

deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 6 (601) 2024

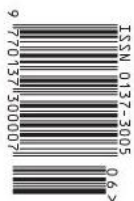
CENA 8 ZŁ + VAT 8%

MIESIĘCZNIK

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
www.deltami.edu.pl

W poszukiwaniu
prawdziwego
kształtu Ziemi

str. 13



Nakład: 2800 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 6 (601) 2024

Sześć stopni oddalenia w równoległych światach <i>Oskar Skibski</i>	str. 1
Różne oblicza transformaty Fouriera <i>Jacek Jakimiuk</i>	str. 2
Zadania	str. 4
Astrofotografia głębokiego nieba. Część III – artystyczna <i>Ireneusz Nowak</i>	str. 5
Proste i punkty w świecie abstrakcji <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 8
Elementarnie o sumie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 10
W prawo czy lewo <i>Magdalena Fikus</i>	str. 12
W poszukiwaniu prawdziwego kształtu Ziemi – Maupertuis w Laponii <i>Grzegorz Łukaszewicz</i>	str. 13
Energia spoczynkowa czy wewnętrzna? <i>Ludwik Lehman</i>	str. 17
W obronie tradycyjnych wartości termodynamicznych <i>Szymon Charzyński</i>	str. 19
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: Im więcej Obłoków Magellana, tym ciekawiej	str. 22
Niebo w czerwcu	str. 22
Aktualności Antyspądanie	str. 24
Przekształcenia afiniczne <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze:
Powiedz, jaka jest odległość między tymi kołami,
a dowiesz się, do którego domu Hogwartu pasujesz.

\clubsuit $d(A, B) = d(C, D)$
 \diamond $d(A, B) = 2 \cdot d(C, D)$
 \spadesuit inna odpowiedź
 \heartsuit inna odpowiedź

\clubsuit $d(E, F) = d(F, G)$
 \diamond $d(E, F) = 2 \cdot d(F, G)$
 \spadesuit obie powyższe odpowiedzi,
gdyż $d(E, F) = 0 = d(F, G)$
 \heartsuit inna odpowiedź

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej;
doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel;
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący;
dr Wojciech Czerwiński; dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ;
dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz;
prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuńska;
dr hab. Artur Jeż, prof. UW; prof. dr hab. Bartosz Klin;
dr Piotr Kołaczek-Szymański;
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący;
dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński;
dr hab. Krzysztof Pawłowski; dr Milena Ratajczak;
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN;
prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Michał Bejger,
Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek,
Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl (tylko instytucje)
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
Na stronie Empiku *Delta* można zamówić co miesiąc:
www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Sześć stopni oddalenia w równoległych światach

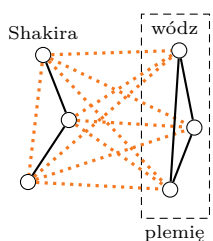
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Oskar SKIBSKI*

W literaturze dotyczącej sieci społecznych istnieje teoria nazywana *sześcioma stopniami oddalenia*. Mówi ona, że dowolne dwie osoby żyjące na Ziemi są nie więcej niż sześć znajomości od siebie, tzn. dla każdej pary A, G da się wskazać ciąg pięciu pośredników B, C, D, E, F takich, że A zna się z B , B zna się z C , ... i w końcu F zna się z G . Teoria ta nie została udowodniona, a w ogóle nie jest pewnie prawdziwa. Wyraża jednak słuszną ideę, że w sieci społecznej jesteśmy dużo bliżej innych, niż mogłoby nam się wydawać.

Wyobraźmy sobie jednak świat równoległy, w którym wszystko jest odwrotnie. Jeżeli w normalnym świecie kogoś znam, to w świecie równoległym go nie znam i odwrotnie. Czy możemy coś powiedzieć o odległości najdalszych osób w takim świecie? Czy jest większa niż w naszym świecie? Nie będziemy przyjmować za dużo założeń na temat sieci społecznej ludzi na Ziemi, bo – szczerze mówiąc – nie za dużo wiemy.

Używając bardziej poważnej terminologii, zastanawiamy się, jaka jest średnica (czyli właśnie odległość najdalszych wierzchołków) dopełnienia grafu przedstawiającego sieć społeczną wszystkich ludzi na Ziemi.



Kropkowane linie oznaczają znajomości w świecie równoległym

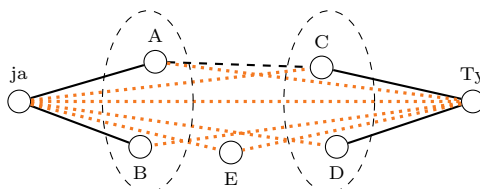
Rozważmy najpierw przypadek, w którym sieć społeczna ludzi na Ziemi jest niespójna, tzn. istnieje pewna grupa ludzi, którzy nie znają nikogo spoza tej grupy. Powiedzmy, że jest to jakieś dzikie plemię zamieszkujące jedną z wysp archipelagu Andamandów. Łatwo zauważyć, że w świecie równoległym to plemię byłoby niesamowicie popularne! Wódz plemienia regularnie występowałby w „Tańcu z Gwiazdami”, a wszyscy członkowie otrzymywaliby miliony życzeń urodzinowych na Facebooku. A jaka byłaby odległość najdalszych osób?

Wyróżnijmy dwie osoby – wodza plemienia oraz kogoś spoza, np. Shakirę. Każda osoba z plemienia znałaby Shakirę, a każda osoba spoza plemienia znałaby wodza. Wódz plemienia znałby także Shakirę. Łatwo więc zauważyć, że każde dwie osoby w równoległym świecie znałyby się lub miały jakiegoś wspólnego znajomego: jeżeli jedna jest z plemienia, a druga spoza, to znałyby się bezpośrednio. Jeżeli obie są z plemienia, to obie znałyby Shakirę, a jeżeli obie są spoza niego, to znałyby wodza. Odległość najdalszych osób jest więc nie większa niż dwa.

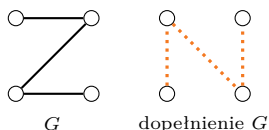
No dobrze, załóżmy jednak przeciwnie, że sieć społeczna ludzi na Ziemi jest spójna, tzn. dla każdej pary osób możemy znaleźć ścieżkę znajomości, która je łączy. Oznacza to między innymi, że jednak wspomniane plemię kontaktuje się ze światem zewnętrznym, na przykład aby śledzić rozgrywki polskiej Ekstraklasy, i przynajmniej jedna osoba z plemienia zna przynajmniej jedną osobę spoza niego. Co teraz możemy powiedzieć o odległości najdalszych osób?

Na pewno na Ziemi są dwie osoby, które nie znają się osobiście i nie mają wspólnych znajomych (czyli są w odległości co najmniej trzy). Załóżmy, że jesteśmy to my: ja i Ty, Czytelniku.

Jeżeli nie jesteśmy to jednak my, to możemy przyjąć, że artykułu tego nie piszę ja, a mieszkaniec małej wioski we wschodnich Chinach, który przypadkowo włada językiem polskim.



Pokazaliśmy więc, że graf lub jego dopełnienie ma średnicę nie większą niż 3. Oszacowania tego nie da się poprawić, co pokazują litery Z i N:



Wynik 3 można było też uzyskać bezpośrednio, dzieląc 6 (stopni oddalenia) na 2 (światy).

Nie mamy wspólnych znajomych, a zatem w równoległym świecie każdy musi znać mnie lub Ciebie (lub i mnie, i Ciebie). Znamy się w nim także my. Super! Weźmy dowolne dwie osoby. Jeżeli obie w równoległym świecie znają mnie, jak C i D na obrazku powyżej, to mamy ścieżkę C -ja- D . Jeżeli obie znają Ciebie, jak A i E , to mamy ścieżkę A -Ty- E . Jeżeli jedna zna mnie, a druga zna Ciebie, jak D i A , to mamy ścieżkę D -ja-Ty- A . Najdalsza odległość jest zatem nie większa niż trzy!

Teoria sześciu stopni jest ciężka do weryfikacji. Nam, w sposób czysto matematyczny, udało się udowodnić jednak nową teorię: teorię *trzech stopni oddalenia w równoległych światach* – w naszym świecie lub w świecie równoległym odległość najdalszych osób jest nie większa niż 3!

Różne oblicza transformaty Fouriera

Jacek JAKIMIUK*

*Doktorant, Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

O dyskretnej transformacie Fouriera i algorytmie szybkiego mnożenia wielomianów można przeczytać na przykład w Δ_{22}^8 , a o kostce dyskretnej i rozwinięciu Walsha–Fouriera w Δ_{16}^4 .

Trzy przykłady transformaty Fouriera

Weźmy na nasz matematyczny warsztat trzy przykłady: szereg Fouriera funkcji okresowej, transformatę Fouriera funkcji określonej na prostej rzeczywistej oraz dyskretną transformatę Fouriera ciągu skończonego. Jeśli chodzi o funkcje okresowe, to dla ustalenia uwagi będziemy rozważać te o okresie 2π . Będziemy je traktować jako funkcje określone na okręgu \mathbb{T} zdefiniowanym jako przedział $[0, 2\pi]$ z dodawaniem modulo 2π oraz sklejonymi końcami tak, by to dodawanie było ciągłe. Podobnie o ciągu liczb zespolonych a_0, a_1, \dots, a_{n-1} będziemy myśleć jako o funkcji określonej na $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ z dodawaniem modulo n .

Rozważmy funkcje całkowalne $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $h: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$. Wówczas ich współczynniki Fouriera są dane odpowiednio przez

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} dt, \\ \hat{g}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy} dx, \\ \hat{h}(l) &= \sum_{m=0}^{n-1} h(m)e^{-ilm\frac{2\pi}{n}},\end{aligned}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$, zaś $l \in \mathbb{Z}_n$. Na pierwszy rzut oka widać daleko idące podobieństwa. We wszystkich przypadkach dana jest funkcja i parametr, a transformata Fouriera przypisuje im całą (której szczególnym przypadkiem jest suma) po całej dziedzinie z funkcji przemnożonej przez e w potęgę $-i$ razy parametr razy argument funkcji. Główną różnicą, której przyczyna może być niejasna dla Czytelnika (przez długi czas była niejasna dla autora), są różne zbiory parametrów. Dlaczego dla funkcji na okręgu bierzemy parametr całkowity, a dla funkcji na prostej rzeczywistej? Czemu w przypadku dyskretnym pojawia się w wykładniku dodatkowo $\frac{2\pi}{n}$? Odpowiedź dostaniemy, gdy spojrzymy na okrąg, prostą i \mathbb{Z}_n jako grupy addytywne.

Szeregi Fouriera wymyślono jako narzędzie pomagające rozwiązać równanie ciepła, a obecnie są wykorzystywane na przykład przy analizie dźwięku.

Transformatę Fouriera funkcji całkowalnej na \mathbb{R} , lub ogólniej – na \mathbb{R}^n , stosuje się przy rozwiązywaniu równań różniczkowych i dlatego przydaje się w wielu zagadnieniach fizyki. Dyskretna transformata Fouriera pojawia się w algorytmie szybkiego mnożenia wielomianów. Analiza kostki dyskretnej, stosowana na przykład przy badaniu grafów losowych, korzysta z rozwinięcia Walsha–Fouriera.

Czytelnik Dociekliwy, który spotkał się z więcej niż jednym z powyższych przykładów transformaty lub rozwinięcia Fouriera, zapewne zastanawia się, jakie są podobieństwa i różnice między nimi. Celem tego artykułu jest ujęcie tych podobieństw w ramach ogólnej definicji transformaty Fouriera obejmującej wszystkie wspomniane przykłady, jak również wyjaśnienie różnic pomiędzy nimi.

Zacznijmy od przypadku nieokresowego. Zauważmy, że e^{-ixy} jako wartości przyjmuje liczby zespolone o module 1. Oznaczmy więc $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, czyli okrąg jednostkowy na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} . Co prawda wcześniej wprowadziliśmy już okrąg \mathbb{T} (jako odcinek ze sklejonymi końcami), ale w naszych rozważaniach wygodnie będzie traktować je jak dwa różne okręgi. Zauważmy, że dla każdego $y \in \mathbb{R}$ funkcja $\phi_y: \mathbb{R} \rightarrow T$ dana wzorem $\phi_y(x) = e^{-ixy}$ ma tę własność, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi

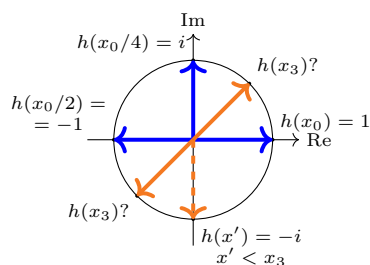
$$(*) \quad \phi_y(x_1 + x_2) = \phi_y(x_1)\phi_y(x_2).$$

Okazuje się, że innych takich funkcji ciągłych nie ma.

Stwierdzenie 1. *Wszystkie ciągłe funkcje z \mathbb{R} w T spełniające warunek $(*)$ są postaci $x \mapsto e^{-ixy}$ dla pewnego $y \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Przypomnijmy, że funkcja ciągła na \mathbb{R} jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości na dowolnym podzbiore gęstym, czyli niepusto przecinającym każdy przedział otwarty. Niech $h: \mathbb{R} \rightarrow T$ będzie ciągłą funkcją spełniającą warunek $(*)$. Jeśli $h(x) = 1$ dla wszystkich x , to teza jest prawdziwa z $y = 0$. Przypuśćmy przeciwnie, wówczas niech x_0 będzie najmniejszą dodatnią liczbą o tej własności, że $h(x_0) = 1$. Taka liczba x_0 musi istnieć, ponieważ skoro istnieje $x > 0$ taki, że $h(x) \neq 1$, to $h(nx)$ „przeskakuje” cały okrąg dla dostatecznie dużych n całkowitych, więc z ciągłości funkcja h przyjmuje wartość 1 w jakimś punkcie $x' > 0$. Gdyby z kolei nie istniała najmniejsza liczba o tej własności, to h przyjmowałaby wartość 1 na ciągu zbieżnym do zera, co z własności $(*)$ rozszerza się do gęstego podzbioru, więc z ciągłości h byłaby tożsamościowo równa 1.

Ponieważ $h(2x) = h(x)^2$ dla wszystkich x , mamy $h(x_0/2) = -1$ i albo $h(x_0/4) = i$, albo $h(x_0/4) = -i$. Wykażemy, że $h(x) = e^{-ixy}$ dla wszystkich x , w pierwszym przypadku dla $y = -2\pi/x_0$, w drugim analogicznie dla $y = 2\pi/x_0$. Z ciągłości h oraz tego, że $h(x + x_0) = h(x)$ i $h(kx) = h(x)^k$, wystarczy sprawdzić tezę dla $x_n = x_0/2^n$ dla n naturalnych. Przeprowadźmy indukcję względem n : dla $n \leq 2$ mamy bazę bezpośrednio z założeń.



Założmy, że w naszym przypadku $h(x_0/4) = i$. Po zaznaczeniu na okręgu T punktów $h(x_0), h(x_0/2), h(x_0/4)$ widzimy, że mamy dwie możliwości na $h(x_3) = h(x_0/8)$. Gdyby jednak wartość $h(x_3)$ miała ujemną część rzeczywistą, to moglibyśmy znaleźć takie $x' < x_3$, że $h(x') = i$ lub $h(x') = -i$ (na obrazku). Wtedy jednak $4x' < 4x_3 = x_0/2$ oraz $h(4x') = 1$, co przeczy minimalności x_0 .

Zbiór G wraz z działaniem \cdot nazywamy grupą, jeśli działanie to jest łączne $((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3))$, posiada element neutralny 1_G (spełniający $1_G \cdot g = g \cdot 1_G = g$) i działanie odwracania $g \mapsto g^{-1}$ (spełniające $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1_G$). Ponadto grupa jest przemienna, jeśli zachodzi tożsamość $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$. O pojęciu grupy można przeczytać więcej w Δ_{19}^4 .

W interpretacji Stwierdzenia 1 Czytelnika może zmylić notacja multiplikatywna, czyli użycie symbolu \cdot . Na zbiorze \mathbb{R} rozważamy oczywiście działanie dodawania, a nie mnożenia. W naszym przypadku warunek definiujący homomorfizm $h: \mathbb{R} \rightarrow T$ zapiszemy więc jako $h(x_1 + x_2) = h(x_1)h(x_2)$, co odpowiada warunkowi (\star) .

Zażądanie ciągłości jest tutaj istotne. Czytelnikowi Wątpięcemu polecam poszukanie informacji o funkcjach addytywnych, a także udowodnienie, że nieliniowa funkcja addytywna definiuje nieciągły homomorfizm z prostej w okrąg.

Założenie przmienności jest istotne, ale my tutaj podamy tylko niezbyt ściśle wyjaśnienie, że transformata Fouriera powinna jakoś kodować strukturę grupy, a homomorfizmy z grupy nieprzemiennej w okrąg, będący grupą przemienną, tracą za dużo informacji. Czytelnika Zainteresowanego przypadkiem nieprzemiennym zachęcam do poczytania o teorii reprezentacji.

Więcej o mierze i calce Lebesgue'a można przeczytać w Δ_{22}^4 .

Aby nie odstraszać Czytelnika Początkującego, pozwoliliśmy sobie na pewne uproszczenia we wprowadzonych pojęciach. Dla chcących mieć pełny obraz: transformatę Fouriera definiujemy dla lokalnie zwartej grupy przemiennej z miarą Haara.

Wzięcie sprzężenia homomorfizmu w definicji transformaty jest kwestią wygodnej umowy – na przykład przy niej klasyczna notacja szeregów Fouriera jest najbardziej intuicyjna.

W kroku indukcyjnym znamy wartość $h(x_{n-1}) = h(2x_n) = h(x_n)^2$, więc dla $x_n = x_0/2^n$, $n > 2$ mamy $h(x_n) = e^{-ix_n y}$ lub $h(x_n) = e^{-i(x_n y + \pi)}$. Jednak w tym drugim przypadku liczba $h(x_n)$ ma ujemną część rzeczywistą, innymi słowy – leży na okręgu na lewo od osi urojonej. Funkcja h jest ciągła, więc musiałyby istnieć punkt x'_n o tej własności, że $0 < x'_n < x_n$ oraz $h(x'_n) = i$ lub $h(x'_n) = -i$. To daje $0 < 4x'_n < 4x_n < x_0$ i $h(4x'_n) = 1$, czyli sprzeczność z definicją x_0 . \square

Przyjrzyjmy się teraz przypadkowi funkcji okresowych. Funkcja f jest ciągła na \mathbb{T} wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła na $[0, 2\pi]$ jako na podzbiornie \mathbb{R} oraz $f(0) = f(2\pi)$. Każda ciągła funkcja $h: \mathbb{T} \rightarrow T$ spełniająca $h(t_1 + t_2) = h(t_1)h(t_2)$ dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ przedłuża się do funkcji ciągłej h' na \mathbb{R} wzorem $h(t) = h'(t + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$ i $t \in [0, 2\pi)$. Taka funkcja spełnia warunek (\star) , a zatem h jest postaci $h(t) = e^{-iyt}$ dla pewnego $y \in \mathbb{R}$. Jednak nie każdy parametr rzeczywisty y definiuje funkcję ciągłą na okręgu, ponieważ względem nieokresowego przypadku dochodzi nam jeszcze warunek $h(2\pi) = 1$. Stąd wszystkie szukane funkcje z \mathbb{T} do T są postaci $t \mapsto e^{-ikt}$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Możemy więc podejrzewać, że postać transformaty Fouriera ma jakiś związek z funkcjami spełniającymi warunek (\star) . Czytelnikowi Dociekliwemu pozostawiamy poszukanie wszystkich funkcji $h: \mathbb{Z}_n \rightarrow T$ spełniających $h(m_1 + m_2) = h(m_1)h(m_2)$ i sprawdzenie, jak uzyskana odpowiedź ma się do wzoru na dyskretną transformatę Fouriera.

Ogólna transformata Fouriera

Nim sformułujemy ogólną definicję transformaty Fouriera, zauważmy, że mnożenie liczb zespolonych z okręgu jednostkowego T spełnia definicję grupy przemiennej (zob. margines). Motywowani Stwierdzeniem 1 wprowadźmy teraz następującą definicję: *homomorfizmem* nazwiemy taką funkcję $h: G \rightarrow H$ między grupami G i H , że $h(g_1 \cdot g_2) = h(g_1) \cdot h(g_2)$ oraz $h(g_1^{-1}) = h(g_1)^{-1}$ dla wszystkich $g_1, g_2 \in G$. Stwierdzenie 1 faktycznie pokazywało, że wszystkie ciągłe homomorfizmy z \mathbb{R} w T są postaci $x \mapsto e^{-ixy}$ dla pewnego $y \in \mathbb{R}$. Podobnie ciągłe homomorfizmy z \mathbb{T} w T są postaci $t \mapsto e^{-ikt}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Nasuwa to hipotezę, że w ogólnym przypadku parametry transformaty Fouriera funkcji określonej na pewnej dziedzinie G odpowiadają ciągłym homomorfizmom z G w T .

Żeby jednak mówić o homomorfizmach, dziedzina G musi być wyposażona w działanie grupowe. Założymy więc, że G jest grupą przemienną. Zamierzamy rozważać ciągle homomorfizmy, więc zakładamy, że na G jest sensownie zdefiniowane pojęcie ciągłości (będziemy taką grupę nazywać grupą topologiczną). Nie będziemy go tutaj precyzyjnie formułować, ale jest jasne, czym jest ciągłość funkcji na prostej lub okręgu (albo ich produktach), a na grupie dyskretnej, takiej jak \mathbb{Z} z dodawaniem lub dowolnej grupie skończonej, każda funkcja jest ciągła. W definicji transformaty Fouriera pojawia się też całka lub suma, więc w ogólnym przypadku potrzebujemy mieć na G miarę, od której będziemy wymagać niezmienniczości na działanie grupowe – tak jak miara podzbioru \mathbb{R} (jego „długość”) nie zmienia się po jego przesunięciu.

Czytelnikowi Zagubionemu wśród trudnych pojęć wystarczy wiedzieć, że miara to coś, co pozwala zdefiniować całkę rozumianą jako pole pod wykresem funkcji. W przypadku prostej lub okręgu naszą miarą jest miara Lebesgue'a, całka względem niej jest całką w klasycznym rozumieniu. Na grupach dyskretnych rozważamy miarę liczącą, całka względem niej to jest po prostu suma.

Wyposażeni w przemienną grupę topologiczną G z miarą niezmienniczą μ i oznaczając przez \widehat{G} zbiór ciągłych homomorfizmów z G w T , możemy teraz zdefiniować transformatę Fouriera funkcji $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ jako

$$\widehat{f}(\rho) = \int_G f(g)\overline{\rho(g)}d\mu(g),$$

gdzie $\rho \in \widehat{G}$.

Powyżej sprawdziliśmy już, że ta definicja jest zgodna z przypadkami transformaty na prostej i na okręgu. Sprawdzenie przypadku transformaty na \mathbb{Z}_n

(dyskretnej transformaty Fouriera) albo na \mathbb{Z}_2^n (rozwiniecie Walsh–Fouriera) zostawiamy Czytelnikowi.

Przyjrzyjmy się teraz przypadkowi \mathbb{Z} , który jest o tyle ciekawy, że pozwoli nam dostrzec pewną dualność. Jest jasne, że każdy homomorfizm $h: \mathbb{Z} \rightarrow T$ jest ciągły, że $h(0) = 1$ i że h jest wyznaczony jednoznacznie przez wartość $h(1)$. Może być to dowolna liczba postaci e^{it} dla $t \in \mathbb{T}$ (również dla $t \in \mathbb{R}$, ale wtedy tracimy jednoznaczność), co pokazuje, że $\widehat{\mathbb{Z}}$ można utożsamić z \mathbb{T} . Tak zdefiniowana transformata przypisuje funkcji $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcję $\widehat{f}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ daną wzorem $\widehat{f}(t) = \sum_k f(k)e^{-itk}$. Odpowiada więc definiowaniu funkcji okresowej poprzez jej szereg Fouriera.

Krótko o własnościach

Zauważmy jeszcze jedną ciekawą rzecz: w każdym rozważanym przypadku uzyskany zbiór \widehat{G} ma naturalną strukturę grupy, da się na nim także zdefiniować pojęcia ciągłości i miary niezmienniczej. Co więcej, naturalne

działanie grupowe w każdym przypadku odpowiada działaniu danemu wzorem $(h_1 \cdot h_2)(g) = h_1(g) \cdot h_2(g)$. To pozwala zdefiniować transformatę Fouriera również na \widehat{G} . Nasze wcześniejsze rozważania dotyczące transformaty na \mathbb{Z} , jak również obserwacja, że $\rho \mapsto \rho(g)$ dla ustalonego $g \in G$ zadaje ciągły homomorfizm $\widehat{G} \rightarrow T$, sugerują, że $\widehat{\widehat{G}}$ można utożsamić z G .

I rzeczywiście, dla naszej ogólnej transformaty Fouriera można udowodnić, że transformata funkcji \widehat{f} jest (prawie) odwrotną transformatą Fouriera, to znaczy $\widehat{\widehat{f}}(g) = f(g^{-1})$. Zachodzą też inne kluczowe własności, do których przywykliśmy w jej szczególnych przypadkach, takie jak tożsamość Parsewala lub zamiana spłotu na mnożenie punktowe i mnożenia punktowego na spłot. Oczywiście ten artykuł stanowi tylko krótkie wprowadzenie do tematu. Badanie własności i zastosowań transformaty Fouriera stanowi materiał na niejeden semestr zajęć na studiach oraz lata badań naukowych.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1783. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych, dla których $a + bc, b + ac, c + ab$ są liczbami pierwszymi i wszystkie dzielą liczbę $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$.

Rozwiązanie na str. 10

M 1784. W zbiorze \mathcal{S} zawierającym n elementów wybrano $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 2$ podzbiorów tak, że suma dowolnych trzech z nich jest równa \mathcal{S} . Udowodnić, że suma pewnych dwóch z nich jest równa \mathcal{S} .

Rozwiązanie na str. 14

M 1785. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC . Niech A_1, B_1, C_1 będą punktami symetrycznymi do P względem prostych BC, CA i AB . Załóżmy, że w sześciokąt $AB_1CA_1BC_1$ można wpisać okrąg. Udowodnić, że

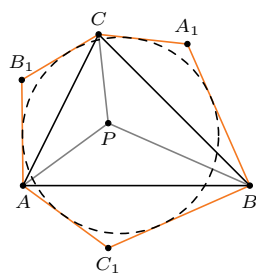
$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \sphericalangle APB.$$

Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1097. Do badania struktury kryształów, poza promieniowaniem rentgenowskim, stosuje się także wiązki elektronów. Obraz dyfrakcyjny pozwalający na „odczytywanie” struktury atomowej powstaje, gdy długość fali, λ , wiązki jest porównywalna ze stałymi sieci krystalicznej (odległościami sąsiadujących atomów). Oszacuj, jaki jest współczynnik załamania, n , wiązki elektronów na powierzchni metalu w badaniach struktury krystalicznej. Odległości międzyatomowe są rzędu kilku angstromów (kilka razy 10^{-10} m), masa elektronu $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, wartość ładunku elektronu $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, stała Plancka $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js, a typowa praca wyjścia dla metali $W \approx 5$ eV. Rozwiązanie na str. 6

F 1098. Wskaźnik laserowy emituje światło o długości fali $\lambda = 650$ nm. Wiązkę wskaźnika skierowano na powierzchnię wody. Ile wynosi pęd p_w fotonów wiązki w wodzie? Współczynnik załamania wody $n = 1,33$, stała Plancka $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js. Rozwiązanie na str. 13



Astrofotografia głębokiego nieba. Część III – artystyczna

Autor fascynuje się astronomią od 15 lat. W astrofotografii stawia na proste, dostępne dla amatorów rozwiązania, eksperymentując przy tym i starając się pokazać wybrane obszary nieba w nowy sposób, co zostało dostrzeżone m.in. przez jury międzynarodowego konkursu AstroCamera, w którym w 2023 roku uzyskał główną nagrodę w kategorii „Obiekty głębokiego nieba”.

Ireneusz NOWAK

Poprzednią część tego artykułu zakończyliśmy na procesie „stackowania”. W jego wyniku na ekranach naszych komputerów pojawia się obraz nieba zawierający informację o jakości znacząco przekraczającej teoretyczne możliwości pojedynczej klatki z aparatu. Co nie znaczy, że zdjęcie to nadaje się do wywołania i powieszenia w galerii fotografii. Musimy jeszcze usunąć wszelkiego rodzaju zakłócenia. Na końcu chcemy też nasze zdjęcie „upiększyć”. Wszystkie te czynności mają na celu nie tylko podniesienie walorów estetycznych zdjęcia, ale również poprawią widoczność drobnych detali i szczegółów obserwowanych obiektów astronomicznych.

Usunięcie zaświecenia

Zapewne za kilka lat algorytmy sztucznej inteligencji pozwolą na zautomatyzowanie wszystkich opisanych poniżej procesów. Na razie metody automatyczne są często gorsze niż te, w których główny udział ma żywy operator.

Funkcję usuwania gradientu posiadają m.in. Pixinsight, AstroPixelProcessor, Siril. Dostępne są też dodatkowe moduły do Photoshopa (GradientXTerminator) lub osobne programy przeznaczone tylko do tego celu, takie jak wykorzystujący AI GraXpert.

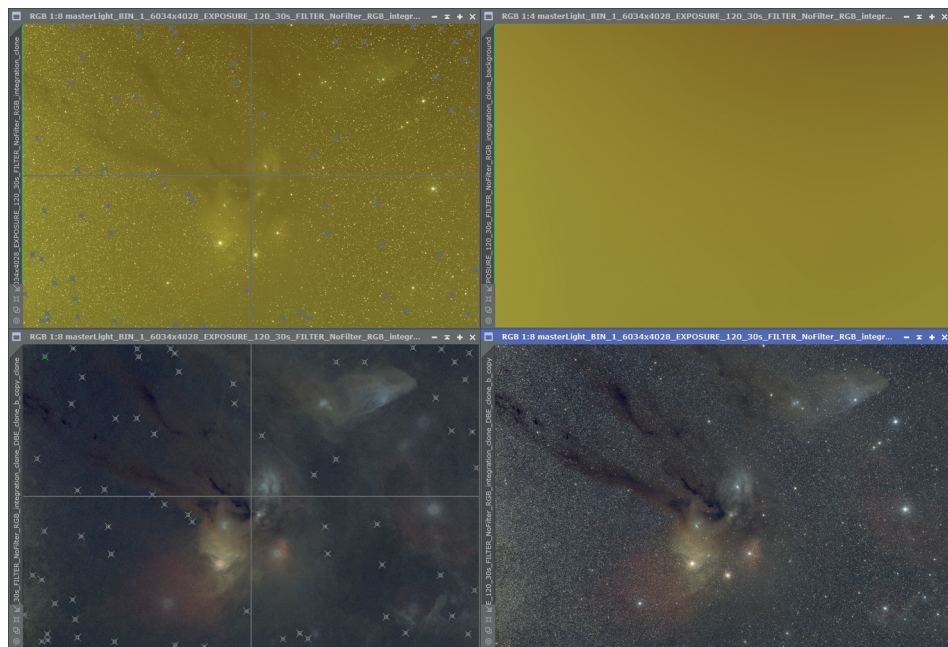
Odejmuwanie modelu zaświecenia jest używane przeważnie w czasie pierwszej korekty zdjęcia, gdy usuwane jest niechciane zaświecenie. Dzielenie wykorzystuje się przy dodatkowych korektach winiety, do korekty nierównomiernego rozłożenia odcieni lub balansu kolorów w zdjęciu (np. lewa strona zdjęcia jest bardziej zielona, a prawa bardziej fioletowa).

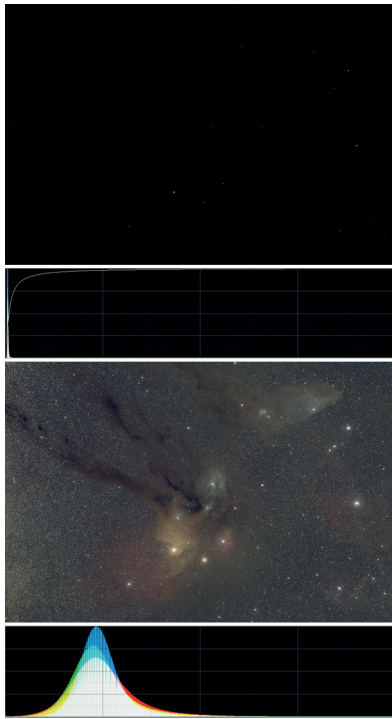
W następnych krokach wartość badawcza zdjęcia będzie malała na korzyść wzrostu wartości estetycznej, ponieważ weźmiemy się za upiększanie przez modyfikację poziomu sygnału.

Dotarliśmy do momentu, w którym automatyczne algorytmy nie dają najlepszych efektów. Nie obejdzie się bez asysty człowieka, który musi robotę wykonać ręcznie (na szczęście wciąż przy pomocy komputera). Naszym głównym zadaniem jest oszacowanie ilości dodatkowego zaświecenia zdjęcia wniesionego przez sztuczne światło miast, miasteczek i generalnie przez wszystko, co nocą emituje światło na Ziemi, w tym zjawiska naturalne, jak np. „air glow”. W naszym programie do obróbki zdjęć musimy ręcznie wskazać punkty na obrazie stanowiące, naszym zdaniem, tło (tzw. punkty próbkowania tła) i niezwiązane z żadnymi obiektami (np. mgławicami, galaktykami), na których rejestracji nam zależy. Na podstawie jasności obrazu w tych punktach ustalany jest model zaświecenia zdjęcia. Później jest on odejmowany od zdjęcia. Sam proces odejmowania gradientu jasności wymaga dużej uwagi i dokładności. Zły wybór punktów, które będą użyte do zbudowania modelu, może doprowadzić do usunięcia ze zdjęcia kluczowych informacji, takich jak np. bardzo słaby sygnał mgławic, lub zaburzyć kolorystykę zdjęcia. Dobrą praktyką jest sprawdzenie, czy wybrane przez nas punkty pokrywają się rzeczywiście z miejscami bez obiektów astronomicznych oraz czy nie nachodzą na jasne gwiazdy. Cały proces przedstawiony jest na rysunku 1.

Oczywiście, jak to zwykle bywa, najlepszy efekt uzyskuje się metodą prób i błędów. Po wielu iteracjach wyboru punktów tła dochodzimy do momentu, kiedy osiągniętego wyniku nie udaje się już znacząco poprawić. Uzyskujemy wtedy obraz nieba o sygnale najbardziej zbliżonym do rzeczywistości (na jaki pozwala nasz materiał i sprzęt fotograficzny). Nasze zdjęcie uzyskuje również wartość badawczą – poziom sygnału w zdjęciu jest proporcjonalny do jego poziomu w rzeczywistości.

Rys. 1. Lewy górny róg: Rozciągnięte zdjęcie nieba z naniesionymi punktami próbkowania tła. Prawy górny róg: obliczony na podstawie punktów model sztucznego zaświecenia. Lewy dolny róg: kontrola poprawności wyboru punktów na rozciągniętym zdjęciu z odjętym modelem tła i z usuniętymi gwiazdami. Prawy dolny róg: rozciągnięte zdjęcie po usunięciu modelu tła





Rys. 2. Zdjęcie nieba oraz rozkłady jasności przed i po rozciągnięciu

Słów kilka o rozciąganiu

Obraz nieba w formie surowej jest zazwyczaj mało atrakcyjny wizualnie. Aby uwidocznic obiekty znajdujące się na zdjęciu, stosuje się dedykowane krzywe konwersji obrazu. Zazwyczaj po przeprowadzeniu takiej konwersji obserwujemy „rozciągnięcie” rozkładu jasności zdjęcia (rys. 2). Krzywe konwersji najczęściej parametryzuje się przez ustawienie punktu czerni, tonów średnich i punktu saturacji. Funkcje te są bardzo wydajne w uwidacznianiu subtelnych różnic w poziomach sygnału w „cieniach” zdjęcia wynikowego, ale do ich poprawnej pracy wymagana jest bezwzględnie poprawnie przeprowadzona kalibracja (o której mowa w Δ_{24}^4).

Zwiększenie walorów estetycznych zdjęcia

Zdjęcie po rozciągnięciu wygląda co prawda lepiej, jednak nadal w tej „surowej” formie widzimy tylko niewielki ułamek jego możliwości. Obraz zawiera wiele niewidocznych i mało kontrastowych detali. W kolejnych krokach naszym zadaniem jest maksymalne „wyciągnięcie” potencjału zdjęcia. Robimy to dość agresywnymi metodami przetwarzania obrazu, do momentu, kiedy szum wynikający z tych modyfikacji staje się nieakceptowalny, a próby jego usunięcia dają mało estetyczne (lub mało wiarygodne) wyniki. Zdarza się, że poprzez takie „upiększanie” uzyskujemy efekt zupełnie odwrotny – obraz najzwyczajniej przestaje być „przyjemny dla oka”. Dlatego ważne jest, aby na początku ustalić sobie jasny cel, jaki chcemy osiągnąć. Na przykład aby pokazać szczegóły w strukturach ciemnych mgławic, musimy znacząco zmniejszyć widoczność gwiazd. I odwrotnie – jeżeli naszym celem jest pokazanie dużej gromady gwiazd, wtedy „pierwsze skrzypce” będą grały gwiazdy, kosztem słabszej widoczności mgławic.

Niestety na tym etapie przetwarzania zdjęć nocnego nieba nie istnieje typowy schemat działania. Metoda, którą zastosowało się w przypadku jednego zdjęcia, niekoniecznie da tak samo dobre efekty w przypadku innego zdjęcia. Stąd sposobem na udane kadry jest przede wszystkim uświadomienie sobie, jak działają algorytmy przetwarzania obrazu, i stosowanie ich zamiennie, tak aby znaleźć potencjalne korzyści ze stosowania każdej z metod. Cały proces można żartobliwie podsumować na schemacie umieszczonym poniżej.



Rozwiązanie zadania F 1097.

Długość fali de Broglie’a elektronu o pędzie p wynosi: $\lambda = h/p$. Współczynnik załamania fali na powierzchni metalu równy jest stosunkowi długości fali w próżni, λ , do długości fali wewnątrz metalu, λ_m : $n = \lambda/\lambda_m$. Pęd elektronu o energii E wynosi $p = \sqrt{2m_e E}$. Energia elektronu padającego na powierzchnię po przyspieszeniu w potencjale U wynosi $E_p = e \cdot U$, a wewnątrz metalu $E_m = e \cdot U + W$. Orzujemyemy:

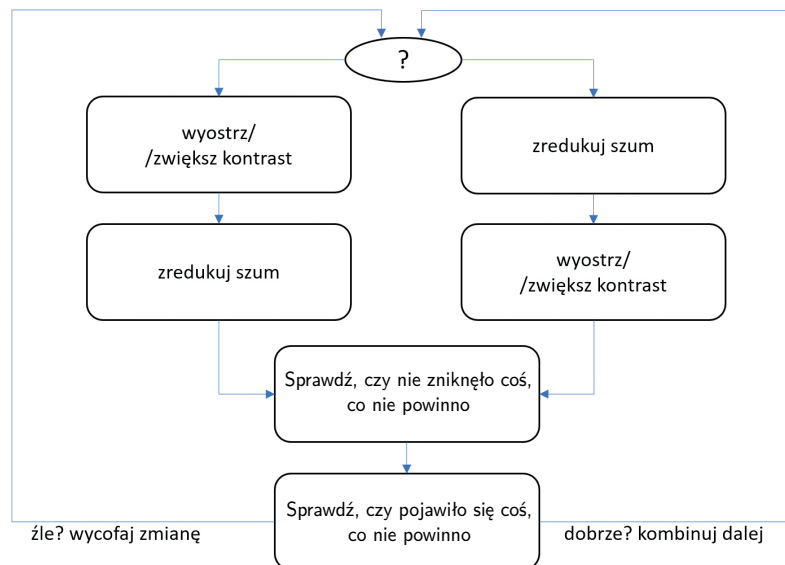
$$n = \sqrt{\frac{E_m}{E_p}} = \sqrt{1 + \frac{W}{e \cdot U}}$$

Brakuje nam oszacowania wartości U . Przyjmijmy, że przed skierowaniem na powierzchnię metalu długość fali de Broglie’a wiązki wynosi $\lambda = 10^{-10}$ m. Oznacza to, że elektrony były przyspieszane w potencjale:

$$U = \frac{h^2}{2m_e \lambda^2 e}$$

liczbowo $U = 151$ V. Odpowiadający tej wartości współczynnik załamania wynosi $n \approx 1,016$.

W obliczaniu pędu elektronu nie uwzględnialiśmy poprawek relatywistycznych, co uzasadnia otrzymana wartość $e \cdot U = 151$ eV, która jest pomijalnie mała w porównaniu z masą spoczynkową elektronu, $m_e c^2 = 511$ keV. Średni potencjał wewnątrz metali „odczuwany” przez elektrony jest większy niż wynikający z pracy wyjścia i wynosi 10 V do 15 V, co prowadziłoby do wartości $n \leq 1,05$ V.

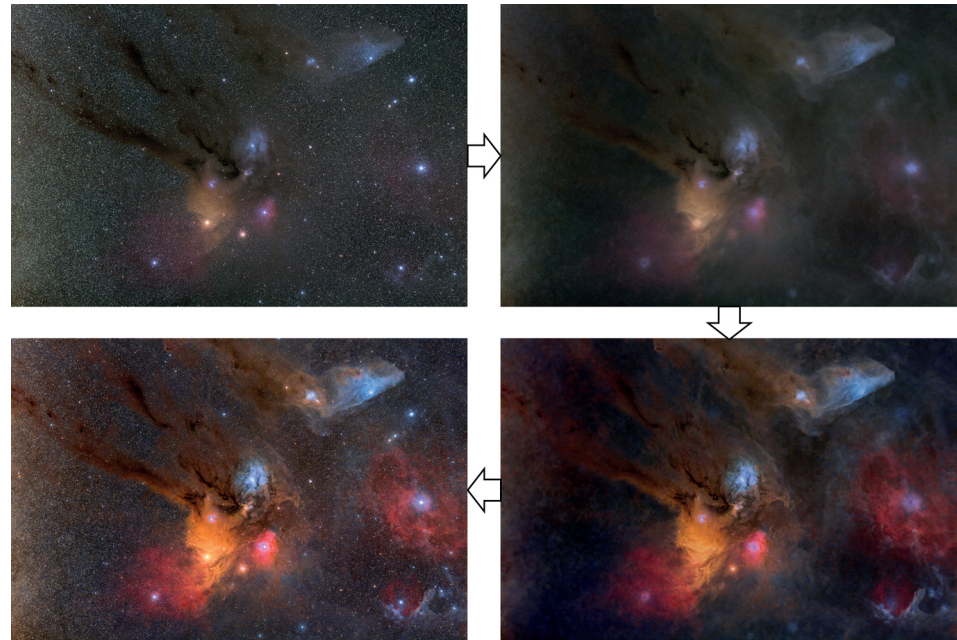


Do metod stosowanych na tym etapie należą wszelkie metody selektywnego/lokalnego zwiększania kontrastu zdjęcia, redukcji rozmiaru gwiazd (dekonwolucji), metody selektywnego i globalnego wyostrażania obrazu, saturacja lub selektywna korekta barw oraz odszumianie zdjęć. Ponadto w ostatnich latach bardzo rozwinęły się algorytmy oparte na AI. Są to głównie metody służące do wyostrażania obrazu, zmniejszania rozmiarów gwiazd w oparciu o obraz rozmycia gwiazd w obrazie surowym, odszumiania obrazu oraz usuwania



gwiazd z obrazu. Metody te wniosły w ostatnim okresie wiele nowych możliwości i ulepszeń całego procesu, nie mniej jednak, jak każde algorytmy oparte na modelach AI, wymagają precyzyjnej kontroli jakości otrzymywanych wyników.

Jak długo trwa ta końcowa faza przetwarzania zdjęcia? To zależy – czasami jest to kilka godzin, i już wiadomo, że „to jest to”. Czasami wykonuje się wiele prób przez wiele dni, na różne sposoby i dalej ma się wrażenie, że „czegoś brakuje”. Ostatecznie okazuje się, że udane zdjęcie wynikowe uzyskać można w efekcie połączenia kilku wcześniejszych nieudanych prób, z których każda dodaje coś cennego do naszego zdjęcia (rys. 3).



Rys. 3. Lewy górny róg: rozciągnięte zdjęcie bazowe. Prawy górny róg: zdjęcie bazowe pozbawione gwiazd w celu lepszego uwidocznienia struktur mgławicowych. Prawy dolny róg: zdjęcie po wyostrzeniu („wyciągnięciu”) detali w obszarze mgławic. Lewy dolny róg: efekt końcowy

Podsumowanie

Niezależnie od wybranego sprzętu do astrofotografii, technik zbierania materiału czy wykorzystanego oprogramowania – na koniec musimy wspomnieć o dwóch najważniejszych elementach wyposażenia astrofotografa:

- **Ciepłe ubrania** – bez nich sesja astrofotograficzna zakończy się po 1–2 godzinach (i to nawet w sierpniu). Jeżeli pod koniec lata, wieczorem zobaczycie na stacji benzynowej ludzi poubieranych, jakby zaraz miała zaatakować zima – to najpewniej jadą oni na obserwacje nieba lub sesję astrofotograficzną.
- **Naładowany telefon komórkowy** – szczególnie, kiedy wybieracie się robić zdjęcia sami. Odpowiednio ciemne miejsca to przeważnie polne drogi i łąki – zawsze łatwiej zadzwonić do lokalnego sołtysa z prośbą o wyciągnięcie z tarapatów traktorem, niż pieszo wędrować po pomoc do najbliższego gospodarstwa, a to się przytrafia nawet najlepszym.

A na poważnie, mam nadzieję, że ta krótka seria artykułów uchyliła rąbka tajemnicy na temat tego, jak wykonać amatorskie zdjęcia nocnego nieba. Coraz doskonalsze aparaty fotograficzne, obiektywy oraz oprogramowanie dają możliwości sięgania daleko w niebo i obrazowania go „po swojemu”. Nie ma w tym żadnych czarów, a jedynie trochę wiedzy i przede wszystkim konsekwencji w działaniu, która jest kluczowa dla osiągnięcia dobrego efektu końcowego. Jeżeli jest w tym trochę magii, to jest nią odkrycie, że „czarna pustka” nad naszą głową nie jest ani czarna, ani pusta, ale pełna pięknych struktur, które wymagają jedynie „odrobiny” naszego wysiłku, by „domowymi” sposobami ukazać je na zdjęciu.

Zatem do dzieła! Choć ostrzegam, to uzależnia...

Amatorska fotografia to nie tylko piękne zdjęcia! Potencjał ukryty w naszych popularnych „lustrzankach” czy „bezlusterkowcach” pozwala na wykreślanie krzywych jasności gwiazd zmiennych, a nawet rejestrację zmian jasności wynikających z tranzytów niektórych egzoplanet.

Opublikowany w tym numerze Kącik Początkującego Olimpijczyka nr 66 poświęcony jest zastosowaniu przekształceń afinicznych w rozwiązywaniu zadań olimpijskich. W niniejszym artykule przedstawiam nieco bardziej abstrakcyjne spojrzenie na tę tematykę.

Uogólniona płaszczyzna

Trójkę

$$\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \sim),$$

w której \mathcal{P} i \mathcal{L} są zbiorami, a \sim jest relacją pomiędzy ich elementami (czyli dla każdego $P \in \mathcal{P}$ i $\ell \in \mathcal{L}$ zdanie $P \sim \ell$ jest prawdziwe lub fałszywe), nazywamy *uogólnioną płaszczyzną*. Jest to faktycznie obiekt niezmiernie ogólny, gdyż elementy zbiorów \mathcal{P} i \mathcal{L} mogą być czymkolwiek. Dla przykładu, \mathcal{P} może być zbiorem potraw, \mathcal{L} – zbiorem ludzi, a relacja $P \sim \ell$ oznacza, że ℓ lubi P . I to naprawdę jest pełnoprawna uogólniona płaszczyzna!

Chcąc jednak pozostać nieco bliżej planimetrii, umownie będziemy nazywać:

\mathcal{P} – zbiorem punktów,

\mathcal{L} – zbiorem prostych,

\sim – relacją incydencji.

Zamiast punkt P jest incydentny z prostą ℓ możemy powiedzieć: *punkt P leży na prostej ℓ* lub *prosta ℓ przechodzi przez punkt P* . Ważna uwaga – na płaszczyźnie euklidesowej proste w pewnym sensie są zbiorami punktów i relacja \sim jest po prostu relacją \in . W ogólności wcale nie musi tak być.

Punkty P_1, P_2, \dots nazywamy *współliniowymi*, gdy istnieje prosta ℓ , która przechodzi przez każdy z nich. Jeśli przez pewien punkt P przechodzi każda z prostych ℓ_1, ℓ_2, \dots , to nazywamy te proste *współpękowymi*. Proste ℓ_1 i ℓ_2 , które nie są współpękowe, nazywamy *równoległymi*. Piszemy wówczas $\ell_1 \parallel \ell_2$. Dodatkowo zakładamy, że każda prosta jest równoległa do samej siebie.

Płaszczyzna afiniczna

Aby nieco ograniczyć liczbę obiektów, z którymi będziemy pracować, wprowadzamy pojęcie *płaszczyzny afinicznej*, która – oprócz tego, że jest uogólnioną płaszczyzną – spełnia dodatkowo trzy aksjomaty. Każdy z nich opiszę krótko, podając, w jakim celu jest wprowadzony i jakie daje korzyści.

Aksjomat (A1). *Przez każde dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.*

Możemy zatem bez wyrzutów sumienia mówić *prosta AB* , bo taka prosta istnieje i jest dokładnie jedna. Bezpośrednią konsekwencją tego aksjomatu jest to, że każde dwie proste albo są równoległe, albo istnieje dokładnie jeden punkt incydentny z nimi dwiema. W tym drugim przypadku będziemy mówić, że proste *się przecinają*, a wspomniany punkt nazwiemy ich *punktem przecięcia*. Jeśli trójka punktów (A, B, C) nie jest współliniowa, to będziemy ją nazywać

trójkątem ABC . Jeżeli czwórka punktów (A, B, C, D) spełnia warunki: $AB \parallel CD$ i $BC \parallel DA$ oraz te cztery proste są różne, to mówimy o *równoległoboku $ABCD$* .

Aksjomat (A2). *Dla każdego punktu P i prostej ℓ istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkt P i równoległa do prostej ℓ .*

Dzięki temu aksjomatowi relacja równoległości jest przechodnia: jeżeli $\ell_1 \parallel \ell_2$ i $\ell_2 \parallel \ell_3$, to $\ell_1 \parallel \ell_3$ – w przeciwnym razie istniałby punkt, przez który przechodzą dwie proste (ℓ_1 i ℓ_3) równoległe do ℓ_2 . Możemy zatem podzielić zbiór \mathcal{L} na takie rozłączne parami podzbiory \mathcal{K}_i indeksowane elementami i z pewnego zbioru I , że zachodzi równoważność $\ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow \ell_1, \ell_2 \in \mathcal{K}_i$ dla pewnego $i \in I$. Podzbiory te, czyli klasy równoległości prostych, nazywamy *kierunkami*.

Drugim ważnym wnioskiem jest to, że każdy trójkąt ABC można uzupełnić do równoległoboku $ABCD$. Konstrukcja jest następująca. Niech ℓ_1 będzie prostą równoległą do AB , przechodzącą przez C oraz niech ℓ_2 będzie prostą równoległą do BC , przechodzącą przez A . Mamy $\ell_1 \parallel AB \nparallel BC \parallel \ell_2$. Oznacza to, że proste ℓ_1 i ℓ_2 należą do różnych kierunków, więc się przecinają. Jeśli D jest ich punktem przecięcia, to $ABCD$ jest równoległobokiem.

Aksjomat (A3). *Istnieje trójkąt.*

Ten aksjomat zapobiega sytuacji zupełnie nieciekawej, w której wszystkie punkty leżą na jednej prostej. Można powiedzieć więcej: dla każdej prostej istnieją co najmniej dwa punkty, przez które ta prosta nie przechodzi – pierwszy wprost z aksjomatu, drugi z konstrukcji równoległoboku. Niech ABC będzie trójkątem, który uzupełniamy do równoległoboku $ABCD$. Dla dowolnej prostej ℓ mamy $\ell \nparallel AB$ lub $\ell \nparallel BC$. W pierwszym przypadku prostą ℓ przecinają proste AB i CD , które są różne i równoległe – stąd na prostej ℓ leżą co najmniej dwa punkty. W drugim przypadku jest analogicznie. Zatem każda prosta przechodzi przez co najmniej dwa punkty. Teraz już możemy utożsamić prostą ze zbiorem punktów, przez które przechodzi! Zamiast $P \sim \ell$ możemy teraz pisać $P \in \ell$.

Kolineacje płaszczyzny afinicznej

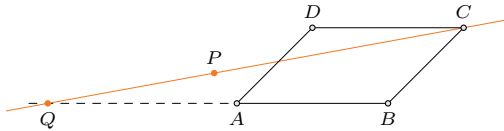
Przekształcenie $L : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ nazywamy *kolineacją płaszczyzny Π* , jeśli jest bijekcją oraz spełnia następujący warunek: dla każdej trójki współliniowych punktów A, B, C punkty $L(A), L(B), L(C)$ również są współliniowe.

Twierdzenie. *Niech L będzie kolineacją płaszczyzny afinicznej. Wówczas dla każdej prostej $\ell \in \mathcal{L}$ zbiór $L(\ell)$ też jest prostą.*

Mówiąc prościej, obrazami prostych są proste.

Dowód. Niech punkty A i B leżą na prostej ℓ . Przez punkty primowane zawsze oznaczamy będziemy obrazy punktów nieprimowanych. Oznaczmy $\ell' = A'B'$.

Z definicji kolineacji wynika, że dla każdego $X \in \ell$ zachodzi $X' \in \ell'$, więc $L(\ell) \subseteq \ell'$. Trzeba jeszcze wykazać przeciwnie zawieranie. Przypuśćmy, że tak nie jest i niech punkt $C \notin \ell$, ale $C' \in \ell'$. Ponieważ $A', B', C' \in \ell'$, obrazy prostych AB, BC i CA są zawarte w ℓ' . Uzupełnijmy trójkąt ABC do równoległoboku $ABCD$. Niech P będzie dowolnym punktem różnym od A, B, C, D . Wówczas $CP \parallel AB$ lub $AP \parallel BC$. W pierwszym przypadku proste CP i AB przecinają się w pewnym punkcie Q . Ponieważ Q leży na AB , mamy $Q' \in \ell'$. Również $C' \in \ell'$, więc $P' \in \ell'$.



Drugi przypadek jest analogiczny. Wnioskujemy stąd, że $L(\mathcal{P} \setminus \{D\}) \subseteq \ell'$. Funkcja $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ jest bijekcją, więc co najwyżej jeden punkt (D') nie leży na prostej ℓ' . Jest to poszukiwana sprzeczność, bo powinny być co najmniej dwa takie punkty. \square

Jednym z najważniejszych wniosków jest to, że przekształcenie odwrotne do kolineacji płaszczyzny afinicznej również jest kolineacją płaszczyzny afinicznej. Kolejne, nietrudne wnioski pozostawiam Czytelnikowi: obrazami/przeciwobrazami trójkątów są trójkąty, par prostych równoległych – pary prostych równoległych, par prostych przecinających się – pary prostych przecinających się, a równoległoboków – równoległoboki.

Płaszczyzna afiniczna \mathbb{R}^2

Od teraz będziemy prowadzić rozważania dla płaszczyzny euklidesowej \mathbb{R}^2 , która, jak łatwo sprawdzić, z punktami $P = (x, y)$ oraz prostymi $\ell = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) spełnia definicję płaszczyzny uogólnionej z relacją \in oraz aksjomaty płaszczyzny afinicznej. Celem jest następujące

Twierdzenie. Kolineacje płaszczyzny \mathbb{R}^2 są tym samym, co przekształcenia afiniczne, czyli odwzorowania bijektywne $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, spełniające następujące warunki:

- (1) obrazami prostych są proste;
- (2) jeśli $\overrightarrow{SX} = x\overrightarrow{SA}$ dla pewnej liczby rzeczywistej x , to $\overrightarrow{F(S)F(X)} = x\overrightarrow{F(S)F(A)}$.

Dowód. Każde przekształcenie afiniczne jest kolineacją – wynika to z warunku (1). Załóżmy zatem, że przekształcenie L jest kolineacją \mathbb{R}^2 . Warunek (1) już udowodniliśmy, dowód warunku (2) podzielimy na kilka kroków. Tak jak poprzednio, niech punkty primowane będą obrazami punktów nieprimowanych.

Krok 1. Jeśli $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$, to $\overrightarrow{A'_1B'_1} = \overrightarrow{A'_2B'_2}$. Jeżeli proste A_1B_1 i A_2B_2 są różne, to $A_1B_1B_2A_2$ jest równoległobokiem, więc jego obraz $A'_1B'_1B'_2A'_2$ też jest równoległobokiem. W przeciwnym razie rozważamy dodatkowy wektor $\overrightarrow{A_3B_3}$, który leży poza prostą A_1B_1 . Korzystając dwukrotnie z pierwszego przypadku, mamy $\overrightarrow{A'_1B'_1} = \overrightarrow{A'_3B'_3} = \overrightarrow{A'_2B'_2}$.

Niech V będzie zbiorem wektorów swobodnych, dwuwymiarowych, o współrzędnych rzeczywistych. Korzystając z powyższego, możemy zdefiniować przekształcenie $T: V \rightarrow V$ indukowane przez kolineację L w następujący sposób: $T(\vec{v}) = \overrightarrow{A'B'}$, dla punktów A i B spełniających równość $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Przekształcenie T jest poprawnie i jednoznacznie określone za pomocą L . Jeśli znamy T oraz wiemy, że $L(S) = S'$, to możemy jednoznacznie odtworzyć przekształcenie L za pomocą równości $\overrightarrow{S'X'} = T(\overrightarrow{SX})$.

Krok 2. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ oraz $T(t\vec{v}) = tT(\vec{v})$ dla każdego wymiernego t .

Rozważmy takie punkty A, B, C , że $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Wtedy

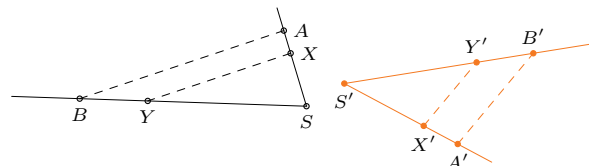
$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = T(\vec{u}) + T(\vec{v}).$$

Dalej indukcyjnie $T((n+1)\vec{v}) = T(n\vec{v} + \vec{v}) = T(n\vec{v}) + T(\vec{v}) = nT(\vec{v}) + T(\vec{v}) = (n+1)T(\vec{v})$ z warunkiem początkowym $n=1$. Stąd $mT(\frac{n}{m}\vec{v}) = T(n\vec{v}) = nT(\vec{v})$, więc $T(\frac{n}{m}\vec{v}) = \frac{n}{m}T(\vec{v})$. Pozostaje zauważyć, że $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$.

Rozważmy proste ℓ_a i ℓ_b przecinające się w punkcie S . Niech $A, B \neq S$ będą odpowiednio punktami na prostych ℓ_a i ℓ_b oraz niech $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$. Określmy funkcję $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w taki sposób, że $T(x\vec{a}) = \phi(x)T(\vec{a})$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Analogicznie niech $T(y\vec{b}) = \psi(y)T(\vec{b})$. Z poprzedniego kroku wynika, że $\psi(t) = \phi(t) = t$ dla wszystkich t wymiernych.

Krok 3. $\phi = \psi$.

Niech $x = y$ oraz $\overrightarrow{SX} = x\vec{a}$ i $\overrightarrow{SY} = y\vec{b}$. Mamy $XY \parallel AB$, więc $X'Y' \parallel A'B'$. Stąd $\phi(x) = \psi(y)$.



Krok 4. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ dla x i y rzeczywistych.

Zachodzą równości: $\phi(x)T(\vec{a}) + \phi(y)T(\vec{a}) = T(x\vec{a}) + T(y\vec{a}) = T(x\vec{a} + y\vec{a}) = T((x+y)\vec{a}) = \phi(x+y)T(\vec{a})$.

Krok 5. Funkcja ϕ jest niemalejąca.

Rozważmy wektor $\vec{v} = x\vec{a} + \vec{b}$. Wektor $x\vec{v}$ jest do niego równoległy, więc wektory $T(\vec{v}) = \phi(x)T(\vec{a}) + T(\vec{b})$ i $T(x\vec{v}) = \phi(x^2)T(\vec{a}) + \phi(x)T(\vec{b})$ są równoległe. Mają one zatem proporcjonalne współczynniki przy $T(\vec{a})$ i $T(\vec{b})$, co prowadzi do równości $\phi(x^2) = \phi(x)^2$. Wnioskujemy stąd, że jeśli $t \geq 0$, to $\phi(t) = \phi(\sqrt{t})^2 \geq 0$. Dla $y \geq x$ zapiszmy $y = x + t$. Mamy $\phi(y) = \phi(x+t) = \phi(x) + \phi(t) \geq \phi(x)$.

Krok 6. $\phi(t) = t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Funkcja ϕ jest niemalejąca oraz identycznościowa na zbiorze liczb wymiernych, więc jest identycznościowa na zbiorze liczb rzeczywistych, gdyż zbiór liczb wymiernych jest w nim gęsty.

Zauważmy, że teza kroku 6 tłumaczy się na równość z warunku (2). Uff, koniec dowodu!

Elementarnie o sumie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Jarosław GÓRNICKI*

Poszukiwanie odpowiedzi na trudne pytania może prowadzić do narodzin nowej teorii. Oto dwa odkrycia, które miały wpływ na powstanie teorii szeregów.

Nicole Oresme około 1350 roku zauważył, że skoro $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+k} \geq \geq k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}$ dla $k = 1, 2, \dots$, to

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} \geq \geq 1 + \frac{k}{2} \rightarrow \infty, \text{ gdy } k \rightarrow \infty.$$

Wykazał więc, że suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ jest nieskończona. Trudno to przewidzieć, obliczając sumy początkowych wyrazów, bo $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} > 10$ dopiero dla $k \geq 12376$.

A co można powiedzieć o sumie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$? Problem wyznaczenia jej wartości okazał się trudny. Na odpowiedź przyszło nam czekać do drugiej połowy XVII wieku. Można jej upatrywać w pracach Johannesa Hudda (1656), Izaaka Newtona (1665), Nikolausa Mercatora, Johna Wallisa i Jamesa Gregory'ego (1668) nad kwadraturą hiperboli, tj. obliczaniem pola między osią OX a wykresem funkcji $y(x) = \frac{1}{1+x}$, gdy $0 \leq x \leq a$ (gdzie zastosujemy współczesne oznaczenia i nazewnictwo).

Przedstawimy teraz elementarny dowód tego, że

$$\spadesuit \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

Niech $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $y_n = (1 + \frac{1}{n-1})^n$ dla $n \geq 2$. Oczywiście

$$(1) \quad x_n \leq y_n \text{ dla } n \geq 2.$$

Ponadto

$$(2) \quad \text{ciąg } \{x_n\} \text{ jest niemalejący, a ciąg } \{y_n\} \text{ jest nierosnący,}$$

co wykażemy za pomocą nierówności Jacoba Bernoulliego (1689): $(1+x)^n \geq \geq 1 + nx$ dla $x > -1$ i naturalnego n (znanej już Newtonowi czy René-François de Sluse). Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \\ \frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})} \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})} \left(1 + \frac{1}{(n-1)(n+1)}\right)^{n+1} \geq \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 1. \end{aligned}$$

Stwierdzenia (1) i (2) gwarantują istnienie granic ciągów $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. Ponieważ $\frac{y_n}{x_{n-1}} = \frac{n}{n-1} \rightarrow 1$, więc granice te są równe – ich wspólną wartość oznaczmy jako e (jest to słynna liczba Eulera). Ponownie powołując się na (1) i (2), wnioskujemy, że $x_n \leq e \leq y_n$, czyli

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n, \quad n \geq 2.$$

*Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska



Rozwiązanie zadania M 1783.

Odpowiedź: Jedyną trójką spełniającą warunki zadania jest $(1, 1, 1)$.

Zauważmy, że gdyby liczby pierwsze $a + bc$, $b + ac$, $c + ab$ były parami różne, to ich iloczyn dzieliłby $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$, więc w szczególności zachodziłaby nierówność:

$$(bc + a)(ca + b)(ab + c) \leq \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1),$$

równoważna następującej:

$$(abc - 1)(a^2 + b^2 + c^2 + 1) \leq 0.$$

Oczywiście ostatnia nierówność nie może zajść poza przypadkiem trójki $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, która spełnia warunki zadania.

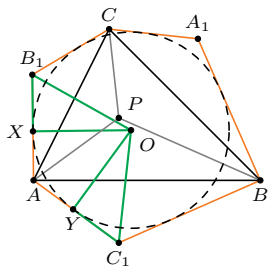
Wobec tego dwie z danych liczb pierwszych są równe, bez straty ogólności założmy, że $a + bc = b + ac$.

Po przekształceniach mamy $(a - b)(c - 1) = 0$, czyli $a = b$ lub $c = 1$. Jeśli $a = b$, to skoro $a + bc = a(c + 1)$ jest liczbą pierwszą, to $a = b = 1$. Jednakże wtedy $c + 1$ jest liczbą pierwszą i dzieli $4(c^2 + 1) = 4(c - 1)(c + 1) + 8$. Jest to możliwe wtedy, gdy $c + 1$ dzieli 8, a więc $c = 1$. Ponownie otrzymaliśmy trójkę $(1, 1, 1)$.

Rozpatrzmy przypadek $c = 1$ i przypuśćmy, że któraś z liczb a, b jest większa od 1. Wówczas $ab + 1$, $a + b$ są liczbami pierwszymi większymi od 2, które dzielą $2(a^2 + 1)(b^2 + 1)$, zatem dzielą też $(a^2 + 1)(b^2 + 1)$. Bez szkody dla ogólności założmy, że $a < b$, wtedy $ab + 1 > a^2 + 1$, więc $ab + 1 \mid b^2 + 1$, skąd $ab + 1 \mid b^2 + 1 - (ab + 1) = b(b - a)$. Jednakże liczby b , $(b - a)$ są dodatnie i mniejsze od $ab + 1$ – sprzeczność.



Rozwiązanie zadania M 1785.



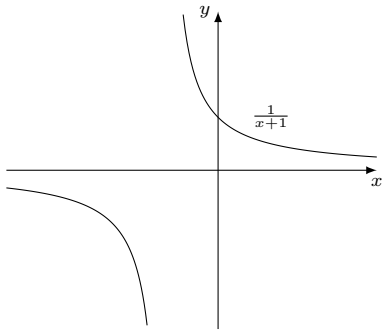
Niech Ω będzie okręgiem wpisanym w dany sześciokąt oraz niech X i Y będą punktami styczności tego okręgu odpowiednio z odcinkami AB_1 oraz AC_1 . Zauważmy, że $AB_1 = AP = AC_1$ oraz $AX = AY$, stąd

$$B_1X = AB_1 - AX = AC_1 - AY = C_1Y.$$

Zatem trójkąty prostokątne AXB_1 i OYC_1 są przystające (bkb). Wobec tego, ponieważ B_1O i C_1O są dwusiecznymi kątów AB_1C i AC_1B , dostajemy

$$\begin{aligned} \sphericalangle APC &= \sphericalangle AB_1C = 2\sphericalangle XB_1O = \\ &= 2\sphericalangle YC_1O = \sphericalangle AC_1B = \\ &= \sphericalangle APB. \end{aligned}$$

Podobnie $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC$, skąd teza.



Kto zna całkę Riemanna, szybko dojdzie do celu:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \right) =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{1 + \frac{k}{N}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2. \quad \text{gdzie}$$

Zauważmy teraz, że

$$S_{2N} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2N} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2N} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2N} \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2N} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} \right) =$$

$$= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N}.$$

Z własności funkcji wykładniczej mamy $e^{S_{2N}} = \prod_{n=N+1}^{2N} e^{\frac{1}{n}}$, zatem z nierówności (3)

otrzymujemy oszacowanie

$$\prod_{n=N+1}^{2N} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{n}} \leq \prod_{n=N+1}^{2N} e^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{n=N+1}^{2N} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n}{n}},$$

$$\prod_{n=N+1}^{2N} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{N+2}{N+1} \cdot \frac{N+3}{N+2} \cdot \dots \cdot \frac{2N+1}{2N} = 2 - \frac{1}{N+1},$$

$$\prod_{n=N+1}^{2N} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{N+1}{N} \cdot \frac{N+2}{N+1} \cdot \dots \cdot \frac{2N}{2N-1} = 2.$$

Zatem

$$2 - \frac{1}{N+1} \leq e^{S_{2N}} \leq 2.$$

Powyższa nierówność dowodzi, że $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{S_{2N}} = 2$.

Określenie logarytmu naturalnego i ciągłość funkcji wykładniczej (e^x) zapewniają, że $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} = \ln 2$.

Ponieważ, $S_{2N+1} = S_{2N} + \frac{1}{2N+1} \rightarrow \ln 2$, gdy $N \rightarrow \infty$, więc

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2,$$

co kończy dowód.

Do wyznaczenia przybliżonej wartości $\ln 2$ warto użyć szybciej zbieżnego rozwinięcia. James Gregory (1668) do obliczania logarytmów stosował równość

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

Zatem

$$\ln 2 = \ln \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right) \approx 0,693.$$

Suma pierwszych trzech składników daje przybliżenie $\ln 2$ z błędem względnym równym około 0,2%. Aby osiągnąć taką dokładność, potrzebowalibyśmy zsumować ponad 3000 pierwszych składników sumy (♠).

Rachunek całkowy, sformułowany w czasach, o których piszemy, pozwalał otrzymywać ogólniejsze rezultaty.

Dla $x \neq -1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Całkując to wyrażenie wyraz po wyrazie, mamy

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt.$$

Jeśli $0 \leq x \leq 1$, to

$$\int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

gdy $n \rightarrow \infty$, a wtedy $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$. Przyjmując $x = 1$, otrzymujemy (♠).

Przyjmując $x = -\frac{1}{2}$ w rozwinięciu $\ln(1+x)$, otrzymamy ponadto wzór

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

Z notatek znalezionych po śmierci Newtona wynika, że około 1665 roku znał on już rozwinięcie

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

i w elegancki sposób obliczył wartości $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 7$ do 57 miejsca po przecinku. Uzyskane wyniki zachował jednak w tajemnicy.

Podane rozwinięcie daje dobre rezultaty dla małych wartości x , dodatnich lub ujemnych, więc Newton obliczył przybliżone wartości dla

$$\ln(1,2) = \ln(1+0,2), \quad \ln(0,98) = \ln(1-0,02),$$

$$\ln(0,9) = \ln(1-0,1), \quad \ln(0,8) = \ln(1-0,2),$$

a następnie wykorzystał równości

$$\ln 2 = \ln \left(\frac{1,2 \cdot 1,2}{0,8 \cdot 0,9} \right) = 2 \ln(1,2) - (\ln(0,8) + \ln(0,9)),$$

$$\ln 3 = \ln \left(\frac{2 \cdot 1,2}{0,8} \right) = (\ln 2 + \ln(1,2)) - \ln(0,8),$$

$$\ln 5 = \ln \left(\frac{2 \cdot 2}{0,8} \right) = 2 \ln 2 - \ln(0,8),$$

$$\ln 7 = \ln \sqrt{\frac{100 \cdot 0,98}{2}} = \frac{1}{2} (10(\ln 2 + \ln 5) + \ln(0,98) - \ln 2).$$

Chapeau bas!

W prawo czy lewo

Konstrukcja kortu tenisowego nie faworyzuje graczy prawo- ani leworęcznych. Dla gracza jednak ma znaczenie to, czy przeciwnik trzyma raketę w lewej, czy w prawej ręce.

Zjawisko ręczności występuje jedynie u ludzi – w całej grupie naczelnych nie obserwuje się działań świadczących choćby o zaczątkach takiej cechy. Analiza skamieniałości przedstawicieli gatunków człowieka sugeruje, że te od mniej więcej 6 mln lat wykazywały już ręczność (czas po oddzieleniu się szympanсів i goryli od linii ludzkich). Oczywiście poszukujemy ewolucyjnego znaczenia takiej cechy, na razie bez przekonujących wniosków. Jedną ręką (u większości ludzi prawa) lepiej wykonuje czynności precyzyjne. Istnieją także sugestie dotyczące związku ręczności z czasem wykształcenia się mowy, a obie te wyjątkowe ludzkie cechy wiąże się z asymetrią budowy półkul mózgu. Ręczność ujawnia się między 7 a 13 miesiącem życia niemowlęcia i utrwała u trzylatków.

Zjawisko ręczności wykryto w populacjach ludzi już sprzed tysięcy lat, choć nie uznano go za decydujące rozwojowo. Jeszcze w XX wieku leworęczność opisywano jako patologię, tępiona w szkole, stała się właściwie przyczyną rodzinnych tortur. Leworęczność spotykamy u około 10% ludzi. Ten wysoki utrwalony procent sugeruje celowość poszukiwania korelacji z uwarunkowaniami antropologicznymi oraz w życiu społecznym, a także z osobliwościami psychologicznego rozwoju gatunku. Szukano też przyczyn we wczesnych etapach patologicznego rozwoju zarodka i niemowlęcia. W metaanalizie (Australia) ustalono, że prawdopodobieństwo leworęczności dziecka nie koreluje z płcią, stanem zdrowia przy urodzeniu, typem rodziny, w której się wychowuje, dochodami i typem zatrudnienia rodziców. Wykryto nieznacznie niższy poziom rozwoju dzieci leworęcznych w porównaniu z praworęcznymi. U dorosłych osób leworęcznych zauważa się nieznacznie wyższą częstotliwość chorób immunologicznych, zakłóceń słuchu, astmy. Te różnice są tak niewielkie, że zależności przyczynowo-skutkowych, związanych także z dzieciństwem, nie daje się przekonująco ustalić.

Już na podstawie tej pobieżnej oceny można zrozumieć, że dla tak wieloczynnikowo uzależnionego zjawiska nie sposób znaleźć czynnika decydującego. Zaproponowano zatem poszukiwania na poziomie molekularnym, w analizie genetycznej.

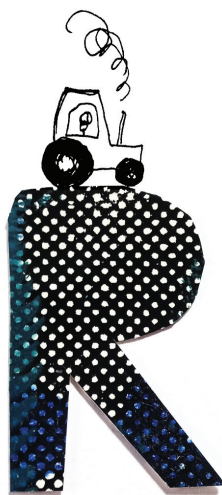
Ale i w tej dziedzinie wykazano wielogenowy charakter zjawiska (ok. 40 różnych genów). Żaden z genów nie jest dominujący, a wspólnie przejawiają wyraźny, silny efekt. Cecha nie jest jednoznacznie dziedziczona.

Ostatnio leworęczność powiązano z grupą genów kodujących białka tubuliny. Białka te łączą się w skręcone łańcuchy, mikrotubule, z których w komórce tworzy się, nadający jej dynamiczny kształt, wewnętrzny szkielet. Końcówki mikrotubuli wystają poza błonę komórkową, asymetrycznym falowaniem wpływają na ruchy komórek, co może (?) mieć znaczenie we wczesnym rozwoju zarodka.

Wczesne badania wskazywały na najwyższą zmienność w niekodujących obszarach genów tubulin, a takim obszarom przypisuje się rolę regulacyjną w aktywności genów. W najnowszych badaniach genetycy przyjrzeni się regionom kodującym, w szczególności genu zwanego TUB B4B. Przebadano 38 tysięcy prób pobranych od osobników leworęcznych i 313 tysięcy od praworęcznych. Znalaziono trzykrotnie wyższą zmienność badanego genu u leworęcznych.

Przywiedziony tu przykład jest dość typowy dla poszukiwań molekularnych podstaw medycznych makroosobliwości. Powiązać geny tubulin z używaniem prawej ręki przy jedzeniu lub pisaniu – trudno. Cały obszar „pomiędzy” oczekuje badaczy.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



W poszukiwaniu prawdziwego kształtu Ziemi – Maupertuis w Laponii

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

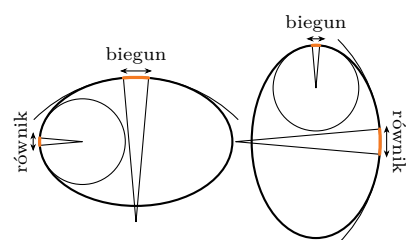
Splaszczacz Ziemi i Cassinich

(Wolter o Maupertuisie)

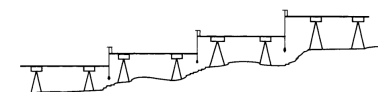
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759)



Porównanie Ziemi splaszczonej i wydłużonej na biegunach. Na obu rysunkach zaznaczono łuk południka odpowiadający jednemu stopniowi szerokości. Długość takiego łuku jest proporcjonalna do promienia krzywizny w danym punkcie, dlatego pomiary na biegunie i na równiku mogą się różnić



Pomiar odległości (w poziomie) między dwoma punktami wykonywano przy pomocy tyczek pomiarowych, jednak w nierównym terenie wymagało to dodatkowego użycia żerdzi



Rozwiązanie zadania F 1098.

Pęd fotonu o długości fali λ wynosi $p = h/\lambda$. W procesie załamania częstość promieniowania światła nie ulega zmianie, natomiast długość fali po załamaniu wynosi $\lambda_w = \lambda/n$. Otrzymujemy:

$$p_w = \frac{nh}{\lambda}$$

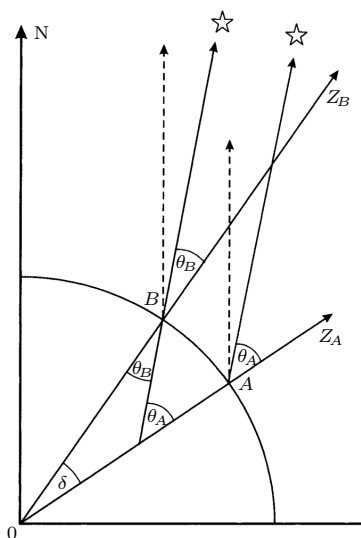
liczbowo: $p_w = 1,36 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

W trzeciej dekadzie XVIII wieku bardzo już nabrzmiał problem prawdziwego kształtu „globu ziemskiego”. W 1718 roku Jacques Cassini, dyrektor Obserwatorium Paryskiego, oznajmił, że Ziemia jest *wydłużona* na biegunach. Stwierdził to na podstawie wieloletnich pomiarów długości jednego stopnia południka – w Dunkierce na północy Francji i w Pirenejach, 800 mil na południe – które pokazywały, że długość jednego stopnia południka w Dunkierce jest krótsza o około 141 sążni od tej w Pirenejach (przed wprowadzeniem metra w 1791 roku odległość liczono między innymi sążniami: 1 sążeń = 1,949 m). Jego rozumowanie opierało się na obserwacji, że gdyby Ziemia była idealną kulą, wówczas długość jednego stopnia szerokości geograficznej byłaby taka sama niezależnie od miejsca pomiaru – uzyskana różnica świadczy więc o odmiennym kształcie Ziemi (zob. rysunek obok). Stanowisko Cassiniego podparł swoimi obliczeniami Johann Bernoulli w nagrodzonej przez Akademię Francuską pracy z 1734 roku. Wynikało z nich, że przy założeniu prawdziwości teorii wirów Kartezjusza tak właśnie powinno być.

Z drugiej strony pomiary przeprowadzone w tak małej odległości między punktami (800 mil) nie były dostatecznie miarodajne, a zmierzona różnica długości jednego stopnia południka mieściła się w granicach błędów pomiarowych. Ponadto eksperyment z zegarem wahadłowym (wynalezionym przez Christiana Huygensa w 1657 roku) przeprowadzony już w 1671 roku przez Jeana Richera w Cayenne w Gujanie Francuskiej wykazał, że zegar spóźnia się o 2 minuty i 28 sekund na dobę w stosunku do czasu odmierzanego w Paryżu. Choć interpretacja tego wyniku nie była jasna, sam wynik był logicznie zgodny z zamieszczonymi w *Principiach* (1686) obliczeniami Newtona wykorzystującymi dane Richera i prowadzącymi do wniosku, że Ziemia jest *splaszczona* na biegunach. Teorie i obliczenia Newtona dotyczące kształtu Ziemi zostały podjęte we wczesnych latach 30. XVIII wieku przez wielu uczonych, na czele z matematykami. Wszyscy też mogli zobaczyć, że Jowisz jest splaszczony na biegunach. Świat naukowy oczekiwał więc szybkiego rozstrzygnięcia problemu kształtu Ziemi.

Rozłam w Akademii Francuskiej. W Akademii Francuskiej powstał rozłam między zwolennikami kartezjańskiej teorii wirów i Ziemi wydłużonej na biegunach a zwolennikami newtonowskiej teorii grawitacji i Ziemi splaszczonej na biegunach. Zwolenników teorii wirów bardzo aktywnie reprezentował wspomniany już wybitny astronom Jacques Cassini. Był on synem włoskiego astronoma Giana Domenico Cassiniego, sprowadzonego w 1669 roku przez Ludwika XIV do Francji, gdzie miał założyć Obserwatorium Paryskie. Jako jego dyrektor Gian Domenico Cassini kierował wieloma ważnymi projektami, a pierwszym wśród nich było stworzenie nowej, zaskakującej, mapy Francji, o której Ludwik XIV wyraził się w 1682 roku, że kosztowała go spory obszar jego królestwa. Następnie, na przełomie wieków, Gian Domenico i Jacques zainicjowali wielki projekt triangulacji Francji z północy na południe, wzdłuż południka, w celu obliczenia obwodu Ziemi i określenia jej kształtu. Jacques Cassini kontynuował ten projekt po śmierci ojca w 1712 roku. Jego obliczenia ogłoszone w 1718 roku nie wzbudzały zastrzeżeń przez 15 lat, dopóki we wczesnych latach 30. nie zostały zakwestionowane przez kilku matematyków.

Liderem zwolenników Newtona był młody i rzutki uczoney Pierre Louis Moreau de Maupertuis, przyjęty do Akademii w 1723 roku (w wieku 25 lat), a pięć lat później do Towarzystwa Królewskiego w Londynie. Był on pierwszym badaczem we Francji, który zrozumiał i docenił prawa grawitacji Newtona. Jednym z jego



Metoda obliczenia długości południka odpowiadającego jednemu stopniowi. Jeśli odległość AB wzdłuż południka jest znana, to za odległość odpowiadającą jednemu stopniowi w tym obszarze przyjmujemy $\frac{AB}{\theta_A - \theta_B}$. Z obu miejsc A i B obserwujemy tę samą gwiazdę, a ze względu na dużą jej odległość linie wyprowadzone z tych punktów do gwiazdy przyjmujemy jako równoległe



Rekonstrukcja trasy wyprawy Maupertuisa do Pello w Laponii



Rozwiązanie zadania M 1784.

Zalóżmy przeciwie i rozważmy wszystkie możliwe pary wybranych podzbiorów. Dla każdej takiej pary podzbiorów możemy wskazać element, który nie należy do żadnego z tych podzbiorów. Zauważmy, że liczba tych par jest równa

$$\frac{((\sqrt{2n} + 2))((\sqrt{2n} + 1))}{2} > n$$

(ponieważ $(\sqrt{2n} + 1) > \sqrt{2n}$), więc istnieją dwie różne pary zbiorów, dla których wybraliśmy ten sam element do nich nienależący. Ponieważ były to różne pary, więc składały się na nie co najmniej 3 zbiory (jeden z nich mógł występować w obu parach). Te trzy zbiory nie dają w sumie całego S , co jest sprzeczne z warunkami zadania.

największych osiągnięć było odkrycie, w latach 40., *zasady najmniejszego działania*, przypisywanej czasem Eulerowi, Lagrange'owi czy Hamiltonowi, którzy rozwinęli matematyczną stronę koncepcji Maupertuisa. Zasada ta jest w swojej istocie jednym z największych uogólnień we wszystkich naukach fizycznych, i tak rozumiał ją jej twórca. Poza matematyką i mechaniką zasadę Maupertuisa można odnaleźć w prawach: stabilności środowiska wewnętrznego Claude'a Bernarda, homeostazy Waltera B. Cannona, równowagi chemicznej Le Chateliera, równowagi w przyrodzie czy równowagi sił ekonomicznych. Ponadto Maupertuis jako pierwszy zastosował rachunek prawdopodobieństwa do badania dziedziczności, a odkryte fakty skłoniły go do opracowania teorii dziedziczności, która okazuje się zdumiewająco zgodna z dzisiejszą teorią genów [Glass, 1947, 1955].

W latach 30. XVIII wieku geodezja stawała się coraz bardziej matematyczna. Maupertuis i inni, uzbrojeni w subtelne metody matematyczne, takie jak rachunek różniczkowy i całkowy oraz geometria różniczkowa, pisali ze sceptycyzmem o metodach i obliczeniach Cassiniego. Na przykład Alexis Clairaut stwierdził, że obliczenia Cassiniego były zbyt proste, albowiem były oparte na geometrii sferycznej, podczas gdy geometria na sferoidzie jest bardziej złożona. Żądano precyzyjniejszych pomiarów, a dawne pomiary krytykowano. Proponowano też nowe metody obliczeń, oparte na przykład na pomiarach długości łuku równoleżników na różnych szerokościach geograficznych (na potrzeby porównania badamy wtedy łuki zawarte pomiędzy dwoma ustalonymi południkami).

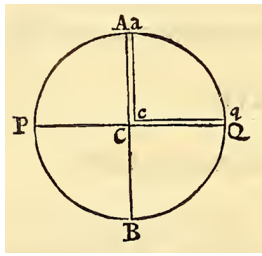
Zarzutom wobec tradycyjnych metod w geodezji wtórował sam Wolter, mający cięte pióro i duży wpływ na opinię publiczną. Warto w tym miejscu przypomnieć, że Maupertuis i Wolter w latach 1726–1728 spędzili jakiś czas w Londynie, wymieniając poglądy z tamtejszymi uczonymi i nasiąkając głoszonymi przez nich ideami. Newton stawał się coraz bardziej popularny w Paryżu, szczególnie wśród młodszego pokolenia, ale dla wielu ze starej kadry był solą w oku. Problem kształtu Ziemi dobrze wpisywał się w retorykę obrony honoru nauki francuskiej, ugruntowanej wieloletnimi pomiarami i przemawiającą do wyobraźni teorią Kartezjusza, przeciwko – co musiało bardzo boleć – Anglikowi z jego nie do przyjęcia, absurdalną wręcz matematyczną teorią oddziaływań na odległość.

Dwie wyprawy. Akademia Francuska postanowiła wysłać dwie wyprawy w celu rozstrzygnięcia problemu kształtu Ziemi: jedną na równik, do obecnego Ekwadoru, a drugą na koło podbiegunowe, do Laponii. Porównanie długości jednego stopnia południka w tych miejscach oraz w Paryżu rozwiązałyby problem. Uzyskawszy zgodę i wsparcie króla Ludwika XV, obie wyprawy wyruszyły prawie w tym samym czasie. Wyprawa na równik wyruszyła w 1735 roku i przywiozła wyniki (w istocie chodziło o jedną liczbę!) dopiero po wielu latach, natomiast nieco późniejsza wyprawa do Laponii wróciła z odpowiedzią już po niespełna półtora roku. Z punktu widzenia samego problemu określenia kształtu Ziemi wyprawa na równik pełniła rolę awaryjnej, okazało się to jednak dopiero po powrocie ekspedycji z Laponii – mimo początkowych kontrowersji wyniki z Laponii porównane z wynikami z Paryża rozstrzygały problem.

W tym artykule przedstawimy krótko wyprawę do Laponii, odsyłając zaciekawionego Czytelnika do barwnych opisów obu wypraw w [Ferreiro, 2011], [Terrall, 2006] i [Hoare, 2017]. Przedtem jednak przypomnimy interesujące nas tu osiemnastowieczne teorie pomiarowe w geodezji.

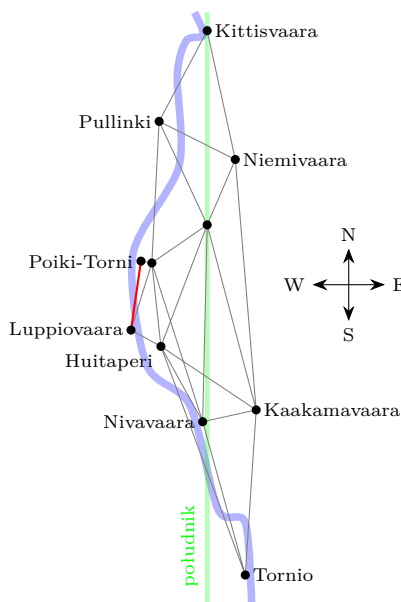
Metoda Newtona i metody pomiarowe. Metoda Newtona określenia kształtu planet opierała się na prostej argumentacji dotyczącej kształtu samograwitującego płynu. Zajrzyjmy do *Principiów*.

Księga III, Teza XVIII. Twierdzenie XVI. *Osie planet są krótsze od średnic wytyczonych prostopadle do osi.*



Eksperyment hydrodynamiczny Newtona. **Księga III, Teza XX. Zadanie IV.** Znaleźć i porównać ze sobą ciężary ciał w różnych miejscach na Ziemi.

„Skoro ciężary wody w różnych odnogach wypełnionego wodą kanału ACQqca są jednakowe, zaś ciężary części tej wody proporcjonalnych do całej zawartości odnog, i podobnie w nich położonych, są do siebie w proporcji ciężarów zawartości całych odnog i dlatego są jednakowe, to ciężary jednakowych i podobnie położonych w poszczególnych odnogach części będą odwrotnie proporcjonalne do tych odnog, czyli w stosunku odwrotnym niż 230 do 229”.



Dokonana przez wyprawę Maupertuisa triangulacja wzdłuż rzeki Tornio, od wieży kościoła w Tornio na południu po wzgórze Kittisvaara, oddalone o 4 km na północ od wioski Pello. Linia bazową (oznaczoną kolorem czerwonym) o długości 14,3 km zmierzono na pokrytej lodem rzece Tornio. Znajomość wszystkich kątów siatki wraz z długością linii bazowej wyznacza wszystkie pozostałe odległości.

Gdyby poszczególne części planety nie były poddane dobowemu ruchowi krążącemu, to jednakowe siły ciężenia, działające na części planety znajdujące się po każdej z jej stron, uformowałyby jej sferyczny kształt. Ten krążący ruch sprawia, że części planety odległe od osi starają się unieść ponad równik i dlatego, gdy materia jest w stanie płynnym, to unosząc się ponad równik, powiększy średnicę planety w tym miejscu, a opadając w okolicy biegunów – skróci jej oś. Stąd według zgodnych obserwacji astronomów średnica Jowisza jest krótsza między biegunami niż mierzona ze wschodu na zachód (...).

Ponieważ w czasach Newtona nie były jeszcze znane metody matematyczne potrzebne do uzyskania obliczeń dla powyższego problemu, przeprowadził on eksperyment myślowy z kanałami wypełnionymi płynem (zob. rysunek na marginesie). Na jego podstawie po długich obliczeniach Newton wywnioskował, że średnica Ziemi na równiku D_E ma się do średnicy między biegunami D_P tak, jak 230 do 229, a zatem spłaszczenie na biegunie wynosi $(D_E - D_P)/D_E$, czyli $1/230$, co jest bardzo bliskie współczesnym obliczeniom dającym $1/298$.

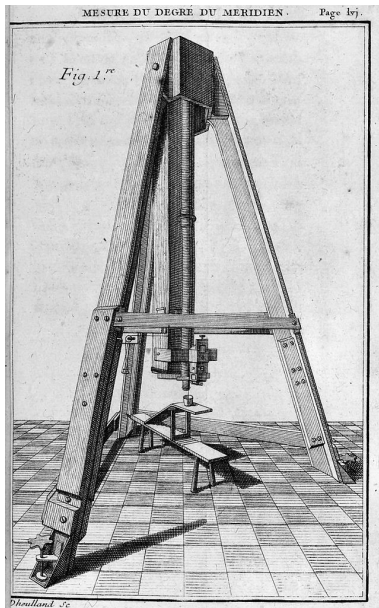
Jak wspomnieliśmy, obliczenia Newtona były uzgodnione z wynikiem eksperymentu Jeana Richera z zegarem wahadłowym. Aby zegar w Cayenne (skalibrowany tak, by okres wahadła odpowiadał jednej sekundzie) wskazywał dokładny czas, Richer musiał nieco skrócić wahadło (o 2,256 mm). Ponieważ długość wahadła jest proporcjonalna do lokalnego przyspieszenia grawitacyjnego, zgodnie ze wzorem $g = (2\pi/T)^2 l$ (g – przyspieszenie grawitacyjne, T – okres wahadła, l – długość wahadła), wynik Richera oznaczał, że grawitacja w Cayenne jest nieznacznie słabsza (o 0,28%) od grawitacji w Paryżu, co sugeruje, że rzeczywiście coś jest nie tak z kształtem Ziemi. Richer jako pierwszy zaobserwował zmianę siły grawitacji nad powierzchnią Ziemi, zapoczątkowując w ten sposób naukę o grawimetrii.

W XVIII wieku istniały dwa sposoby pomiaru odchylenia kształtu Ziemi od sfery: wspomniane wyżej porównanie zegarów wahadłowych na różnych szerokościach geograficznych oraz pomiar długości dostatecznie długiego odcinka południka. Ten drugi sposób opierał się na triangulacji, metodzie stosowanej przez geodetów i twórców map, pozwalającej (prawie) sprowadzić pomiar odległości do pomiaru kątów.

By dokonać pomiaru odległości, zaczynamy od wyznaczenia siatki trójkątów pokrywających interesujący nas obszar – w naszym przypadku trójkąty muszą być ułożone mniej więcej wzdłuż południka (zob. rysunek obok). Następnie obserwatorzy przemieszczają się od jednego wierzchołka siatki do drugiego, by zebrać pomiary kątów we wszystkich trójkątach – dla ułatwienia obserwacji m.in. buduje się wieże triangulacyjne. Znajomość kątów wyznacza jednoznacznie kształt całej siatki, pozostaje więc dokonać pomiaru zaledwie jednego boku jednego z trójkątów, tak zwanej *linii bazowej* (na rysunku obok na czerwono). Ponieważ w danym trójkącie znajomość kątów oraz jednego boku pozwala wyznaczyć pozostałe boki, więc wszystkie długości w siatce można otrzymać przez serię obliczeń. Zaletą tej metody jest to, że kąty są znacznie łatwiejsze do precyzyjnego pomiaru niż odległości liniowe, zwłaszcza w zróżnicowanym terenie. [wg Terral, 2006].

Teoria pomiarów jest prosta, gorzej z praktyką. Są tu dwa problemy. Jeden dotyczy samego *zbierania pomiarów* w trudnym terenie, ich *dokładności*, która zależy od człowieka i użytych instrumentów, podobnie jak *dokładności* również trudnych *pomiarów astronomicznych*. Drugi problem dotyczy właściwego *odczytania* zebranych pomiarów, które zależy od dokonania właściwych poprawek wyników triangulacji (odwzorowanie siatki na płaszczyznę na poziomie morza) i poprawek pomiarów astronomicznych, z uwzględnieniem refrakcji atmosferycznej i aberracji świetlnej (paralaksa gwiazdna nie mogła być jeszcze w owym czasie dostrzeżona).

Maupertuis w Laponii. Kadre naukową piętnastoosobowej wyprawy Maupertuisa (lat 38) stanowiła zgrana grupa znakomitych uczonych. Należeli do niej on sam – jako lider wyprawy, jego bliscy koledzy, matematyk



Pion zenitalny George'a Grahama, wykonany specjalnie na potrzeby wyprawy do Laponii. Teleskop o długości dziewięciu stóp zwisa z wierzchołka drewnianej ramy; obserwacji dokonuje się w pozycji pólężącej. (Maupertuis, *Degré du méridien entre Paris et Amiens*)

Alexis Clairaut (22 l.) i astronom Anders Celsjusz (35 l.), a także astronom Pierre-Charles Le Monnier (21 l.).

Alexis Clairaut (1713–1765) był cudownym dzieckiem, swój pierwszy artykuł przesłał do Akademii w 1726 roku, w wieku dwunastu lat, wykazując się już biegłością w rachunku różniczkowym i teorii krzywych algebraicznych. Do Akademii został przyjęty, za specjalną dyspensą króla, w niezwykle młodym wieku osiemnastu lat. Jeszcze przed wyprawą napisał cały szereg prac z zakresu teorii krzywych, maksimów i minimów, a także geometrii niesferycznej Ziemi i metod wyznaczania jej kształtu. Pomimo krótkowzroczności Clairauta jego udział w wyprawie był uzasadniony niezwykle umiejętnościami matematycznymi i rachunkowymi. W tej wyprawie wyrafinowana matematyka była równie ważna, jak precyzyjne obserwacje.

Anders Celsjusz (1701–1744) został profesorem astronomii na Uniwersytecie w Uppsali w wieku 29 lat. Po powrocie z wyprawy doprowadził do utworzenia w Szwecji pierwszego uniwersyteckiego obserwatorium. Opublikował oryginalny katalog jasności około 300 gwiazd i należał do pierwszych uczonych, którzy stwierdzili magnetyczny charakter zjawiska zórz polarnych. W historii fizyki zapisał się przez zaproponowanie znanej wszystkim skali temperatur, co prawda odwróconej w stosunku do tej używanej obecnie. Był jedynym uczestnikiem wyprawy mającym solidne doświadczenie astronomiczne. Do jego roli należał wybór najprecyzyjniejszych dostępnych instrumentów pomiarowych, zegarów wahadłowych, pionów zenitalnych etc. Zamówił je u najlepszego wytwórcy instrumentów pomiarowych w Europie, samego George'a Grahama z Londynu. Instrumenty były bardzo drogie, na przykład duży pion zenitalny kosztował aż 130 funtów – aby uzyskać przybliżony współczesny odpowiednik w dolarach amerykańskich, należy przemnożyć tę liczbę przez 360. Użycie najnowszych instrumentów wymagało też nabycia nowych umiejętności obserwacyjnych. Udział w wyprawie Celsjusza, Szweda, był też uzasadniony jego znajomością języka oraz proponowanych terenów pomiarowych, które leżały wówczas na terytorium Szwecji.

Pierre-Charles Le Monnier (1715–1799) został przyjęty do Akademii w wieku 20 lat na podstawie jego obserwacji astronomicznych, sporządzenia rozbudowanej mapy Księżyca i opracowań na temat Saturna i Księżyca. Jego wspaniała kariera obejmowała między innymi co najmniej 12 obserwacji planety Uran, których dokonywał w latach 1765–1769, jeszcze przed jej zidentyfikowaniem jako planety przez Williama Herschela w 1781 roku – obserwacje były później pomocne w wyznaczeniu orbity nowej planety.

Aby przybliżyć Czytelnikowi choć trochę trudy ekspedycji do Laponii, zacytujmy kilka fragmentów z książki Maupertuisa „Figure de la terre” z 1738 roku.

Musieliśmy przeprowadzić pomiary, które byłyby trudne na najbardziej przystosowanych do tego obszarach, na pustkowiach kraju prawie nienadającego się do zamieszkania, w tym ogromnym lesie, który rozciąga się od Torneå [Tornio] aż po Przylądek Północny. Istniały tylko dwa sposoby przedostania się w tę dzicz i trzeba było skorzystać z obu: jednego, przemierzając rzekę pełną katarakt, drugiego, przechodząc pieszko gęste lasy lub głębokie bagna. Zakładając, że uda nam się przedostać w głąb kraju, należałoby po możliwie najcięższej wędrówce wspiąć się na strome góry i oczyścić ich szczyty z drzew zasłaniających widok. Trzeba byłoby żyć na tej pustyni z najgorszym jedzeniem, narażonym na ataki tak złośliwych owadów, że zmuszają Lapończyków i ich renifery do opuszczenia tej części kraju latem.

Na rzecę dotkliwie nekąły nas duże, zielonogłowe muchy, które wykrwawiały nas wszędzie tam, gdzie nas użądliły. Znaleźliśmy się na [górze] Niwie prześladowani przez kilka innych, jeszcze bardziej okrutnych rodzajów.

Dym nie mógł nas obronić przed owadami, bardziej okrutnymi na tej górze niż na Niwie. Pomimo wielkiego upału musieliśmy owinąć głowy w szaty ze skór reniferów i schować się pod grubym wałem z gałęzi sosnowych i całych sosen, które nas przygniatały i nie zapewniły nam bezpieczeństwa na długo.

88 *Mesure du Degré du Méridien*
I I I.
Calcul des Triangles de la première suite.
A C H.

Fig. 2. *Angles observés, réduits à l'horizon.* *Angles corrigés pour le calcul.*

CAH... 112° 21' 32,9	... 112° 21' 17"
A C H... 30 56 53,4	... 30 56 47
A H C... 36 42 3,1	... 36 41 56
180 0 29,4	180 0 0
C H K.	
CHK... 36 4 54,7	... 36 4 46
CKH... 43 45 35,6	... 43 45 26
KCH... 100 9 56,8	... 100 9 48
180 0 27,1	180 0 0
C K T.	
KCT... 37 9 12,0	... 37 9 7
CKT... 118 28 12,0	... 118 28 3
CTK... 24 22 54,3	... 24 22 50
180 0 18,3	180 0 0
A H P.	
AHP... 94 53 49,7	... 94 53 56
HAP... 53 45 56,7	... 53 46 3
APH... 31 19 55,5	... 31 20 1
179 59 45,9	180 0 0
H N P.	
HNP... 93 25 7,5	... 93 25 1
NHP... 49 13 9,3	... 49 13 3
HPN... 37 22 2,1	... 37 21 56
180 0 18,9	180 0 0
N P Q.	
NPQ... 87 52 24,3	... 87 52 17
NQP... 40 14 52,7	... 40 14 46
PNQ... 51 53 4,3	... 51 52 57
180 0 21,3	180 0 0

Tabela obserwacji katowych z *La figure de la terre*, jedna z wielu stron danych odpowiadających diagramom geometrycznym trójkątów. W tabeli przedstawiono pomiary zredukowane do płaszczyzny horyzontu i stosowne poprawki

Nie powiem nic o trudach i niebezpieczeństwach tej operacji; możecie sobie wyobrazić, co to znaczy chodzić po dwóch stopach śniegu, niosąc ciężkie kiję pomiarowe, które trzeba stale wbijać w śnieg i podnosić. Wszystko to przy tak silnym zimnie, że gdy próbowaliśmy napić się eau de vie [brandy], jedynego napoju, który można zachować w stanie płynnym, język i wargi natychmiast przymarzały do kubka i można je było oderwać jedynie z krwią.

Kontrowersje po wyprawie. Porównania wyników z Laponii i Francji. Jeszcze przed wyprawą do Laponii Johann Bernoulli, zwolennik Cassinich, zapytał: *Czy obserwatorzy mają jakieś upodobanie do jednej lub drugiej z tych idei? (...) Bo jeśli wierzą, że Ziemia jest spłaszczona na biegunach, z pewnością przekonają się, że jest ona spłaszczona... Dlatego będę wytrwale czekać na wyniki obserwacji amerykańskich.*

Na wyniki z równika trzeba było czekać do połowy 1744 roku, natomiast ekspedycja Maupertuisa, która wyruszyła w kwietniu 1736 roku, już siedemnaście miesięcy później przywiozła do Paryża następujący wynik pomiarów: stopień szerokości geograficznej Laponii wynosi 57 437 sążni, czyli o 477 sążni więcej niż łuk paryski zmierzony przez Cassinich w 1718 r. Pod koniec sierpnia Maupertuis oświadczył członkom Akademii, że *jest oczywiste, że Ziemia jest znacznie spłaszczona na biegunach*”.

Rozjątrzony Cassini odrzucił te wyniki jako niemiarodajne. Stwierdził, że Maupertuis zmierzył zbyt krótki fragment południka, by zagwarantować wiarygodny pomiar, że jego pomiary triangulacji terenu były niewiarygodne, gdyż były oparte na pomiarach tylko jednej linii bazowej, a nie dwóch, jak to

powinno być zrobione, oraz że nie skalibrował właściwie pomiarów astronomicznych.

Kiedy dane Maupertuisa przeanalizowano i porównano z wcześniejszymi pomiarami we Francji, okazało się, że średnica Ziemi pomiędzy biegunami była mniejsza niż jej średnica równikowa o 1 część na 178. Spłaszczenie Ziemi na biegunach było zatem dużo większe niż wartość 1/230, którą pierwotnie przewidywał Newton. W tej sytuacji wszyscy pragnęli poznać wyniki ekspedycji na równik. Po sześciu latach ogłoszono jej wyniki: długość jednego stopnia południka wyniosła tam około 56 750 sążni, co tylko potwierdziło słuszność teorii Newtona.

Artykuł rozpoczęliśmy sarkastyczną uwagą Woltera o Cassinich i w podobnej tonacji go zakończymy. Wolter zakpił sobie tym razem z samego Maupertuisa, wypowiadając następującą uwagę:

W tych trudnych miejscach potwierdziłeś to, co wiedział pan Newton, nie wychodząc z domu.

Bibliografia

- J. Donald Fernie, *The Shape of the Earth, Part III*, American Scientist, Vol. 80, No. 2 (March-April 1992), pp. 125-127.
Laurie D. Ferreiro, *Measure of the Earth. An Enlightenment Expedition that Reshaped our World*, Basic Books, New York 2011.
H. Bentley Glass, *Maupertuis and the Beginnings of Genetics*, The Quarterly Review of Biology, Vol. 22, No. 3 (Sep., 1947), The University of Chicago Press, 196-210.
H. Bentley Glass, *Maupertuis, a Forgotten Genius*, Scientific American, Vol. 193, No. 4 (October 1955), pp. 100-111.
Michael R. Hoare, *The Quest for the True Figure of the Earth*, Routledge, New York 2017.
Miljenko Solarić, Nikola Solarić, *French Geodetic and Scientific Expedition to Lapland*, KiG No. 22, Vol. 13, 2014.
Mary Terrall, *The Man who Flattened the Earth*, The University of Chicago Press, 2006.

Energia spoczynkowa czy wewnętrzna?

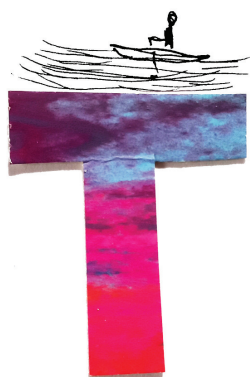
Ludwik LEHMAN

Fizyka jest nauką ścisłą opisującą zjawiska językiem matematyki. Jednak obok matematycznej precyzji sporo jest w fizycznych wywodach intuicji (lepiej lub gorszej), przywiązania do tradycji etc. Czasami stwarza to problemy. Zadajmy dla przykładu proste pytanie: co to jest energia wewnętrzna ciała? Zaczniemy od przytoczenia powszechnie akceptowanej definicji. Według Słownika Fizycznego PWN (Warszawa 1992) to termin stosowany w dwóch znaczeniach:

1. (ogólnie) energia układu fizycznego związana z ruchem jego części składowych względem siebie i ich oddziaływaniami ze sobą, tzn. różnica energii całkowitej układu i sumy jego energii kinetycznej, jako całości, i energii oddziaływania układu, jako całości, z otoczeniem;
2. (w sensie termodynamicznym) e. w. w sensie 1. w przypadku, gdy za części układu uważa się atomy (lub cząsteczki) tworzące ciała wchodzące w skład układu...

Dalej następuje długi opis (w definicji!), jakie rodzaje energii należy wliczać do energii wewnętrznej w różnych przypadkach. Cytujemy fragmenty:

W przypadku gazu, składającego się z cząsteczek prawie nie oddziałujących ze sobą, e. w. jest równa sumarycznej energii kinetycznej ruchów cieplnych





cząsteczek, w przypadku ciała stałego e. w. składa się z energii drgań atomów wokół położenia równowagi oraz z energii potencjalnej atomów i jonów w polu wytworzonym przez pozostałe atomy, względnie jony (lecz nie w polu przyłożonym z zewnątrz, takim jak zewnętrzne pole elektryczne czy pole sił ciężkości). W skład e. w. ciała stałego może też wchodzić energia swobodnych elektronów (w metalach lub półprzewodnikach). Zmiana e. w. (w sensie termodynamicznym) w procesie adiabatycznym jest równa pracy, jaką układ wykonuje (e. w. maleje) lub jaka jest wykonana nad układem (e. w. wzrasta); zmianę e. w. w dowolnym procesie określa pierwsza zasada termodynamiki.

Z kolei w Wikipedii (dostęp 12.03.2024) możemy przeczytać następującą definicję: *Energia wewnętrzna (E_w lub u , U) – w termodynamice jest to całkowita energia układu będąca sumą energii potencjalnej i kinetycznej makroskopowych części układu, energii kinetycznej cząsteczek, energii potencjalnej oddziaływań międzycząsteczkowych i wewnątrzcząsteczkowych itd. Wartość energii wewnętrznej jest trudna do ustalenia ze względu na jej złożony charakter. W opisie procesów termodynamicznych istotniejsza i łatwiejsza do określenia jest zmiana energii wewnętrznej, dlatego określając energię wewnętrzną układu, pomija się te rodzaje energii, które nie zmieniają się w rozpatrywanym układzie termodynamicznym. Na przykład dla gazu doskonałego jedyną składową energią wewnętrzną, która może się zmieniać, jest energia kinetyczna cząsteczek gazu. Stąd zmiana energii wewnętrznej równa jest zmianie energii kinetycznej cząsteczek.*

Trochę dziwne jest definiowanie w nauce ścisłej jakiegokolwiek wielkości fizycznej w taki sposób, że jej „wartość (...) jest trudna do ustalenia”. Zgodnie z obydwoma definicjami przy różnych zagadnieniach energia wewnętrzna (w sensie termodynamicznym) będzie zawierać różne składniki. Sporo przy tym niejasności. Na przykład, czy energia ruchów konwekcyjnych jest częścią energii wewnętrznej płynu? Są to ruchy makroskopowych porcji substancji. Czy energia sprężystości jest składnikiem energii wewnętrznej ciała? Jest to niewątpliwie energia oddziaływań między cząsteczkami. A energia jądrowa? Na ogół nie wliczamy jej do energii wewnętrznej, jednak gdy rozpatrujemy próbkę plutonu lub Ziemię rozgrzewaną przez rozpad promieniotwórczy – mamy problem. Musimy wtedy uznać, że źródło ciepła jest „zewnętrzne” w stosunku do ciała w oczywistej sprzeczności ze znaczeniem tego słowa. Możemy także uznać, że energia spoczynkowa jąder atomowych jest częścią energii wewnętrznej. W ten sposób zmagamy się z problemami, które sami stworzyliśmy.

Na szczęście istnieje lepsze rozwiązanie. Wiadomo, że w stosowaniu zasady zachowania (całkowitej) energii ważne są tylko te jej rodzaje, które w rozważanym procesie się zmieniają. Nie jest zatem potrzebne definiowanie energii „w sensie termodynamicznym”. Dobrze określona jest tylko energia wewnętrzna w sensie ogólnym (punkt 1 definicji z cytowanego słownika), zatem tylko w tym sensie powinna być konsekwentnie używana.

Jeśli przeczytamy uważnie definicję energii wewnętrznej w sensie ogólnym, zauważymy, że w jej skład wchodzi także energia sprężystości oraz energia kinetyczna ruchu obrotowego. Pierwsza dotyczy oddziaływania makroskopowych części ciała (ściślej mówiąc, cząsteczek), a druga – ich ruchu względem siebie. Są one składnikami energii wewnętrznej również w rozumieniu definicji z Wikipedii. Najlepiej usunąć źródło problemów, czyli definicję energii wewnętrznej w sensie termodynamicznym. Przemawia za tym jeszcze jeden – metodologiczny – argument. Jeśli tak trudno jednoznacznie określić jakąś wielkość fizyczną, to znaczy, że prawdopodobnie nie odpowiada ona żadnemu realnemu składnikowi badanego świata.

Przyjmijmy zatem, zgodnie z pierwszym punktem definicji słownikowej, że energia wewnętrzna ciała (układu) E_w to całkowita energia ciała pomniejszona o energię kinetyczną i energię oddziaływania z otoczeniem środka masy, czyli ciała traktowanego jako punkt materialny. To cała energia związana z budową wewnętrzną i strukturą ciała, czyli całkowita energia ciała spoczywającego i nieoddziałującego (jako całość) z otoczeniem. Przyjęcie i stosowanie w termodynamice takiej definicji nie zmienia I zasady termodynamiki, bo w niej występuje tylko przyrost energii wewnętrznej. Likwiduje też wszelkie niejasności i zależność samej energii wewnętrznej od rozpatrywanego problemu. Zauważmy, że tak zdefiniowana energia wewnętrzna niczym nie różni się od energii spoczynkowej znanej z teorii względności. Możemy wtedy stwierdzić, że słynny wzór Einsteina dotyczy właśnie tak określonej energii wewnętrznej:

$$E_w = mc^2.$$

Tak właśnie interpretuje ten wzór w pięknej książeczce o teorii względności Andrzej Szymacha. To interpretacja godna polecenia. Zauważmy, jak określona w jednym dziale fizyki wielkość dopasowuje się do wielkości pojawiającej się w zupełnie innej teorii. To znak, że postępujemy właściwie – elementy układanki pasują do siebie!

Podkreślmy na końcu, że sugerowane rozwiązanie likwiduje nie tylko niepotrzebnie wykreowane problemy dotyczące składników energii wewnętrznej w rozumieniu termodynamicznym. Pomoże ono także w wyciszeniu równie niepotrzebnych i mylących interpretacji wzoru Einsteina. Na przykład tej o „równoważności” masy i energii (co to właściwie znaczy?). Albo tej o „zamianie masy w energię”. Energia wewnętrzna każdego ciała jest równa iloczynowi masy tego ciała i prędkości światła do kwadratu. Tylko tyle i aż tyle.

W obronie tradycyjnych wartości termodynamicznych

Szymon CHARZYŃSKI

Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Teoria względności została sformułowana na początku ubiegłego wieku, czyli już ponad 100 lat temu. Nadal jednak w szkole uczy się klasycznej mechaniki Newtona, która jest tylko przybliżeniem teorii względności. Zakres stosowalności tego przybliżenia jest ograniczony do prędkości małych w porównaniu z prędkością światła. Próba stosowania mechaniki Newtona do opisu obiektów poruszających się z prędkościami porównywalnymi z prędkością światła prowadzi niechybnie do błędnych wyników. Jednak w codziennym życiu człowieka efekty relatywistyczne są niezauważalne i mechanika Newtona wystarcza do modelowania naszej codzienności.

Podobnie jest z dziewiętnastowieczną termodynamiką, która z jednej strony stanowi piękny kawałek czystej fizyki teoretycznej, a z drugiej kawał praktycznej wiedzy, będącej podstawą budowy między innymi maszyn parowych. Jak każda teoria fizyczna, jest tylko pewnym przybliżonym modelem opisującym pewne aspekty rzeczywistości. Z teorii względności wiemy, że podgrzewanie dowolnego obiektu prowadzi do wzrostu jego masy. Jak to się stało, że dziewiętnastowieczni uczeni, wykonując swoje pomiary, nie wykryli tego faktu, że aby zmierzyć, o ile wzrosła energia wewnętrzna gazu w cylindrze, wystarczy go po prostu zważyć przed i po podgrzaniu?

Rozważmy prosty przykład. Powiedzmy, że mamy 1 mol azotu (głównego składnika powietrza) w pojemniku o ustalonej objętości i chcemy zmierzyć wzrost jego energii wewnętrznej po ogrzaniu go o 1 K. Chcemy to zrobić przy użyciu wagi. Jak dokładna ma być nasza waga?

Masa jednego mola azotu (gazu dwuatomowego) to $m = 28$ g, czyli jego energia spoczynkowa to $E = mc^2 = 2,52 \cdot 10^{15}$ J. Molowe ciepło właściwe azotu wynosi $20,8$ J/(mol · K), czyli aby podgrzać mol azotu o 1 kelwin, musimy dostarczyć $20,8$ J energii. Stosunek tej energii do energii spoczynkowej mola azotu wynosi około $8,3 \cdot 10^{-15}$. Czyli z taką dokładnością musielibyśmy ważyć gaz, żeby wykryć zmianę jego masy. Inaczej mówiąc, energia $20,8$ J przelicza się na około $2,3 \cdot 10^{-13}$ g. Zatem nasza waga musi być w stanie rozróżnić dwie następujące masy:

28, 000 000 000 000 00 g,

28, 000 000 000 000 23 g.

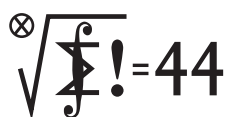
Żeby lepiej uzmysłwić sobie, jak ogromna jest to dokładność, możemy przeliczyć to na inną skalę. Gdybyśmy wazyli lokomotywę o wadze około 100 ton na wadze kolejowej, to powyżej wymagana dokładność odpowiadałaby rozróżnieniu pomiaru wagi lokomotywy przed i po dołożeniu jednego ziarenka pyłku roślinnego. Takie ziarenko waży około $1 \mu\text{g}$, czyli właśnie około 10^{-14} razy mniej od stutonowej lokomotywy. Czy można wyobrazić sobie ważenie ziarenka pyłku na wadze kolejowej w ten sposób, że najpierw ważymy

lokomotywę, a potem lokomotywę z dołożonym ziarenkiem pyłku i odejmujemy wskazania wagi od siebie? Oczywiście nie – w praktyce taka waga może nie drgnąć po dołożeniu kilku (a być może nawet kilkudziesięciu) kilogramów dodatkowego obciążenia.

Zatem odpowiedź na pytanie, dlaczego nie wystarczy zważyć gazu, żeby zmierzyć, jak podgrzewanie zmienia jego energię wewnętrzną, jest prosta. Zmiany energii przy podgrzewaniu o kilka czy kilkaset kelwinów są bardzo małe w porównaniu z iloczynem masy tego gazu i prędkości światła do kwadratu (czyli jego energii spoczynkowej). Efekt, który próbujemy opisać, jest niezwykle subtelny. Jeśli chcemy zmierzyć, ile ziarenek pyłku przykleiło się do lokomotywy, to musimy zdrapać ten pyłek i zważyć go samego na precyzyjnej wadze przeznaczonej do wyznaczania mas rzędu μg . Musimy odkleić pyłek od lokomotywy i na nim się skupić, a nie ważyć lokomotywę przed i po zdrapaniu drobin pyłku roślinnego na wadze kolejowej.

Stosujemy więc tzw. przybliżenie nierelatywistyczne. W tym przybliżeniu przyjmujemy, że masa gazu po prostu się nie zmienia, a do opisu tego, co się dzieje, gdy gaz sprężamy, rozprężamy, podgrzewamy i chłodzimy, używamy starych dziewiętnastowiecznych wielkości termodynamicznych, takich jak *energia wewnętrzna*. Określenie tej ostatniej, jak słusznie przekonuje Ludwik Lehman w artykule *Energia spoczynkowa czy wewnętrzna?*, dalekie jest od jednoznaczności, cechującej precyzyjną i elegancką definicję energii spoczynkowej w teorii względności. Kiedy jednak chcemy zmierzyć i opisać subtelny efekt zmiany energii, która ma się do energii spoczynkowej badanego obiektu, jak masa drobin pyłku roślinnego do masy lokomotywy, to zmuszeni jesteśmy użyć jakiegoś innego narzędzia niż waga kolejowa i dokładnie określić, którą to drobinę spośród wszystkich przyklejonych do lokomotywy chcemy zważyć i opisać. Nie ma więc jednej uniwersalnej definicji energii wewnętrznej, ponieważ to, co rozumiemy pod tym pojęciem, zależy od tego, jakie zjawisko chcemy uwzględnić w naszym bilansie energii, w ramach przybliżonego modelu, który stosujemy do opisu danej sytuacji fizycznej. Można oczywiście, jak przekonuje Ludwik Lehman, wrzucić wszystko do jednego worka z napisem „energia spoczynkowa”. Uzyskamy wtedy opis jednoznaczny, bardzo elegancki i zgodny z teorią względności, o której wiemy, że opisuje rzeczywistość znacznie dokładniej niż wszystkie teorie nierelatywistyczne. Jednak ceną, jaką się płaci za takie postawienie sprawy, może być niepraktyczność tego opisu w pewnych szczególnych sytuacjach, kiedy chcemy go stosować do zjawisk, w których zmiany energii są znikomo małe w porównaniu z energią spoczynkową badanego obiektu.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 869 ($WT = 1,34$) i 870 ($WT = 2,50$) z numeru 11/2023

Marek Spychała	Warszawa	45,31
Jerzy Cisło	Wrocław	45,14
Janusz Olszewski	Warszawa	44,73
Paweł Najman	Kraków	44,50
Janusz Fiett	Warszawa	43,82
Paweł Kubit	Kraków	41,99
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Piotr Wiśniewski	Warszawa	40,81
Piotr Kumor	Olsztyn	40,44
Łukasz Merta	Kraków	37,42
Szymon Kitowski		34,48
Witold Bednarek	Łódź	32,56

Wszyscy czterej Panowie są z nami od lat i zaliczają, jedno po drugim, kolejne okrążenia bieżni 44p.: pan Marek Spychała po raz piąty; pan Jerzy Cisło po raz siedemnasty; pan Janusz Olszewski po raz dwudziesty czwarty; pan Paweł Najman po raz dziewiąty (jakże niepozornie jawi się przy tych wynikach honor Weterana, przyznawany już po trzecim okrążeniu...).

Stąd

$$c'_\ell = c_\ell - 1, \quad c'_{\ell+1} = c_{\ell+1} - 1, \quad c'_k = c_k \quad \text{dla } k \neq \ell, \ell+1.$$

Każda wartość, wcześniej obecna [lub nieobecna] w ciągu (c_i) , mogła zniknąć [lub pojawić się] jedynie jednocześnie na dwóch pozycjach. Wobec tego wartość z powinna wystąpić w ciągu (c'_k) nadal nieparzyście wiele razy, a każda inna wartość – parzyście wiele razy.

Powtarzając takie transpozycje, doprowadzamy ciąg (x_i) do postaci bez sekwencji 10; czyli do postaci $(\underbrace{0, \dots, 0}_s, \underbrace{1, \dots, 1}_{N-s})$; liczba wystąpień dowolnej wartości nie zmieniała przy tym parzystości. Uzyskany ciąg generuje (jak w treści zadania) ciągi (a_k) , (b_k) dane jawnymi wzorami:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \leq s, \\ k-s-1 & \text{dla } k > s, \end{cases} \quad b_k = \begin{cases} s-k & \text{dla } k \leq s, \\ 0 & \text{dla } k > s. \end{cases}$$

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: www.deltami.edu.pl/klub-44/regulamin/

Zadania z matematyki nr 883, 884

Redaguje Marcin E. KUCZMA

883. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(xy) + f(y^2) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

884. Wykazać, że dla każdej pary liczb naturalnych $a \geq 2$, $b \geq 1$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n , że liczba $ba^n + 1$ jest złożona.

Zadanie 884 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi

Rozwiązania zadań z numeru 2/2024

Przypominamy treść zadań:

875. Dany jest ciąg (x_1, \dots, x_N) o wyrazach $x_i \in \{0, 1\}$ (N jest ustaloną liczbą nieparzystą). Niech $a_k = \sum_{i < k} x_i$, $b_k = \sum_{i > k} (1 - x_i)$, $c_k = a_k + b_k$ (dla $k = 1, \dots, N$). Wiadomo, że dokładnie jedna liczba z występuje w ciągu (c_1, \dots, c_N) nieparzyście wiele razy. Dla ustalonego N wyznaczyć wszystkie możliwe wartości z .876. Wykazać, że dla liczb $x, y, z \geq 0$ o sumie 3 zachodzi nierówność

$$\frac{x}{y^2 + y + 1} + \frac{y}{z^2 + z + 1} + \frac{z}{x^2 + x + 1} \geq 1.$$

875. Znajdujemy w ciągu (x_i) blok 10 (jeśli istnieje) i wykonujemy transpozycję $10 \mapsto 01$. To znaczy, znajdujemy dowolny numer $\ell < N$, dla którego $x_\ell = 1$, $x_{\ell+1} = 0$ (więc $a_{\ell+1} = a_\ell + 1$, $b_{\ell+1} = b_\ell - 1$, $c_{\ell+1} = c_\ell$) i tworzymy ciąg (x'_1, \dots, x'_N) , przyjmując

$$x'_\ell = 0, \quad x'_{\ell+1} = 1, \quad x'_i = x_i \quad \text{dla } i \neq \ell, \ell+1.$$

Określamy (jak dla ciągu (x_i)): $a'_k = \sum_{i < k} x'_i$, $b'_k = \sum_{i > k} (1 - x'_i)$, $c'_k = a'_k + b'_k$. Wtedy

$$a'_k = a_k, \quad b'_k = b_k \quad \text{dla } k \neq \ell, \ell+1; \\ a'_\ell = a_\ell, \quad a'_{\ell+1} = a_\ell - 1, \quad b'_\ell = b_\ell - 1, \quad b'_{\ell+1} = b_{\ell+1}.$$

Ciąg (c_k) wygląda teraz tak:

$$(\underbrace{s-1, s-2, \dots, 1, 0}_s, \underbrace{0, 1, \dots, N-s-2, N-s-1}_{N-s}).$$

Wyrazy centralne grupują się w pary. Liczba z , która ma wystąpić nieparzyście wiele razy – co teraz oznacza: dokładnie jeden raz – i być przy tym *jedyną* o tej własności, musi być jednym ze skrajnych wyrazów; zaś grupowanie w pary musi objąć wszystkie wyrazy pozostałe. To znaczy: wyraz pierwszy musi być równy przedostatniemu ($s-1 = N-s-2$, i wtedy $z = N-s-1$); lub wyraz drugi równy ostatniemu ($s-2 = N-s-1$, i wtedy $z = s-1$). W pierwszym przypadku $s = \frac{1}{2}(N-1)$; w drugim $s = \frac{1}{2}(N+1)$. W obu przypadkach $z = \frac{1}{2}(N-1)$. Jest to jedyna możliwa wartość, o jaką pyta zadanie. Uzyskiwana jest dla każdego ciągu (x_i) , w którym liczba zer (czyli s) różni się o 1 od liczby jedynek.

876. Funkcja $f(t) = (t^2 + t + 1)^{-1}$ ma pochodną drugiego rzędu, wyrażającą się wzorem $f''(t) = 6(t^2 + t + 1)^{-3}(t^2 + t)$, dodatnią dla $t \geq 0$, co oznacza, że f jest wypukła w przedziale $[0, \infty)$. Stosujemy nierówność Jensena (z wagami $\frac{x}{3}$, $\frac{y}{3}$, $\frac{z}{3}$, o sumie 1):

$$\frac{x}{3} f(y) + \frac{y}{3} f(z) + \frac{z}{3} f(x) \geq f\left(\frac{xy}{3} + \frac{yz}{3} + \frac{zx}{3}\right).$$

Wyrażenie po lewej stronie – to suma dana w zadaniu, podzielona przez 3. Wystarczy zatem dowieść, że dla $w = xy + yz + zx$ zachodzi nierówność $f(w/3) \geq 1/3$.

Ponieważ $w \leq x^2 + y^2 + z^2$, więc $3w \leq 2w + (x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2 = 9$, czyli $w/3 \leq 1$. Funkcja f jest malejąca w przedziale $[0, \infty)$, zaś $f(1) = 1/3$. Stąd $f(w/3) \geq 1/3$.

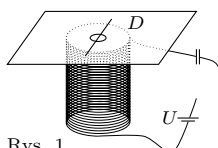
Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
766 ($WT = 3,06$), 767 ($WT = 1,86$)
z numeru 11/2023

Marian Lupieżowiec	Gliwice	3-44 + 0,88
Jacek Konieczny	Poznań	38,28
Ryszard Baniewicz	Wrocław	1-35,93
Konrad Kapcia	Poznań	2-35,60
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5-31,19
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-22,39
Jan Zambrzycki	Białystok	4-17,82



Rys. 1



Rys. 2

772. Gdy energia rakiety osiąga wartość maksymalną, jej pochodna po czasie jest równa zero:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} v^2 + \frac{1}{2} M 2v \frac{dv}{dt} = 0,$$

gdzie przez M oznaczyliśmy masę rakiety, stąd jej prędkość

$$v = \frac{2M}{\mu} \frac{dv}{dt}.$$

$\mu = -dM/dt$ jest stałą masą gazu wypływającego z rakiety w jednostce czasu.

Przyspieszenie rakiety a znajdziemy z zasady zachowania pędu układu rakiet-gaz, dla bardzo małego przedziału czasu (rys. 2):

$$Mv = \mu \Delta t (v - v_0) + (M - \mu \Delta t) (v + \Delta v).$$

Uwzględniając, że $\mu \Delta t \ll M$, otrzymujemy

$$a = \Delta v / \Delta t = \mu v_0 / M.$$

Szukana prędkość, odpowiadająca maksymalnej energii kinetycznej rakiety, jest równa $2v_0$.

773. Prawo Kirchhoffa dla zamkniętego obwodu zwojnicy o zaniedbywalnym oporze ma postać:

$$U - L_z \frac{dI_z}{dt} = \frac{Q}{C},$$

gdzie L_z jest indukcyjnością zwojnicy, Q ładunkiem na kondensatorze o pojemności C , a I_z natężeniem prądu w obwodzie. Korzystając ze związku $I_z = dQ/dt$, mamy:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{L_z C} = \frac{U}{L_z}.$$

Wprowadzając oznaczenia $1/L_z C = \omega^2$ i $q = Q - UC$, otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0,$$

Zadania z fizyki nr 780, 781

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

780. Mała piłeczka spadająca z wysokości h na twardą podłogę odskakuje na wysokość $h/3$. Na niciach o długościach l zawieszono stykające się ze sobą dwie takie piłeczki. Jedną z nich odchyłono od pionu o kąt $\pi/2$ i puszczone swobodnie. O jakie kąty odchyłą się nici po zderzeniu piłeczek?

781. W odległości R od nieruchomego ładunku $Q > 0$ znajduje się mała kulka o masie m , naładowana ładunkiem $-Q$. Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie pola są prostopadłe do odcinka łączącego ładunki. Po oswoobodzeniu kulka zaczyna się poruszać, a minimalna odległość, na jaką zbliży się do nieruchomego ładunku, wynosi $R/2$. Znaleźć wartość indukcji pola magnetycznego.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2024

Przypominamy treść zadań:

772. Rakieta jest rozpędzana w wyniku wyrzucania ciągłego strumienia gazu, którego prędkość względem rakiety jest stała i wynosi v_0 . Początkowa prędkość rakiety jest równa zero. Ile wynosi prędkość rakiety, gdy jej energia kinetyczna osiąga wartość maksymalną? Siłę ciężkości zaniedbujemy.

773. Na górze ustawionej pionowo zwojnicy leży cienki kawałek kartonu, a na nim mały nadprzewodzący pierścień z cienkiego drutu, którego średnica d_1 jest znacząco mniejsza od średnicy pierścienia D (rys. 1). Po podłączeniu zwojnicy do źródła napięcia U szeregowo z kondensatorem pierścień podskakuje, gdy $U > U_0$. Jakie powinno być napięcie źródła w analogicznym doświadczeniu z pierścieniem o takiej samej średnicy, ale wykonanego z drutu o średnicy d_2 ? Współczynnik samoindukcji takiego pierścienia wynosi w przybliżeniu $L = k D \ln(1,4D/d)$. Opór zwojnicy możemy pominąć.

z warunkami początkowymi w chwili zamknięcia klucza:

$$q(0) = Q(0) - UC = -UC \quad \text{oraz} \quad \frac{dq}{dt}(0) = I_z(0) = 0.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$q(t) = -UC \cos \omega t,$$

stąd $I_z(t) = UC \omega \sin \omega t$. Natężenie prądu I w nadprzewodzącym pierścieniu o indukcyjności L znajdziemy z równania

$$- \frac{d\phi}{dt} - L \frac{dI}{dt} = 0,$$

gdzie ϕ jest zewnętrznym strumieniem pola magnetycznego przez powierzchnię pierścienia. W chwili początkowej $\phi(0) = 0$, zatem $I = -\phi/L$. Strumień ϕ jest proporcjonalny do powierzchni pierścienia oraz do wartości wektora indukcji w zwojnicy, który z kolei jest proporcjonalny do natężenia prądu w zwojnicy: $\phi \sim I_z D^2 \sim U D^2$. Uwzględniając to, otrzymujemy

$$I \sim \frac{U D^2}{L}.$$

Maksymalna wartość siły elektrodynamicznej F działającej na pierścień w kierunku pionowym jest proporcjonalna do długości pierścienia, natężenia prądu w zwojnicy i natężenia prądu w pierścieniu:

$$F \sim D I I_z \sim \frac{D^3 U^2}{L}.$$

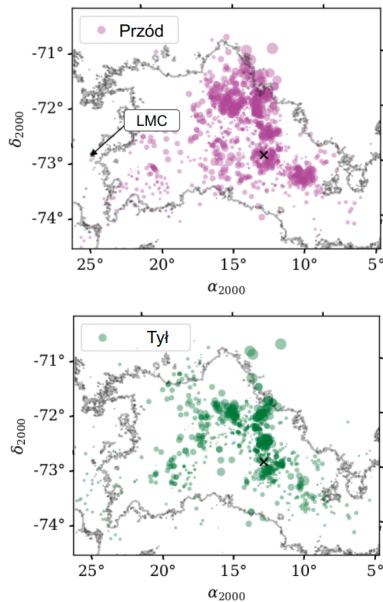
Pierścień będzie podskakiwał, gdy siła F będzie większa od siły ciężkości działającej na pierścień, proporcjonalnej do $D d^2$. W granicznym przypadku, gdy siły te równoważą się, $D^3 U^2 / L \sim D d^2$, stąd $U \sim d \sqrt{L/D}$. W pierwszym przypadku rozważanym w zadaniu $U_0 \sim d_1 \sqrt{L_1/D}$, w drugim $U_0' \sim d_2 \sqrt{L_2/D}$. Napięcie źródła w drugim przypadku musi spełniać warunek:

$$U > U_0' = U_0 \sqrt{\frac{\ln(1,4D/d_2)}{\ln(1,4D/d_1)} \frac{d_2}{d_1}}.$$



Prosto z nieba: Im więcej Obłoków Magellana, tym ciekawiej

Wielki Obłok Magellana ma średnicę 14 tys. lat świetlnych i masę 10^{10} mas Słońca, natomiast Mały Obłok jest o połowę od niego mniejszy, ma średnicę 7 tys. lat świetlnych i masę 7^9 mas Słońca.



Obszar Małego Obłoku Magellana. Gwiazdy w strukturze „z przodu” i gwiazdy w strukturze „z tyłu”, uzyskane z ekstynkcji i prędkości radialnych tych gwiazd. Strzałka wskazuje kierunek do Wielkiego Obłoku Magellana (LMC). Rysunek 9 w artykule Murray et al., arXiv:2312.07750

Obłoki Magellana, Wielki i Mały, zawdzięczają swoją nazwę słynnemu podróżnikowi Ferdynandowi Magellanowi. Oba obłoki, widoczne gołym okiem z półkuli południowej Ziemi, od wieków znajdowały swoje miejsce w mitologiach, pomagały w nawigacji czy też, jak przez ostatnich kilkadziesiąt lat, były swoistymi laboratoriami astrofizycznymi. Ze względu na swoją stosunkowo niewielką odległość od Ziemi – 160 i 200 tysięcy lat świetlnych odpowiednio dla Małego i Wielkiego Obłoku, wydawać by się mogło, że znamy je już bardzo dobrze i przestudiowaliśmy ich wszystkie możliwe własności fizyczne. To właśnie w Obłokach Magellana odkryto między innymi nowy typ gwiazd zmiennych (cefeidy), badano fizykę ośrodka gwiazdowego galaktyk czy halo ciemnej materii. Wiemy, że oba obłoki to tak naprawdę galaktyki karłowate, znajdujące się w polu grawitacyjnym Drogi Mlecznej. To nasze galaktyki satelitarne. Problem w tym, że najnowsze badania potwierdzają, iż Mały Obłok Magellana, uważany do tej pory za jeden obiekt, to w rzeczywistości dwie oddzielne galaktyki karłowate. Nadchodzą więc kłopoty z nazewnictwem...

Mały Obłok Magellana jako całość ma bardzo zróżnicowaną strukturę populacji gwiazdowych, a jego kształt jest silnie zaburzony. Już w latach 60. wysnuto teorię, że za nieuporządkowanie populacji gwiazdowych odpowiada dwoista natura Małego Obłoku Magellana. W latach 80. Don Mathewson, Victoria Ford i Naveen Visvanathan wykazali, że prędkości gwiazd, obłoków zjonizowanego gazu (głównie wodoru i plazmy) oraz mgławic planetarnych są zgodne z prędkościami neutralnego wodoru, i doszli do wniosku, że Mały Obłok Magellana został „rozdartý” w wyniku interakcji ze swoim Wielkim kolegą.

To podejrzenie co do dwoistej natury Małego Obłoku Magellana zostało potwierdzone dopiero pod koniec roku 2023, kiedy to międzynarodowy zespół astronomów przeanalizował dane pochodzące z przeglądów GASKAP-Hi, Gaia mission DR3 oraz APOGEE DR17. Naukownicy dr Clair E. Murray, wraz ze współpracownikami, przeprowadziła dokładną analizę prędkości gwiazd w Małym Obłoku Magellana oraz struktury ośrodka międzygwiazdowego i wykazała, że skład chemiczny dwóch kawałków Małego Obłoku Magellana jest różny. Co więcej, wykazała również, że obie części Małego Obłoku Magellana oddziaływały ze swoim Wielkim towarzyszem.

Badania te potwierdziły, że Mały Obłok Magellana wyraźnie składa się z dwóch odrębnych systemów gwiazdotwórczych, czyli dwóch unikalnych galaktyk (na co wskazuje różna metaliczność obu systemów). Dzieli je odległość zaledwie 16 000 lat świetlnych (199 do 215 tys. lat świetlnych liczonych od Ziemi). Galaktyki te leżą w kierunku naszego pola widzenia, jedna za drugą, i nie są rozróżnialne gołym okiem ani w obserwacjach optycznych.

Oparte na artykule Claire E. Murray i inni, „A Galactic Eclipse: The Small Magellanic Cloud is Forming Stars in Two, Superimposed Systems” przyjętym do publikacji w czasopiśmie *The Astrophysical Journal* oraz Paul Woods, „Congratulations, it's twins!”, *Nature Astronomy* volume 8, page13 (2024), a także Mathewson, D.S., Ford, V.L. i Visvanathan, N., „Structure and Evolution of the Magellanic”, IAU Symposium (1984).

Katarzyna MAŁEK

Departament Badań Podstawowych (BP4), Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Niebo w czerwcu

20 czerwca o godzinie 22:50 naszego czasu Słońce osiągnie najbardziej na północ wysunięty punkt na ekliptyce, i tym samym na północnej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczne lato. Kilka dni wcześniej, 16 i 17 czerwca, nastąpią najwcześniejsze wschody Słońca w ciągu roku. Kilka dni później, 24 czerwca, Słońce zajdzie najpóźniej. Oba te zdarzenia są znacznie bliżej siebie niż analogiczne zdarzenia w grudniu, ponieważ teraz Ziemia jest blisko aphelium i w związku z tym porusza się najwolniej na swojej orbicie wokół Słońca.

W czerwcu przypada pełnia sezonu na obłoki srebrzyste i łuk okołohoryzontalny (więcej o nim na angielskiej stronie: <https://atoptics.co.uk/blog/circumhorizon-arc/>). Nasza Gwiazda Dzienna wznosi się najwyższej na niebie i część dnia, w której jej wysokość nad horyzontem przekracza 58° , jest największa. A jest to warunek konieczny do wystąpienia obłoków srebrzystych. Z drugiej strony nocą chowa się ona najpłycej pod widnokrąg i zjawisko to jest widoczne wyżej nad horyzontem.

Bezksiężycowe noce wystąpią w pierwszej części miesiąca, gdyż Srebrny Glob zacznie czerwiec w fazie 35%, wschodząc około godziny 2 w odległości 10° na lewo od Saturna, który powoli poprawia swoją widoczność na niebie porannym. Początkowo około godziny 3 planeta zajmuje pozycję na wysokości 10° nad południowo-wschodnią częścią widnokregu, ale do końca miesiąca o tej samej porze zwiększy wysokość do ponad 25° . W czerwcu Saturn świeci z jasnością $+1,1^m$, a średnica jego tarczy wynosi $18''$. Saturn zbliża się do przyszłorocznej równonocy, kiedy to Ziemia przechodzi przez płaszczyznę jego pierścieni i pozornie znikają one z widoku. Do końca miesiąca stosunek ich małej do wielkiej półosi utrzyma swoją minimalną wartość, w tym roku 0,03, a potem zacznie rosnąć.

W kolejnych dniach Srebrny Glob podąży ku nowiu, przez który przejdzie 6 czerwca. Ekliptyka rano tworzy wciąż mały kąt z widnokregiem, stąd Księżyc pokaże się niewiele przed wschodem Słońca, na wysokości kilku stopni nad wschodnią częścią nieboskłonu. 3 czerwca jego tarcza zmniejszy fazę do 15% i dotrze do powracającej na poranne niebo planety Mars. O świcie oba ciała Układu Słonecznego zajmą pozycję na wysokości 7° , przy czym Księżyc znajdzie się $2,5^\circ$ na lewo od Marsa świecącego z jasnością $+1^m$. Średnica marsjańskiej tarczy wynosi $5''$, a zatem planeta nie jest jeszcze atrakcyjnym celem dla posiadaczy teleskopów.

Po minięciu Marsa Księżyc da się jeszcze dostrzec 4 czerwca, gdy godzinę przed wschodem Słońca zdąży się wzniesić na wysokość 4° , prezentując sierp w fazie 7%. Mars pokaże się ponad 16° na prawo od Srebrnego Globu, a niecałe 10° nad nim znajdują się najjaśniejsze gwiazdy konstelacji Barana, Hamal i Sheratan.

Następnie Srebrny Glob przeniesie się na niebo wieczorne, gdzie ekliptyka zmienia powoli nachylenie do horyzontu na niekorzystne. Szczęśliwie dla nas początkowo Księżyc wędruje na północ od niej (dzięki czemu jego cienki sierp można próbować dostrzec już 7 czerwca), gdzie około godziny 22 jego tarcza w fazie 2% zajmie pozycję na wysokości 4° nad północno-zachodnią częścią widnokregu. W poszukiwaniu Księżyca pomoże para najjaśniejszych gwiazd konstelacji Bliźniąt, czyli Kastor i Polluks. Księżyca należy szukać w odległości 18° na godzinie 4 względem wspomnianej pary gwiazd. Blisko niej naturalny satelita Ziemi przejdzie w kolejnych dwóch dniach. Najpierw jego tarcza w fazie 6% pokaże się 7° na zachód od niej, dobę później natomiast faza księżycowej tarczy urośnie do 12% i przesunie się na podobną odległość, ale na południowy wschód od pary Kastora z Polluksem.

10 czerwca Srebrny Glob, w fazie 20%, odwiedzi gwiazdozbiór Raka, przechodząc 6° od jasnej i znanej gromady otwartej gwiazd M44. Niestety w obserwacjach tego zbliżenia przeszkodzi niskie położenie opisywanych ciał na nieboskłonie i jasne tło nieba. Kolejne dwie noce Księżyc spędzi w towarzystwie Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. 11 czerwca jego sierp zwiększy się do 28% i pokaże się 6° na prawo od niego, dobę później zaś przesunie się na podobną odległość, ale na wschód od Regulusa, zwiększając przy tym fazę do 37%.

14 dnia miesiąca Księżyc przejdzie przez I kwadrę, a dwa dni później w fazie 74% spotka się ze Spiką, najjaśniejszą gwiazdą Panny. Do największego zbliżenia dojdzie jeszcze za dnia, około godziny 20:40, gdy południowa krawędź tarczy Srebrnego Globu minie Spikę w odległości około $5'$. Do godziny 1, gdy do zachodu obu ciał niebieskich pozostanie niewiele czasu, dystans między nimi zwiększy się do prawie 2° .

W dniach 20 i 21 czerwca bliski już pełni Księżyc odwiedzi Antaresa, najjaśniejszą gwiazdę Skorpiona. Pierwszego dnia jego tarcza zajmie pozycję około 7° na zachód od α Sco i jednocześnie minie w odległości $40'$ gwiazdę 3. wielkości π Sco. Dobę później księżycowa tarcza przeniesie się na podobną odległość na wschód od Antaresa, a jeszcze kolejnej nocy Srebrny Glob przejdzie przez pełnię na pograniczu gwiazdozbiorów Strzelca, Skorpiona i Wężownika, jednocześnie wędrując prawie maksymalnie pod ekliptyką. To sprawi, że okrągła tarcza Księżyca, przecinając południk lokalny, wzniesie się na zaledwie około 10° .

Między pełnią a ostatnią kwadrą 29 czerwca Srebrny Glob przejdzie od Strzelca do Ryb, cały czas wędrując niezbyt wysoko nad widnokregiem. 28 czerwca, prezentując tarczę w fazie 60%, Księżyc drugi raz w tym miesiącu odwiedzi planetę Saturn. Oba ciała niebieskie wzejdą około północy, świecąc mniej więcej 5° od siebie, a 2,5 godziny później przekroczą wysokość 20° ponad południowo-wschodnią częścią nieboskłonu. A zatem warunki widoczności są wyraźnie lepsze niż na początku miesiąca, wygląd tarczy planety zmieni się jednak niewiele. 30 czerwca Saturn zmieni kierunek swojego ruchu na niebie na wsteczny, rozpoczynając tym samym okres najlepszej widoczności w tym roku.

10 lipca maksimum swojej jasności osiągnie długookresowa gwiazda zmienna χ Cygni. Jest to miryda zmieniająca jasność od $+3,3$ do $+14,2^m$ w okresie 408 dni. W ostatnich kilku sezonach χ Cyg osiągała jasność około $+4,5^m$, a zatem w czerwcu powinno dać się ją dostrzec gołym okiem. Akurat lato jest najlepszym okresem na obserwowanie tej gwiazdy, gdyż góruje ona około północy na wysokości ponad 70° nad horyzontem, a można ją odnaleźć na linii łączącej gwiazdę 4. wielkości η Cyg z jaśniejszą o $0,9^m$ Albireo (β Cyg), mniej więcej $2,5^\circ$ od pierwszej z wymienionych gwiazd. Albireo jest wdzięcznym celem dla posiadaczy nawet lornetek, gdyż jest to szeroki układ podwójny ze składnikami wyraźnie różniącymi się barwami.

Również na początku lipca przez opozycję przejdzie planetoida Ceres. Niestety tym razem jest to jedna z niekorzystnych opozycji, i planetoida w lipcu pojaśnieje do około $+7,3^m$. W czerwcu jasność Ceres wyniesie około $+7,8^m$, a więc porównywalnie do planety Neptun. Nie da się jej zatem dostrzec gołym okiem. Oczywiście w związku z opozycją w czerwcu Ceres porusza się ruchem wstecznym i przez cały miesiąc pokona w ten sposób około $5,5^\circ$ na tle gwiazdozbioru Strzelca, kilka stopni na wschód od świecącej z jasnością $+2^m$ gwiazdy Nunki (σ Sgr), zbliżając się do gwiazdy 3. wielkości τ Sgr.

Ariel MAJCHER



Antyśpadanie

Jeden z twórców teorii kwantów, Paul Dirac, szukając właściwego opisu elektronu, który byłby jednocześnie kwantowy i zgodny z teorią względności, odkrył słynne równanie. Jedną z konsekwencji teorii Diraca był postulat istnienia cząstki o tej samej masie co elektron, ale przeciwnym ładunku. Cząstka taka – pozyton, zwana również antyelektronem, została po raz pierwszy zaobserwowana w 1932 roku przez Carla Davida Andersona. Taki był początek badań nad antymaterią.

Model standardowy (reprezentujący obecny stan wiedzy o budowie materii) przewiduje, że każda cząstka elementarna ma swoją antycząstkę (przy czym niektóre cząstki są swoimi własnymi antycząstkami). Jeżeli cząstka ma jakkolwiek niezerowy ładunek (np. elektryczny lub inny, taki jak liczba leptonowa, zapach, kolor itp.), to jej antycząstka ma przeciwne wartości wszystkich tych ładunków.

Pary cząstka-antycząstka mogą spontanicznie powstawać, o ile tylko dostępna jest wystarczająca ilość energii, żeby stworzyć taką parę. Cząstki rozpędza się w akceleratorach, nadając im ogromne energie kinetyczne, wielokrotnie większe od ich masy spoczynkowej, a następnie zderza się ze sobą. W wyniku zderzeń energia kinetyczna może zostać przekształcona w inną formę i wykorzystana do produkcji par cząstka-antycząstka różnych rodzajów.

Produkowane w akceleratorach antycząstki istnieją bardzo krótko, ponieważ bardzo szybko zachodzi proces odwrotny do ich kreacji, czyli anihilacja. Wytwarzane w zderzeniach antycząstki natychmiast znajdują sobie partnera, z którym anihilują. Para cząstka-antycząstka znika, a energia, która po nich zostaje, jest unoszona przez promieniowanie.

Analizując ogromne ilości zderzeń w akceleratorach i własności produkowanych w nich cząstek i antycząstek, można badać różne ich własności. Jak na razie wszystkie wyniki eksperymentów zgadzają się z przewidywaniami modelu standardowego. Warto jednak zrobić tutaj jedno zastrzeżenie: typowe eksperymenty akceleratorowe pozwalają badać własności trzech spośród czterech oddziaływań elementarnych: elektromagnetycznych, słabych i silnych. Oddziaływanie grawitacyjne jest zbyt słabe w porównaniu z pozostałymi i jego wpływ na przebieg typowych zderzeń w akceleratorze jest niemożliwy do zaobserwowania. Z drugiej strony model standardowy nie zawiera w sobie opisu grawitacji. Jest ona takim trochę *outsiderem* – trudno jej znaleźć wspólny język z innymi oddziaływaniami elementarnymi. Do jej opisu używamy zupełnie innej teorii.

Jak to jednak jest z grawitacyjnym oddziaływaniem antymaterii? Jeżeli antycząstka ma wszystkie ładunki przeciwne, to masę może też ma przeciwną? Odpowiedź brzmi: „nie”. Model standardowy przewiduje istnienie cząstek o przeciwnych wszystkich ładunkach, ale takiej samej masie. Oznacza to, że obie strony z pary cząstka-antycząstka powinny dokładnie tak samo oddziaływać grawitacyjnie.

Skoro pojawiło się przewidywanie, to oczywiście warto je sprawdzić eksperymentalnie. Jednak droga do badania grawitacyjnych własności antymaterii jest najeżona różnymi technicznymi przeszkodami. Istnieją cząstki antymaterii, takie jak pozyton czy antyproton, które nie rozpadają się spontanicznie, czyli w tym sensie są trwałe. Jednak antyelektrony i antyprotony błyskawicznie anihilują, spotykając cząstki zwykłej materii. Nie można więc trzymać antymaterii w żadnym pojemniku wykonanym ze zwykłej materii. Antymateria, żeby trwać, musi być od materii oddzielona próżnią. Dodatkowo antycząstki produkowane w akceleratorze mają na ogół ogromne (relatywistyczne) prędkości. Taką antycząstkę trzeba więc wyhamować i złapać w próżniowej pułapce magnetycznej, dbając o to, aby w żadnym momencie nie zbliżyła się do czegokolwiek wykonanego z materii. Nie jest to łatwe zadanie... a to nie koniec trudności.

Żeby badać własności grawitacyjne, trzeba dysponować cząstkami obojętymi elektrycznie, ponieważ oddziaływanie elektrostatyczne jest wiele rzędów wielkości silniejsze niż grawitacyjne. Naturalnym kandydatem na królika doświadczalnego jest atom antywodoru, czyli atom złożony z antyprotonu i antyelektronu. Trzeba więc jednocześnie wyprodukować antyprotony, antyelektrony i doprowadzić do ich rekombinacji (utworzenia stanu związanego, czyli atomu). Pierwszy raz takie atomy udało się wytworzyć w CERN w 1995 roku. W 2010 roku po raz pierwszy zdołano 38 takich atomów schwytać i utrzymać w pułapce magnetycznej przez 1/6 sekundy. W kolejnych latach atomy antywodoru udawało się utrzymywać w pułapce coraz dłużej, dzięki czemu możliwe było badanie ich różnych własności, takich jak np. struktura poziomów energetycznych.

Dopiero niedawno, w opublikowanej we wrześniu 2023 roku pracy zreferowano wyniki pierwszego eksperymentu, w którym zaobserwowano oddziaływanie atomów antywodoru z ziemskim polem grawitacyjnym. Eksperyment został przeprowadzony przez zespół ALPHA w CERN. Atomy antywodoru są pułapkowane w urządzeniu zwanym ALPHA-g („g” symbolizuje przyspieszenie ziemskie), którego centralnym elementem jest pionowa rura z próżnią. Doświadczenie polega na stopniowym obniżaniu barier pułapki magnetycznej i obserwacji, jaka część atomów ucieknie przez górne „wieczko” pułapki, a jaka przez dolne. Atomy, które wylatują z pułapki, anihilują oczywiście bardzo szybko i miejsce tej anihilacji można zaobserwować. Należy się spodziewać, że grawitacja Ziemi spowoduje, że większość atomów ucieknie dołem. Wyniki eksperymentu potwierdziły te oczekiwania – zgodnie z symulacjami tego procesu 80% atomów ucieka dołem, a 20% górą. Jest to pierwsze bezpośrednie doświadczalne potwierdzenie, że antymateria spada w polu grawitacyjnym tak samo jak „normalna” materia, z której jesteśmy zbudowani.

Szymon CHARZYŃSKI

[1] E. K. Anderson i inni: *Observation of the effect of gravity on the motion of antimatter*, Nature volume 621, pages 716–722 (2023).

[2] Animacja na YouTube: youtu.be/prhmw9CavR0.



Przekształcenia afiniczne

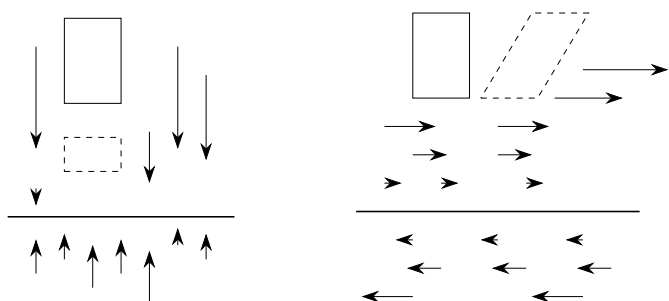
Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Przekształcenia afiniczne to bijekcje $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spełniające następujące warunki:

- (1) obrazami prostych są proste;
- (2) jeśli $\overrightarrow{SX} = x\overrightarrow{SA}$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $\overrightarrow{F(S)F(X)} = x\overrightarrow{F(S)F(A)}$.

Aby wykazać, że dane przekształcenie płaszczyzny \mathbb{R}^2 jest afiniczne, wystarczy zweryfikować, że jest bijektywne i zachowuje współliniowość punktów (co uzasadniam w artykule *Proste i punkty w świecie abstrakcji* w tym numerze *Delty*). Jest zatem oczywiste, że wszystkie homometrie (podobieństwa) są przekształceniami afinicznymi. Są jednak jeszcze inne przekształcenia afiniczne. Oto przykłady:



Po lewej stronie widzimy *powinowactwo prostokątne*, a po prawej *pochylenie*. Jeśli zaznaczona prosta ma równanie $y = 0$, to dla powinowactwa prostokątnego mamy $(x, y) \mapsto (x, \lambda y)$ ($\lambda \neq 0$ jest współczynnikiem przekształcenia), a dla pochylenia $(x, y) \mapsto (x + \lambda y, y)$.

Niech ABC i $A'B'C'$ będą niezdegenerowanymi trójkątami. Niech F_1 będzie homometrią, która przekształca odcinek AB w odcinek $A'B'$, a punkt C w pewien punkt C_1 . Przez F_2 oznaczmy powinowactwo prostokątne względem prostej $A'B'$, które punkt C_1 przekształca w taki punkt C_2 , że $C_2C' \parallel A'B'$. Na koniec niech F_3 będzie pochyleniem względem

prostej $A'B'$, dla którego $F_3(C_2) = C'$. Przekształcenie afiniczne $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$ przeprowadza punkty A, B, C w punkty, odpowiednio, A', B', C' , więc każdy trójkąt można afinicznie przekształcić w każdy inny. Co więcej, jest to jedyne takie przekształcenie, gdyż jeśli $F(X) = X'$ i $\overrightarrow{CX} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$, to $\overrightarrow{C'X'} = x\overrightarrow{C'A'} + y\overrightarrow{C'B'}$.

Niech s będzie skalą homometrii F_1 , a λ współczynnikiem powinowactwa prostokątnego F_2 . Wówczas F przekształca figurę o polu P w figurę o polu $s^2|\lambda| \cdot P$. Wynika z tego, że przekształcenia afiniczne zachowują proporcję pól.

Jeśli założenia i teza pewnego twierdzenia nie zmieniają się po zastosowaniu do nich przekształcenia afinicznego, to nazywamy je *afinicznym*. Takie twierdzenie wystarczy udowodnić dla jednej, najwygodniejszej konfiguracji geometrycznej i jest ono wówczas dowiedzione dla każdej konfiguracji, która jest z nią afiniczna.

Prosty przykład: środkowe trójkąta dzielą go na sześć trójkątów o równych polach. Jest to twierdzenie afiniczne, gdyż po przekształceniu afinicznym środkowe pozostają środkowymi (zachowanie współliniowości i proporcji na prostej) oraz trójkąty o równych polach są przekształcone właśnie na takie trójkąty. Wystarczy więc wykazać je dla trójkąta równobocznego, bo każdy trójkąt jest afiniczny z każdym, w szczególności z równobocznym. A środkowe dzielą trójkąt równoboczny na sześć trójkątów przystających.

Zadania

1. Dany jest trójkąt ABC . Na odcinku AB leżą punkty R_1 i R_2 spełniające równość $|AR_1| = |BR_2|$. Analogiczną własność mają punkty P_1 i P_2 na odcinku BC oraz Q_1 i Q_2 na odcinku CA . Wykazać, że trójkąty $P_1Q_1R_1$ i $P_2Q_2R_2$ mają równe pola.
2. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC leżą punkty, odpowiednio, P, Q, R ; zachodzi ponadto równość $\frac{|AR|}{|RB|} = \frac{|BP|}{|PC|} = \frac{|CQ|}{|QA|}$. Udowodnić, że trójkąty ABC, PQR oraz trójkąt wyznaczony przez proste AP, BQ, CR mają wspólny środek ciężkości.
3. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na odcinkach AB, BC, CD leżą, odpowiednio, punkty K, L, M , przy czym $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MD|}$. Prosta $m \parallel KL$ przechodzi przez punkt B . Prosta $l \parallel KM$ przechodzi przez punkt C . Prosta $k \parallel ML$ przechodzi przez punkt D . Dowieść, że proste k, m, l przecinają się w jednym punkcie.
4. Na boku AC trójkąta ABC wybrano punkt Q . Punkt P jest środkiem odcinka BC . Odcinki AP i BQ przecinają się w punkcie T . Punkt R jest środkiem odcinka AT , natomiast punkt S leży na odcinku BT i spełnia równość $|BS| = |QT|$. Dowieść, że $PS \parallel QR$.

Wskażówki do zadań
 1. Wystarczy wykazać to dla trójkąta równobocznego ABC . Można obliczyć $[F_1Q_1R_1] = [ABC] - [AR_1Q_1] - [BR_1P_1] - [CQ_1P_1]$, stosując wzór $[AR_1Q_1] = \frac{\sqrt{3}}{4}|AR_1| \cdot |AQ_1|$ i analogicznie dla pozostałych trójkątów. Tak samo obliczamy $[F_2Q_2R_2]$.
 2. Również wystarczy przeprowadzić dowód dla trójkąta równobocznego ABC . Aby się przekonać, że pozostałe dwa trójkąty też są równoboczne i mają ten sam środek co ABC , wystarczy obrócić trójkąt ABC o 120° wokół jego środka.
 3. Każdy równoległobok jest afiniczny z kwadratem przez złożenie właściwego pochylenia i powinowactwa prostokątnego. W przypadku gdy $ABCD$ jest kwadratem, można wykazać, że każde dwie spośród prostych k, l, m przecinają się na okręgu opisanym na tym kwadracie.
 4. Można zastosować przekształcenie afiniczne, które trójkąt AQT przekształca w trójkąt równoramienny z kątem prostym przy wierzchołku Q . Wtedy punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BQC , więc $|SP| = |TP|$, co prowadzi do $|\angle SPT| = 90^\circ$.



KONKURS PTM im. WITOLDA WILKOSZA

na najlepszą studencką pracę
popularyzującą matematykę

Na Konkurs można nadsyłać prace
mające na celu
popularyzację matematyki

Termin zgłoszeń: 30 września 2024

<http://ok-ptm.im.uj.edu.pl/wilkosz.php>

Organizator Konkursu



Oddział Krakowski
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego

Sponsor Konkursu



UNIwersytet Jagielloński
w Krakowie

Wydział
Matematyki i Informatyki

