

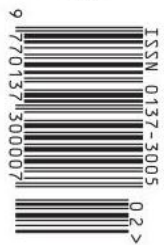
$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$   $\pi=3,141592\dots$

NR 2 (597) 2024  
CENA 8 ZŁ VAT 8%  
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

Babo, babo,  
udaj się!  
str. 4

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA






Nakład: 2800 egz.

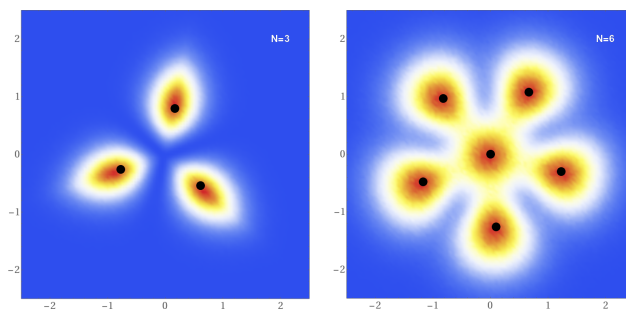




## SPIS TREŚCI NUMERU 2 (597) 2024

Kto da więcej? <i>Paweł Rafał Bieliński</i>	str. 1
Binarne wyszukiwanie po wyniku <i>Ewa Gołaszewska, Marcin Wierziński</i>	str. 2
 Zadania	str. 3
Babo, babo, udaj się! <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 4
O czym lepiej zapomnieć? <i>Wojciech Przybyszewski</i>	str. 6
Półszachownica <i>Oskar Skibski</i>	str. 10
Astronomia BC <i>Krzysztof Petelczyc</i>	str. 12
 Zakręty ewolucji – bioróżnorodność <i>Magdalena Fikus</i>	str. 16
Klub 44	str. 17
Aktualności Jak mądrze wydawać miliony	str. 22
Niebo w lutym	str. 23
Prosto z nieba: Setki bezgwiazdnych planet	str. 24
 Wielomiany podziału koła – część 2 <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze:  
**Kryształy Pauliego, czyli o tym,  
że cząstki kwantowe lubią samotność.**



**Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** założony został w 1974 roku przez Marka Kordosa. Wydawany jest przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej; doc. dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel; dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący; dr Wojciech Czerwiński; dr hab. Sławomir Dinew, prof. UJ; dr Tomasz Greczyło, prof. UW; dr Adam Gregosiewicz; prof. dr hab. Agnieszka Janiuk; dr Joanna Jaszuka; dr hab. Artur Jeż, prof. UW; dr hab. Bartosz Klin; dr Piotr Kołaczek-Szymański; prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący; dr Adam Michalec; prof. dr hab. Damian Niwiński; dr hab. Krzysztof Pawłowski; dr Milena Ratajczak; dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN; prof. dr hab. Paweł Strzelecki; prof. dr hab. Andrzej Wysłomółek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Michał Bejger, Paweł Bieliński, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@minuw.edu.pl](mailto:delta@minuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl) (tylko instytucje)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
Na stronie Empiku *Delta* można zamówić co miesiąc:  
[www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p](http://www.empik.com/delta,p1235643855,prasa-p)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;  
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

\* Nauczyciel, Warszawa

Czytelnik musi zostać ostrzeżony, że w niniejszym artykule błyskotliwe chwytły prowadzić będą do gorszych wyników. Znacznie lepiej sprawdzą się brutalne, brudne metody. Kto liczy na zwycięstwo sprytu i dobrego stylu, niech lepiej zmieni lekturę.

**Zadanie.** Danych jest 7 liczb: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Zostały one w nieznanym sposobie podzielone na 3 grupy. Dla wybranej przez siebie liczby naturalnej  $k$  udowodnij, że iloczyn liczb w pewnej grupie musi wynieść co najmniej  $k$ . Im większe  $k$ , tym lepiej.

O zasadzie szufladkowej pisaliśmy np. w  $\Delta_{04}^8$  oraz  $\Delta_{18}^9$ .

Dziękuję Szymonowi Gramatnikowskiemu za zainspirowanie przedstawionego obok rozumowania.

**Sposób 1,**  $k = 105$ . Wykorzystując zasadę szufladkową, można przekonać się, że w którejś z trzech grup muszą znaleźć się co najmniej 3 liczby. Istotnie, gdyby w każdej z trzech grup było nie więcej niż po dwie liczby, to łącznie byłoby ich nie więcej niż  $3 \cdot 2 = 6 < 7$ . Iloczyn liczb w takiej grupie wynosi zaś co najmniej  $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ .

*Uwaga.* Niekiedy oszacowanie tego rodzaju można poprawić, ignorując najmniejsze liczby, żeby skupić uwagę na większych. W tym przypadku, odrzucając liczby 3, 5, 7, pozostajemy z czterema: 9, 11, 13, 15. Są to 4 liczby w trzech grupach, więc któraś z grup musi zawierać przynajmniej dwie z nich. Jej iloczyn wynosi wówczas co najmniej  $9 \cdot 11 = 99$ . Zgodnie z zapowiedzią sprytnie wcale nam się nie opłacił.

**Sposób 2,**  $k = 127$ . Aby poprawić poprzedni wynik, spróbujemy wykorzystać sztuczkę podobną do zasady szufladkowej, ale bezpośrednio do iloczynu danych liczb. Otóż gdyby iloczyn liczb w każdej z grup wynosił mniej niż 127, to iloczyn wszystkich liczb we wszystkich grupach byłby nie większy od  $126 \cdot 126 \cdot 126 = 2\,000\,376$ . Jest to niemożliwe, bo iloczyn danych liczb jest nam znany i wynosi  $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 15 = 2\,027\,025$ . Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy.

*Uwaga.* Ponieważ  $127 \cdot 127 \cdot 127 = 2\,048\,383$ , więc technika ta nie zadziała dla żadnego większego  $k$ . Można natomiast nieco poprawić otrzymany wynik, zauważając, że iloczyn liczb w każdej grupie musi być dzielnikiem liczby  $2\,027\,025$ . Wyklucza to wszystkie liczby od 127 do 134 włącznie i pozwala uzyskać  $k = 135$ .

**Sposób 3,**  $k = 143$ . Przypuśćmy, że iloczyn w każdej z grup jest mniejszy od 143. Analizując wszelkie możliwe sytuacje, doprowadzimy do sprzeczności. Grupę, w której skład wchodzi liczba 15, nazwiemy grupą czerwoną. W grupie tej może znajdować się jeszcze co najwyżej jedna liczba, bo w przeciwnym razie jej iloczyn wyniosłby co najmniej  $15 \cdot 3 \cdot 5 = 225$ . Liczbą tą może być co najwyżej 9, bo już  $15 \cdot 11 = 165$ . Możemy bez straty ogólności założyć, że liczba 9 jest w czerwonej grupie (wyjaśnienie znajduje się na marginesie). Poza czerwoną grupą znajdują się liczby 3, 5, 7, 11, 13. Grupę, w której występuje 13, nazwiemy niebieską. Oprócz liczby 13 może być w niej jeszcze co najwyżej jedna liczba, bo już  $13 \cdot 3 \cdot 5 = 195$ . Liczba ta może być równa co najwyżej 7, bo  $13 \cdot 11 = 143$ . Podobnie jak ostatnio, możemy założyć, że liczba 7 jest w grupie niebieskiej. Oznacza to, że w pozostałej grupie, którą nazwiemy żółtą, znajdują się liczby 3, 5, 11, których iloczyn wynosi 165! Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi tezy.

W ogólnym przypadku, jeśli liczba 9 nie jest w czerwonej grupie, to zamieńmy ją miejscami z liczbą mniejszą niż 15 z czerwonej grupy (jeżeli taka liczba nie istnieje, to po prostu dołączmy 9 do tej grupy). W efekcie otrzymamy nowy podział na grupy, w którym liczba 9 już jest w czerwonej grupie, a ponadto jeśli iloczyn 142 nie był przekroczony wcześniej, to nadal nie będzie.

*Uwaga.* Osiągniętego tu oszacowania nie można już poprawić. Istotnie, jeśli w pierwszej grupie umieścimy liczby 3, 5, 7, w drugiej – 9 i 15, a w trzeciej 11 i 13, to otrzymujemy iloczyny 105, 135, 143, z których żaden nie jest większy od 143.

Powyższe przykłady obrazują, że im głębiej wejdziesz się w strukturę problemu, im więcej jego szczególnych cech się wykorzystasz, tym silniejsze wnioski można wyciągnąć. Tym niemniej, można docenić Sposoby 1 i 2, bo one również dają niezłe, być może zadowalające oszacowania, i to przy znacznie mniejszym nakładzie

pracy. Tymczasem Sposób 3 wymagał bardzo skrupulatnej analizy, która byłaby znacznie trudniejsza do przeprowadzenia, gdyby danych liczb było nie 7, ale choćby 10.

Czytelnikowi pozostawiamy następujące wyzwanie.

**Problem.** Danych jest 9 liczb: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Zostały one w nieznanym sposobie dobrane w 4 grupy. Dla wybranej przez siebie liczby naturalnej  $k$  udowodnij, że iloczyn liczb w pewnej grupie musi wynieść co najmniej  $k$ . Im większe  $k$ , tym lepiej.

# Binarne wyszukiwanie po wyniku

Ewa GOŁASZEWSKA\*, Marcin WIERZBIŃSKI\*\*

\*Uczennica, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

\*\*Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wyszukiwanie binarne to algorytm służący do odnalezienia określonego elementu w posortowanej tablicy. Jego zaletą jest to, że umożliwia znalezienie elementu w znacznie krótszym czasie niż w przypadku tradycyjnego przeszukiwania tablicy, polegającego na „przechodzeniu” po niej element po elemencie i porównywaniu napotykanym elementom z szukanym.

Załóżmy, że dana jest posortowana tablica  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ ,  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1}$  oraz pewna wartość  $x$ . Celem algorytmu wyszukiwania binarnego jest znalezienie pozycji elementu o wartości  $x$  albo stwierdzenie, że ten element nie pojawia się w tablicy (wówczas algorytm zwraca  $-1$ ).

Przykładem może być tablica liczb  $T = [3, 4, 4, 10, 11, 17, 18, 19, 21]$ , dla której chcemy sprawdzić, czy zawiera element  $x = 17$ . Algorytm wyszukiwania binarnego działa w następujący sposób. Rozpoczynamy od wybrania elementu w środku tablicy – wśród wartości  $[a_0, a_1, \dots, a_8]$  tym elementem jest  $a_4 = 11$  (pozycje w tablicy indeksujemy od 0). Następnie porównujemy ten element z wartością 17. Ponieważ 11 jest mniejsze od 17, to szukany element na pewno nie znajduje się w lewej połowie tablicy – jeśli jest w tablicy, to będzie w jej prawej części. W kolejnym kroku ograniczamy się więc tylko do prawej połowy  $[a_5, a_6, a_7, a_8]$  – jej środkowym elementem jest  $a_6 = 18$  (równie dobrze mogliśmy wziąć  $a_7$ , ponieważ tablica, do której się ograniczyliśmy, ma parzystą liczbę elementów). Porównując go z 17, stwierdzamy, że musimy szukać w lewej części prawej połowy. Wówczas zostaje nam tylko element  $a_5 = 17$ , czyli nasz  $x$  jest w tablicy na pozycji 5.

Zauważmy, że podobne podejście często stosujemy intuicyjnie, na przykład przy wyszukiwaniu słowa w słowniku. Mając do znalezienia słowo *Delta*, nie zaczynamy przeglądać słownika od pierwszej strony wyraz po wyrazie, tylko otwieramy go we w miarę losowym miejscu, patrzymy, jakie wyrazy się tam znajdują, a z tego już wiemy, czy *Delta* jest na wcześniejszych, czy na dalszych stronach.

Algorytm wyszukiwania binarnego można zapisać w postaci pseudokodu następująco:

---

## Algorytm. Wyszukiwanie binarne

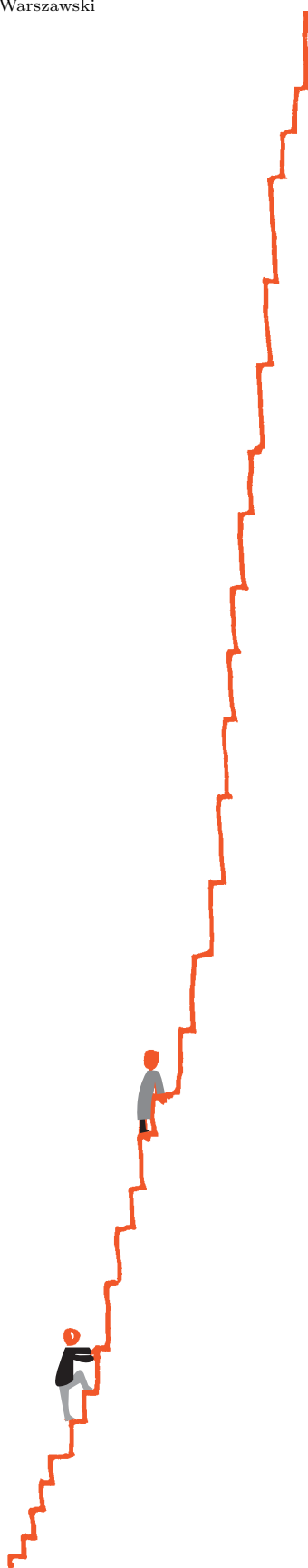
---

```
function BINARYSEARCH( $T, x, n$ )
  lewy  $\leftarrow$  0
  prawy  $\leftarrow$   $n - 1$ 
  while lewy  $\leq$  prawy do
    środek  $\leftarrow$   $\lfloor \frac{\text{lewy} + \text{prawy}}{2} \rfloor$ 
    środkowaWartość  $\leftarrow$   $T[\text{środek}]$ 
    if środkowaWartość =  $x$  then
      return środek                                     ▷ znaleźliśmy  $x$ 
    else if środkowaWartość <  $x$  then
      lewy  $\leftarrow$  środek + 1                           ▷ sprawdź w prawej połowie
    else
      prawy  $\leftarrow$  środek - 1                           ▷ sprawdź w lewej połowie
  return -1                                             ▷ nie udało się znaleźć.
```

---

Tak jak zauważyliśmy w przykładzie, porównując jakiś element  $a_i$  z szukaną wartością  $x$ , dowiadujemy się, czy szukany element jest na lewo, czy na prawo od  $a_i$ . Pozwala to w każdym kroku wyeliminować połowę elementów tablicy, a więc otrzymujemy złożoność czasową  $O(\log n)$ . Tradycyjne przeszukiwanie tablicy, przeglądające ją element po elemencie, w najgorszym przypadku może wymagać aż  $O(n)$  porównań.

Intuicyjnie jest jasne, że wyszukiwanie binarne działa poprawnie. Formalne udowodnienie poprawności algorytmu wyszukiwania binarnego wymaga jednak



odwołania się do pojęć takich jak „niezmiennik pętli”, ale w tym krótkim artykule nie będziemy o nich mówić.

Przykładem wykorzystania wyszukiwania binarnego jest zadanie „Wieża”, które pochodzi z Obozu Naukowego PROSERWY 2010, a jego autorem jest Jacek Tomasiewicz.

**Zadanie „Wieża”:** W Bajtocji wybudowano wysoką wieżę. Wejście na wieżę składa się z  $m$  schodków, a każdy schodek ma pewną wysokość. Bajtocką wieżę chce odwiedzić  $n$  mieszkańców. To, czy dana osoba jest w stanie pokonać kolejne schodki, zależy od jej wzrostu. Aby mieszkaniec Bajtocji mógł wejść na pewien schodek, musi być wyższy od schodka. Jeśli pewien schodek jest nie do przejścia przez mieszkańca, to zatrzymuje się on w danym miejscu na wieży – wyżej nie będzie mógł wejść. Znając wysokości kolejnych schodków i osób zwiedzających wieżę, chcielibyśmy wiedzieć, w którym miejscu zatrzyma się każdy mieszkaniec Bajtocji.

Zachęcamy Czytelnika do próby samodzielnego rozwiązania powyższego zadania przed przeczytaniem naszego rozwiązania.

**Rozwiązanie:** Aby rozwiązać zadanie, dla każdego schodka  $s$  najpierw obliczymy wysokość najwyższego schodka leżącego na drodze od spodu wieży do samego  $s$  (np. dla kolejnych wysokości schodków 1, 5, 3, 6, 2, 1, 7 stworzymy ciąg 1, 5, 5, 6, 6, 6, 7). W tym celu przechodzimy tablicę od pierwszego do ostatniego elementu, co krok aktualizując największą znaną dotychczas liczbę poprzez porównanie jej z wysokością aktualnego schodka. Otrzymujemy w ten sposób w czasie  $O(m)$  niemalejący ciąg. Zauważmy, że mieszkaniec o wzroście  $h$  wejdzie na schodek  $s$  tylko wtedy, gdy najwyższy schodek na drodze od spodu wieży do  $s$  jest niższy niż  $h$ . W związku z tym dla każdego mieszkańca możemy w czasie  $O(\log m)$  znaleźć miejsce, w którym się on zatrzyma – będzie to pierwszy schodek nie niższy od jego wzrostu. Całe rozwiązanie działa więc w czasie  $O(m + n \log m)$ .



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1771.** W liczbie naturalnej  $A$  przestawiono cyfry i otrzymano liczbę  $B$ . Wiadomo, że

$$A - B = \underbrace{11 \dots 1}_N$$

dla pewnej liczby całkowitej dodatniej  $N$ . Znaleźć możliwie najmniejszą wartość  $N$ , dla której takie liczby  $A, B$  istnieją.

Rozwiązanie na str. 5

**M 1772.** Na płaszczyźnie dany jest zbiór punktów, z których żadne trzy nie leżą na tej samej prostej. Narysowano pewną liczbę odcinków o końcach w tych punktach. Wiadomo, że każda prosta, która nie przechodzi przez dane punkty, przecina parzystą liczbę narysowanych odcinków. Udowodnić, że każdy punkt jest końcem parzystej liczby odcinków.

Rozwiązanie na str. 6

**M 1773.** Dany jest ostrosłup  $SA_1A_2 \dots A_n$ , którego podstawą jest wypukły wielokąt  $A_1A_2 \dots A_n$ . Dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$  w płaszczyźnie podstawy ostrosłupa konstruujemy trójkąt  $X_iA_iA_{i+1}$  przystający do trójkąta  $SA_iA_{i+1}$  i leżący po tej samej stronie prostej  $A_iA_{i+1}$  co podstawa (przyjmujemy  $A_{n+1} = A_1$ ). Udowodnić, że skonstruowane trójkąty pokrywają w całości podstawę.

Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Andrzej MAJHOFER

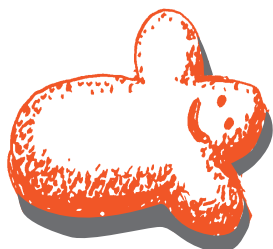
**F 1089.** Jak zmieni się prędkość propagacji fal na powierzchni jeziora, jeśli wodę zastąpimy rtęcią, a jak, gdyby przyspieszenie ziemskie  $g$  wzrosło czterokrotnie? Gęstość rtęci:  $\rho_{Hg} \approx 13,55 \text{ g/cm}^3$ .

Rozwiązanie na str. 9

**F 1090.** Napięcie powierzchniowe roztworu wody z mydłem graniczącego z powietrzem wynosi:  $\sigma = 3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ . Roztwór posłużył do „produkcji” baniek mydlanych. Jaki warunek musi spełniać temperatura powietrza  $T_b$  w bańce o promieniu  $r = 2 \text{ cm}$ , żeby zaczęła unosić się w powietrzu o temperaturze  $T = 300 \text{ K}$ ? Ciśnienie atmosferyczne  $p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2$ .

Rozwiązanie na str. 7

BABY  
BABY  
UDAJ SIĘ



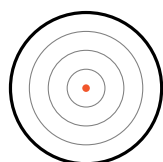
# Babo, babo, udaj się!

Michał MIŚKIEWICZ\*

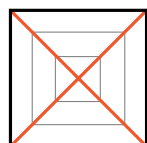
\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

† Ścisłe rzecz biorąc, używa ona skróconej wersji „babo babo zjem!”, ale ma dopiero półtora roku, więc pewnie jeszcze się nauczy.

Poniżej foremki w różnych kształtach – na szaro zaznaczone są poziomicę, a kolorem krawędzie powstałych kopczyków.



Rys. 1. Koło



Rys. 2. Kwadrat



Rys. 3. Zaokrąglony kwadrat



Rys. 4. Serce

Jeśli  $\alpha$  jest górnym ograniczeniem na kąt spadku (zależnym od parametrów użytego piasku), to warunek na  $d$  przyjmuje postać ogólnego warunku Lipschitza  $|d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  ze stałą  $L = \tan \alpha$ . Dla uproszczenia rozważań przyjęliśmy tu, że  $L = 1$ .



... bo jak nie, to cię zjem! Od kiedy moja córeczka zaczęła odwiedzać place zabaw, a w szczególności piaskownice, regularnie słyszę to dziecinne zaklęcie.† Podczas jednej ze wspólnych zabaw zdarzyło mi się bezwiednie wsypywać do odwróconych foremek suchy piasek. Ten materiał słabo nadaje się do tworzenia większych konstrukcji. Chociaż dokładałem go do oporu z każdej strony, piasek bezlitośnie przesypywał się przez krawędzie foremki i pozostawiał jedynie niewysoki kopczyk.

Zauważyłem jednak, że kształt kopczyka zależy w nieoczywisty sposób od kształtu foremki (przykłady widać na rysunkach 1–4). W okrągłej foremce naturalnie tworzył się piaskowy stożek, charakteryzujący się gładką powierzchnią z każdej strony oraz czubkiem w najwyższym punkcie. Foremka kwadratowa pozwalała utworzyć piramidę na wzór tych egipskich – ma ona cztery krawędzie zbiegające się u szczytu. W piaskownicy miałem też dostęp do imponującej wieży, której podstawą był kwadrat o zaokrąglonych kantach. Kopczyk nadal przypominał piramidę, ale jego krawędzie „urywały się” przed dojściem do brzegu. Dało mi to do myślenia i wypróbowałem jeszcze kilka foremek, co potwierdziło moje przypuszczenia – jeśli badana foremka miała gładki fragment brzegu, to krawędzie kopczyka tam nie sięgały.

Dlaczego tak jest? Dla weteranów piaskownic odpowiedź być może jest oczywista, dla mnie jednak nie była. Zapraszam więc Czytelnika, by razem ze mną przeszedł przez wyjaśnienie, do którego doszedłem. Okazuje się, że oprócz rozwiązania Zagadki Kanciastych Kopczyków pozwala też ono z nietypowej strony obejrzeć ciekawe zakątki analizy matematycznej.

**Kopczyki a funkcja odległości.** Opis kształtu kopczyka zaczniemy od podstaw: przyjmijmy, że foremka ma kształt dwuwymiarowej figury  $F \subseteq \mathbb{R}^2$ , a powierzchnia kopczyka jest wykresem funkcji  $d: F \rightarrow \mathbb{R}$  mierzącej wysokość n.p.b.f. (nad poziomem brzegu foremki). Z definicji wynika więc, że  $d(\mathbf{x}) = 0$  dla punktów  $\mathbf{x}$  leżących na brzegu foremki (oznaczanym odtąd przez  $\partial F$ ) oraz  $d(\mathbf{x}) > 0$  dla punktów wewnątrz. Skłonność piasku do osypywania się daje ograniczenie na to, jak stromy może być kopczyk. Dla uproszczenia przyjmijmy, że maksymalne nachylenie to  $45^\circ$ , a więc dowolne dwa punkty na wykresie  $(\mathbf{x}, d(\mathbf{x}))$ ,  $(\mathbf{y}, d(\mathbf{y}))$  są odległe w pionie nie więcej niż w poziomie. Sprawdzają się do warunku Lipschitza na funkcję  $d$ :

$$|d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{dla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F.$$

Funkcji spełniających te warunki jest oczywiście dużo. Nas interesuje ta, która odpowiada największemu możliwemu kopczykowi, rozpatrujemy bowiem sytuację, w której piasek dosypany w dowolnym miejscu obsypuje się poza foremkę. Do rozwiązania mamy więc problem optymalizacyjny z więzami:

$$d(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in F} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{dla } \mathbf{x} \in F$$

wśród funkcji spełniających

$$\begin{cases} |d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| & \text{dla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F, \\ d(\mathbf{x}) = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial F. \end{cases}$$

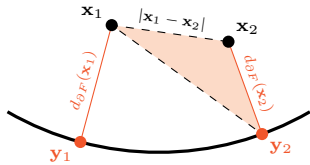
Rozwiązanie można zacząć od obserwacji, że dla  $\mathbf{y}$  z brzegu i  $\mathbf{x}$  dowolnego z przyjętych więzów i nierówności trójkąta wynika nierówność:

$$d(\mathbf{x}) \leq d(\mathbf{y}) + |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Otrzymana nierówność daje najwięcej informacji, gdy  $\mathbf{y}$  jest punktem brzegu najbliższym punktowi  $\mathbf{x}$ ; możemy więc skonkludować, że  $d(\mathbf{x})$  nie przewyższa  $\min\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{y} \in \partial F\}$ . Tę ostatnią wielkość nazwiemy odległością  $\mathbf{x}$  od brzegu i oznaczymy przez  $d_{\partial F}(\mathbf{x})$ .

Pozostaje sprawdzić, że funkcja  $d_{\partial F}$  również spełnia nałożone ograniczenia – wówczas będziemy mieli pewność, że to właśnie jest szukana funkcja





Rys. 5. Nierówność trójkąta zastosowana dla  $\Delta x_1 x_2 y_2$  (oraz  $\Delta x_1 x_2 y_1$ ) pozwala porównać wielkości  $d_{\partial F}(x_1)$  i  $d_{\partial F}(x_2)$

odpowiadająca największemu możliwemu kopczykowi. Warunek  $d(\mathbf{x}) = 0$  dla  $\mathbf{x}$  z brzegu jest spełniony automatycznie, gdyż minimum jest przyjmowane dla  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . Natomiast jeśli dane są dwa punkty  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$  oraz najbliższe im punkty  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \partial F$  (jak na rys. 5), to z nierówności trójkąta mamy:

$$\underbrace{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1|}_{d_{\partial F}(\mathbf{x}_1)} \leq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_2| \leq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + \underbrace{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2|}_{d_{\partial F}(\mathbf{x}_2)},$$

a więc  $d_{\partial F}(\mathbf{x}_1) - d_{\partial F}(\mathbf{x}_2) \leq |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ . Po połączeniu z analogiczną nierównością, w której  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  są zamienione miejscami, daje to warunek Lipschitza dla  $d_{\partial F}$ . Wniosek: szukaną funkcją  $d$  jest  $d_{\partial F}$ .

**Krawędzie kopczyków w języku analizy.** Okazuje się, że analiza matematyczna dysponuje właściwym językiem do opisu gładkich i niegładkich fragmentów kopczyków – kluczem jest tu pojęcie *różniczkowalności* funkcji  $d$ . Zaczniemy od obserwacji, że cechą odróżniającą gładkie fragmenty od krawędzi i wierzchołków jest możliwość określenia płaszczyzny stycznej (przydatna, gdy zdecydujemy się ozdabiać kopczyk fragmentami muszelek). Ogólne równanie na płaszczyznę przechodzącą przez wybrany punkt wykresu  $(x_1, x_2, d(x_1, x_2))$  to:

$$(z_1, z_2, z_3) : z_3 = d(x_1, x_2) + a_1 \cdot (z_1 - x_1) + a_2 \cdot (z_2 - x_2),$$

natomiast płaszczyznę taką nazywamy styczną, gdy dobrze przybliży ona wykres funkcji  $d$ , a więc gdy  $z_3$  wyliczone ze wzoru wyżej jest *blisko* wartości  $d(z_1, z_2)$ . Warunek ten można ściśle sformułować poprzez zbieżność:

$$(\star) \frac{d(x_1, x_2) + a_1 \cdot (z_1 - x_1) + a_2 \cdot (z_2 - x_2) - d(z_1, z_2)}{\sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2}} \rightarrow 0 \text{ przy } (z_1, z_2) \rightarrow (x_1, x_2).$$

Czytelnik mający za sobą kurs analizy matematycznej wielu zmiennych rozpozna w powyższym warunku definicję różniczkowalności. Konkretnie, funkcję  $d$  uznajemy za różniczkowalną w punkcie  $(x_1, x_2)$ , jeśli istnieją liczby  $a_1, a_2$  spełniające warunek  $(\star)$ . Pojęcie różniczkowalności jest kluczowe dla tej dziedziny i wypada poświęcić mu kilka słów, ale pozostawmy je na marginesie obok.

Dla wyrobienia lepszej intuicji wróćmy na chwilę do rysunku 2. Jeśli przyjmiemy, że kwadrat na rysunku to zbiór zadany nierównościami  $|x_1|, |x_2| \leq 1$ , to funkcja odległości od brzegu  $d$  jest dana wzorem  $1 \pm x_{1,2}$ , zależnie od części kwadratu. Na przykład w trójkącie zadanym przez  $-x_1 \leq x_2 \leq x_1$  mamy  $d(x_1, x_2) = 1 - x_1$ , a więc sama funkcja  $d$  jest liniowa! Nie jest więc zaskakujące, że w każdym punkcie wewnętrznym tego trójkąta para  $a_1 = -1, a_2 = 0$  spełnia warunek  $(\star)$  – po prostu licznik się zeruje dla  $\mathbf{z}$  dostatecznie bliskich  $\mathbf{x}$ . Z kolei w punktach leżących na przekątnych  $(x_1 = \pm x_2)$  par  $a_1, a_2$  spełniających  $(\star)$  po prostu nie ma.

**Zagadka Kanciastych Kopczyków.** Wyjaśnienie zagadki opiera się na następującym twierdzeniu, które tutaj przytoczymy bez dowodu:

**Twierdzenie.** Jeśli  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  jest gładką zamkniętą krzywą, to funkcja odległości  $d_C$  jest różniczkowalna w każdym punkcie  $r$ -otoczki  $C$ , czyli zbioru

$$C_r := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r \text{ dla pewnego } \mathbf{y} \in C\},$$

o ile  $r > 0$  jest odpowiednio małe (mniejsze od odwrótności krzywizny w każdym punkcie  $C$ ).

Jest to szczególny przypadek twierdzenia o otoczeniu tubularnym, które stali Czytelnicy *Delty* mogą znać z artykułu o obwarzankach w  $\Delta_{22}^9$ . W naszym przypadku wystarczy za krzywą  $C$  przyjąć brzeg  $\partial F$ , by przekonać się, że gładki brzeg gwarantuje różniczkowalność  $d$  w pewnym otoczeniu  $\partial F$ , a więc krawędzie (składające się z punktów nieróżniczkowalności) do tego brzegu nie mogą dochodzić. Jest możliwa nawet bardziej ilościowa analiza: jeśli na rysunku 3 przyjmiemy, że zaokrąglone kany to łuki okręgu o promieniu  $r$ , to krzywizna brzegu jest ograniczona z góry przez  $1/r$ . I rzeczywiście, krawędzie kończą się dokładnie w odległości  $r$  od brzegu.



**Rozwiązanie zadania M 1771.**

Odpowiedź: 9.

Jak wiadomo, każda liczba daje taką samą resztę przy dzieleniu przez 9 jak jej suma cyfr. Dlatego też

$$9 \mid A - B = \underbrace{11 \dots 1}_N,$$

więc  $9 \mid N$  i tym samym  $N \geq 9$ . Wartość  $N = 9$  można uzyskać w następujący sposób:

$$9012345678 - 8901234567 = 111111111.$$



Rys. 6. Zaokrąglone serce albo dwupalczasta stopa



Rys. 7. Wykres funkcji  $y = |x|^{3/2}$  (można sobie wyobrazić, że dopełniony łukiem od góry)

W odróżnieniu od „zewnątrznych kopczyków” te „wewnętrzne” zawsze mają jakąś niegładkość. Dobrym ćwiczeniem jest pokazanie, że funkcja  $d_{\partial F}$  nigdy nie jest różniczkowalna w punkcie  $x \in F$  najdalszym od brzegu.

**Co dalej?** Dalsza zabawa piaskiem prowadzi do wniosku, że sytuacja jest jeszcze ciekawsza. Są kształty, jak na rysunku 6, gdzie foremka ma kant, ale kopczyk jest gładki mimo to. Kluczowe jest tutaj, że kant jest skierowany do wewnątrz; powoduje on, że funkcja odległości nie jest różniczkowalna *na zewnątrz* foremki, ale tego już nie widzimy. Podobny efekt uzyskamy, jeśli nasypimy sobie piasku na stopę.

Są też foremki jak ta na rysunku 7, która wydaje się gładka, ale kopczyk ma krawędź aż do brzegu. Tu diabeł tkwi w szczegółach – okazuje się, że brzeg foremki nie jest dostatecznie gładki. Owszem, ma wszędzie określoną prostą styczną, ale jego krzywizna jest nieograniczona. W języku analizy: funkcja  $|x|^{3/2}$  jest różniczkowalna, ale tylko raz, a dwukrotnie już nie.

Wreszcie, ciekawy jest przypadek, gdy usypujemy kopczyk *na zewnątrz* foremki – w następnym numerze ukaże się artykuł Sławomira Dinewa poświęcony temu zagadnieniu. Trudno sobie wyobrazić, jak taki kopczyk wykonać w piaskownicy – na plaży być może byłaby szansa – ale sam problem okazuje się całkiem bogaty od strony czysto matematycznej. Foremki, dla których „zewnątrzne kopczyki” są gładkie, całkowicie charakteryzuje twierdzenie Motzkina... ale o tym za miesiąc!



## O czym lepiej zapomnieć?

Wojciech PRZYBYSZEWSKI\*

Mam wrażenie, że jeszcze kilka lat temu każda reklama laptopa składała się wyłącznie z wykrzykiwanych przez lektora kolejnych angielskich skrótów (np. RAM, SSD, HDMI), czasami wraz z wartościami liczbowymi je opisującymi. Wydaje mi się, że celem tych reklam nie było przekazanie widzowi informacji o parametrach sprzedawanego sprzętu, a jedynie zrobienie wrażenia na tych, którzy nie wiedzieli, co oznaczają wymienione skróty i wartości liczbowe, tak aby zyskali przekonanie, że prezentowany laptop korzysta z najnowszych technologii w ich najlepszym wydaniu. Z biegiem czasu ilość takich reklam się zmniejszała, pewnie przez fakt, że coraz więcej konsumentów ma świadomość, czym różni się np. pamięć RAM od dysku SSD.

W tym artykule skupimy się właśnie na parametrach związanych z pamięcią. Wiemy, że rodzajów pamięci w komputerze jest kilka – mamy m.in. rejestry, cache, RAM, dysk SSD, dysk twardy. To, czym się one od siebie różnią, świetnie opisał Tomasz Idziaszek w artykule *Pamięć w komputerze* w  $\Delta_{16}^5$ . Nie będziemy tutaj powtarzać całego artykułu, ale wspomnimy tylko najważniejszy wniosek – główne różnice pomiędzy wymienionymi rodzajami pamięci to ich cena i szybkość dostępu do danych. Im szybszy jest jakiś rodzaj pamięci, tym jest droższy i mniej mamy go w komputerze. Dla przykładu laptop, na którym piszę ten artykuł, ma 477 GB pamięci na dysku SSD i 16 GB (czyli prawie 30 razy mniej) szybszej pamięci RAM.

W jaki sposób ta zależność między ilością a szybkością różnych rodzajów pamięci wpływa na działanie procesora? Generalnie zasada jest prosta – jeśli procesor musi skorzystać z danych, które znajdują się w wolniejszej pamięci, to przenosi je do szybszej pamięci, aby mieć do nich łatwiejszy dostęp. W teorii brzmi świetnie, ale przecież szybszej pamięci mamy mniej. Co, jeśli procesor chce przenieść jakieś dane z dysku SSD do pamięci RAM, ale okazuje się, że jest ona już w całości wypełniona? Nie ma rady, trzeba wtedy coś z pamięci

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



### Rozwiązanie zadania M 1772.

Oznaczmy przez  $S$  zbiór punktów z zadania. Rozważmy jeden z punktów  $A \in S$ , który jest końcem dokładnie  $a$  odcinków. Rozpatrzmy prostą  $\ell$  przechodzącą przez  $A$ , która nie jest równoległa do żadnej z prostych łączących pary punktów z  $S$ . Przesuwając równoległe prostą  $\ell$ , możemy otrzymać proste  $\ell_1$  i  $\ell_2$  (równoległe do  $\ell$ ), które w pasie pomiędzy nimi nie zawierają ani jednego punktu z  $S$ , za wyjątkiem punktu  $A$ .

Niech prosta  $\ell_1$  przecina dokładnie  $x$  odcinków wychodzących z punktu  $A$ . Wtedy  $\ell_2$  przecina pozostałe  $a - x$  odcinków, gdyż każdy odcinek wychodzący z punktu  $A$  przecina dokładnie jedną z prostych  $\ell_1$  i  $\ell_2$ . Ponadto każdy odcinek łączący dwa punkty z  $S$ , różne od  $A$ , albo przecina obie proste  $\ell_1$  i  $\ell_2$ , albo żadnej. Wobec tego liczby odcinków przeciętych prostymi  $\ell_1$  i  $\ell_2$  różnią się o  $x - (a - x) = 2x - a$ . Zgodnie z warunkami zadania liczba ta musi być parzysta. Oznacza to w szczególności, że  $a$  jest liczbą parzystą.





**Rozwiązanie zadania F 1090.**

Roztwór wody z mydłem tworzy powłokę bańki. Ma ona dwie powierzchnie rozdzielające roztwór i powietrze: wewnętrzną i zewnętrzną. W związku z tym zwiększenie pola powierzchni  $S = 4\pi r^2$  powłoki (rozmiaru bańki) o  $dS$  wymaga wykonania pracy  $dW = 2\sigma dS$ . Na powłokę bańki działa różnica ciśnień wewnątrz bańki  $p$  i ciśnienia zewnętrznego  $p_0$ . W stanie równowagi dla bańki o promieniu  $r$  praca tych sił potrzebna do powiększenia promienia o  $dr$  jest równa pracy potrzebnej do zwiększenia powierzchni powłoki o  $dS = 4\pi((r + dr)^2 - r^2) \approx 8\pi r dr$ :

$$(p - p_0)Sdr = 4\pi r^2(p - p_0)dr = 8\pi r \cdot 2\sigma dr,$$

a więc:

$$p = p_0 + \frac{4\sigma}{r}.$$

Zgodnie z prawem Archimedeasa bańka będzie się unosiła, gdy gęstość  $\rho$  powietrza w jej wnętrzu będzie mniejsza od gęstości  $\rho_0$  powietrza na zewnątrz (pomijamy ciężar powłoki bańki). Jest to możliwe, gdy temperatura  $T_b$  w bańce jest wyższa niż temperatura  $T$  na zewnątrz. W interesującym nas przedziale temperatur i ciśnień powietrze doskonale spełnia równanie gazu doskonałego. Gęstość gazu doskonałego o temperaturze  $T$  pod ciśnieniem  $p$  wynosi:

$$\rho = \frac{\mu p}{RT},$$

$\mu$  oznacza tu masę molową gazu (powietrza),  $R$  uniwersalną stałą gazową. Otrzymujemy warunek:

$$\rho < \rho_0 \Leftrightarrow T_b - T > \frac{4\sigma}{r p_0} T.$$

Dla danych z treści zadania  $T_b - T > 0,018$  K.

Możemy jeszcze sprawdzić, czy pominięcie masy powłoki bańki nie jest zbyt grubym przybliżeniem. Grubość takiej powłoki  $\delta \approx 1 \mu\text{m}$ , a jej gęstość jest równa gęstości wody,  $1 \text{ g/cm}^3$ . Masa powłoki bańki o promieniu 2 cm wynosi więc około 5,1 mg, co stanowi około 12% masy powietrza wypartego przez bańkę.

Dane liczbowe w tym zadaniu zostały zaczerpnięte z pracy o kształcie wielkich baniek mydlanych: C. Cohen, B. D. Texier, E. Reyssat, J. H. Snoeijer, D. Quéré, and C. Clanet, *PNAS* **114**, 2515 (2017).

W górnym rzędzie \* oznacza, że wystąpił błąd braku strony. Z kolei w trzech dolnych wierszach trzymamy zawartość pamięci szybkiej po wczycaniu kolejnej strony, w kolejności, w jakiej były załadowane do pamięci.

RAM usunąć (np. zapisać część danych z powrotem na dysku SSD, zwalniając fragment RAM-u). No dobrze, ale jak wybrać, które dane odeślemy na SSD? Na pewno jeśli w RAM-ie mamy jakieś dane, z których nie będziemy korzystać w najbliższym czasie, to wydają się one dobrym kandydatem – przecież i tak nie są nam potrzebne w pamięci z szybkim dostępem. Ponadto, jeśli do jakiejś porcji danych odwołujemy się co chwila, to odesłanie ich na dysk SSD skończy się tym, że za chwilę znów będziemy musieli je ściągać do RAM-u, co spowolni działanie komputera. Widać więc, że podjęcie właściwej decyzji jest kluczowe dla zapewnienia efektywnego działania komputera.

**Teoretyczny model pamięci w komputerze**

Aby przeanalizować przedstawiony problem w szczegółach, posłużymy się uproszczonym modelem pamięci w komputerze. Założymy mianowicie, że mamy tylko dwa jej rodzaje – pamięć szybką i pamięć wolną. Komputer zwykle operuje na większych fragmentach pamięci, nazywanych stronami (w zależności od kontekstu mówimy też o blokach albo ramkach) – typowy rozmiar strony to coś rzędu 4 kB. Przyjmijmy więc, że w pamięci szybkiej możemy pomieścić maksymalnie  $k$  stron danych (inaczej można powiedzieć, że składa się ona z  $k$  ramek), natomiast pamięć wolna jest nieograniczona i może pomieścić nieskończenie wiele stron. W trakcie swojego działania procesor potrzebuje czasami odwołać się do danych znajdujących się na konkretnych stronach. Jeśli strona  $s$ , do której procesor chce się odwołać, znajduje się akurat w pamięci szybkiej, to nie ma żadnego problemu. Gorzej, jeśli strony  $s$  w pamięci szybkiej nie ma – wtedy mamy do czynienia z błędem braku strony (ang. *page fault*). Procesor musi sprowadzić stronę z pamięci wolnej do pamięci szybkiej, co zajmuje pewien czas. Ponadto, jeśli w pamięci szybkiej mamy już zajęte wszystkie  $k$  ramek, to procesor musi wybrać jedną stronę  $s'$ , która aktualnie znajduje się w pamięci szybkiej, i usunąć ją (inaczej: zapomnieć) poprzez odesłanie jej do pamięci wolnej. Oczywiście chcielibyśmy w taki sposób wybierać stronę do zapomnienia, żeby zminimalizować liczbę błędów braku strony w czasie działania procesora. W ten sposób zapewnimy, że komputer będzie działać efektywnie.

**Strategia FIFO**

Jednym z możliwych algorytmów wyboru, którą stronę zapomnieć, jest strategia FIFO (ang. *first in, first out*). Zgodnie z jej założeniami, jeśli musimy zapomnieć którąś stronę, to wybieramy tę, która była najdawniej załadowana do pamięci szybkiej. Prześledźmy działanie tego algorytmu na konkretnym przykładzie. Założmy, że w pamięci szybkiej możemy zmieścić  $k = 3$  strony, zaś procesor generuje kolejno odwołania do stron  $D, E, C, A, D, E, B, D, E, C, A, B$ . Oczywiście na samym początku nasza pamięć szybka jest pusta, więc pierwsze odwołanie do strony  $D$  spowoduje błąd braku strony i załadowanie  $D$ . Podobnie będzie przy dwóch kolejnych odwołaniach do stron  $E$  i  $C$ . Po tych trzech pierwszych odwołaniach mamy 3 błędy braku strony i trzymamy w pamięci szybkiej strony  $D, E, C$ . Kiedy procesor generuje odwołanie do strony  $A$ , znowu mamy błąd braku strony. Tym razem jednak musimy zdecydować, którą ze stron aktualnie trzymany w pamięci szybkiej zapomnimy. Skoro trzymamy się strategii FIFO, to decydujemy się na usunięcie  $D$ , ponieważ ona była najwcześniej dodana. Mamy więc już 4 błędy braku strony, a w pamięci szybkiej trzymamy  $E, C, A$ . Dalszy przebieg algorytmu zaznaczamy w tabelce poniżej.

Błąd	*	*	*	*	*	*	*			*	*	
Ciąg odwołań	D	E	C	A	D	E	B	D	E	C	A	B
Zawartość szybkiej pamięci	D	D	D	E	C	A	D	D	D	E	B	B
		E	E	C	A	D	E	E	E	B	C	C
			C	A	D	E	B	B	B	C	A	A

Tabela 1. Strategia FIFO z trzema ramkami w pamięci szybkiej



**Rozwiązanie zadania M 1773.**

Rozważmy dowolny punkt  $P$  podstawy. Udowodnijmy, że jest on pokryty jednym z trójkątów z zadania. Rozważmy sferę  $\omega$  leżącą wewnątrz ostrosłupa i styczną do podstawy w punkcie  $P$ . Zwiększamy jej promień, zachowując punkt styczności, do momentu aż po raz pierwszy  $\omega$  będzie styczna do pewnej ściany ostrosłupa – bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to ściana  $SA_1A_2$ , a przez  $Q$  oznaczmy punkt styczności tej ściany z  $\omega$ . Wtedy z równości odcinków stycznych do sfery  $PA_1 = QA_1$  oraz  $PA_2 = QA_2$ , zatem trójkąty  $PA_1A_2$  i  $QA_1A_2$  są przystające. Oznacza to, że obracając ścianę  $SA_1A_2$  wokół  $A_1A_2$ , tak aby pokryła się z trójkątem  $X_1A_1A_2$  w płaszczyźnie podstawy, otrzymujemy, że punkt  $Q$  przechodzi na punkt  $P$ . W szczególności  $P$  leży wewnątrz trójkąta  $X_1A_1A_2$ .

László Bélády (1928–2021) – węgierski informatyk pracujący zarówno na uniwersytetach, jak i w sektorze prywatnym.

Okazało się, że dla tego ciągu strategia FIFO spowodowała aż 9 błędów braku strony. Jednak prawdopodobnie było to spowodowane tym, że mieliśmy tylko  $k = 3$  ramki do dyspozycji. Oczywiście, gdyby ramek było więcej, to błędów braku strony byłoby mniej. Dla przykładu zobaczmy w tabelce, co dzieje się dla  $k = 4$ .

Błąd	*	*	*	*			*	*	*	*	*	*
Ciąg odwołań	D	E	C	A	D	E	B	D	E	C	A	B
Zawartość szybkiej pamięci	D	D E	D E C	D E C A	D E C A	D E C A	E C A B	C A B D	A B D E	B D E C	D E C A	E C A B

Tabela 2. Strategia FIFO z czterema ramkami w pamięci szybkiej

Czyli rzeczywiście dla większej liczby dostępnych ramek algorytm FIFO zrobił mniej błędów braku strony. Zaraz! Przecież teraz mieliśmy 10 takich błędów, a dla trzech ramek było ich tylko 9! Jak to możliwe, że gdy mamy więcej dostępnej pamięci, powstaje więcej błędów braku strony, które spowalniają procesor? Czy w takim razie, żeby przyspieszyć nieco swój komputer, powinienem zmniejszyć ilość dostępnego RAM-u? Przecież to brzmi absurdalnie.

Cechą niektórych algorytmów wymiany strony jest to, że przy odpowiednio spreparowanym ciągu odwołań zwiększenie liczby dostępnych ramek w pamięci szybkiej zwiększa liczbę błędów braku strony. Taką sytuację nazywamy anomalią Bélády’ego, od nazwiska informatyka, który w 1969 roku zademonstrował ją po raz pierwszy. Nie oznacza to jednak, że przy każdym ciągu odwołań zwiększenie liczby ramek będzie skutkowało większą liczbą błędów. Dla przykładu, jeśli dla rozważanego ciągu zwiększymy dostępną szybką pamięć do  $k = 5$  ramek, to wtedy błędów braku strony będzie już tylko 5.

Algorytm FIFO, mimo że jest bardzo prosty w implementacji (wystarczy trzymać jedną kolejkę ze stronami wczytanymi do pamięci szybkiej), nie jest w praktyce używany we współczesnych systemach operacyjnych. Wynika to z tego, że nie bierze pod uwagę, czy do jakiejś strony były ostatnio odwołania, a tylko kiedy była wczytana, co intuicyjnie nie ma związku z częstością korzystania z niej.

**Strategia LRU**

Strategia, która wydaje się lepszym rozwiązaniem problemu zarządzania pamięcią, to LRU (ang. *least recently used*). Mówi ona, żeby usuwać tę stronę, która była używana najdawniej. Jest ona trudniejsza do implementacji od strategii FIFO, ale we współczesnych systemach operacyjnych używa się jej albo jakichś jej przybliżeń. Zobaczmy, jak strategia ta radzi sobie z rozważanym ciągiem odwołań, analizując jej działanie dla  $k = 3$  ramek w tabelce poniżej.

Błąd	*	*	*	*	*	*	*			*	*	*
Ciąg odwołań	D	E	C	A	D	E	B	D	E	C	A	B
Zawartość szybkiej pamięci	D	D E	D E C	E C A	C A D	A D E	D E B	E B D	B D E	D E C	E C A	C A B

Tabela 3. Strategia LRU z trzema ramkami w pamięci szybkiej

Wyszło nam 10 błędów braku strony. Czy jeśli dołożymy jeszcze jedną ramkę ( $k = 4$ ), to liczba błędów się zwiększy? Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego sprawdzenia, ile błędów wtedy wyjdzie. Okazuje się, że w ogólności zachodzi następujące twierdzenie.

**Twierdzenie.** *Strategia LRU jest wolna od anomalii Bélády’ego. To znaczy, dla dowolnego ciągu odwołań do pamięci  $S$  i liczb  $k_1 \leq k_2$  liczba błędów braku strony*



**Rozwiązanie zadania F 1089.**

Powstawanie fal na powierzchni jeziora polega na propagacji okresowych zmian głębokości wody. Działającą tu siłą jest siła ciężkości proporcjonalna do masy wody. Miarą bezwładności jest ta sama masa wody, a więc prędkość fal na jeziorze nie zależy od gęstości cieczy wypełniającej jezioro. Można się o tym przekonać na podstawie analizy wymiarowej. Załóżmy, że prędkość propagacji fal  $c$  zależy od gęstości cieczy  $\rho$ , głębokości cieczy  $h$  i wartości przyspieszenia grawitacyjnego  $g$ , według wzoru:

$$c \propto g^\alpha \cdot \rho^\beta \cdot h^\gamma.$$

Przeanalizujmy wymiary: kilogram wystąpi tylko w gęstości i nigdzie więcej, a więc  $\beta = 0$ , czyli prędkość nie zależy od gęstości. Dalsza analiza prowadzi do wniosku, że  $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ . Czterokrotny wzrost wartości przyspieszenia grawitacyjnego powoduje więc dwukrotny wzrost prędkości fal.

Czytelnik Dociekliwy, całkiem słusznie, zapyta, dlaczego w analizie wymiarowej uwzględniliśmy głębokość  $h$ , a nie uwzględniliśmy długości fali  $\lambda$ , także o wymiarze długości. „Nasz” wzór opisuje sytuację, gdy  $h \ll \lambda$ . Dla  $h \gg \lambda$  otrzymujemy:

$$c \propto \sqrt{g \cdot \lambda}.$$

Dokładna analiza teoretyczna dla fal o małej amplitudzie prowadzi do ogólnego wzoru:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda}},$$

w którym „tgh” oznacza funkcję tangens hiperboliczny. Zadanie i przytoczona analiza dotyczy tzw. fal grawitacyjnych. Fale kapilarne opisują inne związki uwzględniające napięcie powierzchniowe.

Tym razem w trzech dolnych wierszach trzymamy zawartość pamięci szybkiej po wczytaniu kolejnej strony w kolejności, w jakiej odwołam się do tych stron w przyszłości.

Konkretnie Sleator i Tarjan pokazali w 1985 roku, że jeśli algorytm optymalny z  $k_{OPT}$  ramkami popełni  $t$  błędów braku strony, to algorytm LRU z  $k_{LRU} \geq k_{OPT}$  ramkami popełni takich błędów co najwyżej

$$\frac{k_{LRU}}{k_{LRU} - k_{OPT} + 1} (t + k_{OPT}).$$

dla ciągu  $S$  przy strategii LRU z  $k_2$  dostępnymi ramkami w pamięci szybkiej nie będzie większa niż dla strategii LRU z  $k_1$  ramkami.

*Szkic dowodu.* Wystarczy porównać zawartość pamięci szybkiej w obu algorytmach przy danym ciągu odwołań. W każdym momencie algorytm z  $k_2$  ramkami w pamięci szybkiej trzyma  $k_2$  stron, do których ostatnio było jakieś odwołanie. Skoro  $k_1 \leq k_2$ , to algorytm z  $k_1$  ramkami przechowuje podzbiór tych stron. Jeśli więc na jakiejś pozycji w algorytmie z  $k_2$  ramkami występuje błąd braku strony, to tym bardziej wystąpi on w algorytmie z  $k_1$  ramkami. Nie dość więc, że w algorytmie z  $k_1$  ramkami występuje co najmniej tyle samo błędów co w algorytmie z  $k_2$  ramkami, to jeszcze w algorytmie z mniejszą liczbą ramek błąd braku strony występuje zawsze, gdy występuje on w algorytmie z większą liczbą ramek. □

**Strategia optymalna**

Rozpatrzyliśmy już dwa algorytmy wymiany stron. Dla rozważanego ciągu przy strategii FIFO z trzema ramkami wystąpiło 9 błędów braku strony, a dla strategii LRU z taką samą liczbą ramek było ich 10. Można zadać sobie pytanie, ile najmniej błędów braku strony może się pojawić przy odpowiednio dobranej strategii korzystającej z takiej liczby ramek. No i oczywiście jak taka najlepsza możliwa strategia wygląda.

Okazuje się, że strategię optymalną można bardzo łatwo opisać – z pamięci szybkiej należy zapominać tę stronę, do której odwołanie nastąpi najpóźniej w przyszłości. Dla rozważanego ciągu jeśli zastosujemy strategię optymalną z  $k = 3$  ramkami, to po pierwszych trzech błędach braku strony, kiedy to wczytamy do pamięci  $D, E, C$ , widząc następne odwołanie do strony  $A$ , zapomnimy z pamięci stronę  $C$ . Rzeczywiście, do strony  $D$  będziemy się odwoływać już w kolejnym kroku, do strony  $E$  jeszcze w kolejnym, podczas gdy następne odwołanie do strony  $C$  występuje dopiero za sześć kroków. Jak dokładnie zadziała algorytm optymalny dla  $k = 3$ , przeanalizujemy w poniższej tabelce.

Błąd	*	*	*	*			*			*	*	
Ciąg odwołań	D	E	C	A	D	E	B	D	E	C	A	B
Zawartość szybkiej pamięci	D	D	D	D	E	D	D	E	B	B	B	B
		E	E	E	D	E	E	B	E	C	A	A
			C	A	A	A	B	D	D	E	B	C

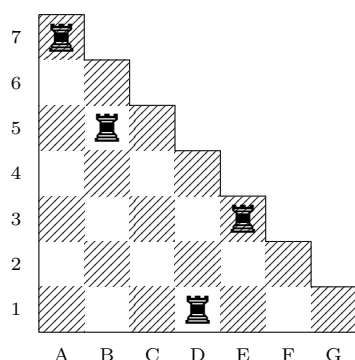
Tabela 4. Strategia optymalna z trzema ramkami w pamięci szybkiej

Tym razem było tylko 7 błędów braku strony, czyli rzeczywiście mniej niż dla strategii FIFO i LRU. Pozostawiamy Czytelnikowi dowód, że tak zdefiniowana strategia jest rzeczywiście optymalna, czyli dla każdego możliwego ciągu odwołań popełni nie więcej błędów braku strony niż dowolna inna strategia z taką samą liczbą ramek. Oczywiście własność ta oznacza, że strategia optymalna jest wolna od anomalii Bélády’ego.

Skoro znamy strategię optymalną, to czemu w ogóle rozważaliśmy FIFO i LRU? Jako że jest optymalna, to przecież najbardziej opłaca się ją zaimplementować w systemie operacyjnym! Otóż strategia optymalna ma jedną podstawową wadę – nie da się jej zaimplementować w praktyce. Decyzja o tym, którą stronę usunąć, wymagała, żeby przeanalizować, jakie odwołania do stron pojawiają się w przyszłości, a przecież żaden komputer nie potrafi przewidzieć, co zaraz zrobi użytkownik. Ma on wiedzę tylko o tym, jakie odwołania pojawiały się w przeszłości. Tak to niestety się czasami zdarza, że teoretycznie najlepsze rozwiązania nie są możliwe do zrealizowania w praktyce. Okazuje się jednak, że strategia LRU z  $2k$  stronami popełni z grubsza dwa razy więcej błędów braku strony niż strategia optymalna z  $k$  stronami. To jednak temat na zupełnie inny artykuł.



\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Kolejne pętle algorytmu odpowiadają kolejnym wierszom pólszachownicy. Wartością 0 oznaczamy fakt, że w danym wierszu nie postawiliśmy wieży.

Jeżeli mamy więcej wież niż wierszy, to nam się nie uda – zwracamy 0 (linia 2). Jeżeli postawiliśmy już wszystkie wieże, to zwracamy 1 (linia 3). Jeżeli żaden z tych warunków nie zachodzi, to jest co najmniej jedna wieża do postawienia, a wierszy co najmniej tyle co wież. Najpierw rozpatrujemy niepostawienie wieży w ostatnim wierszu (linia 4), a następnie postawienie jej kolejno w kolumnach 1, 2, ..., n, jeżeli są puste (linie 5-9).

Oznacza to z grubsza, że liczba kroków, jakie algorytm wykonują, może być rzędu  $n!$ .

Rozstania są ciężkie. Czasem trzeba podzielić się wspólnymi książkami, czasem wspólnym psem. Najgorzej jest jednak, gdy mamy wspólną szachownicę. Jeżeli nie dojdziemy do porozumienia, to możemy skończyć z połową szachownicy. A jak negocjacje pójdą bardzo źle, to z połową trójkątną, na której nie możemy nawet poćwiczyć debiutów.

Dla takiej dziwnej pólszachownicy zastanowimy się nad klasycznym problemem: na ile sposobów możemy rozstawić kilka, powiedzmy 4, nieatakujące się wieże? Wieże atakują się, kiedy są w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie.

Jeżeli nauczyliśmy się kiedyś programować, to aby odpowiedzieć na to pytanie, możemy napisać prosty program, który rozważy wszystkie możliwe rozstawienia wież i dla każdego sprawdzi, czy jest poprawne. Jeśli jest – dodajemy do naszego licznika jeden. Poniżej znajduje się pseudokod takiego programu (w którym, o dziwo, wcięcia tworzą pólszachownicę).

```

1: ile ← 0
2: for i1 ← 0 to 7 do
3:   for i2 ← 0 to 6 do
4:     for i3 ← 0 to 5 do
5:       for i4 ← 0 to 4 do
6:         for i5 ← 0 to 3 do
7:           for i6 ← 0 to 2 do
8:             for i7 ← 0 to 1 do
9:               if wśród (i1, ..., i7) są 4 dodatnie liczby i są różne then
10:                 ile ← ile + 1
11: return ile

```

Ten algorytm działa i wyznaczył liczbę 1701. Czuję jednak, że Bardziej Doświadczeni Czytelnicy, widząc go, mogli złapać się za głowę. Nasze rozwiązanie nie jest bowiem idealne (łagodnie mówiąc). Widzimy na przykład, że gdybyśmy mieli planszę o 20 wierszach, musielibyśmy napisać nowy program, który miałby 20 pętli. Czy da się tego uniknąć? Oczywiście, że tak – wystarczy użyć rekurencji.

Napiszmy funkcję, która – wiedząc, ile wierszy ( $n$ ) i wież ( $k$ ) zostało jeszcze do rozpatrzenia oraz które kolumny są już zajęte ( $kolumny[i] \in \{0, 1\}$  to liczba wież w  $i$ -tej kolumnie) – policzy, ile jest rozmieszczeń wież. Funkcja ta będzie wywoływała siebie samą dla mniejszej liczby wierszy. Nie jest to problemem, musimy tylko zadbać o warunki brzegowe, aby obliczenie się zakończyło.

```

1: function LICZBAROZSTAWIEŃ(n, k, kolumny)
2:   if n < k then return 0
3:   if k = 0 then return 1
4:   ile ← LICZBAROZSTAWIEŃ(n - 1, k, kolumny)
5:   for i ← 1 to n do
6:     if kolumny[i] = 0 then
7:       kolumny[i] ← 1
8:       ile ← ile + LICZBAROZSTAWIEŃ(n - 1, k - 1, kolumny)
9:       kolumny[i] ← 0
10:  return ile
11: return LICZBAROZSTAWIEŃ(7, 4, [0, 0, ..., 0])

```

Ten algorytm też działa i też wyszło mu 1701. Zaczynamy podejrzewać, że jest to zatem dobry wynik. A jak szybkie są nasze algorytmy, czyli jaka jest ich złożoność? Koszmarna!  $O(n!)$ ! Zamiast programować, musimy chyba jednak pomyśleć.

Oba powyższe algorytmy w trakcie działania przeglądają wszystkie możliwe rozstawienia wież. Nie musimy jednak tego robić – zależy nam przecież tylko na ich liczbie. Niech  $A(n, k)$  będzie szukaną liczbą rozstawień  $k$  wież na pólszachownicy o  $n$  wierszach. Zastanówmy się, jak, znając liczbę rozstawień dowolnej liczby wież dla mniejszej pólszachownicy, wyznaczyć  $A(n, k)$ .

W rozstawieniach tych albo w ostatnim wierszu jest wieża, albo nie. Rozstawień bez wieży jest dokładnie tyle samo co rozstawień  $k$  wież na planszy bez ostatniego wiersza, czyli  $A(n-1, k)$ . Rozstawienia z wieżą w ostatnim wierszu to po prostu rozstawienia  $k-1$  wież na planszy bez ostatniego wiersza rozszerzone o dostawienie wieży w ostatnim wierszu. Tę wieżę zawsze możemy dostawić na  $n-(k-1)$  sposobów, bo  $(k-1)$  kolumn jest już zajętych. Dostajemy więc następujące równanie rekurencyjne:

$$A(n, k) = A(n-1, k) + (n-k+1)A(n-1, k-1) \quad \text{dla } n \geq k > 0.$$

Dodatkowo musimy przyjąć  $A(n, 0) = 1$  oraz  $A(n, k) = 0$  dla  $n < k$ . Możemy teraz sformułować algorytm dynamiczny oparty na powyższym równaniu rekurencyjnym, który po prostu wypełnia tabelkę znajdującą się na marginesie.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	3	1					
3	1	6	7	1				
4	1	10	25	15	1			
5	1	15	65	90	31	1		
6	1	21	140	350	301	63	1	
7	1	28	266	1050	1701	966	127	1

Okazuje się, że tabelka też jest półszachownicą. Przypadek?

```

1: A ← int[0..n][0..n]
2: for i ← 0 to n do
3:   for j ← 0 to n do
4:     if j > i then A[i, j] ← 0
5:     else if j = 0 then A[i, j] ← 1
6:     else A[i, j] ← A[i-1, j] + (i-j+1)A[i-1, j-1]
7: return A[n, k]

```

▷ U nas  $n = 7$  i  $k = 4$

Ten algorytm działa w czasie  $O(n^2)$ . No i znowu znaleźliśmy liczbę 1701!

Jeżeli zależało nam tylko na efektywnej metodzie znalezienia wyniku, to może nam to wystarczyć, jednak z naukowej ciekawości fajnie byłoby trochę lepiej zrozumieć, czym są liczby w tej tabelce. Na pierwszy rzut oka nie przypominają niczego szczególnego. Spróbujmy jednak jakoś je wytropić.

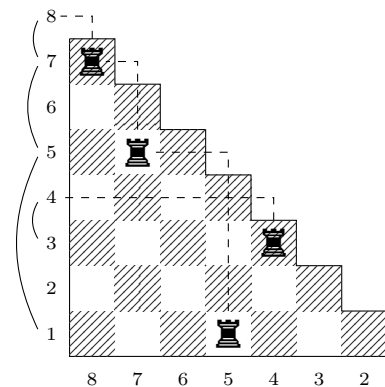
W tym celu wpiszy ciąg złożony z kolejnych wierszy  $(1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 6, 7, \dots)$  w internetową encyklopedię ciągów: oeis.org. Okazuje się, że jest to „odbity trójkąt liczb Stirlinga drugiego rodzaju”. Co to znaczy? Liczby Stirlinga drugiego rodzaju opisują liczbę różnych podziałów zbioru na podzbiory. Konkretniej, dla liczb naturalnych  $n, k$ ,  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  to liczba możliwych podziałów zbioru złożonego z  $n$  rozróżnialnych elementów na  $k$  podzbiory. Rzeczywiście, patrząc na trójkąt liczb Stirlinga, widzimy, że wygląda prawie identycznie jak nasz – jest tylko trochę przesunięty (o jeden wiersz i kolumnę w dół) i każdy jego wiersz ma odwróconą kolejność. Dokładniej:

$$A(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ n+1-k \end{matrix} \right\} = \text{liczba podziałów } \{1, \dots, n+1\} \text{ na } n+1-k \text{ podzbiory.}$$

Przykładowo  $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$ , bo mamy 7 podziałów zbioru  $\{1, 2, 3, 4\}$ :  $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ ,  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ ,  $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ ,  $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ ,  $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ ,  $\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$  i w końcu  $\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$ .

Tak, tak, można też wybrać nudną ścieżkę i pokazać, że liczby Stirlinga spełniają analogiczne równanie rekurencyjne i warunki brzegowe. Ten dowód, chociaż poprawny, ma w sobie tyle polotu co nasz pierwszy algorytm.

Chwila, chwila, zliczaliśmy rozstawienia wież i wyszły nam podziały zbioru? Jakiemu podziałowi ma niby odpowiadać rozstawienie wież z początku artykułu? Jest to co najmniej dziwne. Okazuje się jednak, że istnienie tej odpowiedniości to prawda! I to nie byle jaka, bo to taka prawda, którą można ładnie udowodnić. A takie prawdy to jest to, co w *Delcie* lubimy najbardziej.



Powyższe rozstawienie wież odpowiada podziałowi  $\{1, \dots, 7, 8\}$  na 4 podzbiory:  $\{1, 5, 7, 8\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{6\}$ .

Dodajmy sztuczny  $(n+1)$ -szy wiersz i ponumerujmy kolumny półszachownicy od prawej do lewej, zaczynając od 2. Teraz półszachownica składa się z wszystkich pól o współrzędnych  $(i, j)$ , gdzie  $1 \leq i < j \leq n+1$  (pierwsza współrzędna odpowiada wierszowi, a druga kolumnie). Postawienie wieży w  $i$ -tym wierszu będziemy teraz odczytywać jako informację, która liczba jest po  $i$  w jej podzbiore. Jeżeli wieża stoi na polu  $(i, j)$ , to po  $i$  jest  $j$  (np. wieża na polu  $(1, 5)$  oznacza, że po 1 jest 5). Z kolei jeżeli  $i$ -ty wiersz jest pusty, to  $i$  jest ostatnią liczbą w swoim podzbiore. Z faktu, że wieże się nie atakują, wiemy, że te informacje są niesprzeczne – nie więcej niż raz wskażemy poprzednika i następnika każdej liczby. Łącząc te fakty, dostajemy pewien podział zbioru  $\{1, \dots, n+1\}$ . Na ile części? Tyle, ile wierszy jest bez wież, czyli dokładnie  $n+1-k$ . Dokładnie tak, jak miało wyjść!

Z różnych rozstawień wież oczywiście wyjdą różne podziały. Ale czy dostaniemy je wszystkie? No tak, bo łatwo wskazać konstrukcję działającą w drugą stronę: z podziału możemy dostać rozstawienie nieatakujących się wież, po prostu wypisując pary elementów sąsiadujących w jego zbiorach, np.  $\{\{1\}, \{2, 5, 6, 8\}, \{3\}, \{4, 7\}\}$  da nam wieże  $(2, 5)$ ,  $(5, 6)$ ,  $(6, 8)$ ,  $(4, 7)$ . I to kończy nasz piękny dowód.

\* Wydział Fizyki Politechniki  
Warszawskiej

BC – Before Copernicus – przed  
Kopernikiem  
Na podstawie: Eugeniusz Rybka,  
Przemysław Rybka *Kopernik – człowiek  
i myśl*, Wiedza Powszechna, 1972.



Jeśliby zdefiniować początki inteligentnego życia na Ziemi przez czynne, a nie bierne pojmowanie świata, przez próbę jego zrozumienia i wykorzystania do swoich potrzeb, prawdopodobnie momentem przełomowym byłaby chwila, gdy człowiek po raz pierwszy spojrzął w niebo. Być może pierwszą obserwacją naukową był ruch Słońca na sklepieniu niebieskim i jego powiązanie z dniem i nocą. Obserwacja ta nie była motywowana jedynie ciekawością, ale miała praktyczne konsekwencje. Jak daleko można się oddalić od bezpiecznego schronienia, aby móc powrócić przed pełną niebezpieczeństw nocą? W którą stronę iść, aby trafić z powrotem do swojej siedziby?

Plemiona ludzkie wiodące koczowniczy tryb życia, szczególnie te żyjące nad morzem, potrzebowały możliwości orientowania się w terenie także po zachodzie Słońca. Stąd obserwowano i Księżyc, i gwiazdy, szybko dochodząc do wniosku, że nie pozostają one w spoczynku, lecz poruszają się stale, pozwalając określić porę nocy, a także kierunki świata. Z kolei osiadłe ludy Ziemi zajmowały się rolnictwem. Zajęcia te były silnie zależne od pory roku – siew czy zbiory muszą być dokonywane w odpowiednim czasie, więc trzeba było je w miarę precyzyjnie określać, co powiązane zostało z cyklami faz księżyca. Powstały pierwsze kalendarze.

Wkrótce zaczęto rozróżniać rodzaje ciał niebieskich. Oczywiście najważniejszym z nich było Słońce regulujące rytm życia człowieka i całej przyrody. Drugim stał się Księżyc, który, jak zauważono, nie tylko zmienia swoje fazy, ale także przesuwa się wśród gwiazd. Grozą napelniały ludzi takie zjawiska, jak zaćmienie Słońca czy Księżyca, dające argumenty kapłanom za przychylnością lub nie rządzących niebem bóstw. Najważniejszą jednak obserwacją był fakt, że nie tylko Słońce i Księżyc wschodzą i zachodzą za horyzont, ale całe sklepienie niebieskie dokonuje w ciągu doby pełnego obrotu. Zauważono także, że niektóre gwiazdy wyłamują się z tego wspólnego ruchu, zakreślając na niebie zawile drogi, a nawet czasowo zmieniając kierunek swojego ruchu. Nazwano je „gwiazdami błądzącymi”, czyli planetami (z greckiego *plano* – błądzą).

Dla człowieka pierwotnego Ziemia była czymś stałym i niezmiennym. Zmysły podpowiadały, że wokół tego nieruchomego punktu odniesienia poruszają się gwiazdy i planety (czasem będące uosobieniem bóstw), człowiek zaś – centrum przyrody – żyje na płaskiej powierzchni, która kończy się gdzieś na horyzoncie znajdującym się bardzo daleko. Podobny schemat powtarza się praktycznie w każdej pierwotnej religii, od starożytnego Babilonu przez kulturę Azteków i Majów po wierzenia słowiańskie.

Władcy i ludność poszczególnych nacji czerpali swą wiedzę od kapłanów, to oni bowiem studiowali zjawiska i zależności astronomiczne, jak również bacznie obserwowali przyrodę, aby konstytuować boskie namaszczenie władcy oraz przewidywać niecodzienne zjawiska, np. zaćmienia, które, jak wierzono, miały wpływ na losy świata. Często więc astronomia przeradzała się w astrologię, która oczywiście nie miała już nic wspólnego z nauką. Stanowiła jednak silny bodziec do obserwowania i prób zrozumienia ruchów ciał niebieskich. W Mezopotamii na podstawie systematycznych i długotrwałych zapisów poznano ruch Księżyca i ustalono reguły występowania jego zaćmień. Także ruchy planet oraz okresy ich obiegów synodycznych, tj. odstępów czasu pomiędzy dwiema kolejnymi opozycjami, gdy planeta była widoczna po przeciwnej stronie nieba niż Słońce, można było obliczyć i wykorzystać w astrologii. W Egipcie opracowano kalendarz słoneczny, dzieląc rok na

12 miesięcy po 30 dni oraz 5 dni dodatkowych. Dzięki temu możliwe stało się przewidywanie corocznych wylewów Nilu, które były kluczowe dla rolnictwa na tym obszarze. Co ciekawe, w kalendarzu tym co 120 lat początek roku przesuwał się o 30 dni, występując kolejno we wszystkich porach roku w ciągu 1460 lat.

Prawdziwy rozwój nauki, w tym przede wszystkim astronomii, wymagał jednakże bardziej otwartego spojrzenia na otaczający świat. Takie warunki charakteryzowały starożytną Grecję. Nie stanowiła ona jednolitego organizmu państwowego, dzieląc się na wiele współpracujących i walczących ze sobą państw-miast. Nie istniała w związku z tym wpływowa grupa kapłanów oraz silna władza państwowa. Grecy uważali się więc za ludzi wolnych, szczególnie w zakresie myśli. Również mitologia grecka opisywała bogów jako bardziej „ludzkich”, z wadami i zaletami człowieka, a często także wchodzących w bezpośrednie relacje z ludźmi. Wielu ludzi w Grecji mieniło się filozofami (z gr. „miłośnikami mądrości”) i starało się nie tylko obserwować niebo, ale także zrozumieć, co się na nim dzieje. Po raz pierwszy stawiano pytanie „dlaczego”, a nie tylko pytanie „jak”.

Pierwsze ogólne myśli o świecie sformułował na przełomie VII i VI w. p.n.e. Tales z Miletu. Stwierdził on m. in., że Księżyc świeci światłem odbitym od Słońca. Postulował, że woda jest pierwotną substancją, z której pochodzą inne rodzaje materii. W jego



obrazie przyrody rewolucyjny był brak jakiegokolwiek nadprzyrodzonej istoty. Podobne poglądy głosił Anaksymander z Miletu, sugerując, że gwiazdy to wirujące koła sprężonego powietrza, być może wypełnione ogniem, który przez małe otworki wydostaje się na zewnątrz. Zaćmienie Słońca wiązało się więc z zatkaniem owych otworków. Z kolei na Księżycu był jego zdaniem tylko jeden otwór (jak w miechu) i dlatego jego świecenie zależało od obrotu. Warto wymienić jeszcze Heraklita z Efezu, który uznawał, że świat jest wieczny i nie został stworzony przez żadnego z bogów, a pramaterią był ogień, który odpowiednio zapalając się i przygasając, podtrzymuje istnienie świata. Materia, jego zdaniem, jest w wiecznym ruchu (gr. *panta rhei*) i nieustannym procesie przeobrażania się.

Mimo tych śmiałych poglądów, które z dzisiejszego punktu widzenia moglibyśmy uznać za racjonalne, pogląd na temat kształtu Ziemi i jej miejsca we Wszechświecie był nadal bardzo prymitywny, uważano ją za płaszczyznę, walec, niekę, a nawet gigantyczny korzeń zwężający się ku dołowi. Pierwszą koncepcję sferyczności Ziemi przypisuje się Pitagorasowi, choć jest bardziej prawdopodobne, że była ona dziełem jego uczniów, zwanych pitagorejczykami. Oryginalne uzasadnienie tej koncepcji nie jest znane, ale możliwe, iż bazowała ona na pozaobserwacyjnych przesłankach, takich jak idealność kształtu kulistego w geometrii. W każdym razie powstał w ten sposób pierwszy geocentryczny model kosmosu – kulista, niczym niepodparta Ziemia okrążana była przez wszystkie gwiazdy i planety z Księżycem i Słońcem na czele.

Świat człowieka nadal był jednak nieruchomy. Dopiero w V wieku p.n.e. Filolaos z Tarentu ogłosił oryginalną koncepcję, że w centrum świata znajduje się ogień, zwany Hestią, oświetlający i ogrzewający wszystko. Ziemia, podobnie jak wszystkie inne ciała niebieskie, w tym Słońce, miała okrążyć ten ogień raz na dobę, obracając się do niego zawsze niezamieszkałą stroną w taki sposób, że ognia tego nie można było ujrzeć. Ten ruch obrotowy tłumaczył jednak dobowy ruch sfery niebieskiej. Warto odnotować, że w modelu tym Słońce nie świeciło własnym światłem, lecz odbijało blask Hestii. Do wyjaśnienia ruchów Ziemi, Księżycy, Słońca, znanych wówczas pięciu planet: Merkurego, Wenus, Marsa, Jowisza i Saturna oraz gwiazd potrzeba było dziewięciu sfer obracających się współśrodkowo. Jednakże pitagorejczycy uważali 10 za liczbę doskonałą, więc Filolaos „poprawił” swój model, dodając dodatkową sferę, po której miało krążyć fikcyjne ciało niebieskie – Przeciwiemia. Model oczywiście nie był słuszny, a ruch sfery niebieskiej łatwiej było wyjaśnić po prostu jej obrotem wokół własnej osi, co zaproponował Ekfantos. Niemniej jednak był to pierwszy opis Wszechświata dopuszczający, że Ziemia nie stanowi nieruchomego centrum, lecz porusza się w przestrzeni. Koncepcja ta nie przyjęła się szeroko wśród greckich filozofów.

W 360 r. p.n.e. Platon ogłosił swój dialog *Timaios*, w którym wyłożył koncepcję budowy Wszechświata przyrównanego do istoty żywej obejmującej w sobie

wszystkie inne istoty żywe. Wszechświat według Platona miał kształt obracającej się kuli, ponieważ Bóg „uważał, że taki kształt jednostajny jest bez porównania piękniejszy od niejednostajnego”. Na szczęście koncepcja żywego kosmosu także się nie przyjęła, choć uczeń Platona, Eudoksos z Knidos, zainspirowany poglądem mistrza wyjaśnił ruchy ciał niebieskich za pomocą systemów współśrodkowych (homocentrycznych) sfer, mających Ziemię za środek. Gwiazdy umieszczone były na najbardziej zewnętrznej sferze obracającej się raz do roku. Wyjaśnienie ruchów Słońca (dobowych i rocznych) wymagało dwóch sfer obracających się wokół różnych osi. Księżyc wymagał aż trzech sfer, których obroty złożone razem tłumaczyły dopiero wszelkie aspekty jego ruchu. Łącznie model ucznia Platona był skomplikowanym zespołem bardzo wielu sfer współśrodkowych, obracających się wokół różnych osi i z różnymi prędkościami. Wyobrażenia przestrzenna i geniusz Eudoksosa nie uchroniły go przed krytyką. Planety obracające się wokół Ziemi powinny jawić się stale tej samej wielkości i jasności, a z tym nie zgadzały się obserwacje.

Podsumowaniem modeli sfer homocentrycznych były poglądy Arystotelesa. Filozof uważał, że materia ziemską składa się z czterech elementów: Ziemi – najcięższej, tworzącej środek świata, wody – lżejszej, tworzącej na powierzchni Ziemi morza, jeziora i rzeki, powietrza – jeszcze lżejszego, otaczającego Ziemię kulistą warstwą, oraz ognia – najlżejszego elementu sięgającego aż do sfery Księżycy. Ten ziemski, podksiężycowy świat był niedoskonały – przemijający i niszczywalny. Ponad sferą Księżycy znajdował się eter budujący i wypełniający wszystkie ciała niebieskie – doskonały, wieczny i niezniszczalny. Wszystkie ciała niebieskie znajdowały się w nieustannym ruchu kołowym, a wszystkimi zjawiskami rządziła celowość zapoczątkowana przez „pierwszy czynnik poruszający”. Świat podzielony więc został na materialną, dostępną naszemu poznaniu Ziemię oraz nierozpoznawalną, rządzącą się innymi prawami Niebo.

W drugiej połowie IV wieku p.n.e. nastąpił moment zwrotny w historii cywilizacji greckiej i terenów Bliskiego Wschodu. Podboje Aleksandra Macedońskiego sprawiły, że Grecy objęli władzę nad terenami dawnych cywilizacji Mezopotamii i Egiptu. W Aleksandrii założono słynną Bibliotekę Aleksandryjską i Muzeum (Musejon), będące w rzeczywistości świetnie wyposażonym ośrodkiem badawczym, w skład którego wchodziły m.in. obserwatorium astronomiczne, ogród zoologiczny i botaniczny. W szczytowym momencie rozwoju w bibliotece tej zgromadzonych było 400–700 tysięcy zwojów rękopisów. Cywilizacja grecka przechodziła z okresu myślenia i modeli do ery pomiarów i eksperymentowania.

Eratostenes po raz pierwszy obliczył obwód Ziemi, mierząc kąt padania promieni słonecznych w Syene (obecnie Asuan) i Aleksandrii. Otrzymał wynik 250 000 stadionów, lecz wartość tej jednostki nie jest do końca znana. Według najbardziej prawdopodobnych szacowań oznaczało to około 39 000 km, co jest

wynikiem zaskakująco poprawnym, biorąc pod uwagę wiele nieścisłości w pomiarach. Podejmowane były także próby ustalenia odległości do innych ciał niebieskich dowodzące między innymi, że Słońce jest wielokrotnie większe od Ziemi. Pomiary wykonane przez Arystarcha z Samos (ok 310–230 r. p.n.e.) naprowadziły go na koncepcję, że niemożliwe jest, aby Słońce, które ma 300 razy większą objętość od Ziemi, krążyło wokół niej (w rzeczywistości Słońce jest 109 razy większe od Ziemi) – i ta idea, mimo że nie przyjęła się ówczesnie (a nawet była zwalczana), może być śmiało uznawana za załóżkę pierwszego modelu heliocentrycznego w historii nauki.

Główny nurt nauki poszedł tymczasem w innym kierunku. Aleksandryjski matematyk Apoloniusz z Pergii wprowadził koncepcję ruchu ciała po tzw. ekscentryku, a więc kole, którego środek nie leżał w punkcie odniesienia, ale w pewnej odległości od niego. Korzystając z tego modelu, astronom Hipparch wyjaśnił na nowo ruch Słońca i Księżyca z uwzględnieniem nieregularności w długości pór roku i (pozornie) niejednostajnego ruchu Słońca po niebie. Poruszało się ono więc po ekscentryku względem Ziemi. Podobnie Księżyc, którego oś obrotu obiegała Ziemię co mniej więcej 10 lat. Istniało jeszcze inne wyjaśnienie niejednostajnego ruchu Słońca i Księżyca, które sprowadzało się geometrycznie do tego samego opisu. Według tej koncepcji Ziemia znajdowała się na środku wielkiego koła zwanego deferentem, po którym biegł z jednostajną prędkością punkt będący z kolei środkiem drugiego, mniejszego koła, zwanego epicyklem, a po nim z jednostajną prędkością biegło Słońce.

Hipparch opracował jedynie teorię ruchu Słońca i Księżyca, lecz jego koncepcja została rozwinięta przez Klaudiusza Ptolemeusza, który, używając koncepcji deferentów – ekscentryków i krążących po nich epicykli, skonstruował kompletną teorię ruchu wszystkich widocznych ciał niebieskich, tj. Słońca, Księżyca, pięciu znanych planet oraz sfery gwiazd stałych. Model ten opisany w dziele „*Mathematike Syntaxis*” (znanym też pod nazwami „*Megale Syntaxis*” i „*Almagest*”) stał się na półtora tysiąca lat zasadniczą podstawą astronomii. System ten opierał się na pięciu nienaruszalnych zasadach, w które ówczesnie wierono:

1. Ziemia spoczywa nieruchomo w środku świata.
2. Obserwowane ruchy ciał niebieskich są ich ruchami rzeczywistymi.
3. Wszystkie ruchy odbywają się po kołach, gdyż koło jest najdoskonalszą krzywą; w celu wytłumaczenia złożonych ruchów planet nakłada się na siebie kilka ruchów kołowych.
4. Ruchy po kołach są ruchami jednostajnymi, jeśli jednak nie da się zaobserwować ruchów wyjaśnić bezpośrednio tą zasadą, to zawsze można znaleźć we wnętrzu koła taki punkt, z którego ów ruch wydaje się jednostajny.
5. Sfera gwiazd stałych wykonuje jeden obrót w ciągu doby, udzielając tego ruchu pozostałym sferom.

Ptolemeusz traktował „*Mathematike Syntaxis*” jako konstrukcję modelu matematycznego. Poszukiwanie

fizycznego modelu Wszechświata, wyjaśniającego ruch ciał niebieskich i ich odległości, zawarł w swoim drugim wielkim dziele pt. „*Hipotezy planet*”. Tam koła zostały zastąpione sferami, pomiędzy którymi nie było pustych miejsc, a więc górna granica jednej z nich była jednocześnie dolną granicą następnej.

W VII wieku pojawiła się na Bliskim Wschodzie nowa potęga, która przeobraziła stare cywilizacje nie tylko pod względem politycznym, ale i kulturalnym – islam i wyznający go Arabowie. Nowi muzułmańscy władcy, tytułowani kalifami, popierali i otaczali opieką nauki, a szczególnie astronomię i astrologię. W miastach powstawały ośrodki naukowe, takie jak Dżundiszapur w Persji (dziś wschodni Iran), gdzie schronili się filozofowie greccy, i Harran w północno-zachodniej Mezopotamii (dziś południowo-wschodnia Turcja), gdzie z powodzeniem uprawiano astronomię.

Zainteresowanie Arabów astronomią wynikało z ich kultury. Jako kupcy odbywali długie podróże, często przez niezamieszkałe obszary, i niezbędna była umiejętność orientowania się w kierunku drogi. Z drugiej strony nakazy islamu żądały, aby w czasie modlitwy zwracać się w kierunku świętego miasta Mekki, a kierunek ten był możliwy do określenia jedynie w odniesieniu do gwiazd. Wreszcie okres postów wyznaczany był przez Arabów za pomocą kalendarza księżycowego, który opierał się na znajomości ruchów Księżyca i obserwacji jego położenia. W świecie muzułmańskim głęboko zakorzenione były także przepowiednie astrologiczne opierające się na pozycjach Słońca, Księżyca i planet.

W 829 roku za czasów kalifa al-Mamuna powstało w Bagdadzie jedno z pierwszych stałych obserwatoriów astronomicznych. Naukowcy studiowali tam dzieła Ptolemeusza, przekładając je na język arabski i sporządzając dokładne tablice planetarne. Pomagało im w tym opracowane w VIII wieku przez Ibrahima al-Fazariego astrolabium. Był to krąg metalowy z podziałką kątową i przeziernicą służącą do nastawiania na ciała niebieskie. Przy użyciu tego przyrządu obliczano odległość kątową gwiazdy albo planety od zenitu.

W szczytowym okresie swojej potęgi, w X i XI wieku, Arabowie podbili Egipt i południową Hiszpanię, zaszczepiając tam także szacunek do osiągnięć astronomii oraz zakładając ośrodki badawcze. W XIII wieku Mezopotamia została z kolei podbita przez mogolskiego wodza Hulagu-chana (wnuka Czyngis-chana), który wystąpił jako mecenas astronomii, nie tylko przeznaczając znaczne środki pieniężne, ale także zakładając nowe obserwatorium w miejscowości Maraga w irańskim Azerbejdżanie. To tam Nasir al-Din al-Tusi, najwybitniejszy z astronomów islamskich, na podstawie precyzyjnych pomiarów skonstruował tablice planetarne nazwane na cześć dynastii Hulagu Tablicami Ilchanidów, a także opracował nową geometryczną teorię ruchu planet. Teoria ta wyjaśniała położenia planet jako złożenie

jednostajnych ruchów kołowych, przy zastosowaniu specjalnie dobranych par wektorów. Teorię tę rozwinął

Ibn al-Shatir z Damaszku w połowie XIV wieku, sprawiając, że zbędne stały się ekscentryki, epicykle, a promienie głównych kół poprowadzone zostały z Ziemi jako środka, z którym związane były owe pary wektorów al-Tusiego. Opis ten, mimo swojego geocentrycznego charakteru, bliski był koncepcji geometrycznej stosowanej później przez Mikołaja Kopernika.

Nieocenioną zasługą astronomów muzułmańskich było wzbogacenie nauki olbrzymią ilością danych obserwacyjnych oraz przechowanie myśli naukowej przekazanej przez uczonych greckich. Swoimi dociekaniem i działaniami spięli jak gdyby klamrą wielki dorobek naukowy starożytności z powstającą w Europie średniowieczną astronomią. W czasie bowiem, gdy Arabowie przyswajali naukę grecką, w Europie panował chaos wywołany upadkiem Cesarstwa Rzymskiego. Kulturowo wśród europejskich narodów rosło w siłę chrześcijaństwo. Zarówno na zachowującym w pewnym stopniu ciągłość kulturową Bizancjum, jak i w targanym wojnami i wpływem narodów germańskich Zachodzie punkt ciężkości nauki przesunął się z rozważań filozoficznych na teologiczne. Przykładem tej „nowej astronomii” było dzieło Kosmasa Indikopleustesa z 535 roku pod znamienym tytułem „Chrześcijańska topografia świata oparta na świadectwie Pisma Świętego, w które nie wolno chrześcijaninowi wątpić”. Zawierała ona tezę, że „nie można wierzyć świeckiej nauce, która wyobraża sobie, że rozumem można objaśnić świat”. Opierając się na Biblii, głosił on, że na środku świata leży Palestyna, jako Ziemia Święta, zaś na północy wznosi się ogromna góra, za którą kryją się w nocy wszystkie ciała niebieskie, krążąc po sferach obracanych przez specjalnych aniołów. Cały ten świat z boku ograniczony był pionowymi ścianami, a u góry przykryty stropem. Ponad tak skonstruowanym światem swą siedzibę miał Bóg, który nad nim czuwał. Na zachodzie w myśl panującej doktryny filozoficznej zdefiniowanej przez św. Augustyna, czyli augustynizmu, wszelkie badanie świata było w ogóle grzechem próżnej ciekawości, a głównym celem ludzkiego umysłu było poznanie Boga i własnej duszy. Uznanie nauki „pogańskim wymysłem” doprowadziło do niszczenia dorobku naukowego i palenia ksiąg i bibliotek nie tylko na terytorium byłego Cesarstwa Rzymskiego, ale także na zdobytych w wyniku krucjat terenach arabskich. Ponownie jedynymi ośrodkami względnie wysokiego wykształcenia stały się klasztory, a większość ludzi Europy niezależnie od stanu była analfabetami. Astronomia została ograniczona jedynie do konstrukcji kalendarzy.

Stan ten zaczął ulegać poprawie dopiero w XII wieku, gdy europejscy uczeni zainteresowali się nauką narodów islamu i odkryli na nowo dzieła greckich filozofów. W XII wieku Albert Wielki i św. Tomasz z Akwinu opracowali nową zasadę, w myśl której nauki przyrodnicze były względnie niezależne od

teologii, opisując ten sam przedmiot, ale z innego punktu widzenia. Nie mogły one jednak stawać w sprzeczności wobec religii. Powstała scholastyka, która opierała się na analizie i dyskusowaniu dzieł starożytnych bez podważania ich za pomocą własnych teorii czy doświadczeń. Obraz tego przedstawiony jest w „Boskiej komedii” Dantego, gdzie Ziemię otacza dziewięć sfer kryształowych unoszących ciała niebieskie, z czego ostatnia nadaje ruch pozostałym. Planety są umocowane na mniejszych kulach, toczących się po tych sferach. Każdej ze sfer przyporządkowany jest anioł czuwający nad jej ruchem, przy czym im wyższa sfera, tym wyższy stopień anioła w hierarchii niebieskiej. Obszar ziemski składa się z czterech elementów – ziemi, wody, powietrza i ognia, zaś część niebieska z eteru. Są to dobrze znane, prymitywne teorie z domieszką powszechnej ówczesnie hierarchii feudalnej. Jednakże już ich sformułowanie i dopuszczenie do publicznego wydania stanowiło postęp w stosunku do wieków poprzednich.

Średniowieczna Europa żyła w przeświadczeniu, że Ziemia jest nieruchomym środkiem świata. Astronomia podążała drogą donikąd, jednakże skrepowanie więzami feudalizmu i władzy Kościoła utrudniało zmianę kursu. Sytuacja zmieniła się w epoce odrodzenia, gdy wielkie odkrycia geograficzne udowodniły nad wszelką wątpliwość, że Ziemia jest kulą, a ich duch napęlił umysły ludzkie odwagą do stawiania pytań i poszukiwania na nie odpowiedzi za pomocą umysłu. Pojawił się humanizm, który nad sprawy Boże przedkładał uczucia ludzkie oraz wierzył w człowieka i jego możliwości. Celem nauki przestała być służba Kościołowi, a ponownie zaczęło być poznawanie świata. Budziło się przekonanie, że człowiek stanowi część przyrody i niekoniecznie musi być centralną istotą Wszechświata.

W tych warunkach zaczęły pojawiać się pierwsze koncepcje ruchu Ziemi, początkowo oparte na mistycznych spekulacjach, że centralną pozycję przestrzeni zajmuje Bóg, a nieskończoność Wszechświata jest obrazem wszechmocy Bożej. Taki kosmos nie miał geometrycznego środka, więc wszystkie ciała niebieskie, w tym Ziemia, musiały być obdarzone ruchem. Te idee oddziaływały szczególnie na uczonych skupionych w nowo powstałych uniwersytetach europejskich. Wyodrębniły się nowe nauki przyrodnicze oparte na materiale doświadczalnym i obserwacyjnym. Do ich rozwoju wydatnie przyczyniło się wynalezienie druku przez Jana Gutenberga w połowie XV wieku. Rozwijała się także astronomia. Przełożono (z arabskiego) i przestudiowano dokładnie dzieła Ptolemeusza i modele obrazujące jego układ planetarny. Na ich podstawie powstały obszerne podręczniki astronomii stworzone przez wiedeńskich badaczy Georga Puerbacha i Johanna Müllera, jednakże dalszy rozwój astronomii wymagał człowieka o umyśle krytycznym i przenikliwym, który potrafiłby sięgnąć do sedna zagadnienia. Takim uczonym był Polak, Mikołaj Kopernik.



J. Weiner i J. Weiner 3, „Jak powstało życie na Ziemi”, Wyd. Copernicus Center Press, nagroda w konkursie Złota Róża za najlepszą polską książkę popularyzatorską z 2022 roku.



Ostatni nosorożec biały północny (podgatunek *Ceratotherium simum cottoni*), całodobowo chroniony przez straż przed kłusownikami. Autor fotografii: Matjaz Krivic, zdobywca nagrody „Travel Photographer of the Year 2022” WWW.TPOTY.COM.

Warto też przeczytać: T. Ulanowski, „Ostatnia minuta: Pieszo przez antropocen”, Wyd. Czarne, 2022.

## Zakręty ewolucji – bioróżnorodność

*Definicja: pod słowem ziemna bioróżnorodność rozumiemy „katalog” odmian żywych istot i ich wzajemnych oddziaływań na naszej planecie. Jest to dynamicznie zmieniająca się sytuacja określana przez wymieranie gatunków i pojawianie się nowych, w zmieniających się warunkach środowiska.*

Ocenia się dziś, że życie na Ziemi rozpoczęło się 3,5–4,0 mld lat temu. „Drobne” pół miliarda niepewności, bo nie ma jak tego zbadać i zmierzyć dokładniej. Standardowo uważa się, że życie rozpoczęło się od jednego typu komórki (LUCA, Last Universal Common Ancestor), a pasjonaci analiz genetycznych twierdzą, że można przypisać temu typowi komórek 355 działających jeszcze dziś na Ziemi genów. To są przypuszczenia, ponieważ nie zachowały się żadne materialne pozostałości wczesnych organizmów, miękkich i nietrwałych. Odnajdowane od niedawna ślady, które mogłyby być śladami dennych „mat” bakteryjnych (3 mld lat), to zgrabna wprawdzie, ale tylko hipoteza. Oznaczenia zawartości izotopów węgla w materiałach ubiegłych epok wskazują na początki życia na granicy 3–4 miliardów lat.

Z powodów naturalnych (zmiany środowiska) wymiera około 10% wszystkich gatunków w ciągu miliona lat. Dzięki badaniom geochemicznym, geofizycznym, geologicznym i biologicznym wiemy jednak, że życie na Ziemi rozwijało się burzliwie i nieliniowo. Badania naszej planety wskazują także na następstwa kilku katastrof, z którymi łączy się przyspieszone wymieranie gatunków i rozpoczynanie życia od nowa. Katastrofy przyspieszają ewolucję, zmieniają jej kierunki.

Dziś, w kolejnej epoce, którą nazwaliśmy antropocenem, wymieranie gatunków uległo przyspieszeniu w wyniku różnorodnej, niepoddającej się globalnej regulacji, działalności człowieka. Szacuje się, że obecne tempo wymierania jest tysiąc razy większe, niż gdybyśmy tu na Ziemi nie istnieli.

Rozmiary katastrof naturalnych wyceniono:

- ordowicka, 440 mln lat temu, wymarło około 85% gatunków;
- dewońska, 374–359 mln lat temu, wymarło 40% wszystkich rodzajów organizmów morskich;
- permska, 252 mln lat temu, wymarło ok. 90–95% gatunków organizmów morskich, przeszło 60% rodzin gadów i płazów i 30% rzędów owadów, wyginęły też drzewiaste widłaki, skrzypy i paprocie;
- triasowa, 201 mln lat temu, wyginęła cała gromada konodontów i 23–34% morskich rodzajów zwierząt;
- kredowa, 66 mln lat temu, wyginęło około 3/4 gatunków roślin i zwierząt żyjących na Ziemi.

W ostatnich dwu katastrofach wymarło 81% morskich i 70% naziemnych (już wyszły z oceanu na ląd) gatunków. Kregowce odradzały się przez 30 mln lat. W każdej epoce geologicznej czasowe zmniejszanie się różnorodności form życia prowadziło do powstawania nowych nisz ekologicznych dla gatunków, które przetrwały katastrofę. Najczęściej przywołuje się tu przypadek szansy, którą uzyskały ssaki (a więc także nasi przodkowie) po odejściu dinozaurów w kredzie (65 mln lat). Co do przyczyn katastrof, snuć możemy jedynie przypuszczenia: najpoważniejsza katastrofa środowiskowa zagroziła życiu 2 mld lat temu, w wyniku gromadzenia się tlenu pochodzenia biologicznego wytwarzanego przez nowe gatunki bakterii. Ale Ziemię doświadczały także wulkany, meteoryty, zlodowacenia i ocieplenia... Wreszcie na 6 mln lat wstecz datujemy pierwszego przodka człowieka, początkowo bezbronną,

bezwłosa małpę. I od tego czasu tempo wymierania gatunków jest skorelowane z przyrostem ludzkiej populacji na naszej planecie. W 1900 roku na Ziemi żyło 1,7 mld ludzi, w 1987 roku liczba ta osiągnęła 5 mld, dziś jest nas 7,6 mld. Ale... dziś znany jest jedynie jeden gatunek człowieka. Różnorodność gatunkowa zmienia się w zależności od lokalizacji na globie, a więc od temperatury, ilości opadów, położenia względem poziomu morza, rodzaju gleby, rodzaju oddziaływań międzygatunkowych. Bioróżnorodność lądowa jest 25 razy wyższa niż oceaniczna, a na lądzie najważniejszym środowiskiem zachowującym różnorodność są lasy. Ziemia jest także różnorodna pod względem występowania gatunków endemicznych (charakterystycznych dla danego regionu geograficznego, takiego jak lasy podzwrotnikowe Brazylii, Madagaskar i Indie). Ocenia się, że na Ziemi żyje 8,7 mln gatunków lądowych i 2,2 mln oceanicznych, a opisano zaledwie 1,2 mln lądowych i 194 tys. morskich. W związku z przyspieszonym wymieraniem obecnie żyjących organizmów prawdopodobnie nie zdążymy poznać wielu z tych jeszcze istniejących obok nas. Czy antropocen może doprowadzić do zniknięcia życia na Ziemi? Takiego postulatu nauka nie formułuje. Pozostaje jednak otwartym pytanie o przyszłość naszego gatunku. A przyszłość życia na Ziemi i jego koniec w bardzo odległej perspektywie możemy jedynie rozpatrywać w powiązaniu z cyklem rozwojowym naszej gwiazdy, Słońca.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

## Klub 44 F



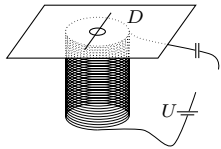
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2024

### Zadania z fizyki nr 772, 773

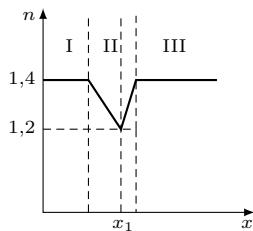
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**772.** Rakieta jest rozpydzana w wyniku wyrzucania ciągłego strumienia gazu, którego prędkość względem rakiety jest stała i wynosi  $v_0$ . Początkowa prędkość rakiety jest równa zero. Ile wynosi prędkość rakiety, gdy jej energia kinetyczna osiąga wartość maksymalną? Siłę ciężkości zaniedbujemy.

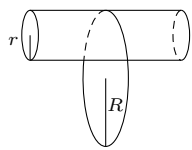
**773.** Na górze ustawionej pionowo zwojnicy leży cienki kawałek kartonu, a na nim mały nadprzewodzący pierścień z cienkiego drutu, którego średnica  $d_1$  jest znacząco mniejsza od średnicy pierścienia  $D$  (rys. 1). Po podłączeniu zwojnicy do źródła napięcia  $U$  szeregowo z kondensatorem pierścień podskakuje, gdy  $U > U_0$ . Jakie powinno być napięcie źródła w analogicznym doświadczeniu z pierścieniem o takiej samej średnicy, ale wykonanego z drutu o średnicy  $d_2$ ? Współczynnik samoindukcji takiego pierścienia wynosi w przybliżeniu  $L = kD \ln(1, 4D/d)$ . Opór zwojnicy możemy pominąć.



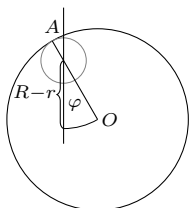
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po zakończeniu roku szkolnego 2022/2023  
i po sprawdzeniu zadań  
760 (WT = 2,6), 761 (WT = 1,83)

Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowicz	Gliwice	2-40,56
Jacek Konieczny	Poznań	38,28
Tomasz Wietecha	Tarnów	16-37,54
Konrad Kapcia	Poznań	2-35,60
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96
Ryszard Baniewicz	Wrocław	1-29,40
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-20,97
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5-20,95
Paweł Kubit	Kraków	15,73
Krzysztof Magiera	Łosów	4-13,42
Jan Zambrzycki	Białystok	4-11,93

Lista obejmuje uczestników ligi, których stan konta wynosi przynajmniej 10 punktów i którzy przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2021, 2022 lub 2023.

### Rozwiązania zadań z numeru 10/2023

Przypominamy treść zadań:

**764.** Na rysunku 2 pokazana jest zależność współczynnika  $n$  załamania ośrodków I, II i III od współrzędnej  $x$ . Wąska wiązka światła monochromatycznego pada na granicę rozdziału ośrodków I i II. Dla jakich kątów padania światło przejdzie do ośrodka III?

**765.** Na nieruchomy poziomy walec o promieniu  $r$  nałożona jest cienka obręcz o promieniu  $R$  (rys. 2). Znajdź okres małych drgań obręczy w płaszczyźnie pionowej. Nie ma poślizgu między obręczą i walcem.

**764.** Z prawa załamania wynika, że wzdłuż trajektorii promienia wartość wyrażenia  $n(x) \sin \alpha_x$  nie zmienia się ( $\alpha_x$  – kąt padania na granicę rozdziału, której odpowiada współrzędna  $x$ ).

Ponieważ w drugim obszarze współczynnik początkowo maleje, kąty padania będą rosły w miarę zbliżania się do granicy, której odpowiada współrzędna  $x_1$ . Styczna do trajektorii promienia będzie zbliżać się do prostopadłej do osi  $x$ . Jeśli kąt padania w ośrodku II osiągnie wartość  $\pi/2$ , to promień nie wyjdzie z tego ośrodka. Natomiast jeśli kąt padania będzie mniejszy od  $\pi/2$ , nawet na granicy o współrzędnej  $x_1$ , gdzie współczynnik załamania osiąga minimalną wartość, promień przejdzie z obszaru II do III.

W przypadku granicznym mamy:

$$n_1 \sin \alpha_0 = n(x_1) \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha_0 = \frac{1,2}{1,4} \approx 0,86; \quad \alpha_0 \approx \pi/3.$$

Wiązka światła przeniknie do obszaru III dla kątów padania

$$0 \leq \alpha < \pi/3.$$

**765.** Tarcie jest statyczne, możemy więc skorzystać z zasady zachowania energii mechanicznej. Gdy środek obręczy odchyłony jest z położenia równowagi o mały kąt  $\varphi$  (rys. 4), energia potencjalna układu ma postać:

$$E_p = Mgh = Mg(R-r)(1 - \cos \varphi) \cong Mg(R-r)\varphi^2/2,$$

gdzie  $M$  jest masą obręczy. Energia kinetyczna  $E_k$  jest sumą energii ruchu środka obręczy, który obraca się wokół osi walca z prędkością  $V$ , oraz energii ruchu obrotowego obręczy wirującej wokół środka masy w przeciwną stronę z prędkością  $v$ . Ponieważ nie ma poślizgu,  $V = v$ . Zatem

$$E_k = \frac{MV^2}{2} + \frac{MR^2}{2} \frac{v^2}{R^2} = MV^2 = M(R-r)^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Różniczkując po czasie obie strony równania  $E_p + E_k = \text{const}$ , otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{2(R-r)}\varphi = 0.$$

Częstość małych drgań obręczy wynosi  $\omega = \sqrt{g/(2(R-r))}$ , a okres drgań

$$T = 2\pi\sqrt{2(R-r)/g}.$$

Zadanie możemy też rozwiązać, traktując ruch środka obręczy jako czysty obrót wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt styczności z walcem A (rys. 4).

Równanie ruchu obrotowego ma postać:

$$2MR^2\varepsilon = -MgR \sin \varphi \approx -MgR\varphi,$$

stąd przyspieszenie kątowe  $\varepsilon = -g\varphi/2R$ , a przyspieszenie liniowe  $a = \varepsilon R$ . Z drugiej strony  $a = (R - r) d^2\varphi/dt^2$ . Porównując oba wyrażenia na  $a$ , otrzymujemy takie samo jak poprzednio równanie oscylatora harmonicznego.

### Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F w roku szkolnym 2022/2023

Średni współczynnik trudności zadań w omawianym okresie ma wartość 2,66. W przypadku pięciu z nich jest większy od trzech.

Nie było poprawnych rozwiązań zadania **745** ( $WT = 3,85$ ) z kinematyki relatywistycznej. Należało w nim znaleźć prędkość pręta poruszającego się wzdłuż swojej osi, którego długość, widziana pod zadanym kątem przez odległego obserwatora, była równa jego długości spoczynkowej. W rozwiązaniu trzeba było uwzględnić skrócenie długości pręta w układzie spoczywającego obserwatora oraz fakt, że światło docierające do niego w tym samym momencie z obu końców pręta przebywa różne drogi. Wysyłane jest wcześniej z bardziej oddalonego końca pręta, a pręt przemieszcza się do chwili wysłania sygnału z bliższego końca.

W zadaniu **749** ( $WT = 3,47$ ) należało obliczyć sprawność cyklu złożonego z izobary o malejącej objętości i izochory o rosnącym ciśnieniu połączonych na wykresie  $pV$  prostym odcinkiem. Autorzy nadesłanych rozwiązań nie uwzględnili, że ciepło pobierane jest tylko na części tego odcinka, a na pozostałej części oddawane.

Zadanie **754** ( $WT = 3,51$ ) z elektrostatyki poprawnie i elegancko rozwiązał **Krzysztof Magiera**.

W zadaniu **750** ( $WT = 3,14$ ) należało znaleźć kąt odbicia od podłoża spadającego, rozkręconego do danej prędkości koła rowerowego i uwzględnić przypadki odbicia przed i po zakończeniu poślizgu. Najlepsze rozwiązanie z błędem rachunkowym, który spowodował jednak, że rozwiązania dla dwóch przypadków się nie „zszywały”, przysłał **Marian Łupieżowiec**.

Zadanie **743** ( $WT = 3,1$ ) dotyczyło obwodu ze źródłem prądu stałego połączonym szeregowo z dwoma kondensatorami. Do jednego z kondensatorów dołączono równolegle, połączone w szereg cewkę i diodę. Poprawnie na wszystkie pytania odpowiedział **Ryszard Baniewicz**, a z błędem rachunkowym **Jan Zarzycki**.

W zadaniu **759** ( $WT = 2,95$ ) metalowe, okrągłe, równoległe płytki, których środki połączone były przewodnikiem, obracały się w przeciwnych kierunkach wokół wspólnej osi w prostopadłym do płytek polu magnetycznym. Należało znaleźć napięcia między punktami płytek znajdującymi się naprzeciw siebie. Zadanie rozwiązał bezbłędnie **Konrad Kapcia**, autorzy pozostałych rozwiązań nie uwzględniali siły elektrycznej działającej obok siły Lorentza na elektrony w płytce.

W zadaniu **742** ( $WT = 2,91$ ) drewniana kulka przymocowana była za pomocą nici do dna cylindrycznego naczynia z wodą, w znanej odległości od jego środka. Pytanie było: do jakiej prędkości kątowej należało rozkręcić naczynie, aby nić odchyliła się od pionu o zadany kąt? Bezbłędne rozwiązania nadesłali **Sławomir Buć** i **Paweł Perkowski**. W innych, co było zaskoczeniem, pojawiło się nieprawdziwe założenie, że siła Archimedesesa

spowodowana ciśnieniem wody działa pionowo do góry, a nić odchyliła się na zewnątrz. Tymczasem w obracającym się naczyniu siła odśrodkowa działająca na drewnianą kulkę jest mniejsza niż siła Archimedesesa w kierunku poziomym i warunek równowagi zapewnia działająca na zewnątrz siła naprężenia nici, zatem nić odchyliła się do środka naczynia.

Żadne z wymienionych dotychczas nazwisk nie powtórzyło się, co świadczy o tym, że poziom w omawianym roku był dość wyrównany.

W zadaniu **753** ( $WT = 2,73$ ) z optyki światło wychodzące z przedmiotu przechodziło przez soczewkę, odbijało się od ustawionego pod kątem  $\pi/4$  do jej osi optycznej zwierciadła płaskiego, a następnie wpadało do naczynia z warstwą wody. Należało znaleźć odległość tego naczynia od osi optycznej, aby ostry obraz powstał na dnie. Rozwiązania ocenione na jedynkę, podobne do „firmowego”, przysłali **Konrad Kapcia**, **Paweł Perkowski** i **Tomasz Wietecha**. Autorem również poprawnego rozwiązania, które oceniłam subiektywnie jako odrobinę mniej eleganckie, był **Ryszard Baniewicz**. Spodobał mi się pomysł **Andrzeja Nowogrodzkiego**, który porównywał drogi optyczne przebyte przez promienie w wodzie i powietrzu, ale niestety nie doprowadził go do pomyślnego końca.

Pytania w niektórych zadaniach były tak dobrane, żeby można było na nie odpowiedzieć, stosując narzędzia elementarne. Uczestnicy ligi zdecydowanie preferowali jednak bardziej zaawansowane metody matematyczne, co często pozwalało uogólnić rozwiązania, ale jednocześnie bardzo je wydłużało.

W zadaniu **760** ( $WT = 2,6$ ) ze statyki sznurek przyczepiony był dwoma końcami do sufitu i znana była odległość środka sznurka od sufitu. Należało znaleźć naprężenie sznurka w najniższym punkcie i w połowie odległości od sufitu. Zadanie rozwiązyli poprawnie R. Baniewicz, K. Kapcia, P. Perkowski i T. Wietecha, ale ku mojemu lekkiemu rozczarowaniu powołali się na gotowe wzory opisujące krzywą łańcuchową.

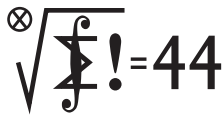
Zadanie **744** ( $WT = 2,7$ ) dotyczyło pocisku balistycznego. Pytanie było: z jaką najmniejszą prędkością i pod jakim kątem należy go wystrzelić z bieguna, aby poruszając się pod wpływem siły ciężkości, trafił w punkt na równiku? S. Buć rozwiązał zadanie w podobny sposób jak proponowany, wykorzystując wiedzę, że pocisk porusza się po fragmencie elipsy. T. Wietecha rozwiązał równanie ruchu tego pocisku we współrzędnych biegunowych.

Najwięcej rozwiązań ocenionych na maksymalną liczbę punktów przysłali **Konrad Kapcia** (11), **Paweł Perkowski** (10) i **Tomasz Wietecha** (8).

Barierę 44 punktów przekroczyli: **P. Perkowski** po raz piąty, **J. Zambrzycki** po raz czwarty i **S. Buć** po raz pierwszy.



# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2024

Lista uczestników ligi zadaniowej  
**Klub 44 M**  
po zakończeniu sezonu  
(roku szkolnego) 2022/23

Radosław Kujawa	43,57
Paweł Najman	8-43,16
Adam Woryna	3-40,91
Marek Spychała	4-40,20
Janusz Fielt	3-39,62
Jerzy Cisło	16-37,70
Paweł Kubit	7-36,11
Szymon Tur	35,35
Piotr Kumor	15-35,26
Janusz Olszewski	23-33,61
Łukasz Merta	2-31,48
Piotr Wiśniewski	29,69
Jędrzej Biedrzycki	29,54
Marian Lupieżowiec	1-28,80
Witold Bednarek	9-28,13
Krzysztof Kamiński	3-27,16
Janusz Wojtal	26,30
Roksana Słowik	2-23,94
Maciej Mostowski	1-22,90
Krzysztof Zygan	1-21,89
Marcin Małogrosz	4-20,62
Andrzej Kurach	3-20,51
Michał Kieza	4-20,46
Grzegorz Wiączkowski	19,95
Karol Matuszewski	1-19,74
Stanisław Bednarek	3-17,73
Błażej Żmija	2-17,31
Patryk Jaśniewski	1-16,62
Piotr Łaba	14,50
Tomasz Wietecha	14-13,65

Legenda (przykładowo): stan konta 9-28,13 oznacza, że uczestnik już dziewięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziesiątej) rundzie ma 28,13 punktu.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:  
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;  
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2021, 2022 lub 2023.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktoś zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, nazwisko tej osoby automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

## Zadania z matematyki nr 875, 876

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**875.** Dany jest ciąg  $(x_1, \dots, x_N)$  o wyrazach  $x_i \in \{0, 1\}$  ( $N$  jest ustaloną liczbą nieparzystą). Niech  $a_k = \sum_{i < k} x_i$ ,  $b_k = \sum_{i > k} (1 - x_i)$ ,  $c_k = a_k + b_k$  (dla  $k = 1, \dots, N$ ). Wiadomo, że dokładnie jedna liczba  $z$  występuje w ciągu  $(c_1, \dots, c_N)$  nieparzyście wiele razy. Dla ustalonego  $N$  wyznaczyć wszystkie możliwe wartości  $z$ .

**876.** Wykazać, że dla liczb  $x, y, z \geq 0$  o sumie 3 zachodzi nierówność:

$$\frac{x}{y^2 + y + 1} + \frac{y}{z^2 + z + 1} + \frac{z}{x^2 + x + 1} \geq 1.$$

Zadanie 876 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

## Rozwiązania zadań z numeru 10/2023

Przypominamy treść zadań:

**867.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n \geq 3$ , dla których istnieje  $n$ -elementowy zbiór różnych liczb całkowitych  $M$  o następującej własności: w każdym trójelementowym podzbiórze zbioru  $M$  są dwie liczby, których suma jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym.

**868.** Ciąg nieskończony  $a_1, a_2, \dots$  jest dany wzorami:  $a_1 = 1$ ,

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wykazać istnienie i znaleźć wartość granicy  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{2n})$ .

**867.** Przykład zbioru sześćelementowego:  $\{-1, 3, 5, -2, 6, 10\}$ . Dowolny jego trójelementowy podzbiór ma dwa elementy leżące w trójce  $\{-1, 3, 5\}$  lub w trójce  $\{-2, 6, 10\}$ ; a każda z nich ma wszystkie dwu-sumy postaci  $2^k$ .

Niech teraz  $M$  będzie zbiorem  $n$ -elementowym;  $n \geq 7$ . Jeśli ma on trójelementowy podzbiór złożony z liczb niedodatnich, to w nim żadna para nie sumuje się do potęgi dwójki. Zajmijmy się więc przypadkiem, gdy w zbiorze  $M$  jest co najmniej pięć liczb dodatnich. Niech  $z$  będzie największą z nich. Co najwyżej jedna suma postaci  $x + z$  (gdzie  $0 < x < z$ ,  $x \in M$ ) może być potęgą dwójki – gdyby bowiem były dwie takie sumy  $x + z = 2^j$ ,  $y + z = 2^k$  ( $0 < x < y < z$ , więc  $j < k$ ), mielibyśmy  $y + z = 2^{k-j}(x + z) > 2z$ , wbrew temu, że  $y < z$ .

Istnieją zatem w zbiorze  $M$  co najmniej trzy liczby dodatnie  $a, b, c < z$ , z których żadna nie daje w sumie z liczbą  $z$  wyniku postaci  $2^m$ . Niech  $c$  będzie największą z nich. Rozumowanie, analogiczne do przeprowadzonego powyżej, pokazuje, że co najmniej jedna z sum  $a + c$ ,  $b + c$  (przyjmijmy, że  $a + c$ ) nie jest potęgą dwójki. Tak więc trójelementowy zbiór  $\{a, c, z\}$  nie zawiera pary z sumą: potęga dwójki.

Stąd odpowiedź: liczby  $n$  o postulowanej własności to 3, 4, 5, 6.

**868.** Podana rekurencja daje się zapisać prościej:  $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$  (dla  $k \geq 1$ ). Stąd  $a_{k+1}^2 = a_k^2 + 2 + \frac{1}{a_k^2}$ . Ustalmy  $n \geq 2$ . Sumowanie po  $k = 1, \dots, n-1$  daje po redukcji zależność:

$$(*) \quad a_n^2 = 2n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k^2} = 2n + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{a_k^2}$$

(bo  $a_1 = 1$ ). Stąd widać, że  $a_n^2 \geq 2n$  (dla  $n \geq 2$ ). Zamieniamy literkę  $n$  na  $k$  i przepisujemy tę nierówność jako  $\frac{1}{a_k^2} \leq \frac{1}{2k}$  (dla  $k \geq 2$ ). Wstawiamy to ponownie do wzoru (\*) i dostajemy oszacowanie:

$$a_n^2 \leq 2n + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{2k} < 2n + \frac{1}{2} H_n$$

(zwykle oznaczenie:  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ). Tak więc (dla  $n \geq 2$ ):

$$0 \leq a_n - \sqrt{2n} = \frac{a_n^2 - 2n}{a_n + \sqrt{2n}} < \frac{\frac{1}{2} H_n}{2\sqrt{2n}}.$$

Iloraz po prawej stronie dąży do zera, gdy  $n \rightarrow \infty$  (znana asymptotyka:  $H_n \sim \ln n$ ). Stąd, ostatecznie,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{2n}) = 0$ .

## Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (15), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (23), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (14), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. PeczarSKI, M. Adamaszek (8), P. Kubit (7), J. Cisło (16), W. Bednarek (9), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (5), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedziej, M. Miodek, M. Małogrosz (4), K. Kamiński, J. Fiett, M. Spychała (4), A. Kurach, S. Bednarek, M. Pater (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

## Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, L. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, L. Merta, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski, B. Żmija;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, P. Burdzy, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Józwiak, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, K. Matuszewski, K. Maziarz, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, K. Morawski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Piłkuła, B. Piotrowska, W. Pompe, N. Porwol, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, J. Węgrecki, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, K. Zygan, P. Żmijewski.

## Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 M w roku szkolnym 2022/2023

Pora na doroczne omówienie. Jak co roku, przyjrzymy się wybranym zadaniom z minionego sezonu, więc głównie tym, które okazały się trudniejsze – wysoki współczynnik trudności (*WT*) i/lub niewielka liczba poprawnych rozwiązań (*LPR*). Przedstawiamy ciekawe pomysły rozwiązań oraz komentarze uczestników. Niektóre ich fragmenty umieszczamy w e-wydaniu (w zakładce „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej”).

Warto zwrócić uwagę na powtarzającą się sytuację, gdzie, nietypowo – przy „zasadniczo” właściwej koncepcji – uwadze rozwiązującego umyka jakiś niuans; dopracowanie rozwiązania często jest całkiem proste – a niekiedy wcale nie „całkiem”...

\* \* \*

**Zadanie 845.**  $[x_i, y_j \geq 0 \ (i, j = 1, \dots, n) \Rightarrow (\sum_{i \neq j} x_i y_j)^2 \geq (\sum_{i \neq j} x_i x_j)(\sum_{i \neq j} y_i y_j)]$  (*WT* = 2,41; *LPR* = 11). W oznaczeniach z rozwiązania firmowego ( $S_x = \sum x_i$ ,  $S_y = \sum y_i$ ,  $Q_x = \sum x_i^2$ ,  $Q_y = \sum y_i^2$ ,  $T = \sum x_i y_i$ ) należy wykazać, że  $(S_x S_y - T)^2 \geq (S_x^2 - Q_x)(S_y^2 - Q_y)$ .

W kilku pracach zostało to zrobione prościej niż „firmowo”. Dla ilustracji – **Witold Bednarek**: rozwijamy kwadraty i grupujemy według potęg  $S_x$ ; daje to do wykazania (po odrzuceniu banalnego przypadku  $Q_y = 0$ ) nierówność kwadratową względem  $S_x$ :

$$Q_y S_x^2 - 2T S_y S_x + (T^2 + S_y^2 Q_x - Q_x Q_y) \geq 0.$$

Wystarczy, że wyróżnik  $\Delta$  tego trójmianu będzie niedodatni; a tak jest, bowiem

$$\Delta = 4(T^2 - Q_x Q_y)(S_y^2 - Q_y) = 4(\text{czynniki} \leq 0)(\text{czynniki} \geq 0).$$

Równie prosto (i dość podobnie): **Michał Adamaszek**, **Piotr Kumor** oraz **Janusz Olszewski**, który ponadto pokazał jeszcze kilka sposobów ( $\rightarrow$  e-wydanie).

**Zadanie 847.**  $[f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ciągła;  $\forall a, b \ (a < b) \exists u, v: a \leq u < v \leq b \ \forall x \in [a, b]: f(u) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow f$  niemalejąca] (*WT* = 2,07; *LPR* = 12). **Piotr Kumor** zwrócił uwagę, że w założeniu można odrzucić istnienie jednej z liczb  $u, v$ , na przykład  $u$ , wymagając jedynie, by  $f(a) \leq f(v)$ . Zadanie niezbyt trudne; było wszelako kilka prób dowodu nie wprost opartych na domniemaniu, że jeśli funkcja ciągła nie jest niemalejąca, to na pewnym podprzedziale jest malejąca. Tak jednak być nie musi; kontrprzykłady można znaleźć w wielu miejscach; tu zacytujemy <http://math.stackexchange.com/questions/42326>.

**Zadanie 849.**  $[4^x + 4^y + 1 = z^4; x, y, z \in \mathbb{N} \Rightarrow x, y, z = ?]$  (*WT* = 2,53; *LPR* = 8). Ogólniejsze warianty tego równania znajdują się w literaturze. Łászló Szalay w pracy z roku 2002 podał pełne rozwiązanie (w liczbach naturalnych) równania  $2^a + 2^b + 1 = c^2$ , na co zwrócił uwagę **Michał Adamaszek** – a także **Piotr Kumor**, który (jak niejednokrotnie bywało) przysłał obszerny esej ( $\rightarrow$  e-wydanie) zawierający omówienie wzmiankowanej pracy oraz dwóch innych prac, wraz z niezbędnymi odsyłaczkami (i garścią własnych refleksji).

Ponadto dobre rozwiązania przysłali: **W. Bednarek**, **J. Cisło**, **K. Kamiński**, **J. Olszewski** (dwa sposoby), **M. Pater**, **P. Wiśniewski**.

**Zadanie 850.**  $[\triangle ABC$  ostrokątny;  $M$  – środek  $BC$ ;  $P$  na odcinku  $AM$ ;  $BP \cap AC = D$ ;  $CP \cap AB = E$ ;  $(\text{okr}ABC) = \Omega$ ;  $BP \cap \Omega = \{B, X\}$ ;  $CP \cap \Omega = \{C, Y\} \Rightarrow \exists T$  na odcinku  $AM$ :  $T \neq A$ ;  $T \in (\text{okr}AXD) \cap (\text{okr}AYE)]$  (*WT* = 2,92; *LPR* = 3 (8 ?)). Zadanie zrobili: **M. Adamaszek**, **S. Tur**, **M. Pater**, **J. Olszewski**, **A. Kurach**, **T. Wietecha**, **J. Cisło**, **M. Spychała**. Wszyscy bezbłędnie pokazali, że okręgi  $AXD$  i  $AYE$  przecinają się (poza  $A$ ) w punkcie leżącym na prostej  $AM$ ; ale tylko trzech autorzy, wymienieni w pierwszej kolejności, pokazali, że leży on na odcinku  $AM$ ; w pozostałych pracach ten aspekt tezy albo został zignorowany, albo odczytany z rysunku, który „wygląda, jak wygląda” – bez wyraźnego uzasadnienia konfiguracji.

**Zadanie 851.** [Marcin sprasza gości... Graf prosty  $(V, E)$ ;  $|V| = 50$ ;  $T = \{\{i, j, k\} \subset V: i \neq j \neq k \neq i \mid \{ij, ik, jk\} \cap E \in \{1, 2\}\}$ ;  $|T| \geq \frac{3}{4} \binom{50}{3}$ ;  $\min |E| = ?]$  (*WT* = 2,97; *LPR* = 5 (7 ?)). Wynik: 525. Dobre rozwiązania (niewiele się różniące od firmowego): nierówność Cauchy’ego–Schwarza lub między średnimi plus konstrukcja grafu realizującego równość: **M. Adamaszek**, **J. Cisło**, **J. Olszewski**, **M. Pater**; oraz **P. Wiśniewski** z banalną konstrukcją grafu 21-regularnego (bo taki okazuje się optymalny): 50 punktów na okręgu, połączenia między punktami leżącymi w odległości  $\geq 15/50$  (długości okręgu).

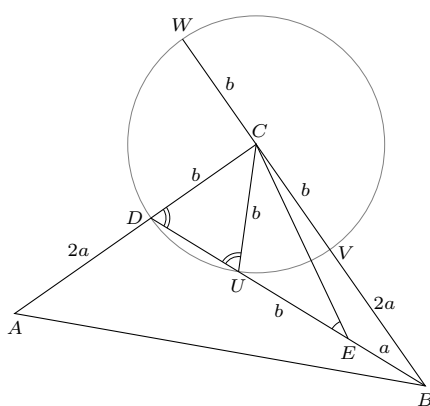


W dwóch innych pracach powtarza się rozumowanie: dorysowujemy krawędzie kolejno, po jednej, tak by w każdym kroku maksymalizować liczbę nowo powstałych dobrych trójkątów  $T$  (stop, gdy osiągniemy  $\frac{3}{4} \binom{50}{3}$ ). Tu jednak znacząca usterka logiczna: skąd wiadomo, czy jakaś inna strategia, rezygnująca z optymalizacji na *każdym* kroku, nie okaże się globalnie bardziej skuteczna?

**Zadanie 856.** [Czy istnieje ciąg  $(a_i)_{i=1}^{\infty}$  taki, że zarówno on, jak i ciąg  $(d_i)_{i=1}^{\infty}$ , gdzie  $d_i = |a_i - a_{i+1}|$ , jest permutacją zbioru  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ?] (WT = 2,20; LPR = 12). Jest wiele takich ciągów. Konstrukcja indukcyjna: w każdym kolejnym kroku ciąg jest przedłużany o kilka wyrazów; w rozwiązaniu firmowym – stale o trzy, według jednolitej procedury. Jednak zgrabniejsze były rozwiązania, w których procedura zmieniała się, często w zależności od bieżącego stanu (w stylu: *if... then... else...*). W e-wydaniu zamieszczamy trzy takie prace (M. Adamaszek, J. Cisko, J. Fiett), gdzie metoda była prosta, a opis klarowny (choć w najkrótszej z nich Czytelnik musi sobie coś w uzasadnieniu dopowiedzieć).

Jeszcze dwie prace prezentujemy w e-wydaniu: **Janusz Olszewski** wskazał metodę, przy której każdy z ciągów  $(a_i)$ ,  $(d_i)$  oraz  $(e_i)$ , gdzie  $e_i = |d_i - d_{i+1}|$ , stanowi permutację zbioru  $\mathbb{N}$ ; i przypuszcza, że metodę można tak usprawnić, by permutację  $\mathbb{N}$  stanowiły także ciągi o wyrazach  $f_i = |e_i - e_{i+1}|$ ,  $g_i = |f_i - f_{i+1}|$  itd., przez cały (nieskończony) alfabet. O tym, że tak jest w istocie, przekonuje **Piotr Kumor**, podając stosowne odsyłacze do literatury.

**Zadanie 858.** [Zbiór  $Z = \{A, B, C, D, E\}$  w przestrzeni:  $AB = BC = CA = DE = 1$ ;  $(\triangle ABC) \cap (\text{odcinek } DE) \neq \emptyset \Rightarrow \exists X \in Z \forall Y \in Z: XY \leq 1$ ] (WT = 3,60; LPR = 1). Najtrudniejsze w omawianym sezonie. Autor: **Michał Adamaszek**. Dobra praca: **Janusz Olszewski** – zamieszczona w e-wydaniu (trochę za długa, by ją skrótno tu w druku przedstawić). To jedyne poprawne rozwiązanie, przy tym różne od firmowego (podanego przez Autora i niezależnie – w nieco innym języku – przez redaktora ligi). Był jeszcze jeden ciekawy dowód, niestety przy dodatkowym (upraszczającym) założeniu, że odcinek  $DE$  przecina brzeg trójkąta  $ABC$ .



**Zadanie 861.** [ $\triangle ABC$ :  $AC = BC$ ;  $D \in (\text{odc } AC)$ ,  $E \in (\text{odc } BD)$ ;  $2AD = BD$ ,  $2BE = AD \Rightarrow \sphericalangle CDE = 2 \sphericalangle CED$ ] (WT = 1,93; LPR = 8). Różne metody; wszystkie przebijają urodą rozwiązanie, które pokazał **Janusz Olszewski**; niech (jak w firmówce)  $BE = a$ ,  $CD = b$ ; okrąg o środku  $C$  i promieniu  $b$  przecina proste  $BD$  oraz  $BC$  odpowiednio w punktach  $D, U$  oraz  $V, W$ , przy czym  $BV < BW$ . Wtedy  $BD \cdot BU = BV \cdot BW$ , czyli  $4a \cdot BU = 2a \cdot (2a + 2b)$ ; stąd  $BU = a + b$ , więc  $EU = b$ ; przy konfiguracji jak na rysunku ( $EU \leq ED$ ) dostajemy tezę:  $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CUD = 2 \cdot \sphericalangle CED$  (!). (Końcówka wymaga niewielkiej modyfikacji, gdy  $EU > ED$ ; ale Autor dostarczył jeszcze dwa inne rozwiązania, mniej zwięzłe i efektowne, za to działające bez retuszu przy każdej konfiguracji).

**Zadanie 862.** [Graf skierowany, skończony; krawędzie w  $m$  kolorach; każdy wierzchołek ma stopień wychodzący  $> m \Rightarrow z$  każdego wierzchołka wychodzi nieskończenie wiele nieskończonych ścieżek o identycznej sekwencji kolorów] (WT = 2,64; LPR = 4). **M. Adamaszek, S. Bednarek, J. Olszewski, K. Zygan** przysłali dobre rozwiązania – we wszystkich istota rozumowania jest podobna jak w rozwiązaniu firmowym. Ponadto w dwóch pracach pojawia się dowód (poprawny), że dla każdej liczby naturalnej  $d$  można utworzyć zbiór identycznie pokolorowanych ścieżek długości  $d$

(wychodzących z ustalonego wierzchołka), przy czym moc tego zbioru rośnie, gdy  $d$  rośnie. To jednak jeszcze nie teza zadania („dowolnie wiele dowolnie długich” to nie to samo co „nieskończenie wiele nieskończenie długich”). Wypełnienie tej luki nie jest banalne.

**Zadanie 863.** [Liczba pierwsza  $p > 2$ ;  $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}: p + 4k^2$  – pierwsza;  $p = ?$ ] (WT = 2,33; LPR = 9). Styl przekombinowanego rozwiązania firmowego udzielił się (na szczęście) niewielu uczestnikom. Typową metodą było badanie serii przypadków, sterowanych resztami z dzielenia  $p$  przez niskie potęgi dwójki. Jako wzorzec niech posłuży rozumowanie, które przeprowadzili **Jerzy Cisko i Krzysztof Kamiński**: liczba  $p$  zapisuje się w dokładnie jednej z postaci  $4k + 1$ ,  $8k + 3$ ,  $16k + 7$ ,  $16k + 15$ ; wartość wyrażenia  $p + 4k^2$  wynosi wówczas odpowiednio  $(2k + 1)^2$ ,  $(2k + 1)(2k + 3)$ ,  $(2k + 1)(2k + 7)$ ,  $(2k + 3)(2k + 5)$ , co może być liczbą pierwszą jedynie przy  $k = 0$ ; zatem  $p$  (liczba pierwsza) może być równa jedynie 3 lub 7; i łatwo sprawdzić, że 3 i 7 spełniają wymagane warunki.

**Janusz Olszewski** zauważył zbędność założenia, że liczba  $p$  jest pierwsza ( $\rightarrow$  e-wydanie; tam również zamieszczamy interesujący komentarz, jakim opatrzył swoją pracę **Michał Adamaszek**).

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).



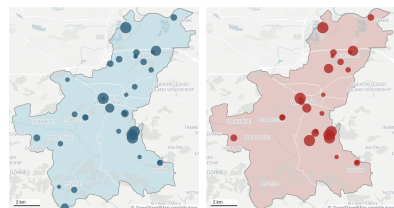
## Jak mądrze wydawać miliony

„Zielony Milion” powstał we współpracy z grupą naukowców z Akademii Górniczo-Hutniczej (Piotr Faliszewski), Uniwersytetu Jagiellońskiego (Jarosław Flis, Stanisław Szufa) i Uniwersytetu Warszawskiego (Piotr Skowron, Grzegorz Pierczyński).

O metodzie równych udziałów, zanim została wdrożona, pisaliśmy także w *Delcie*, w artykule *Tyrania większości...*  $\Delta_{22}^{11}$ . Z naukowej uczciwości nie będziemy sobie jednak przypisywać tego sukcesu. Wpływ prestiżu publikacji oraz wyników teoretycznych na wdrożenie też mógłby być jednak trudny do udowodnienia.

Polecamy eksperyment myślowy: co by się wydarzyło, gdyby metoda używana w budżetach partycypacyjnych (czyli każdy wyborca zaznacza dowolną liczbę kandydatów i do sejmiku wybierani są ci z największą liczbą głosów) stosowana była w wyborach parlamentarnych?

W wyniku tak opisanej procedury w skarbonkach wyborców może zostać spora kwota, dlatego w metodzie równych udziałów początkowy budżet jest sztucznie zwiększony, aby to nie początkowa ilość pieniędzy w skarbonkach, ale wydana kwota odpowiadała prawdziwemu budżetowi. Po szczegóły odsyłamy do wspomnianego wyżej artykułu z  $\Delta_{22}^{11}$ .



Projekty wybrane przez metodę równych udziałów (po lewej) i te, które byłyby wybrane, gdyby zastosować metodę większościową (po prawej), na mapie Wieliczki. Wielkość kropki odpowiada kosztowi wybranego projektu. Więcej statystyk znajduje się na stronie <https://equalshares.net/>

W kwietniu 2023 roku w Wieliczce utworzono ekologiczny budżet partycypacyjny pod nazwą „Zielony Milion”. Mieszkańcy mogli zgłaszać własne pomysły na projekty dotyczące ekologii i ochrony środowiska, a potem głosować na te, na których zależy im najbardziej. Do finansowania zakwalifikowano 30 projektów o całkowitym koszcie równym prawie milionowi złotych. Pewnie nie napisalibyśmy jednak o tym w *Delcie*, gdyby nie fakt, że Wieliczka jako pierwsza odważyła się zaufać naukowcom i zastosowała nową, sprawiedliwszą metodę wyboru projektów do finansowania: *metodę równych udziałów*.

Metoda równych udziałów została stworzona przez Piotra Skowrona (Uniwersytet Warszawski) oraz Dominika Petersa (CMU/Toronto). Prace ją opisujące zostały opublikowane w 2020 i 2021 roku na czołowych konferencjach informatycznych: ACM-EC (styk ekonomii i informatyki) i NeurIPS (sztuczna inteligencja). Autorzy pokazali, że jest to pierwsza metoda, która posiada pożądane własności proporcjonalności, a jej wynik da się szybko (wielomianowo) obliczyć.

Aby wytłumaczyć, jak działa metoda równych udziałów, posłużmy się następującym przykładem. Wyobraźmy sobie, że grupa 10 dzieci znalazła na ulicy banknot 20-złotowy i zadowolona idzie do sklepu. Aby wybrać produkty, które dzieci kupią, każde z nich wskazuje te, na które ma ochotę. Jako że fanów czekolady jest więcej niż innych przekąsek, najwięcej głosów dostają smakołyki czekoladowe. Pieniądzy starcza na kilka czekoladowych przysmaków, więc dzieci je kupują, a fani kwaśnych żelków, chrupek i fit chipsów z marchewki bio muszą obejść się smakiem.

Dzieci pewnie zreflektowałyby się, że nie jest to zbyt sprawiedliwe, i zamiast kolejnej czekoladowej przekąski kupiłyby coś innego. Jednak dokładnie taka metoda stosowana jest praktycznie we wszystkich budżetach partycypacyjnych – liczymy głosy i finansujemy te projekty, które dostały ich najwięcej. Nie dbamy o to, by reprezentować wszystkie grupy wyborców. Pomijamy tańsze (np. lokalne) projekty z mniejszą liczbą głosów. W ogóle nie zwracamy uwagi na to, czy kolejny wybrany projekt to już trzecia ścieżka rowerowa zakwalifikowana do finansowania, czy pierwsze zajęcia dla seniorów. Jedyna modyfikacja polega czasem na sztucznym podzieleniu budżetu na dzielnice, co częściowo eliminuje problem rozłożenia geograficznego, ale ignoruje wszystkie inne podziały wyborców.

W jaki sposób dzieci mogłyby sprawiedliwiej wybrać przekąski? Mogłyby po prostu podzielić się pieniędzmi po równo – każde dostałoby 2 złote. Wówczas, jeżeli byłoby na przykład trzech fanów kwaśnych żelków, to mogłyby oni kupić sobie paczkę żelków za 6 złotych, niezależnie od tego, ilu jest fanów czekolady. Taka idea przyświeca właśnie metodzie równych udziałów. Najpierw budżet dzielony jest po równo między wyborców, wszyscy mają więc równe udziały. Potem po kolei rozpatrywane są projekty, zaczynając od tych, które dostały najwięcej głosów. Jeżeli wyborcy, którzy zagłosowali na dany projekt, mają wystarczającą ilość środków, to jest on finansowany, a ich wirtualne skarbonki odpowiednio odchudzone. Jeżeli nie, projekt jest odrzucany. Procedura kończy się, kiedy żaden projekt nie może już zostać sfinansowany.

„Zielony Milion” okazał się sporym sukcesem. W porównaniu z metodą większościową było istotnie mniej wyborców, którzy nie dostali nic, czyli głosowali na same niewybrane projekty (18% versus 28%). Każdy wyborca zagłosował średnio na 2,54 projektu, z czego średnio 1,61 zostało wybranych (przy metodzie większościowej byłoby to 1,47). Wybrane projekty są też bardziej równomiernie rozłożone geograficznie, co można zobaczyć na marginesie.

Po Wieliczce metodę równych udziałów zastosowały kolejne dwa miasta: Świecie (woj. kujawsko-pomorskie) oraz Aarau w Szwajcarii. Czekamy na kolejne. Szlak jest przetarty, uchwały czekają na skopiowanie.

Za swoje wyniki, ale także pracę na rzecz sprawiedliwych budżetów partycypacyjnych, Piotr Skowron obsypany został w 2023 roku licznymi wyróżnieniami. Otrzymał prestiżowy grant ERC na badanie proporcjonalnych metod wyborczych, nagrodę *Social Choice and Welfare Prize* oraz został laureatem nagrody naukowej tygodnika „Polityka” w dziedzinie nauk ścisłych.

Oskar SKIBSKI

## Niebo w lutym

W drugim miesiącu roku Słońce wyraźnie zwiększa wysokość górowania i długość czasu spędzanego nad widnokregiem. Do końca lutego, który w tym roku ma 29 dni, Słońce zacznie przecinać południk lokalny na wysokości ponad  $30^\circ$ , a dzień wydłuży się do 11 godzin. W tym czasie Słońce przejdzie od środka gwiazdozbioru Koziorożca do środka gwiazdozbioru Wodnika.

Ostatniego dnia miesiąca Słońce spotka się z planetami Merkury i Saturn. Dla Merkurego będzie to koniunkcja górna, a zatem obie planety znajdą się wtedy za Słońcem. Przed koniunkcją Merkury przebywa na niebie porannym, gdzie ekliptyka tworzy już bardzo mały kąt z widnokregiem, dlatego przez cały miesiąc planeta pozostanie niewidoczna. Saturn natomiast świeci na niebie wieczornym, ale można go zaobserwować tylko w pierwszych dniach lutego tuż po zmierzchu nisko nad zachodnią częścią nieboskłonu. Potem Saturn zniknie w zorzy wieczornej.

Na pożegnanie można spróbować dostrzec Saturna 11 lutego, wykorzystując przy tym wracający na niebo wieczorne Księżyc. Godzinę po zachodzie Słońca Księżyc w fazie 4% zajmie pozycję na wysokości  $9^\circ$ , Saturna zaś należy szukać również około  $9^\circ$ , na godzinie 5 względem Księżyca. Blask Saturna wynosi  $+1^m$ . Sam Srebrny Glob w kolejnych dniach szybko nabierze wysokości nad horyzontem, stając się ozdobą wieczornego nieba. Przez pierwszych kilka nocy bardzo dobrze widoczne stanie się tzw. światło popielate, czyli nocna część Księżyca oświetlona światłem odbitym od naszej planety.

W dniach 14 i 15 lutego naturalny satelita Ziemi spotka się z parą planet Jowisz-Uran. Obie planety powoli zbliżają się do majowych koniunkcji ze Słońcem, ale w lutym ich warunki obserwacyjne pozostają bardzo dobre, choć obie planety wyraźnie przesuną się na zachód i zaczną górować jeszcze przed zachodem Słońca i zniknąć z nieboskłonu przed północą. Jowisz stopniowo dogania Urana, i do końca miesiąca dystans między planetami zmniejszy się od  $12^\circ$  do  $8^\circ$ . Największa planeta Układu Słonecznego w lutym zmniejszy blask od  $-2,4^m$  do  $-2,2^m$  oraz średnicę tarczy z  $40''$  do  $36''$ . Uran świeci blaskiem  $+5,8^m$ , i do jego odszukania przyda się lornetka. 14 lutego Księżyc w fazie 29% pokaże się  $8^\circ$  na zachód od Jowisza, do późnej jego faza zwiększy się do  $40^\circ$  i przejdzie on na pozycję  $5^\circ$  na zachód od Urana.

Posiadacze lornetek i teleskopów 22 lutego mogą zaobserwować koniunkcję dolną Kallisto, krążącego najdalej od Jowisza księżycy galileuszowego tej planety ze swoją planetą macierzystą. Około godziny 22 Kallisto przejdzie  $6''$  na południe od brzoju tarczy Jowisza ( $24''$  od jej centrum). Tej samej nocy od około 21:40 na tarczę planety wejdzie jej kolejny księżyc Io, co da się dostrzec w teleskopach. Nieco ponad godzinę później natomiast na tarczy Jowisza pokaże się cień Io, co da się dostrzec w większych lornetkach. Na przeszkodzie może stanąć jednak niskie już wtedy położenie planety nad widnokregiem, zaledwie  $4^\circ$ , która zajdzie niewiele ponad pół godziny później. Kallisto świeci na naszym niebie blaskiem  $+6^m$ , Io jest o  $0,5^m$  jaśniejsza.

16 lutego wieczorem Księżyc przejdzie przez I kwadrę, spotykając się jednocześnie z Plejadami, znaną gromadą otwartą gwiazd w Byku. Około godziny 22 Księżyc zbliży się na  $1^\circ$  do centrum tej gromady gwiazd. Kolejnej nocy Srebrny Glob zwiększy fazę do 63% i utworzy trójkąt równoramienny z dwiema najjaśniejszymi gwiazdami Byka: Aldebaranem i El Nath. Do obu gwiazd Księżycowi zabraknie po  $10^\circ$ . 18 lutego na ciemniącym niebie Księżyc w fazie 73% zajmie pozycję  $2^\circ$  na wschód od El Nath, by do swojego zachodu po godzinie 3 oddalił się od tej gwiazdy na prawie  $7^\circ$ .

W nocy z 20 na 21 lutego tarcza Srebrnego Globu zwiększy fazę do 89% i zbliży się na niewiele ponad  $2^\circ$  do Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt. Trzy noce później Księżyc w pełni odwiedzi Regulusa, najjaśniejszą gwiazdę Lwa, mijając ją w odległości trochę ponad  $3^\circ$ . Księżycowa tarcza 28 lutego zmniejszy fazę do 83% i wszędzie po godzinie 21 – w towarzystwie Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, odległej wtedy od Księżyca o prawie  $4^\circ$ .

Luty naturalny satelita Ziemi również zacznie od spotkania ze Spiką. W nocy z 1 na 2 lutego jego tarcza wszędzie  $8^\circ$  od niej, prezentując fazę 59%. Kolejnej nocy Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę, mijając w odległości  $3,5^\circ$  Zuben Elgenubi, drugą co do jasności, lecz oznaczaną na mapach nieba grecką literą  $\alpha$ , gwiazdę Wagi. Sama gwiazda jest o tyle ciekawa, że jest to bardzo szeroki układ podwójny, w którym składniki o jasnościach  $+2,8$  i  $+5,1^m$  dzieli na niebie dystans prawie  $4'$ . Na ciemnym niebie obie gwiazdy można zatem dostrzec gołym okiem, a w lornetce tworzą ładną parę, podobną trochę (choć wyraźnie węższą i ze słabszymi składnikami) do pary Mizar-Alkor w Wielkim Wozie.

Po ostatniej kwadrze Księżyc powędruje ku nowiu, przez który przejdzie 9 lutego przed północą. Niestety znajdzie się wtedy daleko na południe od ekliptyki, stąd Srebrny Glob pozostanie widoczny na nocnym niebie tylko przez kilka pierwszych dni miesiąca. 4 lutego jego sierp w fazie 38% zajmie pozycję  $4^\circ$  na zachód do Dschubby, jasnej gwiazdy Skorpiona, oznaczanej na mapach nieba grecką literą  $\delta$ . Do późnej sierp Księżyca w fazie 28% wszędzie niecałe  $2^\circ$  na wschód od Antaresa. Jeszcze 6 lutego przy czystym niebie powinno dać się dostrzec jego sierp w fazie 18%, który na godzinę przed wschodem Słońca zajmie pozycję na wysokości  $5^\circ$  nad południowo-wschodnim widnokregiem. Można go wtedy wykorzystać do odszukania znikającej w zorzy porannej planety Wenus, która znajdzie się ponad  $20^\circ$  na lewo od Księżyca, ale wzniesie się na zaledwie  $2,5^\circ$ . W przebiciu się przez jasne tło nieba pomoże jej blask wynoszący  $-3,9^m$ . To ostatnia szansa na dostrzeżenie tej planety przez najbliższe kilka miesięcy.

26 lutego maksimum swojej aktywności osiągnie długookresowa gwiazda zmienna R And. Jest to miryda, czyli olbrzym typu M, cyklicznie zmieniający fizycznie swoją jasność wraz ze wzrostem i kurczeniem się jego rozmiarów i temperatury powierzchni. W tym przypadku następuje zmiana jasności od  $+5,8^m$  do  $+15,2^m$  w czasie 409 dni. Jak widać, blisko maksimum jasności R And jest dobrze widoczna przez lornetkę. Gwiazda ta jest o tyle łatwa do odnalezienia, że znajduje się  $4,5^\circ$  na południowy zachód od Galaktyki Andromedy, lub  $50'$  na północny wschód od gwiazdy 5. wielkości  $\rho$  And, która tworzy trójkąt z jaśniejszymi o  $0,5^m$  gwiazdami  $\theta$  i  $\sigma$  And. Mieści się więc w jednym polu widzenia lornetki z galaktyką M31.

Pechowo akurat przełom zimy i wiosny jest najmniej korzystnym czasem do obserwacji tej gwiazdy. Najlepiej ją widać jesienią, gdy góruje prawie w zenicie. Mimo to około godziny 18:30 wciąż zajmuje ona pozycję na wysokości przekraczającej  $30^\circ$  nad zachodnią częścią widnokregu. Potem R And zbliża się do linii horyzontu, o którą ociera się około godziny 2. Na jej obserwację należy więc przeznaczyć początek nocy. Może tu niestety przeszkodzić bliski pełni Księżyc. Na szczęście podczas obserwacji tej gwiazdy ma się go za plecami. Na przełomie lutego i marca najlepszy okres widoczności R And przypada na czas, gdy Srebrny Glob jest jeszcze pod horyzontem.

Ariel MAJCHER

## Prosto z nieba: Setki bezgwiazdnych planet

\*Jak to w astronomii bywa, kwestia nazewnictwa to skomplikowana sprawa. W pierwszych artykułach opisujących nowe odkrycie użyto nazw „izolowane obiekty o masie planetarnej” i „planety swobodne”. Prasa popularnonaukowa uznała je za mało chwytliwe i przechrzciła te obiekty na *rogue planets*, *starless planets*, *wandering planets* albo *free-floating planets*.

Wielka Mgławica Oriona (Messier 42, M42 lub NGC 1976) jest najjaśniejszą mgławicą dyfuzyjną na niebie. Jest położona w Drodze Mlecznej, na południe od Pasa Oriona w gwiazdozbiore Oriona. Jest przykładem gwiazdowego żłobka, w którym rodzą się nowe gwiazdy.

Masa 0,6 masy Jowisza to mniej więcej dolna granica tego, co może zidentyfikować JWST, a 13 mas Jowisza to przybliżona granica między najbardziej masywną planetą a najmniej masywnym brązowym karłem.



Trzy różne obiekty JuMBO, czyli układy podwójne planet o masie Jowisza, znalezione w bardzo małym regionie Mgławicy Oriona. Za S. G. Pearson and M. J. McCaughrean arXiv:2310.01231

Pytanie na dziś: Mając za zadanie znalezienie planety o masie Jowisza, gdzie byście jej szukali? Gdzieś blisko gwiazdy, prawda? Bo przecież tak wyglądają układy planetarne – jest gwiazda (np. Słońce), a wokół niej orbitują planety. To oczywiście prawda, ale ponadto istnieją też samotne planety, swobodnie przemierzające przestrzeń kosmiczną\*. Naukowcy szacują, że w naszej Galaktyce może ich być więcej niż gwiazd (około dwa razy więcej). Problem w tym, że niesłychanie trudno je zaobserwować (przynajmniej do teraz) oraz nie do końca wiadomo, jak powstają.

Teoretycznie istnienie planet swobodnych przewidywano od dawna. A już w 2000 roku udało się zaobserwować kilka takich obiektów w Wielkiej Mgławicy Oriona. Jednak duże ilości swobodnych planet zaobserwowano dopiero pod koniec 2021 roku, gdy zespół astronomów, wykorzystując dane z kilku teleskopów Europejskiego Obserwatorium Południowego (ESO), odkrył 70 nowych planet swobodnych w naszej Galaktyce. Był to absolutny rekord, który oczywiście w 2023 roku pobili... Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba (JWST). Już w pierwszej fazie pracy za jego pomocą zaobserwowano ich prawie 8 razy więcej.

A konkretnie astronomowie Mark McCaughrean and Sam Pearson, obserwując Gromadę Trapez w Wielkiej Mgławicy Oriona, z wykorzystaniem JWST, odkryli około 540 obiektów o masach zbliżonych do masy Jowisza (od 0,6 masy Jowisza do około 13 mas Jowisza). Jest to znacznie więcej niż przewidywałyby symulacje i poprzednie modele mgławic gwiazdotwórczych. Co więcej, okazało się, że aż 9% tych obiektów znajduje się w układach podwójnych (tzn. orbitują wokół siebie – patrz zdjęcie). A nawet znaleziono dwa układy potrójne! Tego typu obiekty nie były nigdy wcześniej obserwowane. Nazwano je JuMBO – z angielskiego Jupiter-Mass Binary Objects. Ich odkrycie może mieć poważne implikacje dla modeli powstawania i ewolucji planet.

Nasz współczesny model powstawania gwiazd i planet, w bardzo dużym uproszczeniu, jest następujący. Jeśli wszystko, co mamy, jest chmurą gazu molekularnego, to ulega ona fragmentacji, rozpadając się na kurczące się skupiska gazu. Tam, gdzie gęstość gazu rośnie najszybciej, zaczynają powstawać nowe protogwiazdy. Protogwiazdy zazwyczaj tworzą wokół siebie dyski protoplanetarne. Z kolei w obrębie każdego dysku powstają niedoskonałości grawitacyjne, które rosną i prowadzą do powstawania rdzeni protoplanetarnych. Największe rdzenie protoplanetarne przekształcają się w planety (lub nawet protogwiazdy) i mogą tworzyć własne dyski, w których powstają układy księżycowe (lub planetarne).

Skąd więc wzięły się samotne, bezgwiazdne planety? Scenariusze są dwa. Swobodne planety uformowały się w taki sam sposób jak gwiazdy i brązowe karły, tj. w wyniku zapadnięcia się chmury gazu, tylko mniej masywnej albo już jako w pełni uformowane planety orbitujące wokół protogwiazdy zostały wyrzucone z układu planetarnego. Problem z pierwszym scenariuszem jest taki, że dotychczas sądzono, że jest mało prawdopodobne, aby w ten sposób powstały obiekty o masie mniejszej niż 3–5 mas Jowisza. A przecież najnowsze obserwacje JWST pokazują istnienie dużo mniej masywnych planet swobodnych, o masie tylko 0,6 mas Jowisza! Problem z drugim scenariuszem jest taki, że nie jest w stanie wytłumaczyć istnienia układów podwójnych planet swobodnych (znowu obserwowanych przez JWST). Jeśli takie układy uformowały się tak jak planety, a następnie zostały wyrzucone, to należy wyjaśnić, dlaczego układ nie rozpadł się podczas procesu wyrzucania.

Dopiero przyszłe, zaplanowane dla JWST pomiary ruchu własnego planet swobodnych mogą rozstrzygnąć, czy obiekty te uformowały się jako wyrzucone planety, czy „jak gwiazdy” – wyrzucone planety powinny wykazywać wysokie ruchy własne, a obiekty uformowane „jak gwiazdy” powinny wykazywać ruchy własne podobne do pobliskich gwiazd gromady.

Anna DURKALEC

Departament Badań Podstawowych (BP4),  
Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych





## Wielomiany podziału koła – część 2

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Przed przystąpieniem do lektury polecam zapoznać się z poprzednim kącikiem ( $\Delta_{24}^1$ ). Udowodniliśmy w nim istnienie ciągu wielomianów  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ ,  $\dots$ , które dla każdej liczby naturalnej  $n$  spełniają

$$(1) \quad \prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1.$$

W tym kąciku przyjrzymy się rozkładowi na czynniki pierwsze liczby  $\Phi_n(a)$  dla  $a \geq 2$ . Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą, która dzieli  $\Phi_n(a)$ . Ponieważ  $\Phi_n(a) \mid a^n - 1$ , więc  $p \mid a^n - 1$ . Istnieje zatem najmniejsza taka liczba całkowita dodatnia  $r$ , że  $p \mid a^r - 1$ . Nazywamy ją *rzędem  $a$  modulo  $p$* . Rząd jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej  $w$  spełniającej  $p \mid a^w - 1$ , w szczególności  $r \mid n$ . Zapiszmy  $n = rmp^k$ , przy czym  $p \nmid m$ . Niech  $\nu_p(N)$  oznacza wykładnik największej potęgi  $p$  dzielącej  $N$ . Dla  $p > 2$  otrzymujemy

$$(2) \quad \nu_p(a^r - 1) + k \stackrel{(i)}{=} \nu_p(a^n - 1) \stackrel{(ii)}{=} \sum_{D|n} \nu_p(\Phi_D(a)) \stackrel{(iii)}{=} \sum_{d|m} \sum_{j=0}^k \nu_p(\Phi_{rdp^j}(a)),$$

przy czym (i) wynika z lematu o zwiększaniu wykładnika  $p$ -adycznego (zob. kącik nr 24 w  $\Delta_{20}^{12}$ ), a (ii) wynika z (1). Równość (iii) wynika z obserwacji, że jeśli  $\nu_p(\Phi_d(a))$  jest niezerowe, czyli  $p \mid \Phi_d(a)$ , to  $p \mid a^D - 1$ , a więc  $r \mid D$ ; natomiast każdy podzielny przez  $r$  dzielnik  $n$  jest postaci  $rdp^j$ , w której  $d \mid m$  i  $j \leq k$ .

Z równości (2) wnioskujemy kolejno, że:

- (A) jeśli  $n = r$  ( $k = 0$  i  $m = 1$ ), to  $\nu_p(a^r - 1) = \nu_p(\Phi_n(a))$ ;
- (B) jeśli  $n = rp^k$  ( $k > 0$  i  $m = 1$ ), to  $\nu_p(\Phi_n(a)) = 1$ , co uzasadniamy indukcją po  $k$ ;
- (C) jeśli  $n = rmp^k$  ( $k > 0$  i  $m > 1$ ), to  $\nu_p(\Phi_n(a)) = 0$

Uzasadnienia powyższych implikacji można powtórzyć dla  $p = 2$  i  $n \geq 3$ , wykorzystując część 2(c) lematu o zwiększaniu wykładnika, sformułowanego w kąciku nr 24. Dzielniki pierwsze liczby  $\Phi_n(a)$  dla  $n \geq 3$  można zatem podzielić na *trywialne* (spełniające  $n = rp^k$  dla  $k > 0$ ) i *nietrywialne* (spełniające  $n = r$ ). Te pierwsze jest łatwo znaleźć, bo są dzielnikami  $n$ . Jest nawet prościej: zgodnie z Małym Twierdzeniem Fermata  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , czyli  $r \mid p - 1$  i  $r < p$ , a zatem z równości  $n = rp^k$  wynika, że  $p$  jest największą liczbą pierwszą dzielącą  $n$ . Dlatego  $\Phi_n(a)$  ma co najwyżej jeden dzielnik trywialny.

Trudniej znaleźć dzielniki nietrywialne. Wykażemy tu, że niemal zawsze jest co najmniej jeden taki dzielnik. Niech  $p$  będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby  $n$ . Wystarczy wykazać, że  $\Phi_n(a) > p$  – w takiej sytuacji nawet gdyby  $p$  okazał się dzielnikiem

trywialnym, to równość  $\nu_p(\Phi_n(a)) = 1$  implikuje istnienie dzielnika  $\Phi_n(a)$  różnego od  $p$ , a zatem nietrywialnego. Zapiszmy  $n = mp$ . Nietrudno udowodnić, że dla  $p \mid m$  zachodzi  $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^p)$ , a w przeciwnym przypadku  $\Phi_n(x)\Phi_m(x) = \Phi_m(x^p)$  – wystarczy porównać pierwiastki wielomianów po obu stronach (por.  $\Delta_{24}^1$ ). Ta pierwsza równość pozwala też wywnioskować, że jeśli każdy dzielnik pierwszy liczby  $t$  jest dzielnikiem pierwszym liczby  $m$ , to  $\Phi_{mt}(x) = \Phi_m(x^t)$ .

Ponieważ  $(a - 1)^{\varphi(n)} \leq \Phi_n(a) \leq (a + 1)^{\varphi(n)}$  dla  $a \geq 2$  (znów  $\Delta_{24}^1$ ), otrzymujemy

$$\Phi_n(a) \geq \frac{\Phi_m(a^p)}{\max\{1, \Phi_m(a)\}} \geq \frac{(a^p - 1)^{\varphi(m)}}{(a + 1)^{\varphi(m)}} \geq \frac{a^p - 1}{a + 1} \geq \frac{2^p - 1}{3}.$$

Jest jasne, że  $\frac{2^p - 1}{3} > p$  dla  $p > 3$ . Jeżeli  $p = 2$ , to  $n = 2^k = 2t$  oraz  $\Phi_n(a) = a^t + 1 > 2$ . Dla  $p = 3$  możliwe są dwie sytuacje. Dla  $n = 3^k = 3t$  mamy  $\Phi_n(a) = a^{2t} + a^t + 1 > 3$ . Jeśli  $n = 2^{k_1} 3^{k_2} = 6t$ , to mamy  $\Phi_n(a) = a^{2t} - a^t + 1$ , co jest większe od 3, gdy  $a > 2$  lub  $t > 1$ . W przypadku  $a = 2$  i  $t = 1$  mamy  $\Phi_6(2) = 3$ , i nie ma tu dzielnika nietrywialnego. Wykazaliśmy zatem:

**Twierdzenie.** *Jeśli  $n \geq 3$ ,  $a \geq 2$  oraz  $(n, a) \neq (3, 2)$ , to liczba  $\Phi_n(a)$  ma nietrywialny dzielnik pierwszy  $p$ , tzn. rząd  $a$  modulo  $p$  wynosi  $n$ .*

### Zadania

1. W zależności od różnych  $m, n \geq 3$  oraz  $a \geq 2$  wyznaczyć  $\text{NWD}(\Phi_n(a), \Phi_m(a))$ .
2. Niech  $\omega(n)$  oznacza liczbę różnych dzielników pierwszych liczby  $n$ . Udowodnić, że dla nieparzystego  $n$  zachodzi nierówność  $\omega(2^n - 1) \geq 2^{\omega(n)} - 1$ .
3. Rozważmy ciąg  $(2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^4 - 1, \dots)$ . Wykazać, że każdy wyraz tego ciągu ma dzielnik pierwszy, którego nie ma żaden wyraz poprzedni, z jednym tylko wyjątkiem:  $2^6 - 1$ . (*Bang, 1886*)  
(Jest to szczególny przypadek twierdzenia Zsigmondy'ego, o którym jeszcze kiedyś będzie mowa).
4. Udowodnić, że dla każdego naturalnego  $n \geq 2$  istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, które dają resztę 1 z dzielenia przez  $n$ .  
(Jest to szczególny przypadek twierdzenia Dirichleta).

**Wskazówki do zadań**  
 1. Dla różnych  $n$  dzielniki pierwsze  $\Phi_n(a)$  są różne (bo ma jednoznaczny rząd modulo  $p$ ).  
 2. Zob. poprzednią wskazówkę.  
 3. Zob. poprzednią wskazówkę.  
 4. Jeśli  $d \mid n$  i  $d < n$ , to  $d \mid \Phi_n(a)$  nietrywialnym dzielnikiem  $\Phi_n(a)$ .  
 Wówczas z tego, że rząd  $a$  modulo  $p$  wynosi  $n$ , wynika, że  $d \equiv 1 \pmod{p}$ .  
 Wystarczy teraz wykazać, że jeśli  $d \mid n$  jest niestawem o współczynniki całkowitych, to zbiór liczb pierwszych dzielących  $P(1), P(2), \dots, P(3), \dots$  jest nieskończony.



# Maths Beyond Limits



Rusza dziewiąta edycja międzynarodowego obozu matematycznego Maths Beyond Limits! Obóz odbywa się we wrześniu w polskich Beskidach i jest przeznaczony dla uczniów w wieku licealnym. Jeśli interesujesz się matematyką i chcesz poznać jej pasjonatów z innych krajów, ten obóz jest właśnie dla Ciebie! Wszystkich chętnych zapraszamy do wzięcia udziału w rekrutacji, która rozpocznie się **1 kwietnia 2024** i będzie trwała przez miesiąc.

*Dowiedz się więcej!*



<https://mathsbeyondlimits.eu/>



Maths Beyond Limits



maths\_beyond\_limits



mathsbeyondlimits@gmail.com