

deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 7 (602) 2024

CENA 8 ZŁ VAT 8%

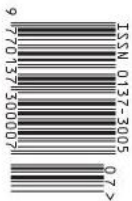
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Pchły skaczą,
czyli dynamika
opinii






str. 1

UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

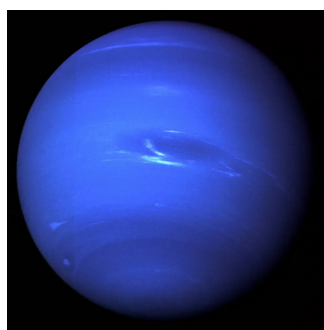


Nakład: 2800 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 7 (602) 2024

| | |
|---|---------|
| Pchły skaczą, czyli dynamika opinii <i>Michał Adamaszek</i> | str. 1 |
| Austrowęgierski specjalista od kosmonautyki i jego efekt <i>Marcin Braun</i> | str. 4 |
|  Zadania <i>Karol Gryszka</i> | str. 5 |
| Kwadraty grecko-łacińskie i płaszczyzny rzutowe <i>Karol Gryszka</i> | str. 6 |
| Euler spotyka Ramanujana <i>Jarosław Górnicki</i> | str. 10 |
| Wyniki olimpiad 2023/2024 | str. 11 |
| Hiperboliczna geometria przestrzeni kół <i>Michał Miśkiewicz</i> | str. 15 |
| Jak rozwiązać równanie? <i>Marek W. Gutowski</i> | str. 18 |
| Fascynująca fizyka – recenzja <i>Agnieszka Chudek</i> | str. 19 |
| Klub 44 | str. 20 |
|  Prosto z nieba: Zmienny obraz czarnej dziury | str. 22 |
|  Niebo w lipcu | str. 22 |
|  Aktualności Piknik na skraju fizyki | str. 24 |
|  Przejście graniczne <i>Bartłomiej Bzdęga</i> | str. 25 |

W następnym numerze:
Czy Neptun na prawdę tak wygląda?



Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, prof. UW;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr hab. Wojciech Czerwiński, prof. UW;
dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ;
dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz;
prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszufiska;
dr hab. Artur Jeż, prof. UW; prof. dr hab. Bartosz Klin;
dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wymolek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek,
Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT, www.poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

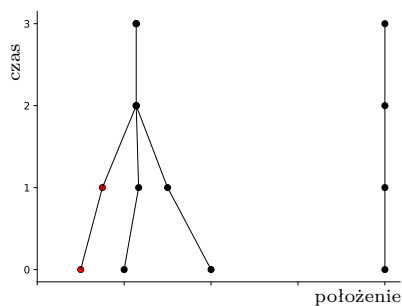
Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Pchły skaczą, czyli dynamika opinii

Michał ADAMASZEK*

*Kopenhaga



Rys. 1. Pchły A, B, C, D (w dolnym rzędzie w chwili $t = 0$) i ich trajektorie w czasie (oś pionowa)

Na prostej siedzi n identycznych pcheł (na tyle małych, że może ich być nawet po kilka w jednym punkcie). Pchły mają kiepski wzrok i widzą tylko na odległość 1. W pewnej chwili wszystkie pchły wykonują jednocześnie następującą operację. Każda pchła rozgląda się na prawo i lewo, rejestruje pozycje wszystkich pcheł, które widzi (w tym swoją własną i być może innych pcheł siedzących w tym samym punkcie), i oblicza średnią arytmetyczną tych pozycji. Inaczej mówiąc: wyznacza środek ciężkości pcheł będących w zasięgu jej wzroku. Następnie na komendę wszystkie pchły przeskakują – hop! – każda do wyliczonego przez siebie punktu. Potem cały proces powtarza się znowu i znowu, w kolejnych chwilach czasu $t = 1, 2, \dots$

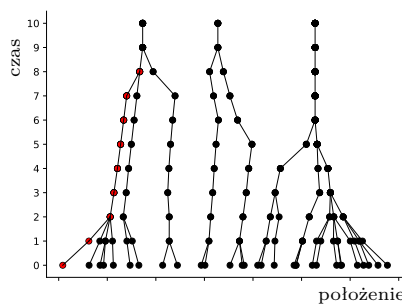
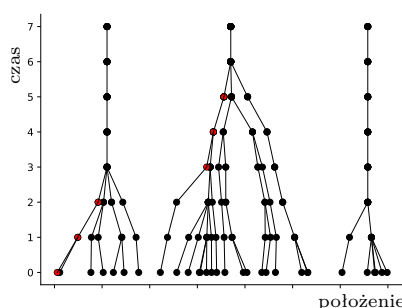
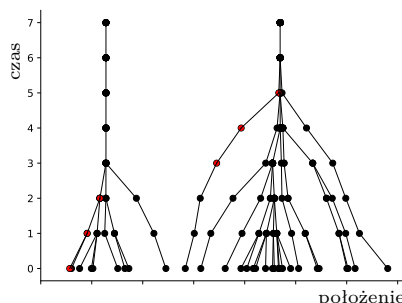
Dla ilustracji rozważmy 4 pchły A, B, C, D startujące w punktach $\frac{1}{2}, 1, 2$ i 4 (rys. 1). Pchła A widzi A i B , pchła B widzi A, B i C , zaś pchła C widzi B i C . Pchła D widzi tylko siebie. Zatem po pierwszym gwizdku pchły przeskoczą kolejno do nowych pozycji:

- pchła A : $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$.
- pchła B : $\frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 1 + 2) = 1\frac{1}{6}$.
- pchła C : $\frac{1}{2}(1 + 2) = 1\frac{1}{2}$.
- pchła D : $\frac{4}{1} = 4$.

W tym momencie pchły A, B, C znajdują się w obrębie wspólnego przedziału o długości 1, więc widzą się wszystkie nawzajem i nie widzą nikogo innego. To oznacza, że w następnym kroku wszystkie obliczą ten sam środek ciężkości:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} + 1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{2} \right) = 1\frac{5}{36},$$

i skoczą do tego punktu. Pchła D nadal się nie rusza. W kolejnym kroku, i we wszystkich następnych, już nic się nie zmieni – każda pchła będzie podskakiwać w miejscu. Pchły, które już nigdy nie zmieniają pozycji, nazwiemy *uziemionymi*; pchła D była uziemiona od początku, a pchły A, B, C po drugim skoku. Sytuację, w której wszystkie pchły są uziemione, nazwiemy *stabilną*. Na rysunku 2 widzimy ewolucję większych losowych układów 30 pcheł o pozycjach początkowych w przedziale $[0, 7]$.



Rys. 2. Przykładowe trajektorie pcheł. Znaczenie czerwonych kropek wyjaśnimy później

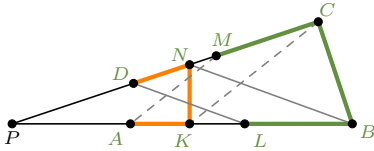
Opisany przez nas proces to najprostszy wariant tak zwanego *modelu Hegselmanna–Krausego* (w skrócie HK). Jego autorom nie chodziło jednak o tresurę pcheł, ale o matematyczne modelowanie *dynamiki opinii* (ang. *opinion dynamics*), a konkretnie polaryzacji poglądów. Model ten opiera się na założeniu, że nasze opinie na dany temat zmieniamy, dostosowując je (poprzez uśrednianie) do opinii innych osób o w miarę zbliżonym nastawieniu. Przypuśćmy na przykład, że każdy z nas ma swoje zdanie na temat kisielu, wyrażone liczbą rzeczywistą między 0 (nienawidzę) a 10 (mógłbym jeść cały czas). Załóżmy, że oceniamy kisiel umiarkowanie, na 4. W modelu HK będziemy z czasem powoli zmieniać swój punkt widzenia pod wpływem otoczenia. Zakładając dalej, że zwykliśmy wchodzić w interakcje z osobami o zbliżonych poglądach na kisiel (powiedzmy mieszczących się w przedziale $[3, 5]$) i nie traktujemy serio 10-punktowych kisielowych ekstremistów, dochodzimy do pomysłu HK, że naszą opinię zastępujemy średnią opinią naszego kisielowego sąsiedztwa. Hop!

Oczywiście dynamika opinii interesuje się ewolucją naszych poglądów na ważne tematy polityczne, ekonomiczne, społeczne, a nie na kisiel. Co więcej, nasze opinie są zwykle wielowymiarowe, to znaczy opisane wektorem w \mathbb{R}^m , w którym poszczególne współrzędne określają nasze stanowisko wobec m różnych zagadnień (tu akurat nasz model w oczywisty sposób się uogólnia). Oczywiście modele socjologiczne opisują statystyczne trendy, a nie zachowanie jednostek – ja na przykład oceniam kisiel na 0 i nigdy w życiu nie zmienię

**Rozwiązanie zadania M 1787.**

Jeśli $AB \parallel CD$, to $BCNK$ jest trapezem wpisanym w okrąg, zatem $BC = KN$ oraz $AK = BL = CM = DN$. Oznacza to, że czworokąt $LMDA$ otrzymujemy z $BCNK$ poprzez równoległe przesunięcie o wektor \overrightarrow{BL} .

Załóżmy teraz, że AB i CD nie są równoległe; oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych AB i CD .



Ponieważ czworokąt $BCNK$ jest wpisany w okrąg, to trójkąty PBC i PNK są podobne, zatem

$$\frac{PB}{BL} = \frac{PB}{BC} = \frac{PN}{NK} = \frac{PN}{ND}.$$

Dlatego $BN \parallel LD$, podobnie $CK \parallel MA$. Stąd otrzymujemy $\sphericalangle ALD = \sphericalangle KBN$ i $\sphericalangle KCN = \sphericalangle AMD$.

Ponieważ na czworokącie $BCNK$ można opisać okrąg, to $\sphericalangle KBN = \sphericalangle KCN$. Dlatego też $\sphericalangle ALD = \sphericalangle AMD$, czyli na czworokącie $ADML$ również można opisać okrąg.

**Rozwiązanie zadania M 1788.**

Wprowadźmy oznaczenie:

$$b_n = a_1 a_2 \dots a_n - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

Wystarczy udowodnić, że $b_{70} = 0$.

Zauważmy, że dla $n \geq 5$ mamy

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_1 a_2 \dots a_{n+1} - (a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2) = \\ &= a_1 a_2 \dots a_n (a_1 a_2 \dots a_n - 1) - \\ &\quad - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 - \\ &\quad - (a_1 a_2 \dots a_n - 1)^2 = \\ &= a_1 a_2 \dots a_n - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 - 1 = \\ &= b_n - 1. \end{aligned}$$

Ponadto

$$b_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2 - 5^2 = 65,$$

zatem $b_6 = 64, b_7 = 63, \dots, b_{70} = 0$.



Pchła w czerwonej czapeczce wygenerowana przez AI (visme.co)

zdania, niezależnie od tego, co myślą o tym Hegselmann i Krause. Nie zmienia to faktu, że jednowymiarowy model HK – najprostszy w bogatej hierarchii modeli – jest sam w sobie ciekawym obiektem matematycznym, więc warto przyjrzeć mu się przez chwilę.

Pierwsze pytanie, które zadają sobie Hegselmann i Krause, i na które postaramy się odpowiedzieć także my, brzmi: czy każda początkowa konfiguracja pcheł osiąga stan stabilny, a jeśli tak, to jak szybko?

Rozpocznijmy od kilku prostych obserwacji, których precyzyjne uzasadnienia pozostawiamy jako ćwiczenie. Od razu widzimy, że pchły nigdy nie opuszczają przedziału, który zajmowały na początku, pomiędzy pozycjami startowymi najbardziej skrajnych pcheł na lewo i prawo. Jeżeli pewne dwie kolejne pchły są rozdzielone pustym odcinkiem długości większej niż 1, to cały układ rozpada się na dwa niezależne systemy (na lewo i prawo od tej przerwy), które nigdy nie wejdą ze sobą w żadną interakcję. Szczególnym przypadkiem tej sytuacji jest grupa pcheł uziemionych razem w jednym punkcie – mają one pustą przestrzeń długości większej niż 1 po obu stronach. Zauważmy też, że pchły nie mogą zamienić się kolejnością – jeżeli dwie pchły zajmują pozycje p_1, p_2 przed skokiem i odpowiednio p'_1, p'_2 po skoku, to $p_1 \leq p_2$ implikuje $p'_1 \leq p'_2$. Pchły, które spotkają się w jednym punkcie, będą już zawsze podróżować razem. Wreszcie odnotujmy, że w jednym skoku pchła może przeskoczyć co najwyżej o odległość $1 - \frac{1}{n}$; ma to miejsce w ekstremalnym przypadku, gdy pojedyncza pchła ma wszystkie $n - 1$ pozostałych pcheł dokładnie na jednym z krańców swojego pola widzenia.

Żeby uprościć dalszą dyskusję, umówmy się, że utożsamiamy pchły z ich pozycjami, a gdy trzeba wybrać jedną z pcheł siedzących w tym samym punkcie, bierzemy którąkolwiek.

Przed każdą rundą znajdujemy najbardziej wysuniętą na lewo spośród wszystkich jeszcze nieuziemionych pcheł i nakładamy jej na głowę czerwoną czapeczkę (jeśli takiej pchły nie ma, to stan jest już stabilny). Te pchły zaznaczyliśmy na czerwono na towarzyszących tekstowi rysunkach. Zauważmy, że pchła w czerwonej czapeczce zawsze skacze ostro w prawo i albo zachowuje czapeczkę na następną rundę, albo, jeśli została właśnie uziemiona, czapeczka przechodzi na którąś pchłę daleko w prawo (więcej niż 1 cm), albo osiągamy stan stabilny. Tak czy inaczej, w każdym kroku, w którym jeszcze coś się dzieje, czapeczka wędruje ostro w prawo. Jeśli uda nam się pokazać, że te przesunięcia muszą być stosunkowo duże, to możemy wnioskować, że będzie ich tylko skończenie wiele, bo czapeczka nie może zawędrować poza początkową pozycję skrajnie prawej pchły. Intuicyjnie idea jest następująca: przypuśćmy, że w pewnym ruchu pchła z czapeczką przesunęła się tylko o bardzo, bardzo mało. Wtedy wszystkie jej sąsiadki musiały być bardzo, bardzo blisko niej, i jedynym sposobem, aby całe to towarzystwo nie zostało przez tę bliskość razem uziemione, jest istnienie pchły tuż poza zasięgiem wzroku pchły z czapeczką (a więc daleko), odciągającej niektóre jej sąsiadki trochę w prawo. Jednak to „trochę” wystarczy, aby w następnym ruchu pchła z czapeczką musiała skoczyć wyraźnie dalej. Pora na szczegóły; jak się okaże, „bardzo, bardzo blisko”, „trochę w prawo” i „wyraźnie dalej” będą naprawdę małe, ale jednak jednostajnie odgraniczone od zera, i to wystarczy.

Udowodnijmy, że w każdych dwóch kolejnych ruchach czapeczka przesuwa się łącznie o co najmniej $\frac{1}{n^2}$. Niech c oznacza pozycję pchły z czapeczką, k – liczbę pcheł w zasięgu jej wzroku, p – najdalszą z tych pcheł, a c', p' , odpowiednio, pozycje c i p po skoku. Przypuśćmy, że po pierwszym kroku pchła z pozycji c (teraz w c') nadal zachowała czapeczkę i co więcej – przemieściła się o mniej niż $\frac{1}{n^2}$ (jeśli któryś z tych warunków nie zachodzi, to już koniec dowodu). Mamy zatem:

$$c + \frac{1}{n^2} > c' \geq \frac{1}{k} ((k-1)c + p) = c - \frac{c}{k} + \frac{p}{k},$$

czyli

$$p < c + \frac{k}{n^2} \leq c + \frac{1}{n}$$

(wszystkie sąsiadki c są „bardzo, bardzo blisko”). Ponieważ nie doszło do uziemienia, to p musiała widzieć $\ell > k$ pcheł, w szczególności co najmniej jedną pchłę po swojej prawej; niech q będzie pierwszą z nich. Skoro jednak c nie widzi q , to

$$c + 1 < q \leq p + 1.$$

Wobec tego możemy oszacować pozycję p' :

$$p' \geq \frac{1}{\ell} ((\ell - 1)c + q) > \frac{1}{\ell} ((\ell - 1)c + c + 1) = c + \frac{1}{\ell} \geq c + \frac{1}{n}$$

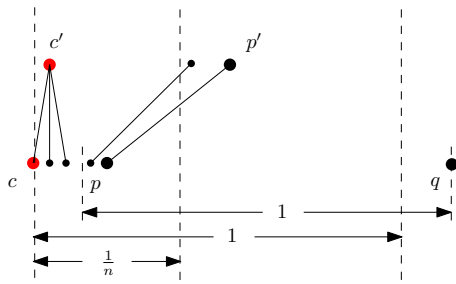
(q odciąga p „trochę w prawo”) oraz, jak już wiemy:

$$p' \leq p + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < c + \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = c + 1 < c' + 1.$$

Powiedzmy, że c' widzi po pierwszym skoku k' pcheł. Nasze obliczenia pokazują, że p' jest jedną z nich. Zatem po drugim skoku:

$$\begin{aligned} c'' &\geq \frac{1}{k'} ((k' - 1)c' + p') > \frac{1}{k'} \left((k' - 1)c + c + \frac{1}{n} \right) = c + \frac{1}{nk'} \geq \\ &\geq c + \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

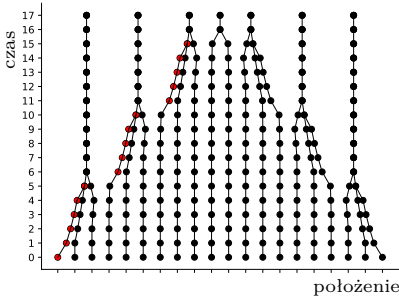
a więc faktycznie po dwóch skokach czapeczka przebyła co najmniej dystans $\frac{1}{n^2}$ („wyraźnie dalej”). Hop, hop.



Rys. 3. Ilustracja dowodu

Reasumując, jeżeli początkowa odległość skrajnych pcheł wynosi d , a czapeczka w każdym dwóch ruchach przesuwa się łącznie o co najmniej $\frac{1}{n^2}$, to liczba ruchów, w których coś się zmienia, wynosi co najwyżej $2dn^2$, a dalej stan jest już stabilny. W rzeczywistości pokazaliśmy nawet więcej: możemy bez straty ogólności założyć, że $d \leq n$ (inaczej mamy rozpad na niezależne podproblemy), zatem pchły osiągają stan stabilny po co najwyżej $2n^3$ iteracjach, niezależnie od początkowych pozycji.

Powstaje naturalne pytanie, czy są układy n pcheł, które stabilizują się dopiero po liczbie kroków rzędu n^3 . Odpowiedź brzmi: prawdopodobnie nie. Pchły rozpoczynające w punktach $\{1, 2, \dots, n\}$ osiągają stabilność po około $\frac{5}{6}n$ iteracji (rys. 4), co pozostawiamy jako żmudne ćwiczenie; można zajrzeć do [2]. W pracy [3] autorom udało się skomplikować ten przykład tak, że do stabilności potrzeba liczby kroków rzędu aż n^2 . Jak dotąd nikomu nie udało się poprawić ani dolnego, ani, co bardziej zaskakujące, górnego oszacowania, choć wydaje się, że pchły mają więcej „luzu”, niż to uwzględnia nasza analiza z czapeczką, i można by to jakoś wykorzystać. Może ktoś z Czytelników podejmie się tego zadania? Można też zainteresować się innymi pytaniami, na przykład, jak przebiega i jak się statystycznie kończy ewolucja układu n pcheł umieszczonych losowo w przedziale długości d ? Albo do jakiego stopnia pchła może w trakcie zabawy zmieniać kierunek, w którym skacze?



Rys. 4. Trajektorie pcheł startujących z punktów $1, \dots, 20$

Pozostawiając Czytelnika ze skaczącymi pchłami, uprzejmie donoszę, że ostatnio dzieci namówiły mnie na kisiel i po tym doświadczeniu podniosłem mu ocenę z 0 do 0,001. Czekam na kolejny ruch. Hop!

Literatura

- [1] A. Bhattacharya, M. Braverman, B. Chazelle and H. L. Nguyen, „On the convergence of the Hegselmann-Krause system”, Proceedings of the 4th Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ICTS 2013), Berkeley CA, January 2013., <https://arxiv.org/abs/1211.1909>
- [2] P. Hegarty and E. Wedin, „The Hegselmann-Krause dynamics for equally spaced agents”, Journal of difference equations and applications, vol. 22, no. 11, pp. 1621–1645, <https://arxiv.org/abs/1406.0819>
- [3] P. Hegarty and E. Wedin, 2015. „A quadratic lower bound for the convergence rate in the one-dimensional Hegselmann–Krause bounded confidence dynamics”, Discrete & Computational Geometry, 53, pp.478–486., <https://arxiv.org/abs/1406.0769>

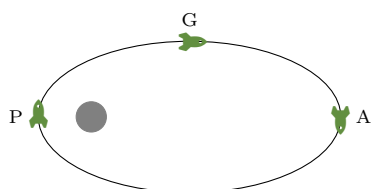
Austrowęgierski specjalista od kosmonautyki i jego efekt

*Nauczyciel fizyki i matematyki
w 42 Autorskim LO w Warszawie

Marcin BRAUN*

Po przeczytaniu tytułu Czytelnik może pomyśleć, że *Delta* zaczęła publikować opowiadania fantastyczne spod znaku historii alternatywnej. Oto w połowie XX wieku gdzieś w Królestwie Galicji i Lodomerii, żyjącym pod łaskawym panowaniem Franciszka Józefa II, napędzana gorlicką ropą rakietą wzbija się na Księżyc. . . Nic z tych rzeczy! Wspomniany specjalista żył naprawdę. Urodził się w austrowęgierskim wówczas Siedmiogrodzie, w rodzinie mówiącej w domu po niemiecku, a nazywał się Hermann Oberth. Gdy skończył fizykę w Heidelbergu, wrócił do Siedmiogrodu i podjął pracę jako profesor gimnazjum. Prowadził jednak także teoretyczne badania nad pojazdami kosmicznymi, a napisana na podstawie jego rozprawy naukowej o fizyce lotów raketowych książka popularnonaukowa wywołała wśród młodych Niemców prawdziwą modę na kosmonautykę. Do założonego na fali tej mody „Towarzystwa na rzecz Podróży Statkami Kosmicznymi” należał także Wernher von Braun, niemiecki konstruktor rakiet, po II Wojnie Światowej współtwórca amerykańskiego programu kosmicznego.

**Początkowo sąd odmówił rejestracji Verein für Raumschiffahrt (Towarzystwa Podróży Kosmicznych), twierdząc, że nie ma takiego słowa, jak Raumschiffahrt. To dziwne, wydawałoby się, że po niemiecku wystarczy zapisać kilka słów bez spacji, a nowy wyraz pojawia się automatycznie.



Jak to zwykle bywa w historii, skutki pracy Obertha były i pozytywne, i negatywne – być może bez niego nie mielibyśmy lądowania na Księżycu, ale także i hitlerowskich rakiet V1 i V2.

Efekt Obertha. Uczony dziś znany jest przede wszystkim z „efektu Obertha”. Na czym ów efekt polega? Wyobraźmy sobie statek kosmiczny krążący wokół planety po eliptycznej orbicie. Jego załoga chce opuścić orbitę i w związku z tym potrzebuje uzyskać jak największą prędkość, ale na manewr może przeznaczyć tylko określoną ilość paliwa. W którym miejscu orbity włączyć silnik: w apocentrum (A), w perycentrum (P) czy gdzieś pośrodku (G)? A może to wszystko jedno?

Zakładamy, że silnik pracuje bardzo krótko (w skali rysunku rakietą jest ciągle w tym samym miejscu), ale za to z dużą mocą. Proponuję w tym momencie przerwać czytanie i zastanowić się samemu.

Cztery odpowiedzi. A oto odpowiedzi czterech współziomków Obertha.

Hans To wszystko jedno. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki przyrost pędu jest w każdym wypadku taki sam ($\Delta p = F\Delta t$), więc także prędkość wzrośnie o tyle samo.

Jancsi Najlepiej włączyć silnik w apocentrum. Co prawda włączenie silnika zawsze doda tyle samo energii, ale żeby wyrwać się z punktu A, potrzeba mniej energii niż z punktu P.

Rūżena Najlepiej włączyć silnik w punkcie G, ale nie po prostu „gdzieś”, tylko w połowie drogi między apocentrum i perycentrum. Wtedy rakietą polecą bardziej w stronę „od planety”, a nie w bok, więc szybciej się oddali i nie zdadzą stracić tyle energii.

Oleńka Najlepiej włączyć silnik w punkcie P. Siła ciągu będzie ta sama, będzie działać przez ten sam czas, ale w tym czasie rakietą przebędzie największą drogę, a w takim razie wykonana praca będzie największa ($W = Fs$) i rakietą zyska najwięcej energii.

Kto ma rację i dlaczego inni jej nie mają? Proponuję znowu się zatrzymać i pomyśleć. A potem obalimy po kolei wszystkie podane argumenty.

Hans Owszem, prędkość wzrośnie za każdym razem o tyle samo, ale jednakowy przyrost prędkości nie oznacza jednakowego przyrostu energii. We wzorze na energię kinetyczną prędkość występuje w kwadracie. Jeśli zwiększymy prędkość z 1 km/s do 2 km/s, energia kinetyczna wzrośnie o $2^2 - 1^2 = 3$ jednostki umowne, a jeśli zwiększymy ją z 5 km/s do 6 km/s, to wzrośnie aż o $6^2 - 5^2 = 11$ takich jednostek. A do wyrwania się z pola grawitacyjnego planety potrzebna jest odpowiednia energia.

Jednostki równe $\frac{1}{2} \cdot (\text{masa rakiety}) \cdot (\text{km/s})^2$

Jancsi Do oddalenia się od planety z punktu A rzeczywiście jest potrzebna mniejsza energia niż z punktu P. Ale tę różnicę dokładnie kompensuje różnica energii kinetycznych między tymi punktami. A poza tym skąd wiemy, że silnik dostarczy tyle samo energii?

Růżena Dlaczego „nie zdąży”? Ubytek energii kinetycznej zależy od przyrostu energii potencjalnej, a nie od czasu. Jeśli rakietę będzie się szybciej oddalać (będzie miała większą prędkość radialną), to po prostu będzie szybciej traciła energię.

Oleńka Przyrost energii kinetycznej rakiety jest równy energii chemicznej paliwa spalonego przez raketę. Skąd miałyby się wziąć dodatkowa energia?

To kto ma rację, skoro nikt jej nie ma? Zdradźmy od razu, że jako patriota nie mogłem rozdzielić ról inaczej: rację ma Oleńka. Jej argument ze wzorem definicyjnym pracy jest w pełni poprawny. Ale jak odpowiedzieć na pytanie, skąd się wzięła dodatkowa energia? Otóż pierwsze zdanie mające zbić argumenty Oleńki nie jest prawdziwe. Należałoby powiedzieć: Przyrost energii kinetycznej rakiety i gazów wylotowych jest równy energii chemicznej paliwa spalonego przez raketę. Tymczasem, gdy rakietę leci szybciej, jej gazy mają mniejszą prędkość w zewnętrznym układzie odniesienia. Więcej energii zostaje więc dla rakiety.

A co do Oleńki – jak pisał już Sienkiewicz – to *białogłowy z tak grzecznym umysłem drugiej nie znaleźć*. Kogo zaś takowe polityczne *argumentum ad rationem* nie przywoła, dla tego cytuję mamy przystojniejszą: *Ślepy! Głupi warchole! Nie byłoż ci postuchać Oleńki!*

A w układzie odniesienia rakiety? W nim rakietę w ogóle się nie porusza, porusza się natomiast planeta, a do tego nasz układ nie jest inercjalny. Analiza będzie więc dużo bardziej skomplikowana.

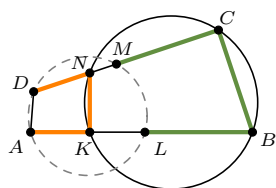


Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1786. W pola kwadratu 11×11 wpisano parzystą liczbę plusów. Okazało się, że każdy kwadrat 2×2 również ma parzystą liczbę plusów. Udowodnić, że liczba plusów wpisanych w główną przekątną kwadratu też jest parzysta.

Rozwiązanie na str. 9



M 1787. Punkty K i L leżą na boku AB czworokąta wypukłego $ABCD$ (punkt K leży między A i L), a punkty M i N leżą na boku CD (punkt M leży między C i N). Wiadomo, że $AK = KN = DN$ i $BL = BC = CM$. Udowodnić, że jeśli na czworokącie $BCNK$ można opisać okrąg, to na czworokącie $ADML$ również.

Rozwiązanie na str. 2

M 1788. Ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n \geq 1}$ jest zdefiniowany następująco: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$ oraz $a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n - 1$ dla $n \geq 5$. Udowodnić, że

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{70}^2 = a_1 a_2 \dots a_{70}.$$

Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1099. Oszacuj rozmiary cząsteczki azotu i odległości międzycząsteczkowe w gazowym azocie w warunkach normalnych ($p = 1,013 \cdot 10^5$ Pa, $T = 0^\circ\text{C}$). Gęstość ciekłego azotu (w temperaturze wrzenia, -196°C) $\rho_l = 0,808$ g/cm³, gęstość azotu w warunkach normalnych $\rho_g = 1,250$ g/l, liczba Avogadro $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ /mol, liczba masowa atomu azotu $A_N = 14$.

Rozwiązanie na str. 6

F 1100. Ile razy energia wiązania cząsteczki azotu w polu grawitacyjnym Ziemi jest większa od średniej energii kinetycznej cząsteczek azotu w powietrzu? Przyjmij, że temperatura powietrza $T = 300$ K, stała Boltzmanna $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K, przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s², promień Ziemi $R = 6370$ km, liczba masowa atomu azotu $A_N = 14$, liczba Avogadro $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ /mol.

Rozwiązanie na str. 15



Kwadraty grecko-łacińskie i płaszczyzny rzutowe

Karol GRYSZKA*

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Drogi Czytelniku, spróbuj wskazać jakieś nieprzeciętne cechy poniższych dwóch układów liczb, wpisanych w tablice o wymiarach 5×5 .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 5 |
| 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |



Rozwiązanie zadania F 1099.

Gęstości tej samej substancji w stanie ciekłym i w stanie gazowym są niemal równe. Na potrzeby oszacowania możemy więc przyjąć, że w cieczy cząsteczki niemal się stykają. Masa jednego mola cząsteczek azotu wynosi

$\mu_N = 2A_N \text{ g} = 28 \text{ g}$. Objętość jednego mola ciekłego azotu $V = \mu_N / \rho_l$ (cząsteczki azotu są dwuatomowe). Objętość przypadająca na jedną cząsteczkę wynosi $v = V/N_A$, co odpowiada sześcianowi o boku d^3 , gdzie d oznacza średnie rozmiary cząsteczki. Otrzymujemy:

$$d = \left(\frac{\mu_N}{N_A \rho_l} \right)^{1/3}$$

Liczbowo $d \approx 3,86 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. W stanie gazowym objętość przypadająca na jedną cząsteczkę wynosi ρ_l / ρ_g i jest około 650 razy większa niż w cieczy. Wynika stąd, że w gazie średnia odległość l między cząsteczkami azotu wynosi:

$$l = \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{1/3} d \approx 8,65 d$$

Liczbowo $l \approx 33,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Jako łamigłówka kwadraty grecko-łacińskie pojawiły się nawet wcześniej. W 1725 roku Jacques Ozanam zaproponował następujący problem: ułożyć wszystkie karty wszystkich kolorów od waleta do asa w kwadrat tak, aby w każdym rzędzie i w każdej kolumnie obecny był każdy kolor i każda wartość karty. Poniżej jedno z rozwiązań:

A♠ K♥ Q♦ J♣
 Q♣ J♦ A♥ K♠
 J♥ Q♠ K♣ A♦
 K♦ A♠ J♠ Q♥

O historii problemu 36 oficerów można było też przeczytać niedawno w *Delcie*, w artykułach *36 splełtanych oficerów* (Δ_{23}^3) oraz *37 lat później* (Δ_{23}^{12}).

W obu przypadkach umieszczono liczby od 1 do 5, każda pojawia się pięciokrotnie – ciężko to jednak uznać za „nieprzeciętne cechy”. Istotniejsze jest to, że w każdym wierszu i każdej kolumnie pojawia się pełen zestaw liczb od 1 do 5. Dzięki temu oba układy zasługują na miano *kwadratów łacińskich*. Najistotniejszym zaś jest dla nas to, co ukazuje się naszym oczom po sparowaniu liczb stojących w odpowiednich polach tych tablic.

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 1) | (2, 4) | (3, 2) | (4, 5) | (5, 3) |
| (2, 2) | (3, 5) | (4, 3) | (5, 1) | (1, 4) |
| (3, 3) | (4, 1) | (5, 4) | (1, 2) | (2, 5) |
| (4, 4) | (5, 2) | (1, 5) | (2, 3) | (3, 1) |
| (5, 5) | (1, 3) | (2, 1) | (3, 4) | (4, 2) |

Okazuje się, że otrzymany kwadrat ma niezwykłą cechę – w każdym polu znajduje się unikalna para (x, y) , gdzie x oraz y są liczbami z zakresu od 1 do 5. W takiej sytuacji mówimy, że dwa kwadraty łacińskie są *wzajemnie ortogonalne* (krótko: *ortogonalne*), a połączony z nich kwadrat nazywamy *kwadratem grecko-łacińskim*.

Historia badania kwadratów grecko-łacińskich sięga Leonharda Eulera. Jeśli wierzyć przekazom, w drugiej połowie XVIII wieku caryca Katarzyna Wielka przesłała uczonemu następujący problem, zwany wspólnie *problemem 36 oficerów*:

Ustawić 36 oficerów z 6 różnych pułków tak, aby stali w kwadracie, i tak, aby w każdej linii (zarówno poziomej, jak i pionowej) było 6 oficerów różnych stopni i różnych pułków.

Innymi słowy, caryca poprosiła Eulera o skonstruowanie kwadratu grecko-łacińskiego o wymiarach 6×6 . Uczony nie potrafił rozwiązać tego problemu, ale udało mu się odkryć ogólną metodę konstrukcji kwadratów grecko-łacińskich rzędu n , gdy n jest nieparzyste lub jest podzielne przez 4. W swoich rozumowaniach do oznaczania elementów z pierwszego kwadratu Euler używał liter alfabetu łacińskiego, a do drugiego – greckiego, i podobno stąd wzięła się nazwa *kwadrat grecko-łaciński*.

Euler postawił również hipotezę, że jeśli $n = 4k + 2$, to kwadrat takiego rzędu nie istnieje, co łatwo uzasadnić dla $k = 0$. Przypadek $k = 2$, czyli problem 36 oficerów, czekał na rozwiązanie aż do początku XX wieku, kiedy to Gaston Tarry udowodnił, że faktycznie problem ten nie ma rozwiązania [1]. W pełnej ogólności hipoteza Eulera czekała jeszcze pół wieku, zanim została całkowicie rozstrzygnięta. W 1959 roku trójka matematyków – Raj Bose, Ernest Parker i Sharadchandra Shrikhande – wykazała, że hipoteza Eulera jest *falszywa* dla *wszystkich* $k \geq 3$ [2].

Wspólnie wiemy już zatem, że dla $n \notin \{1, 2, 6\}$ istnieją dwa wzajemnie ortogonalne kwadraty łacińskie rzędu n . A czy może ich być więcej?

Jak najbardziej – spójrzmy od razu na przykład 4 wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich piątego rzędu.

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| alt | buk | cel | dar | elf |
| buk | cel | DAR | elf | alt |
| CEL | dar | elf | alt | buk |
| dar | elf | alt | BUK | cel |
| elf | ALT | buk | cel | dar |

Ciekawą realizacją podanego układu kwadratów łacińskich rzędu 5 może być tablica pięciu różnych słów zapisanych pięcioma różnymi krojami pisma w pięciu różnych kolorach, każde słowo umieszczone na tle jednego z pięciu różnych kolorów

| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (1, 1, 1, 1) | (2, 2, 2, 2) | (3, 3, 3, 3) | (4, 4, 4, 4) | (5, 5, 5, 5) |
| (2, 3, 5, 4) | (3, 4, 1, 5) | (4, 5, 2, 1) | (5, 1, 3, 2) | (1, 2, 4, 3) |
| (3, 5, 4, 2) | (4, 1, 5, 3) | (5, 2, 1, 4) | (1, 3, 2, 5) | (2, 4, 3, 1) |
| (4, 2, 3, 5) | (5, 3, 4, 1) | (1, 4, 5, 2) | (2, 5, 1, 3) | (3, 1, 2, 4) |
| (5, 4, 2, 3) | (1, 5, 3, 4) | (2, 1, 4, 5) | (3, 2, 5, 1) | (4, 3, 1, 2) |

W podanej tabeli dowolnie wybrane dwie spośród 4 współrzędnych (wybieramy takie same współrzędne z każdej czwórki liczb) tworzą nowy kwadrat, który jest klasycznym kwadratem grecko-łacińskim. Okazuje się, że piątego kwadratu łacińskiego już nie znajdziemy, gdyż zachodzi następujące

Twierdzenie. *Istnieje co najwyżej $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n .*

Dowód. Zauważmy najpierw, że wzajemna ortogonalność jest zachowana przez permutacje (tzn. przenumrowania) liczb w dowolnym kwadracie. Korzystając z tego spostrzeżenia, możemy bez straty ogólności założyć, że w każdym kwadracie pierwszy wiersz jest postaci $1, \dots, n$. Zauważmy, że w każdym z kwadratów na drugim miejscu pierwszej kolumny znajduje się liczba większa od 1 (gdyż są to kwadraty łacińskie). Ponadto muszą to być różne liczby, inaczej zaprzeczylibyśmy wzajemnej ortogonalności. Istotnie, gdyby w pewnych dwóch kwadratach w tym miejscu znajdowała się ta sama liczba a , to w połączeniu tych kwadratów dostalibyśmy w tym miejscu parę (a, a) , która pojawiła się już w pierwszym wierszu. Te dwie obserwacje dowodzą, że wzajemnie ortogonalnych kwadratów może być co najwyżej $n - 1$. \square

Niech teraz n będzie liczbą pierwszą.

Skonstruujemy $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n : niech element stojący w i -tym wierszu j -tej kolumny r -tego kwadratu (oznaczanego jako L_r) będzie równy $L_r(i, j) = (i + rj) \pmod n$, przy czym $i, j, r \in \mathbb{Z}_n$ oraz $r \neq 0$. Dla przykładu, jeśli przyjmiemy $n = 5$, otrzymamy poniższe kwadraty łacińskie.

Operacja modulo n to rozważenie reszty z dzielenia liczby k przez liczbę n , co zapisujemy $k \pmod n$. Takie reszty tworzą zbiór $\{0, \dots, n - 1\}$ oznaczany przez \mathbb{Z}_n . W takim zbiorze można rozważyć operacje dodawania oraz mnożenia modulo. Jeśli $a, b \in \mathbb{Z}_n$, wynikiem $a + b$ w tym zbiorze jest wykonanie działania $(a + b) \pmod n$. Analogicznie definiuje się mnożenie. Tym samym, jeśli na przykład $n = 7$, $a = 3$ i $b = 6$, to $a + b = 2$ oraz $a \cdot b = 4$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 0 | 2 | 4 |
| 2 | 4 | 1 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | 4 | 1 |
| 4 | 1 | 3 | 0 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 1 | 4 | 2 | 0 | 3 |
| 2 | 0 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 | 0 |
| 4 | 2 | 0 | 3 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 4 | 3 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 4 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Dowód tego, że konstrukcja daje kwadraty łacińskie, jest bardzo podobny do przedstawionego dowodu wzajemnej ortogonalności (oraz jest prostszy), pozostawiamy go zatem jako ćwiczenie.

Okazuje się, że tak skonstruowane kwadraty są wzajemnie ortogonalne!

Załóżmy bowiem, że kwadraty L_{r_1} oraz L_{r_2} ($r_1 \neq r_2$) nie są ortogonalne, tzn. po połączeniu na pewnych dwóch różnych miejscach: (i_1, j_1) oraz (i_2, j_2) , mają tę samą wartość. Oznacza to, że

$$i_1 + r_1 j_1 \equiv i_2 + r_1 j_2 \pmod n,$$

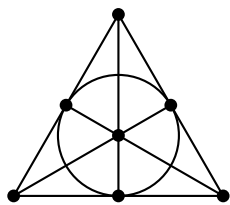
$$i_1 + r_2 j_1 \equiv i_2 + r_2 j_2 \pmod n.$$

Po odjęciu tych kongruencji stronami uzyskamy $(r_1 - r_2)j_1 \equiv (r_1 - r_2)j_2$, a zatem $n \mid (r_1 - r_2)(j_1 - j_2)$. Skoro $r_1 \neq r_2$ oraz n jest liczbą pierwszą, dostajemy $n \mid (j_1 - j_2)$, czyli $j_1 \equiv j_2 \pmod n$, a stąd i z pierwszej równości wyżej dostajemy $i_1 \equiv i_2 \pmod n$, co przeczy założeniu, że (i_1, j_1) oraz (i_2, j_2) były różnymi miejscami.

Spróbujmy wyabstrahować te własności zbioru reszt z dzielenia przez n , które pozwoliły nam przeprowadzić powyższą konstrukcję. Na tych resztach wykonywaliśmy działania dodawania, odejmowania i mnożenia. Ponadto – w sposób niejawni – dokonywaliśmy dzielenia, kiedy z równości $(r_1 - r_2)j_1 \equiv (r_1 - r_2)j_2$ wnioskowaliśmy $j_1 \equiv j_2$, i tu istotne było założenie o pierwszości n . Strukturę, w której te operacje zachowują się tak, jak jesteśmy do tego



O prostych i punktach w podobnym, abstrakcyjnym ujęciu pisał również Bartłomiej Bzdęga w Δ_{24}^6 .



Płaszczyzna rzutowa rzędu 2 (płaszczyzna Fano)

przyzwyczajeni, nazywamy *ciałem*. W 1893 roku Eliakim Moore udowodnił, że na skończonym zbiorze można wprowadzić strukturę ciała wtedy i tylko wtedy, gdy liczba jego elementów jest potęgą liczby pierwszej – i w takim wypadku wiadomo, jak taką strukturę wprowadzić. Oznacza to, że dla n będących potęgą liczby pierwszej potrafimy w analogiczny do powyższego sposób skonstruować $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów rzędu n oraz, że dla n niebędących potęgą liczby pierwszej ta konstrukcja nie działa. Nie oznacza to oczywiście, że nie ma innego sposobu... ale takiego matematycy nie znają. A bardzo chcieliby poznać (lub udowodnić, że go nie ma), gdyż pozornie niewinne „pełne” układy wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich to tak naprawdę inne oblicze obiektu bardzo w matematyce zakorzenionego – *skończonej płaszczyzny rzutowej*. Wyjaśnieniu tego związku poświęcona będzie dalsza część artykułu.

Skończona płaszczyzna rzutowa to zbiór X wraz z niepustym zbiorem L złożonym z podzbiorów X (elementy L nazywamy *prostymi*, a elementy X *punktami*) o następujących własnościach, naśladujących zależności między „klasycznymi” prostymi i punktami na płaszczyźnie:

- dla każdej pary różnych punktów istnieje dokładnie jedna prosta zawierająca oba punkty,
- przecięcie (tzn. część wspólna) dwóch różnych prostych zawiera dokładnie jeden punkt,
- istnieje taki zbiór 4 punktów, że żadne 3 spośród nich nie należą do jednej prostej.

Mówimy ponadto, że płaszczyzna rzutowa jest rzędu n , jeśli do każdej prostej należy dokładnie $n + 1$ punktów. Można uzasadnić, że wtedy istnieje dokładnie $n^2 + n + 1$ punktów oraz tyle samo prostych.

Najprostszym przykładem realizującym powyższe aksjomaty jest tak zwana płaszczyzna Fano – jest to układ 7 punktów oraz 7 prostych, tworzących płaszczyznę rzędu 2. Wizualizacja płaszczyzny Fano została umieszczona na marginesie. Podkreślmy, że w takiej wizualizacji proste (elementy zbioru L) nie muszą być proste (w sensie geometrii euklidesowej) – w tym przypadku prosta będąca zbiorem środków boków narysowanego trójkąta równobocznego jest oznaczona jako okrąg (pozostałe sześć prostych to odcinki).

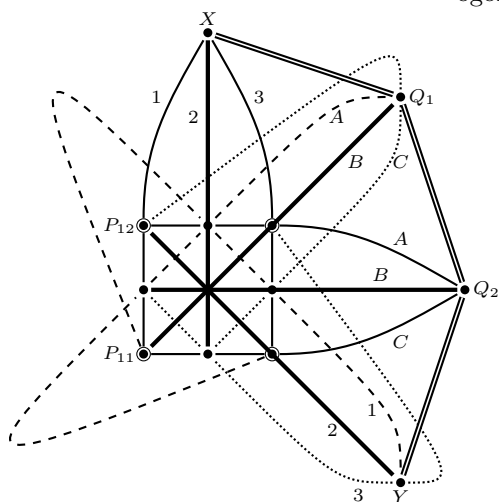
Pokażemy teraz, jak z płaszczyzny rzutowej rzędu n uzyskać $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n . Zrobimy to na przykładzie $n = 3$, ogólna sytuacja nie różni się istotnie.

Rozpocznijmy od (wcale nietrywialnego) narysowania tej płaszczyzny rzutowej. Na marginesie przedstawionych zostało 13 punktów w takim układzie, w którym do jednej prostej należą dokładnie 4 punkty i odwrotnie – każdy punkt należy dokładnie do 4 prostych. Symbolami ● zaznaczone zostały 4 punkty, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Taki układ punktów i prostych przeniesiemy teraz na konstrukcję kwadratów łacińskich.

Ustalmy dowolnie dwa punkty X i Y (oznaczenia jak na rysunku). Niech ℓ będzie prostą, do której należą punkty X i Y (jest to prosta oznaczona przez podwójną linię \equiv). Oznaczmy pozostałe punkty tej prostej przez Q_k ($k \leq 2$). Następnie liczbami od 1 do 3 numerujemy wszystkie proste zawierające X i różne od ℓ ; podobnie postępujemy dla punktu Y . Każdy punkt nieleżący na prostej ℓ jest wspólny dla dokładnie jednej pary ponumerowanych przed chwilą prostych. Niech P_{ij} będzie punktem wspólnym dla i -tej prostej zawierającej punkt X i j -tej prostej zawierającej punkt Y .

Dla każdego punktu Q_k ($k \leq 2$) etykietujemy proste różne od ℓ , zawierające te punkty etykietami A , B i C . Wówczas każdy punkt P_{ij} leży na prostych o różnych etykietach. Konstruujemy teraz dwa kwadraty łacińskie w następujący sposób:

W i -tym wierszu i j -tej kolumnie k -tego kwadratu łacińskiego umieszczamy etykietę prostej łączącej P_{ij} z Q_k .



Płaszczyzna rzutowa rzędu 3



Rozwiązanie zadania M 1786.

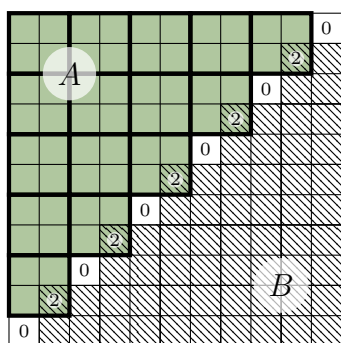


Figura A w lewym górnym rogu kwadratu (na rysunku oznaczona kolorem) składa się z 15 kwadratów 2×2 , a więc ma parzystą liczbę plusów. To samo dotyczy figury B, która jest symetryczna do figury A względem środka kwadratu. Każde pole kwadratu poza przekątną zakrywa dokładnie jedna z figur A i B, a każde pole przekątnej zakrywają obie lub żadna z nich. Ponieważ sumarycznie figury A i B mają parzystą liczbę plusów, przy czym plusy na polach z liczbą 2 są liczone dwukrotnie, więc liczba plusów poza przekątną jest parzysta. Ponieważ całkowita liczba plusów jest parzysta, liczba plusów na przekątnej również jest parzysta.

Zgodnie z tym algorytmem otrzymujemy poniższe kwadraty łacińskie i odpowiadający im kwadrat grecko-łaciński.

| | | |
|---|---|---|
| B | C | A |
| A | B | C |
| C | A | B |

| | | |
|---|---|---|
| C | A | B |
| A | B | C |
| B | C | A |

| | | |
|--------|--------|--------|
| (B, C) | (C, A) | (A, B) |
| (A, A) | (B, B) | (C, C) |
| (C, B) | (A, C) | (B, A) |

Dlaczego w ogólności otrzymane kwadraty są łacińskie? Przypuśćmy, że k -ty kwadrat taki nie jest i dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że w i -tym wierszu powtarza się w nim pewna litera. Oznaczałoby to, że prosta z Q_k oznaczona tą literą ma dwa punkty wspólne z i -tą prostą z X . Te proste musiałyby być zatem równe, a to jest sprzeczność.

Gdyby zaś kwadraty o numerach k i k' nie tworzyły kwadratu grecko-łacińskiego, to pewne dwie proste z punktów Q_k i $Q_{k'}$ musiałyby przecinać się w dwóch różnych punktach P_{ij} , i to też jest sprzeczność.

Co jest również ważne, algorytm można odwrócić i zamienić $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n na skończoną płaszczyznę rzutową rzędu n . Prawdziwe jest zatem następujące

Twierdzenie: *Istnieje $n - 1$ wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona płaszczyzna rzutowa rzędu n .*

Zgodnie z obserwacjami z pierwszej części artykułu oznacza to, że istnieją płaszczyzny rzutowe rzędu p^k , gdzie p jest liczbą pierwszą. Obecnie nie znamy przypadku płaszczyzny rzutowej wymiaru innego niż p^k , przypuszcza się więc, że to stwierdzenie charakteryzuje wszystkie n , dla których odpowiednią płaszczyznę można skonstruować.

Hipoteza: Skończona płaszczyzna rzutowa rzędu n istnieje tylko wtedy, gdy n jest potęgą liczby pierwszej.

Istnieją oczywiście pewne wyniki częściowe. Jednym z nich jest następujący fakt, pochodzący z 1949 roku.

Twierdzenie (Bruck-Ryser): *Jeżeli istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu n oraz $n \equiv 1 \pmod{4}$ lub $n \equiv 2 \pmod{4}$, to n musi być sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.*

Istnienie płaszczyzn rzutowych rzędu n :

| rzęd | czy istnieje? |
|------|-----------------|
| 2 | tak |
| 3 | tak |
| 4 | tak |
| 5 | tak |
| 6 | nie |
| 7 | tak |
| 8 | tak |
| 9 | tak |
| 10 | nie |
| 11 | tak |
| 12 | problem otwarty |
| 13 | tak |
| 14 | nie |
| 15 | problem otwarty |

Ostatnie twierdzenie wyklucza w szczególności istnienie płaszczyzn rzutowych wymiaru 6 lub 14, ale nie wyklucza istnienia płaszczyzny rzędu 10. To ostatnie zostało wykazane metodami komputerowymi w 1991 roku. Obecnie najmniejsze n , dla którego nie wiemy, czy istnieje odpowiednia płaszczyzna rzutowa, to $n = 12$. Warto przy tej okazji przytoczyć pracę [3], której autorzy – polscy matematycy – przedstawiają elementarny i czysto geometryczny dowód nieistnienia płaszczyzny rzutowej rzędu 6.

Na koniec wspomnijmy o jeszcze jednym zagadnieniu. Wiemy już, że płaszczyzny rzutowe rzędu 6 oraz 10 nie istnieją, wobec tego nie istnieje odpowiednio 5 i 9 wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich. Można więc postawić pytanie – jeśli nie tyle, to ile maksymalnie można ich znaleźć? W przypadku $n = 6$ odpowiedzi dostarcza nam problem 36 oficerów. Natomiast dla $n = 10$ odpowiedź nie jest obecnie znana – wiadomo, że istnieją dwa ortogonalne kwadraty łacińskie rzędu 10 i przypuszcza się, że nie więcej. Wreszcie, dla $n \geq 12$ istnieje co najmniej pięć wzajemnie ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu n .

Literatura

[1] G. Tarry, *Le Problème de 36 Officiers*, *Compte Rendu de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences* (1901), 170–203.
 [2] R.C. Bose, S.S. Shrikhande, E.T. Parker, *Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture*, *Canad. J. Math.* 12 (1960), 189–203.
 [3] M. Dumnicki, J. Gwoździewicz, J. Szpond, *An elementary, geometric proof of the nonexistence of a projective plane of order 6*, *Contrib. Discrete Math.* 15 (2020), 1–9.

Euler spotyka Ramanujana

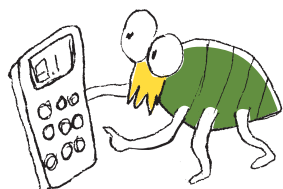
Jarosław GÓRNICKI

Big Bang. Leonhard Euler (1707–1783) zabłysnął w 1735 roku wzorem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Jego pierwsze uzasadnienie było błędne [2], ale intuicja magiczna. Dowód, jaki podał w *Introductio...* (1748), nie budził już żadnych wątpliwości. Tożsamość Eulera wykażemy elementarnie.

Bogini Namagiri. Srinivasa Ramanujan (1887–1920) był genialnym samoukiem. Pozostawił około 3900 wzorów matematycznych. Wielu z nich nikt dotąd nie potrafi udowodnić. Dla Ramanujana były one tak oczywiste, że nie widział potrzeby ich uzasadniania (zob. Δ_{18}^3). Mawiał, że to bogini Namagiri z Namakkal zawdzięcza swe uzdolnienia matematyczne.



Dowód wzoru Eulera (styl Ramanujana)

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{4}} \right] = \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{5\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{7\pi}{8}} \right] = \dots = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} \stackrel{(b)}{=} \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{2}{4^n} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \end{aligned}$$

więc wzór Eulera wynika z równości:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ nieparzyste}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ parzyste}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad \square$$

Dla „mięczaków”. Kto przeglądał rękopisy Ramanujana (dostępne w Internecie), wie, że to mieszanka niezwykle oryginalnych, zaskakujących pomysłów i ukrytej głębokiej wiedzy. Oto kilka podpowiedzi ułatwiających zrozumienie podanego dowodu.

(a) Korzystając z jedynki trygonometrycznej, wzorów $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ oraz $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $x \in \mathbb{R}$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{x+\pi}{2}} \right].$$

(b) Gdy k zmienia się od 0 do $2^n - 1$, to wartości $\sin \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$ rozmieszczone są na wykresie funkcji $\sin x$, $x \in (0, \pi)$, symetrycznie względem prostej $x = \frac{\pi}{2}$. Rozważmy argumenty należące do przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$, tj. wartości $\sin \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$, gdy k zmienia się od 0 do $2^{n-1} - 1$. Stąd mnożenie odpowiedniej sumy przez 2.

(c) Gdy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, to $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ i $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, więc $\frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\sin^2 x} - 1$. Przyjmując kolejno $x = \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$, dostajemy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{2}{4^n} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} &> \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{2}{4^n} \cdot \frac{1}{\left[\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} \right]^2} \\ &> \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{2}{4^n} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} - \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{2}{4^n}, \end{aligned}$$

$$\text{czyli } 1 > \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} > 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Literatura

- [1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, WN PWN, Warszawa 2002.
[2] J. Górnicki, *Od bzdury do bingo!*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie 49 (2012), 21–25.

Pouczające jest poznanie (porównanie) innych dowodów wzoru Eulera podanych np. w [1].



Wyniki Olimpiad 2023/2024



LXXV Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1783 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 779 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 215 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 5 kwietnia br. postanowił przyznać 48 tytułów laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):

Nagroda stopnia pierwszego

Konstanty Smolira (36) – Prywatne LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie

Nagroda stopnia drugiego

Jeremi Hyska (29) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Nagrody stopnia trzeciego

Jan Gwiazda (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Grzegorz Kaczmarek (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Stanisław Lada (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Michał Lipiec (24) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Antoni Mazur (24) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Jan Micyk (24) – VIII LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach

Tymon Sidor (24) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Robert Soboński (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Jakub Świcarz (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Mateusz Wawrzyniak (24) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu

Michał Wolny (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Mikołaj Woźniak (24) – XXXIII LO Dwujęzyczne im. Mikołaja Kopernika w Warszawie

Krzysztof Karwik (23) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

Aleksander Mielnikau (23) – I LO im. Adama Mickiewicza w Białymstoku

Krzysztof Pietrusiak (23) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Magdalena Pudełko (23) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Nagrody stopnia czwartego

Patryk Rosół (22) – III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

Szymon Urban (22) – Zespół Szkół Ponadpodstawowych w Kleszczowie

Ksawery Bartman (20) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Norbert Dąbrowski (20) – XIII LO w Szczecinie

Wojciech Domin (20) – LO Nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu

Rafał Mańczyk (20) – LO Nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

Piotr Miernik (20) – LO im. św. Jadwigi Królowej w Kielcach

Karol Musieliński (20) – VIII LO im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Jakub Pieczonka (20) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

Kajetan Ramsza (20) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Tadeusz Rylski (20) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Jakub Sułkowski (20) – I LO im. Jana Długosza w Nowym Sączu

Michał Kaźmierczak (19) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Jan Błażuk (18) – II LO im. księżnej Anny z Sapiehów Jabłonowskiej w Białymstoku

Igor Grauer (18) – XXXIII LO Dwujęzycznego im. Mikołaja Kopernika w Warszawie

Adam Jankowski (18) – I LO im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie

Robert Kluszczyński (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Jan Kwieciński (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Marek Muzyka (18) – LO Nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

Kamil Szmurło (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Szymon Tobiasz (18) – I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim

Antoni Wagner (18) – XIII LO w Szczecinie

Gustaw Wenzel (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Miłosz Zajdel (18) – I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie

Rafał Żebruń (18) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu

Anna Bryłowska (17) – Prywatne LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie

Błażej Dratwa (17) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Krzysztof Lalicki (17) – LO im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie

Andrzej Maroń (17) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Antoni Nowosielski (17) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

Nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie zadania z finału LXXV OM otrzymały następujące osoby:

Wojciech Domin – LO Nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu

Stanisław Lada – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Konstanty Smolira – Prywatne LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie

Szymon Urban – Zespół Szkół Ponadpodstawowych w Kleszczowie

Pełną treść komunikatu prasowego można odnaleźć na stronie om.sem.edu.pl

LXVII ogólnopolska Olimpiada Astronomiczna

W tym roku Planetarium Śląskie po raz kolejny zorganizowało zawody Olimpiady Astronomicznej dla uczniów szkół średnich i podstawowych. To już 67. edycja tego konkursu. Jak co roku olimpiada rozegrała się w trzech etapach.

Pierwszy etap polegał na rozwiązywaniu zadań teoretycznych i obserwacyjnych we własnym zakresie. W czasie tego etapu dopuszczalne jest uzupełnianie wiedzy astronomicznej przy pomocy wszelkich dostępnych źródeł, literatury fachowej oraz Internetu. Poza pytaniami o gwiazdy i galaktyki uczestnicy musieli odpowiedzieć na pytanie, czy Teleskop Kosmiczny Hubble'a byłby dobrym satelitą szpiegowskim.



Zwycięzcą tegorocznej olimpiady został **Piotr Jędrzejczyk**, uczeń V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Pozostali laureaci to:

II Miejsce: **Dawid Chudzik** z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

III Miejsce: **Andrzej Maroń** z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

IV Miejsce – ex aequo: **Michał Jagodziński** z XIII LO w Szczecinie, **Krzysztof Nadulicz** z II LO im. Księżnej Anny z Sapiehów Jabłonowskiej w Białymstoku

VI Miejsce – ex aequo: **Weronika Bednarek** z XIII LO w Szczecinie, **Stanisław Świercz** z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, **Kinga Wysocka** z III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

Pierwszych pięciu laureatów będzie reprezentować Polskę podczas 16. Międzynarodowej Olimpiady z Astronomii i Astrofizyki, która odbędzie się w dniach 10–20 sierpnia w Planetarium Śląskim w Chorzowie oraz Międzynarodowym Centrum Kongresowym w Katowicach.



XXXI Olimpiada Informatyczna

W dniach 9–12 kwietnia 2024 r. w Warszawie odbyły się zawody III stopnia XXXI Olimpiady Informatycznej. Zostało do nich zakwalifikowanych 101 zawodników i zawodniczek. W ciągu dwóch dni zawodów III stopnia zawodnicy rozwiązywali w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Ceremonia zakończenia XXXI Olimpiady Informatycznej odbyła się 12 kwietnia w Warszawie. Komitet Główny przyznał tytuły laureata I, II i III miejsca zgodnie z poniższą listą (w nawiasach liczba zdobytych punktów, szkoła oraz klasa) i wyróżnił tych spośród finalistów, którzy zdobyli co najmniej 110 punktów. Laureaci Olimpiady otrzymali stypendia z Programu Stypendialnego Olimpiady Informatycznej ufundowane przez NASK – PIB; stypendia przyznano także nauczycielom za osiągnięcia w pracy z uczniami uzdolnionymi informatycznie. Lista wszystkich finalistów jest dostępna na stronie oi.edu.pl.

Laureaci I miejsca

1. **Adam Gąsienica-Samek** (496, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa, kl. 3)
2. **Rafał Mańczyk** (485, LO nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław, kl. 4)
3. **Jan Gwiazda** (466, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa, kl. 4)
4. **Kajetan Ramsza** (444, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa, kl. 4)
5. **Robert Soboński** (396, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa, kl. 4)
6. **Marcin Rymkiewicz** (392, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa, kl. 3)
7. **Konstanty Smolira** (390, Prywatne LO im. Królowej Jadwigi, Lublin, kl. 4)
8. **Olaf Łukasz Targowski** (384, III LO im. Marynarki Wojennej RP z Oddziałami Dwujęzycznymi, Gdynia, kl. 4)

Laureaci i laureatki II miejsca

9. **Karol Bonat** (371, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
10. **Wojciech Domin** (363, LO nr III, Wrocław, kl. 4)
11. **Maksym Iskiński** (339, XIII LO, Szczecin, kl. 4)
12. **Stanisław Lada** (337, XIV LO, Warszawa, kl. 2)

W drugim etapie, podczas egzaminów okręgowych, uczestnicy rozwiązywali cztery zadania teoretyczne. Tematyka zadań wahała się od zderzeń satelitów po kalendarz starożytnych Egipcjan.

Trzeci, finałowy etap obejmował kilkudniowe zawody rozgrywane w Planetarium Śląskim. Tu oprócz zadań teoretycznych uczestnicy musieli się zmierzyć z zadaniami obserwacyjnymi na sali planetarium. W czasie prezentacji jednego z zadań na kopule planetarium został wyświetlony naturalny widok nieba z Zachodu Słońca do północy. Zadaniem uczestników była identyfikacja wszystkich planet, które byli w stanie zaobserwować, oraz nazwanie gwiazdozbiorów, na tle których przeszły planety.

13. **Jan Myszka** (326, I Liceum w Chmurze, Warszawa, kl. 2)
14. **Paulina Żeleźnik** (317, LO nr XIV, Wrocław, kl. 3)
15. **Ignacy Boehlke** (316, XIII LO, Szczecin, kl. 4)
16. **Michał Szeliga** (304, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
17. **Tomasz Pływacz** (303, XIV LO, Warszawa, kl. 3)
18. **Franciszek Szymula** (294, V LO, Kraków, kl. 2)
19. **Karol Kajetan Musieliński** (285, VIII LO, Poznań, kl. 4)
20. **Sylwia Sapkowska** (281, II LO, Białystok, kl. 4)
21. **Julian Ryszard Tasior** (280, V LO, Kraków, kl. 3)
22. **Jerzy Olkowski** (277, XIV LO, Warszawa, kl. 3)
23. **Marek Muzyka** (272, LO nr XIV, Wrocław, kl. 4)

Laureaci i laureatki III miejsca

24. **Mateusz Jakub Kussowski** (262, III LO, Gdynia, kl. 4)
- 25.–26. **Jeremi Hyska** (261, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
- Michał Plata** (261, LO nr III, Wrocław, kl. 4)
27. **Jakub Koliński** (260, III LO, Gdynia, kl. 4)
28. **Piotr Dybich** (258, SP nr 1, Strzyżów, kl. 8SP)
29. **Michał Szydło** (252, I LO, Białystok, kl. 4)
30. **Waldemar Lamandini** (246, III LO, Gdynia, kl. 4)
31. **Mikołaj Niezbrzycki** (230, I LO, Łódź, kl. 4)
32. **Michał Kaźmierczak** (227, XIV LO, Warszawa, kl. 3)

33. **Jan Zimnoch** (224, I LO, Białystok, kl. 4)
 34. **Paweł Rodwald** (223, III LO, Gdynia, kl. 3)
 35. **Mikołaj Kołek** (222, V LO, Kraków, kl. 4)
 36. **Franciszek Czauderna** (221, XIV LO, Warszawa, kl. 3)
 37. **Miłosz Koczorowski** (217, VIII LO, Bydgoszcz, kl. 3)
 38. **Jan Kosiorowski** (214, V LO, Kraków, kl. 1)
 39. **Mateusz Mącik** (211, III LO, Gdynia, kl. 4)
 40. **Stanisław Wołk** (203, III LO, Gdynia, kl. 4)
 41. **Zofia Krok** (201, XIII LO, Szczecin, kl. 4)
 42. **Jakub Biekionis** (200, XIV LO, Warszawa, kl. 2)
 43. **Antoni Pusz** (195, XIV LO, Warszawa, kl. 2)
 44.–45. **Marcin Krysiak** (194, XIV LO, Warszawa, kl. 1)
Wojciech Dominik Rybak (194, LO nr XIV, Wrocław, kl. 4)
 46. **Krzysztof Pietrusiak** (189, XIV LO, Warszawa, kl. 4)
 47. **Kacper Poneta** (185, Technikum im. Bohaterów Westerplatte, Radom, kl. 5)
 48.–49. **Ksawery Bartman** (175, V LO, Kraków, kl. 4)
Mikołaj Piotr Wrześniński (175, I LO, Łódź, kl. 3)



Olimpiada Informatyczna Juniorów

Laureaci I stopnia

Piotr Dybich (1),
 Krzysztof Witkowski (1),
 Artur Smoleński (3),
 Michał Roguz (4),
 Szymon Krzywda (5),
 Szymon Pilipczuk (5),
 Witold Swacha (7),
 Marek Konieczny (8),
 Bartosz Malinowski (9)

Laureaci II stopnia

Jan Gonczaryk (10),
 Wojciech Franciszek Pasternak (11),
 Szymon Opaska (12),

Aleksander Lada (13),
 Łukasz Smyk (14),
 Franciszek Gawron (15),
 Grzegorz Tabor (16),
 Maja Wiczorek (17),
 Szymon Stefaniuk (18),
 Anna Ouejski (19),
 Jan Małafiejski (20),
 Zuzanna Czubińska (21),
 Antoni Winiarski (22),
 Karol Kulczycki (23),
 Miłosz Popowicz (24),
 Rafał Sobolewski (25)

Laureaci III stopnia

Juliusz Klim (26),
 Wiktor Perskawiec (26),
 Maksymilian Kozicki (28),
 Michał Maciołka (29),
 Mikołaj Rosowski (29),

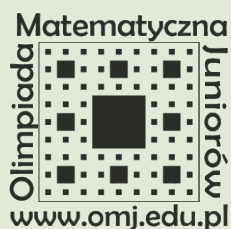
Filip Brajczewski (31),
 Adrian Falak-Cyniak (32),
 Tymoteusz Szymański (32),
 Jan Kropidłowski (33),
 Jan Gregorczyk (35),
 Antoni Glinka (36),
 Jakub Dańko (37),
 Wojciech Klich (38),
 Artur Brzeziński (39),
 Urszula Kwiatkowska (40),
 Aleksander Igor Nowaliński (41),
 Wojciech Hewelt (42),
 Bartosz Dańko (43),
 Michał Opar (43),
 Tobiasz Szymański (45),
 Maksym Mysiar (46),
 Adam Kudelski (47),
 Sebastian Czajka (48),
 Tomek Dawidowski (49),
 Wiktor Gatner (50)

Finałiści z wyróżnieniem

Filip Pawicki (51),
 Mateusz Synowiec (51),
 Maciej Zaręba (53),
 Antoni Janicki (54),
 Karol Janicki (55),
 Dominik Findeisen (56),
 Piotr Balcerowicz (57),
 Aleksander Cynk (57),
 Stanisław Badziak (59),
 Szymon Turkiewicz (60),
 Filip Biskupski (61),
 Daniel Bereza (62),
 Kyryll Leksunin (63),
 Michał Szarata (63),
 Mikołaj Kolański (65),
 Krzysztof Wlekły (66),
 Stanisław Łatuszko (67)

XVIII Olimpiada Informatyczna Juniorów

Finał XVIII OIJ miał miejsce 26–28 maja 2024 r. na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Łącznie w zawodach wystartowało 101 zawodniczek i zawodników.



XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 6277 uczniów z 963 szkół, do zawodów stopnia drugiego przystąpiło 1198 uczniów z 636 szkół, a do zawodów stopnia trzeciego – 120 uczniów z 91 szkół.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów na posiedzeniu w dniu 16 marca br. postanowił przyznać 56 osobom tytuł laureata pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w obrębie każdej grupy laureatów kolejność jest alfabetyczna):

Laureat I stopnia, który uzyskał maksymalną

liczbę 30 punktów: Marek Marcin Konieczny.

Pozostali laureaci I stopnia (19–24 punkty)

Iga Helena Abramczuk, Aleksander Dembny,
 Piotr Jan Dybich, Juliusz Stanisław Klim,
 Krzysztof Kowalik, Mariia Kulyk, Julian Zbigniew
 Kuryłowicz-Kaźmierczak, Aleksander Rotkiewicz.

Laureaci II stopnia (16–18 punktów)

Daniel Bereza, Dominik Findeisen, Karol Kaczmarek,
 Maksymilian Kuś, Mateusz Łukasiewicz,
 Szymon Michalik, Filip Tomasz Osiński,
 Maria Reluga, Mikołaj Rosowski, Jan Sałkowski,
 Artur Adam Smoleński, Krzysztof Ziemowit Suligowski,
 Lili Anna Teodorowicz,
 Piotr Franciszek Wesółowski.

Laureaci III stopnia (12–14 punktów)

Zuzanna Czubińska, Hubert Dancewicz, Wojciech Dąbrowski,
 Wiktor Gatner, Nina Teresa Głowacka, Ksawery Ilnicki,
 Wojciech Klich, Maksymilian Kozicki, Jan Olgierd
 Kropidłowski, Emilia Joanna Królikowska, Tymon Kurek,
 Hanna Kwinta, Aleksander Piotr Lada, Szymon Jan Lipiński,
 Matylda Maciejewska, Piotr Milewicz, Tomasz Miłkowski,
 Paweł Łukasz Miształ, Amelia Józefina Ossowska,
 Danylo Pashuk, Jan Pijanowski, Szymon Pilipczuk,
 Adam Jakub Rowiński, Leon Schwarzweller, Jakub Tomasz
 Sekita, Lena Aleksandra Sidorowska, Witold Swacha,
 Michał Szczurek, Jan Weralski, Weronika Wilczek,
 Dawid Aleksander Włodarski, Piotr Rafał Zalewski, Igor Żuk.

Pełną treść komunikatu prasowego można odnaleźć na stronie omj.edu.pl



LXXIII Olimpiada Fizyczna

Jak co roku, w roku szkolnym 2023/24 przeprowadzona została Olimpiada Fizyczna. Organizatorem Olimpiady jest Polskie Towarzystwo Fizyczne, wspierane przez 14 wyższych uczelni oraz inne instytucje naukowe stanowiące bazę materialną i osobową Komitetu Głównego i Komitetów Okręgowych. Olimpiada finansowana jest w znacznej części przez dotację z Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Olimpiada to trój etapowy ogólnopolski konkurs z fizyki dla uczniów szkół ponadpodstawowych. Pierwszy etap trwał od początku roku szkolnego 2023/24 do 17 listopada 2023 roku. Wzięło w nim udział ponad 1000 uczniów. Uczestnicy rozwiązywali zadania w domu lub w szkole, mogli korzystać z wszelkiej możliwej pomocy. W pierwszej części tego etapu mieli do rozwiązania kilkanaście prostych zadań, wyniki wpisywane były do komputera, który automatycznie sprawdzał poprawność rozwiązania. Rozwiązania można było poprawiać dowolną liczbę razy. Organizatorzy zadbali, żeby dane liczbowe każdego uczestnika były nieco różne, co miało zapewnić samodzielność rozwiązań. W drugiej części tego etapu uczestnicy rozwiązywali klasyczne zadania rachunkowe oraz zadania doświadczalne. Zadania doświadczalne polegały na wyznaczeniu współczynnika tarcia plastiku (woreczka plastikowego) o papier, wyznaczeniu dwóch współczynników załamania taśmy klejącej (jest to materiał dwójłomny) oraz momentu bezwładności smartfonu. Doświadczenia nie wymagały specjalistycznego sprzętu, można je było łatwo wykonać w domu. Zadanie ze smartfonem wymagało skorzystania z darmowego oprogramowania smartfonu.

Drugi etap składał się z części teoretycznej (14 stycznia 2024 r.) oraz części doświadczalnej (18 lutego 2024 r.) Odbył się on w warunkach kontrolowanych w siedzibach Komitetów Okręgowych Olimpiady. Do części teoretycznej dopuszczonych zostało 412 uczestników, do części drugiej – 227. Część teoretyczna polegała na rozwiązaniu trzech zadań. Pierwsze zadanie dotyczyło interferencji fal dźwiękowych w dość nietypowej konfiguracji, drugie – sił w polu elektrycznym i magnetycznym, a trzecie – ruchu samochodu, w którym lewe i prawe koła obracają się w przeciwne strony. Zadania okazały się trudne, w szczególności zadanie z samochodem. Zadanie doświadczalne było dość proste, polegało na wyznaczeniu współczynnika tarcia wkładu ołówka o papier. Tutaj uczestnicy wykazali mnóstwo inwencji – powstało wiele rozwiązań różnych od proponowanych przez autorów zadania.

Do trzeciego etapu Olimpiady dopuszczone zostały 83 osoby. Zawody odbyły się w Warszawie w dniach 13 – 14 kwietnia 2024 r. Pierwszego dnia uczestnicy rozwiązywali zadanie doświadczalne polegające na znalezieniu układu elektrycznego zamkniętego w „czarnym pudełku”. Pudełko miało wyprowadzenia elektryczne, widoczne były dwie czerwone diody LED i dwie zielone. To zadanie wymagało zrozumienia zasad przepływu prądu elektrycznego oraz nieco inwencji. Zadania teoretyczne polegały na wyznaczeniu warunków stabilności zapory wodnej, ruchu naładowanego elektrycznie pierścienia w zmiennym polu magnetycznym oraz ruchu strumienia wody w warunkach sztucznej grawitacji (wirującej stacji kosmicznej). Tradycyjnie zadania finałowe były bardzo trudne. Tym niemniej najlepsi uczestnicy rozwiązali w zasadzie poprawnie wszystkie zadania.

Pełną treść oraz rozwiązania wszystkich zadań z Olimpiady można znaleźć na stronie www.kgof.edu.pl.

Wyniki 73 Olimpiady Fizycznej zostały ogłoszone 16 kwietnia 2024 roku. Tytuł finalisty przyznano wszystkim uczestnikom

trzeciego etapu, tytuł laureata 25 osobom, które uzyskały najwyższe wyniki. Wszyscy finaliści zwolnieni są z matury z fizyki, mają też pierwszeństwo do przyjęcia na studia na wielu wyższych uczelniach.

Zwycięzcą Olimpiady został Andrzej Maroń z XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Pierwszych 5 laureatów zostało zaproszonych do udziału w Europejskiej Olimpiadzie Fizycznej, która odbędzie się w Gruzji w lipcu tego roku. Tegoroczna Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna odbędzie się w Iranie; ze względu na sytuację w tym kraju udział polskiej drużyny nie jest możliwy.

Oto pełna lista laureatów 73 Olimpiady Fizycznej:

Andrzej Maroń, XIV LLO im. Stanisława Staszica, Warszawa

Krzysztof Kopecki, II LLO im. płk. Leopolda Lisa-Kuli w Rzeszowie, Rzeszów

Krzysztof Kreiner, V LLO im. Augusta Witkowskiego, Kraków

Michał Lipiec, V LLO im. Augusta Witkowskiego, Kraków

Wojciech Domin, III LLO im. Adama Mickiewicza, Wrocław

Piotr Jędrzejczyk, V LLO im. Augusta Witkowskiego, Kraków

Adam Gocel, Akademickie LLO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu, Wrocław

Jakub Miłkowski, III LLO im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia

Jan Malawski, V LLO im. Augusta Witkowskiego, Kraków

Magdalena Ratyńska, XIV LLO im. Stanisława Staszica, Warszawa

Antoni Kobosz, XIV LLO im. Stanisława Staszica, Warszawa

Wiktor Bański, VIII LLO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Skłodowskiej-Curie, Katowice

Mikołaj Litwin, III LLO im. Unii Lubelskiej w Lublinie, Lublin

Jan Błażuk, II LLO im. księżnej Anny z Sapiehów Jabłonowskiej, Białystok

Michał Iwanicki, IX LLO im. Klementyny Hoffmanowej, Warszawa

Kacper Kłos, III LLO im. Adama Mickiewicza w Katowicach, Katowice

Jakub Trela, III LLO im. Adama Mickiewicza, Tarnów

Patryk Chwiej, II LLO im. Króla Jana III Sobieskiego, Kraków

Dawid Górniak, Liceum w Chmurze, Warszawa

Wojciech Matczak, II LLO im. dr. Władysława Pniewskiego, Gdańsk

Adam Reszka, II LLO im. dr. Władysława Pniewskiego w Gdańsku, Gdańsk

Jakub Nowak, XIV LLO im. Polonii Belgijskiej, Wrocław

Rafał Mazur, II LLO im. A. Frycza Modrzewskiego w Rybniku, Rybnik

Szymon Fliegner, VIII LLO im. A. Mickiewicza, Poznań

Karol Juszczyk, Liceum w Chmurze, Warszawa

Hiperboliczna geometria przestrzeni kół

Michał MIŚKIEWICZ*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW



Rozwiązanie zadania F 1100.

Masa cząsteczki azotu wynosi $m_N = (2A_N/N_A)g$. Energia wiązania takiej cząsteczki przez pole grawitacyjne Ziemi wynosi (G to stała grawitacyjna, M to masa Ziemi):

$$E_g = -\frac{GMm_N}{R} = -m_N g R.$$

Średnia energia kinetyczna ruchu cieplnego wynosi $E_k = 3kT/2$. Stosunek tych energii wynosi:

$$\left| \frac{E_g}{E_k} \right| = \frac{2m_N g R}{3kT}.$$

Liczbowo $|E_g/E_k| \approx 468$. Energia kinetyczna ruchu cieplnego odpowiada pracy potrzebnej do podniesienia cząsteczki azotu na wysokość h nad powierzchnią Ziemi:

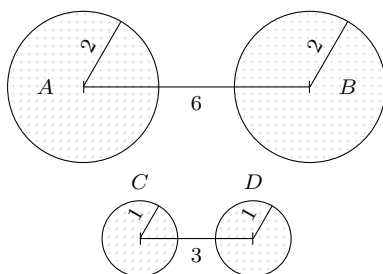
$$h = \frac{3kT}{2gm_N}.$$

Liczbowo $h \approx 13,6$ km.

W Internecie łatwo można znaleźć quizy, których rozwiązanie pozwala odpowiedzieć na ważne pytania: z którą księżniczką Disneya mogę się utożsamiać?, które warzywo najlepiej mnie opisuje?, do którego z czterech domów Hogwartu pasuję? Postanowiłem dodać swoje trzy grosze, pytając Czytelników *Delty* o geometrię przestrzeni kół. Rzecz jest subiektywna, więc nie ma złych odpowiedzi. Zdamy się więc na Tiarę Przydziału!

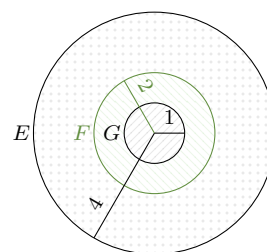
W poniższych pytaniach przez $d(P, Q)$ należy rozumieć odległość między kołami P i Q . Z podanych odpowiedzi wybieramy tę, która według nas najlepiej opisuje sytuację na rysunkach niżej. O przydziale decyduje wybrany symbol; może się okazać, że pasuje więcej niż jeden dom.

Pytanie 1



- ♣ $d(A, B) = d(C, D)$
- ♦♠ $d(A, B) = 2 \cdot d(C, D)$
- ♡ inna odpowiedź

Pytanie 2

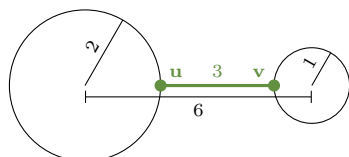


- ♣ $d(E, F) = d(F, G)$
- ♦ $d(E, F) = 2 \cdot d(F, G)$
- ♠ obie powyższe odpowiedzi, gdyż $d(E, F) = 0 = d(F, G)$
- ♡ inna odpowiedź

Sprawdź swój wynik!

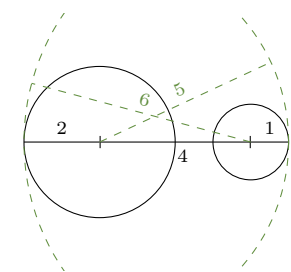
♡ **Hufflepuff!** Twoje rozumienie odległości między kołami trudno uchwycić poprzez proste zależności, ale na pewno okaże się ono przydatne w momencie, w którym świat magii będzie tego najbardziej potrzebował. Tak trzymaj!

♠ **Gryffindor!** Bardzo możliwe, że przez odległość $d(P, Q)$ rozumiesz długość najkrótszego odcinka łączącego jakiś punkt $u \in P$ z jakimś punktem $v \in Q$ (rys. 1). Wtedy $d(A, B) = 2$, $d(C, D) = 1$, natomiast dowolne dwie przecinające się koła są w zerowej odległości. Brawo! Pamiętaj tylko, że tak określona odległość nie jest *metryką*, czyli nie mierzy, jak bardzo dwa koła się różnią – dwa koła mogą się różnić diametralnie, a nadal być odległe o 0.



Rys. 1. Według typowego Gryfona powyższe koła są odległe o 3, gdyż taką długość ma najkrótszy odcinek je łączący

♦ **Ravenclaw!** Niewykluczone, że Twoje rozumienie $d(P, Q)$ pokrywa się z odległością zdefiniowaną przez Felixa Hausdorffa (1868–1942). Mierzysz, o ile trzeba powiększyć koło P , żeby pochłonęło Q , potem odwrotnie – o ile należy powiększyć Q – a na koniec wybierasz większą z tych dwóch wielkości (rys. 2). Wtedy $d(A, B) = 6$, $d(C, D) = 3$ oraz $d(E, F) = 2$, $d(F, G) = 1$. Świetnie!

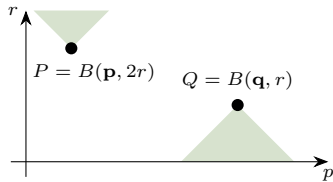


Rys. 2. Żeby lewe koło pokryło prawe, trzeba zwiększyć promień o 3, natomiast żeby prawe pokryło lewe – aż 5. Według Krukonów koła te są więc odległe o 5

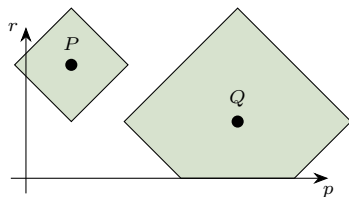
Dzięki opisanej tu *metryce Hausdorffa* można mierzyć odległość między różnymi zbiorami, ale w przypadku kół łatwo ją wyrazić jawnym wzorem. Jeśli dane są koła $P = B(\mathbf{p}, r_1)$ i $Q = B(\mathbf{q}, r_2)$ (\mathbf{p}, \mathbf{q} to ich środki, a r_1, r_2 – promienie), to widać, że najmniejsze koło o środku w \mathbf{p} i zawierające Q ma promień $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + r_2$; koło P trzeba więc powiększyć o $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + r_2 - r_1$ (lub 0, jeśli ta liczba jest ujemna). Podobnie koło Q trzeba powiększyć o $\max(0, |\mathbf{p} - \mathbf{q}| + r_1 - r_2)$, jako większą z tych liczb otrzymujemy więc $d(P, Q) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| + |r_1 - r_2|$.

Pojęcie odległości (bardziej fachowo: metryki) pozwala myśleć o zbiorze wszystkich kół na płaszczyźnie jako o *przestrzeni*, a o kołach jako o jej *punktach*. Jest jasne, że odległość Hausdorffa $d(P, Q)$ jest zerowa jedynie wtedy, gdy koła P i Q są identyczne; spełniona jest też nierówność trójkąta:

Zadanie 1. Uzasadnić, że jeśli $B(\mathbf{p}_1, r_1) \subseteq B(\mathbf{p}_2, r_2 + a)$ oraz $B(\mathbf{p}_2, r_2) \subseteq B(\mathbf{p}_3, r_3 + b)$, to $B(\mathbf{p}_1, r_1) \subseteq B(\mathbf{p}_3, r_3 + a + b)$. Wnioskować, że nierówność trójkąta jest spełniona dla metryki Hausdorffa.

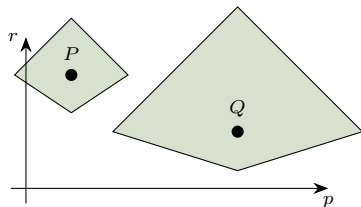


Rys. 3. Punkt P reprezentuje pewne koło, a obszar zaznaczony powyżej niego odpowiada wszystkim kołom zawierającym P . Podobnie punkt Q to koło o dwukrotnie mniejszym promieniu niż P , a obszar poniżej to wszystkie koła zawierające się w Q .



Rys. 4. Zaznaczono wszystkie koła odległe (w metryce Hausdorffa) od P o najwyżej r oraz te odległe od Q o najwyżej $2r$.

Więcej o pożytkach z rozpatrywania odległości niezależnej od skali: Stephen Semmes, *Metric Spaces and Mappings Seen at Many Scales*, str. 401–404 załącznika B w: Michaił Gromow, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, 2007.



Rys. 5. Zaznaczono koła odległe (w metryce opisanej wzorem (♣)) od P o najwyżej $0,4$ oraz te odległe od Q o najwyżej $1,2$.

$d(P, Q) \leq d(P, S) + d(S, Q)$ dla wszystkich P, Q, S (zad. 1). Te własności powodują, że d można śmiało wykorzystywać do opisu geometrii przestrzeni kół.

Okazuje się, że jest to geometria dobrze nam znana. Przyporządkujemy mianowicie kołu $B(\mathbf{p}, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ (o środku w $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$) trójkę liczb (p_1, p_2, r) , a więc punkt w górnej połowie przestrzeni \mathbb{R}^3 . Pomijając jeden wymiar, możemy wtedy reprezentować przestrzeń kół jak na rysunku 3. Możemy też zilustrować wybraną metrykę, wybierając punkt P (czyli jakieś koło) i promień $R > 0$, a następnie rysując obszar odpowiadający wszystkim punktom-kołom odległym od P o najwyżej R (rys. 4). Jak wspomniałem, na rysunku brakuje jednego wymiaru, a w rzeczywistości taki obszar ma kształt podwójnego stożka. Jeśli jednak chcąc interpretować dosłownie rysunki 3 i 4, to są one reprezentacją przestrzeni odcinków postaci $(p - r, p + r) \subseteq \mathbb{R}$ z metryką Hausdorffa; odcinki takie są jednowymiarowym odpowiednikiem kół.

Tutaj należy nadmienić, że odcinki w \mathbb{R} , koła w \mathbb{R}^2 , kule w \mathbb{R}^3 oraz obszary jak te z rysunku 4 obejmujemy wspólną nazwą *kul*. W każdym z przypadków mamy bowiem do czynienia ze zbiorem wszystkich punktów odległych od zadanego punktu \mathbf{p} o najwyżej r – zmianie ulega jedynie sens słów *punkt* i *odległość*.

Zanim przejdziemy do ostatniej możliwości, wspomnijmy o tak zwanej odległości euklidesowej: $d(P, Q) = \sqrt{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2 + |r_1 - r_2|^2}$ dla $P = B(\mathbf{p}, r_1)$, $Q = B(\mathbf{q}, r_2)$. Choć różni się ona od odległości Hausdorffa, to są one porównywalne (jedna nigdy nie przekracza dwukrotności drugiej) i obie prowadzą do udzielenia dwóch odpowiedzi \diamond . Geometria związana z odległością euklidesową jest za to dużo bogatsza; z tego też powodu używamy jej na co dzień.

♣ Slytherin! Najwyraźniej uznajesz, że zastosowanie jednokładności nie zmienia odległości między kołami. Jeśli więc koła C, D tworzą konfigurację taką jak A, B , tylko w dwa razy mniejszej skali, to są w tej samej odległości; podobnie mają się E, F do F, G . W wielu problemach geometrycznych taki punkt widzenia się opłaca, wszak wszelkie jakościowe zależności – rozłączność, zawieranie, styczność dwóch kół etc. – nie zależą od skali. Jak przekonuje Stephen Semmes, idea ta jest też pożyteczna w analizie matematycznej. Jesteś w dobrym towarzystwie!

Interesująca nas metryka nie jest tak łatwa w opisie, ale jak się przekonamy, zawiera w sobie klucz do Komnaty Tajemnic – geometrii hiperbolicznej.

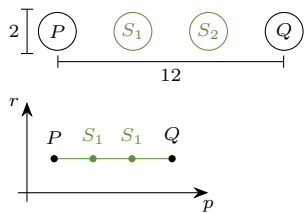
O metryce Ślizgonów. Żeby ją znaleźć, spróbujemy przeformułować metrykę Hausdorffa w sposób niezmienniczy ze względu na skalowanie: zamiast patrzeć, o ile trzeba powiększyć koło P dla pokrycia Q , zbadamy, *ilukrotnie* trzeba je powiększyć. Jeśli jak poprzednio przyjmiemy $P = B(\mathbf{p}, r_1)$, $Q = B(\mathbf{q}, r_2)$, to tym czynnikiem jest $\alpha_1 = \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + r_2}{r_1}$; symetrycznie określamy α_2 jako skalę powiększenia Q . Wydaje się naturalne, że za odległość przyjmuje się większą z liczb α_1, α_2 , ale wynik takiej operacji jest zawsze nie mniejszy od 1, nawet gdy $P = Q$. Sytuację można poprawić na różne sposoby, na przykład od $\max(\alpha_1, \alpha_2)$ odejmując jedynekę, jednak zobaczymy, że najlepiej jest wziąć logarytm (powiedzmy, że naturalny). Prowadzi to do następującej metryki:

$$(\clubsuit) \quad d(P, Q) = \log \left(\frac{|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + \max(r_1, r_2)}{\min(r_1, r_2)} \right) = \log \left(1 + \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{q}| + |r_1 - r_2|}{\min(r_1, r_2)} \right).$$

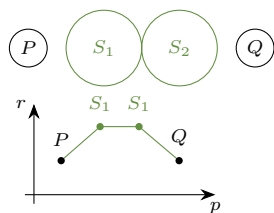
Geometria opisana odległością zdefiniowaną wyżej nosi nazwę *geometrii hiperbolicznej*. W pozostałej części artykułu przyjrzymy się jej bliżej.

Odnotujmy na początek, że $d(A, B) = \log(3) = d(C, D)$ oraz $d(E, F) = \log(2) = d(F, G)$, co potwierdza wybór dwóch \clubsuit . Ogólną ilustrację wybranej metryki widzimy na rysunku 5. Nie powinno nas dziwić, że zaznaczone obszary („kule”) nie dochodzą do prostej $r = 0$. Prosta ta jest „nieskończenie daleko” z punktu widzenia naszej metryki. Dlatego też, chociaż modelem przestrzeni kół jest dla nas półprzestrzeń – lub półpłaszczyzna, jeśli badamy przypadek jednowymiarowy – to interesująca nas przestrzeń jest nazywana *przestrzenią hiperboliczną*, a wymiar niżej – *płaszczyzną hiperboliczną*. Czytelnikowi polecam

Zadanie 2. Uzasadnić, że jeśli $\alpha, \beta \geq 1$, $B(\mathbf{p}_1, r_1) \subseteq B(\mathbf{p}_2, \alpha r_2)$ oraz $B(\mathbf{p}_2, r_2) \subseteq B(\mathbf{p}_3, \beta r_3)$, to $B(\mathbf{p}_1, r_1) \subseteq B(\mathbf{p}_3, \alpha\beta r_3)$. Wywnioskować, że nierówność trójkąta jest spełniona dla metryki (\clubsuit).



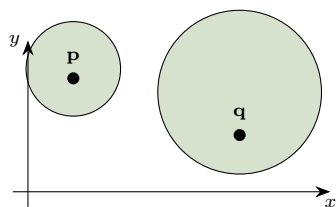
Rys. 6. Środki kół jednostkowych P, Q są odległe o 12. Zaproponowana łamana łącząca P i Q ma długość $\log(125)$



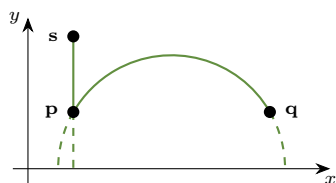
Rys. 7. Najkrótsza trzyczęściowa łamana łącząca P i Q ma długość $\log(108)$. Wykorzystuje ona koła o tych samych środkach co poprzednio, ale dwukrotnie większym promieniu

Przykład. Jeśli ustalimy koło X i rozważymy wszystkie koła odległe od niego o R , to da się wśród nich znaleźć (dla dużych R) około e^R kół wzajemnie odległych o co najmniej 1. Warto to zestawić z geometrią euklidesową, w której okrąg o promieniu R ma długość $2\pi R$, więc punktów oddzielonych o 1 jest jedynie około R .

Opisaną obok analogię optyczną wymyślił w 1696 roku Johann Bernoulli. Wykorzystał ją do znalezienia kształtu brachistochrony, przyjmując prędkość światła w (x, y) proporcjonalną do \sqrt{y} . Rozwiązanie to można zobaczyć na kanale 3Blue1Brown na YouTube: *The Brachistochrone, with Steven Strogatz*, youtu.be/Cld0p3a43fU.



Rys. 8. Kule w metryce d_{\clubsuit} : o środku \mathbf{p} i promieniu 0,4; o środku \mathbf{q} i promieniu 1,2. Warto odnotować, że są podobne kształtem i rozmiarem do kul w metryce d_{\spadesuit} (rys. 5)



Rys. 9. Krzywe geodezyjne prowadzą z punktu \mathbf{p} do \mathbf{q} i \mathbf{s}

samodzielnie poeksperymentować z pomocą komputera i zaobserwować, jakie kształty da się otrzymać, rozważając obszary jak na rysunku 5. Warto też sprawdzić, że spełniona jest nierówność trójkąta (zad. 2).

Rzut oka na geodezyjne. Rozważmy następujący problem: dla kół P, Q z rysunku 6 (o promieniu 1 i środkach odległych o 12) wskazać koła S_1, S_2 w taki sposób, by długość łamanej $[P, S_1, S_2, Q]$ – mierzona jako suma odległości między kolejnymi wierzchołkami łamanej – była najmniejsza. Na rysunku 6 od razu widać narzucające się rozwiązanie: za S_1, S_2 przyjmujemy koła jednostkowe położone w równych odstępach między P, Q ; na półpłaszczyźnie ilustrującej przestrzeń kół odpowiada to „prostej” łamanej. Jej łączna długość to $3 \cdot \log(1+4)$, czyli $\log(125)$.

Ale da się lepiej! Optymalnym rozwiązaniem okazują się koła o tych samych środkach, ale promieniu 2 (rys. 7). Taka łamana ma długość $2 \cdot \log(4+2) + \log(\frac{4+2}{2})$, czyli $\log(108)$. To oczywiście nieznacznie mniej, jednak łatwo znaleźć bardziej jaskrawe przykłady. Gdyby koła P, Q rozsunąć na odległość $d > 12$, to optymalnym rozwiązaniem są koła S_1, S_2 o promieniu $d/6$ położone w równych odstępach; dla dużych d daje to łamaną niemal $\frac{3}{2}$ -krotnie krótszą niż ta „prosta”. Gdybyśmy natomiast nasze zadanie zmienili, każąc szukać łamanej o większej liczbie wierzchołków, to zauważylibyśmy przepaść między rozwiązaniem „prostym” a optymalnym.

Standardowa metryka hiperboliczna. Jest wiele przykładów pozwalających uzmysłowić sobie różnicę między geometrią euklidesową a hiperboliczną; jeden można znaleźć na marginesie. Większość z nich wymaga jednak bardziej wyrafinowanej metryki niż ta opisana wzorem (\clubsuit), którą od teraz dla odróżnienia będziemy oznaczać przez d_{\spadesuit} .

Tę „lepszą” metrykę opiszę w oparciu o analogię optyczną. Oderwijmy się od przestrzeni kół i rozważmy światło rozchodzące się w półpłaszczyźnie $y > 0$ (choć tę samą konstrukcję można powtórzyć w dowolnym wymiarze). Jeśli przyjmijemy, że jego prędkość jest stała i wszędzie wynosi 1, to czas, w którym światło pokonuje daną krzywą, jest po prostu długością tej krzywej. Pokonując drogę z punktu \mathbf{p} do \mathbf{q} , światło zgodnie z zasadą Fermata „wybiera” najszybszą drogę, czyli odcinek łączący te punkty, i zabiera mu to $|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$ czasu – jest to metryka euklidesowa. Wyobraźmy teraz sobie, że półpłaszczyzna $y > 0$ jest wypełniona niejednorodnym ośrodkiem, a w punkcie (x, y) światło ma prędkość y . Wtedy najszybsza droga z punktu do punktu, nazywana *krzywą geodezyjną*, zazwyczaj nie prowadzi po odcinku (rys. 9). Czas potrzebny na dotarcie z \mathbf{p} do \mathbf{q} oznaczmy przez $d_{\mathbb{H}}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i to jest właśnie standardowa metryka hiperboliczna. Da się ją wyrazić wzorem:

$$d_{\mathbb{H}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \log \left(\frac{|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{q}}| + |\mathbf{p} - \mathbf{q}|}{|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{q}}| - |\mathbf{p} - \mathbf{q}|} \right), \quad \text{gdzie } \overline{(x, y)} = (x, -y).$$

Do metryki d_{\spadesuit} ma się mniej więcej tak, jak metryka euklidesowa ma się do tej danej wzorem $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Są one porównywalne – wyniki pomiarów $d_{\mathbb{H}}$ i d_{\spadesuit} różnią się najwyżej dwukrotnie – ale $d_{\mathbb{H}}$ ma szereg przewag. Kule w tej metryce – czyli obszary analogiczne do tych z rysunków 4 i 5 – mają gładki kształt, a dokładnie są kołami (rys. 8). Łatwo wykaże to Czytelnik znający okręgi Apoloniusza (zob. *Deltooid* w Δ_{13}^1). Krzywe geodezyjne przyjmują kształt pionowych półprostych oraz półokręgów o średnicy leżącej na osi x (rys. 9) – to z kolei Czytelnik może wyprowadzić z prawa załamania światła. Kształt geodezyjnych nie powinien zaskakiwać, bo światło „omiija” obszar niższej prędkości. Jednocześnie wyjaśnia on fenomen zakrzywienia optymalnych łamanych, który widzieliśmy wcześniej.

Po wizycie w Komnacie Tajemnic Czytelnik jest dobrze przygotowany, by samodzielnie zgłębiać dalsze tajniki geometrii hiperbolicznej. Oczywiście warto zacząć od *Delty* – pod hasłami *plaszczyzna hiperboliczna* czy też *Bolyai–Łobaczewskiego* – ale możliwe jest też doświadczenie tej geometrii niejako od środka, poprzez gry komputerowe oparte na geometrii hiperbolicznej: *HyperRogue* i *Hyperbolica*.

Jak rozwiązać równanie?

Marek W. GUTOWSKI*

*Instytut Fizyki PAN

W artykule Δ_{22}^4 pisałem o interwałach i rachowaniu na nich, czyli *analizie interwałowej (przedziałowej)*. Niniejszy esej ma na celu zbadanie użyteczności metod analizy interwałowej do rozwiązywania dowolnych równań algebraicznych, względnie układów takich równań.

Matematycy od dawna zajmowali się sposobami rozwiązywania równań. Znalaziono na przykład wzory na pierwiastki równań kwadratowych, wielomianowych trzeciego i czwartego stopnia – ale nie wyższego. Jednak skoro nie da się rozwiązać danego równania analitycznie, to konieczne staje się użycie metod numerycznych. Powstały więc całkiem liczne algorytmy pozwalające znajdować dobre *przybliżenia* poszukiwanych pierwiastków. Można tu wymienić metodę znaną pod łacińską nazwą *regula falsi* czy szybciej zbieżną metodę Newtona. Problem w tym, że rozwiązanie równania polega na znalezieniu *wszystkich* jego pierwiastków lub wykazaniu, że takowe nie istnieją. Tymczasem wynik metody Newtona zależy od wyboru pierwszego przybliżenia (punktu startowego), a bywa, że procedura okazuje się rozbieżna. Co więcej, nawet jeśli uzyskamy zbieżność, to do jednego rozwiązania – bez żadnych wskazówek, czy jest ono jedyne.

Tu proponujemy metodę opartą na prostym spostrzeżeniu. Otóż jeśli potrafimy obliczyć przedziały wartości lewej (L) i prawej (P) strony naszego równania $L(x) = P(x)$ dla badanego przedziału wartości poszukiwanej niewiadomej x i część wspólna owych dwóch przedziałów okaże się zbiorem pustym, to w badanym przedziale x z całą pewnością nie ma rozwiązania. Oczywiście w przeciwnym wypadku nie mamy gwarancji, że testowany przedział x zawiera choć jedno rozwiązanie. O tym, jak wyliczamy wspomniane przedziały $L(x)$ i $P(x)$ w przypadku, gdy są to jakieś wyrażenia algebraiczne, lub nawet bardziej skomplikowane funkcje, pisaaliśmy w Δ_{22}^4 .

Na początku startujemy z przedziału, w którym spodziewamy się znaleźć rozwiązanie. Jeśli nasze informacje (czy przypuszczenia) co do lokalizacji rozwiązania są mało precyzyjne, to nie ma przeszkód, aby przedział startowy powiększyć. Będziemy pracować na liście przedziałów \mathcal{L} , której początkowo jedynym elementem będzie nasz przedział startowy. Poza tym musimy jeszcze zdefiniować dokładność ε , z jaką chcemy znaleźć poszukiwany pierwiastek (pierwiastki). Ciąg dalszy jest prosty.

Pierwszy etap:

1. Jeśli lista \mathcal{L} jest pusta, to przechodzimy do drugiego etapu.
2. Pobieramy najszerszy przedział z listy \mathcal{L} . Jeśli jego szerokość nie przewyższa ε , to przechodzimy do drugiego etapu. W przeciwnym razie usuwamy pobrany element z listy \mathcal{L} .
3. Pobrany przedział dzielimy na dwie połówki i zaokrąglamy górną granicę lewego podprzedziału w górę, a dolną granicę prawego w dół.

4. Wykonujemy wcześniej opisany test na obecność rozwiązania kolejno na obu podprzedziałach. Jeśli test nie wyklucza obecności rozwiązania, to dany podprzedział dopisujemy do listy \mathcal{L} ; w przeciwnym razie testowany podprzedział idzie w zapomnienie.
5. Wracamy do punktu 1.

Drugi etap:

Jeśli lista \mathcal{L} jest pusta, to znaczy, że w startowym przedziale badane równanie nie ma żadnego rozwiązania. Ta wiadomość jest pewna, choć zapewne nie na taką liczyliśmy. Jeśli jednak lista \mathcal{L} zawiera więcej niż jeden element, to mamy co robić. Trzeba mianowicie wykryć wszystkie grupy przedziałów wzajemnie przekrywających się (to możliwe, bo przecież zaokrąglaliśmy granice podziałów!). A już na pewno tak się zdarzy, jeśli nasze równanie ma kilka różnych rozwiązań zlokalizowanych w przedziale startowym. Możliwe jednak, że nawet w przypadku pojedynczego rozwiązania na liście \mathcal{L} pozostanie nam więcej niż jeden przedział. Jako wynik końcowy wypisujemy powłoki wypukłe (patrz dalej) kompletnej grup wzajemnie połączonych małych przedziałów.

A jak poradzimy sobie z układem kilku równań? Właściwie tak samo jak z pojedynczym równaniem. Różnica polega na tym, że zamiast przedziałów na osi liczbowej testujemy wielowymiarowe kostki interwałowe opisujące zakresy wszystkich poszukiwanych niewiadomych. W literaturze takie obiekty zwykle nazywane są *kostkami* lub *pudełkami*. Kostka odpada z dalszych rozważań, jeśli choć jedno równanie na pewno nie może być w niej spełnione. No dobrze, ale która kostka na liście \mathcal{L} jest największa, czyli pierwsza w kolejności do testowania? To proste: ta o największej średnicy. A średnica interwałowej kostki jest zdefiniowana jako długość jej najdłuższej krawędzi. Tylko jak porównać długości krawędzi wyrażonych w różnych jednostkach fizycznych, np. jedna w sekundach, a druga w metrach? Sposób jest nieskomplikowany: mierzymy te długości w ustalonych wcześniej żądanych dokładnościach, czyli posługujemy się wielkościami bezwymiarowymi.

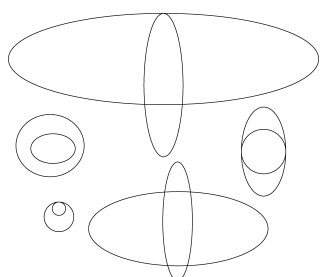
No dobrze, ale jak podana metoda działa w praktyce?

Wikipedia (en.wikipedia.org/wiki/Regula_falsi, ostatnio aktualizowana 26 listopada 2022 r.) podaje rozwiązanie równania $\cos(x) = x^3$ jako: $x = 0,865\,474\,033\,101\,614$ z dokładnością 5×10^{-15} . Tymczasem nasza metoda, z nieco gorszą dokładnością $\varepsilon = 10^{-14}$, wyprodukowała interwał: $[0,865\,474\,033\,101\,523, 0,865\,474\,033\,101\,690]$ (startując z przedziału $[0, 1]$). Otrzymaliśmy ten wynik po przeanalizowaniu 356 przedziałów. W drugim etapie

okazało się, że 45 „małych” przedziałów tworzy pojedynczą grupę. Wynik końcowy otrzymaliśmy po 4 milisekundach. Jak widać, nie osiągnęliśmy żądanej dokładności, ale jednocześnie widzimy, że wynik z Wikipedii mieści się w naszym (gwarantowanym) przedziale. A nie próbowaliśmy powtórzyć wyniku z Wikipedii? Owszem, próbowaliśmy, ale w pierwszym podejściu skończyła nam się pamięć przeznaczona na listę \mathcal{L} . Kiedy zarezerwowaliśmy na listę \mathcal{L} dużo więcej, bo 4 096 000 pozycji, to i tak okazało się za mało, a czas obliczeń wyniósł 155 231 sekund, czyli ponad 43 godziny! Wszystkie „małe” przedziały tworzyły pojedynczą grupę o sumarycznym rozmiarze tylko nieznacznie mniejszym od tego otrzymanego przy raptem dwukrotnie gorszej dokładności. Cóż to znaczy? Ano tyle, że wynik podziału niewielkiego przedziału (po niezbędnych zaokrągleniach) to dwa

nowe przedziały praktycznie identyczne z wyjściowym. W każdym razie warto zapamiętać, że komputerowe liczby podwójnej precyzji zawierają co najwyżej 13 poprawnych dziesiętnych cyfr znaczących, a nie 15–16, jak podają niektórzy autorzy.

Eksperymenty z układami dwóch równań, każde oddzielnie opisujące elipsę (patrz rysunek), okazały się jeszcze bardziej zaskakujące. O ile przypadki zawierające 0, 1, 2 czy 4 rozwiązania były łatwe, to 3 rozwiązania (patrz rysunek) okazały się kłopotliwe. Nie dość, że zabrakło miejsca na liście \mathcal{L} (ponad 2 miliony pozycji), to znaleźliśmy na niej 7 rozłącznych grup, każda zawierająca prawie 300 tysięcy kostek. Dalsza analiza każdej z tych grup oddzielnie wykazała, że cztery z nich na pewno nie zawierają żadnego rozwiązania.



Dwie elipsy mogą mieć 0, 1, 2, 3 lub 4 punkty wspólne

Wady i zalety

Niewątpliwą zaletą jest znalezienie wszystkich rozwiązań w rozważanym przedziale. Ale bądźmy szczerzy: to nie są rozwiązania, a jedynie kandydaci na rozwiązania. Nie możemy też mieć pewności, że konkretna grupa połączonych przedziałów zawiera tylko jednego takiego kandydata. Z drugiej strony metoda jest uniwersalna, gdyż nie wymaga, aby funkcje występujące po obu stronach równania były gładkie (różniczkowalne). A nawet mogą być nieciągłe. Trudno jest też rzetelnie przewidzieć złożoność obliczeniową prezentowanej metody. Z pewnością w pierwszym podejściu nie warto upierać się przy zbyt dużej dokładności.

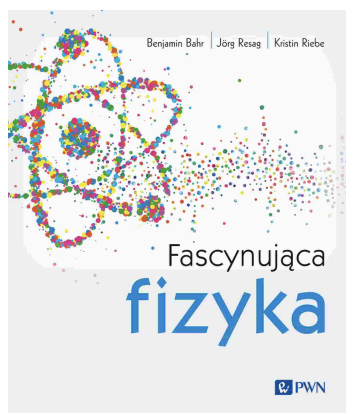
Fascynująca fizyka recenzja

Fascynująca fizyka. Już sam tytuł książki oddaje esencję tego, co czeka Czytelnika po jej otwarciu. Autorzy zabierają nas bowiem w bogato ilustrowaną podróż przez świat fizyki współczesnej i najnowszych badań do najgłębszych zakątków Wszechświata, a także odpowiadają na najbardziej klasyczne pytania o otaczające nas zjawiska.

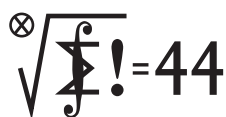
Co przykuwa uwagę i niewątpliwie zachęca do lektury, to forma, która wyróżnia się na tle innych popularnonaukowych pozycji wydawniczych. Autorzy, zamiast podążać konwencjonalną ścieżką długich rozdziałów, oferują krótkie, zwarte rozważania na temat różnorodnych aspektów fizyki. Każde zagadnienie zajmuje dwie strony, a Czytelnik ma możliwość przemieszczania się między tematami, korzystając z odnośników, w zależności od własnych zainteresowań. Taka struktura sprawia, że *Fascynująca fizyka* nie jest typową lekturą do czytania od deski do deski. Zamiast tego możemy wybierać konkretne obszary, które nas fascynują, wędrując od codziennych zjawisk poprzez fizykę cząstek aż po najgłębsze zakątki kosmosu. I tak, zaczynając od rozdziału *Czy można zobaczyć dźwięki?*, ani się obejrzymy, jak przez *Manewry rakiet* dotrzemy do *Dipola Hertza*. Niewątpliwym atutem książki jest także sposób, w jaki Autorom udało się wyważyć wywołanie ciekawości u Czytelnika, jednocześnie dostarczając sporą garść solidnych i rzetelnych informacji. To podejście nie tylko ułatwia zrozumienie skomplikowanych koncepcji fizycznych, ale też sprawia, że lektura staje się dynamicznym i wciągającym doświadczeniem.

Zanim napisałam ostatnie zdanie tej recenzji, zaniósłam książkę do szkoły, w której prowadzę zajęcia, i zostawiłam na widoku w pracowni fizycznej. Na każdej przerwie zbierał się wokół niej wianuszek uczniów, którzy z ciekawością wertowali kolejne strony, wydając z siebie tylko pojedyncze słowa: *Wow! Kwazary! O! ...a o tym mieliśmy na kółku, wiedziała Pani, że to jest w tej książce?* Dlatego ostatnie zdanie tej recenzji brzmi: warto być jak dzieci i fascynować się fizyką, a opisana tu pozycja bardzo to ułatwia.

Agnieszka CHUDEK



Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 871 ($WT = 1,99$) i 872 ($WT = 1,56$) z numeru 12/2023

| | | |
|------------------|----------|-------|
| Janusz Fiett | Warszawa | 45,81 |
| Piotr Wiśniewski | Warszawa | 44,36 |
| Paweł Kubit | Kraków | 43,55 |
| Łukasz Merta | Kraków | 40,97 |
| Adam Woryna | Ruda Śl. | 40,91 |
| Piotr Kumor | Olsztyn | 40,44 |
| Szymon Kitowski | | 37,83 |
| Witold Bednarek | Łódź | 34,12 |
| Krzysztof Zygan | Lubin | 32,74 |

Pan Janusz Fiett, Weteran już od paru lat, właśnie po raz czwarty miją linię 44 p. A pana Piotra Wiśniewskiego witamy w Klubie 44 M.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2024

Przypominamy treść zadań:

877. Wyjaśnić, czy istnieje na płaszczyźnie konfiguracja pięciu różnych punktów A, B, C, P, Q , w której zachodzą równości

$$PA = AB = BQ, \quad PB = BC = CQ, \quad PC = CA = AQ,$$

a punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta

- (a) ostrokątnego,
(b) rozwartokątnego.

878. Znaleźć liczbę naturalną $r > 2$, dla której istnieje nieskończenie wiele r -elementowych zbiorów różnych liczb pierwszych $\{p_1, \dots, p_r\}$ takich, że każda z liczb $2^{p_i-1} - 1$ ($i = 1, \dots, r$) jest podzielna przez iloczyn $p_1 \dots p_r$. Im większa liczba r , tym cenniejsze rozwiązanie.

877. Oba warianty – odpowiedź *tak*. W podanych niżej przykładach przyjmujemy punkt C za środek ustalonego okręgu Ω (o dowolnym promieniu), na którym umieszczamy pozostałe cztery punkty:

- (a) punkty P, A, B, Q leżą na okręgu Ω w tym porządku, w odległościach kątowych $\sphericalangle PCA = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BCQ = 30^\circ$;
(b) punkty P, B, A, Q leżą na okręgu Ω w tym porządku, w odległościach kątowych $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACQ = 60^\circ$, $\sphericalangle BCA = 150^\circ$.

Czytelnikom zostawiamy przyjemność naszkicowania tych układów i przekonania się, że wskazane konfiguracje faktycznie spełniają postawione warunki.

[Ciekawostka: są to (w obu przypadkach) *jedyne* takie konfiguracje, z dokładnością do podobieństwa oraz cyklicznej permutacji symboli A, B, C].

878. Autor zadania, Piotr Kumor, proponuje rozwiązanie dla $r = 4$ z użyciem liczb Fermata $F_n = 2^{2^n} + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Zaczniemy więc od przypomnienia niektórych ich własności (zapewne znanych Czytelnikom; krótkie uzasadnienia – dla kompletności):

- W1. $F_n = 2 + F_0 F_1 \dots F_{n-1}$ (banalna indukcja).
W2. Liczby F_n są parami względnie pierwsze (wniosek z W1).
W3. Żadna z liczb F_n nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym od 1.

Uzasadnienie W3: przypuśćmy, że $F_n = a^t$ ($t > 1$); jasne, że t nie może być potęgą dwójki, więc ma dzielnik nieparzysty s ; liczba $2^{2^n} = a^t - 1$ dzieli się przez $a^s - 1 = (a - 1)(a^{s-1} + \dots + a + 1)$; to jednak niemożliwe, bo suma w drugim nawiasie jest nieparzysta.

Właściwe rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że aby uzyskać tezę dla $r = 4$, wystarczy wykazać, że dla nieskończenia wielu wykładników w można znaleźć różne liczby pierwsze p_1, p_2, p_3, p_4 spełniające warunki:

$$(*) \quad w \mid p_i - 1, \quad p_i \mid 2^w - 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4.$$

To faktycznie wystarczy, bowiem wówczas każda z liczb $2^{p_1-1} - 1, \dots, 2^{p_4-1} - 1$ dzieli się przez $2^w - 1$, więc też przez każdą z liczb p_1, \dots, p_4 , więc i przez ich iloczyn.

Przydatna będzie kolejna, mniej banalna, własność liczb Fermata:

W4. Jeśli $p \mid F_n$ (p – liczba pierwsza; $n \geq 2$), to $2^{n+2} \mid p - 1$.

Dowód. Niech δ_n będzie najmniejszym wykładnikiem (> 1), dla którego $2^{\delta_n} \equiv 1 \pmod{p}$. Ponieważ $2^{2^n} \equiv -1$, zatem $2^{2^{n+1}} \equiv 1$, co pokazuje, że $\delta_n = 2^{n+1}$. Także $2^{p-1} \equiv 1$ (małe tw. Fermata), więc $\delta_n \mid p - 1$, czyli $2^{n+1} \mid p - 1$. Skoro $n \geq 2$, liczba p ma postać $p = 8m + 1$ (dla pewnego naturalnego m). Ma więc miejsce przystawanie (mod p):

$$\begin{aligned} (4m)! &= \prod_{k=1}^{2m} (2k)(1-2k) \equiv \\ &\equiv \prod_{k=1}^{2m} (2k)(8m+2-2k) = \prod_{k=1}^{4m} (2k) = 2^{4m} (4m)! \end{aligned}$$

Uzyskaną kongruencję wolno podzielić przez $(4m)!$ ($\perp p$), otrzymując $2^{4m} \equiv 1$. Tak więc $\delta_n \mid 4m$, czyli $2^{n+1} \mid 4m$, skąd $2^{n+2} \mid 8m$. To kończy dowód własności W4 (znanej pod nazwą *twierdzenie Lucasa*).

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że F_n i F_{n+1} są liczbami złożonymi. Z własności W2 i W3 wynika, że iloczyn $F_n F_{n+1}$ ma co najmniej cztery różne dzielniki pierwsze p_1, p_2, p_3, p_4 . Na mocy własności W4 każda z liczb $p_i - 1$ dzieli się przez 2^{n+2} . Biorąc $w = 2^{n+2}$, mamy (dla $i = 1, 2, 3, 4$) pierwszą podzielność (*). Druga też zachodzi, bowiem $2^w - 1 = F_{n+2} - 2 = F_0 F_1 \dots F_{n+1}$ (własność W1), a ten iloczyn dzieli się przez $F_n F_{n+1}$, więc i przez te cztery liczby pierwsze. (Warto zauważyć, że są one większe niż 2^{n+2}).

Jeżeli istnieje nieskończenie wiele liczb n , dla których F_n i F_{n+1} są liczbami złożonymi, to – zgodnie z akapitem otaczającym warunki (*) – dostajemy obiecaną tezę dla $r = 4$.

Jednak nikt nie wie, czy jest nieskończenie wiele takich par. Przyjmijmy więc, że nie; czyli że istnieje taka liczba M , że dla każdego $n > M$ co najmniej jedna z liczb F_n, F_{n+1} jest liczbą pierwszą. Można przyjąć, że $M \geq 3$, wtedy $2^n \geq n + 9$ dla $n > M$. Ustalmy taki numer n . Wśród dziewięciu liczb F_n, \dots, F_{n+8} są co najmniej cztery liczby pierwsze p_1, p_2, p_3, p_4 . Ponownie sprawdzimy warunek (*), biorąc tym razem $w = 2^{n+9}$. Każda z czterech liczb p_i jest pewną liczbą F_{n+j} ($0 \leq j \leq 8$), zatem $p_i - 1 = 2^{2^{n+j}}$ dzieli się przez 2^{n+9} , czyli przez w .

To pierwsza podzielność (*). Drugą uzasadniamy podobnie jak poprzednio: $2^w - 1 = F_{n+9} - 2 = F_0 F_1 \dots F_{n+8}$ (własność W1), a ten iloczyn dzieli się przez te cztery liczby pierwsze. Mogą one być dowolnie wielkie, skoro M może być dowolnie wielkie.

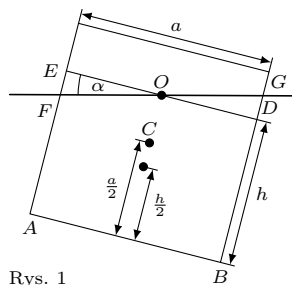
To ostatecznie kończy dowód tezy dla $r = 4$: istnieją *czwórki* dowolnie wielkich liczb pierwszych o wymaganych w zadaniu własnościach.

Klub 44 F

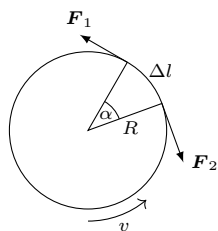


Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
768 (*WT* = 2,76), 769 (*WT* = 1,3)
z numeru 12/2023

| | | |
|---------------------|-------------|---------|
| Jacek Konieczny | Poznań | 40,41 |
| Ryszard Baniewicz | Wrocław | 1-39,99 |
| Konrad Kapcia | Poznań | 2-35,60 |
| Paweł Perkowski | Ożarów Maz. | 5-33,59 |
| Andrzej Nowogrodzki | Chocianów | 3-23,69 |
| Jan Zambrzycki | Białystok | 4-19,67 |



Rys. 1



Rys. 2

775. Aby w gumowej taśmie mogła rozchodzić się sprężysta fala poprzeczna, taśma musi być naciągnięta. W naszym zadaniu siła naciągu taśmy wywołana jest przez jej ruch obrotowy.

Rozważmy mały element taśmy o długości $\Delta l = R\alpha$ i masie $\Delta m = \rho S \Delta l$ (rys. 2), gdzie ρ jest jego gęstością a S polem przekroju poprzecznego. Działają na niego sąsiednie elementy siłami \mathbf{F}_1 i \mathbf{F}_2 , stycznych do taśmy. Wartość F tych sił jest szukanym naciągiem taśmy, a ich wypadkowa nadaje rozważanemu elementowi przyspieszenie dośrodkowe v^2/R . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki

$$F\alpha = \rho S R \alpha v^2 / R,$$

stąd

$$(4) \quad F = \rho S v^2.$$

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

Rozwiązania zadań z numeru 3/2024

Przypominamy treść zadań:

774. Długi klocek o podstawie kwadratowej pływa w wodzie tak, że jedna z jego powierzchni bocznych znajduje się nad powierzchnią wody i jest do niej równoległa, a klocek znajduje się w stanie równowagi trwałej. Dla jakiej gęstości materiału, z którego wykonano klocek, jest to możliwe?

775. Cienki pierścień gumowy rozkręcono wokół osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny pierścienia. Prędkość liniowa jego elementów wynosi v . Z jaką prędkością będą rozprzestrzeniać się w tym pierścieniu monochromatyczne fale poprzeczne o małej amplitudzie?

774. Klocek będzie pływał w stanie równowagi trwałej, gdy po obróceniu go o niewielki kąt α (rys. 1) wypadkowy moment sił będzie powodował jego powrót do położenia równowagi.

Wygodnie jest liczyć momenty sił względem podłużnej osi klocka przechodzącej przez środek jego przekroju poprzecznego C (rys. 1), bo względem tej osi moment siły ciężkości wynosi zero.

Moment siły wyporu działającej na część klocka zanurzoną w wodzie jest równy

$$M = M_{OGD} - (M_{ABDE} - M_{OEF}).$$

Oznaczając: $M_{OGD} = M_{OEF} = M_2$, $M_{ABDE} = M_1$, możemy zapisać warunek na trwałość równowagi pływającego klocka:

$$(1) \quad M > 0 \Rightarrow 2M_2 > M_1.$$

Oznaczając długość klocka przez L , a gęstość wody przez ρ , mamy:

$$(2) \quad M_1 = \rho g L a h l_1, \text{ gdzie } l_1 = (a/2 - h/2) \sin \alpha \approx (a/2 - h/2) \alpha,$$

$$(3) \quad M_2 = \rho g L a^2 \text{tg } \alpha l_2 / 8 \approx \rho g L a^2 \alpha l_2 / 8, \text{ gdzie } l_2 \approx 2a/6 + (h - a/2) \alpha.$$

Głębokość h zanurzenia klocka w stanie równowagi znajdujemy z warunku

$$\rho a h L = \rho_x a^2 L, \text{ gdzie } \rho_x \text{ jest gęstością klocka.}$$

Po podstawieniu (2) i (3) do (1) i wprowadzeniu oznaczenia $\rho_x / \rho = x$ dostajemy:

$$x^2 - (1 - \alpha/2)x + (2 - 3\alpha)/12 > 0.$$

Uwzględniając, że α jest małe, a $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, otrzymujemy warunki na gęstość klocka:

$$0 < \rho_x < 0,21 \text{ g/cm}^3 \text{ lub } 0,79 \text{ g/cm}^3 < \rho_x < 1 \text{ g/cm}^3.$$

Szukana prędkość fali jest taka sama jak w przypadku prostoliniowej taśmy, której naciąg F został uzyskany za pomocą sił zewnętrznych.

W inercjalnym układzie odniesienia poruszającym się wzdłuż taśmy z prędkością fali u fala jest nieruchomą sinusoidą, a taśma ślizga się wzdłuż tej sinusoidy w kierunku przeciwnym do kierunku rozchodzenia się fali. Fragment trajektorii małego odcinka taśmy w pobliżu wierzchołka sinusoidy można przybliżyć przez łuk okręgu o promieniu r oparty na kącie φ . Ponieważ amplituda drgań jest mała, możemy napisać:

$$(5) \quad F\varphi = \rho S r \varphi u^2 / r, \text{ stąd } u^2 = F / \rho S.$$

Podstawiając wartość F z (4), otrzymujemy, że prędkość rozchodzenia się fali względem pierścienia równa jest prędkości obrotu pierścienia: $u = v$.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Prosto z nieba: Zmienny obraz czarnej dziury

Filozoficzno-lingwistyczna dyskusja nad tym, czy obraz czarnej dziury powinno się nazywać „cieniem”, czy raczej „obrysem/sylwetką”, wynika z tego, że czarna dziura wpływa na bieg promieni świetlnych, które się w jej okolicy znajdują, tzn. nie tylko „rzuca cień”, ale można powiedzieć, że także aktywnie „kształtuje” swój wizerunek.



Obrazy czarnej dziury M87* z lat 2017 i 2018 z pracy Akiyama i in., „The persistent shadow of the supermassive black hole of M 87 I. Observations, calibration, imaging, and analysis”, A&A 681, A79 (2024)

W 2017 roku instrument EHT (Event Horizon Telescope) – w rzeczywistości nie jeden teleskop, ale interferometr rozmiaru Ziemi składający się z wielu radioteleskopów – wykonał w przedziale fal radiowych określanych jako mikrofałe ($\approx 1,3$ mm) pierwsze „zdjęcie” czarnej dziury, nazwanej M87*. Znajduje się ona w centrum galaktyki Messier 87 (M87) w odległości około 55 milionów lat świetlnych od Ziemi i ma masę 6,5 miliardów M_{\odot} . Rozmiar kątowy obrazu na niebie jest bardzo mały, tylko około 40 mikrosekund łuku, co odpowiada rozmiarowi typowego pączka z dziurką – gdyby takowy znalazł się na powierzchni Księżyca. W rzeczywistości M87* jest tak ogromna, że wewnątrz jej horyzontu zmieściłby się cały Układ Słoneczny wraz z orbitą Plutona.

Jak wiadomo, czarna dziura niejako z definicji nie emituje światła, ale można zobaczyć jej „cień” (lub, jak niektórzy wolą uważać, „obrys” bądź „sylwetkę”) na tle znajdującej się wokół niej świecącej materii. Na rysunku obok obraz przedstawia pierścień – centralne zaciemnienie jest miejscem, w którym znajduje się czarna dziura. Dalsza analiza danych ujawniła również subtelniejszą strukturę obiektu M87* w świetle spolaryzowanym, co daje możliwość poznania geometrii pola magnetycznego i rozkładu plazmy wokół horyzontu czarnej dziury, a także testów teorii grawitacji, czyli ogólnej teorii względności.

Modele teoretyczne zakładają, że rozkład materii wokół M87* zmienia się w mniej więcej losowy sposób, który nie jest silnie skorelowany w czasie. Aby rozdzielić wpływ grawitacji (zakładamy, że mniej więcej stały albo co najmniej zmienny w sposób przewidywalny i w o wiele dłuższych skalach czasowych) i materii (losowo zmienny w krótkich skalach czasowych) na końcowy wynik obserwacji, można wykonać zdjęcie tego samego obiektu w różnych chwilach.

Artykuł opublikowany niedawno przez zespół EHT w Astronomy&Astrophysics (w zespole jest dwoje Polaków – Monika Mościbrodzka z Radboud University w Nijmegen w Holandii oraz Maciek Wielgus z Max Planck Institute for Radioastronomy w Bonn w Niemczech) zawiera nowy obraz M87* z 2018 roku, podobny do tego z 2017. Brak widocznej zmiany w rozmiarze pierścienia w latach 2017–2018 jest zgodny z przewidywaniami ogólnej teorii względności dla silnie ugiętej przez grawitację (soczewkowanej) emisji wokół czarnej dziury. Obrazy różnią się jednak, ponieważ rozkład jasności jest obrócony o około 30° w porównaniu z rokiem 2017. Obrót jest zgodny z oczekiwaną ewolucją świecącej materii – emisji z turbulentnego, nieuporządkowanego dysku akrecyjnego wokół czarnej dziury. Ewolucja świecącej materii była drobiazgowo modelowana komputerowo w wielu symulacjach magnetohydrodynamicznych plazmy znajdującej się w zakrzywionej czasoprzestrzeni, i wydaje się, że dobrze rozumiemy jej zachowanie. Dysk akrecyjny obraca się wokół czarnej dziury, co jest spójne ze zmianą kierunku wielkoskalowego strumienia (dżetu) obserwowanego w dużo dłuższych falach radiowych. Dzięki obserwacjom EHT już wkrótce będzie możliwe dużo lepsze zrozumienie mechanizmu powstawania takich dżetów w okolicach supermasywnych czarnych dziur.

Michał BEJGER

Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN,
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy



Niebo w lipcu

Na początku miesiąca dni są jeszcze długie, a ich skracanie się nie jest zauważalne. 23 lipca Słońce przekroczy jednak równoleżnik 20° deklinacji w drodze na południe i od tego momentu proces ten nabierze tempa. Do końca lipca skończą się sezony zarówno na obłoki srebrzyste, jak i łuk okołohoryzontalny, gdyż Słońce zacznie wędrować zbyt nisko.

W lipcu następuje zamiana ról na niebie wieczornym i porannym. Przez ostatnie miesiące ekliptyka tworzyła

duży kąt z widnokregiem wieczorem, mały zaś rano. Odtąd wieczorem ekliptyka biegnie nisko na niebie, rano natomiast wznosi się wysoko. Jest to główny czynnik warunkujący widoczność obiektów znajdujących się blisko ekliptyki i jednocześnie blisko Słońca. Dlatego Merkurego, mimo osiągnięcia przezeń 22 lipca bardzo dużej, wynoszącej 27° , elongacji wschodniej, można próbować dostrzec jedynie na początku miesiąca, ale o zmierzchu pokaże się on na wysokości zaledwie 3° .

Również planeta Wenus po czerwcowej koniunkcji górnej do końca miesiąca zwiększy elongację do zaledwie 15° i zajdzie jeszcze wcześniej. Nie pomoże tutaj nawet duża jasność tej planety. W kolejnych kilku miesiącach Wenus na niebie wieczornym nie poprawi się, mimo zwiększającej się odległości katowej od Słońca. Przeszkodzi w tym właśnie niskie nachylenie ekliptyki.

Polepszą się za to poranne warunki obserwacyjne Księżyca i widocznych wtedy innych planet Układu Słonecznego, czyli świecących jasno Saturna, Marsa i powracającego po spotkaniu ze Słońcem Jowisza. W drugiej części miesiąca można próbować odnaleźć Neptuna, a może nawet Urana. W ich przypadku należy jednak dysponować lornetką lub teleskopem.

Najlepiej ze wspomnianych planet prezentuje się Saturn, zbliżający się do przypadającej 8 września opozycji względem Słońca. 12 dni później w podobnej konfiguracji znajdzie się Neptun, stąd w tym sezonie obserwacyjnym obie planety dzieli na niebie około 11° . W lipcu poruszają się one ruchem wstecznym, choć Neptun zmieni kierunek swojego ruchu 3. dnia miesiąca. Saturn znajduje się w granicach gwiazdozbioru Wodnika, kreśląc swoją pętlę około 2° na wschód od gwiazdy 4. wielkości φ Aqr. Neptun natomiast znajduje się w Rybach, wędrując mniej więcej $100'$ na północ od świecącej z jasnością obserwowaną $+5,1^m$ gwiazdy 29 Psc. W lipcu obie planety zaczną przekraczać wysokość 30° nad południową częścią nieboskłonu, przy czym Saturn zaprezentuje tarczę o jasności $+1^m$ i średnicy $18''$, Neptun zaś świeci z jasnością $+7,9^m$. Stosunek małej do wielkiej osi w układzie pierścieni Saturna wyniesie 0,04.

Planeta Mars pokona w lipcu 21° na tle Barana i Byka. 15 lipca przejdzie $0,5^\circ$ na południe od Urana, kończąc miesiąc 7° na zachód od Jowisza. Uran świeci z jasnością $+5,8^m$ i początkowo zginie w zorzy porannej, lecz do końca miesiąca jego widoczność znacznie się poprawi. Tej planety należy szukać jakieś 6° na południowy zachód od Plejad, a najbliższą w miarę jasną gwiazdą jest świecąca z jasnością $+5,5^m$ 13 Tau, do której Uran do końca lipca zmniejszy dystans do $1,5^\circ$. Blask Marsa wynosi $+0,9^m$, czyli porównywalnie do pobliskiego Aldebarana w Byku.

Ostatnią widoczną rano planetą jest Jowisz. Początkowo około godziny 3:30 wznosi się on na wysokość zaledwie 8° , ale do końca lipca o tej samej porze przekroczy wysokość 20° . Jowisz znajduje się w gwiazdozbiorze Byka, wędrując kilka stopni na północ od Hiad. 5 lipca planeta przejdzie 2° na północ od gwiazdy Ain (ϵ Tau), czyli najbardziej na północ wysuniętej jasnej gwiazdy tej gromady. Do końca miesiąca jasność planety zwiększy się do $-2,1^m$, a średnica jej tarczy do $35''$.

Na początku lipca ostatnie trzy planety odwiedzi Księżyc przed nowiem. 1 lipca Srebrny Glob zaprezentuje tarczę w fazie 26%, docierając na 8° na zachód od Czerwonej Planety. Dobę później zmniejszy on fazę do 17%, przesuując się na pozycję 6° na północny wschód od Marsa i jednocześnie $4,5^\circ$ na północny zachód od Urana. 8° na lewo od księżycowej tarczy da się dostrzec Plejady. Faza Księżyca 3 lipca spadnie poniżej 10%. Niecałe 5° pod

nim pokaże się Jowisz, a kolejne 5° dalej w tym samym kierunku znajdzie się Aldebaran, ale przy wysokości zaledwie $3,5^\circ$ jest trudny do dostrzeżenia. Tarczę Księżyca da się jeszcze odnaleźć 4 lipca, gdy o świcie, w fazie jedynie 4%, wzniesie się na wysokość 8° . El Nath, druga co do jasności gwiazda Byka, znajdzie się 4° na lewo od niej, 12° na prawo zaś Jowisz.

W nocy z 5 na 6 lipca Księżyc przejdzie przez nów i przeniesie się na niebo wieczorne, gdzie odwiedzi kilka jasnych ciał niebieskich, wszystko jednak zdarzy się nisko nad horyzontem. 7 lipca Srebrny Glob spotka się z Merkurym mającym jasność $-0,2^m$. Około godziny 21:45 Księżyc pokaże tarczę w fazie 4% na wysokości 5° , Merkurego zaś należy szukać jakieś $1,5^\circ$ od brzegu księżycowej tarczy, na godzinie 7 względem niej. Dwa dni później Księżyc zwiększy fazę do 15% i dotrze na 3° do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. 10 lipca Księżyc w fazie 22% zakryje gwiazdę 5. wielkości χ Leonis. Zjawisko zacznie się około godziny 21:25 przy zachodzie Słońca. Ale w południowo-wschodniej części kraju powinno dać się je zaobserwować przez lornetkę.

13 lipca Księżyc osiągnie I kwadrę, zbliżając się do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny na odległość 3° , by dwa dni później przejść 4° pod Zuben Elgenubi w Wadze, zwiększając przy tym fazę do 68%. 17 dnia miesiąca tarcza Srebrnego Globu stanie się jeszcze bardziej pyzata, prezentując fazę 85%. Tej nocy zajmie ona pozycję $0,5^\circ$ na południe od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. 21 lipca przypada pełnia Księżyca, a w nocy z 24 na 25 lipca spotka się on z Saturnem, zmniejszając do tej pory fazę do 84%. O godzinie 23 oba ciała przedzieli dystans około $50'$.

28 lipca Srebrny Glob znowu pokaże tarczę oświetloną w połowie, tym razem jednak zaprezentuje on swoją zachodnią część, świecąc mniej więcej 7° na południe od jasnych gwiazd Barana. Dwa dni później jego tarcza zmniejszy fazę do 29% i dotrze 2° na wschód od Plejad. Jednocześnie 6° na południowy zachód od niej znajdzie się Uran, 2° na południowy wschód zaś – Mars. Ostatniego poranka miesiąca oświetlony w 20% Księżyc przejdzie 5° na północ od Jowisza.

10 lipca maksimum swojej jasności osiągnie miryda χ Cygni, zmieniająca jasność od $+3,3^m$ do $+14,2^m$ w okresie 408 dni. W tym czasie powinna ona przekroczyć jasność $+4,5^m$, a zatem dać się łatwo dostrzec gołym okiem. W lipcu χ Cygni góruje około północy na wysokości ponad 70° . Można ją odnaleźć na linii łączącej gwiazdę η Cyg z Albireo (β Cyg), mniej więcej $2,5^\circ$ od pierwszej z wymienionych gwiazd.

W tym miesiącu przez opozycję przejdzie planetoida Ceres, jaśniejąc do około $+7,3^m$. Ceres porusza się ruchem wstecznym i przez cały lipiec pokona w ten sposób około 6° na tle gwiazdozbioru Strzelca, przechodząc na początku miesiąca $1,5^\circ$ na południe od gwiazdy 3. wielkości τ Sgr, by 8 lipca przejść $0,5^\circ$ od jaśniejszej o $0,7^m$ Ascelli (ζ Sgr). Niestety podczas górowania Ceres nie przekroczy wysokości 10° nad widnokregiem.

Ariel MAJCHER



Piknik na skraju fizyki

Dawno temu, w *Delcie* 3/2017, opisywałem zjawisko nadmiernej produkcji pewnego rodzaju par elektron-pozyton w rozpadach wzbudzonych jąder berylu zaobserwowane w węgierskim laboratorium Atomki. Mogłoby to wskazywać na istnienie nowego rodzaju cząstek elementarnych spoza Modelu Standardowego – bozonów, roboczo nazwanych X17, o masie około $17\text{ MeV}/c^2$, czyli ponad pięćdziesiąt razy lżejszych od protonu. Obserwacje te zaintrygowały fizyków, którzy przymierzali się do wyjaśnienia zjawiska w ramach znanej fizyki. W rezultacie mogłem meldować w *Delcie* 4/2021, że, jak wiele innych, i ta anomalia umarła po cichu.



Non omnis moriar. Jeszcze w 2019 roku ukazał się kolejny preprint węgierskiego zespołu (którym dowodzi Attila Krasznahorkay), w którym opisywano analogiczne zjawisko w rozpadach wzbudzonych jąder helu. Także w tym przypadku nadmierna produkcja par elektron-pozyton miałyby być wyjaśniana istnieniem bozonu X17. Później raportowano jeszcze analogiczny efekt dla jąder węgla. Większość tych doniesień przeszła przez pełen proces recenzyjny i ukazała się na łamach poważnych czasopism naukowych wydawanych przez American Physical Society. W 2022 roku zespół wydał jeszcze jeden preprint – o wychwycie protonu przez jądra litu, w wyniku którego powstawało wzbudzone jądro berylu oraz foton. Także w tym doświadczeniu autorzy zaobserwowali, że w niektórych sytuacjach wytwarzanych jest zbyt wiele par elektron-pozyton. Na ratunek interpretacjom tych wyników znów przychodził bozon X17.



Gdzie zatem szampan i Nagroda Nobla? Co powstrzymuje świat fizyków przed przyjęciem X17 do rodziny uznanych cząstek elementarnych?

X17 mógłby ujawnić się na wiele sposobów w różnego rodzaju doświadczeniach prowadzonych przez inne grupy fizyków. Przykładem może być eksperyment NA64 przeprowadzony w CERN. Wiązka wysokoenergetycznych elektronów, o energiach 100 lub 150 GeV, rozprasza się na jądrach atomowych, w wyniku czego mogłyby powstawać różne nowe cząstki – oczywiście jeśli istnieją i taka produkcja jest zgodna z zasadą zachowania energii. Jeśli taką nową cząstką byłby X17, wyprodukowałby parę elektron-pozyton, która następnie zostałaby zarejestrowana w detektorze. Niczego takiego jednak nie zaobserwowano, co nie wyklucza wprawdzie obecności X17, ale ogranicza prawdopodobieństwo oddziaływania tej cząstki z elektronami i pozytonami.

Innym przejawem istnienia X17 byłby wpływ tej cząstki na tzw. anomalny moment magnetyczny elektronu, czyli sposób, w jaki elektrony oddziałują z polem magnetycznym. Jednak pomiary przeprowadzone w laboratoriach w Berkeley i w Laboratorium Kastlera–Brossela w Paryżu nie wykazały żadnych efektów związanych z obecnością X17. Znowu nie wyklucza to kompletnie możliwości występowania tego bozonu, ale dalej ogranicza, jak silnie oddziałuje on ze znaną materią. W szczególności wyniki eksperymentu NA62 w CERN wskazują na to, że oddziaływanie X17 z kwarkami musi być niezwykle słabe, bo inaczej wpływałoby ono na bardzo rzadkie rozpady cząstek dziwnych, zwanych kaonami.

Ostatnie słowo w sprawie X17 może należeć do naukowców z Instytutu Paula Scherrera w Szwajcarii zaangażowanych w doświadczenia MEG II. Wprawdzie głównym zadaniem tego zespołu jest poszukiwanie bezneutrinowych rozpadów dodatnio naładowanych mionów na pozytony i fotony, które są zabronione w ramach Modelu Standardowego, to zaprojektowany przez nich detektor nadaje się idealnie do testowania hipotezy produkcji X17 w procesie wychwytu protonu

na jądrach litu. Takie eksperymenty zostały już przeprowadzone, a wyniki będą prezentowane po raz pierwszy podczas letnich konferencji w połowie lipca. Kiedy zatem Czytelnicy *Delty* będą się zapoznawać z bieżącym numerem miesięcznika, może będzie już wiadomo, czy X17 to nowa – niespodziewana! – cząstka elementarna, czy też fluktuacja statystyczna, która zniknęła po wykonaniu większej liczby dodatkowych pomiarów.

Krzysztof TURZYŃSKI

Dziękuję Tomaszowi Matulewiczowi z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego za zwrócenie uwagi na nową aktywność badawczą dotyczącą X17.

- [1] A. J. Krasznahorkay *et al.*, *New evidence supporting the existence of the hypothetical X-17 particle*, [arXiv:1910.10459](https://arxiv.org/abs/1910.10459)
- [2] A. J. Krasznahorkay *et al.*, *New anomaly observed in ^4He supports the existence of the hypothetical X17 particle*, *Phys. Rev. C* **104** 044003
- [3] A. J. Krasznahorkay *et al.*, *New anomaly observed in ^{12}C supports the existence and the vector character of the hypothetical X17 boson*, *Phys. Rev. C* **106** L061601
- [4] N. Sas *et al.*, *Observation of the X17 anomaly in the $^7\text{Li}(p, e^+e^-)^8\text{Be}$ direct proton-capture reaction*, [arXiv:2205.07744](https://arxiv.org/abs/2205.07744)



Przejście graniczne

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Przypomnijmy krótko, że liczba g jest granicą ciągu liczbowego $(a) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$, począwszy od wyrazu o pewnym indeksie N_ε (zależnym od ε), wszystkie kolejne wyrazy różnią się od g o mniej niż ε . Piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g.$$

Przytoczę tu kilka przydatnych twierdzeń dotyczących granic.

Twierdzenie 1. Ciąg (a) liczb całkowitych, który ma granicę g , jest od pewnego wyrazu stały.

Dowód. Dla $n \geq N_{1/2}$ otrzymujemy $a_n \in (g - \frac{1}{2}, g + \frac{1}{2})$, a w tym przedziale jest co najwyżej jedna liczba całkowita.

Twierdzenie 2. Niech ciągi (a) i (b) mają granice, odpowiednio, g_a i g_b . Jeśli dla każdego n zachodzi nierówność $a_n \leq b_n$, to $g_a \leq g_b$.

Dowód. Przypuśćmy, że $g_a > g_b$, i niech $\varepsilon = \frac{1}{2}(g_a - g_b)$. Dla odpowiednio dużych n otrzymujemy sprzeczność:

$$b_n < g_b + \varepsilon = g_a - \varepsilon < a_n.$$

Twierdzenie 3 (o trzech ciągach). Ciągi (a) , (b) , (c) spełniają dla każdego n nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz ciągi (a) i (c) mają tę samą granicę g , to ciąg (b) też ma granicę g .

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne. Dla odpowiednio dużych n zachodzą nierówności:

$$g - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < g + \varepsilon,$$

więc liczba g jest granicą ciągu (b) na mocy definicji.

Ćwiczenia

1. Czy w twierdzeniu 2 można obie nierówności nieostre zastąpić ostrymi?
2. Niech g_a i g_b będą, odpowiednio, granicami ciągów (a) i (b) . Udowodnić, że jeśli $g_a < g_b$, to dla wszystkich dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $a_n < b_n$.
3. Czy obie nierówności ostre z poprzedniego zadania można zastąpić nieostrymi?

Zadania

4. Dany jest ograniczony ciąg liczb całkowitych nieujemnych (a) . Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n} \quad \text{dla } n \text{ całkowitych dodatnich.}$$

Wykazać, że jeśli w ciągu (b) jest nieskończenie wiele liczb całkowitych, to wszystkie jego wyrazy są całkowite. (LXIX OM, II stopień)

(Ciąg (a) nazywamy ograniczonym, jeśli istnieje taka stała M , że $|a_n| \leq M$ dla wszystkich n).

5. Wielomiany P i D mają współczynniki całkowite, przy czym wielomian D jest unormowany. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $P(n)$ jest podzielna przez liczbę $D(n)$. Udowodnić, że wielomian $P(x)$ jest podzielny przez wielomian $D(x)$.

(Wielomian unormowany to taki, który ma współczynnik 1 przy najwyższej potędze).

6. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y spełniają równość

$$f(x + f(x + y)) = f(x - y) + f(x)^2.$$

7. Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$ o współczynnikach rzeczywistych. Dla każdej liczby całkowitej n wartość $f(n)$ jest kwadratem pewnej liczby całkowitej. Udowodnić, że $f(x) = (dx + e)^2$ dla pewnych liczb całkowitych d i e . (LI OM, II stopień)

8. Funkcja $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdego $x > 0$ równość

$$(f(x) - 1)(f(x) + 1) = (x - 1)f(x + 1).$$

Dowieść, że jeśli $f(x) \geq 0$ dla każdego $x \geq 1$, to $f(x) \geq x$ dla każdego $x \geq 1$. (VIII WLM, zestaw C)

Wskazówki do ćwiczeń i zadań
 1. Nie można. Jako kontrprzykład mogą posłużyć ciągi $a_n = \frac{n}{2}$ i $b_n = \frac{n}{4}$.
 2. Rozważać $\varepsilon = \frac{1}{2}(g_b - g_a)$.
 3. Nie można. Dla kontrprzykładu: $a_n = \frac{n}{2}$, $b_n = \frac{n}{4}$.
 4. Niech M będzie maksimum ciągu (a) i niech m będzie indeksem, dla którego jest osiągnięte. Dla $n \geq m$ zachodzą nierówności $M \leq a_n \leq M$. Granicą ciągu $\sqrt[n]{a}$ jest 1 (dlaczego?), więc granicą ciągu $\sqrt[n]{a}$ jest 1 (dlaczego?).
 5. Zapiszmy dzielenie wielomianów $P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$. Ponieważ P i Q mają współczynniki całkowite i D jest unormowany, więc R jest wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wobec tego dla liczb całkowitych n liczby $Q(n)$ i $R(n)$ są całkowite. Z danej podzielności $P(n) = Q(n)D(n) + R(n)$ wynika, że $R(n)$ jest podzielne przez $D(n)$.
 6. Jest to zadanie 7 z książki nr 35 (Δ_{11}).
 7. Niech $s_n = \sqrt[n]{f(n)}$ dla całkowitych dodatnich n . Istnieje granica ciągu liczb całkowitych $r_n = s_{n+1} - s_n$ równa $\sqrt[n]{a} = d$ (aby się o tym przekonać, warto skorzystać z nierówności $\frac{s_{n+1} - s_n}{2} \leq \frac{s_{n+1} + s_n}{2}$).
 8. Długość d jest liczbą całkowitą, a ciąg (r) jest od pewnego indeksu N stały. Mamy więc $s_{n+t} - s_n = s_{n+1} - s_n$ dla $t \geq 0$, równoważnie $s_n = dn + e$ dla pewnego całkowitego e oraz $n \geq N$. Ponieważ $f(n) = (dn + e)^n$ dla nieskończenie wielu n , równość zachodzi dla każdego x .
 Najpierw wykazujemy, że $f(x) \geq 1$ dla $x \geq 1$. Następnie indukcyjnie $f(x) \geq 1 - (1 - x)^{2^{-n}}$ dla każdego $x > 1$ i $n \geq 0$. Po przejściu z n do nieskończoności mamy $f(x) \geq x - 1$. Dalej $f(x) \geq 0$ dla każdego $x > 1$.
 Ciągowość. Przy dodatkowym nieskończoności otrzymujemy też $f(x) \geq x - \frac{1}{2^n}$. Po przejściu z n do nieskończoności otrzymujemy $f(x) \geq x$ dla $x \geq 1$, można jest ograniczona dla $x \geq 1$, można udowodnić, że $f(x) = x$. Wynika z tego, między innymi, równość $\sqrt[3]{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}}$ jest to słynny "zagnieżdżony" pierwiastek Ramanujan'a.

Polecamy na wakacje:

Nowa strona Delty

Pełne archiwum 50 lat!

600 numerów!

8 000 artykułów!



www.deltami.edu.pl

