



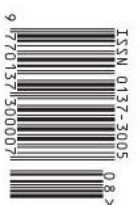
nr=6,63-10... 7=3,141592...

8 (603) 2024
CENA 8 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

DELTA






MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Po co
zebrom paski?
str. 7



Nakład: 2800 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 8 (603) 2024

Astrofizyka sfery Dysona <i>Michał Bejger</i>	str. 1
 Zadania	str. 3
Ile jest grafów? <i>Adam Gregosiewicz</i>	str. 4
 Koń, jaki jest, każdy widzi. A zebra? <i>Marta Fikus-Kryńska</i>	str. 7
O mieszaniu kawy. Życiowe zastosowanie topologii w analizie <i>Armin Schikorra</i>	str. 9
Jak mierzyć nieodwracalność zjawisk fizycznych? <i>Miłosz Panfil i Mateusz Polakowski</i>	str. 12
Ekstremalne kosmiczne laboratoria, część II <i>Karolina Rożko</i>	str. 16
 Prosto z nieba: Różne odcienie niebieskiego	str. 18
 Niebo w sierpniu	str. 19
Elegancki dowód twierdzenia Ptolemeusza <i>Krzysztof R. Apt</i>	str. 21
Klub 44	str. 22
 Przeliczenia w grafach <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

Za miesiąc: kto zostanie ostatni?



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ;
dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz;
prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszufńska;
dr hab. Artur Jeż, prof. UW; prof. dr hab. Bartosz Klin;
dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek,
Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT, www.poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numer archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Astrofizyka sfery Dysona

Michał BEJGER*

* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN; Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy

Pomysłem bardziej realistycznym niż sztywna sfera jest np. konstelacja dużej liczby gromadzących światło gwiazdy „satelitów” krążących wokół niej; takie urządzenie nazywa się „rojem Dysona”. Napiszemy o nim przy innej okazji.

Kosmiczne urządzenie zwane obecnie sferą Dysona zostało zaproponowane przez Freemana Dysona w latach 60., w pionierskich czasach projektu poszukiwania pozaziemskich cywilizacji SETI (ang. *Search for ExtraTerrestrial Intelligence*). Oryginalny pomysł był dość ogólnym stwierdzeniem, że wystarczająco długi rozwój pozaziemskiej cywilizacji może doprowadzić do stworzenia przez nią „sztucznej biosfery, która całkowicie otacza gwiazdę macierzystą”, na przykład w celu czerpania z niej energii. Taka megastruktura byłaby budowlą na skalę planetarną, która jest z oczywistych względów całkowicie poza zasięgiem naszej cywilizacji – tak teraz, jak i w przewidywalnej przyszłości.

Interesujące są oczywiście szczegóły. Wkrótce po przedstawieniu pomysłu, w odpowiedzi na zasłużoną – jak zaraz zobaczymy – krytykę, Dyson doprecyzował, że „sfera” niekoniecznie musi być sztywną (monolityczną) bryłą „wykonaną z jednego kawałka”, ponieważ tak zaprojektowana struktura nie byłaby odporna na różne niestabilności.

Jak to zwykle bywa, koncepcja sfery w literaturze popularnej i science-fiction wyprzedza samego Dysona. On sam przypisywał ten oryginalny pomysł powieści „Sprawca gwiazd” Olafa Stapledona z 1937 roku. W fantastyce naukowej pomysł nie pojawia się zazwyczaj jako rój wielu obiektów, ale jako pojedynczy twór wielkości planety lub jeszcze większa megastruktura, jak np. w serialu telewizyjnym „Star Trek: The Next Generation”, w odcinku pt. „Relikty” z 1992 roku, który przedstawia monolityczną sferę umożliwiającą życie po wewnętrznej stronie. Megastruktura o podobnej budowie pojawia się też w powieści fantastycznonaukowej „Pierścień” Larry’ego Nivena (1970), jako otaczający gwiazdę gigantyczny pierścień wykonany z bardzo wytrzymałego materiału, obracający się w celu zapewnienia przyciągania niezbędnego do życia na jego wewnętrznej powierzchni.

Pierwszy raz sformułowanie „sfera Dysona” w literaturze pojawia się dzięki Nikołajowi Kardaszowowi w 1964 roku, który skategoryzował cywilizacje pod względem poziomu ich rozwoju. Podczas gdy nasza cywilizacja jest typu 0, cywilizacje typu II są zdolne do kontrolowania całej energii swojej gwiazdy. Niektóre inne przykłady zaawansowania takich cywilizacji to wspomniany już wcześniej monolityczny pierścień Nivena wokół gwiazdy, satelita Harropa–Dysona, który wykorzystuje strumień cząstek wiatru słonecznego zamiast fotonów do generowania energii, częściowe sfery Dysona wykorzystywane jako międzygwiazdny napęd; jak to działa, zobaczymy poniżej. Jeśli chodzi o sfery Dysona, zaproponowano ich istnienie wokół przeróżnych astronomicznych obiektów: białych karłów, gwiazd neutronowych, rentgenowskich układów podwójnych, a nawet czarnych dziur.

Przedyskutujmy teraz kilka cech, a w zasadzie inżynierskich problemów związanych z praktyczną implementacją sfery Dysona.

Zgodnie z prawem Gaussa, podobnie jak w przypadku siły elektrostatycznej, potencjał siły grawitacyjnej wewnątrz jednorodnej, pustej w środku sfery jest równy zero, a na zewnątrz jest taki jak od masy punktowej. Oznacza to, że siła, z jaką sfera działa na masę umieszczoną w jej wnętrzu, jest równa zero. W konsekwencji siła, z jaką masa (np. gwiazda) znajdująca się wewnątrz działa na sferę, jest również równa zero. Inaczej mówiąc, sfera nie oddziałuje z masami znajdującymi się wewnątrz niej, a masy wewnątrz nie oddziałują na nią. Środki masy sfery i gwiazdy nie są grawitacyjnie sprzężone: pozostają w stanie marginalnej (neutralnej) stabilności względem siebie, tzn. w konfiguracji równowagi, która nie jest ani stabilna, ani niestabilna. W praktyce brak stabilności oznacza, że układ sfera-gwiazda wymagałby aktywnej korekcji zmian pozycji wywołanej przez siły perturbacyjne, aby zapobiec zderzeniu.

Uwzględnijmy kluczowy aspekt urządzenia, czyli fakt, że gwiazda świeci, a sfera pochłania jej światło. W konsekwencji sfera odczuwa ciśnienie promieniowania.



Oczywiście niesymetryczność promieniowania, np. z powodu aktywności gwiazdy, będzie działać destabilizująco na neutralną równowagę układu sfera-gwiazda.

Moduł Younga przyjmuje wartości rzędu 10 GPa (gigapaskali) dla materiału typu drewno, 100 GPa dla metali, 10^3 GPa dla diamentu. Hipotetycznie możliwa alotropowa odmiana węgla, karbin, ma szacowany moduł Younga ~ 30 razy większy od diamentu.

Jednak ze względu na to, że pęd wszystkich fotonów wyemitowanych przez gwiazdę jest w sumie równy 0, nawet asymetryczna powłoka otaczająca gwiazdę nie zyska w ten sposób dodatkowego pędu. Ponieważ fotony znajdują się wewnątrz sfery, raz wyemitowane nieuchronnie uderzą w inną jej część i przekażą swój pęd. Oznacza to, że wypadkowa siła związana z ciśnieniem promieniowania ma wartość 0. Umożliwienie fotonom ucieczki na zewnątrz przez otwór w wybranym punkcie sfery może natomiast zapewnić mechanizm sterowania pozycją sfery względem gwiazdy, a nawet stanowić pewnego rodzaju napęd całej struktury.

Jak wytrzymała musi być monolityczna sfera Dysona? Każdy element powierzchni dA powinien znajdować się w stabilnym położeniu względem gwiazdy. Można spróbować ustabilizować siłę przyciągającą grawitacji gwiazdy siłą odśrodkową, wynikającą z obrotu sfery wokół wybranej osi, ale nie jest to możliwe w przypadku monolitycznej sfery, ponieważ bieguny będą doświadczały innej siły odśrodkowej niż okolice równika, co wywoła siłę dążącą do spłaszczenia sfery. W praktyce materia nie jest nieskończenie sztywna, i będzie się deformować, gdy siły ściskające przekroczą krytyczną wytrzymałość elastyczną. Dla sfery o promieniu R i grubości ΔR można rozważyć przypadek, gdy przekroczona jest wytrzymałość plastyczna materiału σ_p , co wiąże się z krytycznym ciśnieniem $p_{kryt,p} = 2\sigma_p \Delta R/R$, albo gdy odkształcenie od sferyczności przekroczy krytyczny rozmiar, co wiąże się z ciśnieniem $p_{kryt,o} \approx E (\Delta R/R)^2$, gdzie E jest modułem Younga (stosunkiem naprężenia do względnego odkształcenia liniowego). Siła grawitacji gwiazdy o masie M działająca na jednostkę powierzchni sfery o gęstości ρ to $p_{graw} = GM\Delta R\rho/R^2$, zatem krytyczny moduł Younga wynosi $E_{kryt} = GM\rho/\Delta R$. Dla typowych danych, $M = 1 M_\odot$ (masa Słońca), $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ (gęstość wody) oraz $\Delta R = 10 \text{ m}$, dostaniemy $E_{kryt} \approx 10^{13} \text{ GPa}$, czyli wartość przekraczającą E dla najwytrzymalszych materiałów o czynnik rzędu miliard.

Czy zwiększenie ΔR oraz zmniejszenie ρ byłoby rozwiązaniem? Wartości $\Delta R = 100 \text{ km}$ oraz $\rho = 0,1 \text{ g/cm}^3$ zmniejszają E_{kryt} do wielkości „jedynie” 10^4 większej od karbinu. Dla sfery o promieniu R równym jednej jednostce astronomicznej (odległości Ziemia-Słońce) oznaczałoby to masę sfery $\sim 1,4 M_\odot$, czyli niezaniebnywalną z punktu widzenia samograwitacji sfery. Rozwiązaniem może być zmniejszenie gęstości powierzchniowej sfery tak bardzo, jak to możliwe. Dla przykładu jasność Słońca jest równa $L_\odot = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$, a zatem całkowity strumień promieniowania przez powierzchnię o promieniu r wynosi $f = L_\odot/(4\pi r^2)$, co daje ciśnienie $p_f = f/c$, gdzie c oznacza prędkość światła. Jeśli promieniowanie ma być równoważone przez siłę grawitacji $F = GM_\odot \rho_s dA/r^2$, gdzie ρ_s jest gęstością powierzchniową, a dA powierzchnią elementu o masie $m = \rho_s dA$, to z porównania ciśnień $p_f = p_g = F_g/dA$ dostajemy $\rho_s \approx L_\odot/(4\pi GM_\odot c) \approx 1 \text{ g/m}^2$, czyli gęstość porównywalną do bardzo cienkich folii. Trudno powiedzieć, czy taka sfera byłaby w stanie przetrwać w warunkach kosmicznych.



Jak wygląda sytuacja, gdy sferę coś zaburzy? Ponieważ monolityczna sfera nie jest dynamicznie stabilna, trzeba jakoś przeciwdziałać siłom perturbacyjnym, by utrzymać ją w stanie równowagi. Siła powodowana przez masę m_p (np. planetę znajdującą się w układzie) w odległości r od sfery Dysona o masie m i promieniu R to z grubsza $F_{pert} = Gmm_p/r^2$ (oczywiście zakładamy tu, że $R \ll r$). W celu zniwelowania tego przyspieszenia sfera może być wyposażona w silniki odrzutowe wyrzucające część jej masy z prędkością v , wywierając w ten sposób siłę $F_{odrz} = \dot{m}v$, której odpowiada moc $P_{odrz} = \dot{m}v^2/2$. Utrata masy przez sferę jest więc równa $\dot{m} = F_{odrz}^2/P_{odrz}$, co oznacza czas życia sfery $\tau = m/\dot{m} = 2P_{odrz}m/F_{odrz}^2$. Dla $F_{pert} = F_{odrz}$ dostaniemy:

$$\tau = \frac{2P_{odrz}r^4}{G^2mm_p^2} = \left(\frac{P_{odrz}}{L_\odot}\right) \left(\frac{r}{1 \text{ j.a.}}\right)^4 \left(\frac{m}{m_\oplus}\right)^{-1} \left(\frac{m_p}{m_\oplus}\right)^{-2} \cdot 200 \text{ lat.}$$

Wynik zapisałiśmy w postaci iloczynu bezwymiarowych stosunków występujących tu wielkości do typowych wartości, uzyskując w konsekwencji

skalę czasu równą około 200 lat. Za typową wartość masy przyjęliśmy masę Jowisza m_J . Ponieważ sfera jest zasilana energią gwiazdy, to oczywiście $\frac{P_{\text{dorz}}}{L_{\odot}} \leq 1$, a w praktyce stosunek ten byłby zapewne znacznie mniejszy od 1. Aby sfera o masie m_J była stabilna przez wystarczająco długi czas (np. $\tau > 10$ milionów lat), w okolicy 1 j.a. nie może znajdować się żadne ciało o masie większej niż $10^{-2}m_J$. Jeśli w układzie nie ma planet, ponieważ np. zostały wykorzystane do budowy sfery, to wydaje się, że stabilność dzięki napędowi zasilanemu światłem gwiazdy może wystarczyć w kosmicznych skalach czasowych. Alternatywnie, sfera może wykorzystywać masę gwiazdy jako paliwo do stabilizacji swojej pozycji.

Jak widać, monolityczna sfera Dysona wydaje się interesującym pomysłem teoretycznym, ale może sprawić pozaziemskiej cywilizacji wiele praktycznych kłopotów. Z drugiej strony cywilizacja zdolna do manipulacji obiektami w skali gwiazdowej z pewnością daje sobie radę z większymi problemami.

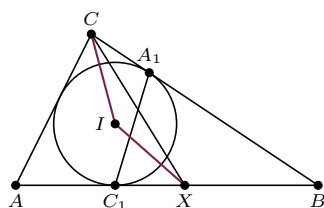
Przy pisaniu tego tekstu obficie korzystałem z artykułu J. T. Wrighta: „Dyson Spheres”, *Serbian Astronomical Journal*, 200, 1 (2020) arXiv:2006.16734.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1789. Okrąg o środku w punkcie I jest wpisany w trójkąt ABC i jest styczny do boków BC i AB odpowiednio w punktach A_1 i C_1 . Na odcinku BC_1 obrano punkt X taki, że $IX = IC$. Udowodnić, że środek odcinka XC leży na odcinku A_1C_1 .



M 1790. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ spełnia nierówność

$$f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y).$$

Udowodnić, że f jest funkcją stałą na zbiorze dodatnich liczb rzeczywistych.

M 1791. Każdy wierzchołek n -kąta wypukłego \mathcal{F} ($n \geq 4$) malujemy na biało lub czarno. Przekątną \mathcal{F} nazwiemy *kolorową*, jeśli jej końce są różnego koloru. Kolorowanie wszystkich wierzchołków \mathcal{F} nazwiemy *dobrym*, jeśli \mathcal{F} można podzielić na trójkąty kolorowymi przekątnymi, które nie mają punktów wspólnych innych niż wierzchołki \mathcal{F} . Wyznaczyć liczbę dobrych kolorowań.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1101. Pokonywanie zakrętu ze zbyt dużą prędkością kończy się poślizgiem i wypadnięciem z łuku drogi lub przewróceniem pojazdu (tzw. dachowaniem). Znajdź warunki, w jakich następuje pierwszy lub drugi przypadek. Samochód o masie m pokonuje zakręt o promieniu R z prędkością v , współczynnik tarcia opon o powierzchnię drogi wynosi f , a przyspieszenie ziemskie g . Droga jest pozioma. Środek masy pojazdu znajduje się na wysokości h nad drogą, w połowie odległości d między kołami.

F 1102. W wyniku zderzeń neutronów promieniowania kosmicznego z atomami atmosferycznego azotu ^{14}N powstają atomy węgla ^{14}C , które reagują z atmosferycznym tlenem, tworząc cząsteczki dwutlenku węgla CO_2 . Izotop ^{14}C jest nietrwały i w przemianie β^- rozpada się do ^{14}N z czasem połowicznego zaniku $\tau_{1/2} = 5730$ lat. Ogromna większość cząsteczek CO_2 w atmosferze zawiera stabilny izotop ^{12}C , przy czym stosunek liczb cząsteczek z atomami ^{14}C i ^{12}C pozostaje stały w czasie (dynamiczna równowaga procesów tworzenia i rozpadu ^{14}C). W wyniku fotosyntezy w takim samym stosunku izotopy węgla są przyswajane przez organizmy żywe (dopóki pozostają żywe). W ruinach starożytnego miasta archeolodzy znaleźli papirusowy zwój, w którym stosunek atomów ^{14}C i ^{12}C wynosił 80% wartości mierzonej we współczesnych roślinach. Kiedy powstał badany zwój?

Rozwiązania na str. 24

Ile jest grafów?

Adam GREGOSIEWICZ*

* Politechnika Lubelska

Przez *graf* rozumiemy parę uporządkowaną (V, E) , w której V jest ustalonym zbiorem *wierzchołków*, a E zbiorem *krawędzi* traktowanym jako pewien podzbiór zbioru $\{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w\}$. Krawędź $\{v, w\}$ będziemy dla uproszczenia oznaczać jako vw .

Dużo. A nawet nieskończenie wiele! Taka odpowiedź nie jest zbyt ciekawa, więc spróbujmy zadać pytanie bardziej konkretne. Może: *ile jest grafów o n wierzchołkach?* W tym przypadku odpowiedź nie jest być może zupełnie oczywista, ale ciągle mało interesująca. Różnych par wierzchołków jest tyle samo co wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru n -elementowego, czyli $\binom{n}{2}$. Ponieważ każda taka para może być lub nie być połączona krawędzią, więc grafów jest $2^{\binom{n}{2}}$. Mamy jednak świadomość, że pewne z tych grafów są w zasadzie identyczne – różnią się tylko etykietami, które nadaliśmy wierzchołkom. Na przykład dla $n = 4$ grafy



mają inne zbiory krawędzi, ale *tak naprawdę* są jednakowe. Wystarczy bowiem w pierwszym grafie zmienić numerację wierzchołków: $v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_3, v_3 \rightarrow v_4, v_4 \rightarrow v_1$. Takich grafów nie chcemy zliczać osobno.

Powinniśmy w jakiś sposób utożsamić grafy, które różnią się wyłącznie nazwami wierzchołków. Powiemy, że dwa grafy $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ są *izomorficzne*, jeżeli istnieje taka bijekcja $f: V \rightarrow V'$, że

W rozważanym przykładzie ten izomorfizm już znaleźliśmy: $f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_3, f(v_3) = v_4, f(v_4) = v_1$.

$$vw \in E \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f(v)f(w) \in E'$$

dla dowolnych $v, w \in V$. Intuicyjnie, dwa grafy są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy da się je narysować w ten sam sposób.

Możemy teraz zapytać:

Ile jest nieizomorficznych grafów o n wierzchołkach?

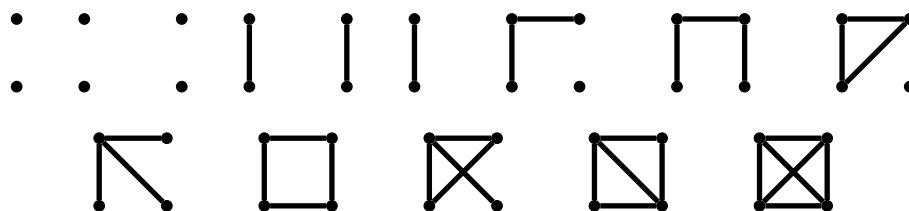
Dla $n = 1$ taki graf jest tylko jeden i nie ma żadnych krawędzi: •

W przypadku $n = 2$ istnieją dwa różne grafy: • • i •—•, a dla $n = 3$ cztery:



Trochę trudniej wyznaczyć wszystkie nieizomorficzne grafy zbudowane na czterech wierzchołkach, ale po paru minutach znajdziemy je wszystkie:

Samo narysowanie tych grafów to jedno, ale trzeba jeszcze pokazać, że żadne dwa z nich nie są izomorficzne oraz że żadnego nie brakuje.

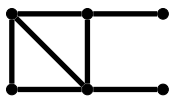


Oznaczając liczbę nieizomorficznych grafów o n wierzchołkach przez G_n , sprawdziliśmy, że $G_1 = 1, G_2 = 2, G_3 = 4$ oraz $G_4 = 11$. Dla większych wartości n znalezienie G_n staje się coraz trudniejsze, nawet przy pomocy metod komputerowych. Powodem jest to, że nie znamy żadnego szybkiego (działającego w czasie wielomianowym) algorytmu, który sprawdzałby, czy dwa zadane grafy są izomorficzne.

Problem izomorficzności grafów należy do klasy NP (dla danej funkcji f łatwo sprawdzić, czy jest ona izomorfizmem), ale nie wiadomo, czy jest NP-zupełny ani czy należy on do klasy P. Wprowadzenie do klas złożoności Czytelnik znajdzie w artykule W. Czerwińskiego *Dlaczego problem $P = NP$ jest tak trudny?* (Δ_{17}^3).

Możemy jednak stosunkowo łatwo oszacować liczbę G_n . Ograniczeniem górnym jest oczywiście $2^{\binom{n}{2}}$, ale domyślamy się, że nie jest to wartość optymalna. Spróbujmy znaleźć sensowne ograniczenie dolne. Zastanówmy się, ile grafów może być izomorficznych z danym grafem G . Z każdym takim izomorficznym grafem związana jest dowodząca izomorficzności permutacja wierzchołków G , więc grafów izomorficznych z G jest co najwyżej tyle, ile permutacji jego wierzchołków, czyli $n!$. (Jeśli takich permutacji jest dokładnie $n!$, to o grafie G mówimy, że jest *asymetryczny* – wtedy każde przeetykietowanie

Każdy graf asymetryczny ma co najmniej sześć wierzchołków. Przykład poniżej.



jego wierzchołków daje w efekcie inny graf). Skoro wszystkich grafów jest $2^{\binom{n}{2}}$, to z dokładnością do izomorfizmu jest ich co najmniej $2^{\binom{n}{2}}/n!$. Ostatecznie

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq G_n \leq 2^{\binom{n}{2}}.$$

Zwróćmy uwagę, że gdyby wszystkie grafy były asymetryczne, to nierówność z lewej strony stałaby się równością. Wiemy, że tak nie jest, bo dla każdego n istnieją grafy o n wierzchołkach, które nie są asymetryczne (na przykład grafy pełne, czyli kliki). Jeżeli jednak wyznaczymy, przy pomocy komputera, wartość G_n dla małych n , to okaże się, że uzyskane dolne oszacowanie wcale nie jest takie złe.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_n	1	2	4	11	34	156	1044	12346	274668	12005168	1018997864	165 091 172 592
$2^{\binom{n}{2}}/n!$	1	1	2	3	9	46	417	6658	189373	9695870	902597328	154 043 277 298

W trzecim wierszu podaliśmy wartości $2^{\binom{n}{2}}/n!$ zaokrąglone w górę. Dużym zaskoczeniem wydaje się fakt, że to oszacowanie jest coraz lepsze wraz ze wzrostem n i asymptotycznie okazuje się optymalne. Mówi o tym piękne i głębokie twierdzenie udowodnione przez Paula Erdősa, Alfréda Rényiego i George'a Pólya. Wykazali oni, że prawie wszystkie grafy są asymetryczne, to znaczy przy n dążącym do nieskończoności stosunek liczby grafów asymetrycznych o n wierzchołkach do liczby wszystkich grafów o n wierzchołkach dąży do jednego, co implikuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie (Erdős-Rényi-Pólya, 1963 r.). *Mamy*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_n}{2^{\binom{n}{2}}/n!} = 1.$$

Erdős i Rényi wykazali, iż prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrany graf o n wierzchołkach jest asymetryczny, dąży do jedności przy $n \rightarrow +\infty$, a Pólya znalazł asymptotykę G_n .

Na tym moglibyśmy właściwie zakończyć, ale prawdziwy skarb ciągle na nas czeka. Przejdźmy bowiem do grafów o przeliczalnej liczbie wierzchołków. Oczywiście niezomorficznych grafów tego typu jest nieskończenie wiele, ale nas interesuje raczej to, jaką frakcję stanowią one w zbiorze wszystkich grafów. Aby to pytanie uściślić, wprowadźmy pojęcie *grafu losowego*.

Badanie grafów losowych zapoczątkowali wspomniani Erdős i Rényi.

Należy mieć świadomość, że konstrukcja przestrzeni probabilistycznej wymaga uwagi. Możemy utożsamiać grafy losowe z ciągami zero-jedynkowymi i traktować je jak liczby rzeczywiste z przedziału $[0, 1]$. Pytanie o to, czy graf losowy ma żądaną własność, sprowadzamy w ten sposób do pytania o miarę Lebesgue'a podzbiorów odcinka jednostkowego. Pozwolę sobie jednak pominąć mniej istotne szczegóły techniczne.

Niech $V = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ będzie ustalonym zbiorem wierzchołków. Ustawiamy w ciąg rodzinę wszystkich podzbiorów dwuelementowych $\{v_i, v_j\}$, $i \neq j$ zbioru V i dla każdego z nich rzucamy symetryczną monetą. Jeżeli wypadł orzeł, to do zbioru krawędzi E dodajemy krawędź $v_i v_j$. Tak skonstruowany graf $G = (V, E)$ będziemy nazywać *grafem losowym*. Możemy teraz pytać, jakie jest prawdopodobieństwo, że taki graf ma pewną żądaną cechę.

Wprowadźmy następującą własność:

(Δ) Dla dowolnych skończonych i rozłącznych i skończonych zbiorów wierzchołków $U, W \subset V$ istnieje wierzchołek $v \in V$, który sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z U oraz z żadnym wierzchołkiem z V .

Lemat. *Prawdopodobieństwo, że graf losowy ma własność (Δ) jest równe 1.*

Sprawdzimy, że dopełnienie rozważanego zdarzenia ma prawdopodobieństwo równe 0. Ponieważ różnych par (U, W) utworzonych z rozłącznych i skończonych zbiorów U i W jest przeliczalnie wiele, wystarczy, że wykażemy tezę dla dowolnie wybranej pary. Przyjmijmy, że zbiory U i W mają łącznie n wierzchołków. To, czy wierzchołek $v \in V$ ma cechę opisaną w (Δ), jest zdeterminowane przez wzajemną relację między v a wierzchołkami w $U \cup W$. Ponieważ krawędzie losujemy niezależnie, to prawdopodobieństwo tego, że wierzchołek v nie ma żądanej własności, jest równe $1 - 2^{-n}$. Oznaczając przez A_k zdarzenie:

żaden z wierzchołków v_1, \dots, v_k nie spełnia (Δ),

widzimy, ponownie wykorzystując niezależność, że jego prawdopodobieństwo jest równe $(1 - 2^{-n})^k$. To implikuje $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k) = 0$ i kończy dowód lematu, gdyż

Jeżeli przeliczalnie wiele zdarzeń ma prawdopodobieństwo 0, to ich suma również.

Dla pełnej ścisłości powinniśmy się w tym miejscu powołać na ciągłość miary prawdopodobieństwa P .

własność (Δ) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dopełnienie zdarzenia $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$.

Sam lemat nie robi może wielkiego wrażenia, ale wynika z niego bezpośrednio, że istnieje tylko jeden nieskończony graf losowy!

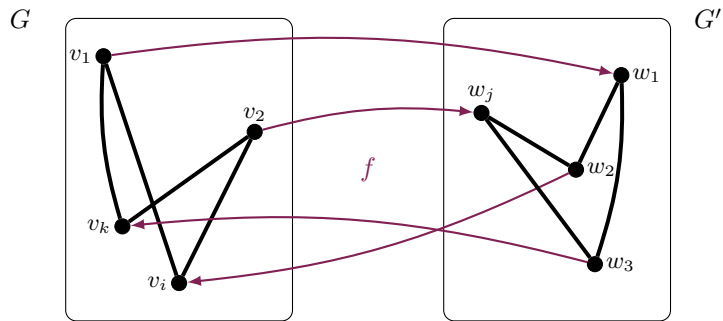
Przypominamy, że rozważamy tylko przeliczalne grafy nieskończone.

Twierdzenie (Erdős-Rényi, 1963 r.). *Dwa nieskończone grafy losowe są izomorficzne z prawdopodobieństwem 1.*

Dowód. Niech $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ będą nieskończonymi grafami losowymi. Wykorzystując technikę *tam i z powrotem*, zbudujemy izomorfizm f między nimi.

Przyjmijmy, że $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ i $V' = \{w_1, w_2, \dots\}$, i połóżmy $f(v_1) = w_1$. Rozważmy wierzchołek w_2 i znajdziemy w grafie G wierzchołek v_i o tej własności, że $v_1 v_i \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w_1 w_2 \in E'$. Niech $f(v_i) = w_2$. Przejdźmy do wierzchołka v_2 (lub v_3 , w razie gdyby $v_i = v_2$), i znajdziemy w grafie G' wierzchołek w_j , który jest w tej samej relacji do w_1 i w_2 co v_2 do v_1 i v_i – chcemy, aby grafy złożone z wierzchołków $\{v_1, v_i, v_2\}$ i $\{w_1, w_2, w_j\}$ były izomorficzne. Definiujemy $f(v_2) = w_j$.

Taki wierzchołek istnieje z prawdopodobieństwem 1 na mocy lematu.



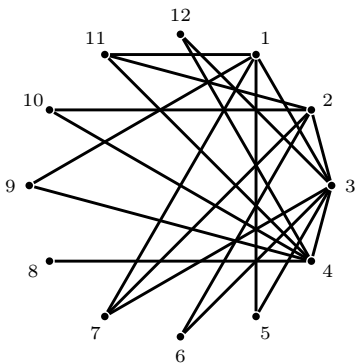
Powtarzamy opisaną procedurę w nieskończoność. W kroku o numerze nieparzystym (*tam*) znajdujemy pierwszy wierzchołek w zbiorze V , powiedzmy v_n , na którym funkcja f nie została jeszcze określona. Podzielmy zbiór wierzchołków, na których funkcja f jest już określona, na dwie części: niech U zawiera sąsiadów v_n , a W resztę. Połóżmy $U' = f(U)$ i $W' = f(W)$. Zbiory U' i W' są skończone i rozłączne, bo takie też są zbiory U i W . Z lematu wiemy, że istnieje w grafie G' wierzchołek, który sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z U' i żadnym wierzchołkiem z W' . Wybierzmy taki wierzchołek o najmniejszym indeksie, powiedzmy w_m , i zdefiniujemy $f(v_n) = w_m$.

Podkreślamy, że $U \cup W$ zawiera tylko te wierzchołki, na których f została już zdefiniowana.

Analogicznie postępujemy w kroku o numerze parzystym (*z powrotem*).

Niech w_n będzie pierwszym wierzchołkiem w zbiorze V' , który nie jest wartością funkcji f . Aktualny zbiór wartości funkcji f dzielimy na sąsiadów U' wierzchołka w_n i resztę W' . Następnie znajdujemy w grafie G odpowiednik v_m wierzchołka w_n , który sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami z $f^{-1}(U')$ i nie sąsiaduje z żadnym wierzchołkiem z $f^{-1}(W')$. Przyjmujemy $f(v_m) = w_n$.

Bezpośrednio z konstrukcji funkcji f widać, że jest ona bijekcją między zbiorami wierzchołków G i G' i zadaje poszukiwany izomorfizm. \square



Graf Rado przy obcięciu do pierwszych 12 wierzchołków

Erdős i Rényi pokazali, że w pewnym sensie istnieje tylko jeden nieskończony graf losowy – jest to graf określony przez warunek (Δ) . Nie wskazali jednak żadnego *konkretnego* egzemplarza. Pierwszy przykład został skonstruowany przez Richarda Rado w 1964 roku. Graf Rado jest niezwykle urokliwy. Zbiorem wierzchołków jest $V = \mathbb{N}$, a $m, n \in V$, $m < n$ są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dwójkowym liczby n na m -tym miejscu od prawej strony występuje 1. Dla przykładu wierzchołki 4 i 10 są połączone krawędzią, ponieważ zapis dwójkowy liczby 10, czyli $(1010)_2$, ma na 4. miejscu od prawej strony jedynekę. Uzasadnijmy, że tak skonstruowany graf ma własność (Δ) . Niech $U, W \subset V$ będą skończone i rozłączne. Dodając w razie potrzeby nowy wierzchołek do U , możemy przyjąć, że $\max U > \max W$. Wystarczy teraz zauważyć, że $v = \sum_{u \in U} 2^{u-1}$ ma własność opisaną w (Δ) .

Co to jest życie? pytała prof. Magdalena Fikus w swoim pierwszym artykule napisanym do *Delty*, opublikowanym w wydaniu 4/1974 (czyli w czwartym numerze!). Suche, encyklopedyczne odpowiedzi nie są w tym przypadku satysfakcjonujące. Życie dużo lepiej jest poznawać z różnych stron, przyglądając się jego blaskom, ceniom i zawiłościom. Czytelnicy *Delty* mieli możliwość odkrywać wspaniałość życia wraz z prof. Fikus, śledząc prowadzoną przez nią od 2010 roku rubrykę *Życie na Żywo*.

Jednak, jak to w Życiu bywa, *co zesłał los, trzeba będzie stracić*. Z życiowych powodów 157. odcinek *Życia na Żywo*, opublikowany w numerze 6/2024, okazał się odcinkiem ostatnim. Bardzo dziękujemy Autorce za tak piękną podróż przez różne zakamarki biologii i dzielenie się swoimi skłaniającymi do refleksji przemyśleniami na najrozmaitsze, życiowe tematy. Z tej podróży wracamy wraz z naszymi Czytelnikami wrażliwsi na wspaniałości otaczającego nas świata.

Jednak, aby nie pozostać w tym melancholijnym nieco nastroju, mamy też dla naszych Czytelników bardzo dobrą wiadomość. Uroczyście ogłaszamy powstanie nowego działu, zatytułowanego *Takie jest Życie*, który poprowadzi dr Marta Fikus-Kryńska. Tak więc w pewnym sensie będzie to naturalna kontynuacja – nie tylko z powodu tematyki.

Podczas rozmów o prowadzeniu nowej rubryki jej Autorka przyznała się nam: „mam w zwyczaju zastanawiać się nad drobiazgami, do których musiałam dojrzeć, żeby się nimi zadziwić. Bo to jest mój motyw przewodni: ciekawi mnie świat i niezmiennie zadziwia”. Życzymy zatem sobie i Czytelnikom, byśmy wraz z Martą Fikus-Kryńską niezmiennie zadziwiali się światem. A przystępując do czytania pierwszego felietonu z nowej serii, powiedzmy sobie z ciekawością dziecka: *Ach! a więc właśnie Takie jest Życie!*

Redakcja

takie jest
życie

Koń, jaki jest, każdy widzi. A zebra?

W czerwcu 2017 roku w Göd na północy Węgier Gabor Horwath rozpoczyna trwający 4 miesiące eksperyment. Na łące będącej częścią końskiej farmy umieszcza wraz ze współpracownikami 6 metalowych beczek wypełnionych wodą. Każda pokryta jest innym materiałem, beczki będą modelami zwierząt: białej, czarnej i beżowej krowy, brązowego konia i zebry (w wariacie prostych czarno-białych pasków i odwzorowania umaszczenia prawdziwego zwierzęcia). W czasach, kiedy ludzie wybierają się na Marsa, poznają sekwencje genów kolejnych żywych organizmów, tworzą nanoboty i drukują zapasowe narządy dla człowieka, węgierscy naukowcy starają się odpowiedzieć na pytanie wciąż nurtujące świat: po co zebrom paski?

Wcale nie wyśmiewam tu węgierskiego eksperymentu. Temat nie jest łatwy i ma tradycję. Dysputę w tej kwestii rozpoczęli ponad 150 lat temu Darwin i Wallace, a źródła mówią o 18 hipotezach, które tłumaczą istnienie paskowanych koni. Jak to zbadać? Zebry znane są z niechęci do oswojania, a obserwacje w naturalnym środowisku przynoszą szereg danych, które nadal nie dają jasnej odpowiedzi.

Po pierwsze, jest możliwe, że paski zebry pozwalają unikać drapieżników. Oto warianty tej teorii: paski to kamuflaż – trudniej wypatrzeć zwierzę w terenie pełnym światła i cieni; paski utrudniają drapieżnikom oszacowanie liczby osobników w stadzie – zwierzęta zlewają się w czarno-białą plamę; paski ostrzegają – nie atakuj, mam twarde kopyta i ostre zęby; wreszcie paski, mieniąc się i poruszając, sprawiają, że tropiciela dręczą złudzenia i jest skołowany.

Już w XXI wieku badania przynoszą kolejne konkurujące ze sobą hipotezy. Pierwsza: paski sprawiają, że zebry są rzadziej gryzione przez pijące krew muchy. Druga: paski wspomagają termoregulację ssaków żyjących w gorącym i suchym klimacie o dużych dobowych amplitudach temperatury.

Pierwsza teza powstaje dzięki obserwacjom, że muchy tse-tse i bąkowate, choć unoszą się nad zebarami, rzadziej na nich siadają niż na pasących się obok zwierzętach o jednobarwnym umaszczeniu. Owady próbują lądować na skórze zebry, jednak podchodząc do lądowania, „rozbijają się” o jej grzbiet i spadają. Wygląda na to, że wzory utrudniają owadowi wyczucie odległości. W badaniach kontrolną grupę zwierząt stanowiły konie przykryte derkami w czarno-białe

paski, które także okazały się mniej atrakcyjne dla much. Ot, praktyczna wskazówka dla hodowców rumaków (a może i dla nas?).

Inna linia badań miała początki w 1973 roku, kiedy pomiary wykonane w ZOO w Anglii wykazały, że czarne pręgi zebra pasących się na słońcu były o 9°C cieplejsze niż białe. W sumie nic w tym dziwnego, wszak wiadomo, że czarne bardziej się nagrzewa niż białe. Pozorna trywialność tego odkrycia sprawiła, że aż 30 lat trzeba było czekać na kolejne doniesienia na ten temat. W naturalnym środowisku w słoneczny dzień czarne paski są nawet o kilkanaście stopni cieplejsze od białych. W pochmurny dzień różnicy nie było, a w czasie zimnych afrykańskich nocy czarne paski okazały się chłodniejsze niż białe. Przy tej okazji odkryto, że w chłodny poranek włosy czarnych pasków unoszą się, a zwierzęta ustawiają się bokiem do promieni wschodzącego słońca.

Z tych faktów ukuto hipotezę: w ciepły dzień, dzięki różnicy temperatur powietrza nad paskami, wokół skóry zebry tworzą się prądy wirowe i turbulencje powietrza, które wydajnie chłodzą skórę zwierzęcia.

I tu wracam do węgierskich badań. Cztery miesiące pomiarów temperatury we wnętrzu beczek wykazały, że najmniej nagrzewa się biała, a najbardziej czarna beczka. Niestety brak znaczących różnic w temperaturze paskowanych i szarych pojemników nie potwierdził teorii o chłodzącej naturze pasków. Kolejny argument przeciw przyniosła praca, w której dokładnie był rejestrowany i analizowany obraz ruchu powietrza nad powierzchniami o różnym umaszczeniu uwidocznił dzięki efektowi Schlierena. Okazuje się, że o ile faktycznie zachodzą zawirowania gazu tuż nad czarno-białymi paskami, są one wyraźne jedynie w stojącym powietrzu, co na Afrykańskiej sawannie prawie się nie zdarza. Wystarczy niewielki podmuch wiatru lub ruch zwierzęcia, żeby warstwa powietrza, ruszająca się w sposób zależny od koloru pasków, kurczyła się do 1 cm, a to nie wystarczy, żeby skutecznie schłodzić skórę zebry.

Zatem teoria o unikaniu paskowanych powierzchni przez pijące krew muchy trzyma się mocno. Ostatnie badania z 2022 roku wykazują, że różnica temperatur między paskami utrudnia muchom precyzyjne wyczucie na skórze zebry położenia żył, co skutkuje nietrafionymi ukłuciami i narażeniem się na śmierć z powodu reakcji zwierzęcia. Ta komplikacja w powiązaniu z trudnościami z precyzyjnym lądowaniem mogła zostać utrwalona w procesie ewolucji.

A termoregulacja? Koniowate przetrwały na ewolucyjnym szlaku dzięki temu, że będąc ofiarą na czterech nogach, wykształciły ultraczułe zmysły i możliwość uruchomienia w ciągu ułamka sekundy mięśni do wprawienia ważącego kilkaset kilogramów ciała w cwał. Wzrost temperatury ciała, dzięki grzejącym się ekspresowo mięśniom, musiał połączyć się ze szczególnie wydajnym sposobem schładzania. Koniowate pocą się zatem dużo i całą powierzchnią ciała. W 1986 roku oczyszczono i scharakteryzowano niewielkie białko, które stanowi (aż) kilka procent potu koni, osłów i zebra. Nazwane „latherin”, od ang. *lather* – piana, należy do grupy białek znajdujących w ślinie większości ssaków, będących tzw. surfaktantami – czynnikami zmniejszającymi napięcie powierzchniowe wody. W wyniku ewolucji u koniowatych lateryna zaczęła być produkowana także przez gruczoły potowe. Pokryte wodoodporną sierścią zwierzęta uzyskały możliwość zmoczenia włosów w razie przegrzania. Woda, dzięki laterynie, nie paruje jedynie na powierzchni skóry, ale rozprowadzana jest także aż po koniuszki włosów. A to skutecznie chłodzi: aby przekształcić 1 g wody w temperaturze pokojowej w parę wodną w tej samej temperaturze, potrzeba aż 584 cal. Zaś skutki zmniejszenia napięcia powierzchniowego wody zna każdy kto używał mydła. Pokryty pianą koń jest zwyczajnie bardzo, bardzo spocony.

Pisząc ten tekst w 36-stopniowym upale, wykorzystałam parowanie wody do schłodzenia własnego ciała. Mówiąc szczerze, spociałam się tego dnia jak bura mysz. O, przepraszam, jak paskowany koń.

Marta FIKUS-KRYŃSKA



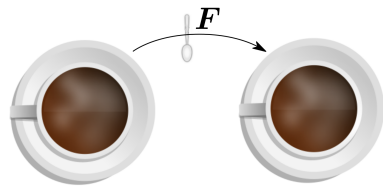
O mieszaniu kawy.

Życiowe zastosowanie topologii w analizie

Armin SCHIKORRA*

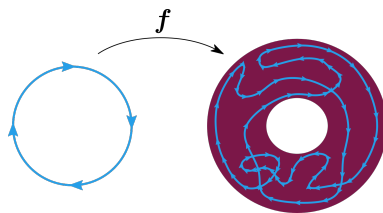
* University of Pittsburgh

A.S. is funded by NSF Career
DMS-2044898



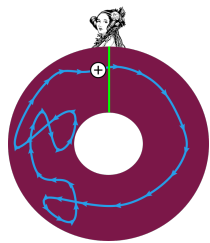
Dla uproszczenia przyjmijmy, że filiżanka jest dwuwymiarowa, jak na rysunku wyżej, choć analogiczne twierdzenie jest prawdziwe również w trzech wymiarach.

W *Delcie* pisaliśmy już o zastosowaniu pojęcia indeksu krzywej przy dowodzie podstawowego twierdzenia algebry (Maciej Skwarczyński, Δ_{74}^3) i twierdzenia Borsuka–Ulama (Krzysztof Nowiński, Δ_{75}^1).

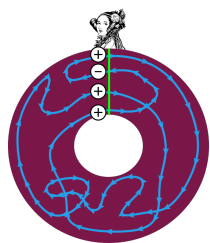


Ciągłe przekształcenie f z S_1 (po lewej) w S_2 (po prawej) można przedstawić jako krzywą w S_2 . Aby lepiej zobaczyć jej zachowanie, wizualnie „pogrubiamy” S_2 . Zwróćmy uwagę na orientację: gdy poruszamy punktem $\vec{v} \in S_1$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara, punkt $f(\vec{v})$ porusza się w kierunku wskazanym przez strzałki.

Tak naprawdę lewy rysunek przedstawiający S_1 nie mówi nic o zachowaniu f , więc od teraz będziemy go pomijać.



Indeks krzywej równy 1



Indeks krzywej równy 2

Czy przy mieszaniu łyżeczką gorącej kawy w filiżance zdarzyło Ci się kiedyś zastanowić, Czytelniku, nad skutecznością tego zabiegu? Mianowicie: czy jest możliwe, aby mimo starannego wymieszania jakaś pojedyncza cząstka kawy mogła znaleźć się dokładnie w tym samym miejscu, w którym była na początku? Jeśli wierzyć legendzie, holenderski matematyk Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) rzeczywiście się nad tym problemem zastanawiał, i zainspirowany przeprowadzonym eksperymentem dowiódł twierdzenia znanego dzisiaj jako *twierdzenie Brouwera o punkcie stałym* – pięknego wyniku łączącego w sobie topologię z analizą.

Przybliżmy sformułowanie interesującego nas twierdzenia. Weźmy dowolne ciągłe przekształcenie F z koła jednostkowego \mathbb{D} w to samo koło. Przykładem jest tu przyporządkowanie każdej cząstce kawy $\vec{p} \in \mathbb{D}$ jej położenia $F(\vec{p})$ po wymieszaniu – koło \mathbb{D} pełni tu rolę kształtu filiżanki. Twierdzenie orzeka, że istnieje wówczas co najmniej jeden punkt \vec{q} , który nie ulega przemieszczeniu: $F(\vec{q}) = \vec{q}$ – co oznacza, że któraś cząstka kawy pozostała w miejscu.

Topologia: indeks krzywej

Aby udowodnić twierdzenie Brouwera, zaczniemy od wprowadzenia na scenę naszego głównego narzędzia: *indeksu*. W tym celu weźmy ciągłe przekształcenie z okręgu w okrąg. Okrąg ten może reprezentować brzeg naszej (dla uproszczenia: dwuwymiarowej) filiżanki. Aby rozróżnić dziedzinę funkcji (okrąg przed mieszaniem) od jej przeciwdziedziny (okrąg po mieszaniu), oznaczymy je odpowiednio przez S_1 i S_2 .

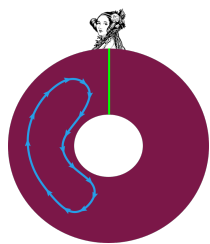
Przekształcenie f to nic innego jak funkcja $f: S_1 \rightarrow S_2$. *Ciągłość* oznacza natomiast, że jeśli dwa punkty \vec{v}, \vec{u} w dziedzinie leżą blisko siebie, to $f(\vec{v})$ nie może być zbyt daleko od $f(\vec{u})$. Takie ciągłe przekształcenie f będziemy też nazywać *krzywą*, bo możemy bez odrywania ołówka narysować wszystkie wartości $f(\vec{v})$, gdy \vec{v} przebiega S_1 . Ponieważ S_1 jest okręgiem, nie ma początku ani końca, podobnie jest więc z krzywą f zawartą w okręgu S_2 . Może przypominać ona gumkę recepturkę nawiniętą na S_2 .

Gdy założymy, że \vec{v} porusza się zgodnie z ruchem wskazówek zegara (w ten sposób ustalając *orientację* S_2), to nasza gumka również jest zorientowana. Będzie dla nas ważne, by odróżnić poszczególne „pasma” gumki, więc w celu zwiększenia czytelności rysunki na marginesach przedstawiają ją na „pogrubionej” wersji okręgu S_2 .

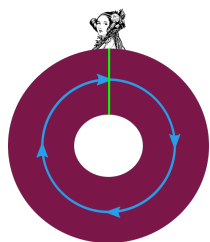
Czas na definicję. Przyjmijmy, że stoisz na górze okręgu S_2 i odnotowujesz, ile razy gumka przechodzi pod Twoimi nogami. Każde przejście zgodnie z ruchem wskazówek zegara liczy się jako $+1$, a każde przeciwne jako -1 . Wynik takiego sumowania nazywamy *indeksem* krzywej f i oznaczamy przez $\text{ind } f$. W zrozumienu mogą pomóc przykłady na marginesie, a jeszcze bardziej – samodzielne narysowanie kolejnych.

Ćwiczenie 1. Narysuj przykładowe krzywe o indeksie równym $0, +1, -1, +2, -2, \dots$ Znajdź kilka różnie wyglądających krzywych o indeksie 2. Wyraź własnymi słowami: co mają wspólnego wszystkie krzywe o indeksie 2.

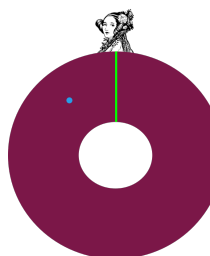
Przy powyższym ćwiczeniu można się natknąć na dwie skrajne sytuacje. Po pierwsze, jeśli gumka nigdy Cię nie mija, współczynnik nawinięcia to po prostu zero. Skądinąd każde „dotknięcie”, gdy gumka do Ciebie dociera i od razu zawraca, liczy się jako 0. Po drugie, dlaczego gumka nie miałaby nas mijać nieskończenie wiele razy? W takim przypadku jednak po prawie każdym przejściu gumka od razu zawraca i mija nas w przeciwną stronę; w rezultacie nieskończenie wiele $+1$ i -1 się wzajemnie znosi, pozostawiając skończoną sumę.



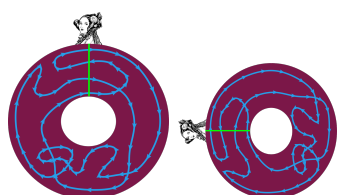
Indeks krzywej równy 0



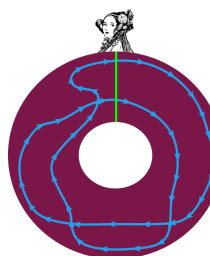
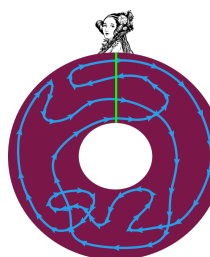
Przykład 1: Przekształcenie $f(\vec{v}) = \vec{v}$ ma indeks równy 1



Przykład 2: Każde przekształcenie stałe ma indeks równy 0



Ćwiczenie 2: Niezależnie gdzie jest Ada, indeks jest taki sam



Ćwiczenie 3: Gdy jedną krzywą da się przekształcić w drugą bez rozrywania i opuszczania \mathbb{S}_2 , indeks pozostaje ten sam. Ciekawostka: przeciwne wynikanie również jest prawdziwe!

Przyjrzyjmy się jeszcze dwóm prostym, ale niezwykle ważnym przykładom:

Przykład 1. Przyjmijmy, że przekształcenie f jest identycznością: $f(\vec{v}) = \vec{v}$. Wtedy gumka okrąży \mathbb{S}_2 , zgodnie z ruchem wskazówek zegara, dokładnie raz. Indeks wynosi więc $\text{ind } f = 1$.

Przykład 2. Ustalmy dowolny punkt $\vec{u} \in \mathbb{S}_2$ i za h przyjmijmy przekształcenie stałe: $h(\vec{v}) = \vec{u}$. Gumka w ogóle nie okrąży wtedy \mathbb{S}_2 , jest zdegenerowana do jednego punktu i dlatego $\text{ind } h = 0$.

Chociaż nie będzie to istotne dla dowodu, warto też wiedzieć rzecz następującą:

Ćwiczenie 2. Uzasadnij, że położenie obserwatora nie ma znaczenia: jeśli zamiast na górze okręgu będziemy stać w innym miejscu, wyznaczony przez nas indeks krzywej będzie taki sam.

Wreszcie najważniejsza własność: ciągłe zmiany rozważanej krzywej nie zmieniają jej indeksu. Topologia ma osobną nazwę dla takiej ciągłej zmiany – to *homotopia*. Ponadto jeśli gumkę określoną przez f da się zdeformować do tej zadanej przez g , bez rozrywania i bez opuszczania \mathbb{S}_2 , to przekształcenia f i g nazywamy *homotopijnymi*.

Ćwiczenie 3. Przekonaj się, że jeśli krzywą f przekształcimy w sposób ciągły w krzywą g – w trakcie tego procesu nie wychodząc poza \mathbb{S}_2 – to indeks obu tych krzywych jest taki sam.

Własność z ćwiczenia 3 może zostać wyrażona także w bardziej analityczny sposób:

Wniosek 4. Załóżmy, że przekształcenia $f: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ i $g: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ są ciągłe, a ponadto istnieje przekształcenie ciągłe zwane homotopią,

$$H(t, \vec{v}) \in \mathbb{S}_2 \quad \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \text{ oraz } \vec{v} \in \mathbb{S}_1,$$

spełniające następujące warunki:

- $H(0, \vec{v}) = f(\vec{v})$ dla wszystkich $\vec{v} \in \mathbb{S}_1$;
- $H(1, \vec{v}) = g(\vec{v})$ dla wszystkich $\vec{v} \in \mathbb{S}_1$.

Wówczas indeks f jest równy indeksowi g .

Związek z ćwiczeniem 3 jest następujący. Dla każdej „chwili” $t \in [0, 1]$ funkcję $\vec{v} \mapsto H(t, \vec{v})$ możemy traktować jako krzywą. Zmiana wartości t daje ciągłą zmianę tej krzywej, więc przekształcenie H opisuje ciągłą deformację krzywej f (w chwili $t = 0$) w krzywą g (w chwili $t = 1$).

Analiza: twierdzenie Brouwera o punkcie stałym

Zacznijmy od oznaczeń. Długość wektora $\vec{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ oznaczamy przez $|\vec{p}| := \sqrt{x^2 + y^2}$, a domknięte koło jednostkowe przez:

$$\mathbb{D} := \{\text{wszystkie wektory } \vec{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ dla których } |\vec{p}| \leq 1\}.$$

Brzegiem koła \mathbb{D} jest okrąg jednostkowy:

$$\mathbb{S} := \{\text{wszystkie wektory } \vec{p} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ dla których } |\vec{p}| = 1\}.$$

Użyjemy również oznaczenia $\vec{0} = (0, 0)$ na początek układu współrzędnych. Teraz już jesteśmy gotowi, by precyzyjnie sformułować twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.

Twierdzenie 5. Dla dowolnego ciągłego przekształcenia $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ istnieje co najmniej jeden punkt $\vec{p} \in \mathbb{D}$ spełniający $F(\vec{p}) = \vec{p}$. Taki punkt \vec{p} nazywamy *punktem stałym* przekształcenia F .

Wróćmy na chwilę do filiżanki kawy z samego początku. Dla ułatwienia przyjmijmy, że filiżanka jest dwuwymiarowa, w kształcie koła \mathbb{D} – tak jak widziana z góry na pierwszym rysunku. Przekształcenie $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ możemy wtedy określić, rozważając kroplę kawy początkowo znajdującą się w punkcie $\vec{p} \in \mathbb{D}$, i za $F(\vec{p})$ przyjmując jej położenie po zamieszananiu. Oczywiście położenie to nadal jest w obrębie filiżanki \mathbb{D} (nic się nie wylało!). W takiej sytuacji twierdzenie Brouwera stwierdza, że któraś z kropeł kończy dokładnie tam, gdzie zaczęła.

Dowód Twierdzenia. Przeprowadzimy dowód przez sprzeczność, czyli założymy, że dane jest nam ciągle przekształcenie $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ pozbawione punktu stałego, i stąd wyprowadzimy sprzeczność. Na tej drodze pomoże nam wynikająca z braku punktu stałego obserwacja, że wielkość $|\vec{p} - F(\vec{p})|$ jest dodatnia dla każdego $\vec{p} \in \mathbb{D}$, a więc można przez nią dzielić bez obawy, że podzielimy przez zero. Posłuży nam to do zdeformowania gumki z przykładu 1 do tej z przykładu 2 i uzyskania w ten sposób sprzeczności z wnioskiem 4.

Konkretniej, do sprzeczności doprowadzi nas badanie indeksu krzywej $g: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ zadanej wzorem $g(\vec{v}) := \frac{\vec{v} - F(\vec{v})}{|\vec{v} - F(\vec{v})|}$. Skoro każdy punkt \vec{v} na okręgu jest również punktem koła, to ma sens rozważanie $F(\vec{v})$, a punkt powstały w wyniku dzielenia leży na okręgu \mathbb{S}_2 . Ponadto nie dzielimy przez zero, więc funkcja g

rzeczywiście jest dobrze określona i ciągła. Rozważymy trzy przekształcenia:

$$f(\vec{v}) = \vec{v}, \quad g(\vec{v}) = \frac{\vec{v} - F(\vec{v})}{|\vec{v} - F(\vec{v})|}, \quad h(\vec{v}) = -\frac{F(\vec{0})}{|F(\vec{0})|}.$$

jak w przykładzie 1, $\text{ind } f=1$ jak wyżej stała jak w przykładzie 2, $\text{ind } h=0$

Naszym celem jest wykazanie, że krzywa f jest homotopijna z g , a g z h . Z wniosku 4 wyniknie wtedy, że indeksy krzywych f , g i h są równe – choć dobrze wiemy, że indeks f wynosi 1, a indeks h to 0. Ta oczywista sprzeczność pokazuje, że gdzieś musiał być błąd, i tym błędem musiało być początkowe założenie, że „ F nie ma punktu stałego”. Skoro tak, to szukany przez nas punkt istnieje i dowód jest zakończony. \square

Pozostaje więc dowieść homotopijności f , g i h , co naturalnie dzieli się na dwa kroki:

Dowód, że f i g są homotopijne. Rozważmy homotopię daną wzorem:

$$H(t, \vec{v}) := \frac{\vec{v} - tF(\vec{v})}{|\vec{v} - tF(\vec{v})|}, \quad \vec{v} \in \mathbb{S}_1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Jest to przekształcenie dobrze określone i ciągłe, ponieważ unikamy dzielenia przez zero: $|\vec{v} - tF(\vec{v})| \neq 0$ dla wszystkich $\vec{v} \in \mathbb{D}$ i $t \in [0, 1]$. Istotnie, dla $t = 1$ jest to konsekwencja naszego założenia $F(\vec{v}) \neq \vec{v}$, natomiast dla $t < 1$ punkt $tF(\vec{v})$ leży ściśle wewnątrz okręgu jednostkowego (wszak $|F(\vec{v})| \leq 1$), co w szczególności oznacza $tF(\vec{v}) \neq \vec{v}$.

Co więcej, $H(0, \vec{v}) = f(\vec{v})$ (tu warto przypomnieć, że $|\vec{v}| = 1$) oraz $H(1, \vec{v}) = g(\vec{v})$. Przekształcenie H jest więc homotopią w sensie wniosku 4. \square

Dowód, że g i h są homotopijne. Tym razem przyjmijmy:

$$H(t, \vec{v}) := \frac{t\vec{v} - F(t\vec{v})}{|t\vec{v} - F(t\vec{v})|}, \quad \vec{v} \in \mathbb{S}_1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Wówczas łatwo zauważyć, że:

- H jest dobrze określone i ciągłe, bo nie dzielimy przez zero;
- $H(1, \vec{v}) = g(\vec{v})$;
- $H(0, \vec{v}) = h(\vec{v})$.

Tak więc H w ciągły sposób przekształca g w h . \square

Uwagi końcowe

Ograniczyliśmy się do rozważania dwuwymiarowego koła \mathbb{D} , którego brzegiem jest jednowymiarowy okrąg \mathbb{S} , ale jedynie dlatego, że łatwo jest określić indeks krzywej w okręgu. To samo rozumowanie przenosi się jednak na kule wymiaru 3 i wyżej, wystarczy w tym celu pojęcie indeksu krzywej zamienić na ogólniejsze pojęcie *stopnia przekształcenia*. Istnieją nawet nieskończone wymiarowe wersje twierdzenia Brouwera, przydatne w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Teoria stopnia przekształcenia, lub ogólniej teoria grup homotopii, stanowi natomiast jedno z podstawowych zagadnień dziedziny znanej jako *topologia algebraiczna*.

Na koniec odnotujmy ważną własność przedstawionego przez nas dowodu twierdzenia Brouwera: nie mamy żadnego pojęcia, *gdzie* jest szukany punkt stały. Dowód nie jest konstruktywny – nie daje nam żadnej wskazówki, gdzie szukać. Wiemy tylko tyle, że istnieje. Co więcej, nie jest on wyznaczony jednoznacznie – punktów stałych może być wiele, choćby dla przekształcenia identycznościowego, czyli kiedy kawy wcale nie zamieszałyśmy. Na sam koniec, jako ostatnie ćwiczenie, zachęcam Czytelnika do samodzielnego sformułowania i dowodu twierdzenia Brouwera w przypadku jednowymiarowym, w którym rolę koła jednostkowego spełnia odcinek $[-1, 1]$.

Konstruktywny dowód twierdzenia Brouwera przedstawił Jarosław Górnicki w Δ_{20}^7 . Wyprowadzenie tego wyniku z twierdzenia Borsuka–Ułama można za to znaleźć u Krzysztofa Ciesielskiego i Zdzisława Pogody w Δ_{99}^{11} .

Jak mierzyć nieodwracalność zjawisk fizycznych?

Miłosz PANFIL i Mateusz POLAKOWSKI

Każdy układ izolowany dąży do równowagi termodynamicznej. Po tym stwierdzeniu niemal zawsze następuje przykład gorącego kubka z herbatą. Nie bez powodu zresztą – nawet osoby, które nigdy w życiu nie słyszały o zasadach termodynamiki, wiedzą, że w chłodnym pokoju gorąca herbata zawsze stygnie, natomiast zimna herbata raczej nie zacznie się gotować. Ta asymetria wyznacza kierunek upływu czasu, zwany powszechnie *strzałką czasu* (o której można więcej przeczytać w Δ_{19}^1). Skoro zatem bieg czasu w przeciwnym kierunku dałby nam niefizyczny proces, to stygnięcie herbaty jest procesem nieodwracalnym i jako taki wiąże się ze zwiększeniem entropii naszego systemu (więcej o entropii można przeczytać w Δ_{19}^4). Gdy temperatura w kubku i pokoju wreszcie się wyrówna, system dochodzi do tzw. stanu równowagi termodynamicznej, czyli osiąga najbardziej prawdopodobny stan makroskopowy (stan o najwyższej entropii). Ta powszechna w układach fizycznych chęć dążenia do równowagi termodynamicznej ujęta jest przez drugą zasadę termodynamiki, która głosi, że entropia w układach izolowanych samorzutnie nie maleje.

Sam stan równowagi termodynamicznej ma dwie szczególne właściwości. Po pierwsze jest *stanem stacjonarnym*, a po drugie zachodzi w nim *zasada równowagi szczegółowej*. Wyjaśnimy teraz pokrótce te pojęcia. Gdy opisujemy obiekty złożone z ogromnej liczby cząstek, nie jesteśmy w stanie śledzić ruchu każdej z nich. Zamiast tego opisujemy układ za pomocą prawdopodobieństwa, na przykład tego, że w gazie jest cząstka o konkretnej prędkości. Stan stacjonarny jest to stan, w którym rozkład prawdopodobieństwa różnych konfiguracji układu nie zmienia się w czasie. W konsekwencji makroskopowe parametry układu, takie jak średnia temperatura, średnie ciśnienie czy średnia gęstość cząstek, pozostają stałe.

Ale stan równowagi termodynamicznej jest czymś więcej niż tylko stanem stacjonarnym. Cząsteczki gazu są w ciągłym ruchu, więc pomimo tego, że średnia gęstość jest stała, to gęstości cząstek fluktuują i układ przechodzi przez różne konfiguracje. W przypadku równowagi szczegółowej każdej zmianie w mikroskopowej konfiguracji odpowiada równie prawdopodobna zmiana w odwrotnym kierunku. Dlatego też ewolucja układu w stanie równowagi termodynamicznej jest taka sama zarówno „do przodu”, jak i „do tyłu”. Ponieważ dynamika nie wyróżnia kierunku w czasie, to układ w stanie równowagi termodynamicznej nie wyróżnia strzałki czasu. Natomiast układ, który jest tylko w stanie stacjonarnym, w ogólności może taką strzałkę wyróżniać. Dla układu w stanie stacjonarnym, który nie jest w stanie równowagi termodynamicznej, powstaje więc pytanie – jak bardzo dynamika tego układu jest nieodwracalna? Na to pytanie postaramy się tu znaleźć odpowiedź.

Mierzenie nieodwracalności procesów jest istotne nie tylko w fizyce, ale też w biologii. W publikacji [*, która zainspirowała nas do napisania tego artykułu, Autorzy analizowali odpowiedzi komórek siatkówki oka salamandry na różne bodźce wizualne. Przy odpowiednio silnym pobudzeniu komórki nerwowe wysyłają impuls prądowy, który nazywamy potencjałem czynnościowym, do następnych komórek. Powstanie takiego impulsu możemy obserwować w postaci zmiany potencjału elektrycznego wewnątrz neuronu i rejestrować za pomocą elektrod. Bodźce wizualne składały się z nagrań ze środowiska naturalnego (łamające symetrię czasową) oraz poziomego paska poruszającego się losowo w górę i w dół (odwracalne czasowo). Okazało się, że nieodwracalność powstałych impulsów pojawiała się przy wszystkich rodzajach bodźców. Najbardziej nieoczywistym wynikiem było jednak to, że największa nieodwracalność w grupach komórek powstawała, gdy sam bodziec był najbardziej odwracalny. Formalizm wprowadzony przez autorów pozwala też określić źródło tej nieodwracalności. Wyniki pokazały, że jej głównym źródłem były interakcje pomiędzy neuronami, a nie cechy samego źródła.

W tym artykule, podążając za pracą [*, przybliżymy Czytelnikom, w możliwie łagodny sposób, metodę kwantyfikacji nieodwracalności w układach złożonych.

Wygodnym narzędziem do opisu procesów dynamicznych są łańcuchy Markowa. Czytelników, którzy chcieliby dowiedzieć się, czym te łańcuchy są, lub odświeżyć swoją wiedzę na ten temat, zapraszamy do przeczytania poświęconych im artykułów w Δ_{13}^9 i Δ_{13}^{12} . Niech

$$T(x'|x) = P(X_n = x' | X_{n-1} = x)$$

oznacza prawdopodobieństwo, że układ jest w stanie x' , pod warunkiem, że w poprzedniej chwili był w stanie x . Interpretujemy je jako prawdopodobieństwo przejścia ze stanu x do x' . Z twierdzenia Bayesa wynika, że

$$T(x'|x) = \frac{P(X_n = x', X_{n-1} = x)}{P(X_{n-1} = x)},$$

gdzie $P(X_n = x', X_{n-1} = x)$ oznacza prawdopodobieństwo, że w jednej chwili układ był w stanie x , a w kolejnej w x' , natomiast $P(x_n = x)$ prawdopodobieństwo, że w pewnej chwili układ jest w stanie x . Prawdopodobieństwa te mogą zmieniać się w czasie (z powodu przejść pomiędzy stanami). Jeśli prawdopodobieństwa te się nie zmieniają, określają *rozkład stacjonarny*, a o samym procesie mówimy, że znajduje się w *stanie stacjonarnym*. Rozkład stacjonarny $\pi(x)$ musi zatem spełniać następującą równość:

$$\begin{aligned} (1) \quad \pi(x') &= P(X_n = x') = \sum_{x \in \Omega} P(X_n = x', X_{n-1} = x) = \\ &= \sum_{x \in \Omega} P(X_n = x' | X_{n-1} = x) P(X_{n-1} = x) = \\ &= \sum_{x \in \Omega} T(x'|x) \pi(x). \end{aligned}$$

Wielkość $P(X_{n-1} = x, X_n = x') = T(x'|x)\pi(x)$ będziemy nazywali *całkowitym prawdopodobieństwem przejścia* i oznaczali przez $P(x \rightarrow x')$. Powiemy natomiast, że proces jest w *stanie równowagi szczegółowej*, gdy nie jesteśmy w stanie wyróżnić kierunku upływu czasu, to znaczy gdy $P(x \rightarrow x') = P(x' \rightarrow x)$ dla dowolnych $x, x' \in \Omega$. Zauważmy, że taki stan musi być również stanem stacjonarnym, gdyż wówczas

$$(2) \quad \sum_{x \in \Omega} T(x'|x)\pi(x) = \sum_{x \in \Omega} T(x|x')\pi(x') = \pi(x') \sum_{x \in \Omega} T(x|x') = \pi(x').$$

Zależność odwrotna nie jest jednak prawdziwa, przykłady zobaczymy w dalszej części artykułu. Jak możemy zmierzyć poziom nieodwracalności procesu? Jednym z wyborów jest tak zwana *entropia względna*, określona wzorem

$$(3) \quad \dot{I} = \sum_{x, x' \in \Omega} P(x \rightarrow x') \log \frac{P(x \rightarrow x')}{P(x' \rightarrow x)}.$$

Można pokazać, że względna entropia \dot{I} jest zawsze nieujemna, a równowaga szczegółowa zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\dot{I} = 0$.

Zobaczmy, jak to działa w praktyce. Prosty przykład nieodwracalnego łańcucha jest przedstawiony na rysunku 1. Przestrzeń stanów składa się z trzech stanów $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Prawdopodobieństwo przejścia w jednym kierunku wynosi p , natomiast w kierunku przeciwnym q ($p + q = 1$). W naszej notacji $T(x+1|x) = p$, a $T(x-1|x) = q$ dla $x \in \Omega$ (działania wykonywane są modulo 3). Z definicji (1) rozkładu stacjonarnego dostajemy po prostych obliczeniach $\pi(x) = 1/3$ dla każdego z trzech stanów. Nieodwracalność tego procesu wynosi natomiast:

$$\dot{I} = \sum_{x, x' \in \{1, 2, 3\}} P(x \rightarrow x') \log \frac{P(x \rightarrow x')}{P(x' \rightarrow x)} = 3 \cdot \frac{1}{3} p \log \frac{p}{q} + 3 \cdot \frac{1}{3} q \log \frac{q}{p} = (p - q) \log \frac{p}{q}.$$

W sytuacji, gdy $p = q$, proces jest odwracalny i $\dot{I} = 0$. Niezależnie od wyboru p zawsze mamy $\dot{I} \geq 0$.

W pracy [*] autorzy pokazują, jak rozszerzyć przedstawiony wyżej formalizm, by dowiedzieć się czegoś o korelacjach i oddziaływaniach pomiędzy różnymi częściami całego układu. By zilustrować to podejście, podzielimy układ na dwie części, które oznaczymy X i Y , i niech odpowiadające im zbiory możliwych stanów to Ω_X, Ω_Y . Całkowite prawdopodobieństwo przejścia układu pomiędzy stanami (x, y) i (x', y') będziemy oznaczać przez

$$P((x, y) \rightarrow (x', y')) = P((X_{n+1}, Y_{n+1}) = (x', y'), (X_n, Y_n) = (x, y)).$$

W takiej sytuacji całkowita nieodwracalność układu przedstawia się tak jak poprzednio, zgodnie ze wzorem (3), przy czym suma po stanach całego układu oznacza sumowanie zarówno po x , jak i y . Na potrzeby dalszych rozważań dołożymy pewne ograniczenie, mianowicie w danym kroku czasowym swój stan zmienia co najwyżej jeden z podukładów, tzn. $X_{n+1} = X_n$ lub $Y_{n+1} = Y_n$. Przyjmijemy ponadto oznaczenie $P(x \rightarrow x', y) = P((x, y) \rightarrow (x', y))$.

Ponieważ nasz cały system składa się z kilku podukładów, jego całkowita nieodwracalność powinna być sumą nieodwracalności pochodzących z części składowych. Możemy zatem zdefiniować nieodwracalności dla indywidualnych podukładów, patrząc na ich dynamikę z pozostałymi podukładami pozostającymi w niezmiennym stanie. W naszym przypadku dwóch podukładów nieodwracalność w podukładzie X obliczymy w następujący sposób:

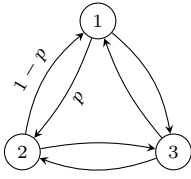
$$\dot{I}_X = \sum_{y \in \Omega_Y} \sum_{x, x' \in \Omega_X} P(x \rightarrow x', y) \log \frac{P(x \rightarrow x', y)}{P(x' \rightarrow x, y)},$$

i analogicznie określamy \dot{I}_Y . Zgodnie z wcześniejszym założeniem przejścia $(x, y) \rightarrow (x', y')$ dzielą się na takie, w których zmienia się tylko x , oraz takie, w których zmienia się tylko y , skąd łatwo wywnioskować równość $\dot{I} = \dot{I}_X + \dot{I}_Y$.

Może też zdarzyć się tak, że kilka układów fizycznych oddziałuje ze sobą, wpływając nawzajem na swoją dynamikę. W takim przypadku możemy patrzeć

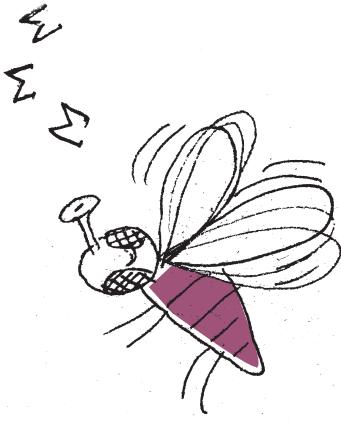
Entropia względna jest również znana jako dywergencja Kullbacka-Leiblera rozkładu P względem Q ,

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_{x \in \Omega} P(x) \log \frac{P(x)}{Q(x)}.$$



Rys. 1. Łańcuch Markowa o prawdopodobieństwach przejścia określonych przez macierz

$$[T(j|i)]_{i, j \leq 3} = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{bmatrix}$$



albo na wszystkie układy na raz, albo wybrać jeden z nich i badać tylko jego dynamikę, sumując po wszystkich pozostałych stopniach swobody. Zasadne jest zatem pytanie, ile dowiemy się o nieodwracalności systemu, stosując każde z tych podejść. Wielkość \dot{I}_X jest nieodwracalnością w pierwszym podukładzie i zależy od interakcji między podukładami przez to, że prawdopodobieństwo przejścia $P(x \rightarrow x', y)$ zależy od stanu y drugiego układu i *vice versa*. Co się stanie, gdy spojrzymy na prawdopodobieństwo $P(x \rightarrow x')$ przejścia $x \rightarrow x'$ niezależnie od stanu drugiego podukładu? Wartość $P(x \rightarrow x')$ otrzymamy, sumując po stanach drugiego podukładu:

$$P(x \rightarrow x') = \sum_{y \in \Omega_Y} P(x \rightarrow x', y).$$

Korzystając z tych prawdopodobieństw, możemy zdefiniować nieodwracalność podukładu, która, z samej konstrukcji, jest niezależna od stanu drugiego podukładu:

$$\dot{I}_{\text{ind}}^X = \sum_{x, x' \in \Omega_X} P(x \rightarrow x') \log \frac{P(x \rightarrow x')}{P(x' \rightarrow x)}.$$

Analogicznie określamy \dot{I}_{ind}^Y , definiujemy ponadto $\dot{I}_{\text{ind}} = \dot{I}_{\text{ind}}^X + \dot{I}_{\text{ind}}^Y$.

Mając pełną wiedzę o stanie naszego układu (tzn. o stanach wszystkich jego podukładów), uzyskujemy również całą wiedzę o jego nieodwracalności. W konsekwencji \dot{I}_X jest całkowitą nieodwracalnością związaną z pierwszym podukładem. Ignorując pozostałe stopnie swobody, naturalnie tracimy część informacji. Dotyczy to również nieodwracalności podukładu. Tracona w ten sposób nieodwracalność związana jest z interakcją między podukładem, który nas interesuje, a resztą systemu. Prowadzi nas to do pojęcia nieodwracalności interakcji $\dot{I}_{\text{int}}^i \equiv \dot{I}^i - \dot{I}_{\text{ind}}^i$. Okazuje się, że tej nieodwracalności można nadać następującą interpretację: opisuje ona miarę informacji, jaką otrzymujemy o stanie całej reszty systemu, porównując dynamikę ustalonego podsystemu z dynamiką przy odwróconym kierunku czasu. Przy dwóch podukładach wyraża się to wzorem

$$\dot{I}_{\text{int}}^X = \sum_{y \in \Omega_Y} \sum_{x, x' \in \Omega_X} P(x \rightarrow x', y) \log \left[\frac{P(y|x \rightarrow x')}{P(y|x' \rightarrow x)} \right],$$

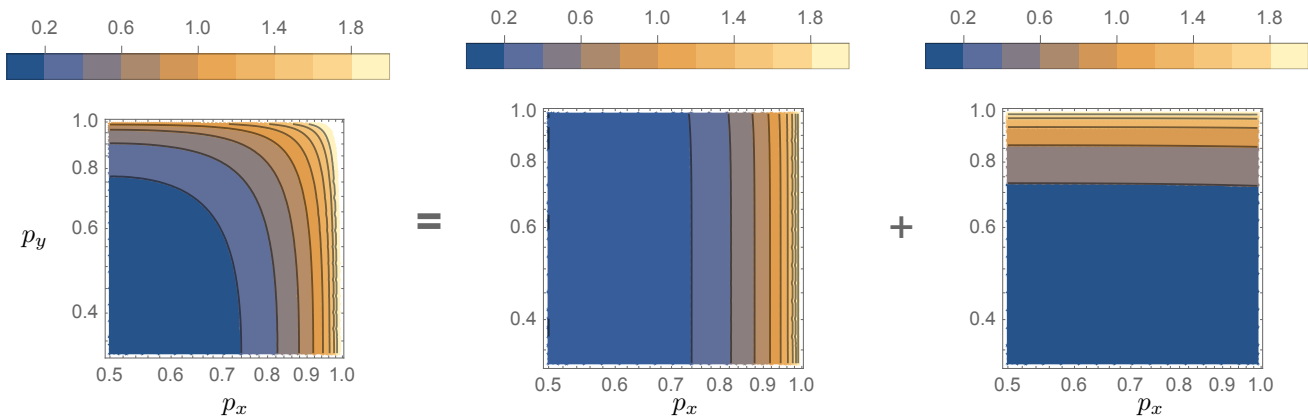
gdzie $P(y|x \rightarrow x') = P(x \rightarrow x', y)/P(x \rightarrow x')$. Nieodwracalność interakcji jest więc zerowa tylko wtedy, gdy puszczenie podukładu do przodu i do tyłu daje nam taką samą informację o reszcie systemu. W przeciwnym wypadku nieodwracalność interakcji podukładu jest ściśle dodatnia.

Oczywiście formalizm ten można rozszerzyć na systemy składające się z wielu różnych podukładów, gdzie możemy rozważać całą hierarchię nieodwracalności, z nieodwracalnością indywidualną na dole, a nieodwracalnością całkowitą na samej górze. Samą nieodwracalność interakcji możemy wówczas rozdzielić na interakcję drugiego rzędu, gdzie, tak jak wyżej, rozważamy jeden podukład, który zmienia stan, i jeden, którego stan jest ustalony, oraz trzeciego rzędu, gdzie dwa podukłady mają ustalone stany, i tak dalej.

By zobrazować ten podział, rozważmy tak zwany *sensing system* – układ złożony z dwóch podukładów: pierwszy wykonuje pewien losowy proces, a drugi stara się kopiować stan pierwszego. Jako pierwszy podukład X wybierzmy ponownie 3-stanowy proces Markowa z rysunku 1. Podukład Y kopiuje aktualny stan procesu X z prawdopodobieństwem p_y , zaś z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}(1 - p_y)$ wybiera każdy z pozostałych stanów. Za każdym krokiem czasowym podukład podlegający ewolucji jest wybierany losowo, każdy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Przykładową ewolucję obu układów prezentuje niniejsza tabelka, w której podkreśleniem zaznaczono układ podlegający zmianie, zaś ramką – sytuację, w której proces Y poprawnie skopiował proces X .

X	1	<u>2</u>	<u>3</u>	3	3	<u>2</u>	2	2	<u>1</u>	1	<u>3</u>
Y	1	1	1	<u>3</u>	2	2	1	<u>2</u>	2	2	2

Po zadaniu prawdopodobieństw przejść kolejnym krokiem jest znalezienie stanu stacjonarnego. Cały układ może teraz znajdować się w jednym z 9 stanów,



Rys. 2. Wykres konturowy nieodwracalności w funkcji p_x i p_y ilustrujący relacje $\dot{I} = \dot{I}_{\text{ind}} + \dot{I}_{\text{int}}$. Nieodwracalność niezależna \dot{I}_{ind} okazuje się zależeć głównie od p_x , natomiast nieodwracalność w wyniku oddziaływań zależy głównie od p_y

co oznacza, że stan stacjonarny jest rozwiązaniem układu 9 równań. Na szczęście dla naszego układu sytuacja się upraszcza. Ponieważ zasady ewolucji układu nie wyróżniają żadnego stanu, więc stan stacjonarny musi odzwierciedlać tę symetrię. Stąd wynika, że $\pi(1, 1) = \pi(2, 2) = \pi(3, 3) = \lambda$, $\pi(1, 2) = \pi(2, 3) = \pi(3, 1) = \mu$ i $\pi(1, 3) = \pi(2, 1) = \pi(3, 2) = \nu$. Prowadzi to do 3 równań na λ , μ i ν , których rozwiązaniem są:

$$\lambda = \frac{1}{N}(3 + 5p_y - 2p_x(1 - p_x)), \quad \mu = \frac{1}{N}(5 - p_x - p_y + 2p_x^2 + 3p_x p_y),$$

$$\nu = \frac{1}{N}(6 - 3p_x - 4p_y + 2p_x^2 + 3p_x p_y),$$

Stała normująca N jest dobrana tak, by prawdopodobieństwa w stanie stacjonarnym sumowały się do 1, czyli by $\lambda + \mu + \nu = 1/3$.

Znając stan stacjonarny, możemy obliczyć prawdopodobieństwa, że układ zmieni swój stan pomiędzy każdymi dwiema konfiguracjami. Na przykład prawdopodobieństwo, że układ był w stanie (1, 1) i przeszedł do stanu (1, 2), wynosi $P(1, 1 \rightarrow 2) = T(1, 2|1, 1)\pi(1, 1)$. Natomiast prawdopodobieństwo, że podukład Y zmienił stan z 1 na 2, wynosi

$$P(1 \rightarrow 2) = T(1, 2|1, 1)\pi(1, 1) + T(2, 2|2, 1)\pi(2, 1) + T(3, 2|3, 1)\pi(3, 1).$$

Znając te prawdopodobieństwa, możemy obliczyć \dot{I} i \dot{I}_{ind} , na przykład

$$\dot{I}_{\text{ind}}^X = \frac{1}{2}(1 - 2p_x) \log \frac{1-p}{p}, \quad \dot{I}_{\text{ind}}^Y = \frac{3}{4}(1 - 3p_y)(\mu - \nu) \log \left(\frac{1 - 3\nu - p_y + 9\nu p_y}{1 - 3\mu - p_y + 9\mu p_y} \right).$$

Wyrażenia na \dot{I} są bardziej skomplikowane i by zobrazować wyniki, posłużymy się wykresami. Na rysunku 2 przedstawiliśmy nieodwracalności w funkcji prawdopodobieństw p_x i p_y . Całkowita nieodwracalność zależy od obu zmiennych. Natomiast nieodwracalność niezależna \dot{I}_{ind} i interakcji \dot{I}_{int} zależą głównie od p_x i p_y , odpowiednio. Pokazuje to, że obie wielkości są czułe na różne aspekty dynamiki.

Gdyby ktoś z Czytelników postanowił obliczyć pozostałe nieodwracalności, okaże się, że nieodwracalności interakcji obu podukładów są dodatnie, pomimo że prawdopodobieństwa przejścia wewnątrz podukładu X zupełnie nie zależą od podukładu Y . Krótkie wyjaśnienie może być następujące. Obserwując tylko podukład X i jego asymetrię, możemy spodziewać się, że w podukładzie kopiującym asymetria ta będzie odwzorowana, choć z szumem. Tak samo, obserwując sam podukład Y , powinniśmy być w stanie wyciągnąć z niego pewną asymetrię, która będzie konsekwencją asymetrii układu X .

Literatura

- [*] Christopher W. Lynn, Caroline M. Holmes, William Bialek, and David J. Schwab. "Emergence of local irreversibility in complex interacting systems". *Phys. Rev. E*, 106:034102, Sep 2022.

Podsumowując, wprowadzona przez autorów pracy [*] metoda pozwala na zmierzenie nieodwracalności. Wielkość ta mówi nam, jak daleko układ w stanie stacjonarnym jest od stanu równowagi termodynamicznej. Tym, co prowadzi do nieodwracalności, jest złamana zasada równowagi szczegółowej, co powoduje, że układ ewoluje w konkretnym kierunku. Co ważne, metoda ta pozwala również określić źródło nieodwracalności – czy jest ona wynikiem dynamiki wewnątrz podukładów, czy jest efektem oddziaływań pomiędzy podukładami? Czekamy na kolejne zastosowania tej metody, by poznać jej pełen potencjał.

Ekstremalne kosmiczne laboratoria, część II

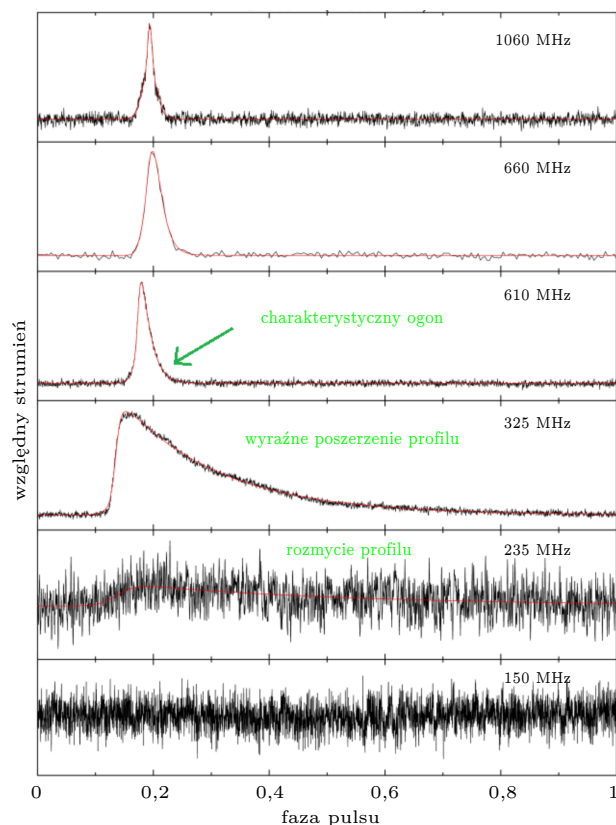
*Instytut Astronomii im. prof. J. Gila,
Uniwersytet Zielonogórski

Karolina ROŹKO*

Gwiazdy neutronowe, o których przeczytać można w pierwszej części mojego artykułu (Δ_{24}^1), okazały się doskonałymi narzędziami do badania najważniejszych teorii fizycznych: we wnętrzu gwiazd neutronowych kluczową rolę odgrywają prawa mechaniki kwantowej, zaś w opisie układów podwójnych tych egzotycznych obiektów nie można pominąć ogólnej teorii względności. Ale zacznijmy od początku...

Obecnie pulsary traktowane są przez większość astrofizyków jako kosmiczne laboratoria oraz narzędzia do badania ośrodka międzygwiazdowego. Gdy promieniowanie radiowe pulsarów napotyka na swojej drodze swobodne elektrony, może ono ulec kilku efektom: dyspersji, rozproszeniu, absorpcji oraz wzmocnieniu/wygaszeniu, czyli tzw. scyntyłacjom. Każdy z wymienionych efektów inaczej manifestuje się obserwacyjnie i pozwala uzyskać inne informacje o ośrodku międzygwiazdowym.

Zjawisko dyspersji zapewne znane jest Czytelnikom dzięki doświadczeniom z pryzmatem: to właśnie ono jest odpowiedzialne za rozszczepienie światła białego na kolorową tęczę. Podobnie zachowuje się ośrodek międzygwiazdowy: fala elektromagnetyczna emitowana przez pulsary będzie miała coraz mniejszą prędkość rozchodzenia się na coraz niższych częstotliwościach. To opóźnienie sygnału mierzone jest przez tzw. miarę dyspersji, a jej wartość pozwala m.in. na oszacowanie odległości do pulsarów, jeśli znamy przybliżony rozkład swobodnych elektronów w galaktyce. Ogólna zależność jest taka: im większa miara dyspersji, tym dalej jest pulsar.



Rys. 1. Wykres pokazujący profile średnie pulsara B0808 – 47: na częstotliwości 1060 MHz profil nie jest zaburzony przez rozpraszanie, na częstotliwości 610 MHz zaczyna być widoczny „ogon” po prawej stronie profilu, na 325 MHz poszerzenie profilu jest już bardzo wyraźne, a na 235 MHz profil prawie całkowicie uległ rozmyciu

Materia międzygwiazdowa nie jest jednak jednorodna i z tego powodu obserwuje się również rozpraszanie promieniowania radiowego. Ponieważ pulsy pojedyncze mogą się znacznie między sobą różnić, najczęściej bada się właśnie profil średni, który powstaje przez uśrednienie odpowiednio dużej liczby pulsów pojedynczych. Co więcej, profil średni jest unikalny dla każdego pulsara, tak jak odcisk palca jest unikalny dla każdego człowieka. Charakterystyczną cechą wpływu rozpraszania promieniowania na profil średni jest pojawianie się „ogona” po prawej stronie profilu wraz ze spadkiem częstotliwości, co można zobaczyć na rysunku 1. Jeśli poszerzenie spowodowane rozpraszaniem sygnału zaczyna przekraczać pojedynczy okres pulsara, można zaobserwować rozsmarowanie sygnału, przez co całkowicie znika on w szumie. Ponadto jeśli na drodze widzenia do pulsara znajduje się zagęszczenie materii międzygwiazdowej, np. w postaci mgławicy wiatru pulsarowego, pozostałości po supernowej lub obszaru H II, to może dojść nawet do absorpcji promieniowania, przez co całkowicie przestajemy obserwować sygnał pulsarów na niskich częstotliwościach, tzn. poniżej 100 MHz.

Z kolei scyntyłacje, czyli wzmocnianie i wygaszanie natężenia sygnału, spowodowane są głównie przez turbulentną naturę ośrodka międzygwiazdowego. Podobne zjawisko obserwujemy, gdy widzimy migotanie gwiazd na niebie będące skutkiem przechodzenia światła przez turbulentne komórki w atmosferze. W przypadku pulsarów wzrosty i spadki natężenia promieniowania występują w dwóch głównych skalach czasowych: jedna jest rzędu kilku minut, druga zaś waha się między kilkoma dniami a kilkoma tygodniami. Ich badanie pozwala ulepszać model rozkładu materii międzygwiazdowej, a w szczególności lokalizować miejsca zagęszczenia tego ośrodka.

Warto jednak zaznaczyć, że niektóre pulsary świecą mniej regularnie, do nich zalicza się m.in. tzw. *intermitted pulsars* oraz RRAT-y (*Rotation RAdio Transient*).

Taylor, J.H.; Weisberg, J.M., 1982, „A new test of general relativity – Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16”, *Astrophysical Journal*, 253: 908.

W projekcie IPTA będzie można wykrywać fale grawitacyjne o częstotliwości w zakresie 10^{-9} – 10^{-8} Hz. Dla porównania detektor LIGO wykrywa fale grawitacyjne o częstotliwości 10–250 Hz.

Wolszczan, A., Frail, D. A., 1992, “A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12”, *Nature*, 355: 145-147.

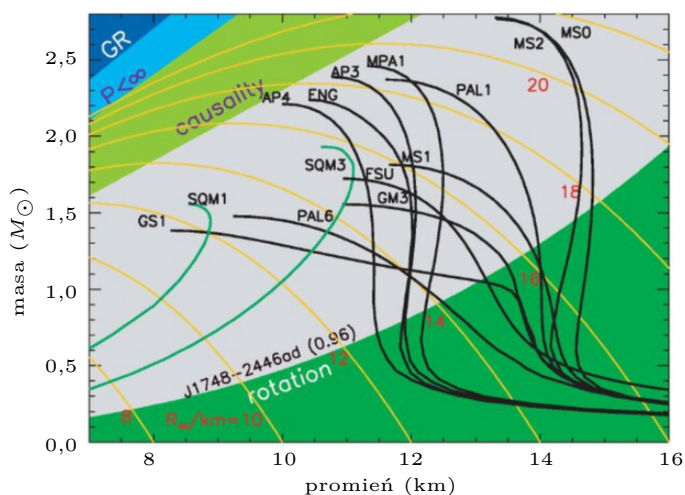
Odkryte przez Wolszczana i Fraila obiekty to bardzo małe planety skaliste, ich masy wynoszą odpowiednio: 0,02 masy Ziemi, 4,3 masy Ziemi oraz 3,9 masy Ziemi.

Gdy podczas obserwacji pulsarów uda się już uwzględnić wszystkie efekty wywołane wpływem materii międzygwiazdowej, otrzymamy niezwykle regularny, powtarzający się sygnał, którego precyzja porównywana jest z najlepszymi zegarami atomowymi na świecie! Tę niezwykłą precyzję wykorzystuje tzw. analiza chronometrażowa, która polega na porównywaniu przewidywanych przez model odstępów czasu między przyjściem kolejnych pulsów oraz odstępów, które rzeczywiście zmierzono (w jęz. ang. TOA – *time of arrival*). Metoda ta jest na tyle skuteczna, że pozwoliła na przetestowanie teorii względności Einsteina oraz na pośrednie obserwacyjne potwierdzenie istnienia fal grawitacyjnych. W 1974 roku Russell Hulse i Joseph Taylor odkryli niezwykle układ podwójny gwiazd, składający się z pulsara i gwiazdy neutronowej krążących wokół wspólnego środka masy. Analiza chronometrażowa sygnału PSR 1913+16 pozwoliła na porównanie zaobserwowanego tempa zacieśniania się orbity układu z przewidywaniami teoretycznymi zakładającymi emisję fal grawitacyjnych przez system. W 1993 roku Hulse i Taylor otrzymali Nagrodę Nobla, gdyż ich odkrycie pozwoliło na rozpoczęcie badania teorii grawitacji w nowatorski sposób.

Obecnie, po bezpośrednim odkryciu fal grawitacyjnych, pulsary po raz kolejny mogą odegrać bardzo interesującą rolę. W ramach projektu IPTA (ang. *International Pulsar Timing Array*) astronomowie na całym świecie wykonują chronometraż dla kilkunastu najbardziej stabilnych pulsarów milisekundowych rozmieszczonych w różnych miejscach Galaktyki. Jeśli przez Galaktykę przechodzi fala grawitacyjna, to wraz ze swoją propagacją powinna ona po kolei opóźniać czasy przyjścia pulsów kolejnych pulsarów milisekundowych. W ten sposób można bezpośrednio wykrywać fale grawitacyjne o niskich częstotliwościach.

Analiza chronometrażowa przyczyniła się też do odkrycia pierwszych planet pozasłonecznych. Na podstawie analizy sygnału radiowego pulsara milisekundowego PSR 1257+12 Aleksander Wolszczan wspólnie z Dalem Frailem w 1992 roku ogłosili odkrycie dwóch planet oraz ewentualnej trzeciej krążących wokół pulsara. Odkrycie to było ogromnym zaskoczeniem, ponieważ nie spodziewano się, że w otoczeniu gwiazd neutronowych mogą istnieć jakiegokolwiek planety. Jest bardzo mało prawdopodobne, aby jakiegokolwiek układ planetarny był w stanie przetrwać wybuch supernowej, zatem odkryte trzy planety powinny powstać już po powstaniu gwiazdy neutronowej. Pewnej wskazówki na temat historii tego niezwykle układu dostarczyły obserwacje układów podwójnych gwiazd neutronowych i brązowych lub białych karłów. Do tej pory w artykule koncentrowaliśmy się na radiowym promieniowaniu pulsarów, tymczasem jedynie około 10% traconej energii rotacyjnej emitowane jest w tym zakresie, większość jest wyświecana w zakresie wysokich energii. I to właśnie silne promieniowanie rentgenowskie i gamma odgrywają ważną rolę w układach podwójnych gwiazd neutronowych: jeśli jest ono zwrócone w kierunku towarzysza, to prowadzi do jego „odparowywania”, a z czasem do całkowitego rozerwania. Takie układy astronomowie nazywają „czarnymi wdowami”, ponieważ gwiazda neutronowa „pożera” swojego towarzysza. To właśnie w takim dysku utworzonym przez materię rozerwanego białego karła mogły powstać odkryte planety wokół PSR 1257+12. Obecnie pulsar ten znany jest pod nazwą Lich (wyłonioną w ramach konkursu Międzynarodowej Unii Astronomicznej) w nawiązaniu do fikcyjnej, nieumarłej postaci. Również nazwy krążących wokół planet nawiązują do różnych duchów i istot paranormalnych, są to: Draugr, Poltergeist i Fobetor.

Mówiąc o gwiazdach neutronowych jako o laboratoriach, nie można nie wspomnieć o badaniach modeli cząstek elementarnych. Tak skompresowanej materii nie jesteśmy w stanie stworzyć w ziemskich laboratoriach, dlatego opracowywanie różnych modeli budowy wnętrza gwiazd neutronowych jest jedynym sposobem studiowania materii w naprawdę ekstremalnych warunkach. Bardzo przydatna jest analiza tzw. równania stanu, wyrażającego związek między parametrami termodynamicznymi układu. W zależności od przyjętego modelu teoretycznego krzywa równania stanu będzie miała inną postać,



Rys. 2. Wykres pokazujący relację promień-masa dla równań stanu gwiazd neutronowych. Pochodzi z publikacji Paerels, F., Mendez, M., Agueros, M. i inni, 2009, „The Behavior of Matter under Extreme Conditions”, White paper submitted to the Astro2010 Decadal survey of Astronomy and Astrophysics

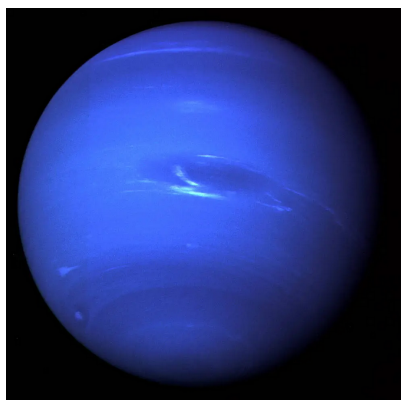
co najlepiej widać na rysunku 2: czarnymi liniami zaznaczono równanie stanu dla zimnej supergęstej materii (czyli dla modelu zwykłej gwiazdy neutronowej), z kolei liniami zielonymi zaznaczono równanie stanu dla tzw. gwiazd dziwnych, czyli zbudowanych z samych kwarków. Poniżej oraz powyżej tych krzywych zaznaczono znane ograniczenia teoretyczne oraz obserwacyjne pozwalające na odrzucenie modeli niemieszczących się w dopuszczalnych zakresach. Do pozostałych badanych modeli należą m.in. model gwiazdy kwarkowo-hybrydowej, model gwiazdy neutronowej z kondensatem pionów, model gwiazdy nukleonowej czy model gwiazdy hyperonowej.

Więcej o pulsarach można przeczytać m.in. w artykule L. Błaskiewicza i W. Lewandowskiego „Zakręcone gwiazdy” opublikowanym w *Uranii – Postęпах Astronomii* nr 2/2019.

Mam nadzieję, że Wasze kosmiczne fartuchy są już wyjęte z szafy i w przyszłości spotkamy się w pulsarowym laboratorium!



Prosto z nieba: Różne odcienie niebieskiego



Zdjęcie Neptuna, do jakiego przywykliśmy, wykonane przez sondę Voyager 2 i opublikowane w 1989 roku

Pod koniec lat 80. zeszłego stulecia sonda Voyager 2 przeleciała w pobliżu Neptuna i wykonała jego zdjęcie. Po prawie 35 latach jest to wciąż jedno z najbardziej rozpoznawalnych zdjęć tej planety. Zdjęcie to jest najczęściej wykorzystywane w mediach i różnego rodzaju prezentacjach Układu Słonecznego. Może więc zaskoczy Cię, drogi Czytelniku, wiadomość, że intensywny niebieski kolor planety nie jest „prawdziwy”. Wzmocniono go po to, aby lepiej uwidocznić drobne detale, w szczególności *chmury* i różne odcienie atmosfery planety. Fakt, że zdjęcie nie przedstawia rzeczywistego koloru Neptuna, był zakomunikowany bardzo wyraźnie w czasie jego publikacji w 1989 roku. Problem w tym, że... zapomnieliśmy o tym „drobnym szczególe”.

Jak to się stało?

Wszystkie zdjęcia wykonane przez sondę Voyager 3 (tak naprawdę wszystkie zdjęcia wykonywane przez jakiegokolwiek teleskopy, nawet współczesne) są w rzeczywistości czarno-białe, a dokładniej – w odcieniach szarości. Detektory rejestrują światło o danej długości fali, a ich natężenie reprezentowane jest właśnie przez różne odcienie szarości. Miejsca, w których tego światła nie ma, pozostają puste, czy też czarne. Sztuczka polega na tym, że to samo zdjęcie wykonywane jest jednocześnie na różnych długościach fal – mówimy, że zdjęcie robi się w określonym filtrze, czyli w ustalonym zakresie długości fali elektromagnetycznej, a zdjęcie końcowe to złożenie wszystkich lub części tych zdjęć. W ten sposób uzyskiwana jest pełna paleta kolorów. Na tej samej zasadzie działa aparat cyfrowy w telefonie. W astronomii nie robimy tego tylko po to, by uzyskać ładne obrazy, ale też po to, aby zaobserwować struktury widoczne w różnych pasmach promieniowania elektromagnetycznego, często poza pasmem widzialnym (np. pył w podczerwieni czy światło pochodzące od młodych jasnych gwiazd w ultrafiolecie).

W kamerze sondy Voyager 2 było pięć filtrów: ultrafioletowy, fioletowy, niebieski, zielony i pomarańczowy. Popularny obraz Neptuna powstał w wyniku złożenia zdjęć z tylko dwóch filtrów: zielonego i pomarańczowego, ponieważ w tych filtrach najlepiej były widoczne chmury i charakterystyczna „niebieska plama”.

Zapewne słyszeliście o systemie RGB (ang. *red-green-blue*, czerwony-zielony-niebieski), w jakim działają aparaty cyfrowe. Zasada jest ta sama. Światło rozszczepiane jest na trzy składowe odpowiadające kolorowi czerwonemu, zielonemu i niebieskiemu. Trzy zdjęcia rejestrowane są osobno, a obraz wynikowy jest ich złożeniem.

Na tej samej zasadzie wszystkie zdjęcia powierzchni Marsa są „czerwone”. W rzeczywistości kamienie Marsa są brązowo-szare, ale ludzie przyzwyczaili się do łączenia wszystkiego, co związane z Marsem, z kolorem czerwonym, dlatego nawet najnowsze zdjęcia modyfikuje się tak, aby były bardziej czerwone, a przez to bardziej zbliżone do naszych wyobrażeń.

Oryginalna publikacja opisująca wyniki obserwacji Neptuna przez sondę Voyager 2: Smith, B. A. et al. (1989) „Voyager 2 at Neptune: Imaging Science Results”. *Science*, 246(4936), 1422–1449. doi:10.1126/science.246.4936.142.

Niebieski kolor przypisany sumie sygnału z tych dwóch filtrów, był głównie kwestią wyboru artystycznego. Ponadto podkreślono trochę jego intensywność.

Co ciekawe, na konferencji prasowej towarzyszącej publikacji zdjęć Neptuna przedstawiono dwa zdjęcia: jedno w naturalnych kolorach, a drugie w zafalszowanych (to, które najlepiej znamy). Problem w tym, że do prasy dostarczono tylko to drugie zdjęcie, prawdopodobnie jako bardziej chwytliwe. Pamiętajmy, że było to na długo przed powstaniem Internetu w formie, w jakiej istnieje dzisiaj, dlatego kopie zdjęć musiały zostać wydrukowane i w wersji papierowej dostarczone do wydawców gazet. Ponadto publikacja naukowa z 1989 roku, towarzysząca ujawnieniu zdjęć (też oryginalnie wydrukowana na papierze), zawierała głównie zdjęcia czarno-białe, gdyż czasopisma naukowe pobierały dodatkowe wysokie opłaty za druk w kolorze. Kilka kolorowych zdjęć w tej publikacji to właśnie zdjęcia w zafalszowanym kolorze, przedstawiające szczegóły nowo odkrytych struktur w atmosferze Neptuna (co jest wyraźnie zaznaczone w opisach). Wszystkie te okoliczności razem przyczyniły się do tego, że informacja o fałszywych kolorach zaginęła w czasie. Do świadomości publicznej przebiła się tylko informacja: „To jest zdjęcie Neptuna”.

To jakiego koloru jest Neptun naprawdę?

Na początku musimy zdefiniować, co to jest ten „prawdziwy kolor”. Koncepcja kolorów – tak jak my, ludzie, je postrzegamy – jest prawie całkowicie arbitralna. Ale przyjmijmy, że „prawdziwe” kolory to takie, jakie widzą nasze oczy. Pozostawmy otwartą kwestię, czy każdy człowiek z kompletem 3 rodzajów czopków w oczach postrzega kolory tak samo, i skupmy się na długości fali. Aby uzyskać dokładną informację o ilości światła o określonej długości fali odbitego od powierzchni Neptuna, jaka do nas dociera, musimy zarejestrować widmo spektroskopowe tego światła. Ale nie możemy tego zrobić tylko raz dla całej planety, ponieważ wiemy, że kolor powierzchni Neptuna jest różny w różnych miejscach (i ma chmury w różnych odcieniach „niebieskiego”). Dlatego potrzebujemy osobnego widma na każdy piksel obrazu Neptuna. Szczęśliwie się składa, że mamy urządzenie, które potrafi przeprowadzić takie obserwacje – Bardzo Duży Teleskop w Chile (*Very Large Telescope*, VLT) wyposażony w multispektrograf MUSE (*Multi Unit Spectroscopic Explorer*). Przedrostek multi oznacza, że urządzenie to jest w stanie rejestrować duże ilości widm jednocześnie. Naukowcy z Uniwersytetu w Oxfordzie przeprowadzili w ten sposób pomiary widm spektroskopowych każdego piksela zdjęć Urana i Neptuna. Wynik został przedstawiony w lutym 2024 roku. Uzyskano prawdziwy odcień niebieskiego Neptuna, który okazał się... bardzo podobny do koloru Urana. (Zdjęcia obu planet w niezafalszowanych barwach publikujemy na ostatniej stronie okładki).

Anna DURKALEC

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Niebo w sierpniu

Ósmy miesiąc roku jest pierwszym na półkuli północnej z wyraźnie skracającym się dniem. Przez cały sierpień Słońce obniży wysokość swojego górowania o ponad 10°, co na naszych szerokościach geograficznych spowoduje, że czas jego przebywania nad horyzontem zmniejszy się o prawie dwie godziny. Na teren całej Polski stopniowo wraca noc astronomiczna i po ponad dwumiesięcznej przerwie znowu można obserwować najsłabsze obiekty astronomiczne.

Na początku sierpnia na niebie porannym można obserwować zbliżający się do nowiu Księżyc oraz kilka planet Układu Słonecznego. Srebrny Glob spotka się ze Słońcem 4 sierpnia, a dzięki wysoko nachylonej

ekliptyce da się go obserwować przez pierwsze trzy dni miesiąca. 1 sierpnia Księżyc zaprezentuje tarczę w fazie 11%, wędrując na pograniczu gwiazdozbiorów Byka, Woźnicy i Bliźniąt. Tego ranka Księżyc utworzy trójkąt prostokątny z Jowiszem i Capellą, najjaśniejszą gwiazdą Woźnicy, z kątem prostym przy Księżycu. Dwa dni później już naprawdę cienki sierp Księżycza w fazie 2% pokaże się na wysokości zaledwie 5°, 3,5° pod Polluksem.

W sierpniu na niebie porannym widoczne są dwie grupy planet Układu Słonecznego: rano niezbyt wysoko nad wschodnią częścią nieboskłonu łatwo widoczne gołym okiem Jowisz z Marsem oraz widoczny przez lornetkę

Uran. Na podobnej wysokości, ale bliżej południka lokalnego znajdują się Saturn z Neptunem, które we wrześniu przejdą przez opozycję względem Słońca.

Spośród wymienionych planet najszybciej porusza się Mars, który w sierpniu pokona dystans ponad 20° . Czerwona Planeta na początku miesiąca przejdzie około 2° na północ od Hiad, mijając 3. dnia miesiąca gwiazdę Ain (ϵ Tau), czyli najbardziej na północ wysuniętą jasną gwiazdę tej gromady. 12 dni później Mars przejdzie zaledwie $20'$ na północ od Jowisza. 27 sierpnia Mars przetnie linię łączącą gwiazdy El Nath (β Tau) i ζ Tau, tworzące rogi Byka. Planeta znajdzie się około 2° od drugiej z wymienionych gwiazd. Do końca miesiąca jasność Marsa zwiększy się do $+0,7^m$, a średnica jego tarczy przekroczy $6''$.

Jowisz w tym samym czasie przesunie się o jedyne $4,5^\circ$, przecinając linię łączącą Aldebarana z El Nath, czyli dwie najjaśniejsze gwiazdy Byka. Planeta do końca miesiąca pojaśnieje do $-2,3^m$, zwiększając średnicę tarczy do $38''$. Świecący najślabiej z tej trójki Uran do końca sierpnia zmniejszy dystans do gwiazdy 13 Tau do poniżej 1° . Siódma planeta od Słońca świeci z jasnością $+5,7^m$ i jest na granicy widoczności gołym okiem, ale do jej komfortowego odszukania wśród gwiazd tła bardzo pomocna będzie lornetka.

Przez większą część nocy można obserwować planety Saturn i Neptun, tworzące parę o rozpiętości około 11° . Znajdujący się bardziej na zachód Saturn przecina południk lokalny po godzinie 2, Neptun czyni to samo mniej więcej pół godziny po nim. Obie planety przekroczą wtedy wysokość 30° nad widnokregiem. W związku z bliskością wrześniowych opozycji obie planety poruszają się ruchem wstecznym. W sierpniu Saturn pokona w ten sposób 2° , przechodząc między gwiazdami 4. i 5. wielkości χ i ϕ Aqr. Neptun przesunie się o ledwie $40'$, przebywając jakieś 2° na północ od pary gwiazd 5. wielkości 29 i 27 Psc. Jasność Saturna urośnie do $+0,6^m$, przy średnicy tarczy $19''$. Neptun świeci zaś blaskiem $+7,8^m$. Stosunek małej do wielkiej osi pierścieni Saturna zwiększy się w sierpniu do 0,06.

Wieczorem można obserwować również planetoidę (1) Ceres, która w lipcu przeszła przez opozycję względem Słońca. Planetoida wędruje przez gwiazdozbiór Strzelca, tuż na południe od linii łączącej jaśniejsze od $+3^m$ gwiazdy Ascella (ζ Sgr) i Kaus Meridianalis (δ Sgr), mniej więcej w połowie dystansu między nimi. Jasność samej planetoidy zmniejszy się do $+8,5^m$ i do jej odszukania potrzebna jest przynajmniej lornetka. Niestety zadanie utrudni fakt, że Ceres podczas górowania (około godz. 21:30) nie przekroczy wysokości 10° , i jej obraz zaburzy nasza atmosfera.

W sierpniu wciąż jasno świeci miryda χ Cygni zmieniająca jasność od $+3,3^m$ do $+14,2^m$ w okresie 408 dni – w pierwszej połowie lipca osiągnęła maksimum swojej jasności. Jeśli tym razem zachowa się podobnie jak podczas swojego poprzedniego maksimum, to jej blask nadal powinien przekraczać granicę widoczności gołym okiem. Gwiazda przecina południk

lokalny po godzinie 23 na wysokości ponad 70° . Można ją odnaleźć na linii łączącej gwiazdę η Cyg z Albireo (β Cyg), mniej więcej $2,5^\circ$ od pierwszej z wymienionych gwiazd.

Po nowiu 4. dnia miesiąca Księżyc przeniesie się na niebo wieczorne, ale jednocześnie powędruje pod nisko nachyloną ekliptykę. W efekcie przez pierwszych kilkanaście dni nie przekroczy on wysokości 10° nad widnokregiem, a 20° przetnie dopiero w nocy z 19 na 20 sierpnia. Do przypadającej 12 sierpnia I kwadry warto odnotować spotkanie Srebrnego Globu ze Spiką, najjaśniejszą gwiazdą Panny – 10. dnia miesiąca, gdy jego tarcza w fazie 33% zbliży się doń na odległość 4° . W dniach 13 i 14 sierpnia Księżyc odwiedzi Antaresa, najjaśniejszą gwiazdę Skorpiona, pokazując się najpierw około 5° na zachód, a następnie 7° na wschód od niej.

19 sierpnia wieczorem naszego czasu naturalny satelita Ziemi przejdzie przez pełnię, a następnej nocy spotka się z Saturnem. Początkowo dystans między Księżycem a Saturnem wyniesie $4,5^\circ$, ale wraz z upływem nocy wyraźnie się zmniejszy, by rano doszło do zakrycia planety przez Księżyc. Niestety u nas zjawisko zacznie się praktycznie w momencie wschodu Słońca, około godziny 5:35 na wysokości mniej więcej 15° . Odkrycie nastąpi niecałą godzinę później, na całkiem już jasnym niebie. Dobę później Księżyc zbliży się na mniej niż 1° do Neptuna.

26 sierpnia Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę i jednocześnie spotka się z Plejadami i Uranem. Do Urana zabraknie Księżycowi ponad 4° , ale Plejady znajdą się znacznie bliżej i Księżyc zakryje południowo-wschodnią część tej gromady. Niestety w Polsce do zakryć dojdzie już po wschodzie Słońca.

Księżyc pozostanie ozdobą porannego nieba do końca miesiąca, prezentując tarczę w fazie coraz cieńszego sierpa z bardzo dobrze widocznym światłem popielatym. 27 sierpnia zbliży się na niecałe 7° do Jowisza, by następnej nocy przejść 5° na północ od Marsa i jednocześnie w podobnej odległości od El Nath. 30 sierpnia Księżyc w fazie 14% dotrze na odległość 2° do Polluksa, a ostatniego poranka miesiąca zamelduje się w centrum gwiazdozbioru Raka, zmniejszając fazę do 8%. Tej nocy naturalny satelita Ziemi zbliży się na 4° do jasnej gromady otwartej gwiazd M44.

Przez większą część miesiąca promieniują meteory z roju Perseidów, których maksimum aktywności przypada zawsze około 12 sierpnia. Wtedy można spodziewać się nawet ponad 100 jasnych zjawisk na godzinę. W tym roku w ich obserwacjach trochę przeszkodzi Księżyc w I kwadrze, który jednak zajdzie przed 22:30, pozostawiając do obserwacji najciemniejszą część nocy. Radiant tego roju znajduje się na pograniczu gwiazdozbiorów Perseusza i Kasjopei, wznosząc się nad ranem na wysokość ponad 60° . A zatem po zachodzie Księżycza warunki obserwacyjne tego roju są znakomite.

Ariel MAJCHER

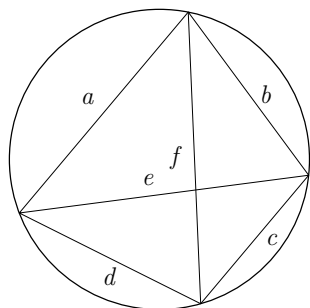
Elegancki dowód twierdzenia Ptolemeusza

Krzysztof R. APT*

* CWI, Amsterdam i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Twierdzenie Ptolemeusza, udowodnione przez Klaudiusza Ptolemeusza (100 – około 168), ma następującą postać:

W czworokącie wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków (patrz rysunek na marginesie).



Twierdzenie Ptolemeusza: $ac + bd = ef$.

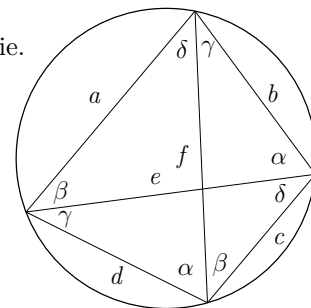
W. Derrick and J. Herstein, *Proof without words: Ptolemy's theorem*, The College Mathematics Journal, 43(5), p. 386, November 2012. Dowód ten został spopularyzowany przez stronę A. Bogomolny, <https://www.cut-the-knot.org/>.

Twierdzenie to ma wiele znanych dowodów, niektóre z nich można znaleźć w Wikipedii. Celem tej notki jest zaprezentowanie pięknego dowodu, autorstwa W. Derricka i J. Hersteina, który został przedstawiony jako „dowód bez słów”, zawierający jedynie dwa z poniższych rysunków: pierwszy i trzeci. Aby wyjaśnić szczegóły, dodaliśmy jeszcze jeden rysunek.

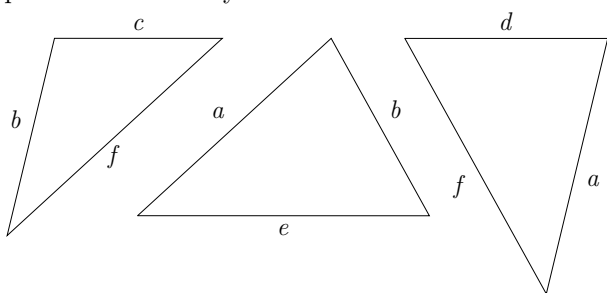
W dowodzie wykorzystujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Kąty wpisane w okrąg oparte na tej samej cięciwie są równe.

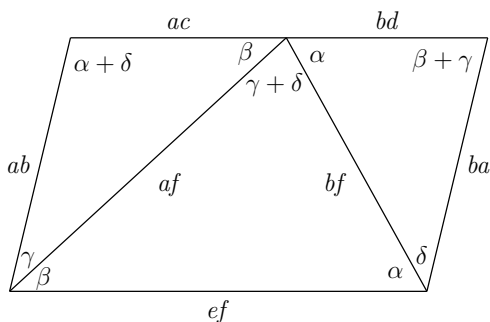
Oznaczmy kąty jak na rysunku obok. Podwójne wystąpienia α, β, γ i δ są uzasadnione przez powyższe twierdzenie. Na przykład oba kąty wpisane oznaczone przez α są oparte na boku długości a .



Aby udowodnić twierdzenie Ptolemeusza, wybierzemy teraz z oryginalnego rysunku trzy trójkąty, które odpowiednio obrócimy.



Następnie przeskalujemy je odpowiednio przez a, f i b , aby mogły być ułożone obok siebie i utworzyć poniższy rysunek, w którym ponownie wykorzystujemy oryginalne oznaczenia kątów.



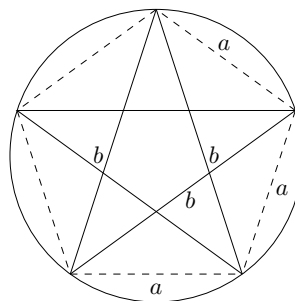
Zauważmy, że ac i bd leżą na tej samej linii, ponieważ $\beta + \gamma + \delta + \alpha = 180^\circ$, co wynika z tego, że suma kątów oryginalnego czworokąta to $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^\circ$. Zatem powyższy rysunek przedstawia czworokąt.

Oznaczenia kątów również ujawniają, że pary przeciwległych kątów czworokąta są równe: oba są równe $\alpha + \delta$ lub $\beta + \gamma$. Zatem ten czworokąt jest

równoległobokiem. Jego przeciwległe boki są równej długości, zatem $ac + bd = ef$.

Ciekawą, prostą konsekwencją tego twierdzenia jest następująca obserwacja.

Twierdzenie. W pięciokącie foremnym z bokami o długości a i przekątnymi o długości b , zachodzi $\frac{b}{a} = \phi$, gdzie $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest tzw. złotą liczbą.



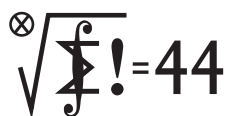
Aby udowodnić to twierdzenie, przypomnijmy, że złota liczba ϕ spełnia równanie $1 + \phi = \phi^2$, i rozważmy czworokąt z bokami a, a, a i b (z przekątnymi b i b). Z twierdzenia Ptolemeusza $a^2 + ab = b^2$. Dzieląc obie strony przez a^2 , otrzymujemy równanie:

$$1 + \frac{b}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

To oznacza, że $\frac{b}{a}$ spełnia to samo równanie co złota liczba. Ponieważ to równanie kwadratowe ma tylko jedno dodatnie rozwiązanie, zachodzi $\frac{b}{a} = \phi$.

Tekst oparty na załączniku 7 z książki: Krzysztof R. Apt, “A Brief History of Mathematics for Curious Minds”, World Scientific, 2024. Rysunki zostały stworzone przez Magdalenę Kycler i Piotra Sitka.

Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
873 ($WT = 1,59$) i 874 ($WT = 1,69$)
z numeru 1/2024

Paweł Kubit	Kraków	45,24
Łukasz Merta	Kraków	42,56
Szymon Kitowski		41,11
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Piotr Kumor	Olsztyn	40,44
Witold Bednarek	Łódź	35,81
Krzysztof Zygan	Lubin	34,43

Pan Paweł Kubit, od dawna
nieprzerwanie obecny w Lidze, zakończył
ósmą rundę!

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2024

Przypominamy treść zadań:

879. Funkcje f i g , o wartościach rzeczywistych, są określone na przedziale $[a, b]$; funkcja g jest rosnąca; $f(a) > 0 > f(b)$. Wiadomo ponadto, że różnica $f - g$ jest funkcją ciągłą. Udowodnić, że w pewnym punkcie przedziału (a, b) funkcja f przyjmuje wartość 0.

880. Rozstrzygnąć, czy zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych \mathbb{Q}_+ daje się przedstawić w postaci sumy dwóch zbiorów rozłącznych A, B tak, by miały miejsce następujące implikacje (dla $x, y \in \mathbb{Q}_+$):

- jeśli $xy = 1$, to $x \in A$, $y \in A$ lub $x \in B$, $y \in B$;
- jeśli $|x - y| = 1$, to $x \in A$, $y \in B$ lub $x \in B$, $y \in A$.

879. Niech c będzie kresem górnym zbioru $\{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\}$ (niepustego, bo $f(a) > 0$). Istnieje zatem ciąg (x_n) elementów tego zbioru (być może stały od pewnego miejsca), zbieżny od lewej strony do c . Funkcja g jest rosnąca, więc $g(x_n) \leq g(c)$ dla wszystkich n . Funkcja $\varphi = f - g$ jest ciągła, więc $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(c)$; przy tym $\varphi(x_n) = f(x_n) - g(x_n) \geq 0 - g(c)$, skąd wniosek, że $\varphi(c) \geq -g(c)$, czyli $f(c) \geq 0$.

Skoro (z założenia) $f(b) < 0$, zatem $c < b$. Z określenia liczby c wynika, że dla $x \in (c, b]$ zachodzi nierówność $f(x) < 0$; a także nierówność $g(x) > g(c)$, bo g jest funkcją rosnącą. Wobec tego $\varphi(x) = f(x) - g(x) < 0 - g(c)$ dla $x \in (c, b]$. W granicy, gdy x dąży do c (od prawej strony), dostajemy $\varphi(c) \leq -g(c)$.

Uzyskane nierówności pokazują, że $\varphi(c) = -g(c)$; a to znaczy, że $f(c) = 0$.

880. Istnieje takie rozbitcie. Opis metody: określamy funkcję $f: \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ wzorami

$$f(x) = \begin{cases} 1/x =: f_0(x) & \text{dla } x \leq 1, \\ x - 1 =: f_1(x) & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Startujemy od dowolnej liczby $x \in \mathbb{Q}_+$ i iterujemy przekształcenie f (więc w każdym kroku stosujemy f_0 lub f_1 , w zależności od tego, czy jesteśmy w przedziale $(0, 1]$, czy $(1, \infty)$). Zauważmy, że jeśli liczba wymierna (dodatnia) jest zapisana w postaci ułamka nieskracalnego, wówczas przy zastosowaniu funkcji f_1 suma licznika i mianownika zmniejsza się; zaś przy zastosowaniu f_0 ta suma nie ulega zmianie. Jednak po zastosowaniu f_0 jesteśmy w przedziale $(1, \infty)$ i w następnym kroku działamy znów funkcją f_1 , zmniejszając sumę licznika i mianownika. Wniosek: po skończeniu wielu krokach trafimy w liczbę 1. Kończymy wtedy procedurę iteracyjną.

Jeśli, startując od liczby x , stosowaliśmy kolejno funkcje $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_k}$, wówczas (i_1, i_2, \dots, i_k) jest ciągiem zerojedynkowym (skończonej długości), który możemy uważać za *kod* liczby x .

Przykład: dla $x = \frac{27}{98}$ dostajemy trajektorię

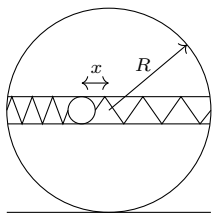
$$\frac{27}{98} \Rightarrow \frac{98}{27} \rightarrow \frac{71}{27} \rightarrow \frac{44}{27} \rightarrow \frac{17}{27} \Rightarrow \frac{27}{17} \rightarrow \frac{10}{17} \rightarrow \frac{17}{10} \rightarrow \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{10}{7} \rightarrow \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{7}{3} \rightarrow \frac{4}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{1} \rightarrow \frac{2}{1} \rightarrow \frac{1}{1}$$

(strzałka \Rightarrow oznacza zastosowanie operacji f_0 ; strzałka \rightarrow oznacza f_1). Kod liczby $\frac{27}{98}$ to (0111010101011). [Można tu dostrzec rozbudowaną postać algorytmu Euklidesa].

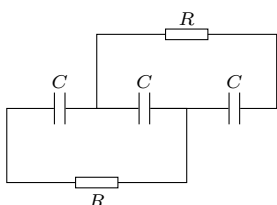
Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{Q}_+$ określamy $S(x)$ jako sumę symboli w jej kodzie: $S(x) = i_1 + \dots + i_k$ (czyli liczbę jedynek; np. $S(\frac{27}{98}) = 10$; $S(1) = 0$ (kod pusty)). I teraz: jeśli $S(x)$ ma wartość parzystą, wrzucamy liczbę x do zbioru A ; jeśli nieparzystą – to do zbioru B . Wymagane warunki są spełnione: gdy $xy = 1$ oraz (b.s.o.) $x < 1$, to $y = f(x) = f_0(x)$; kody liczb x, y mają tyle samo jedynek, więc te liczby są obie w A lub obie w B . Gdy zaś $x - y = 1$, to $y = f(x) = f_1(x)$, kody liczb x, y różnią się o jedną jedynkę, więc te liczby leżą jedna w A , druga w B .

[Czytelnikowi Wnikliwemu proponujemy zastanowienie się, czy przedstawiona konstrukcja rozbitcia $\mathbb{Q}_+ = A \cup B$ (o żądanej własności) jest jedyną możliwą (z dokładnością do zamiany symboli $A \leftrightarrow B$)].

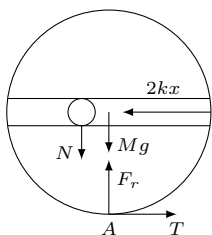
Klub 44 F



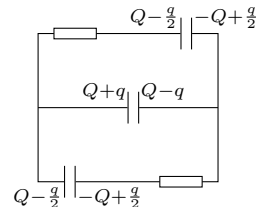
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 770 ($WT = 3,5$), 771 ($WT = 2,45$) z numeru 1/2024

Tomasz Rudny	Poznań	1-44+1,96
Jacek Konieczny	Poznań	40,41
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1-40,24
Konrad Kapcia	Poznań	2-38,10
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5-33,59
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-23,69
Jan Zambrzycki	Białystok	4-19,67
Tomasz Wietecha	Tarnów	17-16,18

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

Rozwiązania zadań z numeru 4/2024

Przypominamy treść zadań:

776. Na poziomej powierzchni stoi jednorodna, cienka obręcz o masie M i promieniu R . Poziomą średnicę obręczy stanowi lekka, gładka rurka, wewnątrz której umieszczono kulkę o masie m przylegającą do rurki i połączoną z obręczą dwiema sprężynami o współczynnikach sprężystości k (rys. 1). Przytrzymując obręcz, kulkę odchyłono w lewo o x , po czym układ pozostawiono samemu sobie. Znaleźć przyspieszenie środka obręczy w chwili początkowej, zakładając brak poślizgu obręczy.

777. Trzy jednakowe kondensatory o pojemnościach C połączono szeregowo, podłączono do źródła o sile elektromotorycznej \mathcal{E} i po naładowaniu odłączono od baterii. Następnie do układu podłączono jednocześnie dwa oporniki o oporach R (rys. 2). Jaka ilość ciepła wydzieli się na każdym oporniku? Jakie natężenia mają prądy płynące przez oporniki w chwili, gdy napięcie na środkowym kondensatorze jest 10 razy mniejsze od siły elektromotorycznej baterii?

776. Na rysunku 3 zaznaczono siły działające na obręcz. Ponieważ nie występuje poślizg, możemy napisać równanie ruchu obrotowego obręczy wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt A :

$$(1) \quad 2MR^2\varepsilon = 2kxR + Nx,$$

gdzie N jest siłą nacisku kulki na rurkę, $2kx$ wypadkową siłą sprężystości.

Przyspieszenie kątowe ε wiąże się z szukanym przyspieszeniem a środka obręczy wzorem

$$(2) \quad \varepsilon = a/R.$$

Siłę nacisku N znajdziemy z równania ruchu kulki w pionie:

$$(3) \quad m\varepsilon x = mg - N.$$

Z równań (1)–(3) otrzymujemy:

$$a = \frac{(mg + 2kR)xR}{2MR^2 + mx^2}.$$

777. Ładunki na każdym z kondensatorów po odłączeniu baterii wynoszą $Q = C\mathcal{E}/3$. Po dołączeniu oporników, gdy prądy już nie płyną, kondensatory są połączone równolegle. Z dodatnio naładowanej okładki odpłynął ładunek q i wpłynął na ujemnie naładowane okładki kondensatorów zewnętrznych (rys. 4). Ponieważ napięcia na kondensatorach są jednakowe, $Q - q = -Q + q/2$, stąd $q = 4C\mathcal{E}/9$. Ładunki na prawych okładkach są równe $Q - q = -C\mathcal{E}/9$. Początkowa energia układu wynosi $W_1 = 3Q^2/2C = C\mathcal{E}^2/6$, końcowa $W_2 = C\mathcal{E}^2/54$. Ciepło wydzielone na każdym oporniku jest równe

$$W = (W_1 - W_2)/2 = 2C\mathcal{E}^2/27.$$

Ponieważ podczas przeładowywania zmieniają się znaki ładunków na środkowym kondensatorze, napięcie $\mathcal{E}/10$ pojawia się na nim dwukrotnie – podczas rozładowywania od $\mathcal{E}/3$ do zera i podczas ładowania od 0 do $\mathcal{E}/9$.

Rozważmy przypadek pierwszy. Ładunek q_1 odpływający z okładki środkowego kondensatora znajdujemy z równania $Q - q_1 = C\mathcal{E}/10$, stąd $q_1 = C\mathcal{E}/30$.

Ładunek końcowy w rozważanym procesie na okładce kondensatora bocznego wynosi $-C\mathcal{E}/3 + q_1/2 = -13C\mathcal{E}/60$. Z drugiego prawa Kirchhoffa dla dolnego oczka otrzymujemy: $\mathcal{E}/10 - RI_1 + 13\mathcal{E}/60 = 0$, stąd szukane natężenie prądu $I_1 = 19\mathcal{E}/60R$.

W drugim przypadku analogiczne równania mają postać:

$$Q - q_2 = -C\mathcal{E}/10, \quad -C\mathcal{E}/3 + q_2/2 = -7C\mathcal{E}/60, \quad -\mathcal{E}/10 - RI_2 + 7\mathcal{E}/60 = 0,$$

a szukane natężenie $I_2 = \mathcal{E}/60R$.

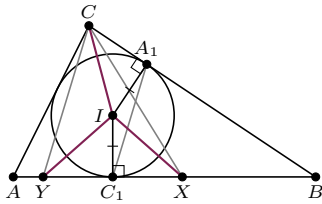
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Rozwiązanie zadania M 1789.



Trójkąty prostokątne XIC_1 i CIA_1 są przystające, gdyż mają równe przeciwprostokątne IX , XC oraz przyprostokątne równe promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Zatem $C_1X = A_1C$.

Niech punkt Y będzie punktem symetrycznym do punktu X względem C_1 . Wtedy czworokąt A_1CYC_1 jest symetryczny względem dwusiecznej kąta B (ponieważ $C_1Y = A_1C$ oraz $BC_1 = BA_1$), zatem $A_1C_1 \parallel CY$. Oznacza to, że prosta C_1A_1 jest prostą łączącą środki boków YX i XC trójkąta YXC .

Uwaga: Można również zauważyć, że na czworokącie $BXIC$ można opisać okrąg, wtedy prosta A_1C_1 jest prostą Simsona punktu I (patrz *Deltoide* z Δ_{10}^{15}) względem trójkąta BXC .



Rozwiązanie zadania M 1790.

Jeśli $0 < a < b$, to podstawmy $y = a - b < 0$ i $x = \sqrt{3b - 2a}$. Wtedy $a = x^2 + 3y$ i $b = x^2 + 2y$. W konsekwencji $f(a) \leq f(b)$ i funkcja $f(x)$ jest niemalejąca dla $x > 0$.

Niech teraz $0 < u < v$. Wtedy znajdziemy taką liczbę całkowitą dodatnią n , że

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{v}{u} < \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Podstawiając $x = 0$ oraz $y = \frac{1}{2}z$, dostajemy $f(z) \geq f\left(\frac{3}{2}z\right)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej z , a zatem

$$f(u) \geq f\left(\frac{3}{2}u\right) \geq f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 u\right) \geq \dots \geq f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n u\right) \geq f(v) \geq f(u),$$

gdzie w ostatnich dwóch nierównościach wykorzystaliśmy pokazaną monotoniczność f . Wobec tego $f(u) = f(v)$.



Rozwiązanie zadania M 1791.

Zauważmy, że pokolorowanie wszystkich wierzchołków jednym kolorem nie jest dobre; takie pokolorowanie nie jest rozważane poniżej.

Powiemy, że bok wielokąta jest *kolorowy*, jeśli jego końce są w różnych kolorach, a *niekolorowy* – w przeciwnym razie. Kolorowanie wierzchołków nazwiemy *uporządkowanym*, jeśli istnieje prosta oddzielająca białe wierzchołki od czarnych.

Pokażemy, że kolorowanie wierzchołków wypukłego n -kąta (dla $n \geq 3$) jest dobre wtedy i tylko wtedy, gdy jest uporządkowane. Istotnie, założmy, że pokolorowanie wierzchołków wypukłego n -kąta jest dobre, i rozważmy odpowiedni podział wielokąta na trójkąty kolorowymi przekątnymi. W takim podziale będzie dokładnie $n - 2$ trójkątów. W każdym z tych trójkątów można wybrać odcinek łączący wierzchołki tego samego koloru. Odcinek ten nie może być przekątną n -kąta, dlatego jest to jego niekolorowy bok. Tak więc dla każdego z $n - 2$ trójkątów istnieje niekolorowy bok n -kąta (dla różnych trójkątów boki te są oczywiście różne), zatem w naszym n -kącie jest co najmniej $n - 2$ niekolorowych boków. Równoważnie, są w nim co najwyżej dwa kolorowe boki, skąd łatwo wynika, że kolorowanie to jest uporządkowane.

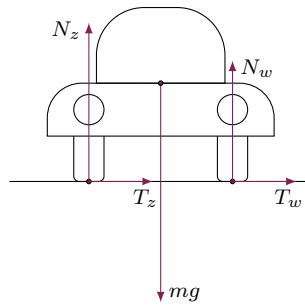
Założmy teraz, że kolorowanie wierzchołków wypukłego n -kąta jest uporządkowane, oznaczmy kolejno wierzchołki A_1, A_2, \dots, A_k (białe), B_1, B_2, \dots, B_l (czarne). Narysujmy wszystkie przekątne od A_1 do czarnych wierzchołków i wszystkie przekątne od B_1 do

białych wierzchołków. W ten sposób otrzymujemy dobry podział naszego wielokąta.

Pozostaje obliczyć liczbę uporządkowanych kolorowań n -kąta. Dla każdej możliwej liczby k czarnych wierzchołków (k przyjmuje wartości od 1 do $n - 1$) spośród wszystkich n wierzchołków można na n sposobów wybrać układ bloków k kolejnych czarnych wierzchołków, tj. liczba uporządkowanych kolorowań wynosi $n(n - 1)$.



Rozwiązanie zadania F 1101.



Rysunek przedstawia siły działające na samochód podczas pokonywania zakrętu – środek łuku jest po prawej stronie. Pionowe składowe sił równoważą ciężar samochodu:

$$N_z + N_w = mg,$$

a poziome składowe (siły tarcia) są źródłem siły dośrodkowej:

$$T_z + T_w = \frac{mv^2}{R}.$$

Dodatkowo wiemy, że suma momentów tych sił podczas stabilnej jazdy (obliczymy tę sumę względem środka masy samochodu) wynosi zero:

$$(N_w - N_z)\frac{d}{2} + (T_w + T_z)h = 0.$$

Otrzymany układ równań pozwala wyznaczyć N_w i N_z :

$$N_z = \frac{mg}{2} + \frac{mv^2 h}{d \cdot R}; \quad N_w = \frac{mg}{2} - \frac{mv^2 h}{d \cdot R}.$$

Mamy dodatkowo $T_w + T_z \leq f(N_w + N_z)$, a stąd warunkiem braku poślizgu jest $v^2 \leq gRf$. Dachowanie zacznie się, gdy $N_w = 0$, co prowadzi do warunku: $v^2 \leq gRd/(2h)$.

Wniosek: jeśli $f < d/(2h)$, to przy nadmiernej prędkości nastąpi poślizg, a gdy $f > d/(2h)$, to nastąpi dachowanie. Dlatego ciężarówki i SUV-y (duża wartość h) częściej dachują niż „zwykłe” samochody osobowe. Dodatkowy bagażnik na dachu samochodu „sprzyja” dachowaniu.

W rozwiązaniu pominięte zostało niebezpieczeństwo poślizgu prowadzącego do obrotu wokół osi prostopadłej do drogi związane z nierównomiernym rozkładem masy pojazdu i nieumiejętnym używaniem pedału gazu.



Rozwiązanie zadania F 1102.

W znalezionym zwoju stosunek liczb atomów ^{14}C i ^{12}C wynosił 0,8 wartości we współczesnych roślinach, co oznacza, że w próbce pozostało $N = 0,8N_0$ atomów ^{14}C , gdzie N_0 jest ich pierwotną liczbą. Według prawa rozpadu promieniotwórczego po czasie t w próbce pozostaje:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

atomów izotopu ^{14}C . Należy jeszcze powiązać parametr τ (tzw. średni czas życia) z czasem połowicznego rozpadu $t_{1/2}$:

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \exp\left(-\frac{t_{1/2}}{\tau}\right) \Rightarrow \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}.$$

Czas, jaki upłynął od ścięcia łądyg papirusu tworzących zwoj, wynosi:

$$t = \tau \ln\left(\frac{N_0}{N}\right) = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln\left(\frac{N_0}{N}\right).$$

Liczbowo: $t \approx 1845$ lat, a więc zwoj powstał około roku 180 naszej ery.

Uwaga: zawartość izotopu ^{14}C w próbce określa się, mierząc liczbę rozpadów β^- lub rozdzielając w separatorze mas izotopy zawarte w węglu wyizolowanym z próbki.



Przeliczenia w grafach

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Grafem (prostym) nazywamy parę uporządkowaną (V, E) , w której V jest dowolnym niepustym zbiorem skończonym, natomiast E jest zbiorem wybranych dwuelementowych podzbiorów zbioru V . Bardziej po ludzku – mamy pewien zbiór V , którego elementy nazywamy *wierzchołkami*; elementy zbioru E , zwane *krawędziami*, interpretujemy jako połączenia wybranych par wierzchołków.

Wierzchołki v i w , które są połączone krawędzią, nazywamy *sąsiednimi*. Często zamiast krawędź $\{v, w\}$ piszemy po prostu vw . Liczbę sąsiadów wierzchołka v nazywamy jego *stopniem* i oznaczamy $\deg(v)$.

Ścieżką długości m nazywamy graf, którego wierzchołki można ustawić w taki ciąg (w_0, w_1, \dots, w_m) , że $E = \{w_0w_1, w_1w_2, \dots, w_{m-1}w_m\}$. *Cykle długości $m \geq 3$* – graf, którego wierzchołki można ułożyć w ciąg (w_1, w_2, \dots, w_m) , dla którego $E = \{w_1w_2, w_2w_3, \dots, w_{m-1}w_m, w_mw_1\}$. Graf nazywamy *pełnym* lub *kliką*, jeśli każde dwa jego wierzchołki są połączone.

Graf $G' = (V', E')$ nazywamy podgrafem grafu $G = (V, E)$, jeśli $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Mówiąc, dla przykładu, *graf G ma cykl długości 5*, mamy na myśli to, że pewien podgraf grafu G jest cyklem długości 5. Podobnie przez *liczbę ścieżek długości 3 w grafie G* rozumiemy liczbę tych podgrafów grafu G , które są ścieżkami długości 3.

Dalej, o ile nie napisano inaczej, przyjmujemy $n = |V|$ oraz $k = |E|$ dla danego grafu. Niech l oznacza liczbę ścieżek długości 2 w danym grafie, a t – liczbę *trójkątów* (cykli długości 3). Stosujemy też konwencję $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ oraz $d_i = \deg(v_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Twierdzenie 1 (o uściskach dłoni). *Zachodzi równość $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2k$.*

Dowód. „Przetnijmy” każdą krawędź na dwie *półkrawędzie*. Liczba wszystkich półkrawędzi jest oczywiście równa $2k$. Z drugiej strony, każdy wierzchołek v_i jest jedynym końcem d_i półkrawędzi, więc liczba półkrawędzi jest równa $d_1 + d_2 + \dots + d_n$. □

Niech $\text{com}(v_i, v_j) = c_{i,j}$ oznacza liczbę wspólnych sąsiadów wierzchołków v_i i v_j .

Twierdzenie 2. *Zachodzą równości: $l = \binom{d_1}{2} + \binom{d_2}{2} + \dots + \binom{d_n}{2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j}$.*

Dowód. Pierwsza równość wynika z tego, że liczbą ścieżek ze środkowym wierzchołkiem v_i jest $\binom{d_i}{2}$. Druga – z tego, że liczbą ścieżek z końcami v_i i v_j jest $c_{i,j}$. □

Wiele zadań na Olimpiadzie Matematycznej można wysłowić w języku grafów, zwłaszcza te o połączeniach drogowych miast, przyjaźniach w pewnej grupie osób itp. Początkującemu w tej materii Czytelnikowi polecam, jako cenne ćwiczenie, dokonać przeglądu zadań OM/OMJ, znaleźć te o grafowej naturze i je „przetłumaczyć”.

Zadania

- Wykazać, że jeśli w grafie nie ma trójkątów, to $k \leq \frac{1}{4}n^2$. (twierdzenie Mantela)
- Dany jest graf o n wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek ma stopień d , każde dwa połączone wierzchołki mają dokładnie λ wspólnych sąsiadów oraz każde dwa niepołączone wierzchołki mają dokładnie μ wspólnych sąsiadów (graf taki nazywamy *silnie regularnym*). Wykazać, że $(n - d - 1)\mu = (d - \lambda - 1)d$.
- Każda krawędź danego grafu pełnego jest czerwona, zielona lub niebieska. Udowodnić, że w tym grafie jest mniej niż $\frac{1}{9}n^3$ trójkolorowych trójkątów.
- Każda krawędź danego grafu pełnego jest czerwona lub niebieska. Udowodnić, że liczba jednokolorowych trójkątów w tym grafie jest równa co najmniej $\frac{1}{24}n(n - 1)(n - 5)$. (twierdzenie Goodmana)
- Dowieść, że $9t^2 \leq 2k^3$. (LVI OM)
- Niech $G = (V, E)$, przy czym $V = A \cup B$ dla $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ oraz $A \cap B = \emptyset$. Wiadomo, że w grafie G każda krawędź jest postaci $a_i b_j$ i nie ma żadnego cyklu długości 4. Dowieść, że ten graf ma co najwyżej $\frac{1}{2}n(\sqrt{4n - 3} + 1)$ krawędzi.

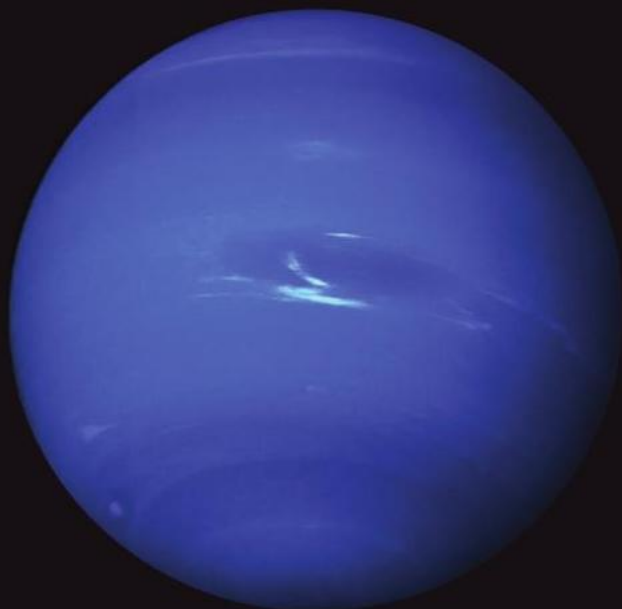
Wskazówki do zadań
 1. Niech v będzie wierzchołkiem z największym stopniem, który oznaczmy przez Δ . Podzielmy wierzchołki na dwa zbiory: A – wszyscy sąsiedzi v oraz B – reszta wierzchołków. Wierzchołki w A (dla jasności, $v \in B$). Wierzchołki w B nie mogą sąsiadować, więc każdy z nich ma stopień co najwyżej $|B| = n - \Delta$. Każdy wierzchołek ze zbioru B ma stopień co najwyżej Δ . Suma stopni wierzchołków nie przekracza zatem $\Delta(n - \Delta) \leq \frac{1}{4}n^2$ i wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia 1.
 2. Obliczyć na dwa sposoby liczbę ścieżek długości 2 i porównać otrzymane wyniki.
 3. Liczba trójkolorowych trójkątów nie przekracza jednej trzeciej liczby dwukolorowych ścieżek długości 2 (liczba tych ścieżek jest równa $\sum_{i=1}^n (a_i b_i + b_i c_i)$, przy czym a_i, b_i, c_i oznaczają, odpowiednio, stopień wierzchołka v_i w podgrafie czerwonym, zielonym, niebieskim. Pozostaje wykazać, że każdy ze składników jest mniejszy od $\frac{1}{3}n^2$, w czym może przydać się KPO z Δ_3 .
Ciekawostka. Niedawno udowodniono, że optymalną stałą jest $\frac{15}{16}$. Wykorzystano flagowe. (Rahmouf triangles in three-colored graphs, Journal of Combinatorial Theory, B, Vol. 126, 2017, 83–113)
 4. Lepiej oszacować liczbę dwukolorowych trójkątów i odjąć ją od liczby wszystkich trójkątów, czyli $\binom{n}{3}$.
 Liczba dwukolorowych trójkątów jest równa połowie liczby dwukolorowych ścieżek.
 5. Niech t_i będzie liczbą trójkątów, których jednym z wierzchołków jest v_i . Wówczas $t_i \leq \binom{d_i}{2}$, ale również $t_i \leq k - d_i$. Stała $\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{k/2}$.
 6. Niech $d_i = \deg(v_i)$ oraz $c_{i,j} = \text{com}(v_i, v_j)$. Brak cyklu długości 4 jest równoważny temu, że $c_{i,j} \leq 1$ dla wszystkich i, j . Liczba ścieżek długości 2 w zbiorze A jest taka sama, jak liczba ścieżek długości 2 w zbiorze B . Obserwacje te prowadzą nas do nierówności $\sum_{i=1}^n d_i^2 - \sum_{i=1}^n d_i = 2n - n$. Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową oraz twierdzenia 1 otrzymujemy $\sum_{i=1}^n d_i^2 \geq \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n d_i)^2$.
Ciekawostka. Dokładne wyznaczenie największej możliwej liczby krawędzi w takim grafie jest bezpodstawnie związane z kontrybucją skończonych płaskich rzutowych – bardzo ważnym i trudnym zagadnieniem z pogranicza geometrii, kombinatoryki, teorii liczb i algebry.

Różne odcienie niebieskiego

Pod koniec lat 80. zeszłego stulecia sonda Voyager 2 przeleciała w pobliżu Neptuna i wykonała jego zdjęcie. Po prawie 35 latach jest to wciąż jedno z najbardziej rozpoznawalnych zdjęć tej planety. Zdjęcie to jest najczęściej wykorzystywane w mediach i różnego rodzaju prezentacjach Układu Słonecznego. Może więc zaskoczy Cię, drogi Czytelniku, wiadomość, że intensywny niebieski kolor planety nie jest „prawdziwy”. (pełny artykuł. na str. 19)



Zdjęcie Urana wykonane przez sondę Voyager 2 i opublikowane w 1986 roku



Zdjęcie Neptuna, do jakiego przywykliśmy, wykonane przez sondę Voyager 2 i opublikowane w 1989 roku

Oryginalna publikacja opisująca wyniki obserwacji Neptuna przez sondę Voyager 2:
Smith, B. A. et al. (1989)
„Voyager 2 at Neptune: Imaging Science Results”.
Science, 246(4936), 1422–1449.
doi:10.1126/science.246.4936.1422



Prawdziwe kolory Urana (po lewej) i Neptuna (po prawej). Zdjęcie z publikacji Irwin et al. (2024)