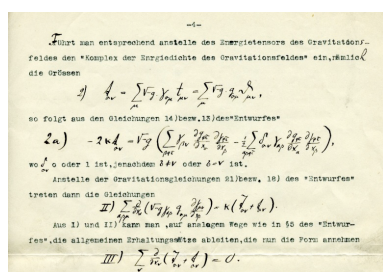
*Universidad de Sevilla
 **Wydział Matematyki, Informatyki
 i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Hieroglify na kamieniu z Rosetty w Egipcie (przewiezionym z Aleksandrii do Londynu w 1802 r.). Zostały rozszyfrowane dopiero w 1822 roku przez Jeana-François Champolliona



Rys. 2. Część papirusu matematycznego Rhinda. Jego nazwa pochodzi od Aleksandra Henry'ego Rhinda, szkockiego antykwarium, który kupił papirus w 1858 roku w Luksorze w Egipcie



Rys. 3. Wyjątek z maszynowego rękopisu Alberta Einsteina i Marcela Grossmanna, opublikowanego w 1914 roku w *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, przykład bardziej współczesnego matematycznego hieroglify

W tym artykule zamierzamy przybliżyć bogactwo świata równań różniczkowych i związanych z nimi zagadnień w szerokim kontekście – obejmującym matematykę, fizykę i filozofię nauki – na przykładzie równania, które symbolicznie zapisujemy jako

$$\Delta u = f.$$

Za tym napisem kryją się całe misternie skonstruowane światy. Możemy go traktować jako hieroglify, który należy dopiero rozszyfrować, dokładnie tak samo jak to było z hieroglifami egipskimi na kamieniu z Rosetty (rys. 1). Podobnie każdy tekst matematyczny (rys. 2 i 3) musimy najpierw rozszyfrować, a potem zrozumieć na różnych poziomach (o czym pisaliśmy również w Δ_{22}^1).

Pierwsza rzecz to rozszyfrowanie znaczenia znaków Δ , u , $=$ oraz f . Znak $=$ podpowiada, że napis $\Delta u = f$ wyraża równanie, a więc język tego napisu jest językiem matematyki, ale nie wiemy, jakie mają znaczenie symbole u , f oraz Δu . Które z tych obiektów oznaczają liczby, funkcje, a może jeszcze coś innego?

Rzeczywiście, interpretacji może być wiele. Skupmy się, zgodnie z porządkiem historycznym, na interpretacji klasycznej, gdzie u , f są funkcjami w przestrzeni euklidesowej jedno-, dwu- lub trójwymiarowej, a Δ oznacza operator różniczkowy. W przypadku dwuwymiarowym, czyli na płaszczyźnie, dla funkcji u i f dwóch zmiennych x_1, x_2 , napis $\Delta u = f$ odczytujemy jako

$$(1) \quad \Delta u(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2),$$

gdzie $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ oznacza drugą pochodną cząstkową po i -tej współrzędnej. (Pochodne cząstkowe można rozumieć jako „zwykłe” pochodne przy „zamrożeniu” wartości wszystkich zmiennych poza jedną, po której pochodna cząstkowa jest liczona).

No dobrze, ale o co nam chodzi, gdy piszemy równanie (1)? Równania różniczkowe rozumiemy podobnie jak równania algebraiczne. Na przykład, mając równanie $x^2 = a$, dla danej liczby a możemy zadać pytanie, czy istnieje liczba x , która to równanie spełnia, a jeśli tak – jak możliwie prosto przedstawić zbiór wszystkich takich liczb (tzn. zbiór rozwiązań). Liczba a może nie być sprecyzowana, jednak bywa, że nakładane są na nią pewne dodatkowe warunki (np. że jest liczbą dodatnią). Podobnie rozwiązań możemy chcieć szukać w jakimś określonym zbiorze, np. w zbiorze liczb wymiernych.

W przypadku naszego równania różniczkowego, analogicznie, dla danej ciągłej funkcji f należy znaleźć funkcję u mającą ciągle pierwsze dwie pochodne i spełniającą równość (1) w każdym punkcie (x_1, x_2) .

Podstawowe pytania w obu sytuacjach są te same.

(A) Czy dla wybranych danych (a czy f , odpowiednio) istnieje rozwiązanie (x czy u , odpowiednio) danego równania, a jeśli tak, to ile takich rozwiązań jest?

(B) Jakie są własności rozwiązań?

Wiemy, że w przypadku równania $x^2 = a$, gdy a jest liczbą dodatnią, to istnieją dwa rzeczywiste rozwiązania, symetryczne względem 0. Oznaczamy je jako \sqrt{a} (dodatnie) oraz $-\sqrt{a}$. Dla $a = 0$ mamy jedno rozwiązanie: $x = 0$, a dla a ujemnych nie istnieje liczba rzeczywista x spełniająca równanie $x^2 = a$.

Zagadnienie jednowymiarowe. Zilustrujemy nasze pytania dotyczące istnienia i własności rozwiązań równania $\Delta u = f$ w najprostszym, jednowymiarowym przypadku. Nasze równanie przybiera wtedy postać

$$(2) \quad \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = f.$$

Weźmy $f = 0$. Jest to bardzo ważny przypadek, nazywany *jednorodnym*. Jeżeli

$$(3) \quad \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0,$$

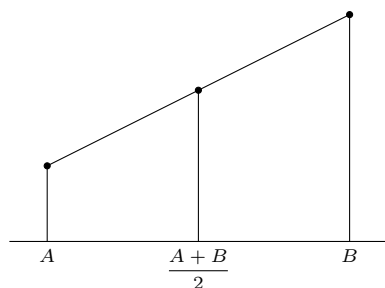
to nietrudno jest zobaczyć, że rozwiązania istnieją i mają postać

$$u(x) = ax + b,$$

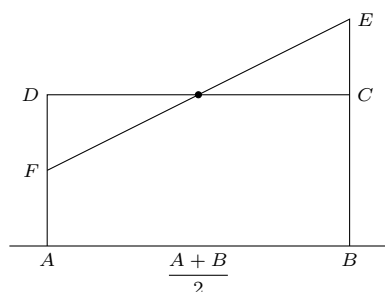
gdzie a i b mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Zatem nasze równanie różniczkowe ma nieskończenie wiele rozwiązań, wykresami których są proste. Jest to odpowiedź na pytanie (A) o istnienie i liczbę rozwiązań.

Do ważnych (i oczywistych) własności naszych rozwiązań, mających swoje naturalne (choć nieco mniej oczywiste) uogólnienia także w przypadku dwu- i trójwymiarowym, należą:

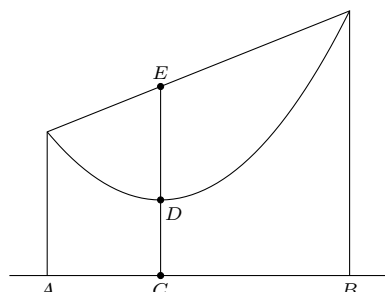
- I. Dla dowolnego odcinka (A, B) rozwiązanie równania (3) przyjmuje swoje ekstrema, czyli wartości najmniejszą i największą, na jego końcach (tzn. na brzegu tego odcinka). Jeśli rozwiązanie nie jest funkcją stałą, to wartości ekstremalne są przyjmowane *wyłącznie* na krańcach odcinka.
- II. Dla dowolnego odcinka (A, B) rozwiązanie równania (3) w środku tego odcinka przyjmuje wartość równą średniej z wartości przyjmowanych na brzegach odcinka, czyli $u(\frac{A+B}{2}) = \frac{u(A)+u(B)}{2}$ (rys. 4).
- III. Dla dowolnego odcinka (A, B) rozwiązanie równania (3) w środku tego odcinka przyjmuje wartość średnią *na tym odcinku*, co znaczy, że pole pod wykresem rozwiązania na odcinku (A, B) jest równe polu prostokąta o podstawie $B - A$ i wysokości $u(\frac{A+B}{2})$ (rys. 5).



Rys. 4. $u(\frac{A+B}{2}) = \frac{u(A)+u(B)}{2}$



Rys. 5. Pole prostokąta $ABCD$ jest równe polu trapezu $ABEF$



Rys. 6. Krzywa na odcinku $[A, B]$ leży pod swoją sieczną, $u(C) = D < E = \alpha u(A) + (1 - \alpha)u(B)$, gdzie $C = \alpha A + (1 - \alpha)B$. Czytelnikom, którzy nie znają pojęcia całki, może tu wystarczyć przyjęcie, że przez $\int_A^B f(x)dx$ rozumiemy pole pod wykresem funkcji f na odcinku $[A, B]$.

Rozważmy teraz prosty przykład równania *niejednorodnego*,

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 2 \quad \text{lub} \quad u''(x) = 2.$$

Z powyższego równania widzimy, że druga pochodna funkcji u jest dodatnia, a więc pierwsza pochodna jest funkcją rosnącą, w konsekwencji funkcja u jest ściśle wypukła, czyli na każdym odcinku (A, B) leży poniżej swojej siecznej na tym odcinku, co opisuje warunek $u(\alpha A + (1 - \alpha)B) < \alpha u(A) + (1 - \alpha)u(B)$ dla każdej liczby α z przedziału $(0, 1)$. W naszym przypadku $u(x) = x^2 + bx + c$ (rys. 6).

Wymienione powyżej własności II i III mają swoje uogólnienia dla rozważanego równania niejednorodnego. Wyglądają one następująco:

$$(4) \quad \frac{u(p+h) + u(p-h)}{2} = u(p) + \frac{1}{2}u''(p)h^2$$

oraz

$$(5) \quad \frac{1}{2h} \int_{p-h}^{p+h} u(r)dr = u(p) + \frac{1}{6}u''(p)h^2$$

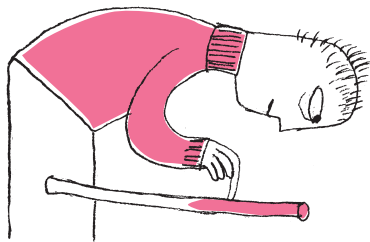
dla dowolnego ustalonego punktu p . W szczególności, gdy funkcja u spełnia równanie $u''(x) = 0$, otrzymujemy własności II i III, a w ogólniejszym przypadku powyższe wzory mówią nam, że operator $\frac{d^2}{dx^2}$ mierzy odchylenie wartości funkcji w danym punkcie p od wartości średnich, zdefiniowanych przez lewe strony równań (4) i (5) odpowiednio, na zawierającym go przedziale $(p-h, p+h)$.

Jak to wygląda od strony fizyki? Spójrzmy teraz na równania (2) i (3) od strony fizyki, a obraz nam się rozjaśni.

Równanie (3) opisuje następującą sytuację fizyczną. Załóżmy, że mamy pręt (obiekt jednowymiarowy) o długości $B - A$, na którego końcach A, B utrzymujemy stałą temperaturę $u(A)$ i $u(B)$. Pytamy o temperaturę $u(x)$ w każdym wewnętrznym punkcie pręta. Po bardzo długim czasie od początku eksperymentu rozkład temperatury w pręcie powinien się ustalić do funkcji spełniającej równanie (3), a więc do funkcji liniowej łączącej punkty $(A, u(A))$ i $(B, u(B))$.

Jeżeli natomiast w punkcie p we wnętrzu obszaru znajduje się źródło ciepła (co odpowiada temu, że $f(p) < 0$), to temperatura w punkcie p będzie większa niż średnia temperatura w jego otoczeniu. Taką sytuację opisuje równanie (2).

W świetle tej interpretacji własności I, II i III oraz wzory (4), (5) stają się zrozumiałe.



Zagadnienie brzegowe a zagadnienie początkowe. Poszukiwanie granicznego rozkładu temperatury w przecie możemy przedstawić w postaci następującego *zagadnienia brzegowego*:

$$(6) \quad \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = f(x), \quad A < x < B, \quad u(A) = u_A, \quad u(B) = u_B.$$

Szukamy tu funkcji $u(x)$ określonej na odcinku $[A, B]$, spełniającej równanie różniczkowe wewnątrz tego odcinka i powyższe warunki na jego brzegach, dla ustalonych liczb u_A i u_B .

Równanie (6) jest równaniem należącym do *mechaniki klasycznej* w przebraniu, ponieważ równanie

$$(7) \quad m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(x(t)), \quad A < t < B, \quad x(A) = x_A, \quad x(B) = x_B$$

opisuje ruch ciała o masie m w polu sił f , w przedziale czasu $A < t < B$, z zadanymi położeniami początkowym x_A oraz końcowym x_B .

W mechanice klasycznej Newtona równanie (7) uzupełnione jest zwykle podaniem warunków początkowych postaci $x(A) = x_A$, $\frac{dx}{dt}(A) = v_A$, to znaczy podaniem położenia i prędkości ciała w chwili A . Otrzymujemy wtedy *zagadnienie początkowe*:

$$(8) \quad m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(x(t)), \quad A < t < B, \quad x(A) = x_A, \quad \frac{dx}{dt}(A) = v_A.$$

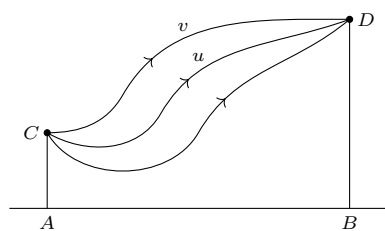
Zagadnienie *początkowe* zgodne jest z *zasadą przyczynowości* w fizyce, która mówi, że *przyczyna zawsze poprzedza skutek*. Mając prawo ruchu i *warunki początkowe* w chwili A , chcemy wyznaczyć trajektorię ruchu $x(t)$ na przedziale (A, B) .

Warto zauważyć, że równanie Newtona jest odwracalne w czasie, tzn. nie zmienia się, gdy odwrócimy czas, z t na $-t$. Aby się o tym przekonać, rozważmy razem z problemem (8) problem

$$m \frac{d^2 \hat{x}(t)}{dt^2} = f(\hat{x}(t)), \quad A < t < B, \quad \hat{x}(A) = x(B), \quad \frac{d\hat{x}}{dt}(A) = -\frac{dx(B)}{dt},$$

którego rozwiązanie $\hat{x}(t) = x(A + B - t)$ jest wyznaczone na przedziale (A, B) . Opisuje ono tę samą drogę, tylko w odwrotnym kierunku i z wektorami prędkości przeciwnie skierowanymi.

Tkwi w tym pewien dylemat opisu rzeczywistości, dotyczący fundamentalnych problemów fizyki: strzałki czasu, procesów nieodwracalnych, demona Maxwella i rosnącej entropii. Wiele razy chcielibyśmy odwrócić czas tylko na chwilę, „puścić film do tyłu”, aby rozbity wazon w całości wrócił na swoje miejsce... Jest to praktycznie niemożliwe, ale równania Newtona o tym nie mówią.



Rys. 7. Trzy różne krzywe określone na przedziale $A < x < B$, łączące punkty $C = u(A) = u_A$, $D = u(B) = u_B$

Sformułowanie wariacyjne i jego interpretacje. Zagadnienie *brzegowe* (6) możemy interpretować następująco. Mamy prawo ruchu i zadane dwa punkty (A, u_A) i (B, u_B) w przestrzeni (x, u) . Chcemy wyznaczyć trajektorię $u(x)$ spełniającą równanie różniczkowe (6) i łączącą te punkty, tzn. aby $u(A) = u_A$ i $u(B) = u_B$, $A \leq x \leq B$ (rys. 7).

Okazuje się, że rozwiązanie u zagadnienia (6) minimalizuje wyrażenie

$$F(u) = \int_A^B \frac{1}{2} \left| \frac{du(x)}{dx} \right|^2 dx + \int_A^B f(x)u(x)dx.$$

Oznacza to, że dla wszystkich funkcji $v(x)$ spełniających warunki brzegowe $v(A) = u_A$, $v(B) = u_B$ na końcach przedziału (A, B)

$$F(v) \geq F(u),$$

gdzie funkcja $u(x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (6).

Odpowiedzi do wyzwań z końca artykułu *Byłe nie dodawać* (s. 12)

1. $P(n)$
2. $P_4(n)$
3. $P_5(n)$
4. $2T(n)$
5. $\frac{1}{2}P(2n) - T(n)$ albo $T(2n) - 4P(n) + T(n)$

Rozważmy szkolne zadanie ruchu w pionie w polu grawitacyjnym Ziemi (np. badamy ruch podrzuconej piłki). Jeśli oś Ox jest skierowana do góry, to funkcję f reprezentuje liczba $-mg$, gdzie g jest stałą grawitacji.

Z tego, co powiedzieliśmy wyżej, trajektoria ruchu minimalizuje wyrażenie

$$F(x) = \int_A^B \frac{m}{2} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt - \int_A^B mgx(t) dt = \int_A^B \left\{ \frac{m}{2} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 - mgx(t) \right\} dt,$$

gdzie $\frac{m}{2} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2$ jest energią kinetyczną, a mgx energią potencjalną poruszającego się ciała.

Jeśli $g = 0$, to ruch od punktu x_A do punktu x_B odbywa się po prostej łączącej te punkty ze stałą prędkością, co jest zgodne z pierwszym prawem Newtona mówiącym, że *każdy obiekt pozostanie w spoczynku lub w ruchu jednostajnym po linii prostej, chyba że zostanie zmuszony do zmiany swojego stanu przez działanie siły zewnętrznej*. Ta tendencja do przeciwstawiania się zmianom stanu ruchu nazywana jest *bezwładnością*, a prawo to jest również nazywane *prawem bezwładności*.

W świetle powyższego zauważmy, że drugą zasadę ruchu w mechanice Newtona można sformułować jako zasadę najmniejszego działania: *średnia energia kinetyczna pomniejszona o średnią energię potencjalną jest możliwie najmniejsza na drodze obiektu biegnącego z jednego punktu do drugiego*.

W szczególności pierwsza i druga zasada ruchu wynikają z zasady najmniejszego działania.

Zauważmy coś dziwnego. Zasada najmniejszego działania głosi w szczególności, że wybór punktu początkowego $x(A) = x_A$ i docelowego $x(B) = x_B$ wyznacza drogę ciała w przedziale czasu (A, B) . Wydaje się, że jest to sprzeczne z prawem przyczynowości.

Kiedy znajdziemy $x(t)$ rozwiązujące problem (7), obliczymy wyrażenie $\frac{dx}{dt}(A) = v_A$, a następnie rozwiążemy problem (8), to rozwiązanie drugiego problemu będzie pokrywać się z rozwiązaniem pierwszego. Możemy o tym myśleć w następujący sposób: wybór punktu docelowego x_B w chwili B wyznacza właściwą prędkość v_A we wcześniejszej chwili A .

Istotnie, tkwi tu pewna tajemnica – w jaki sposób ciało „wybiera” rzeczywistą ścieżkę spośród wszystkich możliwości ruchu lub dlaczego rzeczywista historia wymaga minimalnego działania.

Z drugiej strony możemy uznać za rzecz naturalną owo *nieprzyczynowe* wyjaśnienie praw mechaniki i nazwać je wyjaśnieniem *poprzez więzy* [Mrówczyński, 1991], [Lange, 2017], [Glick, 2023]. Należy pamiętać, że zasada przyczynowości nie jest jakąś prawdą absolutną, a zaledwie użytecznym paradygmatem, od dawna uważanym za tajemniczy i zagadkowy – samo zdefiniowanie pojęcia „przyczyny” sprawia trudności – a obecnie coraz bardziej uwierającym w fizyce.

Problem *zasady najmniejszego działania* (w fizyce i nie tylko tam) był i wciąż jest dyskutowany przez najwybitniejszych uczonych i filozofów. Matematyk może powiedzieć, że sformułowanie wariacyjne jest tylko jednym z równoważnych sformułowań praw dynamiki, fizyk może bronić zasady najmniejszego działania, np. podając jej wyjaśnienia na gruncie fizyki kwantowej, inni widzą w niej niezbadane jeszcze prawa *ekonomii przyrody* czy *celowości przyrody* lub kryjącego się za nią Wielkiego Projektanta.

Artykuł rozpoczęliśmy od przedstawienia prostego hieroglify $\Delta u = f$ ukrywającego w sobie równanie różniczkowe. Ledwie tylko wniknąwszy w jego głąb, napotkaliśmy zagadnienia należące do trzech dziedzin: matematyki, fizyki i filozofii nauki. Nasz hieroglify naprowadził nas na pytania dotyczące ich interpretacji i wzajemnych powiązań, inspirując do poszerzenia spojrzenia i dalszych poszukiwań, albowiem: *Więcej jest rzeczy na niebie i na ziemi, Horacy, niż te wyobrażalne w twojej filozofii*.

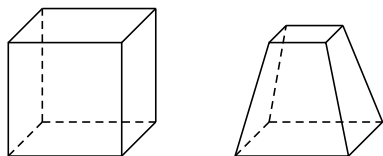
Wielki Projektant może tu np. uosabiać arystotelesowską metafizyczną *pierwszą przyczynę*, w odróżnieniu od *przyczyny wtórnej*, fizycznej. Różnice między nimi pięknie ilustruje następująca historyjka. Mama dała córce chleb, aby poszła nakarmić rybki w stawie. Rybki *widziały*, jak dziewczynka wrzuca okruchy do wody, *ale nie mogły wiedzieć*, że zostały nakarmione na prośbę jej matki. Pytanie: kto nakarmił rybki? Czy możemy być pewni, że sami nie znajdujemy się w położeniu rybek?

Literatura

- [Glick, 2023] David Glick, *The principle of least action and teleological explanation in physics*, Synthese (2023) 202:25, 1–15.
- [Lange, 2017] Marc Lange, *Because Without Cause. Non-Causal Explanations in Science and Mathematics*, OUP, 2017.
- [Mrówczyński, 1991] Stanisław Mrówczyński, *Teleologia i determinizm*, Delta nr 11, 1991.

Ile jest sześciścianów? *Heinz SCHUMANN**, *Bronisław PABICH***

* University of Education Weingarten
 **XX Liceum Ogólnokształcące w Krakowie



Aby dobrze oswoić się ze wzorem Eulera, polecamy poświęcony mu *Deltoid* z Δ_{16}^3 oraz tekst *Polowanie na uroczy wielościan* z Δ_{16}^3 , które w podobny sposób wykorzystuje wzór Eulera.

Najpewniej każdy Czytelnik *Delty* wie, co to jest *sześciścian* – i że co do zasady (fachowo: co do podobieństwa) jest tylko jeden taki w geometrycznym świecie. W niniejszym artykule odpowiemy na pytanie, ile jest *sześciścianów wypukłych*, czyli brył, od których wymagamy jedynie wypukłości i posiadania sześciu ścian. Nie będziemy przy tym rozróżniać wielościanów różniących się jedynie ułożeniem wierzchołków w przestrzeni – na przykład sześciścian oraz ścięty ostrosłup czworokątny (patrz margines) liczymy jako ten sam sześciścian.

Rozpoczniemy od przypomnienia *wzoru Eulera*: jeśli pewien wypukły wielościan ma s ścian, k krawędzi oraz w wierzchołków, to zachodzi:

$$s - k + w = 2.$$

Zauważmy ponadto, że z każdą krawędzią związane są dwa wierzchołki (jej końce) oraz z każdym wierzchołkiem związane są co najmniej trzy krawędzie (te, do których ów wierzchołek należy). Podobnie, z każdą krawędzią związane są dwie ściany, a z każdą ścianą – co najmniej trzy krawędzie. Wynikają stąd nierówności:

$$2k \geq 3w \quad \text{oraz} \quad 2k \geq 3s.$$

Wstawiając w powyższych nierównościach $k = w + s - 2$ (co wynika ze wzoru Eulera), otrzymamy ostatecznie

$$\frac{1}{2}s + 2 \leq w \leq 2s - 4.$$

Przyjmując wyżej $s = 6$, otrzymujemy, że liczba wierzchołków sześciścianu może wynosić 5, 6, 7 lub 8. Dostajemy w ten sposób cztery kategorie sześciścianów, w ramach których każdy ma taką samą liczbę wierzchołków (więc również krawędzi). Różnice dotyczą konfiguracji ścian bocznych. Mogą być nimi tylko trójkąty, kwadraty i pięciokąty – sześciokąty nie są możliwe, gdyż taka ściana musiałaby mieć dodatkowych sześć sąsiadujących ścian.

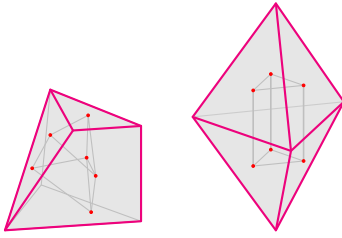
Wyniki naszych wstępnych poszukiwań przedstawia poniższa tabela. Wielkości s_3 , s_4 i s_5 oznaczają odpowiednio liczbę ścian trój-, czworo- i pięciokątnych.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
w	5	6	6	7	7	8	8
k	9	10	10	11	11	12	12
s_3	6	4	5	2	3		2
s_4		2		4	2	6	2
s_5			1		1		2

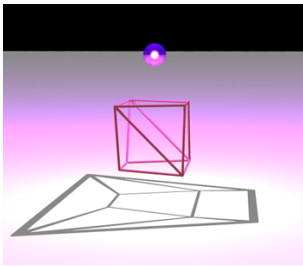
- I to podwójny ostrosłup trójkątny.
- II powstaje z graniastoslupa trójkątnego przez odcięcie odpowiedniego czworościanu.
- III to ostrosłup pięciokątny.
- IV jest połową sześciścianu, uzyskaną w wyniku przecięcia płaszczyzną przechodzącą przez przeciwległe wierzchołki i środki dwóch krawędzi (w przekroju dostajemy romb).
- V to klin utworzony z pięciokątnego ostrosłupa za pomocą dwóch cięć.
- VI jest tradycyjnym sześciścianem.
- VII został utworzony z sześciścianu za pomocą cięcia o pięciokątnym przekroju.

Lista wszystkich sześciścianów pojawiła się już w *Delcie* – patrz artykuł Marka Kordosa z Δ_{01}^2 .

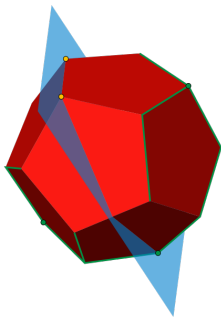
Znaleźliśmy siedem różnych sześciścianów. Skąd jednak wiadomo, że nie ma innych? Łatwo uwierzyć, że z 6 trójkątów można zbudować tylko wielościan typu I, z 5 trójkątów i pięciokąta tylko wielościan typu III, z 6 czworokątów tylko wielościan typu VI, z kolei z dwóch pięciokątów, które muszą mieć wspólną krawędź, tylko typ VII. Badanie wielu przypadków kombinacji ścian dla pozostałych konfiguracji (w, s_3, s_4, s_5) nie jest jednak zbyt obiecujące. W sukurs przyjdą nam pewne dodatkowe narzędzia teoretyczne.



Wielościany typu I i II wraz ze swoimi wielościanami dualnymi



Wielościan i jego cień, czyli diagram Schlegela. David Eppstein, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons



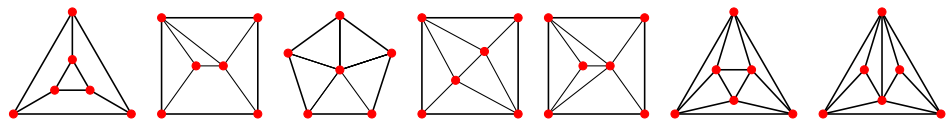
Uzasadnienie 3-spójności diagramu Schlegela w pigułce: wybierzmy dowolne wierzchołki w i v wielościanu \mathcal{W} . Udowodnimy, że dowolne dwa inne wierzchołki można połączyć ścieżką, która nie przechodzi ani przez w , ani przez v . Rozważmy płaszczyznę przechodzącą przez w , v i jeszcze jeden (dowolny) wierzchołek u . Rozbija ona \mathcal{W} na dwie części. Wierzchołki każdej z nich można zwiedzić, startując z u i poruszając się po krawędziach, które nie mają końca w w i v . Ilustracja: David Eppstein, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

Rozpatrzmy pewien wielościan wypukły \mathcal{W} . Wybierzmy dowolne punkty na ścianach tego wielościanu i połączmy odcinkami pary punktów leżące na sąsiadujących ścianach. To, co w rezultacie dostaniemy, może nie być wielościanem, gdyż niedoszłe ściany mogą być „powyginane”. Okazuje się, że uzyskany szkielet można jednak „wprostować”, otrzymując pełnoprawny wielościan \mathcal{W}' , który nazywamy *wielościanem dualnym* \mathcal{W} . Nietrudno przekonać się, że wielościan dualny ma tyle samo krawędzi co oryginalny, zaś liczba jego ścian jest równa liczbie wierzchołków wyjściowego (i vice versa). Ponadto wielościan dualny do dualnego jest (co do struktury) tożsamy z wyjściowym. W szczególności, wielościan dualny jednoznacznie wyznacza swój oryginał.

Wyobraźmy sobie teraz, że ściany danego wielościanu są przezroczyste, w odróżnieniu od jego krawędzi. Z jednej strony takiego wielościanu przykładamy źródło światła, a z drugiej kartkę. Jeśli odpowiednio przyłożymy źródło światła, cienie krawędzi nie będą się przecinać – uzyskamy w ten sposób *diagram Schlegela* wielościanu. Jeśli spojrzymy na diagram Schlegela jak na *graf*, czyli układ punktów (wierzchołków) połączonych kreskami (krawędziami), to będziemy mogli stwierdzić, że jest on grafem *planarnym*, czyli możliwym do narysowania bez przecinania krawędzi.

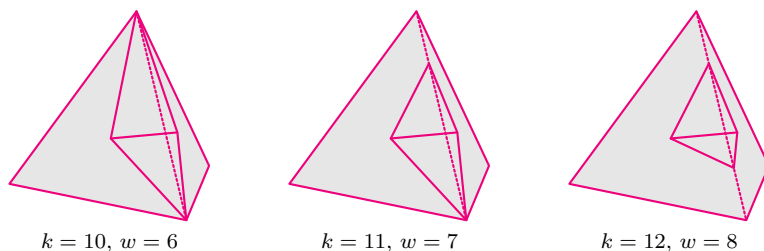
Diagram Schlegela ma jeszcze jedną własność – jest *grafem spójnym*, czyli poruszając się po jego krawędziach, można przemieścić się między dowolnymi jego wierzchołkami (bo tak też jest na wielościanie). Dla wielościanów wypukłych pozostaje to prawdą, nawet jeśli pozbedziemy się dowolnych dwóch wierzchołków wraz z wychodzącymi z nich krawędziami (szkic uzasadnienia na marginesie). Można równoważnie powiedzieć, że każde dwa wierzchołki są połączone co najmniej trzema ścieżkami, które – oprócz początku i końca – nie mają punktów wspólnych. Takie grafy nazywamy *trójspójnymi*.

Zgodnie z powyższymi obserwacjami diagramy Schlegela wielościanów dualnych do sześciścianów są planarnymi i trójspójnymi grafami o sześciu wierzchołkach. Na szczęście dla nas w publikacji [†] przedstawiono spis wszystkich 112 spójnych grafów o 6 wierzchołkach, z informacją (między innymi) o ich planarności i stopniu spójności. Ostatecznie zostajemy z siedmioma grafami:



Dowiedliśmy w ten sposób, że istnieje co najwyżej 7 sześciścianów – udało się nam zatem przedstawić wszystkie. Czytelnikowi Podejrzliwemu pozostawiamy sprawdzenie, czy przedstawione wyżej grafy faktycznie są diagramami Schlegela wielościanów dualnych do zaprezentowanych wcześniej sześciścianów. Zaznaczmy przy okazji, że trójspójność i planarność to wystarczające warunki, by dany graf mógł być „cieniem” jakiegoś wielościanu. Jest to głębokie twierdzenie udowodnione przez niemieckiego matematyka Ernsta Steinitza (1871–1928).

Na koniec wspomnijmy, że istnieją trzy typy niewypukłych sześciścianów, które można skonstruować poprzez odpowiednie wycięcie czworościanu z czworościanu.



Grafy tych wielościanów niewypukłych, a co za tym idzie także grafów ich wielościanów dualnych, nie są trójspójne. Tych wielościanów nie udałoby się zatem „uwypuklić” i są to przykłady istotnie różne od tych zaprezentowanych wcześniej.

Literatura

[†] Cvetković Dragoš i Milenko Petrić, „A table of connected graphs on six vertices”, *Discrete Mathematics* 50 (1984): 37–49.

takie jest życie

Kto pyta, nie błądzi

Dziś będzie o słowach, przypadkach i zbiegach okoliczności. Choć mogłoby się zdawać, że sprawa dotyczy ptaków i żab. Tak czy siak, znowu się zdziwiłam.

Na początku lat 90. XX wieku na Nowej Gwinei amerykańscy ornitolodzy prowadzili badania tzw. „rajskich ptaków”, zachwycająco barwnych, o niezwykłych rytuałach godowych. Mogło się wydać irytujące, że w siatkę, w którą łapali okazy interesującej awifauny, zaplątał się także niepozorny czarno-pomarańczowy ptak kształtem

przypominający naszą wilgę. Jeden z badaczy, Jack Dumbacher, wspomina, że w trakcie wyplątywania z sieci ptak skaleczył go w palec ostrymi pazurami. Dumbacher odruchowo zrobił to, co większość z nas robi w podobnej sytuacji: włożył palec do ust. Poczul wtedy mrowienie, palący ból i postępujące drętwienie warg i języka, które utrzymywało się przez kilkanaście godzin. Kiedy sytuacja powtórzyła się u innego z ornitologów, naukowcy zainteresowali się pomarańczowo-czarnym ptakiem. Zagadnięci tubylcy wyjaśnili, co trzeba: „ten ptak to śmieć, jest trujący, nie nadaje się do jedzenia”.

Ale to wcale nie było nowe odkrycie, ptak został opisany już w 1850 roku przez Charlesa Luciena Bonaparte. I rzecz jasna, jego toksyczne właściwości znane były od wieków mieszkańcom wyspy, tyle że dotąd nikt ich o to nie zapytał. Ptak dorobił się nawet polskiej, jakże dźwięcznej, nazwy – fletowiec kapturowy, choć łacińska, *Pitohui dichrous*, może nawet bardziej dla polskiego ucha oddaje podstępny charakter stworzenia.

Tymczasem niezbyt higieniczne nawyki zdeterminowały dalsze naukowe ścieżki Jacka Dumbachera. I tu się robi naprawdę ciekawie. Trucizna, która spowodowała nieprzyjemne sensacje, okazała się batrachotoksyną, co dosłownie oznacza „żabia trucizna”. Przerzucą nas to do lasów tropikalnych w Kolumbii, gdzie żyją bladocytrynowe, niewielkie żaby z gatunku *Phylllobates terribilis*, których skóra pokryta jest tą samą substancją. DOKŁADNIE tą samą. Amerykanie znaleźli więcej trujących ptaków na Nowej Gwinei. Ich pióra i skóra nasączone były podobnymi związkami, dla każdego z nich znaleziono później żabi odpowiednik w Ameryce Południowej.

Zadziwiające było, że w dwóch oddalonych od siebie o około 15 tysięcy kilometrów miejscach na Ziemi zwierzęta z odległych gromad – płazów i ptaków, zawierają w tkankach dokładnie te same, toksyczne dla ludzi związki chemiczne.

Batrachotoksyny to steroidowe alkaloidy. Steroidowe, bo podstawą ich budowy jest czteropierścieniowy steraan, tak jak na przykład w znanych nam bliżej hormonach sterydowych. Alkaloidy, bo są zasadowe i zawierają w cząsteczkach atomy azotu. Są jednocześnie jednymi z bardziej toksycznych substancji na ziemi, w małej ilości powodują mrowienie, obniżenie czucia, a także ból. Ale w większych dawkach mogą być śmiertelne, powodując paraliż i zatrzymanie serca. Są neurotoksynami, bo upośledzają funkcje komórek nerwowych. To tych substancji używali Indianie z Ameryki Południowej do zatruwania strzał. Trucizna działa praktycznie na każde zwierzę, którego błony komórkowe zawierają duże kompleksy białkowe, zwane kanałami sodowo-potasowymi.

Błony komórkowe neuronów są spolaryzowane: po stronie zewnętrznej błona naładowana jest dodatnio, a we wnętrzu komórki więcej jest ładunków ujemnych. Dzieje się tak dzięki pracy białek błonowych, które doprowadzają do tej nierównowagi przez aktywne przenoszenie dodatnio naładowanych jonów potasu i sodu. Za każde dwa jony potasu przeniesione do wnętrza komórki przenoszone są trzy jony sodu na zewnątrz. Taka różnica w stężeniu jonów i ładunków po dwóch stronach błony jest

warunkiem przekazania impulsu w komórkach nerwowych i mięśniowych. Polega to na chwilowym otwarciu kanałów sodowo-potasowych. Otwarcie sprawia, że zgodnie z „naturą” jony przepływają, wyrównując różnicę stężeń i ładunku. Błona zostaje zdepolaryzowana. Tuż po tym kanał się zamyka, a pompy sodowo-potasowe zaczynają pracę, która ponownie przywraca stan polaryzacji. Impuls nerwowy to właśnie przesuwająca się „fala” depolaryzacji błony komórkowej neuronu. Batrachotoksyny wiążą się z kanałami sodowo-potasowymi po ich otwarciu, uniemożliwiając ponowne zamknięcie. W ten sposób błona komórkowa nie może ulec ponownej polaryzacji. Komórka „zamiera”, przestaje przekazywać sygnały.

Jak to się dzieje, że ptaków i żab nie paraliżuje potężna trucizna? Ich układ nerwowy także działa dzięki kanałom potasowo-sodowym. Badania zajęły wiele lat. Poszukiwano mutacji w genach kodujących białka kanałów układu nerwowego, poszukiwano białek, które jak gąbka wchłaniają toksyczną substancję, przez co nie szkodzi ptasim komórkom. Wiele z tych badań nie dało jednoznacznej odpowiedzi. Dopiero w marcu 2024 roku opublikowano wyniki badań, które wykazały, że odporność na batrachotoksynę daje mutacja w genie kodującym jedno z białek kanału sodowo-potasowego o nazwie NAv 1.4. Białko to produkowane jest w komórkach mięśni, nie w neuronach, co umożliwia przekazanie impulsu wywołującego skurcz mięśni. Mutacja odkryta u ptaków powoduje, że neurotoksyna nie może się związać z fragmentem białka NAv 1.4, nie może zatem upośledzić działania mięśni.

Jest jeszcze jeden ciekawy wątek tej historii. Kiedy podjęto próby hodowli trujących żab, okazało się, że w warunkach laboratoryjnych płazy przestały być trujące. W naturalnej diecie żab znajdowało się coś, co zmienia je w truciele. Tym tropem poszli także ornitolodzy. Wrócili do lokalnej ludności w Nowej Gwinei, pytając o rośliny i zwierzęta, które dają podobne odczucia jak pióra trującego ptaka. Wskazanie padło na niewielkie chrząszcze *Choresine* z rodziny *Melyridae*, które wytwarzają toksyny w dużej ilości. Fletowce i inne ptaki żywią się chrząszczami, z których część stanowią *Choresine*. Wydaje się, że podobnie sprawa ma się z żabami, które mogą żywić się żyjącymi w Ameryce Południowej chrząszczami z tej samej rodziny. Co ciekawe, choć u żab odkryto mutacje w tym samym genie co u ptaków, jednak są one zlokalizowane w innym miejscu cząsteczki. Trujące żaby i ptaki niezależnie wykształciły w procesie ewolucji mechanizm zabezpieczenia się przed zatruciem.

„Jesteś tym, co jesz”, mawiają dietetycy. Słowo „batracho” w języku greckim znaczy nie tylko żaba. To także „pożyczyć”. Ptaki i płazy pożyczyły od chrząszczy substancję, która skutecznie chroni je przed drapieżcami i pasożytami. Uważajcie, bo piękne piórka i głos mogą skrywać niebezpieczeństwo. Pytajcie tych, którzy wiedzą, choć się tym nie chwala. A przede wszystkim nie wkładajcie skaleczonego palca do buzi. A może właśnie wkładajcie? Kto wie, dokąd to Was powiedzie?

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Klub 44 F



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
776 ($WT = 3,56$), 777 ($WT = 2,59$)
z numeru 4/2024

Jacek Konieczny	Poznań	40,87
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5–39,93
Konrad Kapcia	Poznań	2–39,58
Tomasz Wietecha	Tarnów	17–26,54
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–25,24
Jan Zambrzycki	Białystok	4–23,88

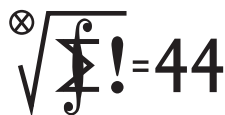
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
879 ($WT = 1,59$) i 880 ($WT = 1,63$)
z numeru 4/2024

Lukasz Merta	Kraków	47,14
Szymon Kitowski	Warszawa	41,11
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Michał Adamaszek	Kopenhaga	39,12
Witold Bednarek	Łódź	37,29
Krzysztof Zygan	Lubin	36,06
Andrzej Daniluk	Warszawa	32,96
Mikołaj Pater		32,57
Jędrzej Biedrzycki		32,29
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,41
Andrzej Kurach	Ryjewo	30,66

Pan Lukasz Merta dołączył do grona
Weteranów, zaliczając trzecie okrzęzenie.

Klub 44 M



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Wskazówki do wyzwań z końca artykułu *Byle nie dodawać* (s. 12)

Jest pewne, że zaproponowane tu drogi do rozwiązań nie wyczerpują wszystkich możliwych pomysłów.

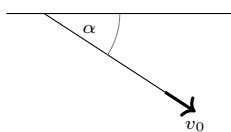
W zadaniach 1 – 3 można przepisać każdy z iloczynów $k \cdot a$ jako sumę $a + a + a + \dots + a$, a następnie zmienić kolejność składników.

Można jednak zamiast tego odnieść się do interpretacji kombinatorycznej. Ustawmy w rzędzie $n + 2$ obecnych na przyjęciu, przy czym na początku stanie gospodarz, a za nim $n + 1$ gości. Pomyślmy teraz o gościu numer k : spośród stojących przed nim można wybrać dwójkę na $T(k)$ sposobów; spośród stojących za nim można wybrać jednego na $n + 1 - k$ sposobów.

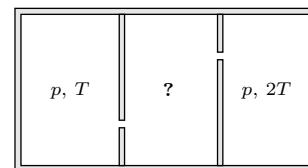
Zadania z fizyki nr 786, 787

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

786. Koralek o masie M może ślizgać się bez tarcia po prostym poziomym pręcie. Do koralka przywiązana jest lekka nierozciągliwa nitka o długości l . Nitkę ciągniemy za swobodny koniec tak, że jego prędkość przez cały czas skierowana jest wzdłuż nitki i ma wartość v_0 (rys. 1). Jaką siłą ciągniemy w chwili, gdy nitka tworzy z prętem kąt α ? Podczas ruchu nitka znajduje się w płaszczyźnie poziomej.



Rys. 1



Rys. 2

787. Nieprzewodzące ciepła naczynie połączone jest za pomocą dwóch małych jednakowych otworków z dwoma pojemnikami zawierającymi hel w stanie gazowym (rys. 2). W obu pojemnikach podtrzymywane jest jednakowe ciśnienie p , w jednym z nich podtrzymywana jest temperatura T , w drugim $2T$. Znaleźć ciśnienie i temperaturę w środkowym naczyniu w stanie równowagi.

Zadania z matematyki nr 889, 890

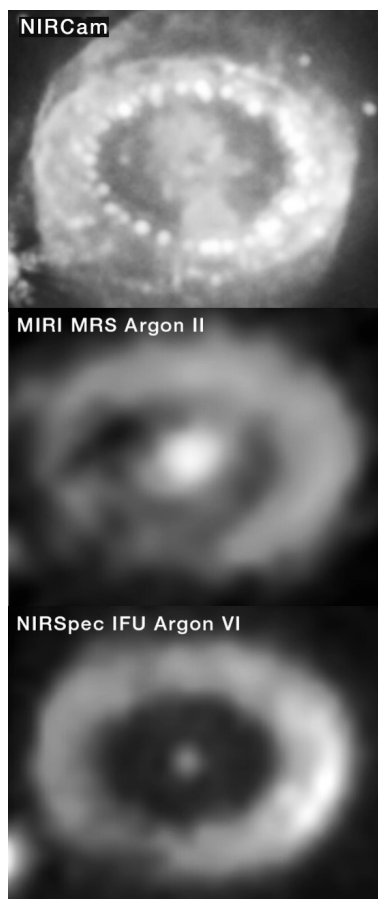
Redaguje Marcin E. KUCZMA

889. Ciąg (a_1, \dots, a_N) , długości N , ma wyrazy $a_k \in \{2, 3, 5\}$, z sumą $a_1 + \dots + a_N = A$. Niech $b_k = a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}$ (gdzie, cyklicznie, $a_{N+i} = a_i$). Zakładamy, że każda z liczb b_1, \dots, b_N dzieli się przez 30. Przyjmując jako znane wartości N, A (dla których istnieje co najmniej jeden ciąg (a_k) o podanych własnościach) wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $B = b_1 + \dots + b_N$.

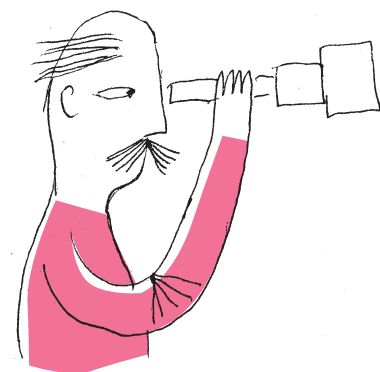
890. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie P ; boki BC i DA nie są równoległe, a ich symetralne przecinają się w punkcie Q (różnym od P), leżącym wewnątrz czworokąta. Trójkąty BQC i DQA są podobne. Udowodnić, że prosta PQ zawiera dwusieczne kątów APB i CPD .

Zadanie 890 zaproponował pan Wojciech Maciak z Warszawy.

Prosto z nieba: Supernowa 1987A



Rozszerzająca się pozostałość po wybuchu SN 1987A obserwowana przez JWST w bliskiej i średniej podczerwieni instrumentami NIRCam oraz MIRI. Centralne pojaśnienie jest dowodem na obecność obiektu – sądząc z jasności, najprawdopodobniej gwiazdy neutronowej (szczegóły w tekście)



Wybuch supernowej SN 1987A został zauważony na Ziemi w lutym 1987 roku, jej jasność osiągnęła szczyt w maju tego samego roku. Samo zdarzenie zaszło oczywiście dużo wcześniej – 160 tys. lat temu – w Wielkim Obłoku Magellana, galaktyce karłowatej, która jest satelitą Drogi Mlecznej. SN 1987A to pierwsza supernowa, którą można było zobaczyć gołym okiem od czasu supernowej z 1604 roku, obserwowanej przez Johanna Keplera; maksymalna jasność SN 1987A wynosiła około 3^m , czyli była mniej więcej tak jasna, jak najśłabsze obiekty, które można dostrzec gołym okiem, obserwując z dużego miasta (limit wydolności ludzkiego oka to około 6^m , czyli jasność około 16 razy mniejsza). Mieliśmy duże szczęście, ponieważ średnia częstość wybuchów supernowych w Drodze Mlecznej i jej otoczeniu wynosi około raz na kilkadziesiąt lat.

Wydarzenie było astronomicznym hitem końca XX wieku, stworzyło rzadką okazję do zbadania wczesnych etapów ewolucji supernowej i tego, co po niej zostaje. SN 1987A była supernową typu II, czyli wynikiem implozji, a następnie eksplozji masywnej gwiazdy, której jądro zapada się pod własnym ciężarem. Oznacza to, że ściśnięte w ogromnych temperaturach i gęstościach jądro może na koniec stać się gwiazdą neutronową lub czarną dziurą. Podczas zgniatania materii następuje przemiana „symetrycznej” materii – jąder atomowych zawierających podobną liczbę protonów i neutronów – w mieszaninę dużo gęstsza, ale bogatą w neutrony, dzięki procesom słabym typu $p + e \rightarrow n + \nu$, gdzie ν oznacza neutrino. Podczas kolapsu emitowanych jest 10^{58} neutronów, które unoszą około 99% energii grawitacyjnej umierającej gwiazdy. Typowa energia neutrino z supernowej wynosi kilkanaście MeV. Około dwóch godzin przed detekcją SN 1987A w świetle widzialnym strumień neutronów trwający 13 sekund (w sumie 25 sztuk) wykryły trzy detektory: Kamiokande II (Kamioka, Japonia – 12 neutronów), IMB (Fairport, USA – 8) i Baksan (Rosja – 5).

Supernowe typu II są związane z tworzeniem gwiazd neutronowych i czarnych dziur. Przedstawione na zdjęciach obok obserwacje Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba (JWST), wykonane w 2022 roku, zawierają dowody na efekt wysokoenergetycznej emisji z samego centrum wybuchu i obecność znajdującego się w centrum obiektu: gwiazdy neutronowej.

Zdjęcie SN 1987A wykonane kamerą bliskiej podczerwieni NIRCam (Near-Infrared Camera) przedstawia strukturę rozszerzającą się z prędkością kilku tysięcy km/s. Centralny obszar jest jednocześnie najgęstszy: zawiera pył gwiazdowy i ciężkie pierwiastki, takie jak węgiel, tlen, magnez i żelazo. Zewnętrzna otoczka jest wynikiem zderzenia materii z pierścieniem gazu wyrzuconego przez gwiazdę wcześniej, około 20 tys. lat przed ostateczną eksplozją. Świejące punkty są miejscami uderzenia materii z wnętrza supernowej w zewnętrzną materię gwiazdy. Zewnętrzna część uciekającej materii jest też oświetlana przez promieniowanie rentgenowskie z kolizji, podczas gdy wewnętrzna część jest zasilana głównie przez radioaktywność i emisję ze zwartego obiektu w samym centrum.

Dwa kolejne zdjęcia to obrazy wykonane przez spektrograf średniej rozdzielczości (Medium Resolution Spectrograph), instrument do obserwacji średniej podczerwieni MIRI (Mid-InfraRed Instrument) oraz spektrograf bliskiej podczerwieni NIRSpec (Near-InfraRed Spectrograph). Analiza spektralna wyników MIRI uwidacznia silny sygnał emisji zjonizowanego argonu, widoczny w centrum pozostałości. Dane NIRSpec wykryły jeszcze silniej zjonizowane pierwiastki, w tym pięciokrotnie zjonizowany argon oraz linie zjonizowanej siarki. Wszystkie te dane świadczą o tym, że w centrum znajduje się niemal punktowych rozmiarów źródło wysokoenergetycznego promieniowania. Najbardziej prawdopodobnym źródłem jest nowo narodzona, gorąca gwiazda neutronowa, emitująca promieniowanie rentgenowskie z powierzchni. Kolejnym „kamieniem milowym” będzie obserwacja periodyczności emitowanego światła, czyli ostateczny dowód na to, że obiekt jest rotującą gwiazdą neutronową: pulsarem.

Michał BEJGER

Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN,
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy



Niebo w listopadzie

W listopadzie Słońce wędruje bardzo nisko i nadal szybko skraca się czas jego przebywania nad horyzontem. Słońce 21. dnia miesiąca przekroczy równoleżnik -20° deklinacji w drodze na południe i do przesilenia zimowego jego pozycja na niebie zmieni się już tylko o $3,5^\circ$. Prawie cały miesiąc Słońce przebywa na tle gwiazdozbioru Wagi, by na ostatni tydzień przenieść się do konstelacji Skorpiona.

Na wieczornym niebie po długiej nieobecności zacznie pojawiać się planeta Wenus, która przez koniunkcję górną ze Słońcem przeszła na początku czerwca i przez pięć miesięcy zdążyła oddalić się od Słońca na 40° . Mimo to słabe nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokregu powodowało, że planeta zachodziła prawie w tym samym momencie co Słońce. Na początku miesiąca Wenus zajmuje pozycję na wysokości 5° niedaleko punktu SW widnokregu (45 minut po zachodzie Słońca), ale do końca miesiąca jej warunki obserwacyjne wyraźnie się poprawią.

Planeta ta zacznie miesiąc w gwiazdozbiorze Wężownika, ale szybko przeniesie się do Strzelca, gdzie pozostanie do końca miesiąca. Jest ona wciąż daleko od nas, stąd jej jasność wynosi -4^m , średnica kątowa około $15''$, faza natomiast około 70%. 5 listopada 8° na lewo od Wenus pokaże się powracający na wieczorne niebo Księżyc. Jednak zjawisko będzie trudne do obserwacji, bo mimo tego, że faza Srebrnego Globu osiągnie wtedy 16%, oba ciała Układu Słonecznego zajmą pozycję na wysokości około 5° i do ich dostrzeżenia niezbędna może okazać się lornetka. 17 listopada Wenus pokaże się $0,5^\circ$ od Kaus Borealis, 5 dni później natomiast 1° od Nuniki, dwóch jasnych gwiazd głównej figury Strzelca.

Po minięciu Wenus Księżyc kolejny tydzień spędzi na południe od ekliptyki. W tym czasie 9 listopada przejdzie przez I kwadrę, a dzień i dwa później spotka się z Saturnem i Neptunem, zbliżając się do obu planet za każdym razem na 5° . Ostatnia z łatwo widocznych gołym okiem planet 16 listopada zmieni kierunek ruchu na prosty, kończąc tym samym okres swojej najlepszej widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Stąd prawie nie porusza się względem gwiazd tła. Saturn osłabnie do $+0,8^m$, przy średnicy tarczy $18''$. Stosunek małej do wielkiej osi jego pierścieni osiąga maksymalną wartość w tym roku (0,09). Neptun świeci blaskiem $+7,9^m$ i zmniejszy swoją odległość do gwiazdy 20 Psc na $38'$.

W związku z bliskością równonocy na tarczy Saturna pojawiają się cienie jego księżyców, w tym wszystkich dużych, widocznych przez lornetki czy małe teleskopy. 4 i 20 listopada na tarczy Saturna pojawi się cień Tytana, ale warto tę planetę obserwować każdej dostępnej nocy, gdyż cienie księżyców pojawiają się na niej bardzo często.

15 listopada Srebrny Glob przejdzie przez pełnię i jednocześnie spotka się z Uranem. Jak zawsze, takie spotkanie oznacza, że planeta jest w opozycji względem Słońca, osiągając największą jasność i rozmiary kątowe w trwającym właśnie sezonie obserwacyjnym, oraz że przecina (wraz z Księżycem) południk lokalny około północy prawdziwej. Przez cały miesiąc Uran przesunie się na niebie o mniej więcej 1° i zwiększy dystans do

gwiazdy 13 Tau do $3,5^\circ$. Oczywiście przy Księżycu w pełni Uran jest trudny do dostrzeżenia, znacznie lepiej obserwować go, gdy noc jest ciemna. Planeta góruje na wysokości około 57° .

W nocy z 17 na 18 listopada Księżyc przetnie linię łączącą Jowisza z gwiazdą El Nath, czyli drugą co do jasności gwiazdy Byka, zbliżając się doń nad Polską na 1° . Jowisz przez opozycję przejdzie na początku grudnia i pojaśnieje do $-2,8^m$, zwiększając średnicę kątową do $48''$. Jeśli ktoś ma możliwość, to warto też przyglądać się jowiszowej tarczy, ponieważ prawie codziennie przechodzi po niej cień któregoś z księżyców galileuszowych, a ze względu na bliskość opozycji obok cienia często znajduje się rzucający go księżyc. Warto tu może wspomnieć o przejściu Kallisto tuż na południe od tarczy Jowisza 1 i 17 listopada oraz na północ 25 listopada czy o przejściu Ganimedesa ze swoim cieniem 24 dnia miesiąca. Przy czym przed opozycją planety cień księżycyca wyprzedza swojego właściciela, po opozycji jest odwrotnie.

Kolejną planetą, którą odwiedzi Księżyc, jest Mars i stanie się to 20 listopada. Czerwona Planeta przygotowuje się do wykonania zakrętu na kreślonej przez siebie pętli i w listopadzie pokona tylko 7° na tle gwiazdozbioru Raka, docierając pod koniec miesiąca tuż na północ od charakterystycznego trapezu gwiazd z jasną gromadą otwartą M44 w środku. Do M44 zabraknie Marsowi 2° . W listopadzie Mars zwiększy jasność do $-0,5^m$ i średnicę kątową tarczy do ponad $11''$.

23 listopada Srebrny Glob w ostatniej kwadrze zbliży się na $2,5^\circ$ do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa i pozostanie ozdobą porannego nieba prawie aż do nowiu, przez który przejdzie już w grudniu. 27 listopada Księżyc w fazie 14% pokaże się $3,5^\circ$ od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, a 29 listopada sierp Księżycyca w fazie 4% wejdzie 4° od Zuben Elgenubi, drugiej co do jasności gwiazdy Wagi, na godzinie 5 względem niej. Na początku świtu cywilnego oba ciała zdążą się wzniesć na wysokość około 5° .

Ariel MAJCHER



Rozwiązanie zadania M 1798.

Rozważmy reszty z dzielenia przez 3 liczb znajdujących się w czterech narożnych polach. Zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta, dla co najmniej dwóch z tych liczb $x < y$ rozważane reszty są równe, zatem różnica $y - x$ jest podzielna przez 3.

Pokolorujmy teraz pola tabeli w szachownicy, tak aby pola narożne były czarne. Rozważmy pola, w których wpisane są liczby

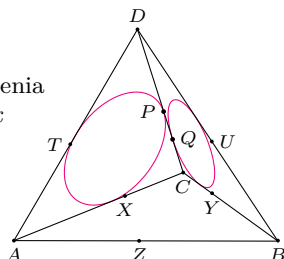
$$x, x + 3, x + 6, \dots, y - 3, y.$$

Każde dwie kolejne liczby w tym ciągu znajdują się w polach o wspólnym boku – to znaczy w polach o różnych kolorach. Oznacza to, że wszystkie liczby w naszym ciągu, które mają tę samą parzystość co x , znajdują się na czarnych polach, a cała reszta na polach białych. Ponieważ liczba y znajduje się na czarnym polu, ma taką samą parzystość jak x , to znaczy liczba $y - x$ jest parzysta. W szczególności liczba $y - x$ jest podzielna przez 6.



Rozwiązanie zadania M 1799.

Niech sfera Ω będzie styczna do krawędzi AC, CB, BA, AD i BD w punktach, odpowiednio, X, Y, Z, T i U . Wtedy na podstawie twierdzenia o odcinkach stycznych (patrz *Kącik Przestrzenny z Δ_{10}^3*) $CX = CY$, $AX = AZ = AT$, $DT = DU$ oraz $BY = BZ = BU$. W szczególności dostajemy z tych równości, że $AC - AD = BC - BD$.



Pokażemy teraz, że ostatnia uzyskana równość daje nam styczność okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD . Istotnie, niech te okręgi będą styczne do krawędzi CD w punktach odpowiednio P i Q . Wtedy, korzystając z twierdzenia o odcinkach stycznych (ale już dla trójkąta), łatwo dostajemy, że $AC - AD = CP - PD$ i podobnie $BC - BD = CQ - QD$. Wobec tego zachodzi równość $CP - PD = CQ - QD$, która implikuje, że $PQ = 0$, czyli $P = Q$.

Biorąc teraz sferę zawierającą okręgi wpisane w trójkąty ACD i BCD , widzimy, że jest ona styczna do krawędzi AC, AD, DB, BC, CD .



Rozwiązanie zadania M 1800.

Dla $n = 1, 2$ zachodzi równość. Niech teraz $n \geq 3$ i połóżmy $A := (n - 1)!$. Nierówność przyjmuje postać

$$(nA)! \leq A^{nA} \cdot (nA)^A.$$

Weźmy pod uwagę kilka (oczywistych) nierówności:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot A < A^A,$$

$$(A + 1) \cdot (A + 2) \cdot (A + 3) \cdot \dots \cdot (2A) < (2A)^A,$$

$$(2A + 1) \cdot (2A + 2) \cdot (2A + 3) \cdot \dots \cdot (3A) < (3A)^A,$$

(...)

$$((n - 1)A + 1) \cdot ((n - 1)A + 2) \cdot ((n - 1)A + 3) \cdot \dots \cdot (nA) < (nA)^A.$$

Mnożąc je wszystkimi stronami, dostajemy:

$$(nA)! < A^A \cdot (2A)^A \cdot (3A)^A \cdot \dots \cdot (nA)^A = A^{nA} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)^A = A^{nA} \cdot (nA)^A.$$



Rozwiązanie zadania F 1107.

W polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g kulka spadnie w odległości $s = \Delta x + \Delta v \cdot t$ od „celu”, jeśli Jacek puścił ją z poziomą prędkością Δv z punktu przesuniętego o Δx od położenia dokładnie nad celem. Czas spadku:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Dokładność wyznaczenia punktu „startu”, Δx , i dokładność wyznaczenia poziomej składowej pędu, Δp , ogranicza zasada Heisenberga:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar,$$

\hbar jest stałą Plancka dzieloną przez 2π .

Oznacza to, że dla danego Δx dokładność, Δv , wyznaczenia prędkości (Jacek chce, żeby $v = 0$) ogranicza nierówność:

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geq \frac{\hbar}{m\Delta x},$$

czyli

$$s = \Delta x + t\Delta v = \Delta x + t \frac{\Delta p}{m} \geq \Delta x + \frac{t\hbar}{m} \cdot \frac{1}{\Delta x}.$$

Funkcja $f(z) = z + Az^{-1}$ osiąga minimum dla $z = \sqrt{A}$.

Jej wartość w minimum to $2\sqrt{A}$. Stąd ostatecznie po podstawieniu danych obliczmy, że typowa odległość upadku kulki od celu wyniesie:

$$s \geq 2 \left(\frac{2H\hbar^2}{gm^2} \right)^{1/4}.$$

Zadanie zaczerpnięte ze zbioru *Berkeley Physics Problems With Solutions* (red. Min Chen).



Rozwiązanie zadania F 1108.

Belka naciska na podłoże siłą $N = mg$, a więc równoległe przesuwanie belki wymaga działania na nią poziomą siłą o wartości μN . Jeśli jednak siłę F przyłożymy prostopadle do belki, do jednego z jej końców, to belka będzie się obracała wokół pewnego ustalonego punktu (różnego od jej środka ciężkości). Na każdy odcinek o masie dm przesuwanej belki działa siła tarcia $\mu g dm$ skierowana przeciwnie do kierunku ruchu. Załóżmy, że punkt, wokół którego odbywa się obrót, znajduje się w odległości x od punktu przyłożenia siły F . Podczas obrotu o kąt $\delta\varphi$ praca siły F równa jest

$$W_F = Fx\delta\varphi.$$

Praca W_F jest równa pracy W_T wykonanej przez siły tarcia. Po obu stronach środka obrotu siły tarcia są skierowane przeciwnie, a wykonana przez każdą z nich praca jest równoważna pracy, jaką wykonałaby wypadkowa sił tarcia działających po każdej stronie środka obrotu przyłożona w połowie odpowiedniego odcinka belki:

$$W_T = \left(\frac{1}{2}x \cdot \mu x \rho g + \frac{1}{2}(L - x) \cdot \mu(L - x) \rho g \right) \delta\varphi.$$

Warunek $W_F = W_T$ pozwala wyznaczyć wartość F :

$$F = \frac{1}{2} \mu x \rho g + \mu \rho g \frac{(L - x)^2}{2x}.$$

Otrzymaliśmy wartość F dla zadanej wartości x określającej położenie środka obrotu. Jeśli nie unieruchomimy wybranego punktu, to rzeczywisty ruch „wybierze” wartość $x = x_0$ odpowiadającą najmniejszej wartości F . Jak łatwo sprawdzić, siła F przyjmuje wartość minimalną F_{min} dla $x_0 = L/\sqrt{2}$ i wynosi wtedy:

$$F_{min} = \mu \rho g L (\sqrt{2} - 1) \approx 0,414 \cdot \mu mg.$$

Po wykonaniu obrotu o 180° belka zostaje przesunięta o $(\sqrt{2} - 1)L$.



Tożsamości algebraiczne

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tożsamość algebraiczna to równość dwóch wyrażeń algebraicznych. Najbardziej znanymi przykładami tożsamości algebraicznych są wzory skróconego mnożenia. O pewnych szczególnych tożsamościach algebraicznych, związanych z sumą trzech sześciątów, pisałem już w kąciku nr 13 w Δ_{20}^1 .

Znanymi przykładami są również: tożsamość Diofantosa (znana też jako tożsamość Brahmagupty–Fibonacciego)

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

oraz tożsamość Sophie Germain

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2).$$

Obu tym tożsamościom poświęcono artykuły w gazetce *Kwadrat*, w numerach, odpowiednio, 2 i 16.

W niektórych zadaniach, jakie tu przedstawiam, wystarczy skorzystać z gotowej, mniej lub bardziej znanej tożsamości. W innych – trzeba taką tożsamość odkryć.

Przykład 1. Liczby wymierne $x, y, z \neq 0$ spełniają równość $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Wykazać, że $x^2 + y^2 + z^2$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Rozwiązanie. Mnożąc równość $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ przez xyz , otrzymujemy $xy + yz + zx = 0$. W takim razie

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x + y + z)^2.$$

Przykład 2. Dowieść, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych powiększony o 1 jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Chcemy udowodnić, że dla pewnego całkowitego k zachodzi równość

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = k^2.$$

Ponieważ $k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$, musimy zapisać $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ jako iloczyn dwóch liczb różniących się o 2. Po chwili odkrywamy, że $n(n + 3) = n^2 + 3n$ oraz $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 3n + 2$.

Zadania

- Dane są takie liczby rzeczywiste x i y , że liczby $x + y$ i $x^2 + y^2$ są wymierne. Udowodnić, że dla każdego całkowitego dodatniego n liczba $x^n + y^n$ jest wymierna.
- Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równość $xy^2 + yz^2 + zx^2 = x^2y + y^2z + z^2x$. Wykazać, że pewne dwie spośród liczb x, y, z są równe.
- Niech a, b, c będą trzema różnymi liczbami rzeczywistymi. Wykazać, że jeśli pewne dwie spośród liczb

$$\frac{a + b}{a^2 + ab + b^2}, \quad \frac{b + c}{b^2 + bc + c^2}, \quad \frac{c + a}{c^2 + ca + a^2}$$

są równe, to wszystkie te trzy liczby są równe (68 OM).

- Liczby całkowite a, b, c mają sumę równą 0. Udowodnić, że $5abc \mid a^5 + b^5 + c^5$.
- Dane są liczby całkowite a, b, c oraz liczba pierwsza $p \neq 5$, dzieląca $a + b + c$ oraz $a^5 + b^5 + c^5$. Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb: $a^2 + b^2 + c^2$ lub $a^3 + b^3 + c^3$ dzieli się przez p (61 OM).
- Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że $2^{4n+2} + 1 = abc$ dla pewnych liczb naturalnych $a, b, c > 1$.
- Niech $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ oraz

$$\frac{1}{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)} = \frac{A_1}{x + a_1} + \frac{A_2}{x + a_2} + \dots + \frac{A_n}{x + a_n}.$$

Dowieść, że liczby A_1, A_2, \dots, A_n są kolejno, na zmianę, dodatnie i ujemne.

Wskazówki

1. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

2. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

3. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

4. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

5. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

6. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

7. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

8. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

9. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

10. $(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1} = \frac{(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)}{1}$

OpenGL i GLSL (nie taki krótki kurs)

Książka jest przeznaczona dla każdego, kto rzeczywiście chce zrozumieć zasady trójwymiarowej grafiki komputerowej i stosować je w praktyce. Zawiera autorskie wprowadzenie do standardu **OpenGL** i języka **GLSL**, poparte oryginalnymi przykładami wraz z gotowymi programami. Gorąco polecam, prof. dr hab. Krzysztof Diks



W *Delcie* całym sercem kibicujemy wszelkim formom upowszechniania eksperckiej wiedzy. Dobrze nam znanym ekspertem od grafiki komputerowej (rozumianej jako dziedzina nauki na przecięciu informatyki i matematyki) jest Przemysław Kiciak, który niejednokrotnie publikował na naszych łamach. Dlatego z wielką radością przyjęliśmy wiadomość o drugim wydaniu jego podręcznika „OpenGL i GLSL (nie taki krótki kurs)”, którego wersję elektroniczną może pobrać każdy zainteresowany ze strony internetowej Autora mimuw.edu.pl/~przemek.

Sam **OpenGL** to w (wielkim skrócie) standard do tworzenia grafiki dwu- i trójwymiarowej. To, że z przedstawionym podręcznikiem powinni się zapoznać wszyscy, których studia bądź praca mają z OpenGL-em związek, jest zupełnie jasne. Co jednak mniej oczywiste, jego lekturę serdecznie polecamy również tym, którzy z grafiką komputerową nie mieli do tej pory wiele wspólnego, uważają się zaś za entuzjastów matematyki. Autor nie traktuje bowiem królowej nauk jako tajemnego voodoo, którym tylko dla pozorów należy zamachać przed oczami czytelnika. Wręcz przeciwnie – omawiane tematy niejednokrotnie stanowią dla niego dobry pretekst do opowiedzenia o ciekawej matematyce. Czyni to bardzo umiejętnie i z wyjątkową, jak na tego typu podręcznik, dbałością o język, miejscami wspaniale bawiąc się słowem. Dlatego jesteśmy przekonani, że publikacja może być dla naszych Czytelników dobrą okazją do postawienia choćby pierwszych kroków w tworzeniu grafiki komputerowej.

A może niektórym pozwoli ostatecznie wykonywać takie graficzne cudowniki, jak te zdobiące niniejszą okładkę, albo nawet piękniejsze? Wraz z Autorem trzymamy za to kciuki!