



$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu \quad \text{J} \cdot \text{s} \quad \pi=3,141592\dots$$

**NR 5** (600) 2024

CENA 8 ZŁ + VAT 8%

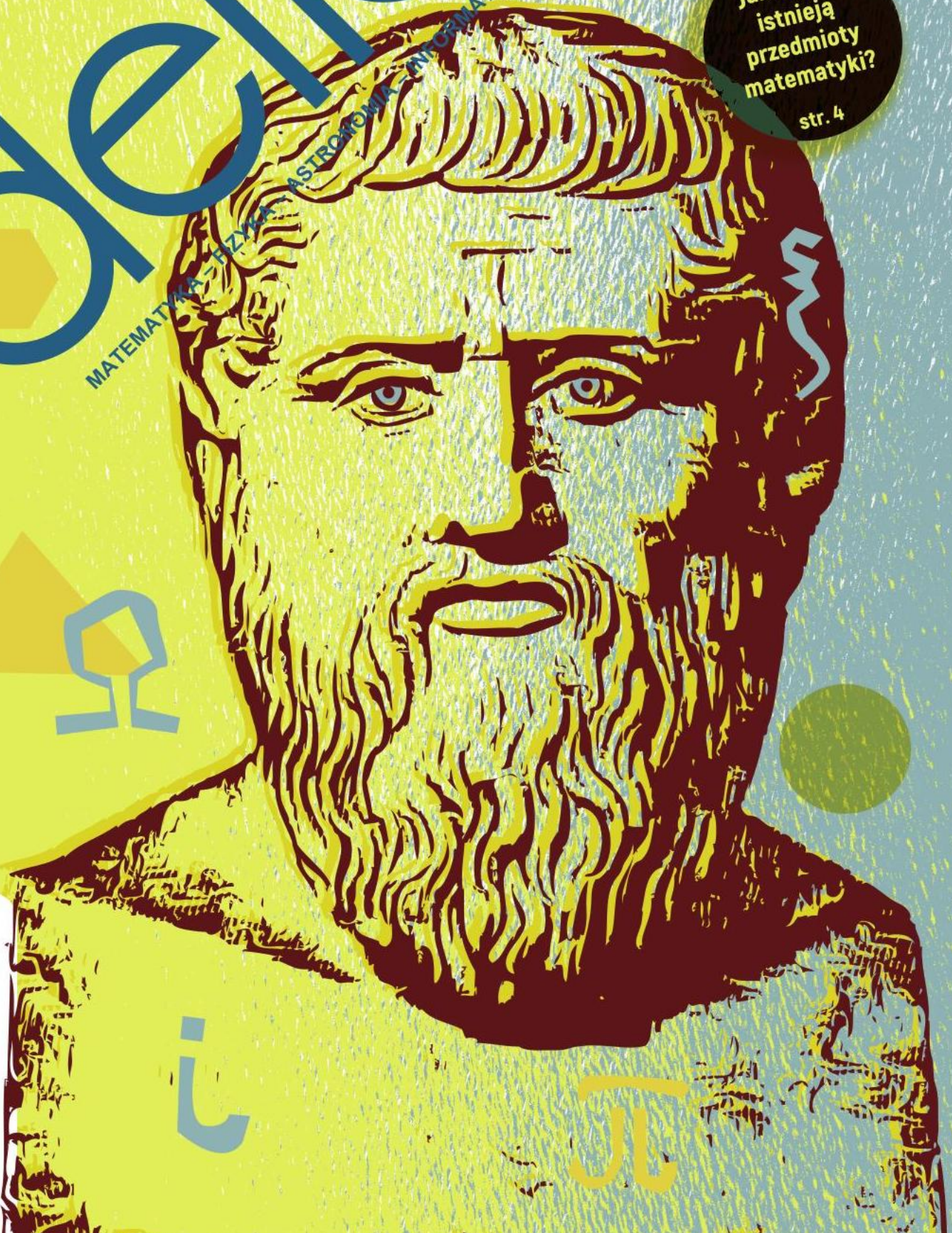
PL ISSN 0137-3005 / NR JND 35 580 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

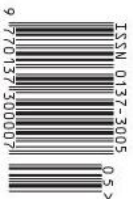
Jak i gdzie  
istnieją  
przedmioty  
matematyki?

str. 4

MATEMATYKA FIZYKA ASTRONOMIA INFORMATYKA









UNIWERSYTET  
WARSZAWSKI



Nakład: 2800 egz.

## SPIS TREŚCI NUMERU 5 (600) 2024

Czy metr może być kwadratowy? <i>Antoni Wójcik</i>	str. 1
Jak i gdzie istnieją przedmioty matematyki? <i>Roman Murawski</i>	str. 4
 Zadania <i>Krzysztof M. Pawłowski</i>	str. 6
Czy na każdej sferze istnieje mnożenie? <i>Krzysztof M. Pawłowski</i>	str. 7
 O strukturach dynamicznych <i>Magdalena Fikus</i>	str. 10
Topologiczne przejścia fazowe <i>Aleksandra Napierała-Batygolska, Piotr Tomczak</i>	str. 11
Ciąg dalszy następuje <i>Filip Graliński</i>	str. 14
Jej wysokość krzywa eliptyczna <i>Bartosz Naskręcki</i>	str. 16
Klub 44	str. 20
 Prosto z nieba: Jak powstają gwiazdy neutronowe i czarne dziury?	str. 22
 Niebo w maju	str. 22
 Aktualności Komputer na wodę i inne rodzaje broni	str. 24
 Odmnażanie wielomianów <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze:  
W poszukiwaniu  
prawdziwego  
kształtu Ziemi



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej; doc. dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr Wojciech Czerwiński; dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ; dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszufńska; dr hab. Artur Jeż, prof. UW; prof. dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwika Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl) (tylko instytucje)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
Na stronie Empiku *Deltę* można zamówić co miesiąc:  
[www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p](http://www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p)

**Numer archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**W roku akademickim 2023/2024 społeczność akademicka Wydziału Matematyki i Informatyki oraz Wydziału Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu obchodzi 30-lecie swojego istnienia.** Jesienią 1993 roku wyodrębniły się one z Wydziału Matematyki i Fizyki. Z tej właśnie okazji reprezentanci dyscyplin nauk ścisłych – nauczyciele akademicy ww. Wydziałów napisali kilka publikacji do majowego numeru *Delty*. Za zaproszenie Redakcji *Delty* serdecznie dziękujemy!

Od samego początku istnienia nasze wydziały kładły duży nacisk na promocję nauki. Edukacja i popularyzacja nauki stanowi fundament naszego rozwoju jako społeczeństwa i jednocześnie klucz do zrozumienia świata, w którym żyjemy. Wydziały Matematyki i Informatyki oraz Wydział Fizyki na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza od lat zaangażowane są w kształcenie przyszłych pokoleń naukowców, inżynierów, nauczycieli i specjalistów w dziedzinie nauk ścisłych, przekazując im nie tylko wiedzę teoretyczną, ale również umiejętności praktyczne oraz pasję do odkrywania.

Organizacja Dnia *Delty* na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM w Poznaniu, czyli innowacyjnych

spotkań młodzieży z naukowcami, to naturalne przedłużenie naszych działań edukacyjnych. Dzięki naszej współpracy możemy dotrzeć do szerszego grona odbiorców, inspirując młodych ludzi zainteresowanych nauką do pogłębiania wiedzy i poszerzania horyzontów intelektualnych. Wszystkie dotychczas zorganizowane edycje Dnia *Delty* gromadziły setki uczniów zaangażowanych w rozwój i wzmocnienie zainteresowań z zakresu matematyki, fizyki, informatyki oraz astronomii. Co roku doświadczamy, że *Delta* naprawdę realizuje ideę „mówiącej nauki”. Warto przy okazji wspomnieć, że organizowany przez *Delte* Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki nosi imię Pawła Domańskiego, pierwszego laureata tego konkursu, przedwcześnie zmarłego znamienitego profesora WMiI UAM.

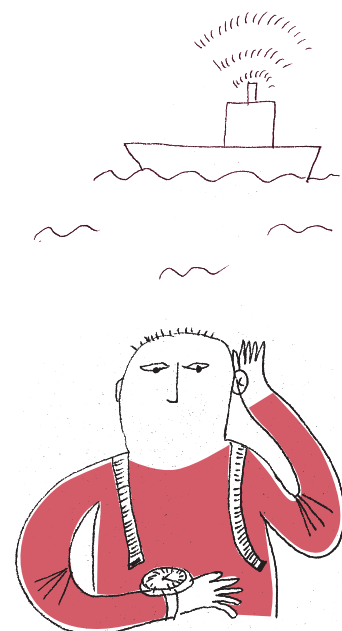
Z radością patrzymy w przyszłość, wierząc, że nasza współpraca z *Delatą*, która właśnie obchodzi swoje 50-lecie, będzie się rozwijać, otwierając nowe możliwości promocji nauki i zarażania kolejnych pokoleń fascynacją światem nauki ścisłej.

Edyta JUSKOWIAK

Prodziekan Wydziału Matematyki i Informatyki UAM, kierowniczka Wydziałowego Centrum Dydaktyki Matematyki i Informatyki

## Czy metr może być kwadratowy?

\* Wydział Fizyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu



W czasach, kiedy jeszcze funkcjonowały gimnazja, na teście końcowym pojawiło się następujące zadanie:

*Syrena okrętowa wydaje dźwięk o częstotliwości 50 1/s. Oblicz długość emitowanej fali dźwiękowej, przyjmując, że dźwięk rozchodzi się z prędkością 300 m/s.*

Zdarzyło się w pewnej szkole, że uczniowie nie poradzi sobie z tym zadaniem. Usprawiedliwiali się tym, że nauczyciel nie przerobił tematu fal dźwiękowych. Załóżmy więc, że nie wiemy nic o falach dźwiękowych, a jednak nie chcemy dać za wygraną. W treści zadania mamy podane dwie wielkości. Nawet jeśli nie wiemy, jakie literki zwyczajowo oznaczają te wielkości, możemy użyć własnych oznaczeń, np.  $cz = 50 \text{ 1/s}$  i  $pr = 300 \text{ m/s}$ . Rozwiązaniem zadania ma być długość – oznaczmy ją literą  $L$ . Jednostką długości jest metr (tę wiedzę powinien przekazać każdy nauczyciel fizyki). Rozważmy teraz cztery próbne rozwiązania. Użyjmy podstawowych działań:

$$L_1 = cz + pr, \quad L_2 = cz \cdot pr, \quad L_3 = cz/pr, \quad L_4 = pr/cz.$$

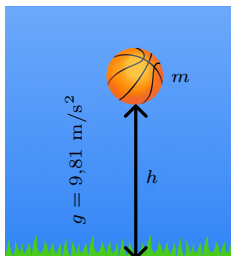
W pierwszym przypadku nie bardzo wiemy, jak dodawać 1/s do m/s. W drugim przypadku otrzymalibyśmy wynik w  $m/s^2$ , w trzecim w  $1/m$ , a w czwartym w metrach. Wybór czwartej możliwości gwarantuje uzyskanie wyniku z poprawną jednostką. Ponadto wynik

$$L = pr/cz = 6 \text{ m}$$

okazuje się poprawnym rozwiązaniem, mimo że prowadzące do niego rozumowanie nie było ścisłe. Powyższy przykład wskazuje, że oplaca się zwracać uwagę na jednostki. Zwykle uczniowie nie doceniają nacisku, jaki nauczyciele fizyki kładą na konieczność pamiętania o jednostkach. Jak można obniżyć ocenę, myśli uczeń, za taki drobiazg jak podanie końcowego wyniku w formie liczby bez towarzyszącej jej jednostki. A przecież ten drobiazg (w przytłaczającej większości przypadków) powoduje, że odpowiedź pozbawiona jest jakiegokolwiek znaczenia. Każde zadanie z fizyki można przecież zakończyć stwierdzeniem,



Podobny chochlik zdefiniował kiedyś znak ładunków elektrycznych tak niefortunnie, że pokolenia uczniów muszą mierzyć się z problemem prądu elektrycznego płynącego w kierunku odwrotnym do ruchu elektronów.



Rys. 1

Spodziewamy się zatem następującego wzoru na czas spadku:

$$t = A m^\alpha h^\beta g^\gamma,$$

gdzie  $A$  to bezwymiarowa stała (którą uznaliśmy za nieistotną), a  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  to wykładniki, które mamy nadzieję wyznaczyć metodą analizy wymiarowej. Powyższe równanie z punktu widzenia analizy wymiarowej wygląda tak:

$$s = \text{kg}^\alpha \text{m}^\beta (\text{m s}^{-2})^\gamma,$$

a jego spełnienie wymaga, aby  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1/2$  i  $\gamma = -1/2$ . Ostatecznie otrzymujemy prawidłową relację

$$t = A \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

A gdybyśmy zapytali o wartość siły, z jaką przyciągają się dwie masy,  $m_1$  i  $m_2$ , znajdujące się w odległości  $r$ ,

że wynik wynosi 1 – w odpowiednich jednostkach. Tych, którzy do jednostek podchodzą niefrasobliwie, postraszyć można hiperinflacją:

$$1 \text{ zł} = 100 \text{ gr} = 10 \text{ gr} \cdot 10 \text{ gr} = 0,1 \text{ zł} \cdot 0,1 \text{ zł} = 0,01 \text{ zł} = 1 \text{ gr}.$$

Wracając do naszego zadania, odrzuciliśmy dodawanie  $1/s$  i  $m/s$ , ale nie mieliśmy nic przeciwko ich mnożeniu bądź dzieleniu. Jak to możliwe? Rozważmy prostszy przykład. Powierzchnię prostokąta o bokach  $a = 1 \text{ m}$  i  $b = 2 \text{ m}$  obliczamy w następujący sposób:

$$S = a \cdot b = 1 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \text{ m}^2.$$

Arytmetyka uczy, że  $1 \cdot 2 = 2$ , ale co ma oznaczać równanie  $\text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$ ? Gdyby chodziło o wyrażenie algebraiczne, w którym symbol „m” zastępuje liczbę, nie byłoby problemu, ale co to znaczy pomnożyć metr razy metr. Warto uświadomić sobie (to główny cel niniejszego artykułiku), że to nic nie znaczy. Symbol  $\text{m}^2$  nie oznacza mnożenia czegokolwiek, ale jest (sprytnie dobranym tak, aby odwołać się do algebraicznej intuicji) symbolem jednostki powierzchni zwanej metrem kwadratowym. W dawnych czasach umówiliśmy się bowiem za jednostkę powierzchni uznać pole kwadratu o boku 1 metra. Ten związek jednostki powierzchni z jednostką długości jest, podkreślmy to raz jeszcze, umowny. Gdyby jakiś chochlik przyjął w dawnych czasach za wzorec powierzchnię koła o promieniu  $r = 1 \text{ m}$ , to wzór na pole prostokąta wyglądałby dzisiaj tak (biedni uczniowie):

$$S_{\square} = \frac{a \cdot b}{\pi}.$$

Za to wzór na pole koła uprościłby się do postaci  $S_{\circ} = r^2$ . Wróćmy do tradycji, w której wzorcem powierzchni jest kwadrat. To pozwala tym samym słowem kwadrat określać zarówno figurę geometryczną  $\square$ , jak i operację mnożenia liczby przez nią samą. Niezależnie od tego, jak zdefiniujemy wzorce długości i powierzchni, pozostaje prawdą (geometryczną czy fizyczną), że powierzchnia obiektu  $S$  skaluje się z kwadratem jego rozmiaru liniowego  $L$ . Zatem relacja

$$(1) \quad S = AL^2$$

będzie zawsze słuszna, tylko bezwymiarowa stała proporcjonalności  $A$  będzie zmieniać się od przypadku do przypadku. Jeśli rozważymy okrąg o obwodzie  $L$ , to będziemy mieli  $A = 1/(4\pi)$ , a jeśli sferę o średnicy  $L$ , to  $A = \pi$  itp. Jeśli zgodzimy się co do tego, że istotne jest skalowanie, a stała proporcjonalności jest drugorzędna, to wiele istotnych związków między wielkościami fizycznymi możemy ustalić, skupiając się na jednostkach. Taką metodę nazywamy analizą wymiarową. Przykładowo spróbujmy ustalić czas spadku swobodnego (pomijamy opory ruchu) obiektu o masie  $m$  z wysokości  $h$  (rys. 1). Wiemy, że istotnym parametrem związanym z rozpatrywanym zjawiskiem jest tzw. przyspieszenie ziemskie  $g$ .

wiedząc, że istotnym parametrem jest stała grawitacji  $G \approx 7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ , to próbne rozwiązanie miałyby postać:

$$F = m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} r^\beta G^\gamma.$$

Tym razem pojawia się drobny problem związany z tym, że mając dwie masy, możemy utworzyć wielkość bezwymiarową, np.  $x = \frac{m_2}{m_1}$ . Udziału tej wielkości w ostatecznej formule nie da się ustalić na podstawie analizy wymiarowej. Zapiszmy zatem:

$$F = f(x) m_1^{\alpha_1} r^\beta G^\gamma,$$

gdzie  $f(x)$  jest nieznaną funkcją. Dalej mamy

$$\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{kg}^{\alpha_1} \text{m}^\beta \left( \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \right)^\gamma.$$

Stąd  $\alpha_1 = 2$ ,  $\beta = -2$  i  $\gamma = 1$ . Ostatecznie (prawie)

$$F = f(x) m_1^2 r^{-2} G.$$

Warunek symetrii implikuje, że funkcja  $f$  musi spełniać równanie

$$f(x) = f(1/x)x^2.$$

Jeżeli ograniczymy się do funkcji postaci  $f(x) = x^\kappa$ , to rzeczywiście jedynym rozwiązaniem jest  $\kappa = 1$ , czyli  $f(x) = x$ . Zachęcamy Czytelnika do zastanowienia się nad znalezieniem innych rozwiązań powyższego równania (bez ograniczania się do funkcji potęgowych) i ich interpretacji.

Jeśli dodatkowo odwołamy się do symetrii powiązanej z III zasadą dynamiki, to uznamy, że  $f(x) = x$ , i otrzymamy znany wzór:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Wydawać by się mogło, że korzystając z analizy wymiarowej, „wyprowadziliśmy” prawo grawitacji. Czyż nasza mądrość osiągnęła poziom Newtona? Niestety nie jest aż tak dobrze, nasz sukces związany jest z użyciem stałej grawitacji. To w niej (zwłaszcza w jej jednostce) zaszyta jest istotna informacja dotycząca grawitacji. Otrzymaliśmy tę informację w prezencie i ją wykorzystaliśmy. Sprytne wykorzystanie dostępnej informacji nie jest rzeczą wstydliwą. To część warsztatu fizyka. Sukces analizy wymiarowej oparty jest na umiejętności wyizolowania wielkości, które są istotne z punktu widzenia rozpatrywanego zagadnienia. To nie jest łatwa umiejętność, nabywa się ją wraz z doświadczeniem. I chociaż wiąże się to z wysiłkiem, to gorąco zachęcam do ćwiczenia tej umiejętności najpierw w zagadnieniach, które potrafimy rozwiązać ściśle, a następnie tam, gdzie inne metody zawodzą.

Co ciekawe, analiza wymiarowa może przydać się również w problemach czysto matematycznych. Załóżmy, że słabo radzimy sobie z rachunkiem całkowym. Otrzymaliśmy informację, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

i zadanie wyznaczenia

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx.$$

Przyjmijmy (roboczo), że  $x$  jest wielkością mierzoną w metrach. Wtedy szukana całka musi też być wyrażona w metrach. Z kolei wykładnik musi być bezwymiarowy, a to znaczy, że 4 to dla nas  $4 \text{ m}^2$ . Żeby uzyskać z tej wielkości wartość mierzoną w metrach, należy użyć pierwiastka. Po ustaleniu tej zależności możemy zapomnieć o metrach i zapisać rozwiązanie w postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \sqrt{4} \pi.$$

Inny (matematyczny) przykład wiąże się z możliwością dowiedzenia twierdzenia Pitagorasa na podstawie zamieszczonego rysunku przedstawiającego trzy trójkąty prostokątne. Zastosujmy wynikające z analizy wymiarowej równanie (1) do trójkąta prostokątnego. Niech  $L$  oznacza długość przeciwprostokątnej, a bezwymiarowa stała niech będzie równa nieznanej funkcji najmniejszego kąta w trójkącie  $A = f(\theta)$ . Z rysunku 2 wynika, że pole dużego trójkąta jest równe sumie pól trójkątów mniejszych. Możemy to wyrazić równaniem

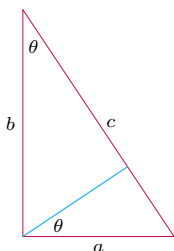
$$f(\theta) \cdot c^2 = f(\theta) \cdot a^2 + f(\theta) \cdot b^2,$$

z którego twierdzenie Pitagorasa wynika bezpośrednio ( $f(\theta) \neq 0$ ).

Na koniec chciałbym zachęcić Cię, Czytelniku, do samodzielnego zmierzenia się z dwoma problemami.

Typowym i bardzo pouczającym przykładem jest zagadnienie oporów ruchu w powietrzu (tych, które pomijaliśmy w przykładzie spadku swobodnego). Jako istotne wielkości proszę przyjąć rozmiar obiektu (m), jego prędkość ( $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) oraz gęstość ( $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) i lepkość ( $\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$ ) powietrza. Warto rozpatrzyć trzy przypadki. W przypadku ogólnym powinno się zaobserwować bezwymiarową kombinację wspomnianych czterech wielkości. Zbadaj również dwa przypadki graniczne – jeden, w którym zaniedbuje się lepkość, i drugi, w którym zaniedbuje się gęstość powietrza.

Kolejne pouczające ćwiczenie polega na wyznaczeniu za pomocą analizy wymiarowej trzech wielkości – o wymiarze masy, długości i czasu, z wykorzystaniem trzech stałych – stałej grawitacji, stałej Plancka i prędkości światła w próżni. Tak wyznaczone wielkości nazywamy masą Plancka, długością Plancka i czasem Plancka. Porównaj, Czytelniku, wyznaczone wielkości z typowymi wielkościami skali atomowej –  $m = 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $L = 10^{-10} \text{ m}$  i  $t = 10^{-15} \text{ s}$ . Co zwróciło Twoją uwagę?



Rys. 2

O analizie wymiarowej pisał również Jan Kalinowski w  $\Delta_{17}^4$ .

# Jak i gdzie istnieją przedmioty matematyki?

\* Wydział Matematyki i Informatyki UAM *Roman MURAWSKI\**

Na temat filozofii matematyki i jej historii zob. np. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów oraz Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych i Współczesna filozofia matematyki*. Dla bardziej zaawansowanych: R. Murawski i T. Bedürftig, *Philosophy of Mathematics* oraz *Philosophie der Mathematik*.



Potocznie mówi się, że matematyka to badanie własności (różnych rodzajów) liczb, funkcji, figur geometrycznych, abstrakcyjnych przestrzeni itd. Czym jednak są te obiekty, jak i gdzie one istnieją, jaka jest ich natura, czy są *tworzone* (konstruowane) przez matematyków, czy też są im w jakiś sposób dane i matematycy *odkrywają* je i ich własności? Na tego typu pytania odpowiedzi szukać należy nie w samej matematyce, ale w filozofii matematyki.

Czym jest filozofia matematyki? Najprościej można powiedzieć, że jest to filozoficzna refleksja nad matematyką jako nauką. Szuka się więc w niej m.in. odpowiedzi na pytanie o naturę i sposób istnienia przedmiotów matematycznych i analizuje się metody poznawcze właściwe matematyce.

Pytanie o naturę i sposób istnienia obiektów matematyki związane jest z pewnym starym problemem filozoficznym zwanym sporem o powszechniki (uniwersalia), a sformułowanym już przez Platona (427–347 p.n.e.). Otóż Platon pytał o to, co odpowiada pojęciom ogólnym, takim jak człowiek, piękno, dobro, prosta, liczba, trójkąt itd. W historii pojawiły się cztery zasadnicze stanowiska będące odpowiedzią na to pytanie: skrajny realizm pojęciowy, umiarkowany realizm pojęciowy, konceptualizm oraz nominalizm.

Wedle realizmu skrajnego (reprezentował go m.in. Platon) uniwersalia istnieją obiektywnie jako odrębne, zmysłowo niedostępne przedmioty. Realizm umiarkowany, który reprezentował na przykład Arystoteles (384–322 p.n.e.), twierdzi, że uniwersalia istnieją obiektywnie, ale nie jako odrębne, różne od rzeczy przedmioty, lecz jako własności wspólne tym rzeczom. Konceptualizm, zapoczątkowany przez Johanna Roscelina (ok. 1050 – ok. 1120), głosi, iż uniwersalia są (jedynie) pojęciami i istnieją tylko w umyśle ludzkim. Nominalizm wreszcie, zapoczątkowany przez Williama Ockhama (ur. przed 1300, zm. ok. 1350), powiada, że uniwersalia w ogóle nie istnieją, istnieją bowiem tylko przedmioty jednostkowe; złudzenie zaś, że istnieją uniwersalia, ma swe źródło w dezinterpretacji języka, w którym funkcjonują nazwy ogólne (pozwalające na skracanie wypowiedzi).

Wymienione tu koncepcje (z wyjątkiem drugiej) mają swoje odbicie w odpowiedzi na tytułowe pytanie dotyczące sposobu istnienia przedmiotów matematyki. Odpowiednie stanowiska nazywa się platonizmem, konceptualizmem i nominalizmem.

Przez platonizm rozumie się stanowisko głoszące, że przedmioty matematyki istnieją obiektywnie, samoistnie, niezależnie od czasu i przestrzeni oraz od poznającego umysłu. Są więc one dane matematykowi. Matematyk zatem *odkrywa* przedmioty matematyki i ich własności oraz je opisuje. Gdyby więc na świecie nie było żadnego matematyka, to i tak istniałyby wszystkie przedmioty matematyki mające swoje własności (te które znamy dziś, te które poznamy jutro, ale i te, których nigdy nie poznamy i o których matematycy nigdy mówić nie będą). Zgodnie z tym mówić należy, że matematyk *odkrył* daną teorię, a nie, że ją stworzył; w szczególności powinniśmy powiedzieć, że Leibniz i Newton *odkryli* rachunek różniczkowy i całkowy, a nie, że go stworzyli.

Platonizm głosiło wielu ważnych matematyków. Sam Platon twierdził, że podstawą poznania matematycznego jest rozum, a właściwą metodą matematyki metoda aksjomatyczna. Zdawał sobie oczywiście sprawę z tego, że matematyk posługuje się w swojej pracy obserwacją i rysunkiem, ale jest to wedle niego jedynie okazja do uświadomienia sobie pojęć, a nie materiał do ich wytworzenia.

Ku platonizmowi skłaniał się też Euklides (ok. 365 – ok. 300 p.n.e.), autor słynnych Elementów. Głosili go również m.in. tacy matematycy współcześni, jak Georg Cantor<sup>1</sup> (1845–1918), twórca teorii mnogości, Gottlob Frege<sup>2</sup> (1848–1925), twórca logicyzmu (ważnego kierunku w filozofii matematyki, twierzącego, że matematyka jest redukowalna do logiki) czy jeden z największych logików

<sup>1</sup>W roku 1884 Cantor w liście do G. Mittag-Lefflera pisał: „Jeśli chodzi o rzeczy pozostałe [mianowicie o rzeczy poza stylem i sposobem przedstawienia – R.M.], to wszystko to nie jest moją zasługą, w stosunku do treści moich prac jestem jedynie sprawozdawcą i urzędnikiem (*nur Berichterstatter und Beamter*)”.

<sup>2</sup>Frege w *Grundlagen der Arithmetik* (punkt. 106) pisał: „Okazało się, że liczba, którą zajmuje się arytmetyka, musi być traktowana nie jako niesamodzielny atrybut, lecz rzeczownikowo (*substantiivisch*). Liczba jawi się więc jako rozpoznawalny przedmiot, chociaż nie fizyczny ani nawet nie przestrzenny, czy taki, który moglibyśmy sobie jakoś wyobrazić”.

<sup>3</sup>Gödel w pracy *Russell's Mathematical Logic* (1944) pisał: „Klasy i pojęcia mogą być pojmowane jako rzeczywiste obiekty istniejące niezależnie od naszych definicji i konstrukcji”, a w *Mathematics and the Metaphysicians* (1901) znajdujemy zdania: „Logika [a także matematyka, jak wynika z dalszych rozważań Russella – R.M.] zajmuje się światem realnym, tak jak zoologia, aczkolwiek bada bardziej abstrakcyjne i ogólne jego własności. [...] Wydaje mi się, że założenie istnienia takich obiektów jest tak samo uzasadnione, jak przyjęcie istnienia ciał fizycznych, a jest przecież wiele racji, by przyjąć ich istnienie. Są one tak samo konieczne do skonstruowania satysfakcjonującej teorii matematycznej, jak ciała fizyczne są konieczne do otrzymania sensownej teorii percepcji zmysłowej”.

<sup>4</sup>W pracy *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), gdzie Dedekind zbudował poprawną teorię liczb rzeczywistych (definiując liczby niewymierne za pomocą przekrojów), pisał: „Za każdym razem, gdy dany jest przekrój  $(A_1, A_2)$ , który nie jest wyznaczony przez żadną liczbę wymierną, *stwarzamy (erschaffen wir)* nową liczbę – liczbę niewymierną, którą traktować będziemy jako całkowicie wyznaczoną przez ten przekrój  $(A_1, A_2)$ ; [...]”. Zauważmy, że użyte w oryginale niemieckim słowo „erschaffen” to słowo, którym oddaje się w niemieckim przekładzie Biblii hebrajski termin אָרָבָה [bara] występujący w Księdze Rodzaju 1,1, w opisie stwórczego działania Boga. Par. 4 tej pracy, w którym Dedekind wprowadził liczby niewymierne, zatytułowany jest „Stworzenie (*Schöpfung*) liczb niewymiernych”, w par. 1 pisze zaś, że liczby zostały „stworzone przez ducha ludzkiego” (*durch den menschlichen Geist erschaffen*).

<sup>5</sup>Arend Heyting, uczeń Brouwera, pisał w pracy *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik* (1931) tak: „Przedmioty matematyczne z natury swej są zależne od ludzkiej myśli, i to nawet gdyby były niezależne od indywidualnych aktów myślenia. Istnienie ich jest zagwarantowane o tyle tylko, o ile mogą być określone przez myśl”.

<sup>6</sup>W jednym z wywiadów Tarski mówił o sobie: „Jestem nominalistą. Jestem o tym głęboko przekonany. W istocie tak głęboko, że nawet po mojej trzeciej reinkarnacji nadal będę nominalistą”. W czasie sympozjum w Chicago w roku 1965 powiedział: „Okazuje się dużo bardziej skrajnym antyplatonikiem. [...] Reprezentuję jednak ten surowy, naiwny rodzaj antyplatonizmu, który określiłbym jako materializm albo nominalizm z pewną skazą materialistyczną”. W liście do Josepha H. Woodgera z 21 listopada 1948 roku pisał: „Problem zbudowania logiki i matematyki nominalistycznej interesuje mnie mocno od wielu, wielu lat”.

Kurt Gödel<sup>3</sup> (1906–1978). O swoich odczuciach związanych z pracą badawczą w zakresie logiki matematycznej (zwanej wówczas logistyką) – a uwagi te dotyczą także badań matematycznych – pisał obrazowo wybitny polski logik Jan Łukasiewicz (1878–1956), zwolennik platonizmu:

„Chciałbym na zakończenie tych uwag nakreślić obraz związany z najgłębszymi intuicjami, jakie odczuwam zawsze wobec logistyki. Obraz ten rzuci może więcej światła na istotne podłoże, z jakiego przynajmniej u mnie wyrasta ta nauka, niż wszelkie wywody dyskursywne. Otóż ilekroć zajmuję się najdrobniejszym nawet zagadnieniem logistycznym, szukając na przykład najkrótszego aksjomatu rachunku implikacyjnego, tylekroć mam wrażenie, że znajduję się wobec jakiejś potężnej, niesłychanie zwartej i niezmiernie odpornej konstrukcji. Konstrukcja ta działa na mnie jak jakiś konkretny, dotykalny przedmiot, zrobiony z najtwardszego materiału, stokrotnie mocniejszego od betonu i stali. Nic w niej zmienić nie mogę, nic sam dowolnie nie tworzę, lecz w wytężonej pracy odkrywam w niej tylko coraz to nowe szczegóły, zdobywając prawdy niewzruszone i wieczne. Gdzie jest i czym jest ta idealna konstrukcja? Filozof wierzący powiedziałby, że jest w Bogu i jest myślą Jego”.

Przyjęcie platonizmu implikuje, że problem prawdy i prawdziwości w matematyce staje się prosty. „Prawdziwy” znaczy bowiem tyle, co „zgodny ze stanem rzeczy w rzeczywistości matematycznej”. Nie ma więc miejsca na problemy nierozstrzygalne w matematyce. Każdy problem typu pytania–rozstrzygnięcia, „tak–nie” (a więc np. hipoteza Riemanna czy hipoteza continuum) ma już istniejące jednoznaczne rozwiązanie i zadaniem matematyka jest znaleźć odpowiednie metody, by do tej odpowiedzi dotrzeć, by ją *odkryć*. Co więcej, platonizm implikuje, że uniwersum matematyczne staje się bardzo szerokie – jedynym bowiem kryterium istnienia jest tu niesprzeczność, tzn. istnieje każdy obiekt niesprzeczny.

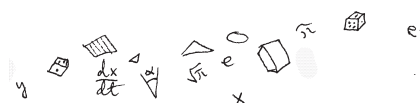
Konceptualizm głosi, że przedmioty matematyki są wytworem umysłu ludzkiego. Istnieją zatem tylko obiekty matematyczne konstruowalne, czyli te, które można skonstruować z obiektów, których istnienie jest intuicyjnie jasne. Konceptualistą był na przykład matematyk, teolog i ostatni scholastyk kardynał Mikołaj z Kuzy (1401–1464). Głosił on, że zarówno liczby, jak i obiekty geometrii są tworam ludzkiego umysłu. Są one odbiciami, obrazami (*ymago*) liczb i obiektów geometrycznych istniejących w umyśle Bożym. Konceptualizm głosili też Henri Poincaré (1854–1912) i Richard Dedekind<sup>4</sup> (1831–1916). Najsilnie konwencjonalizm doszedł do głosu w intuicjonizmie zainicjowanym przez matematyka niderlandzkiego Luitzena Egbertusa Jana Brouwera (1881–1961). Według niego matematyka jest funkcją intelektu ludzkiego i wolną, życiową aktywnością rozumu, jest wytworem umysłu ludzkiego. Istnieje w matematyce tylko to, co jest konstruowalne przez myśl (choć niekoniecznie aktualnie skonstruowane)<sup>5</sup>. Konsekwencją takiego stanowiska jest odrzucenie metody aksjomatycznej w matematyce, odrzucenie nieskończoności aktualnej (i konieczność ograniczenia się jedynie do nieskończoności potencjalnej) czy wreszcie znaczne ograniczenie zarówno świata przedmiotów matematycznych, jak i metod dopuszczalnych w matematyce.

Trzecie wyróżnione przez nas stanowisko – nominalizm – głosi, że przedmioty matematyki to jednostkowe obiekty (fizyczne), a więc napisy i nic więcej. Choć stanowisko to wydawać się może dziwne, to miało ono wielu zwolenników – należeli do nich m.in. Bertrand Russell (1872–1970) i Alfred North Whitehead (1861–1947), a także niektórzy wybitni logicy polscy, w szczególności Alfred Tarski<sup>6</sup> (1901–1983), Stanisław Leśniewski (1886–1939) oraz Leon Chwistek (1894–1944). Nominalizm ma dziś wielu zwolenników, zwłaszcza w anglosaskiej filozofii matematyki. Zauważmy, że prowadzi on do bardzo silnego zawężenia przestrzeni obiektów matematycznych, eliminując wszelkie obiekty abstrakcyjne (na przykład zbiory, które powinno się interpretować jako wypowiedzi, czy raczej skróty wypowiedzi, o indywiduach).

Zadajmy teraz pytanie: Które z opisanych stanowisk jest słuszne i prawdziwe? Odpowiedź brzmi: Nie wiemy! Sama matematyka nie daje tu rozstrzygnięcia. Nie ma to jednak żadnego wpływu na uprawianie i rozwijanie matematyki. Podobnie jest zresztą i w innych naukach. Można, dla przykładu, prowadzić badania w biologii, nie rozstrzygając, czym jest życie, czy badania socjologiczne bez jasnej i precyzyjnej definicji społeczeństwa. Matematycy zresztą rzadko zastanawiają się nad kwestiami filozoficznymi związanymi z uprawianą dyscypliną. Jeśli zaś już się zastanawiają i głoszą jakieś poglądy, to niekoniecznie są im wierni w swojej praktyce badawczej. Przykładem może być Tarski. Otóż, będąc zwolennikiem nominalizmu, swobodnie stosował w swoich badaniach metamatematycznych środki nieskończonościowe (dopuszczalne jedynie przez platonizm) albo zajmował się badaniem logiki intuicjonistycznej, nie podzielaając przekonań konceptualistycznych.

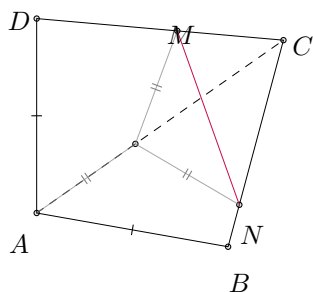


Obserwacja pokazuje, że w pracy badawczej matematycy zachowują się na ogół jak platonicy. Oznacza to, że nie są oni panami czy kreatorami rzeczywistości matematycznej – przeciwnie, stają wobec *danej* im „twardej” rzeczywistości, którą starają się *opisać*. Akceptując „na co dzień” platonizm, „od święta” jednak, tzn. kiedy zastanawiają się nad kwestiami filozoficznymi, deklarują się na ogół jako formalści, twierdząc, że matematyka to zespół aksjomatyczno-dedukcyjnych systemów sformalizowanych i cała praca matematyka polega na dedukcji twierdzeń z przyjętych aksjomatów za pomocą dowolnych poprawnych metod.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK



**M 1780.** Czworokąt wypukły, w którym  $AB = AD$ , jest wpisany w okrąg. Punkty  $M$  i  $N$  leżą na odcinkach  $CD$  i  $BC$  tak, że  $DM + BN = MN$ . Udowodnić, że środek okręgu opisanego na trójkącie  $AMN$  leży na odcinku  $AC$ .  
Rozwiązanie na str. 19

**M 1781.** Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie  $x$  i  $y$  takie, że  
$$2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} = 128 \quad \text{oraz} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2}.$$

Rozwiązanie na str. 15

**M 1782.** Dane są liczby rzeczywiste  $a > b$  takie, że  $a^p - b^p$  jest liczbą całkowitą dla dowolnej liczby pierwszej  $p$ . Udowodnić, że  $a$  i  $b$  są liczbami wymiernymi.  
Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1095.** W szczelnie zamkniętym naczyniu znajduje się  $m = 54$  g pary wodnej w temperaturze  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ . Ile ciepła należy dostarczyć, aby ogrzać tę parę do  $t_2 = 200^\circ\text{C}$ ? Masa atomowa tlenu  $\mu_O = 16$ , masa atomowa wodoru  $\mu_H = 1$ , a uniwersalna stała gazowa  $R = 8,314$  J/mol.  
Rozwiązanie na str. 18

**F 1096.** Ciało o masie  $m$  porusza się wzdłuż linii prostej  $OX$  pod działaniem siły potencjalnej. Potencjał siły jako funkcja współrzędnej  $x$  opisany jest wzorem:

$$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

Jaki jest okres małych drgań ciała wokół położenia równowagi (minimum potencjału)?  
Rozwiązanie na str. 16



# Czy na każdej sferze istnieje mnożenie?

Krzysztof M. PAWAŁOWSKI\*

\* Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Jean d'Alembert (1717–1783), francuski filozof, matematyk i fizyk, wyraził opinię, że *algebra jest szczodra – często daje więcej, niż jest o to proszona*. Te słowa d'Alemberta nigdy nie przestały być aktualne – niejednokrotnie problemy matematyczne były (i nadal są) rozwiązywane przy użyciu algebry, nawet jeśli w samym sformułowaniu zagadnienia nie widać jej śladu.

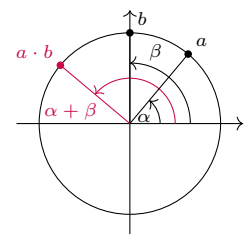
Przez *sferę* potocznie rozumie się zbiór punktów przestrzeni trójwymiarowej równoodległych od zadanego punktu. Tak opisujemy sferę dwuwymiarową. Podobnie postąpimy przy określeniu sfery  $(n - 1)$ -wymiarowej w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^n$  dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 1$ . Przestrzeń ta składa się z punktów postaci  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ; to jest  $n$ -tek liczb rzeczywistych, zwanych *współrzędnymi punktu  $x$* . Punkt  $0 = (0, \dots, 0)$  nosi nazwę *początku układu współrzędnych*. Skupiając się na sferach jednostkowych, zbiór punktów  $x \in \mathbb{R}^n$  odległych o 1 od początku układu współrzędnych, to jest o normie  $\|x\| = 1$ , nazywamy *sferą  $(n - 1)$ -wymiarową* i oznaczamy przez  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Przez *normę punktu  $x$*  rozumiemy liczbę  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , która jest odległością punktu  $x$  od punktu 0. Bohaterami tego artykułu są sfery  $\mathbb{S}^0$  (zbiór dwupunktowy  $\{-1, +1\}$ ),  $\mathbb{S}^1$  (okrąg),  $\mathbb{S}^2$  (standardowa sfera),  $\mathbb{S}^3, \dots$ , niezmiennie przyciągające uwagę matematyków. Nim odpowiemy na pytanie zadane w tytule, omówimy własności, o których myślimy przy mnożeniu punktów na sferze. Najpierw jednak przyjrzymy się sferom  $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$  oraz  $\mathbb{S}^7$ .

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Tabela określająca działanie mnożenia na sferze  $\mathbb{S}^0$

Działania  $+$ ,  $\cdot$  na parach postaci  $(x, 0)$  są zgodne ze zwykłymi działaniami na (odpowiadających tym parom) liczbach rzeczywistych  $x$ , można je więc utożsamić. Przy tej konwencji jednostka urojona, to jest para  $i = (0, 1)$ , spełnia równanie  $i \cdot i = -1$ . Każdą parę  $(x, y)$  można zapisać w postaci  $x + iy$ , wtedy formalne dodawanie i mnożenie takich wyrażeń (po przyjęciu  $i^2 = -1$ ) prowadzi do działań, które właśnie określiliśmy.



Geometryczna interpretacja mnożenia na okręgu  $\mathbb{S}^1$ : iloczynem punktów  $a = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  i  $b = (\cos \beta, \sin \beta)$  jest punkt  $a \cdot b = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$ , a więc mnożenie polega na dodaniu odpowiednich kątów z dokładnością do wielokrotności liczby  $2\pi$

**Sfery o wymiarach 0 i 1.** Sfera  $\mathbb{S}^0$  to zbiór  $\{-1, 1\}$ , w którym liczby  $\pm 1$  mnożymy tak, jak nas uczono od dziecka (zob. tabelkę na marginesie). Sfera  $\mathbb{S}^1$  składa się z par  $(x, y)$  liczb rzeczywistych spełniających  $x^2 + y^2 = 1$ , jest więc okręgiem o promieniu 1. A jak mnożyć pary liczb rzeczywistych? Odpowiedzią jest zbiór *liczb zespolonych* oznaczany przez  $\mathbb{C}$ , czyli zbiór  $\mathbb{R}^2$  z działaniami:

$$c + z = (a + x, b + y), \quad c \cdot z = (ax - by, ay + bx), \quad c = (a, b), \quad z = (x, y).$$

Dodawanie wykonujemy po prostu na każdej współrzędnej z osobna, natomiast pewną motywację dla mnożenia można znaleźć na marginesie. Mnożenie takie jest przemienne, co oznacza tyle, że zawsze zachodzi  $c \cdot z = z \cdot c$ .

Przydatne są pojęcia modułu  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  i sprzężenia  $\bar{z} = (x, -y)$  liczby zespolonej  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ . Pozwalają one łatwo opisać element odwrotny (ze względu na mnożenie) do dowolnej liczby zespolonej  $z \neq (0, 0)$ : jest nim  $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ . Nietrudno się też przekonać, że  $|c \cdot z| = |c| \cdot |z|$ , więc w szczególności iloczyn dowolnych dwóch liczb z okręgu  $\mathbb{S}^1$  również leży na tym okręgu. W ten sposób uzyskujemy mnożenie punktów okręgu  $\mathbb{S}^1$ .

**Sfery o wymiarach 3 i 7.** William W. Hamilton, poszukując bezskutecznie wzoru na mnożenie trójek liczb rzeczywistych, znalazł (już przez nas podany) wzór na mnożenie par liczb rzeczywistych, po czym rozszerzył go na mnożenie par liczb zespolonych w następujący sposób:

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - \bar{y}b, ya + b\bar{x}).$$

Tym razem symbol  $\cdot$  użyty jest w iloczynie  $(a, b) \cdot (x, y)$  par liczb zespolonych. Dodawanie par określa się jak zwykle:  $(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$ . Przy tych działaniach zbiór  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  (tożsamy ze zbiorem czwórek liczb rzeczywistych, czyli  $\mathbb{R}^4$ ) oznacza się przez  $\mathbb{H}$ , a jego elementy nazywa się *kwaternionami*. Moduł i sprzężenie kwaternionu  $z = (x, y)$  o liczbach zespolonych  $x = (x_1, x_2)$  i  $y = (y_1, y_2)$  określone są wzorami:

$$|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2},$$

$$\bar{z} = (\bar{x}, -y) = (x_1, -x_2, -y_1, -y_2),$$

a wzór  $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$  określa element odwrotny (ze względu na mnożenie) do kwaternionu  $z \neq (0, 0)$ . Odnotujmy, że podobnie jak dla liczb zespolonych moduł iloczynu dwóch kwaternionów jest iloczynem ich modułów.

Sfera  $\mathbb{S}^3$  składa się z par  $(x, y)$  liczb zespolonych spełniających  $|x|^2 + |y|^2 = 1$ , co oznacza, że  $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$ ; inaczej mówiąc: sfera  $\mathbb{S}^3$  jest zbiorem

W tekście Zbigniewa Marciniaka z  $\Delta_{16}^{10}$  można przeczytać więcej o kwaternionach, a nawet ogólnie o mnożeniu w przestrzeniach  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbb{R}^4$ .

W 1843 roku William W. Hamilton (1805–1865) podał wzór na mnożenie kwaternionów, uznając je za pary liczb zespolonych. W tym samym roku, inspirowany odkryciem Hamiltona, John T. Graves (1806–1870) rozszerzył ten wzór na mnożenie par kwaternionów:

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - \bar{y}b, ya + b\bar{x}),$$

a pary te nazwał *oktawami*. Natomiast my nazywamy je *oktonionami*.

Przyjmijmy oznaczenia na kwaterniony:  $\mathbf{1} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{i} = (i, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1)$ ,  $\mathbf{k} = (0, i)$ . Dla oktonionów  $p = (i, 0)$ ,  $q = (0, \mathbf{j})$ ,  $r = (0, \mathbf{1})$  iloczyn  $(p \cdot q) \cdot r$  różni się od  $p \cdot (q \cdot r)$ , gdyż pierwszy jest równy  $(\mathbf{k}, 0)$ , a drugi  $(-\mathbf{k}, 0)$ .

W jakimś stopniu mnożenie oktonionów jest jednak łączne, na przykład  $x \cdot (a \cdot b) \cdot x = (x \cdot a) \cdot (b \cdot x)$  oraz  $(x \cdot y) \cdot y^{-1} = x$  dla wszystkich oktonionów  $a, b, x, y$ .

W pierwszej własności rolę punktu  $e$  pełni jedynka (rzeczywista, zespolona lub kwaternionowa); punkt  $e$  nazywa się *elementem neutralnym* mnożenia. Druga własność jest spełniona dla  $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$ . Trzecia własność nazywa się *łącznością* mnożenia. Mnożenie liczb rzeczywistych i zespolonych spełnia też własność (4):  $x \cdot y = y \cdot x$ , zwaną *przemiennością* mnożenia. Jak już odnotowaliśmy, mnożenie kwaternionów nie jest przemienne, a mnożenie oktonionów nie jest ani przemienne, ani łączne.

**Definicja.** Przez *mnożenie grupowe* w zbiorze  $G$  rozumie się taką funkcję  $\mu: G \times G \rightarrow G$ , że po oznaczeniu wartości  $\mu(x, y)$  symbolem  $x \cdot y$  spełnione są wymienione wyżej własności (1), (2), (3). Zbiór  $G$  z ustalonym mnożeniem grupowym nazywa się *grupą*. Jeżeli dodatkowo spełniona jest własność (4), to grupa  $G$  nazywa się *grupą abelową*.

Istnieje bardzo ważna własność natury topologicznej, którą posiada mnożenie na każdej ze sfer  $G = \mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$ . Otóż funkcja  $G \times G \rightarrow G$ , przypisująca parze  $(x, y)$  element  $x \cdot y$ , jest ciągła. Również funkcja  $G \rightarrow G$ , zastępująca elementy  $x$  elementami odwrotnymi  $x^{-1}$ , jest ciągła. Wynika to z faktu, że działanie mnożenia liczb rzeczywistych jest ciągłe, oraz z postaci wzoru na mnożenie użytego w metodzie Cayleya–Dicksona, który (za każdym razem) gwarantuje ciągłość mnożenia.

**Definicja.** Zbiór  $G$  (zawarty w jakiejś przestrzeni euklidesowej) z ustalonym ciągłym mnożeniem grupowym  $G \times G \rightarrow G$  i ciągłą funkcją  $G \rightarrow G$ , zastępującą elementy ich odwrotnościami, nazywa się *grupą topologiczną*.

Podsumujmy: sfery  $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$  są grupami topologicznymi (pierwsze dwie nawet abelowymi) z działaniami mnożenia, odpowiednio: liczb rzeczywistych, zespolonych i kwaternionów o module 1. Mnożenie oktonionów o module 1 nie pozwala uznać

kwaternionów o module 1. Wzór na moduł iloczynu dwóch kwaternionów zapewnia, że iloczyn dwóch kwaternionów ze sfery  $\mathbb{S}^3$  również do niej należy – w ten sposób uzyskujemy mnożenie punktów ze sfery  $\mathbb{S}^3$ . Kwaterniony różni od liczb zespolonych jedna fundamentalna własność. Tym razem mnożenie *nie jest przemienne*: na przykład iloczyn  $(0, 1) \cdot (i, 0)$  jest różny od  $(i, 0) \cdot (0, 1)$ .

Czy procedurę tę można kontynuować? Odpowiedź brzmi: tak! Opierając się na konstrukcji zwanej *metodą Cayleya–Dicksona*, sumę i iloczyn dwóch par kwaternionów można określić tak samo, jak zrobił to Hamilton dla par liczb zespolonych (zob. margines). Po przyjęciu tych działań zbiór  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  (tożsamy ze zbiorem  $\mathbb{R}^8$ ) oznacza się przez  $\mathbb{O}$ , a jego elementy nazywa *oktonionami*. Tak jak poprzednio, umożliwia to określenie mnożenia punktów ze sfery  $\mathbb{S}^7$ .

Tak określone działanie mnożenia oktonionów, podobnie jak mnożenie kwaternionów, nie jest przemienne, a na dodatek nie jest łączne, nawet wtedy, gdy ograniczymy się do oktonionów ze sfery  $\mathbb{S}^7$  (zob. przykład na marginesie).

**Własności mnożenia.** Na każdej ze sfer  $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$  określiliśmy działanie mnożenia. Pomyślmy, jakie są wspólne własności tych działań. Jak łatwo jest zauważyć, dla wszystkich punktów  $x$  danej sfery  $G$ :

- (1) istnieje taki punkt  $e$ , że  $e \cdot x = x = x \cdot e$  dla każdego punktu  $x \in G$ ;
- (2) dla każdego  $x \in G$  istnieje taki punkt  $x^{-1}$ , że  $x \cdot x^{-1} = e = x^{-1} \cdot x$ ;
- (3)  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  dla dowolnych trzech punktów  $x, y, z$ .

sfery  $\mathbb{S}^7$  za grupę topologiczną, bo mnożenie to nie jest łączne. Co więcej, jak udowodnili Zhou Jian i Xu Senlin w 1988 roku, na sferze tej nie istnieje takie mnożenie grupowe: *sfera  $\mathbb{S}^7$  nie jest grupą topologiczną*.

Podkreślmy tutaj, że mówienie o *ciągłości* funkcji ma sens, gdy wprowadzimy pojęcie, które umożliwi nam ściśle określenie tej intuicyjnie jasnej koncepcji. W naszym przypadku możemy się oprzeć na pojęciu odległości dwóch punktów w przestrzeni euklidesowej, gdyż jeśli grupa  $G$  zawiera się w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , to produkt kartezjański  $G \times G$  zawiera się w przestrzeni  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Odwzorowanie  $\mu: G \times G \rightarrow G$  nazwiemy *jednostajnie ciągłym*, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej  $\varepsilon > 0$  istnieje taka liczba rzeczywista  $\delta > 0$ , że dla dowolnych dwóch par  $(a, x), (b, y) \in G \times G$  o odległości mniejszej niż  $\delta$  iloczynu  $a \cdot x$  oraz  $b \cdot y$  są w odległości mniejszej niż  $\varepsilon$ . Pojęcie ciągłości odwzorowania jest słabsze od jednostajnej ciągłości, lecz te dwa pojęcia się jednak pokrywają, jeśli ograniczymy się do podzbiorów domkniętych i ograniczonych w przestrzeni euklidesowej, czyli podzbiorów *zwartych*. Dodajmy jeszcze, że odległość pomiędzy dwoma punktami  $x$  i  $y$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  określona jest przez normę  $\|x - y\|$  z różnicy  $x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$ .

Przypomnijmy, że sfery  $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$  są grupami topologicznymi. Topologia algebraiczna dostarcza silnych metod matematycznych, które umożliwiają wykazanie, że w każdym innym przypadku, to jest dla  $n \neq 0, 1, 3, 7$ , na sferze  $\mathbb{S}^n$  nie istnieje ciągle działanie grupowe. Wobec tego prawdziwe jest następujące twierdzenie:

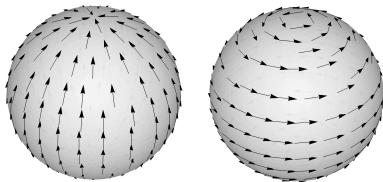
**Twierdzenie klasyfikacyjne.** *Sfery  $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1$  i  $\mathbb{S}^3$  są jedynymi sferami, które posiadają strukturę grupy topologicznej.*

**Sfera dwuwymiarowa.** Na zakończenie wykażemy, że sfera  $S^2$ , od której zaczęliśmy ten artykuł, nie może być grupą topologiczną. Potrzebne nam będzie pojęcie styczności wektora do sfery, które najłatwiej wprowadzić przy użyciu iloczynu skalarnego:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

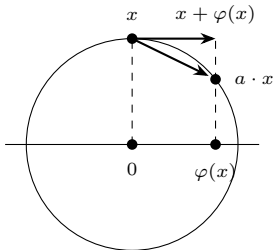
dla  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$ .

Iloczyn skalarny pozwala wyrazić w sposób algebraiczny prostopadłość dwóch wektorów  $x$  i  $y$ , o których (w sposób geometryczny) myślimy jak o strzałkach



$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1x_3, -x_2x_3, 1 - x_3^2)$  to pole „z południa na północ”  
 $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_2, x_1, 0)$  to pole „z zachodu na wschód”

O twierdzeniu Poincarégo pisaliśmy już w  $\Delta_{97}^5$ . Czytelnika zainteresowanego ogólnością może zaciekać fakt, że podobne twierdzenie jest prawdziwe dla sfer  $S^2, S^4, S^6, \dots$  – pole styczne na każdej z nich posiada miejsce zerowe. Dobrym ćwiczeniem jest samodzielne przekonanie się, że wyklucza to istnienie struktury grupy topologicznej na tych sferach, zgodnie z rozumowaniem przedstawionym niżej.



Wektor  $\varphi(x)$  jest tym wektorem stycznym do sfery w  $x$ , który wskazuje w kierunku punktu  $a \cdot x$



zaczepionych w punkcie  $(0, 0, 0)$  i grotach (odpowiednio) w punktach  $x$  i  $y$ . Powiemy, że wektory  $x$  i  $y$  są prostopadłe, jeżeli  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Za wektor styczny do sfery w punkcie  $x \in S^2$  uznajemy dowolny wektor  $y \in \mathbb{R}^3$  prostopadły do wektora  $x$ , czyli spełniający równość  $\langle x, y \rangle = 0$ . Przykładowo w punkcie  $(1, 0, 0)$  styczny jest każdy wektor postaci  $(0, y_2, y_3)$ . W ogólności, jeśli wektor  $y \in \mathbb{R}^3$  nie jest styczny w  $x \in S^2$ , to jego składowa prostopadła do sfery w tym punkcie wyraża się wzorem  $\langle y, x \rangle x$ , a zatem rzut prostopadły punktu  $y$  na płaszczyznę styczną wynosi  $y - \langle y, x \rangle x$ .

Przez (ciągłe) pole styczne rozumiemy ciągłą funkcję  $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , która każdemu punktowi  $x \in S^2$  przyporządkowuje pewien wektor styczny w punkcie  $x$ . Innymi słowy, żądamy, by spełniona była tożsamość  $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$  dla  $x \in S^2$ . Przykłady takich pól stycznych można zobaczyć na marginesie, warto też stworzyć własne przykłady. Ich wspólną cechą jest istnienie miejsc zerowych, czyli takich punktów  $x \in S^2$ , którym przyporządkowano wektor zerowy  $(0, 0, 0)$ . Twierdzenie Poincarégo mówi, że nie da się tego uniknąć:

**Twierdzenie Poincarégo.** Każde pole styczne  $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  posiada co najmniej jedno miejsce zerowe.

Twierdzenie Poincarégo (znane także pod nazwą twierdzenia o zaczesaniu sfery) ma następujące popularnonaukowe ujęcie: Nie da się wybrać niezerowych wektorów stycznych do sfery  $S^2$  we wszystkich jej punktach w ten sposób, by wybór zależał w sposób ciągły od punktów styczności. Jeszcze inaczej: Sfery porośniętej włosiem nie da się uczesać, czyli każdy włos położyć stycznie do sfery.

Dowód twierdzenia klasyfikacyjnego w przypadku  $n = 2$ . Przypuśćmy, że na sferze  $S^2$  istnieje ciągłe działanie grupowe z elementem neutralnym  $e \in S^2$ . Skonstruujemy wówczas pole styczne pozbawione miejsc zerowych, co doprowadzi do sprzeczności z twierdzeniem Poincarégo.

Dla wybranego elementu  $a \in S^2$  rozważmy przekształcenie zastępujące dowolny punkt  $x \in S^2$  iloczynem  $a \cdot x$ , a następnie jego rzutem prostopadłym  $p_x(a \cdot x)$  na płaszczyznę styczną w punkcie  $x$ . Daje to funkcję

$$\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = p_x(a \cdot x) = a \cdot x - \langle a \cdot x, x \rangle x.$$

Funkcja ta jest jednostajnie ciągła, co wynika z jednostajnej ciągłości działania grupowego. Styczność  $\varphi(x)$  można też sprawdzić bezpośrednim rachunkiem:  $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$ . Pozostaje więc wykluczyć istnienie miejsc zerowych  $\varphi$ , i w tym celu konieczne będzie uważne wybranie odpowiedniego elementu  $a$ .

Kiedy więc zachodzi równość  $\varphi(x) = 0$ ? Otóż wtedy, gdy wektor z  $x$  do  $a \cdot x$  jest prostopadły do sfery, a to zachodzi w dokładnie dwóch przypadkach: I)  $a \cdot x = x$  oraz II)  $a \cdot x = -x$  (zob. rysunek obok). Równość w przypadku I) sprowadza się do  $a = x \cdot x^{-1}$ , czyli  $a = e$ . Łatwo jest więc ten przypadek wykluczyć – wystarczy dobrać  $a \neq e$ .

Trudniej jest z równością w II). Ponieważ sfera  $S^2$  jest zwartym (czyli domkniętym i ograniczonym) podzbiorem przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^3$ , możemy skorzystać z jednostajnej ciągłości działania grupowego  $\mu: S^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ .

W definicji przyjmijmy wartość liczby  $\delta > 0$  odpowiadającą  $\varepsilon = 2$  i odczytajmy, co warunek jednostajnej ciągłości oznacza dla par postaci  $(e, x)$  i  $(a, x)$ . Odległość między tymi parami jest równa odległości od  $a$  do  $e$  (mierzonej w przestrzeni 3-wymiarowej). Otrzymujemy więc, że jeśli odległość  $a$  od  $e$  jest mniejsza niż  $\delta$ , to odległość  $a \cdot x$  od  $e \cdot x$ , czyli od  $x$ , jest mniejsza niż 2. To ostatnie stwierdzenie świadczy, że  $a \cdot x \neq -x$ , gdyż odległość  $-x$  od  $x$  jest równa 2.

Wystarczy więc wziąć punkt  $a \in S^2$  odległy od  $e \in S^2$  o mniej niż  $\delta$ , a jednocześnie więcej niż zero. Dotychczasowe rozumowanie pokazuje, że wówczas pole styczne  $\varphi$  nie ma miejsc zerowych, a uzyskana sprzeczność z twierdzeniem Poincarégo dowodzi, że początkowe założenie o istnieniu ciągłych działań grupowych na  $S^2$  było fałszywe. □

## O strukturach dynamicznych

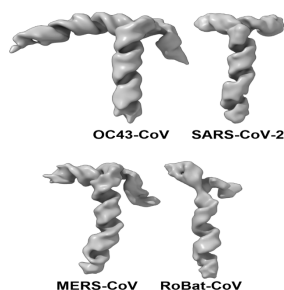
Idea przyglądania się strukturze przestrzennej biocząsteczek pojawiła się dość dawno, na przykład w rozważaniach o enzymach i substratach (model zamka i klucza). Sama po raz pierwszy uruchomiłam biochemiczną wyobraźnię przestrzenną, patrząc na model DNA zrobiony z drucików przedstawiony przez Jamesa Watsona i Francisca Cricka w 1953 roku. Upřednio wystarczało mi przyswajanie z podręczników biochemii dwuwymiarowych obrazów cząsteczek wchodzących ze sobą w oddziaływanie.

Badania procesów zwiąania się biopolimerów w określone struktury przestrzenne musiały być poprzedzone uzyskaniem wiedzy o ich budowie chemicznej. Z jakich podjednostek składają się DNA, RNA i białka i jak są one połączone w nić? W polimerze kolejne podjednostki łączą się ze sobą chemicznymi wiązaniami. Jednocześnie długa nić może się zwiąać w bardzo zwarte struktury dzięki „bocznym” oddziaływaniom elektrostatycznym między różnymi podjednostkami. Często taka struktura przestrzenna ze względu na energię oddziaływania jest dla danego polimeru optymalna, a więc powtarzalna. Opracowano wiele metod na oznaczenie kształtów przestrzennych biopolimerów, a uzyskanie ich detali stało się możliwe, czasami nawet rutynowe, w naszym XXI wieku.

Problem kształtu zwiniętych struktur nici polimerów był szczegółowo badany w przypadku białek – polimerów składających się z aminokwasów. Kilkanaście lat temu dzięki poznaniu budowy chemicznej wielu białek i wiedzy o ich zwiąaniu się w określone, powtarzalne struktury podjęto szerokie badania w celu uzyskania możliwości przewidywania tych struktur. Postęp nastąpił po wprowadzeniu do tej dziedziny metod bioinformatycznych. Duże zasługi położyło tu kilka polskich zespołów biologów molekularnych. Okazało się, że tylko zwinięte w określony, przewidywalny sposób białka wykazują aktywność biologiczną.

W przypadku RNA zauważono współcześnie podobne zjawiska w grupie koronawirusów. Wśród nich wyróżniają się podgatunki typu beta, ze względu na patogenność oraz wywołanie epidemii oraz globalnej pandemii. Rozpoznanie wspólnych cech struktury tej grupy wirusów może przyczynić się do szybszej diagnozy i skutecznej terapii wirusów już poznanych i tych, które pojawią się w przyszłości.

Genomami koronawirusów są jednoniciowe cząsteczki RNA o długości około 30 tys. podjednostek, nukleotydów. Kolejność (sekwencja) ułożenia nukleotydów (4 rodzaje) stanowi informację genetyczną wirusa. Początkowych 500 nukleotydów, o różnorodnej sekwencji w różnych wirusach, wykazuje jednak (czego nie oczekiwano) pewne cechy wspólne. Region 500 nukleotydów pełni podstawową rolę w procesie namnażania wirusa w zakażonej komórce, w obszarze tej sekwencji rozpoczyna się synteza kodowanych przez wirusa białek. W międzynarodowym zespole naukowców z Warszawy, Krakowa i Madrytu (liderem projektu jest prof. Janusz Bujnicki z Międzynarodowego Instytutu Biologii Komórkowej i Molekularnej (IIMCB) w Warszawie) odkryto, że ten odcinek RNA zwiąa się w różnych wirusach w podobne struktury modelowane z atomową rozdzielczością. Rozróżniane są odcinki zwinięte helikalnie i między nimi jednoniciowe odcinki łącznikowe. Wspomniane fragmenty RNA w czterech wirusach zanalizowano, stosując bogaty zestaw metod biochemicznych, biofizycznych, bioinformatycznych; w części badań wykonano pomiary zależności badanych struktur od temperatury – w podwyższonej rozpadają się helisy. Raz jeszcze zadziwiająca wydała się cecha znacznego podobieństwa wykrywanych struktur wobec znaczących rozbieżności w sekwencjach nukleotydów. Poza sekwencją nukleotydów, o aktywności układów biologicznych, decydującą rolę może odgrywać „kod” wyższego rzędu – struktura przestrzenna. Rozpoznanie takich struktur w koronawirusach może doprowadzić do nowych rozwiązań diagnostycznych i terapeutycznych. Oczywiście chcielibyśmy wiedzieć już teraz, co właściwie dzieje się w zakażonej komórce, co robią te strukturalne „haczyki” – poszukiwania trwają i w Polsce, i w Hiszpanii.



Odcinek RNA w różnych wirusach zwiąa się w podobne struktury. Fragmenty RNA w czterech wirusach poddanych analizie w badaniu międzynarodowego zespołu naukowców z Warszawy, Krakowa i Madrytu. Źródło: Międzynarodowy Instytut Biologii Molekularnej i Komórkowej w Warszawie

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

# Topologiczne przejścia fazowe

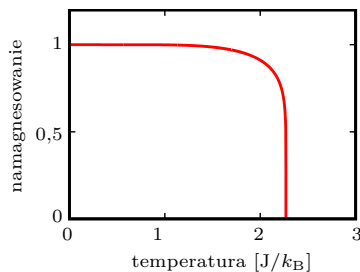
Aleksandra NAPIERAŁA-BATYGOLSKA\*, Piotr TOMCZAK\*

\* Wydział Fizyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

## Ciągłe przejścia fazowe

Jeśli żelazny magnes podgrzejemy do temperatury powyżej 1043 K (770°C), znanej jako temperatura Curie dla żelaza, to straci on swoje własności magnetyczne (namagnesowanie rozumiane jako suma wektorowa momentów magnetycznych pochodzących od wszystkich atomów żelaza). Można zaobserwować, że ta utrata namagnesowania następuje w ciągły sposób, w miarę jak temperatura żelaza zbliża się do temperatury Curie ( $T_C$ ), nazywanej także temperaturą krytyczną. To zjawisko jest przykładem ciągłego przejścia fazowego. Takie przejścia fazowe zostały w bardzo przejrzysty sposób przedstawione w artykule Jacka Miękiszka *O spinach i genach*  $\Delta_{15}^5$  – przed dalszą lekturą warto zapoznać się z częścią tego artykułu dotyczącą „spinów”.

Aby zrozumieć zjawisko utraty namagnesowania w temperaturze  $T_C$ , wprowadzono liczne modele magnetyków mające dwa istotne składniki: sieć (dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że będzie to dwuwymiarowa sieć kwadratowa) oraz znajdujące się w jej węzłach momenty magnetyczne nazywane także spinami, z reguły oddziałujące tylko z momentami magnetycznymi z najbliższych węzłów. Najprostszy z nich to model Isinga: zakładamy, że momenty magnetyczne mogą być skierowane wyłącznie „w górę” albo „w dół” względem wybranego kierunku, a energia pary oddziałujących spinów skierowanych w jednym kierunku jest niższa od energii pary oddziałujących spinów skierowanych w różnych kierunkach. Stanem podstawowym (to jest stanem o najniższej możliwej energii, w temperaturze 0 K) takiego modelu jest więc stan, w którym wszystkie momenty magnetyczne zwrócone są w tym samym kierunku, a układ jako całość wykazuje maksymalne namagnesowanie.



Rys. 1. Zależność namagnesowania, liczonego na jeden węzeł sieci, od temperatury dla dwuwymiarowego modelu Isinga [2]:

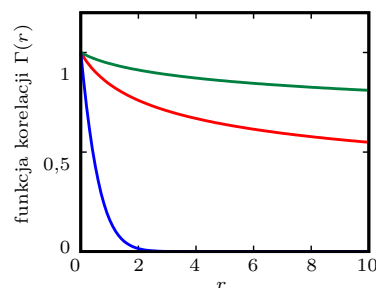
$$m(T) = \left(1 - \sinh^{-4}\left(\frac{2}{T}\right)\right)^{\frac{1}{8}}$$

Jeśli taki układ spinów będzie pobierał ciepło od otoczenia, to przypadkowe spiny będą zmieniały kierunek, energia będzie rosła, a namagnesowanie będzie spadało. Jednakże całkowicie zaskakującym faktem jest to, że w temperaturze krytycznej,  $T_C = 2,2692$  (liczonej w jednostkach  $[\frac{J}{k_B}]$ , J – dżul,  $k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K – stała Boltzmanna), namagnesowanie staje się równe 0. Pokazano to na rysunku 1.

Mówimy także, że w temperaturze krytycznej  $T_C$  następuje spontaniczne złamanie symetrii: układ, aby „się uporządkować” poniżej  $T_C$ , łamie symetrię i spośród dwóch stanów o równej energii, lecz przeciwnym namagnesowaniu („górze” – „dół”) „wybiera” jeden.

Chcąc opisać ilościowo to zjawisko, definiuje się dwa parametry: namagnesowanie (zobacz artykuł *O spinach i genach*) oraz funkcję korelacji spin-spin:

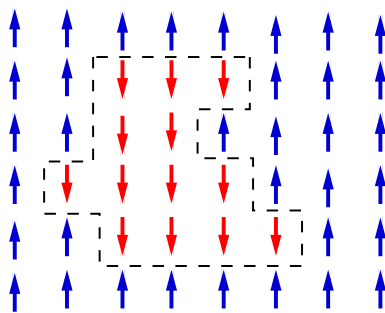
$$(1) \quad \Gamma(r) = \frac{\sum \sigma(0)\sigma(r) \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)}{\sum \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)}$$



Rys. 2. Funkcja korelacji  $\Gamma(r)$  w zależności od odległości  $r$ . Powyżej  $T_C$  (kolor niebieski)  $\Gamma(r)$  zanika wykładniczo, poniżej  $T_C$  (kolor zielony)  $\Gamma(r) \rightarrow m^2$ , a w  $T_C$  (kolor czerwony)  $\Gamma(r)$  zanika w sposób potęgowy

$\Gamma(r)$  to funkcja korelacji między spinami odległymi o  $r$ , sumowanie przebiega po wszystkich możliwych konfiguracjach (rozkładach) zmiennych spinowych  $\sigma$ , a  $E_i$  oznacza energię konkretnego rozkładu zmiennych spinowych.

Charakter zanikania funkcji korelacji z odległością między spinami jest różny w zależności od temperatury. I tak poniżej  $T_C$  funkcja korelacji maleje wolno z odległością  $r$ , zbiegając do  $m^2$  (kwadrat namagnesowania) dla  $r \rightarrow \infty$ . Konsekwencją takiego malenia funkcji korelacji poniżej  $T_C$  jest istnienie niezerowego namagnesowania poniżej  $T_C$ . W temperaturze dokładnie równej  $T_C$  oraz powyżej  $T_C$  dla  $r \rightarrow \infty$  mamy zanik  $\Gamma(r) \rightarrow 0$ , ale charakter zanikania funkcji korelacji w obu tych przypadkach jest różny – potęgowy w  $T_C$ :  $\Gamma(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$  (zanika bardzo wolno,  $\eta = \frac{1}{4}$  dla dwuwymiarowego modelu Isinga,  $d$ -wymiar), natomiast wykładniczy powyżej  $T_C$ :  $\Gamma(r) \sim \exp(-r/\text{const})$ , zobacz rysunek 2.



Rys. 3. Do odwrócenia momentów magnetycznych oznaczonych kolorem czerwonym i ograniczonych wielokątem o długości  $L = 20$  potrzebna jest energia  $40J$

Istnienie niezerowej  $T_C$  wynika także w sposób niezbity z eleganckiego argumentu Peierlsa. Dla dwuwymiarowego modelu Isinga na sieci kwadratowej wygląda on następująco. Wyobraźmy sobie, że chcielibyśmy odwrócić wszystkie spiny z obszaru ograniczonego dużym wielokątem o obwodzie  $L$  (zobacz rys. 3). Związana z tym zmiana energii wewnętrznej  $U$  wynosi  $2LJ$ . Takie odwrócenie obszaru spinów ograniczonego wielokątem powoduje także zmianę entropii  $S$  układu, bo istnieje wiele możliwości wybrania zamkniętego wielokąta o długości  $L$ . Liczba tych możliwości jest równa w przybliżeniu  $3^L$ , dlatego że okrążając obszar ograniczony wielokątem, mamy do wyboru 3 niezależne kierunki w każdym węzle. W rzeczywistości, aby wielokąt zamknął się, ta liczba powinna być nieco mniejsza. Zmiana energii swobodnej  $\Delta F$  potrzebna do odwrócenia obszaru spinów wynosi więc

$$\Delta F = \Delta U - T\Delta S = 2LJ - k_B T \ln 3^L = L(2J - k_B T \ln 3).$$

Można zauważyć, że w wystarczająco wysokiej temperaturze,  $\frac{k_B T}{J} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1,8205$ , odwrócenie obszaru spinów nie prowadzi do zmiany energii swobodnej, a więc może nastąpić samorzutnie. Takie samorzutne odwrócenie obszaru spinów to fluktuacja; fluktuacje w  $T_C$  powstają we wszystkich skalach długości (dla takiej temperatury zachodzi  $\Delta F = 0$  niezależnie od  $L$ ), to właśnie prowadzi do zerowego parametru porządku.

Próby zrozumienia przejścia fazowego w żelazie po raz pierwszy podjął Piotr Curie. Tę próbę określamy dzisiaj jako teorię pola średniego. Jej sformułowanie (1937) w postaci obecnie używanej pochodzi od Lwa Landaua. Postuluje ona istnienie parametru porządku, który ma niezerową wartość w fazie uporządkowanej i zerową w nieuporządkowanej. Ten sposób podejścia do opisu przejść fazowych jest podstawą ich zrozumienia od ponad 50 lat. Jednak, jak zaznaczono powyżej, bezpośrednim powodem istnienia niezerowego parametru porządku, co postulował Landau, był sposób zanikania funkcji korelacji poniżej  $T_C$ .

### Ciągłe topologiczne przejścia fazowe

W połowie lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku John M. Kosterlitz i David Thouless stwierdzili [3, 4], że dla pewnego bardziej zaawansowanego modelu namagnesowania, zwanego modelem  $XY$ , funkcja korelacji w całym zakresie temperatur zanika w sposób potęgowy:  $\Gamma(r) \sim \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{T}{2\pi}}$ ,  $T$  liczona jest w jednostkach  $[\frac{J}{k_B}]$ . Taka zależność oznacza brak porządku dalekozasięgowego. Zauważmy, że wykładnik określający malenie funkcji korelacji zależy od temperatury  $T$ .

Zasadnicza różnica między omówionym wcześniej modelem Isinga a modelem  $XY$  polega na tym, że kierunek momentu magnetycznego w każdym węzle sieci modelu  $XY$  może być scharakteryzowany przez kąt  $\theta_i$  z wybranym kierunkiem, zmieniający się w sposób ciągły od 0 do  $2\pi$ . Energia całego układu

oddziałujących momentów magnetycznych wyniesie więc

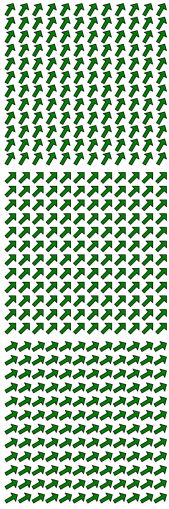
$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j).$$

Sumowanie w powyższym wzorze przebiega po wszystkich  $N$  parach  $\langle i, j \rangle$  będących najbliższymi sąsiadami. Jeśli założymy, że kierunek momentu magnetycznego zmienia się nieznacznie od węzła do węzła, to możemy rozwinąć funkcję cosinus w szereg i pominąć wszystkie wyrazy tego rozwinięcia poza pierwszymi dwoma:  $\cos(\theta_i - \theta_j) \approx 1 - \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_j)^2$ . W dalszym ciągu zakłada się, że rozkład momentów magnetycznych na sieci można przybliżyć przez ciągle skalarne pole  $\theta(x, y)$ , które zawiera informację, jak zmienia się kierunek momentu magnetycznego w zależności od współrzędnych. Wyrazy  $(\theta_i - \theta_j)^2$  z rozwinięcia cosinusa w granicy ciągłego pola  $\theta(x, y)$  przybliży się kwadratem długości gradientu  $|\nabla\theta|^2$ . Energia pola  $\theta(x, y)$  dana jest wzorem:

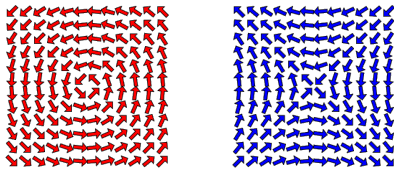
$$(2) \quad E = \frac{J}{2} \int |\nabla\theta|^2 dx dy,$$

całkowanie odpowiada sumowaniu po najbliższych sąsiadach, a wyraz  $-NJ$  został pominięty. Wzór (2) może być także rozumiany w taki sposób: w przypadku „wolnej” zmiany pola  $\theta(x, y)$  z odległością, zmiana jego energii powinna być skalarną funkcją jego gradientu  $\nabla\theta$ . Odpowiednim niezmiennikiem, który nie zależy od wyboru układu współrzędnych, zawierającym  $\nabla\theta$  dla skalarne pole  $\theta$  okazuje się właśnie  $|\nabla\theta|^2$ .

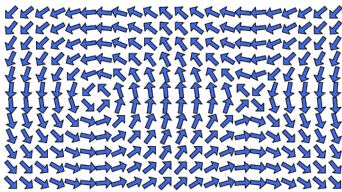
Pole  $\theta(x, y)$  jest w stanie podstawowym (o najniższej energii), kiedy kierunek momentu magnetycznego nie zależy od współrzędnych. Wtedy gradient  $\nabla\theta$  pod całką równy jest 0. Trzy przykłady takich pól pokazano na rysunku 4. Zauważmy, że można narysować nieskończenie wiele takich przykładów, bo obrót wszystkich strzałek reprezentujących pole  $\theta(x, y)$  o ten sam kąt nie prowadzi do zmiany energii układu. W takiej sytuacji mówimy, że stan podstawowy takiego modelu ma nieskończoną degenerację.



Rys. 4. Trzy przykłady stanów podstawowych (o jednakowej energii – zdegenerowanych ze względu na energię) modelu XY dla stałych kątów  $\theta$  z prostą poziomą: od góry  $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$



Rys. 5. Wysokotemperaturowe wzbudzenia topologiczne w modelu XY: wir (z lewej), antywir (z prawej). Poglądowa interpretacja wzoru (3) jest następująca: przechodząc wzdłuż brzegu wiru w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, stwierdzamy, że czerwona strzałka obraca się o  $2\pi$  po pełnym okrążeniu wiru. W przypadku antywiru (po prawej) niebieska strzałka obraca się o  $-2\pi$  po jego pełnym okrążeniu przeciwnie do ruchu wskazówek zegara



Rys. 6. Niskotemperaturowe wzbudzenie topologiczne w modelu XY: para wir-antwir. Przechodząc wzdłuż brzegu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, stwierdzamy, że niebieska strzałka obraca się po pełnym okrążeniu pary wir-antwir o kąt równy 0

#### Literatura

- [1] Jacek Miękisz, *O spinach i genach*,  $\Delta_{15}$
- [2] C.N. Yang, Phys. Rev. **85**, 809 (1952).
- [3] J.M. Kosterlitz, J. Phys. C: Solid State Phys. **7**, 1046 (1974).
- [4] J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless, J. Phys. C: Solid State Phys. **6** 1181 (1973).
- [5] Por. wzór (1.4) i komentarz do niego w D.J. Thouless, *Topological Quantum Numbers in Nonrelativistic Physics*, World Scientific, 1998.
- [6] Zob. np. J. Carrasquilla, R. Melko, Nature Physics **13**, 431 (2017), E Lustig i in., Phys. Rev. Lett. **125**, 127401 (2020).

Zgodnie z twierdzeniem Mermin–Wagnera taki układ nie wykazuje uporządkowania dalekozasięgowego w temperaturach poza bezwzględny zerem. Jeśli będzie on pobierał ciepło od otoczenia, to jego temperatura będzie rosła, a dalekozasięgowy porządek obecny w stanie podstawowym zostanie zniszczony przez niezwykle wzbudzenia. Mają one postać wirów albo antywirów (rys. 5), par wir-antwir (rys. 6).

Pary wir-antwir mogą wystąpić poniżej pewnej temperatury  $T_{KT}$ , wiry i antywiry – powyżej tej temperatury. Między tymi typami wzbudzeń istnieje głęboka różnica natury topologicznej. Można ją scharakteryzować w następujący sposób. Jeśli wzbudzenie typu wir (albo antywir) otoczmy krzywą zamkniętą, którą obiegamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, i obliczymy po niej całkę krzywoliniową [5]:

$$(3) \quad W = \oint \nabla\theta(x, y) \cdot d\mathbf{l},$$

to wartość tej całki będzie zawsze różna od 0 – określony został w ten sposób *winding number*, który jest charakterystyką topologiczną dla wzbudzeń typu wir (lub antywir). Jeśli tę samą operację wykonamy dla par wir-antwir, to wynik całkowania będzie zawsze równy 0. Wzbudzenia typu wir (antywir) różnią się więc topologicznie od wzbudzeń typu wir-antwir: jedne nie mogą być przekształcone w sposób ciągły w drugie. Z tego powodu omawiane przejście nazywane jest topologicznym przejściem fazowym, a temperaturę  $T_{KT}$ , w której niszczone są pary wir-antwir i wzbudzenia przyjmują wyłącznie postać wirów (albo antywirów), nazywamy temperaturą krytyczną (Kosterlitz–Thoulessa).  $T_{KT}$  rozdziela więc dwie fazy: niskotemperaturową, w której wzbudzenie ma postać par wir-antwir (zobacz rys. 6), oraz wysokotemperaturową, w której wzbudzenia mają postać swobodnych wirów lub antywirów (zobacz rys. 5).

Istnienie tego przejścia można także uzasadnić, odwołując się do argumentu Peierlsa. Należy więc, tak jak w przypadku modelu Isinga, oszacować wartość energii wzbudzenia (wiru) oraz zmianę entropii układu, która jest związana z jego powstaniem. Aby, stosując równanie (2), oszacować energię potrzebną do powstania jednego wiru na sieci o długości  $L$  i stałej sieciowej  $a$ , należy znać  $\nabla\theta$ . Z rysunku 5 można odczytać, że  $|\nabla\theta| \sim \frac{1}{r}$ . Oznacza to, że energia potrzebna do wykreowania jednego wiru wynosi (całka liczona jest we współrzędnych biegunowych):

$$(4) \quad E_{wir} = \frac{J}{2} \int_a^L \frac{1}{r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\phi = \pi J \ln \frac{L}{a}.$$

Taki wir, jak widać na rysunku 5, można utworzyć w przybliżeniu na  $(\frac{L}{a})^2$  sposobów. Związana z tym zmiana energii swobodnej wyniesie

$$(5) \quad \Delta F = \pi J \log \frac{L}{a} - k_B T \log \left( \left( \frac{L}{a} \right)^2 \right).$$

Stąd wynika, że dla  $\frac{k_B T}{J} < \frac{\pi}{2}$  mamy  $\Delta F > 0$ , i powstawanie wirów jest niekorzystne energetycznie. W tych temperaturach wzbudzenia będą miały postać par wir-antwir, które można w ciągły sposób przekształcić do stałego pola  $\theta(x, y)$ , bo ich *winding number* równy jest 0. Jeśli natomiast  $\frac{k_B T}{J} > \frac{\pi}{2}$ , to  $\Delta F < 0$ , wówczas powstawanie wirów jest korzystne energetycznie, a więc pary wir-antwir występujące w niższych temperaturach ulegają rozerwaniu i wiry oraz antywiry mogą istnieć samodzielnie.

Podsumowując, w modelu XY mamy brak uporządkowania magnetycznego dalekiego zasięgu w całym zakresie temperatur, ale w skończonej temperaturze  $T_{KT}$  występuje niezwykle przejście fazowe. Polega ono na rozłączaniu par wir-antwir i powstawaniu nierównoważnych im topologicznie pojedynczych wirów i antywirów. Istotą tego przejścia jest zmiana topologii obiektów będących wzbudzeniami układu spinowego. Pięćdziesiąt lat po odkryciu topologicznych przejść fazowych, co zostało uhonorowane Nagrodą Nobla w 2016 roku, ten obszar jest wciąż przedmiotem intensywnych badań naukowych, nie tylko w kontekście prac eksperymentalnych, ale także zastosowania metod sztucznej inteligencji do rozpoznawania i klasyfikowania topologicznych faz materii [6].

# Ciąg dalszy następuje

Filip GRALIŃSKI\*

\*Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Temat dużych modeli języka (*Large Language Models, LLMs*), w szczególności najślynniejszego ich przedstawiciela, czyli ChataGPT, jest ostatnio bardzo modny. Słyszymy o ich niezwykłych możliwościach, niektórych niepokoją pewne potencjalne zagrożenia z nimi związane.

Ciekawe, że modele języka opierają się na bardzo prostej zasadzie. W gruncie rzeczy są to po prostu uniwersalne „autouzupełniacze”, które są w stanie dokończyć dowolny tekst, czasami z lepszym, czasami z gorszym skutkiem. W każdym razie mają „nawijkę”, z którą żaden człowiek nie może się równać. Co więcej, zwykle nie planują one wiele kroków w przód, a jedynie przewidują następne słowo.

Prześledźmy działanie modelu języka na prostym przykładzie. Użyjemy otwartoźródłowego modelu Polish GPT-2. Jest to wprawdzie model gorszy niż komercyjny ChatGPT, ale możemy go łatwo uruchomić na swoim komputerze bez płacenia i pytania kogokolwiek o zgodę. Mamy też nad nim pełną kontrolę i możemy zajrzeć do jego „wnętrzości”, co jest przydatne w poznawaniu zasady jego działania.

Powiedzmy, że chcielibyśmy poprosić model języka o dokończenie takiego prostego zdania:

*Dzisiaj rano poszłem do piekarni i...*

Czy właśnie napisałem *poszłem*?! Prawidłowa polszczyzna wymaga tutaj oczywiście formy *poszedłem*, ale krótsza forma jest, w gruncie rzeczy, częścią systemu (niestarannej) polszczyzny; dobry model języka powinien sobie radzić nie tylko z językiem pięknym i formalnym, lecz także z potocznym czy niechlujnym.

Zastanów się Czytelniku, jakie słowa mogą wystąpić dalej. Skonfrontujemy to później z przewidywaniami modelu.

Jak już wspomniałem, model w każdym kroku skupia się po prostu na przewidywaniu następnego wyrazu, a mówiąc ściślej, następnego **tokenu**. Token to taki

Karta graficzna to zasadniczo urządzenie służące – jak sama nazwa wskazuje – do rysowania dwu- i trójwymiarowych obrazów. Żeby narysować kosmitę, z którym walczymy w strzelance 3D, trzeba jednak wykonać mnóstwo przemnożeń wektorów i macierzy. Kilkanaście lat temu ktoś wpadł na pomysł, że kart graficznych można użyć właśnie w sztucznej inteligencji!

Najpierw musimy załadować potrzebne biblioteki, tokenizer i właściwy model (linie 1–6). Jeśli nie mamy karty graficznej, model uruchomi się na zwykłym procesorze („cpu”), będzie trwało to wolniej, ale też zadziała.

wyrób wyrazopodobny, częste i krótkie wyrazy są zazwyczaj jednym tokenem, ale dłuższe i rzadsze mogą rozpaść się na dwa lub większą ich liczbę. Podział na tokeny, czyli **tokenizacja**, jest dość prostą mechaniczną procedurą. Na przykład początek naszego zdania po tokenizacji za pomocą modelu Polish GPT-2 będzie wyglądał tak:

Dzisiaj rano poszłem do piekarni i

Jak widać, nasze nieszczęsne *poszłem* rozpadło się na dwa tokeny, podobnie słowo *piekarni*. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że spacje dokleją się do następujących po nich wyrazach.

Co się dzieje dalej? Duże modele języka są przykładem szerszej klasy algorytmów nazywanych sieciami neuronowymi. Chwileczkę, czy jeśli mowa o neuronach, to ten artykuł nie powinien pojawić się w dziale biologicznym? Nie, nie, choć sieci neuronowe są luźno inspirowane tym, co wiemy o układzie nerwowym człowieka i innych organizmów, to nie są to żadne mózgi w słoikach. Sieci neuronowe są czysto matematycznym „ustrojstwem” – właściwie nie robią nic innego, tylko przemnażają i dodają dużo liczb.

No właśnie, skoro modele języka, będąc sieciami neuronowymi, mogą operować tylko na liczbach, oznacza to, że musimy w jakiś sposób przerzucić most między światem słów a światem liczb. Robimy to, **zanurzając** słowa (czy właściwie tokeny) w wielowymiarowej przestrzeni, a więc przypisując tokenom wektory, czyli ciągi liczb.

Co się dzieje dalej? Sieć neuronowa przykłada... kątomierz i mierzy kąty między tymi wektorami. Z tym kątomierzem to nawet nie jest bardzo duże uproszczenie i ubarwienie naszej opowieści – rzeczywiście mierzymy kąty między wektorami reprezentującymi słowa, w ten sposób sprawdzając, jak bardzo jedno słowo jest podobne do drugiego. Mierzenie kąta w zasadzie sprowadza się do liczenia iloczynu skalarnego między wektorami.

Tak więc do sieci neuronowej trafiają wektory reprezentujące kolejne tokeny, te wektory są przemnażane w kolejnych warstwach, również przez macierze, czyli „tabelki” liczb. Nie wchodząc w szczegóły, karta graficzna musi dokonać miliardów przemnożeń i dodawań.

No dobrze, zobaczymy w końcu, co model języka zrobi z naszym zdaniem. Skrypt w języku programowania Python, który uruchomi nasz model, jest tak krótki, że możemy go tutaj przytoczyć w całości.

```
1 from transformers import AutoTokenizer, AutoModelForCausalLM
2 import torch
3 model_name = 'sdadas/polish-gpt2-xl'
4 tokenizer = AutoTokenizer.from_pretrained(model_name)
5 device = 'cuda' if torch.cuda.is_available() else 'cpu'
6 model = AutoModelForCausalLM.from_pretrained(model_name).half().to(device)
```



Następnie tokenizujemy tekst, efekt widzieliśmy już wyżej (linie 7-8).

W końcu uruchamiamy nasz model (linie 9-10)...

... i wyświetlamy 10 najbardziej prawdopodobnych kontynuacji naszego tekstu (linie 11-14).

```
7 t = 'Dzisiaj rano poszłem do piekarni i'
8 tokens = tokenizer.encode(t)

9 out = model(torch.tensor(tokens).to(device))
10 probs = torch.softmax(out[0] [-1], 0)

11 k = 10
12 top_values, top_indices = torch.topk(probs, k)
13 for p, ix in zip(top_values, top_indices):
14     print(tokenizer.decode(ix), p.item())
```

Najciekawsze, że model nie wskazuje po prostu kolejnego słowa, tylko **rozkład prawdopodobieństwa** na wszystkich możliwych tokenach-kontynuacjach. Oto lista 10 wypisanych tokenów wraz z prawdopodobieństwami:

kupiłem	0.321533203125	nie	0.0157623291015625
zobaczyłem	0.0263824462890625	poprosiłem	0.014801025390625
tam	0.02154541015625	w	0.011260986328125
chciałem	0.0174407958984375	widzę	0.01025390625
wziąłem	0.017303466796875	po	0.0101776123046875

Model zachował się całkiem rozsądnie, chyba Ty też, Czytelniku, przewidziałeś *kupiłem* jako najbardziej prawdopodobną kontynuację? Ale kolejne propozycje też są zupełnie sensowne.

Zwróćmy uwagę, że model musi mieć „zaszytą” gdzieś w sobie, w swoich wektorach i macierzach, całkiem sporą wiedzę, zarówno o języku (na przykład żeby nie zmienił w połowie zdania formy męskiej na żeńską albo pojedynczej na mnogą), jak i o świecie (co się robi w piekarni?).

Od modelu języka oczekujemy jednak, że wygeneruje nam dłuższy tekst, a nie tylko rozkład prawdopodobieństwa... Rozwiązanie jest proste: doklejamy token z najwyższym prawdopodobieństwem (*kupiłem*) do początkowego wejścia i po prostu uruchamiamy model jeszcze raz. Otrzymamy teraz taki rozkład:

sobie	0.19384765625	dwa	0.01904296875
chleb	0.08404541015625	świeże	0.0187530517578125
bu	0.031890869140625	3	0.0170745849609375
bułki	0.031402587890625	2	0.0161590576171875
dwie	0.020751953125	kilka	0.01425933837890625

... więc doklejamy *sobie* i jeszcze raz:

bu	0.1282958984375	dwie	0.018768310546875
chleb	0.0789794921875	kilka	0.01861572265625
bułki	0.06201171875	dro	0.0183258056640625
pą	0.033447265625	dwa	0.0176239013671875
świeże	0.0189208984375	bagie	0.016815185546875

Dlaczego *bu*?! A, zapewne to słowo *bułkę* ucięte w środku. Uruchommy model kolejny raz i sprawdźmy:

łkę	0.6474609375	łek	0.00867462158203125
łeczki	0.2005615234375	ł	0.004360198974609375
łe	0.10736083984375	ły	0.0034503936767578125
łka	0.011138916015625	łki	0.0014162063598632812
łę	0.00937652587890625	lki	0.0012111663818359375

Mieliśmy więc rację. A jak wygląda cały tekst dogenerowany przez model Polish GPT-2? Jeśli wykonamy 20 iteracji, to otrzymamy:

Dzisiaj	rano	posz	łem	do	piekar	ni	i	kupiłem	sobie	bu	łkę		
z	szy	nką	i	serem	.	W	róciłem	do	domu	i	zjad	łem	.
Potem													

Taki mało ekscytujący tekst. Żeby jednak wiedzieć, jak go wygenerować, korzystając z modelu, potrzeba całkiem sporo matematyki: algebry liniowej, geometrii, teorii prawdopodobieństwa. Nie wspominając o uczeniu modelu, co wymaga „wciągnięcia” kolejnych działów matematyki i informatyki.



#### Rozwiązanie zadania M 1781.

Po podniesieniu do kwadratu obu stron równości  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2}$  i wykorzystaniu nierówności  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$  dostajemy

$$8 = x + y + 2\sqrt{xy} \leq 2(x + y),$$

skąd  $x + y \geq 4$ . Ponadto z nierówności między średnią arytmetyczną a kwadratową mamy:

$$(*) \quad x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2,$$

więc  $x^2 + y^2 \geq 8$ . Ponownie korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, mamy:

$$64 = \frac{2^{x^2+y} + 2^{x+y^2}}{2} \geq \sqrt{2^{x^2+y} \cdot 2^{x+y^2}} = 2^{\frac{1}{2}(x^2+y+x+y^2)} \geq 2^{\frac{1}{2}(4+8)} = 2^6 = 64.$$

Zatem  $x + y = 4$  oraz  $x^2 + y^2 = 8$ .

Jednakże oznacza to, że w nierówności (\*) mamy równość, stąd  $x = y = 2$ .

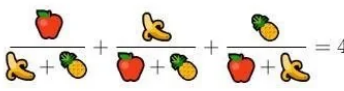
Zwróćmy uwagę – jakże różne rodzaje rozkładów prawdopodobieństwa otrzymujemy z modelu – czasami jest większa liczba kandydatów ze stosunkowo dużymi prawdopodobieństwami, a czasami mamy pewniaka, który bierze więcej niż połowę masy prawdopodobieństwa.

# Jej wysokość krzywa eliptyczna

Bartosz NASKRĘCKI\*

\* Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza  
w Poznaniu

95% ludzi tego nie rozwiąże!



Czy znajdziesz całkowite dodatnie wartości dla jabłka, banana oraz ananasa?



## Rozwiązanie zadania F 1096.

Położenie równowagi odpowiada minimum potencjału. Obliczmy pochodną  $U(x)$  względem  $x$  i przyrównajmy ją do zera, aby znaleźć współrzędną  $x_0$  minimum. Mamy:

$$U'(x) = -\frac{2a}{x^3} + \frac{b}{x^2} \mapsto x_0 = \frac{2a}{b}.$$

Silę  $F(x)$  działającą w punkcie  $x$  otrzymamy jako  $F(x) = -U'(x)$ . Obliczmy jej wartość w punkcie bliskim minimum:  $x = x_0 + z$ :

$$F(x_0 + z) = \frac{2a}{(x_0 + z)^3} - \frac{b}{(x_0 + z)^2} \approx \approx U'(x_0) - U''(x_0)z.$$

Ponieważ interesują nas małe drgania, więc dokonaliśmy rozwinięcia siły do wyrazów liniowych w  $z$ . Mamy  $U'(x_0) = 0$ , a zatem otrzymujemy przybliżone równanie ruchu w pobliżu punktu równowagi ( $x_0$ ):

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{b^4}{8a^3} z.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o okresie:

$$T = \frac{4\pi a}{b^2} \sqrt{2am}.$$

Jak usprawnić poszukiwanie rozwiązań? Warto skorzystać z obserwacji, że dla ustalonych  $x$  i  $y$  można szybko znaleźć przybliżone rozwiązanie (1) ze względu na  $z$  procedurami numerycznymi (lub korzystając ze wzoru na rozwiązania równań stopnia 3).

Internet jest pełen krzykliwych haseł mających przyciągnąć uwagę użytkownika. *Lekarze nie chcą, byś poznał cudowne własności tego wodorostu!, Ta prosta sztuczka pozwoli ci zarabiać miliony bez wychodzenia z łazienki!, Mężczyzna próbował podzielić przez zero, zobaczcie, co się stało dalej!* – to tylko wymyślone na poczekaniu przykłady, wcale nieodległe od pierwowzorów. Wśród tych fraz szczególne miejsce zajmują te rachunkowo-logiczne, rozpoczynające się od  $K\%$  ludzi tego nie rozwiąże!, gdzie  $K \in [90, 100)$ . Przyjrzyjmy się jednemu z takich *clickbaitów*, przedstawionemu na marginesie – sprawdzimy, czy jako osoby o ścisłych inklinacjach znajdujemy się w chlubnych  $(100 - K)\%$  populacji.

Dla Czytelników *Delt*y nie ma niestety żadnych jabłek, bananów i ananasów – są za to całkowite dodatnie liczby  $x, y, z$ , które mają spełniać równanie

$$(1) \quad \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 4.$$

Czy takie istnieją? Szukając *jakichkolwiek* rozwiązań, możemy zastanowić się najpierw, czy nie istnieją takie, które spełniają pewne upraszczające założenia. Gdy  $x = y = z$ , nasze równanie sprowadza się do postaci  $\frac{3}{2} = 4$ , zatem wtedy rozwiązań nie ma. Z kolei gdy przyjmiemy tylko  $x = y$ , to (1) sprowadza się do równania kwadratowego ze względu na  $z$ , którego rozwiązanie to  $z = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{65})x$ . Oznacza to, że wtedy również brak rozwiązań całkowitych (liczby  $x$  i  $z$  nie mogą być jednocześnie całkowite). A czy któraś z tych liczb może być równa 0? Niestety nie – gdyby na przykład zachodziła równość  $x = 0$ , to (1) ponownie stałoby się równaniem kwadratowym z rozwiązaniem  $z = (\pm 2 + \sqrt{3})y$ , co również jest niemożliwe dla liczb całkowitych  $y, z$ . Podstawowe próby uproszczenia równania dodatkowymi założeniami spełzły zatem na niczym.

Bywa, że umysłowa ekwilibrystyka musi ustąpić brutalnej sile. Nietrudno napiszemy prosty skrypt, który przejrzy wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich od 1 do, powiedzmy, 100 i sprawdzi, czy spełniają one równość (1). Okazuje się, że taki program nie znajdzie żadnego rozwiązania w tym zakresie. Jeśli z ciekawości pozwolimy mu przeglądać liczby ujemne (o module nie większym niż 100), to z dokładnością do kolejności oraz skalowania dostaniemy dwa rozwiązania:  $(-1, 4, 11)$ ,  $(-5, 9, 11)$ . Wspomniane skalowanie wiąże się z obserwacją, że jeśli  $(x, y, z)$  jest rozwiązaniem (1), to jest nim również  $(ax, ay, az)$  dla  $a \neq 0$  – w naszych poszukiwaniach możemy zatem ograniczyć się do trójek, których największy wspólny dzielnik jest równy 1.

Problem z naszym podejściem polega na tym, że złożoność takiego prymitywnego programu (tzn. liczba trójek liczb do sprawdzenia) zwiększa się sześciennie wraz z wielkością zakresu. Przy odrobinie cierpliwości moglibyśmy zatem w ten sposób poszukać rozwiązań w przedziale od 1 do 1000, ale już przedział  $[1, 10^4]$  pozostaje raczej poza możliwościami zwykłego laptopa. Przy odrobinie pomysłowości możemy jednak uzyskać z grubsza *kwadratowy* koszt przeszukiwań i w ten sposób przekonać się, że nie istnieją rozwiązania w tym przedziale. Cóż, jeśli tak proste równanie jak (1) nie ma rozwiązań całkowitych w tak szerokim zakresie, to *na pewno* nie ma ich w ogóle – a cała zagadka jest pomyłką albo złośliwym żartem.

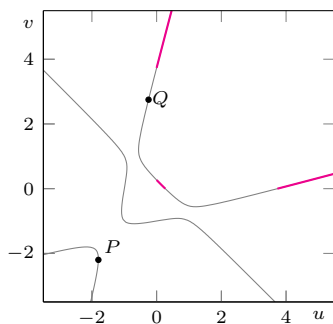
Okazuje się, że owszem mamy do czynienia ze złośliwym żartem, ale bardziej przewrotnym niżby mogło się nam wydawać – otóż wyjściowe równanie *istotnie ma rozwiązania* w liczbach całkowitych dodatnich, przy czym najmniejsze z nich jest postaci:

$$x = 4373612677928697257861252602371390152816537558161613618621437993378423467772036,$$

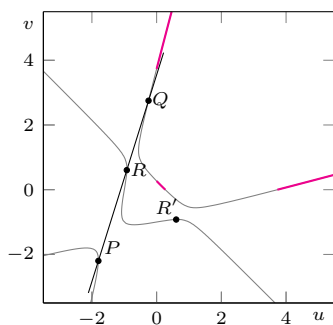
$$y = 154476802108746166441951315019919837485664325669565431700026634898253202035277999,$$

$$z = 36875131794129999827197811565225474825492979968971970996283137471637224634055579,$$

gdzie  $x$  ma aż 79 cyfr! Jak można odnaleźć tak ogromne rozwiązania i skąd wiadomo, że nie ma mniejszych? Temu zagadnieniu poświęcona będzie dalsza część artykułu.



Rys. 1. Krzywa  $C$  określona równaniem (2), wraz z zaznaczonymi punktami  $P = (-9/5, -11/5)$  i  $Q = (-1/4, 11/4)$ . Ma ona trzy spójne składowe. Kolorem oznaczono zbiór punktów krzywej o obu współrzędnych dodatnich



Rys. 2



### Rozwiązanie zadania M 1782.

Jeśli  $ab = 0$  lub  $a + b = 0$ , teza zadania jest jasna. Załóżmy więc, że  $ab \neq 0$  i  $a + b \neq 0$ . Z tożsamości

$$(a^5 - b^5)^2 - (a^7 - b^7)(a^3 - b^3) = a^3 b^3 (a^2 - b^2)^2$$

wynika, że  $a^3 b^3 \in \mathbb{Q}$ . Z kolei z równości

$$(a^7 - b^7)^2 - (a^{11} - b^{11})(a^3 - b^3) = a^3 b^3 (a^2 - b^2)^2 (a^2 + b^2)^2$$

wniosujemy, że

$$(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 = (a^2 + b^2)^2 \in \mathbb{Q},$$

skąd  $a^2 b^2 \in \mathbb{Q}$ . Zatem  $ab = \frac{a^3 b^3}{a^2 b^2} \in \mathbb{Q}$ .

Ponieważ

$$(a^5 - b^5)(a^{11} - b^{11}) - (a^{13} - b^{13})(a^3 - b^3) = a^3 b^3 (a^2 - b^2)^2 (a^2 + b^2)(a^4 + b^4),$$

więc

$$(a^3 - b^3)^2 + 2a^3 b^3 + a^2 b^2 (a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \in \mathbb{Q},$$

więc  $a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}$ . Finalnie

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \quad \text{oraz} \quad a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

są wymierne, skąd  $a$  i  $b$  też są wymierne.

*Uwaga:* Można pokazać, że  $a$  i  $b$  są całkowite – pozostawiamy to jako ćwiczenie dla Czytelnika Wnikliwego.

Trójki różnych od zera liczb całkowitych  $(x, y, z)$ , których największy wspólny dzielnik jest równy 1, można jednoznacznie zakodować jako pary  $(u, v)$ , gdzie  $u = x/z$  i  $v = y/z$ . Po takim zabiegu równanie (1) staje się równaniem dwóch zmiennych następującej postaci:

$$(2) \quad (u + v)^3 - 6uv(u + v) - 3(u + v)^2 - 3(u + v) + uv + 1 = 0.$$

Jest to równanie pewnej krzywej  $C$  stopnia 3, przedstawionej na rysunku 1. Zaznaczono na niej punkty  $P = (-9/5, -11/5)$  i  $Q = (-1/4, 11/4)$  odpowiadające rozwiązaniom  $(-9, -11, 5)$  i  $(-1, 11, 4)$  równania (1). Kolorem oznaczono te fragmenty krzywej  $C$ , które leżą w I ćwiartce. Jeśli znajdziemy na tym kolorowym fragmencie punkt o współrzędnych wymiernych – odtąd punkty takie będziemy nazywać wymiernymi – będzie on odpowiadał dodatniemu rozwiązaniu (1). Tylko jak takich punktów szukać? Z pomocą przyjdzie nam... geometria! Okazuje się bowiem, że

- (♥) jeśli prosta o nachyleniu różnym od  $-1$  przecina krzywą  $C$  w dwóch różnych punktach wymiernych  $P$  i  $Q$ , to przecina ją jeszcze w dokładnie jednym punkcie wymiernym  $R$ .

Dowód tego faktu wynika z zastosowania wzorów Viëta po wstawieniu do (2) liniowej zależności  $v = \alpha u + \beta$ . Szczegóły uzasadnienia zamieszczone są na końcu artykułu – jest tam również przedstawiony jawny wzór pozwalający wyznaczyć współrzędne punktu  $R$  w zależności od współrzędnych  $P$  i  $Q$ .

Dla przykładu, jeśli na rysunku 1 poprowadzimy prostą przez punkty  $P$  i  $Q$ , to przetnie ona krzywą  $C$  w jeszcze jednym punkcie  $R$  o współrzędnych  $(-9071/9841, 5951/9841)$ . Daje nam to kolejne całkowite rozwiązanie (1) ( $x = -9071, y = 5951$  i  $z = 9841$ ), które jednak wciąż nie jest dodatnie.

Na pierwszy rzut oka na tym kończy się nasza przygoda z generowaniem nowych punktów – każda prosta ma co najwyżej trzy punkty przecięcia z krzywą  $C$ . Z pomocą przychodzi nam operacja wręcz trywialna – zamiana współrzędnych miejscami! Jeśli  $(u, v)$  spełnia równanie (2), to  $(v, u)$  również je spełnia. Jeśli zatem punkt  $R$  leży na  $C$ , to symetryczny do niego względem prostej  $u = v$  punkt  $R'$  również – i, rzecz jasna, on też ma współrzędne wymierne (rys. 2). Te dwie operacje: branie trzeciego punktu przecięcia z  $C$  oraz zamiana współrzędnych miejscami, pozwalają nam wygenerować dowolnie wiele punktów wymiernych. Pozostaje nam mieć nadzieję, że w końcu trafimy w ten sposób na punkt o współczynnikach dodatnich.

Przeprowadźmy poszukiwania w sposób systematyczny. Dla ułatwienia notacji wyżej przedstawioną konstrukcję punktu  $R'$  z punktów  $P$  i  $Q$  oznaczmy jako  $m(P, Q)$ . Z powodów, które staną się zrozumiałe później, wprowadźmy leżący na krzywej  $C$  punkt  $T = (-1, 1)$  i przyjmijmy oznaczenia  $P_1 = m(T, P)$  oraz  $P_{n+1} = m(P_n, P)$ . Zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami wszystkie punkty  $P_n$  leżą na krzywej  $C$ . Możemy kolejno obliczać ich współrzędne (raczej przy pomocy komputera), aż w końcu... Udało się! Punkt  $P_9$  ma obie współrzędne dodatnie, a więc wyznacza nam pewne dodatnie rozwiązanie naszego oryginalnego problemu (1). Jest to dokładnie to gigantyczne rozwiązanie, które przedstawiliśmy wcześniej – jak widać, potrzeba sporo jabłek...

Zaskakujące jest to, że każda z liczb  $x, y, z$  tego rozwiązania ma około 80 cyfr. Z pewnością takiego rozwiązania nie znaleźlibyśmy ręcznie. Pozostają więc pytania:

- (A) Czy można znaleźć mniejsze (w sensie maksimum) rozwiązanie?  
 (B) Czy wykorzystana operacja  $m(P, Q)$  ma jakiś głębszy sens?  
 (C) Czy i kiedy znajdziemy „małe” rozwiązanie początkowe w ogólnej sytuacji?

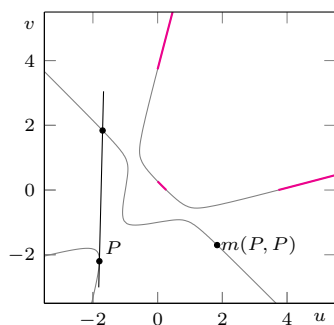
W dalszej części spróbujemy – na tyle, na ile jest to możliwe – uzasadnić negatywną odpowiedź na pytanie (A). Wykorzystamy do tego strukturę grupy związaną z odpowiedzią na pytanie (B) i zakończymy bardzo trudnymi pytaniami matematycznymi, które wiążą się z odpowiedzią (wciąż niepełną!) na pytanie (C).

Przyjrzyjmy się uważniej operacji  $m(P, Q)$ . Wiemy już, że nie wyprowadza ona poza zbiór punktów  $C$  o wymiernych współrzędnych. Jest też w oczywisty

sposób symetryczna, tzn.  $m(P, Q) = m(Q, P)$ . Okazuje się, że ma jeszcze inną przydatną, choć niełatwą w uzasadnieniu własność: dla dowolnych punktów  $P, Q, R$  na  $C$  zachodzi:

$$m(m(P, Q), R) = m(P, m(Q, R)).$$

Niektórzy Czytelnicy zapewne spróbują udowodnić tę równość za pomocą jawnych rachunków algebraicznych. Powodzenia!



Rys. 3. Konstrukcja punktu  $m(P, P)$

Krzywe eliptyczne w matematyce pojawiły się już w starożytności. Mają też związek z obliczaniem pewnych całek, ale to już odrębna historia...

W fachowej terminologii oznacza to, że jest to operacja *łączna*, i dzięki wcześniejszej symetrii możemy o niej myśleć jak o zwykłym działaniu, takim jak na przykład dodawanie. Przeszkadzać może odrobinę, że operacja  $m(P, Q)$  zdefiniowana była dla *różnych* punktów  $P$  i  $Q$  (by można było poprowadzić przez nie prostą). Chcąc zdefiniować  $m(P, P)$ , możemy jednak pomyśleć o granicy  $m(P, R_n)$ , gdzie  $R_n$  jest ciągiem punktów na  $C$  zbiegających do  $P$ . Wówczas w pierwszym kroku operacji  $m$  zamiast prostej przechodzącej przez dwa punkty bierzemy styczną do  $C$  w punkcie  $P$  (rys. 3). Inna trudność pojawia się, gdy chcemy wykonać operację  $m(P, Q)$  na dwóch punktach symetrycznych względem prostej  $y = x$ . Z dowodu stwierdzenia ( $\heartsuit$ ), zamieszczonego na końcu artykułu, wynika, że nie istnieje wtedy trzeci punkt przecięcia prostej  $PQ$  z krzywą  $C$ . Jeśli powiemy, że wówczas wynikiem zawsze ma być pewien abstrakcyjny punkt  $\mathcal{O}$ , o który wzbogacamy krzywą  $C$  (można o nim myśleć jako o punkcie definiującym kierunek  $(-1, 1)$ ), to już nic nie stoi na przeszkodzie, aby myśleć o  $m$  jako o porządnym „dodawaniu” punktów na krzywej  $C$  – od tej pory przyjmujemy zatem oznaczenie  $P + Q := m(P, Q)$ . Pozwala nam to też mnożyć punkty przez liczby całkowite: dla  $n \in \mathbb{N}$  punkt  $nP$  to efekt  $n$ -krotnego dodania do siebie punktu  $P$ , zaś  $-nP$  to odbicie symetryczne  $nP$  względem prostej  $u = v$ . Zdefiniowane w ten sposób działanie dodawania punktów krzywej trzeciego stopnia daje w rezultacie strukturę *grupy* nazywaną *krzywą eliptyczną*.

Wspominaliśmy już, że rozwiązania równania (1) można ograniczyć do trójek liczb  $(x, y, z)$ , których największy wspólny dzielnik jest równy 1. Warto tu zaznaczyć, że wówczas liczby  $x, y, z$  są parami względnie pierwsze. Istotnie, równanie (1) można sprowadzić do postaci

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2y - 3x^2z - 3xy^2 - 3xz^2 - 3y^2z - 3yz^2 - 5xyz = 0,$$

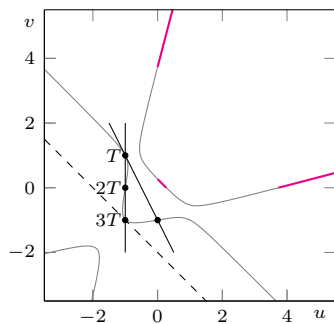
z której wynika, że każdy wspólny dzielnik pierwszy dowolnych dwóch spośród liczb  $x, y, z$  dzieli też trzecią z tych liczb, więc również największy wspólny dzielnik całej trójki – czyli 1. Ta obserwacja oznacza również, że jeśli współrzędne dowolnego wymiernego punktu  $(u, v)$  krzywej  $C$  przedstawimy w postaci nieskracalnej, to będzie to postać  $(x/z, y/z)$ , tłumacząca się bezpośrednio na rozwiązanie  $(x, y, z)$  równania (1).

Wprowadzimy teraz pewną ciekawą funkcję, nazywaną *wysokością*. Dla wymiernego punktu  $P = (u, v)$  definiujemy  $h(P) = \log_{10}(\max\{|a|, |b|\})$ , gdzie  $\frac{a}{b}$  jest nieskracalną postacią  $u + v$ . Na przykład dla  $P = (-9/5, -11/5)$  otrzymujemy zatem  $h(P) = \log_{10} 4$ . Zauważmy, że jeśli  $P = (x/z, y/z)$  ma współrzędne dodatnie, to  $h(P) \leq \log_{10}(\max\{x + y, z\})$ , zatem  $h(P) \leq \log_{10}(2 \max\{x, y, z\})$ . Z dokładnością do  $\log_{10}(2) \approx 0,3$  funkcja  $h$  ogranicza więc z dołu liczbę cyfr największej spośród liczb  $x, y, z$  – może być zatem użyteczna dla badania fenomenu ogromnego rozwiązania równania (1).

Zachodzi następujące ciekawe twierdzenie: dla każdego punktu  $P$  wymiernego na krzywej  $C$  istnieje granica ciągu  $(\frac{h(2^n P)}{4^n})$ . Oznaczamy tę granicę przez  $\hat{h}(P)$  i nazywamy *wysokością kanoniczną*. Jak zostało udowodnione przez André Nérona i Johna Tate'a (na dwa różne sposoby!):

- $\hat{h}(nP) = n^2 \hat{h}(P)$  (tzn.  $\hat{h}(P)$  jest formą kwadratową);
- $\hat{h}(P + Q) + \hat{h}(P - Q) = 2\hat{h}(P) + 2\hat{h}(Q)$  dla dowolnych punktów  $P, Q$  (tzw. *prawo równoległoboku*);
- istnieje stała  $\kappa > 0$  taka, że  $|h(P) - \hat{h}(P)| < \kappa$  niezależnie od wyboru punktu  $P$ .

Uzbrojeni w takie nowe narzędzia możemy teraz bez trudu wyjaśnić, dlaczego skonstruowany wcześniej punkt  $P_9 = 9P + T$  tłumaczył się na tak monstrialnej wielkości rozwiązanie równania (1). Można sprawdzić, że  $3T = (-1, -1)$  (rys. 4) oraz  $2(-1, -1) = \mathcal{O}$ , zatem  $6T = \mathcal{O}$  i dlatego zgodnie z własnością (a) zachodzi



Rys. 4. Ilustracja równości  $6T = \mathcal{O}$

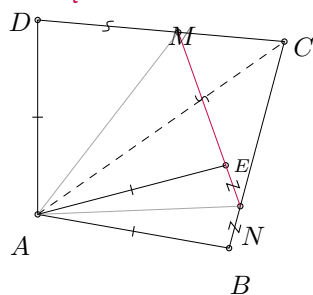


#### Rozwiązanie zadania F 1095.

Para wodna z dobrym przybliżeniem spełnia równanie gazu doskonałego. Cząsteczkę pary wodnej tworzą trzy (niewspółliniowe) atomy, a więc molowe ciepło właściwe pary ogrzewanej w stałej objętości  $c_V = \frac{5}{2}R = 3R$ . Masa molowa wody  $\mu_w = 2\mu_H + \mu_O = 18$  g. Ciepło potrzebne do ogrzania 54 g pary od  $t_1 = 100^\circ\text{C}$  do  $t_2 = 200^\circ\text{C}$  wynosi więc  $Q = mc_V(T_2 - t_1)/\mu_w$ ; liczbowo:  $Q = 7,483 \cdot 10^3$  J.



Rozwiązanie zadania M 1780.



Zaznaczmy na odcinku MN taki punkt E, że EM = MD. Wtedy BN = NE. Wykorzystując równoramienność trójkątów EDM i EBN oraz równość \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 180^\circ = \sphericalangle MEN, dostajemy

$$\sphericalangle ABE + \sphericalangle ADE = \sphericalangle AEB + \sphericalangle AED.$$

Gdyby \sphericalangle ABE > \sphericalangle AEB, to \sphericalangle ADE < \sphericalangle AED, skąd AB < AE < AD, sprzeczność. Podobnie nie może zachodzić nierówność \sphericalangle ABE < \sphericalangle AEB. Zatem AB = AE = AD, więc pary trójkątów ABN i AEN oraz AEM i ADM są przystające. Wobec tego

$$\begin{aligned} \sphericalangle ANM + \sphericalangle CAM &= \sphericalangle ANB + \sphericalangle CAM = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle BAN - \sphericalangle ABN + \sphericalangle CAM = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle BAN - \sphericalangle ABD - \sphericalangle MAD = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle BAD - \sphericalangle ABD = 90^\circ, \end{aligned}$$

co łatwo daje tezę zadania.

\hat{h}(T) = \frac{1}{36} \hat{h}(\mathcal{O}) = 0. Z prawa równoległoboku wynika zatem, że dla dowolnego punktu S oraz i \in \mathbb{N} zachodzi:

$$\hat{h}(S + (i + 1)T) + \hat{h}(S + (i - 1)T) = 2\hat{h}(S + iT).$$

Oznacza to, że ciąg (\hat{h}(S + iT))\_i jest ciągiem arytmetycznym. Z drugiej strony S + 6T = S, zatem jest to jednocześnie ciąg okresowy, więc musi być ciągiem stałym. Wstawiając S = 9P, dostajemy \hat{h}(9P + T) = \hat{h}(9P), i ponownie własność (a) implikuje \hat{h}(9P) = 81\hat{h}(P). Zgodnie z (c) możemy zatem zapisać h(9P + T) \approx 81h(P) (Błąd przybliżenia \kappa nie zależy od wyboru punktu, a jedynie od samego równania krzywej C!) Można to zinterpretować w taki sposób, że liczba cyfr największej liczby w nieskracalnym zapisie 9P + T wzrosła około 81 razy w stosunku do analogicznej liczby cyfr dla punktu P. Zauważmy, że ta jakościowa analiza bardzo dobrze odpowiada uzyskanym przez nas dokładnym wynikom.

Ale skąd wiemy, że punkt 9P + T jest najmniejszy w sensie liczby cyfr, który dopuszcza dodatnie rozwiązania? Odpowiedź kryje się w twierdzeniu udowodnionym przez Luisa Mordella w 1922 roku. Aby sformułować je w pełnym brzmieniu, zdefiniujmy rzęd punktu S jako najmniejszą liczbę naturalną n taką, że nS = \mathcal{O} (jeśli takiej liczby nie ma, przyjmujemy rząd równy \infty). Twierdzenie Mordella głosi, że na krzywej eliptycznej istnieje skończony zbiór punktów T\_1, \dots, T\_k (skończonego rzędu) oraz P\_1, \dots, P\_r (rzędu nieskończonego) taki, że każdy punkt wymierny zapisuje się jako suma \sum\_i a\_i P\_i + \sum\_k b\_k T\_k, gdzie a\_i, b\_k są liczbami całkowitymi. Dla każdego punktu liczby te są wyznaczone jednoznacznie. Liczbę r nazywamy wówczas rangą krzywej eliptycznej C, a punkty P\_i i T\_k jej generatorami.

W przypadku naszej krzywej C dodatkowe rachunki algebraiczne (zdecydowanie wykraczające poza ramy tego artykułu) pozwalają udowodnić, że każdy punkt wymierny jest postaci kP + lT. Zatem każdy punkt wymierny na naszej krzywej ma wysokość kanoniczną równą \hat{h}(kP + lT) = k^2 \hat{h}(P), odpowiadającą w przybliżeniu „zwykłej” wysokości. Pozostaje więc tylko upewnić się, że wszystkie punkty kP + lT dla -9 < k < 9 oraz 0 \le l \le 5 nie mają obu współrzędnych dodatnich (ograniczenie na l wynika z faktu, że 6T = \mathcal{O}).

W ten sposób nasze rozważania prowadzą do jednego z najsłynniejszych problemów w matematyce, czyli hipotezy Bircha–Swinnertona–Dyera. Postuluje ona istnienie efektywnego algorytmu wyznaczającego generatory punktów na krzywej eliptycznej. Dodatkowo hipoteza ta – jeśli jest prawdziwa – pozwala opisać związek między wysokościami punktów generujących i arytmetyką samej krzywej eliptycznej. Przy założeniu, że ranga krzywej eliptycznej wynosi 0 lub 1, hipoteza BSD została udowodniona dla nieskończenie wielu krzywych eliptycznych.

Na koniec polecamy Czytelnikom interesujące eksperymenty. Możemy poszukiwać „prostego” (minimalnego w sensie wysokości) rozwiązania równania (1), w którym liczba 4 została zastąpiona inną liczbą wymierną. Są częściowe wyniki na ten temat, więcej informacji można znaleźć w artykule [\*]. Okazuje się, że generatory krzywej eliptycznej mogą być naprawdę ogromne!

[\*] Andrew Bremner i Allan Macleod, An unusual cubic representation problem, Annales Mathematicae et Informaticae, 2014.

**Uzasadnienie stwierdzenia (♥).** Zastanówmy się, ile punktów wspólnych może mieć krzywa C z prostą. Taka prosta może mieć równanie postaci v = \alpha u + \beta dla \alpha, \beta \in \mathbb{R}. Wstawiając tę zależność do (2), dostaniemy wielomian zmiennej u, którego początkowe wyrazy wyglądają następująco:

$$(3) \quad W_{\alpha, \beta}(u) = (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 3\alpha + 1)u^3 + (3\alpha^2\beta - 3\alpha^2 - 6\alpha\beta - 5\alpha - 3\beta - 3)u^2 + (\dots).$$

Jest to wielomian 3 stopnia, który może mieć co najwyżej 3 pierwiastki – oznacza to, że punkty przecięcia są również co najwyżej trzy. Ponadto z podstawowej teorii dotyczącej wielomianów (twierdzenie Bézouta) wynika, że jeśli istnieją dwa różne pierwiastki, to istnieje też trzeci – o ile tylko \alpha \neq -1, gdyż wówczas (2) degeneruje się do wielomianu stopnia 2. Zatem jeśli prosta przechodząca przez punkty P i Q leżące na C ma nachylenie różne od -1, to przecina krzywą C w jeszcze jednym punkcie R.

Zastanówmy się, jak mając współrzędne punktów P = (u\_P, v\_P) i Q = (u\_Q, v\_Q), można wyznaczyć współrzędne (u\_R, v\_R) punktu R. Prosta przechodząca przez punkty P i Q ma równanie

$$v = \alpha' u + \beta',$$

gdzie \alpha' = \frac{v\_P - v\_Q}{u\_P - u\_Q} oraz \beta' = v\_P - \alpha' u\_P. Liczby u\_P, u\_Q, u\_R są zatem pierwiastkami równania W\_{\alpha', \beta'}(u) = 0. Zgodnie ze wzorami Viëta ich suma jest równa -\frac{a\_2}{a\_3}, gdzie a\_i to współczynnik stojący przy u^i w wielomianie W\_{\alpha', \beta'}. Oba te współczynniki przedstawiliśmy w (3), co daje nam wzór jawny (choć bardzo skomplikowany) na u\_R:

$$u_R = -\frac{3\alpha'^2\beta' - 3\alpha'^2 - 6\alpha'\beta' - 5\alpha' - 3\beta' - 3}{\alpha'^3 - 3\alpha'^2 - 3\alpha' + 1} - u_P - u_Q$$

i dalej v\_R = \alpha' u\_R + \beta'. Z powyższego wzoru wynika, że jeśli liczby u\_P, v\_P, u\_Q, v\_Q są wymierne, to liczby u\_R, v\_R również.

# Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 764 ( $WT = 1,66$ ), 765 ( $WT = 3,4$ ) z numeru 10/2023

Tomasz Wietecha	Tarnów	17-44	+ 1,44
Marian Lupieżowicz	Gliwice	2-43,02	
Jacek Konieczny	Poznań	38,28	
Konrad Kapcia	Poznań	2-35,60	
Ryszard Baniewicz	Wrocław	1-34,07	
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5-26,27	
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-22,20	
Jan Zambrzycki	Białystok	4-15,35	

## Zadania z fizyki nr 778, 779

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**778.** Na osi długiej rury o lustrzanej powierzchni wewnętrznej znajduje się punktowe, izotropowe źródło światła oraz całkowicie pochłaniająca światło kulka o promieniu  $r = 1$  cm. Środek kulki znajduje się w odległości  $l = 2$  cm od źródła. Jaki powinien być promień wewnętrzny rury, aby kulka pochłaniała połowę energii emitowanej przez źródło?

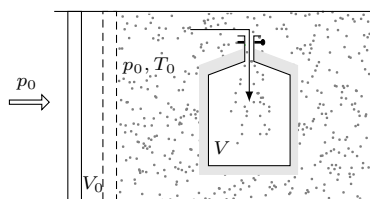
**779.** W pionowo ustawionym naczyniu, pod ciężkim tłokiem znajduje się niewielka ilość helu. Nie ma ciśnienia atmosferycznego, tłok „wisi” na wysokości  $H$  nad dnem naczynia, a jego tarcie o ścianki naczynia jest zaniedbywalne. Tłok bardzo szybko podniesiono na wysokość  $10H$  względem dna naczynia (tak, że podczas podnoszenia nie dochodziło do zderzeń z cząsteczkami gazu) i po ustaleniu się równowagi puszczono swobodnie. Na jakiej wysokości nad dnem naczynia tłok zatrzymał się, gdy ustały jego drgania? Naczynie nie przewodzi ciepła, pojemność cieplną ścianek i tłoka można zaniedbać, hel traktujemy jako gaz doskonały.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2024

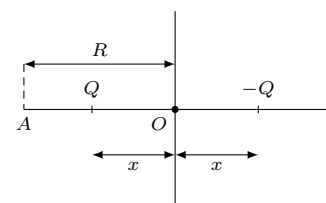
Przypominamy treść zadań:

**770.** Z izolowanego cieplnie naczynia o objętości wewnętrznej  $V$  odpompowano wypełniający je gaz, osiągając wysoką próżnię. Otaczające powietrze ma temperaturę  $T_0$  i ciśnienie  $p_0$ . W pewnym momencie otworzono kran zamykający naczynie, i nastąpiło jego szybkie napełnienie powietrzem atmosferycznym. Jaką temperaturę  $T$  miało powietrze w naczyniu po jego napełnieniu i zamknięciu kranu? Powietrze traktujemy jako gaz doskonały, którego wykładnik adiabaty  $\gamma = c_p/c_v$  jest dany, pojemności cieplnej ścianek naczynia nie uwzględniamy.

**771.** Cząstkę punktową o masie  $m$  i ładunku  $Q$  umieszczono w odległości  $R$  od nieskończonej płaszczyzny przewodzącej i puszczono swobodnie. Po jakim czasie cząstka doleci do płaszczyzny? Siły ciężkości nie uwzględniamy.



Rys. 1



Rys. 2

Aby obliczyć pracę  $W$ , możemy wyobrazić sobie, że nasze opróżnione naczynie znajduje się wewnątrz wypełnionego powietrzem dużego cylindra z ruchomym tłokiem (rys. 1). Ciśnienie i temperatura wewnątrz cylindra są takie same jak w atmosferze. Procesowi napełniania naczynia towarzyszy przemieszczanie tłoka, przy zachowaniu stałego ciśnienia  $p_0$ . Ponieważ do opróżnionego naczynia weszło dokładnie tyle powietrza, ile wyparł przemieszczający się tłok, możemy napisać:

$$(2) \quad W = p_0 V_0 = nRT_0,$$

gdzie  $V_0$  jest zmniejszeniem objętości cylindra, a  $R$  stałą gazową.

Z (1) i (2) temperatura końcowa wyraża się zależnością:

$$T = T_0 (1 + R/c_v) = \gamma T_0.$$

Wynik nie zależy od objętości naczynia ani od wartości ciśnienia atmosferycznego. Nie zależy też od tego, czy napełnianie naczynia zostanie doprowadzone do końca, gdy ciśnienie w nim wyrówna się z ciśnieniem atmosferycznym, czy też naczynie zamkniemy wcześniej.

**771.** W obecności cząstki naładowanej na płaszczyźnie przewodzącej pojawiają się ładunki przyciągane przez tę cząstkę. Ich działanie równoważne jest działaniu ładunku obrazu o wartości  $-Q$  umieszczonego w takiej samej odległości od płaszczyzny po jej drugiej stronie.

**770.** Napełnianie naczynia zachodzi szybko, można więc zaniedbać wymianę ciepła między powietrzem wchodzącym do naczynia a powietrzem atmosferycznym. Powietrze wchodzi do naczynia w postaci strumienia, którego energia kinetyczna uzyskana zostaje dzięki pracy  $W$  wykonanej przez siłę parcia powietrza atmosferycznego. Energia ta zamienia się na energię chaotycznego ruchu cząsteczek powietrza w naczyniu, więc zmiana energii wewnętrznej powietrza, które dostało się do naczynia, równa jest pracy  $W$ .

$$(1) \quad \Delta U = nc_v (T - T_0) = W,$$

gdzie  $n$  jest liczbą moli powietrza, które weszło do naczynia, a  $c_v$  jego ciepłem molowym przy stałej objętości.

Ponieważ zarówno siła Coulomba, jak i siła grawitacji są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości między oddziałującymi obiektami, możemy wykorzystać naszą wiedzę z grawitacji. Wprowadźmy masę  $M$  umieszczoną w punkcie  $O$  (rys. 2), której siła oddziaływania grawitacyjnego z cząstką o masie  $m$  odległą o  $x$  od punktu  $O$  jest taka sama, jak siła oddziaływania kulombowskiego cząstki o ładunku  $Q$  z ładunkiem obrazem:

$$F = GMm/x^2 = kQ^2/4x^2, \text{ stąd } M = kQ^2/4Gm.$$

Rozważmy teraz cząstkę o masie  $m$ , która krąży wokół nieruchomej masy  $M$  po orbicie kołowej o promieniu  $R$ . Jej okres obiegu  $T_0 = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$ .

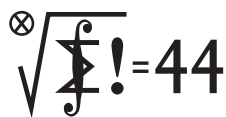
Zmniejszając prędkość tej cząstki w punkcie  $A$ , otrzymujemy tory eliptyczne, których jedno z ognisk znajduje się w punkcie  $O$ , a drugie łączy do punktu  $A$ , gdy prędkość początkowa cząstki łączy do zera. Ta graniczna elipsa o półosi wielkiej równej  $a = R/2$  to tor cząstki o masie  $m$  spadającej na masę  $M$ . Zgodnie z trzecim prawem Keplera okres obiegu po tej elipsie

$$T = T_0 \sqrt{a^3/a_0^3} = T_0/2\sqrt{2}, \text{ gdzie } a_0 = R.$$

Szukany czas, po którym cząstka naładowana doleci do płaszczyzny, jest dwa razy krótszy:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi R}{Q} \sqrt{\frac{Rm}{2k}}.$$

# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2024

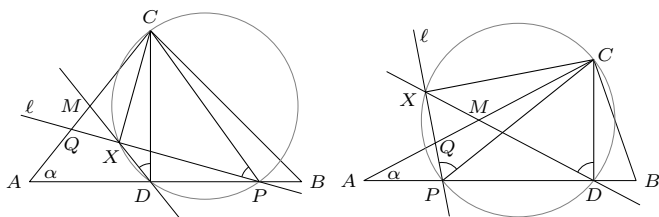
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 867 ( $WT = 1,85$ ) i 868 ( $WT = 1,48$ ) z numeru 10/2023

Radosław Kujawa	Wrocław	45,05
Paweł Najman	Kraków	43,16
Jerzy Cisło	Wrocław	42,30
Janusz Fiett	Warszawa	42,00
Marek Spychała	Warszawa	41,47
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Janusz Olszewski	Warszawa	40,89
Paweł Kubit	Kraków	38,15
Piotr Kumor	Olsztyn	37,94
Piotr Wiśniewski	Warszawa	36,97
Łukasz Merta	Kraków	36,08

Do matematycznego Klubu 44 wchodzi pan Radosław Kujawa. A tuż pod linią mety widzimy wielkie zagęszczenie – oczekujemy masowego jej przekraczania w najbliższych dwóch seriach.

**873.** Oznaczmy  $\sphericalangle CAB = \alpha$ . Weźmy dowolną prostą  $\ell$  i punkty  $P, Q, X$ , jak w treści zadania. Rachunek kątów w trójkącie  $ACP$  pokazuje, że  $\sphericalangle CPQ = 90^\circ - \alpha$ . Skoro  $\sphericalangle CPQ < 90^\circ$ , to punkt  $X$  leży na półprostej  $PQ \rightarrow$  (na odcinku  $PQ$  lub na jego przedłużeniu). Zatem także  $\sphericalangle CPX = 90^\circ - \alpha$ .

Prowadzimy wysokość  $CD$ . Usytuowanie punktów  $A, D, P$  na prostej  $AB$  może być różne (rysunki ilustrują dwie wybrane możliwości), ale dalsze rozumowanie nie zależy od konfiguracji. Okrąg o średnicy  $CP$  przechodzi przez punkty  $D$  oraz  $X$ . Punkty  $P$  i  $D$  leżą po jednej stronie prostej  $CX$ , skąd wynika, że  $\sphericalangle CDX = \sphericalangle CPX = 90^\circ - \alpha$ .



Prosta  $DX$  przecina bok  $AC$  w punkcie, który nazwiemy  $M$ . Tak więc  $\sphericalangle ADM = 90^\circ - \sphericalangle CDX = \alpha$ , i wobec tego trójkąt  $ADM$  jest równoramienny:  $AM = DM$ . To oznacza, że w trójkącie prostokątnym  $ADC$  punkt  $M$  jest środkiem przeciwprostokątnej  $AC$ .

## Zadania z matematyki nr 881, 882

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**881.** Ciąg  $a_0, a_1, a_2, \dots$  jest określony wzorami:  $a_0 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - 2$ . Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \prod_{i=0}^{n-1} a_i$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

**882.** Na bokach  $AB, BC, CD, DA$  równoległoboku  $ABCD$  wybrano, odpowiednio, punkty  $K, L, M, N$ , różne od wierzchołków. Weźmy pod uwagę trójkąty  $ANK, BKL, CLM, DMN$ . Udowodnić, że każda z następujących czwórek punktów stanowi czwórkę wierzchołków pewnego równoległoboku:

- (a) ortocentra tych trójkątów;
- (b) środki ciężkości tych trójkątów;
- (c) środki okręgów opisanych na tych trójkątach.

Zadanie 882 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2024

Przypominamy treść zadań:

**873.** Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ . Niech  $\ell$  będzie dowolną prostą przecinającą boki  $AB$  i  $AC$  odpowiednio w takich punktach  $P$  i  $Q$ , że  $\sphericalangle ACP + \sphericalangle APQ = 90^\circ$ , i niech  $X$  będzie rzutem prostokątnym punktu  $C$  na prostą  $\ell$ . Udowodnić, że (dla ustalonego trójkąta  $ABC$ ) wszystkie punkty  $X$ , uzyskane w ten sposób przy różnych dopuszczalnych położeniach prostej  $\ell$ , leżą na jednej prostej.

**874.** Liczba  $\sqrt{7}$  została zapisana w systemie dwójkowym jako  $10, c_1 c_2 c_3 \dots$ ; to znaczy,  $\sqrt{7} = 2^1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i 2^{-i}$ ,  $c_i \in \{0, 1\}$ . Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  suma  $\sum_{i=n}^{2n} c_i$  jest dodatnia.

W ustalonym trójkącie  $ABC$  punkty  $D$  i  $M$  są jego ustalonymi punktami; spodek wysokości z wierzchołka  $C$  i środek boku  $AC$ . Punkt  $X$  leży na prostej wyznaczonej przez te dwa charakterystyczne punkty trójkąta  $ABC$ . Jest to prosta, o którą chodzi w tezie zadania.

**874.** Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że dla pewnego  $n \geq 1$  cyfry (binarne)  $c_i$  o numerach  $i = n, \dots, 2n$  są wszystkie zerami. Niech

$$A_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-i} c_i.$$

Dostajemy dwustronne oszacowanie:

$$0 < \sqrt{7} - A_n < \sum_{i=2n+1}^{\infty} 2^{-i} c_i \leq 4^{-n}.$$

Mnożymy uzyskaną nierówność podwójną przez  $\sqrt{7} + A_n$ , biorąc ponownie pod uwagę, że  $A_n < \sqrt{7}$ :

$$0 < 7 - A_n^2 < 4^{-n} (\sqrt{7} + A_n) < 4^{-n} \cdot 2\sqrt{7}.$$

Po pomnożeniu jeszcze przez  $4^{n-1}$  otrzymujemy

$$0 < 4^{n-1} \cdot 7 - (2^{n-1} A_n)^2 < \frac{1}{2} \sqrt{7}.$$

Liczba w nawiasie jest całkowita, więc powyższa różnica musi być równa 1 (to jedyna liczba całkowita w przedziale  $(0, \frac{1}{2}\sqrt{7})$ ). Zatem

$$(2^{n-1} A_n)^2 = 4^{n-1} \cdot 7 - 1.$$

Ale kongruencja  $x^2 \equiv -1 \pmod{7}$  nie ma rozwiązań. Sprzeczność kończy dowód.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).



## Prosto z nieba: Jak powstają gwiazdy neutronowe i czarne dziury?

W procesie fuzji termojądrowej energia jest wydzielana głównie poprzez łączenie się jąder lżejszych pierwiastków (np. wodoru czy helu), które mają niższą energię wiązania na nukleon niż jądra żelaza. Natomiast dołączenie dowolnej liczby nukleonów do jądra żelaza wymaga dostarczenia dodatkowej energii.

Nazwa historycznie odnosi się do gwiazd *nowych*, w rzeczywistości ciasnych układów podwójnych, złożonych z białego karła i gwiazdy-towarzysza. Mechanizm wybuchu to eksplozja termojądrowa materii akreowanej z towarzysza na powierzchnię białego karła.

Zachowanie się krzywej zmian blasku jest główną metodą klasyfikacji supernowych: typ I nie zawiera wodoru w widmie, typ II zawiera wodór; podtypy: Ib – brak zjonizowanego helu, Ic – słabe linie helu, II-P/L – brak wąskich linii widmowych, II-P – osiąga „płaskowyż” w krzywej zmian blasku, II-L – liniowy w czasie spadek jasności, II-n – wąskie linie widmowe.

Ping Chen et al., „A 12.4-day periodicity in a close binary system after a supernova”, *Nature* (2024).  
T. Moore et al., „SN 2022jli: A Type Ic Supernova with Periodic Modulation of Its Light Curve and an Unusually Long Rise”, *The Astrophysical Journal Letters* (2023).

Gwiazdy o masie początkowej większej od około  $8 M_{\odot}$  osiągają kres swojego „życia” w bardzo spektakularny sposób. Ewolucja takich gwiazd polega na stopniowym przetwarzaniu wodoru w hel (i kolejne cięższe pierwiastki aż do żelaza), przy jednoczesnej emisji energii w postaci promieniowania (zob.  $\Delta_{18}^7$ ). Jądro żelaza jest najsilniej związanym jądrem atomowym – ma najwyższą energię wiązania na nukleon – co oznacza, że nie nadaje się do produkcji energii termojądrowej. Gwiazda z żelaznym jądrem przestaje więc efektywnie produkować promieniowanie, które utrzymuje ją w stanie równowagi względem grawitacji; gwiazda „nie ma innego wyjścia”, jak tylko zacząć się zapadać pod własnym ciężarem. Eksplozję będącą skutkiem takiego zapadnięcia się gwiazdy nazywamy *supernową*.

Astronomowie uważają, że po wybuchu tego typu supernowej coś pozostaje: bardzo gęste, zgniecione przez implozję jądro gwiazdy. W zależności od tego, jak masywna jest gwiazda, pozostałość ta jest albo gwiazdą neutronową – obiektem o dużo większej gęstości niż gęstość jąder atomowych (łyżeczka materiału gwiazdy neutronowej waży więcej niż cała obecna ludzka populacja!) – albo czarną dziurą: skrajnie relatywistycznym obszarem czasoprzestrzeni ugiętej w tak ekstremalny sposób, że „odcina” wewnątrz czarnej dziury od świata zewnętrznego (spod horyzontu czarnej dziury nie da się uciec, nawet poruszając się z prędkością światła). Tyle teoria. A co na to obserwacje? Jak do tej pory znaleziono wiele pośrednich dowodów sugerujących, że po wybuchu supernowej coś zostaje. Takim dowodem jest np. obecność gwiazdy neutronowej – pulsara PSR B0531+21 w Mgławicy Krab (M1 w katalogu Messiera), która powstała po wybuchu supernowej w 1054 roku. Jednak nigdy wcześniej nie zaobserwowano całego procesu „na żywo” od początku do końca. Przełom nastąpił w 2022 roku, gdy astronom-amator Berto Monard odkrył supernową SN 2022jli w pobliskiej galaktyce NGC 157 (odległość: 75 milionów lat świetlnych). Doniosłość tej obserwacji została zauważona przez profesjonalistów z grup Instytutu Weizmanna w Izraelu i Queen’s University w Belfaście.

Zazwyczaj po eksplozji jasność supernowych zmniejsza się wraz z upływem czasu w jeden z kilku charakterystycznych sposobów. Ma to związek ze składem chemicznym gwiazdy i obecnością pierwiastków radioaktywnych, które są źródłem energii rozświetlającej rozszerzającą się, gorącą chmurę materii. Zachowanie SN 2022jli było jednak bardzo osobliwe, ponieważ jej jasność zmieniała się regularnie z okresem około 12 dni. Taki efekt można wytłumaczyć obecnością więcej niż jednej gwiazdy w układzie. Masywne gwiazdy często znajdują się w układach podwójnych. Niezwykle jest to, że gwiazda-towarzysz przetrwała wybuch supernowej i pozostała w układzie podwójnym.

Dokładne obserwacje teleskopów Europejskiego Obserwatorium Południowego (NTT, New Technology Telescope, oraz VLT, Very Large Telescope) pozwoliły na odtworzenie przebiegu wydarzeń: gwiazda-towarzysz weszła w interakcję z materiałem wyrzuconym przez supernową, powiększając nieco swoją atmosferę. Następnie pozostałość po wybuchu oddziaływała regularnie z atmosferą towarzysza podczas jego ruchu po orbicie, akreując materię, rozgrzewając ją i wywołując przejściowe zmiany jasności. Z energetycznego punktu widzenia takie zmiany jasności mogą być wywołane jedynie przez gwiazdę neutronową lub czarną dziurę. Powstający właśnie teleskop ELT ESO (Extremely Large Telescope), o lustrze mierzącym 40 metrów, pozwoli na szczegółowe zbadanie tego niezwykle układu. Niestety musimy poczekać na jego uruchomienie do 2028 roku.

Michał BEJGER

Zakład Astrofizyki, Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



## Niebo w maju

Nadejście maja oznacza, że Słońce dotarło już prawie do szczytu swojej rocznej drogi po niebie, dni są długie, a noce krótkie. 20 dnia miesiąca Słońce przekroczy równoleżnik  $20^{\circ}$  deklinacji i od tego momentu do trzeciej dekady lipca jego położenie na niebie zmieni się tylko o  $3,5^{\circ}$ , z kulminacją 20 czerwca, w dniu przesilenia letniego.

W tym miesiącu zaczyna się sezon na dwa zjawiska widoczne tylko latem. Są to obłoki srebrzyste i łuk okołohoryzontalny. Obłoki srebrzyste to wysoko zawieszony w atmosferze chmury typu cirrus, oświetlone przez schowane płytko pod horyzontem Słońce. Natomiast łuk okołohoryzontalny (więcej o nim na angielskiej



stronie: [www.atoptics.co.uk/cha2.htm](http://www.atoptics.co.uk/cha2.htm)) to mała, lecz intensywna tęcza  $46^\circ$  na południe od Słońca, na niebie zasnutym cienkimi chmurami. Do tego zjawiska może dojść tylko wtedy, gdy wysokość Słońca nad horyzontem przekracza  $58^\circ$ , co na naszych szerokościach geograficznych ma miejsce tylko od końca maja do końca lipca.

Księżyc 1 maja przejdzie przez ostatnią kwadrę, a tydzień później – przez nów, stąd przez kilka pierwszych dni miesiąca można go dostrzec o świcie nisko nad południowo-wschodnią częścią nieboskłonu. Obserwacje Księżyca są trudne, ponieważ ekliptyka o tej porze doby wiosną tworzy mały kąt z horyzontem, a ponadto Srebrny Glob znajduje się kilka stopni pod nią.

Jedynym wartym odnotowania zjawiskiem związanym z Księżycem w tym czasie jest zakrycie świecącej z jasnością obserwowaną  $+4,5^m$  gwiazdy  $\epsilon$  Cap, 2 maja. Tego ranka Srebrny Glob pokaże tarczę oświetloną w 43% i około godziny 4:30, 1,5 godziny po swoim wschodzie, minie tę gwiazdę w małej odległości. Zakrycie da się dostrzec jedynie na bardzo małym obszarze naszego kraju – w Bieszczadach, na południowy wschód od Sanoka.

Jak co roku w dniach 5–6 maja maksimum aktywności osiągają meteory z roju  $\eta$ -Akwarydów. Są to szybkie i jasne meteory. Ich prędkość zderzenia z atmosferą wynosi  $66 \text{ km/s}$  i często pozostają po nich długo trwające smugi. W maksimum aktywności można spodziewać się około 50 zjawisk na godzinę. W tym roku maksimum jest przewidywane 5 maja, około godziny 23 naszego czasu. W Polsce 6 maja rano można spodziewać się mniej więcej 20% tej aktywności, ale i tak warto udać się na ich obserwacje. Radiant roju znajduje się nieco ponad  $1^\circ$  pod gwiazdą  $\zeta 1$  Aqr i około godziny 3:30 zajmuje pozycję na wysokości  $10^\circ$  nad wschodnim horyzontem. W obserwacjach nie przeszkodzi bliski już nowiu Księżyc.

Srebrny Glob na wieczorne niebo powróci już 8 dnia miesiąca. Nów nastąpi przed godziną 5:30, a 15 godzin później, 30 minut po zachodzie Słońca można próbować dostrzec bardzo cienki sierp naturalnego satelity Ziemi, zawieszony na wysokości  $5^\circ$ , blisko punktu NW horyzontu. Niezbędna jest do tego jednak bardzo dobra przejrzystość powietrza. Przyda się także lornetka lub teleskop z małym powiększeniem i dużym polem widzenia, ponieważ sierp Księżyca pokaże wtedy fazę  $0,5\%$ , i może nie udać się go odnaleźć bez pomocy przyrządów optycznych. Jest to jedna z lepszych, jeśli nie najlepsza okazja w tym roku na dostrzeżenie księżycowej tarczy w ekstremalnie małej fazie. W odległości  $4^\circ$  na godzinie 7 względem Księżyca znajdzie się planeta Jowisz, ale nie będzie raczej możliwe dostrzeżenie jej nawet przez teleskop.

W kolejnych nocach Srebrny Glob stanie się ozdobą wieczornego nieba, bardzo ładnie prezentując tzw. światło popielate, czyli swoją nocną stronę, oświetloną światłem słonecznym odbitym od Ziemi. Warto pamiętać, że fazy Księżyca widzianego z Ziemi i Ziemi widzianej z Księżyca uzupełniają się do pełni. Jeśli zatem na Ziemi Księżyc jest bliski nowiu, to na Księżycu Ziemia jest bliska pełni i odwrotnie. Dodatkowo atmosfera naszej planety odbija w przestrzeń kosmiczną dużo więcej padającego nań promieniowania niż pozbawiona atmosfery powierzchnia Księżyca. Ziemia ma też ponad 3-krotnie większą średnicę.

To wszystko sprawia, że na księżycowym niebie świeci ona znacznie jaśniej niż Księżyc na naszym. Stąd nie należy się dziwić, że jeśli Srebrny Glob jest w fazie sierpa, to jego nocna strona jest dobrze widoczna gołym okiem.

Dostrzeżenie Księżyca nie sprawi już kłopotu 9 maja. Godzinę po zachodzie Słońca zajmie on pozycję na wysokości  $9^\circ$  i w takiej samej odległości od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka, widocznej na godzinie 7 względem niego. Sierp Księżyca urośnie do tego czasu do 4%. Dobę później faza Srebrnego Globu zwiększy się do prawie 9% i dotrze on do gwiazdy El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy Byka. Oba ciała niebieskie przedzieli dystans  $2,5^\circ$ .

11 i 12 maja Srebrny Glob odwiedzi gwiazdozbiór Bliźniąt. Najpierw jego tarcza w fazie 16% pokaże się  $3^\circ$  od Meksuty, gwiazdy 3. wielkości, oznaczanej na mapach nieba grecką literą  $\epsilon$ . Następnie Księżyc zwiększy fazę do 24%, docierając na odległość  $3^\circ$  od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt. 13 maja księżycowa tarcza przejdzie przez środek gwiazdozbioru Raka, zwiększając fazę do 34% i świecąc  $4^\circ$  na północ od M44, widocznej na ciemnym niebie gołym okiem gromady otwartej gwiazd. 15 maja zaś Księżyc osiągnie I kwadrę, świecąc na linii łączącej Regulusa, najjaśniejszą gwiazdę Lwa, z gwiazdą  $\eta$  Leonis,  $3^\circ$  na północ od pierwszej z wymienionych gwiazd.

Między I kwadrą a pełnią warto odnotować spotkanie Księżyca ze Spiką, najjaśniejszą gwiazdą Panny, 20 i 21 maja. Do tego czasu jego faza przekroczy 90% i najpierw jego tarcza pokaże się  $6^\circ$  na północny zachód, drugiej zaś nocy –  $6^\circ$  na południowy wschód od Spiki.

Pełnia Księżyca przypada 23 maja po południu naszego czasu, stąd zarówno w nocy z 22 na 23, jak i z 23 na 24 maja jego tarcza pokaże praktycznie fazę 100%. Drugiej z wymienionych nocy Srebrny Glob wjeździe w towarzystwie Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. Tuż po wschodzie obu ciał niebieskich przed godziną 23 dystans między nimi przekroczy  $3^\circ$ , by do rana zmniejszyć się do  $1,5^\circ$ . Srebrny Glob 26 maja rano spotka się z jaśniejszą od  $3^m$  gwiazdą Strzelca, Kaus Meridianalis, oznaczanej na mapach nieba grecką literą  $\delta$ . Około godziny 2 oba ciała niebieskie przedzieli dystans  $30'$ .  $5^\circ$  pod tą parą znajdzie się jaśniejsza o  $1^m$  gwiazda Kaus Australis, czyli  $\epsilon$  Sgr.

30 maja Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę, a ostatniego poranka miesiąca spotka się z powracającą na niebo planetą Saturn, do której zbliży się na  $4^\circ$ . Szóstej planety od Słońca można szukać w trzeciej dekadzie maja nisko nad wschodnią częścią nieboskłonu, świecącej z jasnością  $+1,2^m$ . W tym i przyszłym sezonie obserwacyjnym warto zwrócić uwagę na tę planetę o tyle, że w marcu przyszłego roku (pechowo, bo akurat wtedy znajdzie się ona w koniunkcji ze Słońcem) Ziemia przejdzie przez płaszczyznę pierścieni Saturna, a zatem znikną one w małych teleskopach i Saturn zacznie przypominać Jowisza. Tak samo jak na Jowiszu, na tarczy przypominającej Jowisza. Tak samo jak na Jowiszu, na tarczy Saturna również będą pojawiać się cienie jego wszystkich księżyców, a także sami ich właściciele. W maju i czerwcu stosunek małej do wielkiej półosi elipsy pierścieni osiągnie tegoroczne minimum 0,03. Jesienią urośnie on do 0,09, ale potem znów zacznie się zmniejszać.

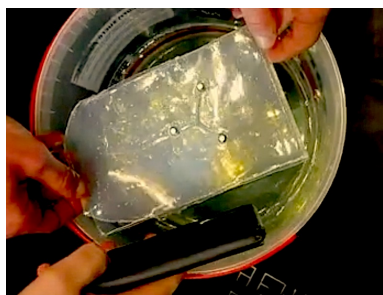
Ariel MAJCHER



## Komputer na wodę i inne rodzaje broni

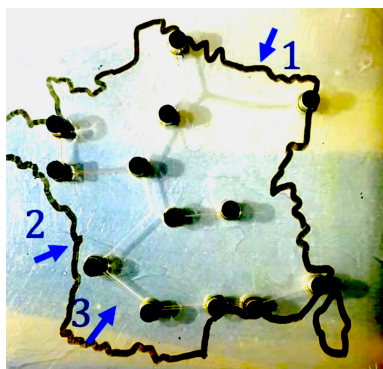
*W pewnym kraju znajduje się  $N$  miast. Należy połączyć je liniami kolejowymi tak, by łączna długość linii kolejowych była możliwie najmniejsza. Miasta mogą być węzłami kolejowymi, w których zbiegają się linie, można także budować węzły kolejowe poza miastami.*

Przedstawione zadanie jest jednym z możliwych sformułowań tzw. problemu drzewa Steinera. Jest to problem NP-trudny. Co ciekawe, lepiej i szybciej niż na komputerze można go rozwiązywać, przeprowadzając eksperymenty fizyczne.



Na czym polega odpowiedni eksperyment, wie każdy, kto kiedykolwiek puszczał bańki mydlane. Ze względu na istnienie napięcia powierzchniowego warstewka wody z mydłem rozpięta na zakrzywionej pętli przybiera kształt minimalizujący powierzchnię. Do rozwiązania problemu drzewa Steinera wystarczy więc wziąć pleksiglasową płytę, wbić w odpowiednie miejsca kolki i całość zanurzyć w wiadrze z mydlinami. Wyjmując, dobrze jest trochę potrząsać układem, a fizyka sama już ustali połączenia kolców błoną mydlaną o najmniejszej powierzchni, a więc, jeśli patrzeć z kierunku prostopadłego do płyty, połączy wybrane punkty liniami o minimalnej sumie długości krawędzi.

Takie właśnie doświadczenie przedstawiła drużyna z École Polytechnique, reprezentująca Francję, na odbywających się w kwietniu w Zurychu zawodach 16. Międzynarodowego Turnieju Fizyków. Dzięki odpowiedniemu doborowi składu chemicznego substancji zawodnicy byli w stanie tworzyć elastyczne i trwałe błonki. Popisowym elementem rozwiązania problemu drzewa Steinera dla  $N = 13$  było zaproponowanie najkrótszej sieci kolejowej łączącej trzynaście największych miast Francji. Algorytmowi komputerowemu znalezienie rozwiązania zajęło około trzech minut. Włożenie odpowiedniej płytki do wiadra z wodą i chwila potrząsania – zaledwie pół minuty.



Jeżeli umieścić kolki między dwiema pleksiglasowymi płytami, których odległość nie jest stała, gdyż są względem siebie nachylone albo ich powierzchnia nie jest płaska, można rozwiązywać inne problemy optymalizacyjne. Dla płyt nachylonych szerokość błonki zmienia się liniowo w zależności od położenia – dokładnie tak samo jak energia stałego i jednorodnego pola grawitacyjnego. W takich warunkach dwa kolki będą połączone krzywą łańcuchową, czyli kształtem, jaki przybiera, zwisając, lina zaczepiona na końcach.

Opisane wyżej doświadczenia są dość typowe dla rozwiązań przedstawianych na Międzynarodowym Turnieju Fizyków. Ogłaszane z wyprzedzeniem zadania mają charakter półotwarty – to do rozwiązującego należy określić, co i jak należy zbadać, a doświadczenia mieszają zazwyczaj elementy fizyki „kuchennej” i zaawansowanych badań naukowych. Rozwiązania zadań są publicznie dyskutowane na scenie. Rolą oponenta (z innej drużyny) jest wskazanie możliwych ulepszeń rozwiązania podczas dyskusji koordynowanej przez moderatora (z jeszcze innej drużyny). Za poziom wykonania każdej z ról międzynarodowe jury przyznaje punkty, które z odpowiednimi wagami liczą się w ogólnej klasyfikacji Turnieju.

W tegorocznej edycji Turnieju brały też udział drużyny z Polski, z Uniwersytetu Warszawskiego i z Uniwersytetu Jagiellońskiego, które zajęły, odpowiednio, piąte i dziewiętnaste miejsce. Każda uczelnia może zgłosić swoją drużynę do rozgrywek, a kto weźmie udział w zawodach międzynarodowych, ustalone jest w trakcie eliminacji krajowych, które organizowane są przez przedstawiciela krajowego. W Polsce jest nim autor niniejszego tekstu, który gorąco zaprasza do udziału. Naprawdę warto!

*Krzysztof TURZYŃSKI*

Zdjęcia pochodzą z prezentacji drużyny École Polytechnique przedstawionej podczas finału 16. Międzynarodowego Turnieju Fizyków. Nagranie finałowej potyczki dostępne jest w serwisie YouTube pod adresem <https://www.youtube.com/live/v13kmfSo-ws?si=91NHSgAv9cX7PjK4>



# Odmnażanie wielomianów

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Rozważmy wielomiany

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \quad B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

W powyższych sumach tylko skończenie wiele współczynników jest niezerowych – indeks największego z nich to stopień wielomianu. Takie przedstawienie ma swój plus. Po pomnożeniu tych wielomianów otrzymamy wielomian

$$C(x) := A(x)B(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots,$$

w którym

$$(*) \quad c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \dots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0.$$

Jeśli dla przykładu  $k > \deg A$ , to wcale się nie musimy przejmować tym, że w wielomianie  $A(x)$  „nie ma”  $a_k$ . Ono tam jest i jest równe 0.

Mając dane wielomiany  $A$  i  $B$ , można łatwo obliczyć wielomian  $C$ . Rzeczą trudniejszą jest odtworzenie wielomianów  $A$  i  $B$  na podstawie wielomianu  $C$ . Pokażę metodę, która jest dobra dla wielomianów względnie niskich stopni, przy dodatkowym założeniu, że wszystkie rozważane wielomiany mają współczynniki całkowite. Wielomiany, które da się rozłożyć na iloczyn wielomianów niższych stopni o współczynnikach całkowitych, nazywamy *rozkładalnymi nad  $\mathbb{Z}$* .

Przykładowo niech  $C(x) = 6 + x + 6x^2 + x^3 + 2x^4$ . Ponieważ  $\deg C = 4$ , wielomian  $C$  może być iloczynem wielomianów stopnia 1 i 3 albo 2 i 2. W pierwszym przypadku wielomian  $C$  musiałby mieć pierwiastek wymierny. Na mocy twierdzenia o pierwiastkach wymiernych może to być jedna z liczb:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3,$

$\pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ . Bezpośrednio sprawdzamy, że żadna z nich nie jest pierwiastkiem wielomianu  $C$ . Pozostaje więc  $\deg A = \deg B = 2$ . W tym przypadku, na mocy (\*), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_0b_0 &= 6, & a_0b_1 + a_1b_0 &= 1, & a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 6, \\ a_1b_2 + a_2b_1 &= 1, & a_2b_2 &= 2. \end{aligned}$$

Para  $(a_2, b_2)$  jest jedną z par:  $(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$ . Ze względu na możliwość zamiany miejscami wielomianów  $A$  i  $B$  (mają równe stopnie) oraz mnożenia ich obu przez  $-1$  możemy przyjąć bez utraty ogólności, że  $a_2 = 1$  i  $b_2 = 2$ . W dalszym ciągu możemy rozważyć wszystkie osiem możliwych par  $(a_0, b_0)$  o iloczynie 6, aż uzyskamy rozwiązanie  $A(x) = x^2 + x + 2, B(x) = 2x^2 - x + 3$ .

*Uwaga.* Gdyby każda z możliwości w powyższym rozwiązaniu prowadziła do sprzeczności, oznaczałoby to, że wielomian  $C$  jest nierozkładalny nad  $\mathbb{Z}$ .

Trudność tego zadania rośnie bardzo szybko wraz ze stopniem wielomianu  $C$ . Na koniec pokażę twierdzenie, które pozwala wykazać nierozkładalność w przypadku niektórych wielomianów, niezależnie od stopnia.

**Kryterium Eisensteina.** Niech  $C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$  będzie wielomianem stopnia  $k$  o współczynnikach całkowitych. Jeśli istnieje liczba pierwsza  $p$ , dla której:

$$p \nmid c_k, \quad p \mid c_0, c_1, \dots, c_{k-1}, \quad p^2 \nmid c_0,$$

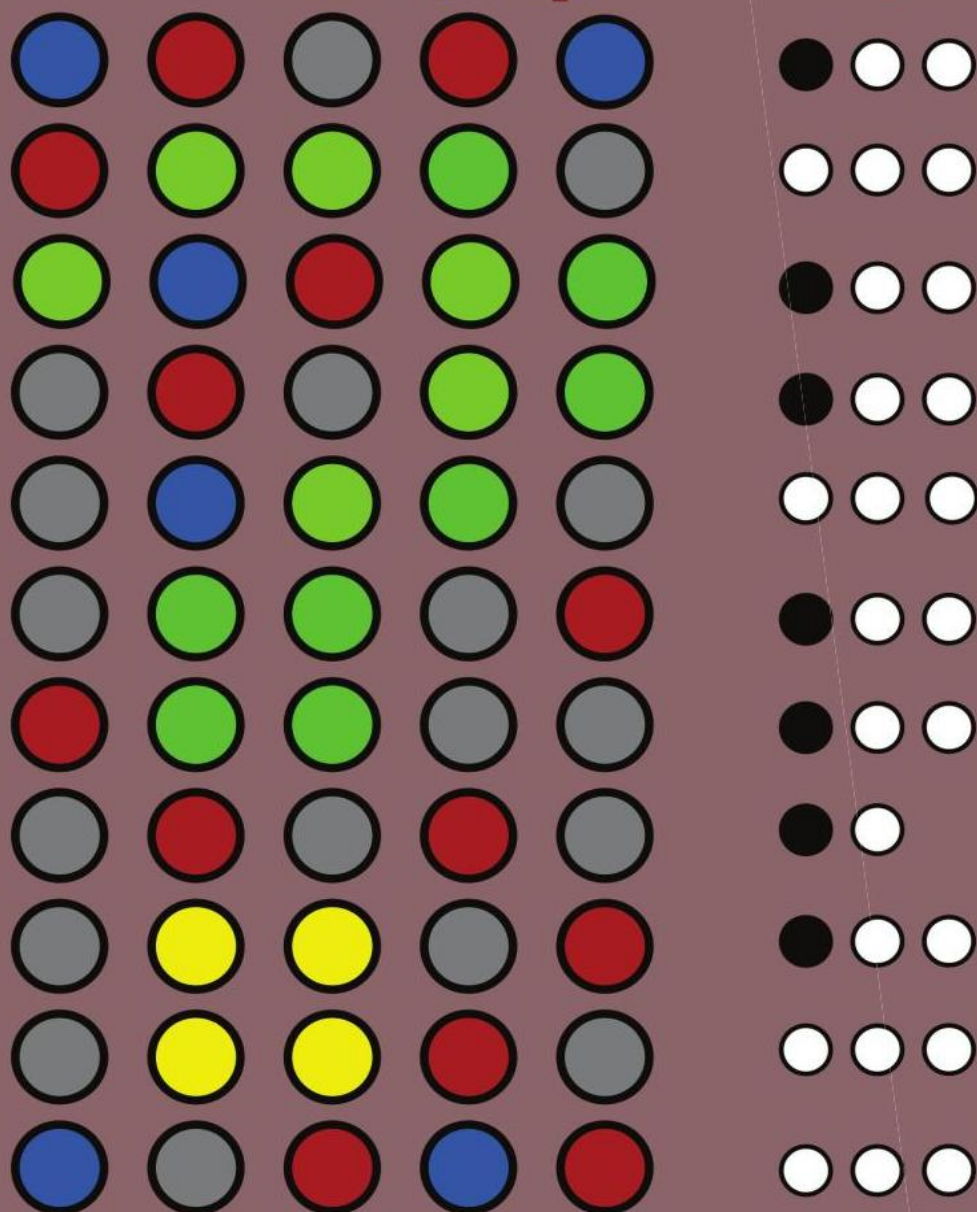
to wielomian  $C$  jest nierozkładalny nad  $\mathbb{Z}$ .

*Dowód.* Przypuśćmy, że  $C$  jest rozkładalny nad  $\mathbb{Z}$  i  $C(x) = A(x)B(x)$  jest jego rozkładem. Ponieważ  $c_0 = a_0b_0$ , przy czym  $p \mid c_0$ , ale  $p^2 \nmid c_0$ , więc wnioskujemy, że dokładnie jedna z liczb:  $a_0, b_0$  dzieli się przez  $p$ . Niech to będzie  $a_0$ . Dla  $j < k$ , jeśli  $p \mid a_0, a_1, \dots, a_{j-1}$ , to na mocy wzoru (\*) na  $c_j$ , wobec  $p \nmid b_0$ , otrzymujemy  $p \mid a_j$ . W ten sposób dowodzimy indukcyjnie, że  $p \mid a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ . Dodatkowo  $p \mid a_k$ , gdyż  $a_k = 0$ , bo  $k > \deg A$ . Ale wtedy  $p \mid c_k$  na mocy wzoru (\*) na  $c_k$  – sprzeczność.

## Zadania

- Rozłożyć nad  $\mathbb{Z}$  poniższe wielomiany lub wykazać, że to niemożliwe:
  - $1 - 2x + 2x^2 - x^4 + x^5$ ,
  - $1 - 2x^2 - x^3 + x^4$ .
- Dla liczb naturalnych  $n \geq m > 0$  rozłożyć wielomian
 
$$1 + 2x + \dots + mx^{m-1} + mx^m + \dots + mx^{n-1} + \dots + 2x^{n+m-3} + x^{n+m-2}.$$
- Rozstrzygnąć, czy wielomian  $721 + 7x^{21} + 21x^7 + x^{721}$  jest rozkładalny nad  $\mathbb{Z}$ .
- Niech  $f(N)$  oznacza liczbę takich  $a \in \{1, 2, \dots, N\}$ , że dla każdego całkowitego dodatniego  $n$  wielomian  $x^n + a$  jest nierozkładalny nad  $\mathbb{Z}$ . Dowieść, że  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(N)}{N} = 1$ .
- Liczba  $p$  jest pierwsza. Dowieść, że wielomian  $\Phi_p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$  jest nierozkładalny nad  $\mathbb{Z}$ .

# 67 SZKOŁA MATEMATYKI POGLĄDOWEJ NA PO CZĄTKU BYŁO PYTANIE



SIEDLCE, 23-26 SIERP NIA 2024 r.

[www.smp.uws.edu.pl](http://www.smp.uws.edu.pl)

