delta

NR 5 (588) 2023
CENA 6 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35-502 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

MATEMATYKA–FIZYKA–ASTRONOMIA–INFORMATYKA

h=6,63·10⁻³⁴ J·s π=3,141592...

Szyfr Lorenza i jego złamanie

str. 14

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

ISSN 0137-3005

Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI
NUMERU 5 (588)

(Nie)możliwa do rozwiązania zagadka
Izabela Mandla str. 1

Przekątna kwadratu
nie jest współmierna z jego bokiem
Jarosław Górnicki str. 1

Nie czytaj, jeśli nie wiesz,
czym jest pochodna
Piotr Krzyżanowski str. 4

Zadania str. 6

Owady – nie robaki
Magdalena Fikus str. 7

Sumowanie i asymptotyka.
Jakub Bernoulli i Leonhard Euler
Grzegorz Łukaszewicz str. 8

Nie ma problemu!
Paweł Rafał Bieliński str. 10

Dlaczego warto badać teorie
wykraczające poza
Ogólną Teorię Względności?
Sreekanth Harikumar str. 12

Szyfr Lorenza i jego złamanie (1)
Bartosz Klin str. 14

Klub 44 str. 20

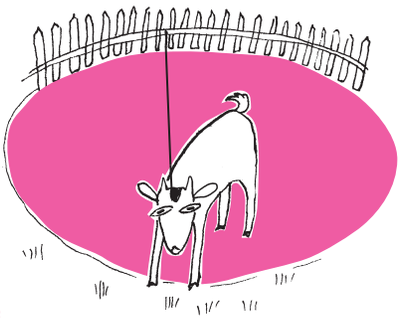
Prosto z nieba: Skrzydła motyla str. 22

Niebo w maju str. 22

Aktualności
Lutet w Las Vegas str. 24

Właściwy punkt
na właściwym miejscu
Bartłomiej Bzdęga str. 25

W następnym numerze:



Co łączy żarłoczną kozę i liczby zespolone?

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, prof. UWr, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, prof. UWr., dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nacz., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Marta Gródek, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nacz., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: `delta@mimuw.edu.pl` tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem LaTeX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT `poligrafianot.pl`

Prenumerata:
Garmond Press: `www.garmondpress.pl`
Kolporter: `www.kolporter.com.pl` (tylko instytucje)
RUCH S.A.: `www.prenumerata.ruch.com.pl`

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): `deltami.edu.pl`

Można nas też znaleźć na `facebook.com/Delta.czasopismo`

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

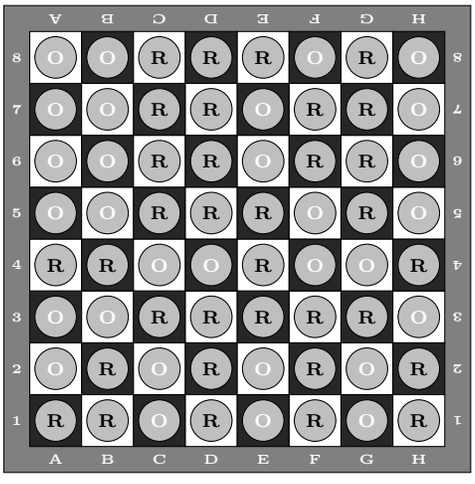
(Nie)możliwa do rozwiązania zagadka

*Izabela MANDLA**

* Studentka, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Wyobraźmy sobie taką sytuację: dwóch więźniów dostaje możliwość wydostania się na wolność pod warunkiem, że uda im się rozwiązać pewną zagadkę. (Chyba nie ma na świecie systemu penitencjarnego, który dopuszczałby taką ewentualność, ale nie psujmy opowieści roztrząsaniem takich szczegółów!). Strażnik, który ich pilnuje, przygotował dla nich problem logiczny, który na pierwszy rzut oka mógłby się wydawać niemożliwy do rozwiązania. A oto, co im powiedział:

W celi obok na stole leży zwykła szachownica 8 na 8. Jednak na jej polach nie leżą pionki, a monety. Na każdym polu leży dokładnie jedna moneta i może ona być odwrócona do góry orłem lub reszką. Za godzinę przyjdę po ciebie – tu wskazał na więźnia o imieniu Bob – *zaprowadzę do tej celi i wskażę ci pewne pole na szachownicy. Następnie będziesz musiał odwrócić dokładnie jedną monetę. Potem do celi przyprowadzę Eda* – tu pokazał na drugiego więźnia – *i jego zadaniem będzie odgadnąć, które pole wskazałem. Jeśli mu się to uda, obaj wychodzicie na wolność.*



Oto, co mógł zobaczyć Ed. Czy Bob mógł mu w ten sposób przekazać informację o polu wskazanym przez strażnika?

Czy jest możliwe, aby więźniowie mieli pewność wyjścia na wolność? Na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie. Oczywiście nie bierzemy pod uwagę sytuacji, że pierwszy więzień powiedział drugiemu półgębkiem czy też pokazał na migi, które pole wskazał strażnik. Niezależnie od powodów, dla których wylądowali za kratkami, na pewno nie dopuściliby się zbrodni zepsucia dobrej zagadki, nawet gdy stawką jest ich wolność! Zostaje tylko plansza i to, co na niej leży. Dobrze, ale czy da się to wykorzystać? Czy jest jakaś strategia, na którą mogą umówić się więźniowie, przy której dzięki odwróceniu jednej monety da się przekazać informację o polu wskazanym przez strażnika?

O dziwo, odpowiedź jest twierdząca! Jest to wspaniała zagadka, która zdecydowanie zasługuje na odrobinę samodzielnego zastanowienia, aby należycie docenić jej trudność. Dlatego – by nie zepsuć zabawy Czytelnikowi Ambitnemu, który sam zechciałby się z nią zmierzyć – rozwiązanie przedstawione jest dopiero na stronie 18 tego wydania *Delty*.

Przekątna kwadratu nie jest współmierna z jego bokiem

*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

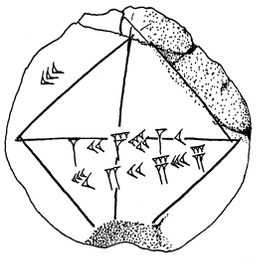
Eksponat YBC 7298, Yale Babylonian Collection (New Haven). Więcej informacji o tabliczce można znaleźć tu: `https://news.yale.edu/2016/04/11/3800-year-journey-classroom-classroom`

W starożytnej Mezopotamii – kraju położonym między Eufratem a Tygrysem – około 4000 lat temu posługiwano się sześćdziesiątkowym systemem pozycyjnym. Oznacza to, że w charakterze cyfr używano liczb od 0 do 59 zamiast od 0 do 9 („podręczna” tabliczka mnożenia w tym systemie zawiera 1830 iloczynów, od 1×1 do 60×60). Przyjmowano wówczas, że długość przekątnej kwadratu jednostkowego jest równa

$$L = (1; 24\ 51\ 10)_{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}414213962962\ldots$$

To świetny wynik, bo liczba $[(1; 24\ 51\ 10)_{60}]^2 = (1; 59\ 59\ 59\ 38\ 1\ 40)_{60} \approx 1{,}999998$ jest bardzo bliska 2. Długość przekątnej kwadratu o boku a wyznaczano ze wzoru $L \cdot a$.

Dowodem na to, że starożytni mieszkańcy Mezopotamii posiadali taką wiedzę, jest babilońska gliniana tabliczka (około 1700 roku p.n.e.).



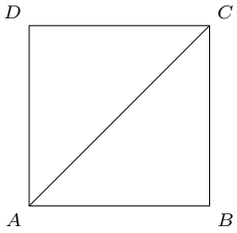
Źródło: A. Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics*, Washington, DC, MAA, 1964

Bok kwadratu oznaczono liczbą 30. Na jednej przekątnej napisano 1; 24 51 10, a pod nią 42; 25 35, co jest wynikiem pomnożenia pierwszej liczby przez 30, czyli stanowi długość przekątnej. Przeprowadzone obliczenia budzą szacunek! A wszystko to 1200 lat przed okresem, w którym przypuszczalnie żył Pitagoras.

Pod koniec V lub na początku IV wieku p.n.e. Pitagorejczycy pokazali, że przekątna kwadratu nie jest współmierna z jego bokiem, czyli iloraz przekątnej i boku nie jest liczbą wymierną (pisał o tym Platon w *Teajtecie* i Arystoteles w *Analitykach pierwszych*). Świat dowiedział się o istnieniu liczb niewymiernych. Około 370 roku p.n.e. Eudoksos stworzył teorię proporcji sankcjonującą posługiwanie się liczbami niewymiernymi i metodę wyczerpywania. Kropkę nad „i" postawił w XIX wieku Richard Dedekind, kończąc konstrukcję zbioru liczb rzeczywistych, ale to inna historia... Dokonania Eudoksosa opisał Euklides w *Elementach* (III w. p.n.e.). Choć *Elementy* są najdonioślejszym dziełem naukowym świata, to jak dotąd nie doczekały się kompletnego tłumaczenia na język polski (istnieją tłumaczenia wybranych ksiąg).

Z *Elementów* Euklidesa (księga X) znamy uzasadnienie, że:

Przekątna kwadratu nie jest współmierna z jego bokiem.



Dowód. Niech AC będzie przekątną kwadratu, a AB jego bokiem. Załóżmy, że AC jest współmierne z AB, niech $a : b$ będzie ich stosunkiem liczbowym wyrażonym przez możliwie najmniejsze liczby naturalne.

Mamy $AC : AB = a : b$. Zatem $AC^2 : AB^2 = a^2 : b^2$. Ale (z twierdzenia Pitagorasa, *Elementy*, I.47) $AC^2 = 2 \cdot AB^2$. Stąd $a^2 = 2b^2$. Wynika z tego, że a^2, a co za tym idzie również a, jest parzyste; skoro zaś $a : b$ jest wyrażone przez możliwie najmniejsze liczby, b jest nieparzyste.

Skoro a jest parzyste, niech $a = 2c$. Wówczas $4c^2 = 2b^2$, czyli $2c^2 = b^2$, z czego wynika, że b jest parzyste.

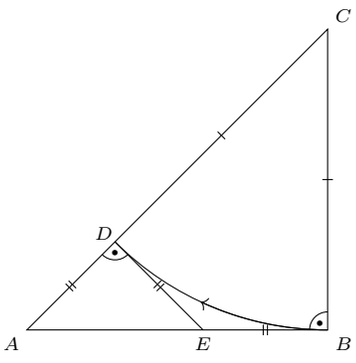
Założenie, że AC jest współmierne z AB, prowadzi do wniosku, że ta sama liczba b jest jednocześnie parzysta i nieparzysta, więc musi być fałszywe. □

W szczególności, *długości przekątnej kwadratu jednostkowego nie można wyrazić jako proporcji między dwoma liczbami naturalnymi* (co oznacza, że rozwinięcie dziesiętne nie kończy się ani nie zawiera okresu).

Godfrey H. Hardy w *Apologii matematyka* (1940) pisał o tym odkryciu tak: „(...) [jest] to proste twierdzenie − proste zarówno w zamyśle, jak i zastosowaniu − lecz nie ma cienia wątpliwości, że należy do twierdzeń najwyższej klasy. (...) jest równie aktualne i istotne jak wtedy, gdy zostało odkryte − dwa tysiące lat nie naznaczyły [go] żadną zmarszczką".

Pozostając w klimacie matematyki greckiej, zastosujemy dowody poprzez *reductio ad absurdum* (sprowadzenie do sprzeczności) i przedstawimy dwa kolejne − pełne matematycznego uroku − uzasadnienia ostatniego wniosku.

Rozumowanie 1. (Tom M. Apostol, *Irrationality of The Square Root of Two – A Geometric Proof*, 2000). Załóżmy, że długość przekątnej kwadratu jednostkowego jest liczbą wymierną. Istnieją wtedy trójkąty równoramienne i prostokątne, których wszystkie boki są całkowitej długości. Niech trójkąt ABC będzie najmniejszym trójkątem o tych własnościach.



Na przeciwprostokątnej odkładamy odcinek CD o długości odcinka CB i w punkcie D wystawiamy prostopadłą, która przecina bok AB w punkcie E. Wówczas trójkąt ADE jest *mniejszym* trójkątem równoramiennym i prostokątnym, którego wszystkie boki mają długości całkowite (patrz rysunek obok). Sprzeczność. Zatem długość przekątnej kwadratu jednostkowego jest liczbą niewymierną! □

Rozwiązanie zadania M 1744.
Przypuśćmy, że istnieje funkcja f spełniająca opisany w zadaniu warunek. Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$f(1) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right) \right) \geqslant$$

$$\geqslant n\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{n}.$$

Biorąc n takie, że $f(1) - f(0) < \sqrt{n}$, otrzymujemy sprzeczność.

Jeszcze inne uzasadnienie niewymierności $\sqrt{2}$ można znaleźć w artykule Adama Barańskiego *Uogólnienie algorytmu Euklidesa*, Δ^5_{21}.

O metodzie Herona można przeczytać w *Delcie*, na przykład w artykule Piotra Krzyżanowskiego i Grzegorza Łukaszewicza *Przez wieki z metodą Newtona*, Δ^9_{21}.

Rozumowanie 2. Załóżmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną. Istnieje wtedy najmniejsza liczba naturalna k taka, że $k\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną. Wówczas $k\sqrt{2}-k$ jest *mniejszą* liczbą o tej własności. Sprzeczność! □

Pozostał problem wyznaczenia przybliżonej wartości $\sqrt{2}$. Heron z Aleksandrii około 60 roku n.e. opisał rekurencyjne postępowanie: $x_1=2$ i $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$ dla $n=1,2,\ldots$, w którym każda kolejna iteracja coraz dokładniej przybliża wartość $\sqrt{2}$, podwajając liczbę cyfr znaczących po przecinku:

$$x_2=\tfrac{3}{2}=1{,}5,$$

$$x_3=\tfrac{17}{12}=\mathbf{1{,}41}66\ldots,$$

$$x_4=\tfrac{577}{408}=\mathbf{1{,}4142}156\ldots,$$

$$x_5=\tfrac{665857}{470832}=\mathbf{1{,}41421356}23745\ldots,$$

$$x_6=\tfrac{886731088897}{627013566048}=\mathbf{1{,}41421356237309504}88016896\ldots \text{ itd.}$$

Podstawą tej idei jest pomysł, że jeśli x_n jest przeszacowaniem, a $\frac{2}{x_n}$ jest niedoszacowaniem, lub odwrotnie, to średnia arytmetyczna tych liczb może być lepszym przybliżeniem $\sqrt{2}$ niż każda z nich z osobna. Pokażemy, że procedura Herona jest zbieżna.

(1) Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony z dołu przez $\sqrt{2}$, bo

$$x_{n+1}^2-2=\left(\frac{x_n^2+2}{2x_n}\right)^2-2\left(\frac{2x_n}{2x_n}\right)^2=\left(\frac{x_n^2-2}{2x_n}\right)^2\geqslant 0.$$

(2) $x_{n+2}\leqslant x_{n+1}$ dla $n=1,2,\ldots$, bo

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_{n+1}+\frac{2}{x_{n+1}}\right)-x_{n+1}=\frac{2-x_{n+1}^2}{2x_{n+1}}\leqslant 0,$$

gdyż $x_{n+1}^2\geqslant 2$.

Skoro ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony z dołu i nierosnący, to jest zbieżny. Jego granicą jest pierwiastek równania $g=\frac{1}{2}\left(g+\frac{2}{g}\right)$ spełniający nierówność $g\geqslant\sqrt{2}$, czyli w tym przypadku $g=\sqrt{2}$.

Zbieżność ciągu $\{x_n\}$ do granicy $\sqrt{2}$ jest *kwadratowa*, tzn. różnica między kolejnym przybliżeniem a granicą $\sqrt{2}$ maleje jak kwadrat poprzedniej różnicy:

$$(3)\quad |x_{n+1}-\sqrt{2}|=\left|\tfrac{1}{2}\left(x_n+\tfrac{2}{x_n}\right)-\sqrt{2}\right|=\tfrac{|x_n-\sqrt{2}|^2}{2|x_n|}\leqslant\tfrac{1}{2\sqrt{2}}|x_n-\sqrt{2}|^2.$$

To właśnie kwadratowa zbieżność jest odpowiedzialna za to, że liczba cyfr znaczących podwaja się przy każdej iteracji.

Algorytm Herona jest skuteczny w przypadku obliczania pierwiastka kwadratowego $\sqrt{A}$ dla dowolnego $A>0$, gdzie jako pierwsze przybliżenie można wybrać dowolną liczbę dodatnią.

Prostota, pomysłowość, piękno i użyteczność w jednym, uzyskana w wyniku pracy wielu pokoleń! To wszystko dzięki temu, że matematyka przemieszcza się z pokolenia na pokolenie, z miejsca na miejsce i rozwija, jest „żywym organizmem".

Pitagoras wywodzi swoją matematykę z Jonii, gdzie jeszcze 100 lat przed nim Tales odkrywał pierwsze twierdzenia i dostrzegał wielką wartość dowodzenia ich prawdziwości. Obaj, zanim zaczną zajmować się matematyką, odbywają podróże do Egiptu i Mezopotamii. Od ostatniego Pitagorejczyka Archytasa z Tarentu uczy się jej Eudoksos oraz Platon, i w ten sposób matematyka trafia do Aten. Stamtąd wędruje do Aleksandrii. Tam pisze swoje *Elementy* Euklides, tam studiują Archimedes i Apoloniusz, a w późniejszych wiekach działają Heron, Ptolemeusz, Diofantos, Pappus. *Pax Romana*, powstanie chrześcijaństwa i islamu zmieniają świat. Justynian edyktem z 529 roku likwiduje Akademię Platona, a matematyków umieszcza wśród złoczyńców i innych podobnych. Matematyka przenosi się do Indii (Arjabhata, Brahmagupta, Bhaskara), a później z powrotem do Mezopotamii i Azji Środkowej (Muhammad al-Chwarizmi, Omar Chajjam), i koło się zamyka. Spuściznę arabską przejmuje nauka europejska, matematyka ponownie rozkwita w Europie. Wspaniały owoc pojawia się w XVII wieku, to rachunek różniczkowy i całkowy.

Rozwiązanie zadania M 1745.
Dzieląc obustronnie równość z treści zadania przez $a-b\neq 0$, otrzymamy

$$(a-b)^3=a^2+ab+b^2.$$

Niech $k=a-b$, wówczas

$$k^3=k^2+3ab=k^2+3bk+3b^2.$$

Równanie kwadratowe

$$3X^2+3kX+k^2-k^3=0$$

ma współczynniki całkowite oraz pierwiastek całkowity b, zatem wyróżnik tego równania $\Delta=k^2(12k-3)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Stąd $12k-3=\ell^2$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ. Rozpatrując uzyskane równanie modulo 6, łatwo zauważymy, że $\ell=6m-3$ dla pewnej liczby całkowitej m. Wobec tego

$$k=\frac{1}{12}(l^2+3)=3m^2-3m+1$$

i kolejno

$$b=\frac{-3k+\sqrt{\Delta}}{6}=\frac{-3k+kl}{6}=$$

$$=(m-1)(3m^2-3m+1),$$

$$a=b+k=m(3m^2-3m+1)$$

oraz $9a-1=(3m-1)^3$.

Wartość $\sqrt{2}$ ma praktyczne zastosowanie! Rozmiary papieru formatu A0, A1, A2,... (normy ISO 216) zostały tak zaprojektowane, żeby po podzieleniu na dwie równe części wzdłuż dłuższego boku uzyskać dwa arkusze o tych samych proporcjach długości do szerokości. Jest to możliwe tylko, jeśli ten stosunek wynosi $\sqrt{2}$. Oczywiście rzeczywiste wymiary są zaokrąglone do pełnych milimetrów.

Nie czytaj, jeśli nie wiesz, czym jest pochodna

*Piotr KRZYŻANOWSKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

No dobrze. Mimo że nadal czytasz, na wszelki wypadek przypomnienie: pochodną funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie x nazywamy wartość granicy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

i oznaczamy $f'(x)$. Możemy wspomóc się komputerem, by ją obliczyć w sposób przybliżony: przecież dla bardzo małego h wartość ilorazu

$$f'_h(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

powinna być bardzo bliska wartości granicznej. Wykorzystanie przybliżenia (1) może być w praktycznych zastosowaniach jedyną rozsądną opcją numerycznego wyznaczenia wartości $f'(x)$: często bowiem się zdarza, że nasza funkcja f nie jest zadana jawnym wzorem, tylko przez „czarną skrzynkę” – tzn. program komputerowy o *nieznanej* treści, który dla zadanego x po prostu zwraca $f(x)$ (i nic więcej).

Intuicja podpowiada, że im mniejsze będzie h, tym lepsza powinna być ta aproksymacja – i rzeczywiście, korzystając ze wzoru Taylora, można łatwo pokazać, że

$$|f'_h(x) - f'(x)| \approx C \cdot |h|, \tag{2}$$

gdzie $C = |f''(x)|/2$.

Zgoda. Tytuł artykułu powinien brzmieć: *Nie czytaj, jeśli nie wiesz, co to jest wzór Taylora.*

Zróbmy więc szybki eksperyment i, korzystając z (1), obliczmy na komputerze przybliżenia wartości pochodnej, powiedzmy w $x = 1$, następujących funkcji:

$$F(x) = x^2, \qquad G(x) = x^3, \qquad S(x) = \sin x.$$

Rachunki przeprowadziliśmy w GNU Octave, ale to samo dostaniesz, prowadząc obliczenia w podwójnej precyzji w dowolnym języku (C/C++, Pythonie, MATLAB-ie, Julii itd.).

Oto wyniki uzyskane dla kilku całkiem małych wartości h:

h	$F'_h(1)$	$G'_h(1)$	$S'_h(1)$
10^{-20}	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
10^{-30}	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
10^{-40}	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000

Jak się okazuje, otrzymamy identyczny wynik, nawet jeśli *jeszcze bardziej* zmniejszymy h... Wszystko wskazuje więc na to, że dla każdej z trzech funkcji „graniczną” wartością ilorazu (1) jest zero – tyle że to oczywista nieprawda! Powinniśmy byli przecież otrzymać:

funkcja	jej pochodna	wartość pochodnej w $x = 1$
$F(x) = x^2$	$F'(x) = 2x$	2
$G(x) = x^3$	$G'(x) = 3x^2$	3
$S(x) = \sin x$	$S'(x) = \cos x$	$\approx 0{,}5403023058681397$

Czytelnik Dotychczas Nieznający Pochodnej (a mimo to śledzący nasz wywód) łatwo sprawdzi, że dla $h \to 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 2x + h \to 2x,$$

zatem $F'(x) = 2x$ i podobnie $G'(x) = 3x^2$. Ponadto ze wzoru

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

wywnioskuje, że $S'(x) = \cos x$, gdyż $(\sin h)/h \to 1$ i $(\cos h - 1)/h \to 0$ dla $h \to 0$.

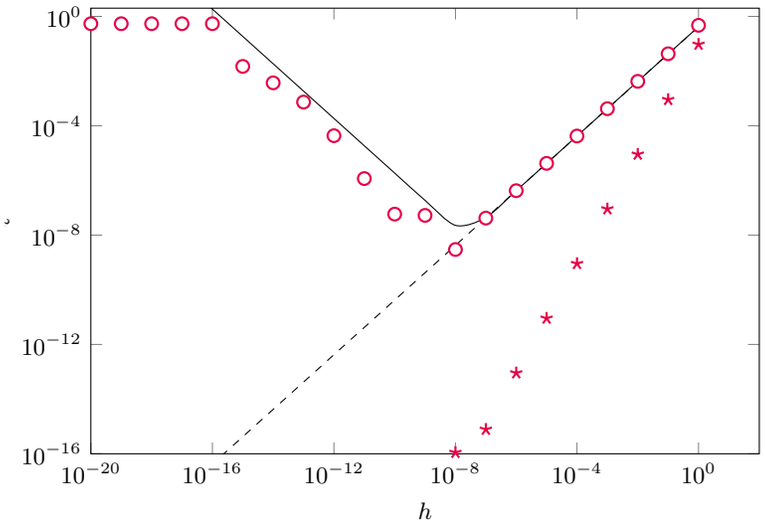
Co się stało? Przyczyna tkwi głęboko we wnętrznościach komputera. Namiastka liczb rzeczywistych, z której korzysta procesor – tzw. liczby maszynowe – to zbiór *skończony*. W przedziale $[1, 2)$ jest ich dokładnie 2^{52}, a najmniejszą liczbą maszynową większą od 1 jest $1 + 2^{-52} \approx 1 + 2{,}2 \cdot 10^{-16}$.

Mówimy tu o tzw. maszynowych liczbach zmiennopozycyjnych podwójnej precyzji, domyślnie wykorzystywanych przez różne pakiety obliczeniowe.

Wobec tego dla dowolnego $0 < h < 2^{-53} \approx 10^{-16}$ obliczona w komputerze wartość $1 + h < 1 + 2^{-53}$ zostanie zaokrąglona do najbliżej leżącej liczby maszynowej, czyli... do 1. W efekcie, wyznaczając dla dostatecznie małego h różnicę $f(1+h) - f(1)$, komputer w rzeczywistości obliczał $f(1) - f(1)$, co oczywiście *musiało* dać w wyniku *zero*.

Czy więc przybliżenie $f'(x)$ przez $f'_h(x)$ jest bezwartościowe? Nie przesadzajmy – metoda (1) nie jest wcale taka zła – chociaż, jak przekonaliśmy się na początku, ma *pewne ograniczenia*. Jak widać z tabelki na następnej stronie, dla każdej z funkcji F, G, S, gdy h maleje (ale nie za bardzo), obliczane ilorazy stabilizują się do pewnego momentu na poziomie prawdziwej wartości pochodnej.

h	$F'_h(1)$	$G'_h(1)$	$S'_h(1)$
10^{-5}	2,0000100000	3,0000300001	0,5402980985
10^{-6}	2,0000009999	3,0000029998	0,5403018851
10^{-7}	2,0000001011	3,0000003015	0,5403022640
10^{-8}	1,9999999878	3,0000000040	0,5403023029
10^{-9}	2,0000001655	3,0000002482	0,5403023584
10^{-10}	2,0000001655	3,0000002482	0,5403022474
10^{-11}	2,0000001655	3,0000002482	0,5403011372
10^{-12}	2,0001778012	3,0002667017	0,5403455461



Jeszcze lepiej zobaczymy to na wykresie pokazującym, jak od h zależy błąd $|S'(1) - S'_h(1)|$ (na rysunku powyżej zaznaczyliśmy go kolorowymi kółeczkami). Dodatkowo czarna linia przerywana obrazuje przybliżony poziom błędu przewidywany przez (2). Wygląda więc na to, że przez jakiś czas – gdy h jest w miarę duże – aproksymacja pochodnej przez (1) rzeczywiście *słucha się* matematyki. Jednak potem, gdzieś tak dla $h \approx 10^{-8}$, zaczyna się dziać coś dziwnego, powodującego, że wbrew (2) błąd aproksymacji przestaje maleć – a nawet zaczyna wyraziście rosnąć! Jak można się domyślić, wina* znów leży po stronie komputera – a dokładniej tego, jak wykonywane są w nim działania matematyczne.

Dla F i G zależność ta wyglądałaby bardzo podobnie.

Omawiany eksperyment często pokazujemy studentom MIM UW jako przykład zjawiska tzw. *redukcji cyfr przy odejmowaniu*.

*Właściwie słowo *wina* powinniśmy wziąć w cudzysłów, bo procesor specjalnie zaprojektowano, żeby *właśnie tak* działał: nieco niedokładnie, ale za to piekielnie szybko.

Jak więc wybierać h? Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $h > 0$, i przyjrzyjmy się najprostszemu przypadkowi, czyli $F(x) = x^2$. W związku z tym, że liczb maszynowych jest skończenie wiele, wynik każdego działania arytmetycznego podlega potencjalnemu zaokrągleniu (do najbliższej liczby maszynowej). Dla uproszczenia przyjmiemy, że tak się zdarzy tylko raz: wyłącznie w przypadku podnoszenia do kwadratu wartości $(x + h)$. Z tego, jak została zaprojektowana komputerowa arytmetyka, wynika, że zamiast dokładnej wartości $z = (x + h)^2$ komputer obliczy $\tilde{z} = z(1 + \eta)$, przy czym $|\eta| \leqslant 2^{-53} =: \nu$. Wobec tego na koniec dostaniemy z komputera wcale nie $F'_h(x)$, tylko raczej

$$\widetilde{F'_h(x)} = \frac{(x+h)^2(1+\eta) - x^2}{h} = F'_h(x) + F(x+h)\frac{\eta}{h},$$

skąd błąd między faktycznie obliczoną na komputerze wartością $\widetilde{F'_h(x)}$ a prawdziwą $F'(x)$ da się z grubsza oszacować, na mocy (2), przez

$$|F'(x) - \widetilde{F'_h(x)}| \lesssim \frac{|F''(x)|}{2}h + \frac{\nu|F(x)|}{h}. \tag{3}$$

Tak, daje się to zrobić ściśle, ale nam tu zależy tylko na odpowiedzi o charakterze jakościowym – wszak już na początku poczyniliśmy pewne uproszczenia.

Dla ustalonego x wyrażenie po prawej stronie nierówności (3) jest funkcją h, której wykres zaznaczyliśmy linią ciągłą na rysunku powyżej. Jak widać, całkiem trafnie przewiduje realistyczne zachowanie się błędu, a jej minimum wypada w punkcie

$$h = \sqrt{\frac{2|F(x)|}{|F''(x))|} \cdot \nu}$$

– co potwierdza, że optymalna wartość h powinna być rzędu $\sqrt{\nu} \approx 10^{-8}$, zgodnie z tym, co widzieliśmy na wykresie powyżej. Podstawiając do (3), błąd aproksymacji $F'(x)$ przez $F'_{\sqrt{\nu}}(x)$ powinien wówczas być również rzędu $\sqrt{\nu}$.

Czy można lepiej numerycznie przybliżać pochodną? Owszem, można – i to na kilka sposobów – ale tutaj wspomnimy tylko o jednym, za to zaskakującym (przynajmniej na pierwszy rzut oka). Gdyby bowiem szczęśliwie zdarzyło się, że funkcja f daje się rozszerzyć do funkcji analitycznej w dziedzinie *zespolonej* – a przypadkiem nasze funkcje F, G, S właśnie takie są – to można skorzystać z przybliżenia

W. Squire i G. Trapp, *Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions*, SIAM Review 40 (1), 1998.

$$(\star) \qquad f'(x) \approx \partial_h f(x) := \frac{1}{h}\Im\left(f(x+ih)\right),$$

gdzie $\Im(z)$ oznacza część urojoną liczby zespolonej z, natomiast $i = \sqrt{-1}$ to jednostka urojona. To przybliżenie *nie psuje się* nawet przy bardzo małych h, a dodatkowo błąd maleje w *znacznie szybszym* tempie, co pokazuje poniższa tabela.

Błędy przybliżenia $S'(1)$ przez $\partial_h S(1)$, zaznaczone kolorowymi gwiazdkami, można też zobaczyć na wykresie na poprzedniej stronie.

h	$\partial_h F(1)$	$\partial_h G(1)$	$\partial_h S(1)$
10^{-1}	2,0000000000000000	2,9900000000000000	0,5412032600703925
10^{-2}	2,0000000000000000	2,9999000000000000	0,5403113109515962
10^{-4}	2,0000000000000000	2,9999999900000000	0,5403023067686435
10^{-8}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681399
10^{-30}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681398
10^{-100}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681398
10^{-300}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681398
10^{-310}	2,0000000000000000	3,0000000000000000	0,5403023058681550

Ostatni wiersz tabeli powinien zwrócić Twoją uwagę. Dla *patologicznie* małych h, poniżej około 10^{-308}, coś jednak znowu… zaczyna się psuć! Czy wiesz, dlaczego?

Zadania

W zeszłym miesiącu umieściliśmy w tym miejscu matematyczne „zadania z myszką”, które ukazały się w *Delcie* również rok wcześniej. Chcielibyśmy uznać to za nieśmieszny primaaprilisowy żart, jednak niestety była to po prostu nasza pomyłka. Opiekuna działu, dra Dominika Burka, oraz wszystkich naszych Czytelników najmocniej za nią przepraszamy.

Redakcja

Przygotował Dominik BUREK

M 1744. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y $(x \geqslant y)$ spełniona jest nierówność:

$$f(x) - f(y) \geqslant \sqrt{x-y}.$$

Rozwiązanie na str. 2

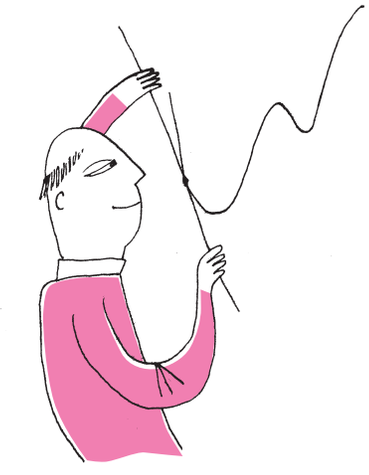
M 1745. Dane są liczby całkowite dodatnie $a \neq b$ takie, że

$$(a-b)^4 = a^3 - b^3.$$

Udowodnić, że liczba $9a - 1$ jest sześcianem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 3

M 1746. Dane są trzy szkoły, w każdej z nich uczy się 200 uczniów. Każdy uczeń ma przynajmniej jednego znajomego w każdej ze szkół (znajomość jest wzajemna oraz nikt nie jest znajomym samego siebie). Przypuśćmy, że istnieje zbiór A, zawierający 300 uczniów, o następującej własności: dla dowolnej szkoły S oraz dwóch uczniów x, y ze zbioru A, którzy nie uczą się w S, x i y mają różną liczbę znajomych uczących się w szkole S. Udowodnić, że istnieje trzech uczniów z trzech różnych szkół, którzy wzajemnie się znają.
Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER



F 1071. Podczas jazdy z prędkością v na samochód działa siła oporu powietrza opisana wzorem: $F_{op} = \frac{1}{2}C\rho S v^2$, w którym ρ jest gęstością powietrza, S powierzchnią przekroju samochodu prostopadłą do prędkości, a C jest współczynnikiem związanym z kształtem samochodu. Na jakim odcinku drogi l energia W potrzebna do pokonania oporu powietrza podczas jazdy ze stałą prędkością równa jest energii kinetycznej E_k samochodu? W obliczeniach przyjmij $\rho = 1{,}3$ kg/m^3 oraz wartości typowe dla samochodu osobowego: $m = 1{,}3 \cdot 10^3$ kg, $S = 2$ m^2, $C = 0{,}3$.
Rozwiązanie na str. 14

F 1072. Ciężar Q wskazywany przez wagę na powierzchni Ziemi jest pomniejszony o siłę wyporu powietrza. Gdyby nie było atmosfery, to na jaką wysokość h nad powierzchnią Ziemi musielibyśmy się wznieść, żeby nasz ciężar (siła przyciągania przez Ziemię) był równy Q? W obliczeniach przyjmij: gęstość powietrza na powierzchni Ziemi $\rho = 1{,}3$ kg/m^3, promień Ziemi $R = 6400$ km, gęstość wody $\rho_0 = 10^3$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 16

Owady – nie robaki

Do befsztyka, schabowego i piersi kaczki jesteśmy przyzwyczajeni od dzieciństwa. Sushi i kimchi pojawiły się w akceptowalnym przez ogół menu kilkadziesiąt lat temu. Ale chrupiące świerszcze budzą zdziwienie i wątpliwości, nie mówiąc już o usmażonych na chrupko larwach mącznika.

Mniej więcej 23 lata temu brałam udział w projekcie EU oceniającym europejskie Festiwale Nauki. Wiązało się to z odwiedzeniem kilku z nich; w Irlandii pojechaliśmy do małego nadmorskiego miasta na północy kraju. Wizytowaliśmy program dla dzieci „Małe robaki (*bugs*) w dużej torbie (*bag*)" – słuchacze w wieku przedszkolnym. Animator wyjmował z torby kolejne klateczki z żywymi bezkręgowcami, opowiadał o ich biologii i zawsze proponował chętnym jakiś kontakt ze zwierzęciem. Wziąć do ręki, pogłaskać, powąchać, śledzić ruchy. Dzieci przepychały się do tych działań. Każdy szczęśliwiec otrzymywał nalepkę na sweterek w typie „trzymałem w ręku poczwarkę motyla X". Na zakończenie padła propozycja zjedzenia grillowanego owada – do tej próby, zakończonej pomyślnie, zgłosiło się tylko troje uczestników.

Piszę o tym epizodzie tak szczegółowo, bo uczy on konieczności oswajania się z nowościami, innowacjami i zjawiskami niezwykłymi. Ostatnio po raz pierwszy zetknęliśmy się z upowszechnieniem wiadomości o konsumpcyjnych walorach owadów, co natychmiast spolaryzowało opinię społeczną. Sprawa nie jest jednoznaczna i prowokuje do określenia wstępnych danych.

W naszej strefie kulturowej, cywilizacyjnej, owadów się nie jada, jada się mięso hodowlanych ssaków. Negatywne skutki takiego wyboru stają się coraz bardziej oczywiste, produkcja tej żywności jest coraz droższa i coraz bardziej zagraża środowisku w skali lokalnej i globalnej.

A przecież istnieją dowody na spożywanie owadów przez ludzi już 7000 lat temu. Dziś za jadalne uznaje się 2300 gatunków. W strefach ludzkiego ubóstwa owady stanowią ważne źródło pożywienia – zbiera się je łatwo i są powszechnie dostępne. (Tym, którzy wzdrygają się na samą myśl o zjadaniu robaków, przypominam: „robaki", jeszcze lepiej „robale" – to nie są pojęcia rodem z systematyki zwierząt). Chodzi o żywnościowe walory głównie młodocianych form owadów – gąsienic i poczwarek. Za handlowe uznaje się kilka gatunków (świerszcze, pszczoły, jedwabniki, wołek palmowy, mącznik młynarek). W Unii Europejskiej od 2017 roku dopuszczony jest do produkcji żywności mącznik młynarek, szarańcza, świerszcz (w formie suszonej, mrożonek, past). Owady i ich części zatwierdzone są przez Unię Europejską jako dodatek do pokarmu zwierzęcego, w produkcji leków i antybiotyków. W USA i Kanadzie dopuszcza się dodawanie mączki z młynarka do burgerów, proteinowych batonów i chleba. Ponadto z owadów wytwarza się chrupki–przekąski (świerszcze mają podobno smak musztardy z miodem).

Białka i tłuszcze owadów przypominają te, które wchodzą w skład ciał organizmów wyższych. Białka stanowią 40–75% ich suchej masy, zawierając wszystkie niezbędne w żywieniu człowieka aminokwasy. W młodocianych formach owadów przeważają tłuszcze nasycone (8–70% suchej masy), za to w dorosłych formach zdarzają się cenne tłuszcze nienasycone, ważne w produkcji prostaglandyn, hormonu stosownego w leczeniu i profilaktyce chorób układu sercowo-naczyniowego. W owadach znajdują się witaminy A, B_{1-12}, C, D, E oraz mikroelementy (dużo żelaza).

Wobec tak znaczących zalet żywnościowych pojawiają się dwie zasadnicze potrzeby. Po pierwsze dokładnych kolejnych badań bezpieczeństwa konsumpcyjnego tych nowych składników codziennej diety, zarówno z punktu widzenia składu ciał owadów, jak i towarzyszących im własnych pasożytów, mikrobiomu itd. Po drugie trzeba pamiętać, że ważne będzie dostarczenie w zrozumiałej formie i jak najbardziej obszernej informacji o owadach w postępowaniu żywieniowym oraz formach ich konsumpcji i utylizacji.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Sumowanie i asymptotyka. Jakub Bernoulli i Leonhard Euler

*Grzegorz ŁUKASZEWICZ**

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Jakub Bernoulli (1654–1705)

Czytelnik zna zapewne wzór $1+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, będący szczególnym przypadkiem (1). Pokazuje on w szczególności, że $B_0=1$ oraz $B_1=\frac{1}{2}$.

Początkowe wyrazy ciągu: $B_0=1$, $B_1=\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, $B_8=-\frac{1}{30}$, $B_{10}=\frac{5}{66}$, $B_{12}=-\frac{691}{2730}$, $B_{14}=\frac{7}{6}$, $B_{16}=-\frac{3617}{510}$, $B_{18}=\frac{43867}{798}$. Do wyznaczenia wspomnianej wcześniej sumy $1^{10}+\ldots+1000^{10}$ potrzebna jest znajomość jedynie pierwszych siedmiu.

Leonhard Euler (1707–1783)

Augusta Ada King, hrabina Lovelace (1815–1852)

Wskazówka do dowodu (2): wymnożyć szereg $\frac{e^x-1}{x}=\sum\frac{x^k}{(k+1)!}$ przez szereg $\sum B_n\frac{x^n}{n!}$, skorzystać z rekurencyjnego wzoru (czyli (1) dla $n=1$) i przekonać się, że otrzymujemy szereg definiujący e^x.

W swoim sławnym traktacie *Ars Conjectandi*, opublikowanym pośmiertnie w 1713 roku, Jakub Bernoulli zawarł następujący rezultat [3, 4], przedstawiony tutaj we współczesnej notacji:

Istnieje ciąg liczb wymiernych $B_0, B_1, B_2, \ldots$ taki, że dla dowolnych liczb naturalnych $k\geqslant 0$ i $n\geqslant 1$ zachodzi równość:

$$(1)\quad 1^k+2^k+\ldots+n^k=\frac{1}{k+1}\left(\tbinom{k+1}{0}B_0n^{k+1}+\tbinom{k+1}{1}B_1n^k+\ldots+\tbinom{k+1}{k}B_kn\right).$$

Znajomość liczb B_j ($j=0,1,2,\ldots$) pozwala na łatwe i szybkie znalezienie długich sum kolejnych potęg liczb naturalnych. Dla ukazania zalet tej metody Bernoulli podał sumę dziesiątych potęg pierwszego tysiąca liczb naturalnych, równą 91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500. Z wyraźną dumą oraz satysfakcją napisał, że zajęło mu to mniej niż pół kwadransa, podczas gdy znakomity astronom Ismaël Bullialdus (1605–1694) poświęcił na obliczenie analogicznych sum dla pierwszych sześciu potęg (tj. $k=1,2,\ldots,6$) całą opaśną księgę *Arithmetica Infinitorum*.

Historia liczb Bernoulliego w skrócie

Bernoulli wyznaczył wartości kilku początkowych liczb B_j i zaobserwował, że liczby o nieparzystych indeksach, poczynając od B_3, są równe zeru. Wskazał też sposób obliczania pozostałych – wzór rekurencyjny otrzymujemy poprzez wstawienie do (1) wartości $n=1$.

Leonhard Euler nazwał liczby B_j liczbami Bernoulliego, podając ich wartości do B_{30} włącznie i opracowując nową metodę ich obliczania. Liczby Bernoulliego mogą się wydawać bardzo tajemnicze, występują w różnych działach matematyki, ale na pierwszy rzut oka nie wykazują żadnych widocznych regularności. Wiadomo jednak, że znaki kolejnych liczb o indeksach parzystych są naprzemienne, a ciąg $|B_{2n}|$ rośnie szybciej od każdego ciągu geometrycznego: $\frac{|B_{2n+2}|}{|B_{2n}|}\sim\frac{n^2}{\pi^2}$ przy $n\to\infty$ [5].

W 1841 roku John Couch Adams (1819–1892), wybitny astronom – który m.in. obliczył elementy przybliżonej orbity niebawem odkrytej planety Neptun, zaburzającej orbitę Urana – obliczył ich wartości do B_{124} włącznie. Ta ostatnia liczba jest ułamkiem o 110-cyfrowym liczniku oraz mianowniku równym 30. W ostatnich czasach pojawienie się komputerów radykalnie przyspieszyło obliczanie liczb Bernoulliego o coraz większych indeksach.

Wart uwagi jest fakt, że już w 1842 roku współpracująca z Charlesem Babbagem Augusta Ada King, hrabina Lovelace, napisała instrukcję (czytaj: „program") ich obliczania przy pomocy jego Maszyny Analitycznej. Był to pierwszy złożony (zawierający pętle) program komputerowy [7]. Ada Lovelace pisze [6]:

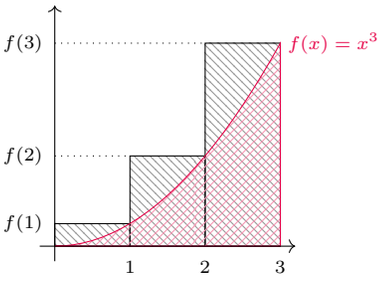
> „Na zakończenie niniejszych uwag szczegółowo prześledzimy kroki, za pomocą których maszyna mogłaby wyznaczyć liczby Bernoulliego, co jest (w postaci, w jakiej to wydedukujemy) raczej skomplikowanym przykładem jej możliwości. Najprostszym sposobem obliczenia tych liczb byłoby bezpośrednie rozwinięcie $\frac{x}{e^x-1}$ ...".

Wspomniana wyżej funkcja $\frac{x}{e^x-1}$ to – znaleziona przez Eulera – tak zwana funkcja tworząca dla liczb Bernoulliego, o ile przyjmiemy alternatywną konwencję, w której $B_1=-\frac{1}{2}$. Jeśli jednak pozostaniemy przy konwencji Jakuba Bernoulliego, to funkcją tworzącą jest:

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}=\frac{xe^x}{e^x-1}.$$

Zauważmy, że funkcja $\frac{xe^x}{e^x-1}$ po odjęciu $\frac{1}{2}x$ staje się funkcją parzystą, więc jej rozwinięcie w szereg potęgowy ma wtedy jedynie parzyste potęgi. Z powyższego wzoru wynika zatem, że rzeczywiście $B_{2n+1}=0$ dla $n=1,2,3,\ldots$

Wzór sumacyjny dla dowolnych ciągów?



Całka $\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ (pole pod wykresem) nie przewyższa sumy $f(1) + \ldots + f(n)$ (łączne pole prostokątów). Przesunięcie prostokątów w prawo o 1 pokazuje natomiast, że całka ta jest nie mniejsza niż $f(1) + \ldots + f(n-1)$

Uogólnimy teraz formułę Bernoulliego, stosując płodną metodę znajdowania nowych twierdzeń, polegającą na właściwych podstawieniach, indukcji i analogii. Rozważmy formułę (1) dla $k = 3$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \tfrac{1}{4}B_0 n^4 + B_1 n^3 + \tfrac{3}{2}B_2 n^2 + B_3 n.$$

Po lewej jej stronie mamy do czynienia z funkcją $f(x) = x^3$, postarajmy się więc również prawą stronę wyrazić poprzez f. Pierwszy wyraz to po prostu $\frac{1}{4}n^4$, w czym można się dopatrzyć całki $\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Jako pole pod wykresem $f(x)$ jest to rozsądne przybliżenie lewej strony (zob. margines). Dalsze wyrazy można powiązać z funkcją f i jej pochodnymi: $f(n) = n^3$, $f'(n) = 3n^2$, $f''(n) = 6n$, co pozwala zapisać naszą formułę jako

$$f(1) + \ldots + f(n) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{B_1}{1!}f(x)\Big|_0^n + \frac{B_2}{2!}f'(x)\Big|_0^n + \frac{B_3}{3!}f''(x)\Big|_0^n + \ldots$$

Powyżej użyliśmy symbolu $g(x)\big|_0^n$ na oznaczenie różnicy $g(n) - g(0)$ (potrzeba odjęcia wartości w zerze wyjaśni się za chwilę). Trzy kropki sugerują, że moglibyśmy dodawać analogiczne dalsze wyrazy, ale i tak nie miałoby to wpływu na sumę, gdyż wyższe pochodne funkcji $f(x) = x^3$ są stałe.

Jeśli zamiast $f(x) = x^3$ powtórzymy to rozumowanie dla funkcji $f(x) = x^k$, to okaże się, że otrzymany powyżej wzór pozostaje w mocy. W konsekwencji zachodzi on również dla dowolnego wielomianu, czyli funkcji postaci $f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ (tutaj odjęcie wartości w zerze jest kluczowe). Na potrzeby zastosowań wygodnie jest go zapisać w równoważnej postaci:

$$f(1) + \ldots + f(n) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \frac{B_2}{2!}f'(x)\Big|_1^n + \frac{B_3}{3!}f''(x)\Big|_1^n + \ldots$$

Dlaczego podana tu postać jest równoważna poprzedniej? Otóż poprzednią formułę należy zastosować dla funkcji $x \mapsto f(x+1)$, a do otrzymanego wzoru na $f(2) + \ldots + f(n)$ dodać stronami $f(1)$. Pozostaje odnotować, że $\frac{B_1}{1!}f(x)\big|_1^n + f(1)$ to właśnie $\frac{f(1)+f(n)}{2}$.

Można teraz zapytać, czy przypadkiem analogiczna formuła nie jest także prawdziwa dla dowolnej funkcji f gładkiej; wtedy oczywiście suma po prawej stronie mogłaby się ciągnąć aż do nieskończoności. Tak nie jest: kontrprzykładem jest funkcja $f(x) = \cos(2\pi x)$, dla której powyższa formuła dawałaby $n = 0 + 1 + 0 + 0 + \ldots$

Ponadto, ponieważ wartości bezwzględne liczb Bernoulliego B_{2j} $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ bardzo szybko rosną, szereg po prawej stronie przeważnie nie jest zbieżny. Gdyby go jednak uciąć w pewnym miejscu...

W 1736 roku Euler pokazał, że rzeczywiście dla dowolnej funkcji (dostatecznie) gładkiej prawdziwa jest formuła zwana *wzorem sumacyjnym Eulera* (lub *Eulera–Maclaurina*, gdyż Colin Maclaurin uzyskał tę formułę kilka lat później):

$$(3)\qquad \sum_{j=1}^{n} f(j) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{(2j)!}f^{(2j-1)}(x)\Big|_1^n + R_n(f,m),$$

gdzie reszta $R_n(f,m)$ spełnia $|R_n(f,m)| \leqslant 2(2\pi)^{-2m}\int_1^n |f^{(2m+1)}(x)|\,\mathrm{d}x$. Okazuje się, że w wielu przypadkach już niewielka liczba kolejnych wyrazów po prawej stronie równości (3) bardzo dobrze przybliża sumę po lewej stronie tejże równości.

Przykład: wyznaczenie stałej Eulera

Dla przykładu pokażemy, jak formuła Eulera sprawdza się w przypadku funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, co pozwoli nam znaleźć dobre przybliżenie jednej z najważniejszych stałych matematyki, liczby gamma Eulera, określonej wzorem

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \ln n\right).$$

Zbieżność ciągu (a_n) definiującego liczbę γ wynika z porównania pola pod wykresem funkcji $\frac{1}{x}$ z łącznym polem odpowiednich prostokątów, jak na wcześniejszym diagramie. Łatwo się w ten sposób przekonać, że ciągi $\ln(n) - (\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})$ i $(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}) - \ln(n)$ są dodatnie i rosnące. Oznacza to, że ciąg (a_n) jest rosnący, a jednocześnie ciąg $(a_n - \frac{1}{n})$ jest malejący, co uzasadnia zbieżność obu.

Ponieważ mamy $f^{(j)}(x) = (-1)^j\frac{j!}{x^{j+1}}$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots$, więc z (3) otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = \ln n + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sum_{j=1}^{m}\frac{B_{2j}}{2j}\left(1 - \frac{1}{n^{2j}}\right) + R_n(f,m).$$

Siméon Poisson (1781–1841)

Po przeniesieniu logarytmu na lewą stronę i przejściu z n do granicy ($n \to \infty$) otrzymujemy

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{2j} + R_\infty(f,m). \tag{4}$$

Nie poprzestańmy jednak na tym i odejmijmy stronami ostatnie dwie równości:

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n - \frac{1}{2n} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_{2j}}{2j} \frac{1}{n^{2j}} + (R_\infty(f,m) - R_n(f,m)). \tag{5}$$

Kładąc w równaniu powyżej $m = 7$ oraz $n = 10$, ignorując resztę $R_\infty(f,m) - R_n(f,m)$ i biorąc pod uwagę tylko skończoną sumę

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} + \ldots + \frac{1}{12n^{14}},$$

otrzymujemy przybliżenie γ z dokładnością do szesnastego miejsca po przecinku: $\gamma \approx 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,5$. Obliczenie to podał sam Euler.

Naturalne jest pytanie, dlaczego Euler dla uzyskania przybliżenia swojej stałej skorzystał z formuły (5), a nie z prostszej formuły (4). Możemy tu tylko podać kluczowy argument, zawarty w prostym twierdzeniu mówiącym, że *jeżeli $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + R_m$ dla każdej liczby naturalnej m, a ciąg reszt R_m jest ciągiem naprzemiennym, to $|R_m| \leqslant |a_{m+1}|$.*

Dla obliczenia sumy S z żądaną dokładnością należy zatem dobrać stosowny wyraz szeregu $a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \ldots$, na którym kończymy sumowanie. Co nie musi być trywialne, gdy szereg jest *rozbieżny*, a jego wyrazy od pewnego miejsca szybko rosną, tak jak ma to miejsce w przypadku szeregu w formule (5). Widać, że rzecz polega tu na zbalansowaniu wartości B_{2m} szybko rosnącego ciągu liczb Bernoulliego i liczby n^{2m} tak, aby pierwszy odrzucony wyraz szeregu był dostatecznie mały. Okazuje się, że reszta w formule (5) spełnia założenia przytoczonego powyżej twierdzenia. Szczegóły są bardziej złożone [1, 2, 5], z czego Euler zdawał sobie sprawę, ale pierwszym, który bliżej zbadał resztę we wzorze sumacyjnym Eulera – w 1823 roku – był Siméon Poisson.

Bibliografia

[1] Ernst Hairer, *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
[2] Godfrey H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford University Press, 1949.
[3] Julian Havil, *Gamma. Exploring Euler's constant*, Princeton University Press, 2003.
[4] David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics*, Dover Publications, 2012.
[5] David J. Pengelley, *Dances between continuous and discrete: Euler's summation formula*, in *Euler at 300: An Appreciation*, Mathematical Association of America, 2007, pp. 169-190, https://arxiv.org/abs/1912.03527
[6] Augusta Ada Lovelace, Note G in https://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html
[7] Raymond Flood, *Charles Babbage and Ada Lovelace*, https://youtu.be/1TprEGyo9ts
[8] Burkard Polster (Mathologer), *Power sum MASTER CLASS: How to sum quadrillions of powers... by hand! (Euler-Maclaurin formula)*, https://youtu.be/fw1kRz83Fj0

Nie ma problemu!

*Paweł Rafał BIELIŃSKI**

* Nauczyciel matematyki, Warszawa

W tym artykule zajmiemy się trzema zadaniami na poziomie starszych klas szkoły podstawowej. Dotyczą one zupełnie różnej tematyki, a jednak – jak się przekonamy – mają znacznie więcej wspólnego, niż się na pierwszy rzut oka wydaje. Zachęcamy Czytelnika do zmierzenia się z nimi przed przeczytaniem zaproponowanych rozwiązań i dalszej analizy.

Zadania

1. Kule w urnie. W urnie znajduje się pewna liczba kul, z których każda jest albo zielona, albo czerwona, albo niebieska. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia z urny kuli zielonej wynosi 0,55, a czerwonej 0,35. Natomiast kul niebieskich jest dokładnie 5. Ile kul znajduje się w urnie?

2. Pole, obwód, okrąg. Jaki jest promień okręgu wpisanego w trójkąt, którego pole wynosi $100\sqrt{3}$, a obwód $30\sqrt{3}$?

3. Siódemka. Na wyjątkowo szerokiej tablicy zapisano pewną listę. W pierwszej linijce zapisano liczbę 7^{2022} w postaci dziesiętnej. W drugiej linijce zapisano sumę jej cyfr; w trzeciej sumę cyfr liczby zapisanej w drugiej linijce i tak dalej. Pisano tak długo, aż w pewnej linijce pojawiła się liczba dziesięciocyfrowa. Czy jest możliwe, że w jej zapisie pojawiają się wszystkie cyfry?

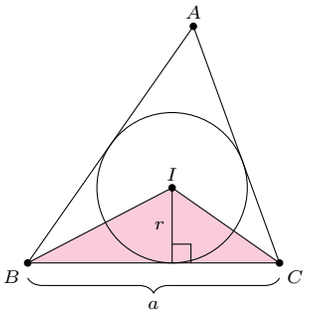
Rozwiązania

1. Kule zielone i czerwone stanowią łącznie $55\% + 35\% = 90\%$ wszystkich kul w urnie. Zatem kule niebieskie stanowią pozostałe 10%, a stąd wynika, że wszystkich kul jest $5 : 10\% = 50$.

2. Przyjmijmy w badanym trójkącie standardowe oznaczenia: jego wierzchołkami będą punkty A, B, C, a środkiem okręgu wpisanego punkt I. Dalej, niech $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ i niech r będzie długością promienia okręgu wpisanego. Pole trójkąta ABC wyznaczamy jako sumę pól trzech mniejszych trójkątów (zob. wyjaśnienie pod rysunkiem):

$$P_{ABC} = P_{BCI} + P_{CAI} + P_{ABI} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2}.$$

Oznaczając literą p połowę obwodu, to jest wielkość $\frac{a+b+c}{2}$, otrzymujemy związek określany żartobliwie *wzorem woźnicy*: $P = pr$. Teraz pozostaje nam obliczyć $r = \frac{P_{ABC}}{p} = \frac{100\sqrt{3}}{15\sqrt{3}} = \frac{20}{3}$.



Znane twierdzenie mówi, że promień poprowadzony ze środka okręgu wpisanego I do punktu styczności z prostą BC jest do tej prostej prostopadły, a więc stanowi wysokość trójkąta BCI. Dlatego pole trójkąta BCI wynosi $P_{BCI} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot a$; analogicznie dla CAI oraz BAI.

3. Wykażemy, że jest to niemożliwe. Znana cecha podzielności przez 3 orzeka, że liczba naturalna jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3. Ponieważ 3 jest liczbą pierwszą, a 7 nie jest przez nią podzielne, więc 7^{2022} także nie dzieli się przez 3. Wynika stąd, że żadna z liczb na omawianej liście nie jest podzielna przez 3. Wystarczy teraz zauważyć, że jeśli w zapisie liczby dziesięciocyfrowej występuje każda cyfra, to każda musi wystąpić dokładnie raz. Suma cyfr takiej liczby wynosi więc $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 = 3 \cdot 15$. Wykazaliśmy jednak, że liczba podzielna przez 3 nie może pojawić się na omawianej liście. W takim razie zapis badanej liczby nie może używać każdej cyfry.

Czy na pewno?

Przyjrzyjmy się otrzymanym wynikom raz jeszcze, w sposób nieco bardziej krytyczny.

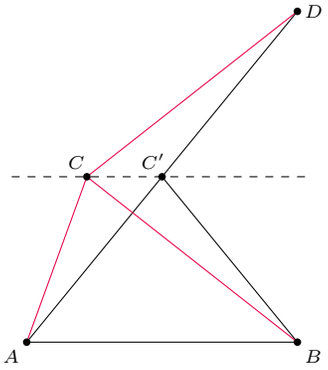
1. Jeżeli w urnie znajdowało się 50 kul, to kul zielonych jest $0{,}55 \cdot 50 = 27{,}5$, a czerwonych $0{,}35 \cdot 50 = 17{,}5$. To jest jednak niemożliwe.

2. Wykażemy, że taki trójkąt nie istnieje, ponieważ w dowolnym trójkącie jego obwód l i pole P spełniają nierówność $l^2 \geqslant 16P$, która nie jest spełniona dla $P = 100\sqrt{3}$ i $l = 30\sqrt{3}$.

Szkic dowodu. Ustalmy pole P oraz długość podstawy $AB = 2s$. Ze wzoru na pole trójkąta wynika, że C leży na prostej równoległej do AB i odległej od niej o $h = P/s$. Klasyczny argument z symetrią (wyjaśnienie na marginesie) pokazuje, że wśród punktów C leżących na tej prostej sumę $AC + BC$ minimalizuje taki, dla którego $AC = BC$. W takim przypadku z użyciem twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć kwadrat obwodu danego trójkąta, a następnie oszacować go z dołu. Otrzymujemy

$$l^2 = \left(2s + 2\sqrt{s^2 + (P/s)^2}\right)^2 \geqslant 4 \cdot 2s \cdot 2\sqrt{s^2 + (P/s)^2} = 16\sqrt{s^4 + P^2} \geqslant 16P,$$

korzystając najpierw z nierówności $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, a następnie z monotoniczności pierwiastka.



Załóżmy, że D jest odbiciem B względem pewnej prostej l równoległej do AB i przechodzącej przez punkt C. Niech C' będzie punktem przecięcia odcinka AD z prostą l. Wówczas z równości $BC' = C'D$, $BC = CD$ oraz z nierówności trójkąta dla ACD wnioskujemy, że $AC + BC \geqslant AD = AC' + BC'$. Nietrudne obliczenia na kątach dowodzą zaś, że trójkąt ABC' jest równoramienny.

Z użyciem komputera można się przekonać, że liczba 7^{2022} ma około 1700 cyfr, a ich suma to w przybliżeniu 7600.

3. Początkowa liczba, 7^{2022}, jest ogromna. Zastanówmy się jednak, jak ogromna. Jasne jest, że $7 \cdot 7 = 49 > 10$, a zatem $7^{2022} > 10^{1011}$, a więc już pierwsza liczba na naszej liście ma więcej niż 1000 cyfr.

Z drugiej strony jasne jest, że $7 < 10$, a stąd $7^{2022} < 10^{2022}$. Ta druga liczba jest najmniejszą liczbą 2023-cyfrową, zatem 7^{2022} ma co najwyżej 2022 cyfry. Ale to oznacza, że suma jej cyfr wynosi nie więcej niż $9 \cdot 2022 = 18\,198$, w szczególności sama ma nie więcej niż 5 cyfr. Łącząc powyższe uwagi, wnioskujemy, że na opisanej w zadaniu liście nie pojawia się żadna liczba dziesięciocyfrowa.

Jak interpretować te wnioski? W przypadku zadania **1** wniosek jest jasny: tak postawiony problem nie ma rozwiązania, tzn. żadna liczba nie spełnia wszystkich postawionych warunków. W szczególności należy skonkludować, że pierwsze przedstawione rozwiązanie jest niepoprawne, a przynajmniej niekompletne. Wywnioskowaliśmy w nim jedynie, że żadna liczba inna niż 50 nie spełnia warunków zadania. Wkrótce okazało się, że nawet ona ich nie spełnia. Głębsze rozterki budzą zadania **2** i **3** Czy jest sens rozważać własności obiektów, które nie istnieją? Wydaje się, że tak: wszak inaczej nie moglibyśmy chociażby stwierdzić, że te własności są sprzeczne. Problem nie leży więc w naszych rozważaniach, a gdzieś w treści zadania. Pytanie, nie będąc zdaniem logicznym, nie może być niepoprawne czy fałszywe. Co innego zawarte w treściach założenia: w zadaniu **2** to, że istnieje trójkąt o podanych parametrach; w zadaniu **3** to, że na opisanej liście występuje liczba dziesięciocyfrowa.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

4. W zaczarowanym lesie mieszkają krasnoludki, a każdy z nich nosi czapkę w jednym z czterech kolorów: niebieskim, zielonym, czerwonym albo białym. Krasnali, których czapka nie jest niebieska, jest 14; tych, których czapka nie jest zielona, jest 16; tych, których czapka nie jest czerwona, jest 24; wreszcie czapki 12 krasnali nie są białe. Ile krasnoludków żyje w zaczarowanym lesie?

5. Na moim parapecie rosną różne rośliny, każda we własnej doniczce. Spośród wszystkich doniczek 1/3 zawiera storczyki, 1/4 – paprocie, a 1/6 – kaktusy. W pozostałych 4 doniczkach rosną bławatki. Ile doniczek mam na parapecie?

6. Jakie długości mogą mieć boki trójkąta równoramiennego, jeśli jego obwód ma długość 45 cm, a jeden z boków 23 cm?

7. Znajdź sumę wysokości trójkąta o polu 96 i bokach 12, 16, 24.

Dlaczego warto badać teorie wykraczające poza Ogólną Teorię Względności?

*Sreekanth HARIKUMAR**

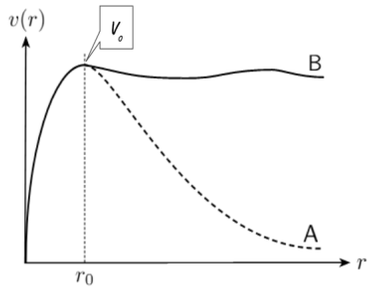
* Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Ogólna Teoria Względności (którą w dalszej części artykułu będziemy nazywać po prostu OTW) opracowana przez Alberta Einsteina w roku 1915 jest obecnie obowiązującym opisem grawitacji we współczesnej fizyce. W ciągu ostatnich 100 lat doprowadziła nas do odkrycia wielu tajemnic Wszechświata. Jednak wśród fizyków teoretyków wciąż rośnie zainteresowanie poszukiwaniem alternatyw dla OTW. Motywacją dla tych poszukiwań są otwarte problemy fizyki, takie jak: próby wyjaśnienia natury ciemnej materii i ciemnej energii, niezgodność OTW z fizyką kwantową czy też istnienie tzw. osobliwości, o których będzie mowa w dalszej części tego artykułu.

Problem ciemnej materii

Zacznijmy od problemu ciemnej materii. Obserwacje prowadzone przez Verę Rubin pod koniec lat 60. ubiegłego wieku wykazały, że prędkości rotacji gwiazd (czyli prędkości, z jakimi obiegają one centrum Galaktyki) są niezgodne z tym, czego oczekujemy, biorąc pod uwagę oddziaływanie grawitacyjne materii świecącej. Gwiazdy na peryferiach Galaktyki poruszają się zbyt szybko. Przewidywaną przez teorię krzywą prędkości jest krzywa **A** zaznaczona na rysunku 1. Ilustruje ona sytuację, w której obiekty po osiągnięciu prędkości maksymalnej v_0 w pewnej odległości r_0 od środka galaktyki zaczynają spowalniać wraz z odległością od środka układu. Jednak to, co zaobserwowała Vera Rubin, to stała wartość prędkości v dla odległości większych od r_0. Obserwacje badaczki ilustruje płaska krzywa prędkości **B** zaznaczona na

Badanie krzywych rotacji miało na celu „zważenie" galaktyki. Zgodnie z prawem ciążenia Newtona (które jest dobrym przybliżeniem OTW dla słabych pól grawitacyjnych i prędkości małych w porównaniu z prędkością światła), gdy gwiazda o masie m porusza się wokół centrum galaktyki po orbicie kołowej o promieniu r, siła ciążenia równoważy się z siłą odśrodkową: $\frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$. Stąd jej prędkość rotacji wynosi: $v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$, gdzie $M(r)$ oznacza całkowitą masę zawartą wewnątrz promienia r orbity. Masa ta rośnie oczywiście z promieniem, rośnie też prędkość rotacji, aż do promienia r_0, gdy możemy przyjąć, iż praktycznie cała masa galaktyki jest zawarta wewnątrz $M(r_0) \approx M_{\text{tot}}$. Wówczas gwiazdy peryferyjne powinny poruszać się z prędkościami malejącymi jak $1/\sqrt{r}$, a prędkość maksymalna v_0 wyznaczy nam masę galaktyki. Taki był pomysł Very Rubin.

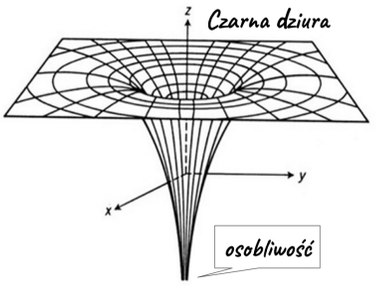


Rys. 1. Typowa krzywa rotacji galaktyk. Linia przerywana A odpowiada teoretycznej krzywej wyznaczonej na podstawie siły grawitacji opisanej przez Newtona, natomiast krzywa B przedstawia obserwowaną krzywą rotacji galaktyki. Schemat zaczerpnięty z pracy Araujo i inni, 2019, *Gravitation and Cosmology*

tym samym rysunku – po osiągnięciu prędkości maksymalnej w odległości r_0 prędkość pozostaje stała. Jednym z możliwych wyjaśnień rozbieżności obserwacji i teorii jest to, że istnieje dodatkowa masa, która oddziałuje z obserwowaną gwiazdą tylko poprzez grawitację. Brak oddziaływania elektromagnetycznego utrudnia bezpośrednią obserwację tej dodatkowej masy (ponieważ nie świeci). Stąd jej nazwa – ciemna materia. Uważa się, że ta nieznana materia wspiera gwiazdy w utrzymywaniu tak dużych prędkości orbitalnych. Z punktu widzenia fizyki cząstek elementarnych natura ciemnej materii nie jest obecnie znana, choć istnieje kilka modeli teoretycznych. Możemy jednak zadać sobie pytanie: a może wyjaśnieniem nie jest nowy rodzaj materii? Co stanie się z naszą wiedzą o Wszechświecie, jeżeli obserwacje krzywej prędkości wytłumaczymy nie dodatkową masą, a nowym prawem grawitacji, które działa różnie w różnych skalach?

Problem osobliwości

Zgodnie z OTW grawitacja nie jest siłą, lecz przejawem zakrzywienia czasoprzestrzeni. Zakrzywienie to jest spowodowane obecnością materii i promieniowania (zarówno ich rozkładem, jak też ich przepływem) w czasoprzestrzeni. Bez wątpienia jest to naprawdę genialne rozwiązanie. Jednak wraz z nim pojawia się ogromny problem, a mianowicie – osobliwości, które nieuchronnie muszą się pojawić. Osobliwość jest cechą charakterystyczną czarnych dziur i określa punkt, w którym załamuje się geometria czasoprzestrzeni (rys. 2). Pojęcia przestrzeni i czasu nie mają w tym punkcie żadnego znaczenia. Fizycy nie są pewni, czy takie osobliwości istnieją w przyrodzie (nawet jeśli tak, to ich obserwacja nie jest możliwa, ponieważ są schowane wewnątrz tzw. horyzontu zdarzeń), czy też sama teoria nie znajduje zastosowania w tym reżimie ekstremalnych gęstości. Istnieje przekonanie, że w takich ekstremalnych skalach gęstości i w małych skalach przestrzennych OTW należy zastąpić kwantową teorią grawitacji. Połączenie OTW i fizyki kwantowej – czyli *kwantowa grawitacja*, uważana za świętego Graala fizyki – to kolejny problem, z którym borykają się fizycy.



Rys. 2. Bardzo schematyczne przedstawienie czarnej dziury i związanej z nią grawitacyjnej osobliwości. Źródło: Northern Arizona University, `http://www4.nau.edu/meteorite/Meteorite/Book-GlossaryS.html`

Problem ciemnej energii

Problemy jednak nie kończą się na osobliwościach. Obserwacje supernowych typu Ia w 1998 roku ujawniły, że Wszechświat nie tylko się rozszerza, ale na dodatek przyspiesza tempo swojej ekspansji. Aby wytłumaczyć to zaskakujące zachowanie – rozszerzanie się wbrew przyciągającej sile grawitacji – wprowadzono hipotetyczną formę energii zwaną *ciemną energią*. Ciemna energia działa jak ujemne ciśnienie i aby uwzględnić ten efekt, wprowadzono stałą kosmologiczną. Stała ta, określana jako Λ, została wstawiona do podstawowego równania OTW:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Powyższe równanie nie jest aż tak skomplikowane, jak mogłoby się wydawać. Jest to równanie różniczkowe znacznie doskonalsze od prawa grawitacji Newtona i działa zarówno dla silnych układów grawitacyjnych, jak i obiektów poruszających się z dużymi prędkościami. Wyraz $G_{\mu\nu}$, znany jako tensor Einsteina, opisuje krzywiznę czasoprzestrzeni. Tensor energii-pędu $T_{\mu\nu}$ opisuje rozkład energii, materii oraz ich przepływów w czasoprzestrzeni. Einstein wprowadził do swoich równań stałą kosmologiczną Λ, żeby móc opisać w ramach swojej teorii statyczny Wszechświat. Kiedy dzięki obserwacjom stało się jasne, że Wszechświat się rozszerza, usunął stałą kosmologiczną ze swoich równań i jej wprowadzenie uznał rzekomo za największy życiowy błąd, jaki popełnił. Później, w latach 60. XX wieku, wiązano z nią nadzieję, że może opisywać kwantowo-mechaniczną energię próżni. Jednak Λ wróciła do gry właśnie wraz z obserwacjami supernowych typu Ia. Obserwacyjnie wyznaczona wartość stałej kosmologicznej jest rzędu $\Lambda \sim 10^{-35}$. Niestety teoretyczne kwantowanie energii próżni prowadzi do 10^{120}-krotnie większych oszacowań! Ta niezgodność w wartościach jest znana jako *problem stałej kosmologicznej* i jest uważana za jedno z najgorszych przewidywań w historii fizyki!

W kwantowej teorii pola próżnia nie jest nicością, lecz kipiącym oceanem wirtualnych cząstek i antycząstek.

Rozwiązanie zadania F 1071.
Podczas jazdy ze stałą prędkością v na odcinku drogi l pokonanie oporu powietrza związane jest z wykonaniem pracy $W = \frac{1}{2}C\rho Sv^2 l$. Energia kinetyczna samochodu wynosi: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Praca W zrówna się z energią E_k po przejechaniu odcinka drogi

$$l = \frac{m}{CS\rho}.$$

Dla przyjętych danych liczbowych $l \approx 1670$ m. Podczas rozpędzania ze stałym przyspieszeniem do prędkości 100 km/h ($v \approx 28$ m/s) osiąganej po czasie 10 s samochód pokonuje około 140 m.

Alternatywy dla OTW?

OTW jest dobrze sprawdzającym się modelem grawitacji, który doskonale zgadza się z precyzyjnymi badaniami w obrębie Układu Słonecznego, w układach podwójnych pulsarów, z soczewkowaniem grawitacyjnym czy badaniami kosmologicznymi. Należy jednak pamiętać, że obserwacje te dotyczą reżimu słabych pól grawitacyjnych. Każda nowo zaproponowana teoria musi być zgodna ze wszystkimi testami, jakie przeszła do tej pory OTW. Omówione powyżej istniejące otwarte problemy OTW są dobrą motywacją dla środowiska fizyków teoretyków do poważnego zajęcia się zmodyfikowanymi teoriami grawitacji. Obecnie istnieje wiele alternatyw dla OTW, a codziennie pojawiają się nowe prace prezentujące różne zmodyfikowane teorie mogące wytłumaczyć obserwacje, z którymi OTW ma problemy. Teoretycznie możliwości modyfikacji grawitacji jest wiele, ale to zgodność z danymi obserwacyjnymi jest ostatecznym czynnikiem decydującym. Oczekuje się, że rosnące możliwości technologiczne pozwalające na badanie wyższych energii i większych odległości w tym ogromnym Wszechświecie dadzą nam jakieś wskazówki dotyczące zachowania praw grawitacji.

Szyfr Lorenza i jego złamanie (1)

*Bartosz KLIN**

* Uniwersytet Oksfordzki

Chyba wszyscy słyszeli o niemieckiej maszynie szyfrującej Enigma z czasów II wojny światowej. Historia złamania jej szyfru jest nam szczególnie bliska ze względu na ważną rolę, jaką odegrali w niej polscy kryptologowie. Pamiętamy, jak zespół matematyków z wojskowego Biura Szyfrów złamał kod Enigmy na długo przed wojną, a na krótko przed jej wybuchem przekazał całą swoją wiedzę angielskim kryptologom, którzy w ośrodku w Bletchley Park, z udziałem genialnego Alana Turinga, łamali kolejno udoskonalane wersje maszyny. Ta pobudzająca wyobraźnię historia doczekała się – i słusznie! – licznych opisów w artykułach, książkach i filmach.

Jednak tysiące ludzi pracujących w centrum Bletchley Park i innych powiązanych z nim ośrodkach nie zajmowały się wyłącznie łamaniem szyfru Enigmy. Spośród kilkunastu innych szyfrów niemieckich badanych przez Anglików szczególnie ważny był ten oparty na maszynie szyfrującej Lorenz SZ40/42. Historia złamania tego szyfru jest o wiele mniej znana, a pod pewnymi względami bardziej imponująca niż historia Enigmy.

Po pierwsze, komunikaty zakodowane szyfrem Lorenza często miały o wiele większe znaczenie wywiadowcze. Armia niemiecka używała tysięcy egzemplarzy Enigmy na wszystkich szczeblach dowodzenia, ale większość komunikatów szyfrowanych za ich pomocą miała znaczenie co najwyżej taktyczne. Tymczasem maszyny Lorenza, uważane przez Niemców za bezpieczniejsze, były używane tylko w sztabach armii do przekazywania najważniejszych informacji i rozkazów o strategicznym znaczeniu. Szyfrowane nimi komunikaty często były długie, szczegółowe i pełne bardzo cennych informacji, a rozkazy niekiedy podpisywane przez samego Adolfa Hitlera.

Po drugie, polscy, a później angielscy kryptologowie, przystępując do łamania szyfru Enigmy, wiedzieli całkiem sporo o jej konstrukcji i zasadzie działania. Komercyjne, uproszczone wersje maszyny były dostępne na rynku na długo przed wojną, a wywiady polski i francuski miały dostęp także do egzemplarzy i opisów wersji wojskowych. To nie umniejsza znaczenia ogromnej pracy matematycznej, jaka była konieczna do złamania szyfru Enigmy, ale jednak dało solidny punkt startowy dla tej pracy. Tymczasem żaden egzemplarz maszyny Lorenza, ani żaden jej opis, aż do końca wojny nie wpadł w ręce aliantów. Strukturę tej maszyny odgadnięto, a sam szyfr złamano, posługując się wyłącznie nasłuchem radiowym i matematyką.

W chwili wybuchu wojny Enigma, opatentowana i wprowadzona na rynek jeszcze w latach dwudziestych, była już trochę przestarzałą konstrukcją. Była też dość niewygodna w użyciu: sama maszyna jedynie szyfrowała komunikat, ale nigdzie

Maszyna Lorenz SZ40

go nie wysyłała. Operator wpisywał kolejne znaki komunikatu na klawiaturze maszyny. Po każdym naciśnięciu klawisza na maszynie zapalała się lampka odpowiadająca kolejnej literze szyfrogramu, a operator pracowicie notował te litery. Następnie wysyłał cały szyfrogram przez radio, posługując się alfabetem Morse'a. Odbiorca komunikatu wykonywał te same czynności w odwrotnej kolejności. Było to niewygodne i czasochłonne, szczególnie przy nadawaniu długich komunikatów.

Maszynę Lorenz SZ40 i jej ulepszoną wersję SZ42 zaprojektowano już podczas wojny wyłącznie na potrzeby armii niemieckiej. Było to urządzenie o wiele nowocześniejsze i wygodniejsze. Przede wszystkim maszyna mogła nie tylko szyfrować i odszyfrowywać komunikaty, ale od razu nadawała je i odbierała drogą radiową, co znacznie upraszczało pracę operatora. Szyfrogramy nie były nadawane przestarzałym alfabetem Morse'a dostosowanym do ręcznych XIX-wiecznych telegrafów, ale tak zwanym międzynarodowym alfabetem telegraficznym ITA2, który od lat dwudziestych stanowił powszechnie przyjęty standard w komunikacji radiowej za pomocą dalekopisów.

W alfabecie ITA2, który można uznać za daleki pierwowzór znanego nam współcześnie kodu ASCII, każda litera jest kodowana za pomocą pięciu bitów, tak jak w poniższej tabeli.

Symbol ● oznacza obecność, a ○ – brak sygnału. Znaki były interpretowane w dwóch trybach: zwykłym i numerycznym, a do przełączania między nimi służyły znaki specjalne ⇑ i ⇓. Znaki przestankowe występowały tylko w trybie numerycznym.

Znaki ↵ i → to znaki końca linii, dziś zwykle oznaczane `CR` i `LF`. „Pusty" znak / nie miał przypisanej żadnej funkcji.

–	?	:		3	!	&	£	8		(	)	.	,	9	0	1	4	′	5	7	=	2		6	+	_	↵	→		⇓	/
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_	↵	→	⇑		/
●	●	○	●	●	●	○	○	○	●	●	○	○	○	○	○	●	○	●	○	●	○	●	●	●	●	○	○	○	●	●	○
●	○	●	○	○	○	●	○	●	●	●	●	○	○	○	●	●	●	○	○	●	●	●	○	○	○	○	○	●	●	●	○
○	○	●	○	○	●	○	●	●	○	●	○	●	●	○	●	●	○	●	○	●	●	○	●	●	○	●	○	○	○	●	○
○	●	●	●	○	●	●	○	○	●	●	○	●	●	●	○	○	●	○	○	○	●	○	●	○	○	○	●	○	●	●	○
○	●	○	○	○	○	●	●	○	○	○	●	●	○	●	●	●	○	○	●	○	●	●	●	●	●	○	○	○	●	●	○

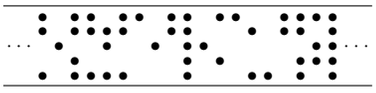
Przykładowo, komunikat

`W 2023 – DELTA!`

był kodowany jako

`W_⇑WPWE_A⇓_DELTA⇑F⇓`

Na perforowanej taśmie telegraficznej, gdzie perforacje odpowiadały symbolom ●, wyglądało to tak:



To oczywiście jeszcze nie jest żaden szyfr. Alfabet telegraficzny był powszechnie przyjętym standardem i zwykły dalekopis potrafił nadawać i odbierać komunikaty zakodowane w ten sposób.

Szyfr Vernama

Ogólną metodę szyfrowania tekstów zapisanych alfabetem telegraficznym obmyślił i opatentował jeszcze w 1919 roku amerykański inżynier Gilbert S. Vernam (1890–1960). Opiera się ona na prostej operacji dodawania bitów:

$$\circ + \circ = \circ \qquad \circ + \bullet = \bullet \qquad \bullet + \circ = \bullet \qquad \bullet + \bullet = \circ$$

Jest to powszechnie stosowana w informatyce i logice operacja, znana jako XOR, alternatywa rozłączna czy też dodawanie modulo 2. Można ją w oczywisty sposób rozszerzyć do dodawania znaków alfabetu telegraficznego „po współrzędnych", na przykład:

$$\mathtt{B} + \mathtt{K} = \begin{matrix}\bullet\\\circ\\\bullet\\\bullet\\\bullet\end{matrix} + \begin{matrix}\bullet\\\bullet\\\bullet\\\bullet\\\circ\end{matrix} = \begin{matrix}\circ\\\bullet\\\bullet\\\circ\\\bullet\end{matrix} = \mathtt{P}$$

+	A	B	C	D	E	F	G	H	I	···
A	/	G	F	R	→	C	B	Q	S	···
B	G	/	Q	T	O	H	A	F	⇓	···
C	F	Q	/	U	K	A	H	G	↵	···
D	R	T	U	/	↵	_	W	X	K	···
E	→	O	K	↵	/	N	⇑	Y	U	···
F	C	H	A	_	N	/	Q	B	J	···
G	B	A	H	W	⇑	Q	/	C	M	···
H	Q	F	G	X	Y	B	C	/	L	···
I	S	⇓	↵	K	U	J	M	L	/	···
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Powstaje w ten sposób „tabliczka dodawania" liter (patrz margines), którą każdy kryptolog w Bletchley Park musiał znać na pamięć nie gorzej niż szkolną tabliczkę mnożenia.

Tę operację można dalej rozszerzyć do dodawania tekstów o tej samej długości. Dodajemy je litera po literze, na przykład:

```
  MOJE_HASLO_DO_SEJFU_TO_⇑QWER⇓
+ BEZ_SERC_BEZ_DUCHA_TO_SZKIELE
  SBGSEYDJPESOMF→K⇓CAH↵MEROY/OV
```

Dodawanie bitów, a co za tym idzie – także dodawanie liter i tekstów, ma pewne pożyteczne własności. W szczególności jeżeli do jakiejś litery x dodamy

Dla każdych liter x, y i z zachodzą bowiem równości:

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$
$$x + y = y + x,$$
$$x + / = x,$$
$$x + x = /.$$

Z tego łatwo wynika, że:

$$(x + y) + y = x.$$

dwukrotnie inną literę y, to otrzymamy z powrotem x (patrz margines). Ta obserwacja stanowi podstawę szyfru Vernama. Aby skorzystać z tego szyfru, nadawca i odbiorca muszą zawczasu uzgodnić jakiś długi ciąg znaków K jako klucz szyfrujący. Następnie, aby zaszyfrować jakiś tekst T, nadawca dodaje go – litera po literze – do klucza szyfrującego. Powstały w ten sposób szyfrogram $S = T + K$ przesyła odbiorcy, który, odebrawszy go, dodaje doń ten sam klucz szyfrujący i odzyskuje $S + K = T$.

Przykładowo, jeżeli obie strony uzgodniły, że ich tajnym kluczem będzie tekst *Ody do młodości* Mickiewicza, to po odebraniu zaszyfrowanego komunikatu odbiorca wykona dodawanie i odzyska oryginalny tekst:

```
 SBGS EYDJPESOMF→K⇓CA H↵MEROY/OV
+BEZ_SERC_BEZ_DUCHA_TO_SZKIELE
 MOJE_HASLO_DO_SEJFU_TO_⇑QWER⇓
```

Zauważmy, że zaszyfrowanie i odszyfrowanie tekstu to dokładnie ta sama procedura. To jest duża zaleta szyfru Vernama, bo znacznie upraszcza konstruowanie maszyn szyfrujących tą metodą. Jedna maszyna dodająca ciągi znaków nadaje się zarówno do szyfrowania, jak i do odszyfrowywania komunikatów.

Wszystko to jest bardzo eleganckie, ale jak wybrać klucz szyfrujący, aby nasz szyfr był bezpieczny? To wcale nie jest łatwa sprawa. Początkujący szyfrant mógłby na przykład ustalić klucz składający się z jednej litery powtórzonej wiele razy:

```
 MOJE_HASLO_DO_SEJFU_TO_⇑QWER⇓
+DDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDDD
 YZ→↵FXRN⇑ZF/ZFN↵→_CFBZFLVG↵AP
```

Otrzymujemy w ten sposób prosty szyfr podstawieniowy, w którym każda litera jest zastępowana przez inną zgodnie z raz na zawsze ustaloną zasadą. Wiadomo od stuleci, że takie szyfry można łatwo łamać, analizując częstość występowania liter w zaszyfrowanych tekstach. W tym przypadku jest jeszcze gorzej: takich „jednoliterowych” kluczy szyfrujących jest tylko 31, więc kryptoanalityk może łatwo wypróbować je wszystkie po kolei.

Może więc *Oda do młodości*, jak w poprzednim przykładzie? To jest trochę lepszy pomysł, ale tylko trochę. Jeżeli raz na zawsze ustalimy, że kluczem szyfrującym jest na przykład jakaś książka, to należy zakładać, że po pewnym czasie obcy szpiedzy dowiedzą się, jaka to książka, i od tej pory będą mogli swobodnie czytać wszystkie nasze komunikaty.

Jest też inny, poważniejszy problem. Nawet jeżeli ustalimy zupełnie nieznany naszym przeciwnikom klucz, ale kiedykolwiek użyjemy tego klucza więcej niż raz, to wystawiamy się na skuteczny atak. Taką sytuację nazywamy *głębią*.

Atak na głębię

Przypuśćmy, że dwa teksty T_1 i T_2 zaszyfrowaliśmy tym samym kluczem K, otrzymując dwa szyfrogramy:

$$T_1 + K = S_1, \qquad T_2 + K = S_2.$$

Jeżeli nasz przeciwnik zdołał podsłuchać oba szyfrogramy, to może dodać je do siebie litera po literze, otrzymując sumę oryginalnych tekstów:

$$S_1 + S_2 = (T_1 + K) + (T_2 + K) = \\ = (T_1 + T_2) + (K + K) = T_1 + T_2.$$

Zauważmy, że z tej sumy całkowicie zniknął klucz szyfrujący.

Co dalej mógłby z tym zrobić nasz przeciwnik – kryptoanalityk? Rozważmy to na przykładzie. Przypuśćmy, że przechwyciliśmy dwa szyfrogramy, które podejrzewamy, że były zaszyfrowane tym samym kluczem, i dodajmy je do siebie:

```
 MQFJO E WS⇑HB↵V F BQW⇑OL/R⇓TOPDKX
+GIEEY A L⇓NDOW↵ K NKAKQWBOTICFS↵M
 IZNRF→EGQXE⇑P→YOTHKEBLKPP⇑NUE
```

Rozwiązanie zadania F 1072.
Gęstość ludzkiego ciała jest w przybliżeniu równa gęstości wody („leżąc” spokojnie w wodzie, nie toniemy), a więc nasza objętość równa się naszej masie podzielonej przez gęstość wody ρ_0. Siła wyporu powietrza powoduje zatem, że wskazywany przez wagę ciężar $Q = Q_0(1 - \rho/\rho_0)$. Gdyby nie było atmosfery, to na wysokości h nad Ziemią nasz ciężar wynosiłby:

$$Q = Q_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \approx Q_0 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right).$$

Oznacza to, że bez atmosfery na wysokości

$$h \approx \frac{\rho R}{2\rho_0}$$

nasz ciężar byłby równy wskazaniom wagi na powierzchni Ziemi w obecności atmosfery. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy: $h \approx 4160$ m – wysokość bliska wysokości szczytu Jungfrau w Alpach Berneńskich.

Rozwiązanie zadania M 1746.
Skoro zbiór A zawiera 300 uczniów, to istnieje szkoła, w której uczy się co najwyżej 100 uczniów ze zbioru A. Niech będzie to szkoła S_1. Wtedy zbiór $A \setminus S_1$ ma co najmniej 200 uczniów. Zauważmy, że na mocy założeń każdy z uczniów z tego zbioru ma różną liczbę znajomych w S_1. Ponadto każdy z nich ma przynajmniej jednego znajomego w szkole S_1. Oznacza to, że każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 200\}$ musi być osiągana jako liczba znajomych ze szkoły S_1 kogoś ze zbioru $A \setminus S_1$. Wobec tego istnieje uczeń z $A \setminus S_1$, który zna wszystkich ze szkoły S_1. Bez straty ogólności załóżmy, że jest to uczeń x ze szkoły S_2. Wtedy na podstawie założeń zadania istnieje uczeń $y \in S_3$, że x i y się znają. Ponadto istnieje też uczeń z ze szkoły S_1, że y i z się znają. Jednakże x zna się z z, gdyż x zna wszystkich ze szkoły S_1. Zatem trójka uczniów (x, y, z) spełnia warunki zadania.

To nie wygląda sensownie, ale też suma dwóch sensownych tekstów w języku polskim nie ma powodu wyglądać sensownie. Żeby coś z tym zrobić, potrzebujemy jakiejś choćby szczątkowej informacji o tekstach, które chcemy odszyfrować. Może to być na przykład lista często występujących słów, których się spodziewamy w zaszyfrowanych komunikatach. Takie słowa nazywamy *ściągami*. Kryptolodzy w Bletchley Park szukali ściąg takich, jak *geheim* (niem. tajne), *nicht in Frage* (niem. wykluczone) czy *keine besonderen Ereignisse* (niem. bez szczególnych zdarzeń). Do znalezienia dobrych ściąg konieczna była znakomita znajomość języka, żargonu używanego w niemieckiej armii, a nawet ostatnich wydarzeń na froncie czy wręcz aktualnej prognozy pogody.

Przypuśćmy, że w jednym z zaszyfrowanych komunikatów może pojawić się słowo HASLO. Może nawet na samym początku? Jak musiałyby wyglądać pierwsze znaki drugiego komunikatu, aby suma tych komunikatów zaczynała się od znaków IZNRF? Pamiętając, że $X + Y = Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X + Z = Y$, policzmy:

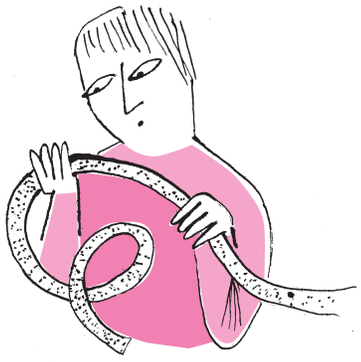
```
  IZNRF→EGQXE⇑P→YOTHKEBLKPP⇑NUE
+ HASLO
-------------------------------
  LLDOY
```

To nie wygląda na początek tekstu w języku polskim. A może na kolejnej pozycji?

```
  I ZNRF→EGQXE⇑P→YOTHKEBLKPP⇑NUE
+ _HASL O
-------------------------------
  →SKK⇓ T
```

To wygląda jeszcze gorzej. Próbując jednak kolejnych dopasowań, w końcu dojdziemy do:

```
  IZNRF→ EGQXE⇑ P →YOTHKEBLKPP⇑NUE
+          _HASLO_
-------------------------------
           SCHOWAL
```



Bingo! Nie dość, że zapewne trafiliśmy, to poznaliśmy też fragment drugiego komunikatu, a w dodatku możemy spróbować zgadnąć kilka jego kolejnych liter. Jest tu kilka możliwości: schował (i spacja), schowałem, schowaliśmy... Możemy wypróbować je po kolei i wkrótce zidentyfikujemy najbardziej obiecującą możliwość:

```
  IZNRF→EGQXE⇑P→YOTHKEBLKPP⇑NUE
+       _SCHOWAL EM_
-------------------------------
        I_HASLO_ ADM
```

Cierpliwy Czytelnik może spróbować ułożyć tę układankę do końca. Nie zawsze daje się w ten sposób odszyfrować cały komunikat (czasem słowa czy zdania kończą się w obu komunikatach w tym samym miejscu i trudno z tego miejsca ruszyć dalej), ale taki *atak na głębię* często pozwala poznać fragmenty obu komunikatów.

Widzimy więc, że dobry klucz szyfrujący powinien być niepowtarzalny, a przy tym pozbawiony jakiejś łatwej do zidentyfikowania struktury. Dlatego najlepiej za klucz przyjąć całkowicie losowy ciąg znaków. Jest to tak zwany szyfr klucza jednorazowego, który z punktu widzenia kryptografii jest doskonale bezpieczny: żadną metodą nie da się go złamać. Niestety, aby taki szyfr zastosować w praktyce, nadawca i odbiorca muszą zawczasu uzgodnić wspólny losowy ciąg znaków o długości co najmniej takiej, jak wszystkie komunikaty, które planują przesyłać. Szyfr klucza jednorazowego znalazł pewne ograniczone zastosowania, ale trudno sobie wyobrazić jego używanie do komunikacji na szeroką skalę.

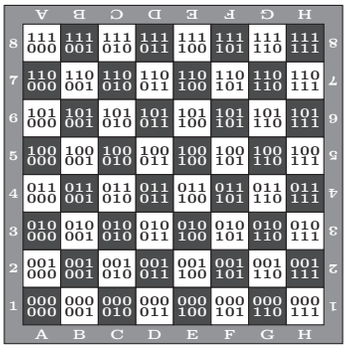
Tak zwana gorąca linia między Pentagonem a Kremlem w latach sześćdziesiątych była oparta na szyfrze klucza jednorazowego i na kurierach, którzy pocztą dyplomatyczną przewozili długie ciągi losowych bitów.

Kompromisowym rozwiązaniem jest zastąpienie ciągu losowego pseudolosowym, generowanym przez maszynę. Jeżeli obie strony komunikacji używają takiej samej maszyny, to wystarczy, że uzgodnią początkowe ustawienia maszyny, a klucze wygenerowane po obu stronach będą identyczne. Głównym zadaniem maszyny Lorenz SZ40/42 było właśnie generowanie pseudolosowych ciągów znaków w alfabecie telegraficznym. Mimo skomplikowanej konstrukcji opartej na 12 kołach zębatych Anglikom udało się rozszyfrować jej działanie jedynie na podstawie przesyłanych komunikatów. O tym, jak tego dokonali, opowiemy w kolejnym numerze.

Rozwiązanie (nie)możliwej do rozwiązania zagadki ze strony 1

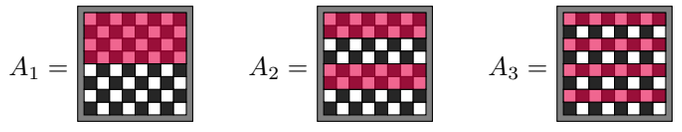
Na stronie 1 przeczytaliśmy już, że więźniowie wiedzieli wcześniej, na czym będzie polegać zadanie, i mogli się naradzić nad strategią. Jednak nie znali oni ułożenia monet na planszy. Co więcej, całej rozmowie mógł się przysłuchiwać strażnik i potem tak poodwracać monety, żeby nieudolnie wybrany plan nie zadziałał. W takim przypadku nie ma miejsca na błąd. Strategia musi pozwolić pierwszemu więźniowi na wskazanie dowolnego pola na planszy.

Ponumerujmy pola planszy, zaczynając od zera. Nie róbmy tego jednak w systemie dziesiętnym, tylko binarnym. Tak więc pole A1 będzie miało numer 000000, pole A2 numer 000001 i tak dalej, aż do pola H8 o numerze 111111 (rys. 1).



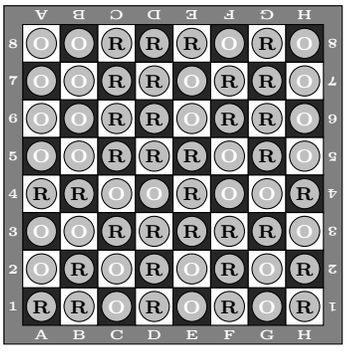
Rys. 1

Zdefiniujmy na szachownicy sześć obszarów – obszar A_i tworzą pola, których numery mają jedynkę na i-tym miejscu (rys. 2). Poniżej schematyczne przedstawienie pierwszych trzech z nich (kolejne trzy wyglądają podobnie, tylko zaznaczone są kolumny, nie wiersze).



Rys. 2

Przyjmijmy ponadto, że każde ustawienie monet na szachownicy koduje pewne pole w następujący sposób: na i-tym miejscu numeru tego pola ma znajdować się reszta z dzielenia przez 2 liczby reszek w obszarze A_i. W przykładzie na rysunku 3 w kolejnych obszarach A_i znajduje się odpowiednio 16, 17, 16, 17, 20 i 18 reszek, więc koduje on pole o numerze 010100, czyli E3.



Rys. 3

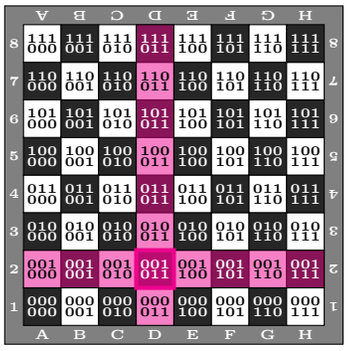
Mamy zatem jakiś pomysł na system kodowania, ale czy faktycznie pozwala on na rozwiązanie zagadki? Okazuje się, że tak. Zdefiniowaliśmy obszary A_i w taki sposób, że pole o numerze $w = \overline{w_1w_2w_3w_4w_5w_6}$ (po prawej stronie równości znajduje się sześciobitowy zapis dwójkowy) należy wyłącznie do tych obszarów A_i, dla których $w_i = 1$. Odwrócenie monety na polu w powoduje zatem zmianę parzystości liczby reszek w tych właśnie obszarach (i tylko w nich). Oznacza to, że jeśli początkowe ustawienie monet przez strażnika koduje pole o numerze $x = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}$, to nowe ustawienie (po odwróceniu monety) koduje pole o numerze, w którym zamienione zostały cyfry (bity) z x na pozycjach i takich, że $w_i = 1$. Informatycy powiedzieliby, że jest to XOR liczb x i w, oznaczany często jako $x \oplus w$.

O pożytkach z operacji XOR w kontekście zagadek logicznych pisał również Tomasz Janiszewski w artykule *Samotne zwierzę na Arce Noego* z Δ^9_{21}. W tym zaś numerze *Delty* Bartosz Klin opisuje, jak XOR przydaje się w szyfrowaniu.

Pierwszy więzień ma niejako do rozwiązania problem odwrotny: strażnik wskazuje mu pewne pole o numerze $y = \overline{y_1y_2y_3y_4y_5y_6}$ i więzień ma znaleźć takie z, dla którego $x \oplus z = y$. Wystarczy jednak, że wybierze pole, które zmienia wszystkie cyfry x różne od odpowiadających im cyfr y. Jest to zatem pole $z = \overline{z_1z_2z_3z_4z_5z_6}$ takie, że $z_i = 1$ dokładnie wtedy, gdy $y_i \neq x_i$. To swoją drogą również można zgrabnie wyrazić przy użyciu operacji XOR, $z = x \oplus y$.

Jeśli kogoś odstrasza formalizm powyższego opisu, proponuję analizę następującego przykładu. Rozważmy takie ułożenie monet jak na rysunku 3. Załóżmy, że strażnik wskazał na pole H4 o numerze 011111.

Sprawdzamy, co się dzieje na obszarze odpowiedzialnym za pierwszą pozycję. Liczba orłów jest parzysta. Liczba, którą chcemy zakomunikować drugiemu więźniowi, ma na tej pozycji 0, czyli liczbę parzystą, więc nie chcemy tego zmieniać. Teraz kolej na drugą pozycję. Tutaj też się zgadza – nieparzysta liczba orłów oraz cyfra 1 w naszej liczbie. Co z trzecią? O! Tutaj się nie zgadza! Co to oznacza? Monetę, którą będziemy odwracać, trzeba wybrać spośród tych z obszaru odpowiedzialnego za tę pozycję. Jednak zauważmy, że jednocześnie nie możemy przy tym nic zmienić w strefach przypisanych pierwszej i drugiej pozycji. W takim razie jasno wskazuje to, że musimy zmienić coś w drugim wierszu.



Rys. 4

Artykuł powstał na podstawie filmiku *The almost impossible chessboard puzzle* na kanale Stand-up Maths oraz filmiku *How to send a self-correcting message (Hamming codes)* na kanale 3Blue1Brown. Oba są dostępne w serwisie youtube.com.

Teraz to samo rozumowanie będziemy przeprowadzać na ostatnich trzech pozycjach, czyli będziemy patrzyli na kolumny planszy. I tak na czwartej pozycji widzimy, że się zgadza, natomiast na piątej i szóstej nie. Stąd szukamy wiersza, który jest częścią obszaru związanego z pozycją 5 i 6, ale nie z pozycją 4. Widzimy, że jest to czwarta kolumna. W takim razie pierwszy więzień powinien odwrócić monetę na polu D2 (rys. 4). Korzystając z wcześniejszych rozważań, moglibyśmy dojść do tego inaczej: obliczając $010100 \oplus 011111 = 001011$ – ciąg po prawej stronie koduje właśnie pole D2.

Skomentujmy jeszcze sytuację, gdy numer wskazywany przez szachownicę zgadza się z numerem pola wskazanego przez strażnika. Może to budzić pewien niepokój, przecież więzień *musi* odwrócić jakąś monetę. Którą więc powinien wybrać, gdy wszystko jest w porządku? Zauważmy, że jeśli rozważylibyśmy wszystkie z naszych obszarów na raz, to żaden z nich nie zawiera pola numer 000000. Stąd w takim wypadku wystarczy, że odwrócimy monetę właśnie na tym polu, bo ona jako jedyna nie wpływa na wiadomość, którą możemy odczytać z planszy.

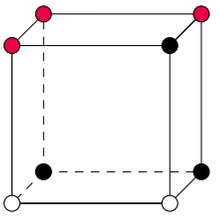
Jeśli się zastanawiasz, Czytelniku, czy metoda zastosowana w tej zagadce może się przydać gdziekolwiek indziej, to odpowiedź brzmi: tak, jeszcze jak! Być może pamiętasz, jak kiedyś zwracano uwagę na to, żeby płyty CD lub DVD trzymać za brzegi, bo inaczej mogą się zniszczyć? Mimo że nie zawsze tego przestrzegano, one nadal działały, nawet lekko porysowane. Jest to zasługa kodów korygujących, dzięki którym lekko uszkodzoną wiadomość adresat wciąż jest w stanie odczytać bez błędu. Jednym z pierwszych tego typu kodów był kod Hamminga, który korzystał z technik bardzo podobnych do przedstawionego rozwiązania zagadki. Jego algorytm można uprościć właśnie do sprawdzania parzystości w wyznaczonych obszarach wiadomości. Ma to zapewnić znalezienie błędów, jeśli oczywiście jakiekolwiek wystąpią. Kod Hamminga działał jednak tylko wtedy, gdy błędów nie pojawiło się zbyt wiele. Metoda ta była dopracowywana, a cała dziedzina prężnie się rozwijała na przełomie wieków, ale to jest zupełnie inna historia.

Komentarz na deser. Wyobraźmy sobie, że strażnik w przypływie pozorowanej dobroci oznajmił więźniom, że zamiast szachownicy 8×8 przygotował dla nich szachownicę 7×7. Wszak mniej pól do odgadnięcia powinno ułatwić problem! Nie jest to jednak prawda – okazuje się, że aby więźniowie mieli pewność wyjścia na wolność, liczba pól na szachownicy musi być potęgą dwójki! Uzasadnienie nie jest bardzo skomplikowane i chyba najprościej prześledzić je na przykładzie trzech pól (choć wtedy ciężko ułożyć je w szachownicę...).

Jeśli mamy do dyspozycji 3 pola, to możliwych ustawień monet jest $2^3 = 8$. Możemy przyjąć, że ustawienia te odpowiadają współrzędnym punktów w trójwymiarze (np. orzeł koduje 0, a reszka 1, wtedy ustawienie ORR odpowiada punktowi $(0, 1, 1)$). Wszystkie ustawienia układają się zatem w wierzchołki sześcianu jednostkowego.

Początkowe ustawienie monet przez strażnika odpowiada wyborowi jednego wierzchołka sześcianu, odwrócenie zaś jednej monety przez więźnia to przejście do jednego z sąsiadów wspomnianego wierzchołka. Na przykład, jeśli strażnik wybrał wierzchołek $(0, 1, 0)$, to więzień może uzyskać ustawienia odpowiadające wierzchołkom $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$ i $(0, 1, 1)$ – wszystkie są sąsiadami $(0, 1, 0)$ w sześcianie.

Każde ustawienie musi być możliwe do zinterpretowania przez drugiego więźnia jako jedno z trzech pól (tylko w taki sposób pierwszy więzień może drugiemu przekazać informację). Innymi słowy, jeśli pola mają kolory (powiedzmy, biały, czarny i ciemnoróżowy), to więźniowie muszą ustalić pewne kolorowanie wierzchołków sześcianu na te trzy kolory. Będą oni mieli pewność zwycięstwa tylko wtedy, gdy sąsiedzi dowolnego wierzchołka będą reprezentowali wszystkie możliwe kolory.



Rys. 5. Lewy dolny wierzchołek ma sąsiadów we wszystkich kolorach, ale prawy dolny już nie

Ponieważ zarówno sąsiadów, jak i kolorów, jest po 3, oznacza to, że każdy wierzchołek musi mieć dokładnie jednego sąsiada każdego z kolorów. Z tego ostatniego stwierdzenia wynika, że każdemu czarnemu wierzchołkowi odpowiada dokładnie jedna czarno-biała krawędź. Z kolei każdemu białemu wierzchołkowi odpowiada... cóż, też dokładnie jedna czarno-biała krawędź. Wynika stąd, że białych i czarnych wierzchołków musi być tyle samo! A że żaden z tych kolorów nie był szczególnie wyróżniony, tyleż samo musi być również wierzchołków ciemnoróżowych. Oznacza to, że liczba wszystkich wierzchołków (8) jest podzielna przez liczbę kolorów (3), a to jest sprzeczność. Proste uogólnienie tego rozumowania dowodzi, że aby zagadka miała rozwiązanie, liczba pól (n) musi być dzielnikiem liczby wszystkich ustawień monet (2^n), co oznacza, że n musi być potęgą dwójki.

Klub 44 M

$\otimes\sqrt{\text{f}!}=44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2023

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl

Z radością dzielimy się wiadomością, że **dr Marcin Kuczma** został laureatem Nagrody Głównej PTM im. Samuela Dicksteina za rok 2022.

Wyróżnienie to jest przyznawane za osiągnięcia w dziedzinie edukacji matematycznej, popularyzacji i historii matematyki.

Laureatowi serdecznie gratulujemy!

Redakcja

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 847 ($WT = 2{,}07$) i 848 ($WT = 2{,}13$) z numeru 10/2022

Stanisław Bednarek	Łódź	45,84
Krzysztof Zygan	Lubin	45,83
Tomasz Wietecha	Tarnów	44,88
Janusz Olszewski	Warszawa	42,04
Mikołaj Pater	Opole	41,88
Paweł Najman	Kraków	39,93
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Radosław Kujawa	Wrocław	37,96
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Norbert Porwol	Essen	37,50

Trzy nazwiska – i trzy różne poziomy wciągnięcia w naszą klubową zabawę. Pan Stanisław Bednarek – właśnie został Weteranem Klubu 44 M. Pan Krzysztof Zygan – nowa twarz w Klubie 44 M. Zaś pan Tomasz Wietecha – to już czternasty raz; biorąc pod uwagę szesnaście rund w Klubie 44 F – jest czego gratulować!

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 746 ($WT = 2{,}63$), 747 ($WT = 2{,}43$) z numeru 11/2022

Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	4–40,07
Jan Zambrzycki	Białystok	3–39,61
Jacek Konieczny	Poznań	33,68
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2–33,38
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96
Tomasz Wietecha	Tarnów	16–18,65
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–18,61
Paweł Kubit	Kraków	15,73
Konrad Kapcia	Poznań	2–11,18

Zadania z matematyki nr 861, 862

Redaguje Marcin E. KUCZMA

861. Trójkąt ABC jest równoramienny: $AC = BC$. Punkt D leży na boku AC, przy czym $2\,AD = BD$. Punkt E leży na odcinku BD, przy czym $2\,BE = AD$. Wykazać, że $\sphericalangle CDE = 2\sphericalangle CED$.

862. Dany jest graf skierowany o skończenie wielu wierzchołkach (każde dwa różne wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź zorientowana). Każda krawędź jest pokolorowana jednym z m kolorów; zaś z każdego wierzchołka wychodzi więcej niż m krawędzi. Udowodnić, że z każdego wierzchołka można poprowadzić nieskończenie wiele nieskończonych ścieżek takich, że dla każdej liczby naturalnej k krawędzie przechodzone w k-tym kroku na wszystkich tych ścieżkach mają jednakowy kolor. (Nieskończona ścieżka to nieskończony ciąg kolejno przyległych krawędzi – początkiem kolejnej jest koniec poprzedniej).

Zadanie 862 zaproponował pan Adam Woryna z Rudy Śląskiej.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2023

Przypominamy treść zadań:

853. Rozstrzygnąć, czy suma skończenie wielu czworokątów wklęsłych o rozłącznych wnętrzach może być wielokątem wypukłym (czworokąt wklęsły to taki, w którym jeden z kątów wewnętrznych jest większy od kąta półpełnego). Czy odpowiedź zmieni się, jeśli zamiast wklęsłych czworokątów będziemy rozważać wklęsłe pięciokąty?

854. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że liczba przedstawień n w postaci sumy dwóch nieujemnych liczb trójkątnych jest równa liczbie przedstawień liczby $4n + 1$ w postaci sumy kwadratów dwóch nieujemnych liczb całkowitych (utożsamiamy przedstawienia różniące się tylko kolejnością składników).

853. Dla czworokątów jest to niemożliwe. Dowód: przypuśćmy, że suma n czworokątów wklęsłych o rozłącznych wnętrzach jest wielokątem wypukłym W. Punkty będące wierzchołkami wklęsłych kątów wewnętrznych tych czworokątów nazwijmy punktami krytycznymi. Jasne, że żaden z nich nie może leżeć na brzegu wielokąta W. Przy tym każdy z czworokątów ma dokładnie jeden wierzchołek krytyczny oraz każdy punkt krytyczny jest wierzchołkiem dokładnie jednego z owych czworokątów. Ustala to bijekcję między czworokątami oraz punktami krytycznymi. Jest więc dokładnie n punktów krytycznych; i wszystkie leżą wewnątrz wielokąta W.

Kąt pełny wokół dowolnie wybranego punktu krytycznego rozpada się na jeden kąt wklęsły pewnego czworokąta oraz część pozostałą, która jest kątem mniejszym od półpełnego – musi więc być albo kątem wewnętrznym innego czworokąta, albo sumą kilku kątów wewnętrznych innych czworokątów. W takim razie miary kątów naszych czworokątów przy wierzchołkach będących punktami krytycznymi sumują się do wartości $n \cdot 360°$. Wszelako tyle samo wynosi suma miar *wszystkich* ich kątów wewnętrznych. To by znaczyło, że żaden ich wierzchołek nie leży na brzegu wielokąta W; nonsens. Sprzeczność uzasadnia odpowiedź *nie* na pierwsze pytanie zadania.

Dla pięciokątów odpowiedź brzmi *tak*. Przykład: w dowolnym czworokącie wypukłym łączymy dwa przeciwległe wierzchołki zygzakowatą łamaną trójodcinkową, rozcinając go na dwa pięciokąty wklęsłe.

854. Weźmy pod uwagę dowolne przedstawienie liczby n w postaci sumy dwóch liczb trójkątnych:

$$n = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2}.$$

Ustalmy oznaczenia tak, by $k \geqslant l \geqslant 0$. Określamy:

$$(*) \qquad a = k + l + 1, \quad b = k - l \quad (\text{więc } a > b \geqslant 0);$$

wówczas:

$$a^2 + b^2 = 2k^2 + 2l^2 + 2k + 2l + 1 = 4n + 1.$$

I na odwrót: niech będzie dane dowolne przedstawienie liczby $4n + 1$ w postaci sumy dwóch kwadratów: $4n + 1 = a^2 + b^2$. Liczby a, b muszą być różnej parzystości. Ustalmy oznaczenia tak, by $a > b \geqslant 0$. Określamy:

$$(**) \quad k = \frac{a+b-1}{2}, \quad l = \frac{a-b-1}{2} \quad (\text{więc } k \geqslant l \geqslant 0);$$

wówczas:

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} = \frac{(a+b)^2 - 1}{8} + \frac{(a-b)^2 - 1}{8} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{4} = n.$$

Przyporządkowania $(k, l) \mapsto (a, b)$ oraz $(a, b) \mapsto (k, l)$, dane wzorami $(*)$ i $(**)$, są wzajemnie odwrotne. Określają zatem bijekcję między rozważanymi przedstawieniami liczb n oraz $4n + 1$.

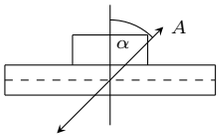
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2023

Zadania z fizyki nr 758, 759

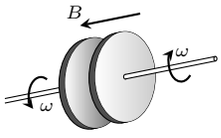
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

758. Pozioma podstawka, na której leży klocek, drga harmonicznie z częstotliwością $f = 10$ Hz w kierunku tworzącym kąt $\alpha = \pi/4$ z pionem (rys. 1). Współczynnik tarcia klocka o podstawkę: $\mu = 0{,}5$. Jakie warunki musi spełniać amplituda drgań, aby klocek zaczął pełznąć po podstawce, ale nie podskakiwał?

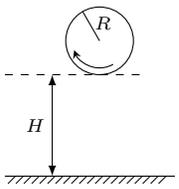


Rys. 1

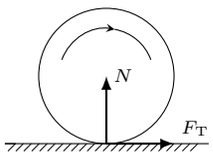
759. Dwie jednakowe okrągłe, płaskie, metalowe płytki umieszczone tak, jak pokazano na rysunku 2, obracają się z prędkością kątową ω w przeciwne strony w polu magnetycznym prostopadłym do powierzchni płytek. Indukcja pola magnetycznego wynosi B, a odległość między płytkami d. Osie płytek połączono przewodnikiem. Znaleźć napięcie między punktami płytek, które znajdują się naprzeciw siebie, a ich odległość od środka płytki wynosi r.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Rozwiązania zadań z numeru 1/2023

Przypominamy treść zadań:

750. Koło rowerowe spada swobodnie z wysokości H (rys. 1) i po odbiciu podskakuje na wysokość h. Koło to rozkręcono do prędkości kątowej ω_0 i puszczono swobodnie z tej samej wysokości. Pod jakim kątem do pionu odbije się ono od podłoża? Współczynnik tarcia między kołem a podłożem wynosi μ, promień koła R. Zakładamy, że cała masa koła skupiona jest na jego obwodzie.

751. Kondensator płaski naładowany ładunkiem Q wypełnia płytka z dielektryka o stałej dielektrycznej ε. Powierzchnia okładek wynosi S, odległość między okładkami jest równa d. Znaleźć energię zgromadzoną w dielektryku w wyniku jego polaryzacji. Przyjąć, że dielektryk jest niepolarny.

750. Podczas zderzenia na koło działa w kierunku pionowym zmienna w czasie siła reakcji $N(t)$ (rys. 4). Oznaczając czas zderzenia koła z podłożem przez T, prędkość koła w kierunku pionowym tuż przed zderzeniem przez v, a zaraz po odbiciu przez u, możemy napisać:

$$(1)\qquad M(v+u) = \int_0^T N(t)dt, \text{ gdzie } M \text{ jest masą koła, } v = \sqrt{2gH}, \quad u = \sqrt{2gh}.$$

Ponieważ zderzenie trwa bardzo krótko, średnia wartość siły reakcji znacznie przewyższa wartość siły grawitacji, której nie będziemy uwzględniać. Dopóki występuje poślizg, na koło działa w kierunku poziomym siła tarcia $F_T = \mu N$, która nadaje przyspieszenie w ruchu postępowym i hamuje ruch obrotowy. Załóżmy, że czas poślizgu τ jest nie większy niż czas zderzenia, i oznaczmy przez $V(t)$ prędkość w kierunku poziomym, a przez $\omega(t)$ prędkość kątową. Spełnione są równania:

$$(2)\qquad MV(\tau) = \mu \int_0^\tau N(t)dt,$$

$$(3)\qquad I[\omega(\tau) - \omega_0] = -\mu R \int_0^\tau N(t)dt, \text{ gdzie } I = MR^2,$$

$$(4)\qquad V(\tau) = R\omega(\tau), \text{ stąd:}$$

$$(5)\qquad \int_0^\tau N(t)dt = (M\omega_0 R)/2\mu \leqslant \int_0^T N(t)dt.$$

Z równań (1) i (5) otrzymujemy:

$$v + u \geqslant \omega_0 R/2\mu, \quad \omega_0 \leqslant 2\mu(v+u)/R = \omega_{kr}.$$

Otrzymaliśmy krytyczną wartość prędkości kątowej ω_{kr}, dla której poślizg kończy się dokładnie w tej samej chwili, kiedy kończy się odbicie. Gdy $\omega_0 \leqslant \omega_{kr}$, po zakończeniu poślizgu siła tarcia znika, prędkość ruchu w kierunku poziomym pozostaje stała i zgodnie z (2) i (5) wynosi $V(\tau) = \omega_0 R/2$. Szukany kąt odbicia określa wzór:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \omega_0 R/2u = \omega_0 R/2\sqrt{2gh}.$$

Gdy $\omega_0 > \omega_{kr}$, zgodnie z (1) $V = V(T) = \mu(v+u)$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \mu(v+u)/u = \mu\big(\sqrt{H/h}+1\big)$.

751. Dielektryk w naładowanym kondensatorze ulega polaryzacji – rozsuwają się ładunki w jego cząsteczkach, w wyniku tego na powierzchniach stykających się z okładkami kondensatora powstają ładunki indukowane. Można je znaleźć, wyrażając natężenie pola E wewnątrz kondensatora na dwa sposoby – za pomocą ładunków indukowanych Q_1 lub za pomocą stałej dielektrycznej: $E = (Q - Q_1)/(\varepsilon_0 S) = Q/(\varepsilon_0 \varepsilon S)$, gdzie ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni. Stąd

$$(6)\qquad Q_1 = Q(\varepsilon - 1)/\varepsilon.$$

Energia dielektryka W_d jest to praca, jaką trzeba wykonać, aby go spolaryzować. Załóżmy, że umieściliśmy dielektryk w nienaładowanym kondensatorze, w jakiś sposób go spolaryzowaliśmy, wykonując pracę W_d (np. rozsuwając ładunki rękami), i na jego powierzchniach powstały ładunki $\mp Q_1$. Następnie ładujemy kondensator, przenosząc ładunki z jednej okładki na drugą, cały czas trzymając ładunki w dielektryku. Wykonujemy przy tym pracę

$$(7)\qquad L = \int_0^Q \left(\frac{q}{c_0} - \frac{Q_1}{c_0}\right)dq = \frac{Q^2}{2c_0} - \frac{Q_1 Q}{c_0},$$

gdzie $c_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

Po naładowaniu przestajemy trzymać ładunki w dielektryku, bo trzyma je siła elektryczna. Energia naładowanego kondensatora wypełnionego dielektrykiem wynosi $W = Q^2/2\varepsilon c_0$. W kolejnym kroku rozładowujemy kondensator, przenosząc ładunki w drugą stronę. Wydzieli się przy tym ciepło W. Bilans energii ma postać $W_d + L = W$, stąd:

$$(8)\qquad W_d = W - W_0 + Q_1 Q/c_0, \text{ gdzie } W_0 = Q^2/2c_0.$$

Podstawiając (6) do (8), otrzymujemy szukaną energię dielektryka: $W_d = Q^2(\varepsilon - 1)d/2\varepsilon_0 \varepsilon S$.

Prosto z nieba: Skrzydła motyla

Gwiazdy o masie mniejszej niż około $8\,M_\odot$ zaczynają swoje gwiazdowe życie na tzw. Ciągu Głównym, „paląc" wodór w jądrze, to znaczy zamieniając go w hel w procesie fuzji jądrowej. Po wypaleniu wodoru ewoluują do stadium podolbrzyma – zmieniają kolor na bardziej czerwony, stają się większe i jaśniejsze i zaczynają spalać wodór w otoczce helowego jądra. W następnej kolejności, po stadium czerwonego olbrzyma, zaczynają spalać hel na węgiel w jądrze, co jest związane z kolejną zmianą koloru (na bardziej niebieski) i zmniejszeniem jasności. Jeszcze później znów stają się czerwonym olbrzymem, tym razem paląc hel w otoczce wokół węglowego jądra. Na tym etapie w miarę spokojna ewolucja się kończy: gdy kończy się paliwo helowe, czyli źródło energii przeciwdziałające siłom grawitacji, jądro czerwonego olbrzyma zapada się – stając się białym karłem – a zewnętrzne części gwiazdy zostają gwałtownie odrzucone i rozrzedzone. Otoczka ta, wzbogacona o węgiel, tworzy jedne z najpiękniejszych zjawisk astronomicznych: mgławice planetarne.

Mgławice planetarne nie mają bezpośredniego związku z planetami; nazywają się tak z historycznych powodów, ponieważ w niedoskonałych teleskopach dawnych astronomów obiekty te sprawiały wrażenie rozciągłych, tak jak planety.

Zdjęcie mgławicy NGC 6302 Motyl wykonane przez Kosmiczny Teleskop Hubble'a

Większość mgławic planetarnych to mgławice mniej więcej sferyczne, ale kilka z nich ma kształt pary skrzydeł, czego najlepszym przykładem jest mgławica Motyl (NGC 6302, Caldwell 9). Wygląda tak, ponieważ prawdopodobnie powstała w polu przyciągania grawitacyjnego drugiej gwiazdy, to znaczy w układzie podwójnym. Interakcja ta spowodowała rozszerzanie się bądź „rozdmuchiwanie" materiału do kształtu skrzydeł. Mgławica planetarna ewoluuje z czasem, a po około 10 tys. lat rozpływa się definitywnie w gazie międzygwiazdowym, który z kolei później wchodzi w interakcje z kolejnym pokoleniem gwiazd. W tym kontekście nazwa „mgławica planetarna" nabiera dodatkowego sensu – ponieważ pierwiastki chemiczne w niej wytworzone, np. węgiel, mogą stać się składową tworzących się w przyszłości planet.

Parę lat różnicy pomiędzy kolejnymi obserwacjami to dostatecznie długi czas, by móc stwierdzić zmiany – np. w zawartości materiału rozszerzającej się otoczki oświetlanej przez znajdującego się w centrum białego karła (gwiazdę nieco tylko większą od Ziemi, ale setki razy gorętszą). W tym celu zespół Bruce'a Balicka z Uniwersytetu Waszyngtońskiego porównał zdjęcia zrobione przez Teleskop Hubble'a w 2009 i 2020 roku. W analizie wykryto kilka „dżetów" – strug materii poruszającej się z prędkością setek km/s – które są powodem skomplikowanego rozkładu materii w „skrzydłach motyla". Nie jest oczywiste, jak i dlaczego powstały dżety. Być może gwiazda centralna (której na zdjęciach Hubble'a nie widać, ponieważ jest przysłonięta przez pył) połączyła się z drugim składnikiem, a w wyniku tego procesu powstała skomplikowana konfiguracja pola magnetycznego będąca przyczyną dżetów.

Te hipotezy zostaną wkrótce wyjaśnione dzięki planowanym obserwacjom następcy Hubble'a, Teleskopu Jamesa Webba (JWST), który obserwując w podczerwieni, będzie mógł przeniknąć pył i zgłębić tajemnice centrum mgławicy.

Michał BEJGER
Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN,
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy

Niebo w maju

W maju Słońce kontynuuje wędrówkę na północ, zwiększając przez miesiąc deklinację o prawie 7°, a w trzeciej dekadzie miesiąca przetnie równoleżnik +20° i około południa zacznie wznosić się powyżej 58°. Jest to istotne o tyle, że Słońce musi znajdować się na co najmniej takiej wysokości nad widnokręgiem, aby mogło dojść do wystąpienia tzw. łuku okołohoryzontalnego (więcej o nim na angielskiej stronie: `www.atoptics.co.uk/cha2.htm`), czyli małej, lecz intensywnej tęczy 46° na południe od Słońca. W Polsce szansa za zaistnienie tego zjawiska występuje od trzeciej dekady maja do początku sierpnia (im bliżej gór, tym dłużej). Jeśli zatem w godzinach okołopołudniowych po niebie wędrują cirrusy, warto przyjrzeć się okolicom południowej części nieboskłonu przy horyzoncie.

Ekliptyka nadal tworzy duży kąt z widnokręgiem wieczorem i mały rano. Oczywiście ma to ogromny wpływ na widoczność znajdujących się blisko niej i jednocześnie niezbyt daleko od Słońca ciał niebieskich. Szczególnie wyraźnie fakt ten wpływa na widoczność krążącej najbliżej Słońca planety Merkury. W kwietniu planeta oddaliła się od Słońca na niecałe 20° i bez kłopotu dało się ją zaobserwować na wieczornym niebie. Pod koniec maja natomiast oddali się ona od Słońca

o 5° po jego drugiej stronie, a mimo to zginie w blasku Słońca, wschodząc maksymalnie pół godziny przed nim.

Gazowe olbrzymy Układu Słonecznego również ulegną słabemu nachyleniu ekliptyki do widnokręgu. Uran spotka się ze Słońcem na początku maja, Jowisz zrobił to w kwietniu, Neptun w marcu, a Saturn w lutym. I tylko ta ostatnia planeta zacznie wyłaniać się z zorzy porannej, pokazując się o świcie kilka stopni nad południowo-wschodnim horyzontem. W maju Saturn świeci blaskiem $+1^m$, a zatem wyraźnie słabiej od znajdującego się znacznie wyżej Altaira z Orła. Planeta znajduje się w odległości 45° na godzinie 7 względem Altaira. Do odszukania Saturna można wykorzystać także gwiazdę Enif (ε Peg), czyli najjaśniejszą i najbardziej na zachód wysuniętą gwiazdę Pegaza. O świcie Saturn znajduje się prawie dokładnie pod nią (w odległości niecałych 25°).

Na niebie wieczornym dobrze widoczne są dwie najbliższe Ziemi planety Układu Słonecznego. Wenus szybko zbliża się do swojej czerwcowej maksymalnej elongacji wschodniej, wynoszącej w tym roku ponad 45°. Przez cały miesiąc planeta pokona na niebie odcinek długości ponad 32°, zaczynając wędrówkę 3° na południe od gwiazdy El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy Byka, i kończąc jakieś 4,5° od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt. W tym samym czasie Mars przesunie się o 17°, wędrując od linii łączącej tego samego Polluksa z gwiazdą Wasat (δ Gem), by na koniec maja dotrzeć na odległość niewiele ponad 1° do znanej gromady otwartej gwiazd M44. Czerwona Planeta przejdzie na jej tle **2** czerwca.

W maju Wenus zmniejszy dystans do Marsa z ponad 25° do 11°. W tym czasie blask planety zwiększy się od $-4{,}1^m$ do $-4{,}3^m$, jej tarcza urośnie od $17''$ do $23''$, faza natomiast spadnie od 66% do 52%. W przeciwieństwie do Wenus planeta Mars oddala się od nas, i jej warunki obserwacyjne się pogarszają. W maju jej blask słabnie z $+1{,}3^m$ do $+1{,}6^m$, średnica tarczy zmienia się znacznie wolniej i zmniejszy się poniżej $5''$. Wenus 1,5 godziny po zachodzie Słońca przez cały miesiąc utrzyma wysokość około 20° nad widnokręgiem, Mars natomiast w tym samym czasie zbliży się wyraźnie do horyzontu, świecąc na początku maja znacząco wyżej od Wenus i praktycznie na tej samej wysokości pod jego koniec.

Księżyc rozświetli nocne niebo na początku i pod koniec miesiąca. Srebrny Glob zacznie maj w fazie 85%, zajmując pozycję jakieś 10° na południe od Deneboli, drugiej co do jasności gwiazdy Lwa. Potem Księżyc podąży ku pełni, przez którą przejdzie 5 dnia miesiąca wieczorem naszego czasu. Przedtem spotka się jednak ze Spiką, najjaśniejszą gwiazdą Panny, zbliżając się doń rankiem **4** maja na odległość niecałych 4°. W tym miesiącu podczas pełni Księżyc przejdzie przez półcień Ziemi, dojdzie zatem do jego półcieniowego zaćmienia. Niestety obszar Polski ma pecha, gdyż w momencie zaćmienia Księżyc zacznie dopiero wschodzić nad naszym krajem, stąd zjawisko w zasadzie pozostanie nieobserwowalne. Zwłaszcza że podczas fazy maksymalnej Księżyc nie zdoła schować się w półcieniu Ziemi w całości. Faza maksymalna zaćmienia wypadnie o godzinie 19:24 naszego czasu i wyniesie 96%. A w Bieszczadach Księżyc pojawi się nad widnokręgiem mniej więcej pół godziny później. Zjawisko skończy się o godzinie 21:30, gdy Srebrny Glob zdąży się wznieść na wysokość 10°. Podczas zaćmienia towarzystwa Księżycowi dotrzyma Zuben Elgenubi, gwiazda α Wagi, znajdująca się wtedy jakieś 2,5° nad nim.

W dniach **7** i **8** maja Księżyc odwiedzi Antaresa, najjaśniejszą gwiazdę Skorpiona, zmniejszając w tym czasie fazę do 93%. Podczas obu nocy odległość między wspomnianymi ciałami niebieskimi wyniesie około 6°, przy czym podczas pierwszej z nich Księżyc przejdzie mniej więcej 1,5° od Dschubby, jednej z jasnych gwiazd charakterystycznego łuku z północno-zachodniej części Skorpiona.

Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę **12** maja i podąży ku nowiu, by dobę później zbliżyć się na odległość 9° do słabo widocznego Saturna. Ale do końca widoczności porannej jego warunki obserwacyjne pozostaną słabe, gdyż Księżyc znajdzie się wtedy maksymalnie na południe od ekliptyki i podczas spotkania z Saturnem wzniesie się na wysokość zaledwie 7°.

Księżyc minie Słońce **19** maja i zacznie pojawiać się na niebie wieczornym. **20** maja można próbować dostrzec bardzo cienki sierp Srebrnego Globu w fazie około 1%. Jednak raczej nie uda się to bez lornetki czy teleskopu, ponieważ godzinę po zachodzie Słońca tego dnia zajmie on pozycję na wysokości zaledwie 3°. Znacznie łatwiejszy do dostrzeżenia stanie się Księżyc w kolejnych dniach. **23** dnia miesiąca jego sierp w fazie 17% przetnie prawie w połowie linię łączącą Wenus z Polluksem, by dobę później w fazie 24% przejść 3° na północ od Marsa i 5° od gromady M44. **26** maja Księżyc zbliży się na nieco ponad 4° do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa, a dobę później przejdzie przez I kwadrę. Do końca miesiąca Srebrny Glob przejdzie jeszcze raz 10° na południe od Deneboli – **28** maja, tym razem w fazie 62%, i 4,5° od Spiki **31** maja, w fazie 88%.

W maju maksimum swojego blasku osiągną dwie długookresowe gwiazdy zmienne typu Mira Ceti. **21** maja zrobi to gwiazda R Leo, **29** maja χ Cygni. Pierwsza z wymienionych gwiazd może przekroczyć jasność $+4{,}5^m$, druga natomiast może stać się jeszcze o ponad 1 wielkość gwiazdową jaśniejsza. Obie zatem podczas maksimum jasności można dostrzec gołym okiem. Dodatkowo R Leo ma wyraźną wiśniową barwę. Gwiazda znajduje się około 5° na zachód od Regulusa, a jej blask można porównywać z towarzyszącymi jej gwiazdami 5. i 6. wielkości 18 i 19 Leo. Ten obszar nieba około godziny 23 zajmuje pozycję na wysokości 25° nad zachodnią częścią nieboskłonu, a sama gwiazda znika za widnokręgiem około 1:30. Znacznie lepiej jest widoczna χ Cyg. O godzinie 2 wznosi się na wysokości przekraczającej 50°, a znajduje się w szyi Łabędzia na przedłużeniu linii łączącej gwiazdy Sadr (γ Cyg) i η Cyg.

Ariel MAJCHER

Lutet w Las Vegas

Las Vegas przywodzi zwykle na myśl kasyna, gry hazardowe, plastikowy luksus, szalone imprezy i szybkie śluby. Raczej nie fizykę. Na konferencji Amerykańskiego Towarzystwa Fizycznego, która odbywała się w tym mieście na początku marca, wydarzyło się jednak coś, co może zmienić te skojarzenia.

Ranga P. Dias z Uniwersytetu z Rochester ogłosił w swoim referacie odkrycie nowego nadprzewodnika wysokotemperaturowego.

Prąd elektryczny zwykle napotyka opór podczas przepływu przez transportujące go przewody. Można sobie wyobrażać, że zjawisko to jest podobne do tarcia, tym bardziej że część energii poruszających się ładunków elektrycznych jest tracona w postaci ciepła. Nie dzieje się tak jednak zawsze. Ponad sto lat temu Heike Kamerlingh Onnes odkrył, że istnieją materiały, zwane nadprzewodnikami, w których ładunki elektryczne mogą płynąć bez oporu. Niestety zjawisko to występuje jedynie w ekstremalnie niskich temperaturach, co ogranicza praktyczne zastosowania nadprzewodnictwa. Dlatego przez dziesięciolecia naukowcy poszukiwali nadprzewodników działających w bardziej przyjaznych temperaturach, marząc w szczególności o odkryciu materiału nadprzewodzącego w temperaturze pokojowej.

O nadprzewodnictwie (również wysokotemperaturowym) pisał też Piotr Zalewski w Δ_9^5 i Δ_{15}^{11} oraz Andrzej Wiśniewski w Δ_{18}^{12}.

Nowy nadprzewodnik składa się z lutetu – srebrzystobiałego metalu ziem rzadkich, o którym na co dzień pamiętają chyba tylko najwięksi fani tablicy Mendelejewa – oraz wodoru i niewielkiej domieszki azotu. Cienką folię lutetową ściska się pomiędzy dwoma diamentami i pod wysokim ciśnieniem przez próbkę przepuszcza się gaz składający się w 99 procentach z wodoru i w 1 procencie z azotu. Próbkę ogrzewa się następnie przez dobę w temperaturze 65°C. Tak przygotowany materiał wykazuje własności nadprzewodzące w temperaturach do 20°C. Nie ma jednak róży bez kolców, dzieje się tak jedynie wtedy, gdy do próbki przyłożyć ciśnienie rzędu gigapaskala, czyli dziesięciokrotnie większe, niż panuje na dnie Rowu Mariańskiego. Trudno uzyskać takie warunki na co dzień.

Jest jednak jeszcze jedno „ale”. Poprzednia praca Diasa i współpracowników (2020), dotycząca także nowego nadprzewodnika wysokotemperaturowego (wymagającego, notabene, przyłożenia jeszcze większych ciśnień), została niedawno wycofana z czasopisma „Nature” – wbrew stanowisku autora. Powodem takiego kroku był fakt, że innym naukowcom nie udało się powtórzyć doświadczeń opisanych w artykule, a udostępnione innym badaczom surowe dane były znacznie mniej zaszumione, niż należało tego oczekiwać. Co gorsza, w opublikowanym tekście znaleziono całe ustępy przepisane z rozprawy doktorskiej członka innego zespołu naukowego. Wszystko to powoduje, że badacze podchodzą do wyników doświadczeń Diasa z dużą ostrożnością. W rozwianiu wątpliwości nie pomaga fakt, że Ranga P. Dias planuje wdrażanie wyników swoich badań. W tym celu założył własną firmę, Unearthly Materials, i pracuje nad zgłoszeniem patentowym, nie udostępnia więc publicznie dokładnego przepisu na nowy nadprzewodnik.

A zatem: geniusz czy hochsztapler? Dylemat ten uda się zapewne rozstrzygnąć jeszcze w tym roku, gdyż wiele innych zespołów badawczych planuje próbę odtworzenia eksperymentów Diasa. W każdym razie dotychczasowe przygody tego uczonego pokazują bardzo dobitnie, że – wywierana przez ośrodki badawcze czy instytucje finansujące badania – presja na to, żeby wszystkie nowe wyniki były niezwykłe i przełomowe, zachęca wręcz do szukania „drogi na skróty” i czasami hamuje postęp naukowy, zamiast go stymulować.

Krzysztof TURZYŃSKI

48. ZJAZD FIZYKÓW POLSKICH
PTF
GDAŃSK
1-7 IX 2023

48. ZJAZD FIZYKÓW POLSKICH
1–7 września 2023 r., Gdańsk

Oddział Gdański Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej oraz Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego serdecznie zapraszają do Gdańska na 48. Zjazd Fizyków Polskich, który odbędzie się w dniach 1–7 września 2023 roku.

W czasie Zjazdu odbędzie się 8 sesji plenarnych, 9 sesji równoległych, wykład otwarty, sesja plakatowa, zebranie delegatów PTF, panel dyskusyjny *Kondycja nauczania fizyki w polskich szkołach – szanse i ryzyko*, pokazy z fizyki oraz bazar dobrych praktyk dla nauczycieli fizyki, wykłady i pokazy doświadczeń z fizyki dla młodzieży szkolnej.

Wydarzenie jest skierowane do szeroko rozumianego środowiska fizyków. Spodziewamy się udziału około 500 uczestników, w tym naukowców zarówno o ugruntowanej pozycji w środowisku, jak i młodych fizyków, a także nauczycieli fizyki oraz ich uczniów. Przewidujemy różnego rodzaju wystawy, instalacje popularyzujące fizykę i konkursy dla młodzieży szkolnej. Ważnym wydarzeniem towarzyszącym Zjazdowi będzie doroczny Rejs Fizyków kończący się w Gdańsku w dniu rozpoczęcia Zjazdu.

Informacje na temat 48. ZFP znajdują się na uaktualnianej i wzbogacanej na bieżąco stronie: `http://ftims.pg.edu.pl/48zfp`.

Właściwy punkt na właściwym miejscu

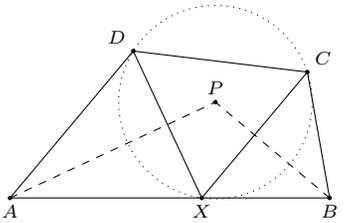
Bartłomiej BZDĘGA
Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tym razem będzie o zadaniach, w których pojawia się motyw długości jednego odcinka jako sumy długości dwóch innych. Jeżeli mamy jako założenie równość $|AB|+|CD|=|EF|$, to zawsze warto spróbować zaznaczyć na odcinku EF taki punkt X, że $|EX|=|AB|$ – wtedy $|FX|=|CD|$. Inny wariant: jeśli należy wykazać, że $|AB|+|CD|=|EF|$, to po zaznaczeniu takiego punktu X jak wyżej pozostanie do udowodnienia, że $|FX|=|CD|$.

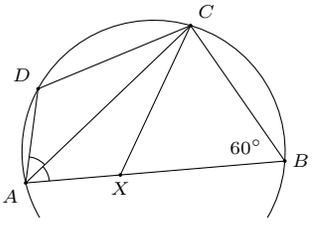
Zaprezentuję opisane powyżej postępowanie na dwóch przykładach. Pierwszy pochodzi z I Wielkopolskiej Ligi Matematycznej, a drugi z XII Olimpiady Matematycznej Juniorów.

Przykład 1. Czworokąt $ABCD$ spełnia warunek $|AB|=|BC|+|DA|$. Dwusieczne kątów ABC i DAB przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $|CP|=|DP|$.

Rozwiązanie. Wybierzmy na odcinku AB punkt X spełniający warunek $|AX|=|AD|$. Zachodzi wtedy także równość $|BX|=|BC|$ (rys. 1). W tej sytuacji dwusieczne kątów ABC i DAB są jednocześnie symetralnymi odcinków CX i DX. Wnioskujemy zatem, że punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDX, a więc zachodzi równość $|CP|=|DP|$.



Rys. 1



Rys. 2

Przykład 2. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg, przy czym $|\sphericalangle ABC|=60^\circ$ oraz $|BC|=|CD|$. Udowodnić, że $|AB|=|AD|+|CD|$.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że $|\sphericalangle CAD|=|\sphericalangle CAB|$, ponieważ są to kąty wpisane, oparte na łukach równej długości. Wybierzmy taki punkt X na odcinku AB, że $|AX|=|AD|$ (rys. 2). Chcemy udowodnić, że $|BX|=|CD|$. Trójkąty CAD i CAX są przystające (bkb), więc $|CX|=|CD|=|BC|$. Trójkąt BCX jest równoramienny i ma kąt o mierze 60°, więc jest równoboczny. Z tego wynika, że $|BX|=|CX|=|CD|$, i dowód jest zakończony.

Zadania

1. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD zachodzi równość $|AB|+|CD|=|AD|$. Udowodnić, że okrąg o średnicy BC ma co najmniej jeden punkt wspólny z odcinkiem AD.
2. W okrąg wpisano czworokąt $ABCD$, w którym $|AB|=|BD|$. Punkt M jest rzutem prostokątnym wierzchołka B na przekątną AC. Wykazać, że $|AM|=|DC|+|CM|$.
3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P, przy czym $|BP|=|AD|+|DC|$. Punkt X leży na odcinku BC, przy czym $|BX|=|AC|$. Dowieść, że $2|\sphericalangle BPX|=|\sphericalangle ADC|$. *(LXXIV Olimpiada Matematyczna)*
4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina bok BC w punkcie D. Dowieść, że $|AI|+|CD|=|AC|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\sphericalangle ABC|=60^\circ+\frac{1}{3}|\sphericalangle BCA|$. *(LII Olimpiada Matematyczna)*
5. W trójkącie ABC zachodzi nierówność $|AB|>|AC|$. Punkt D jest środkiem boku BC, punkt E leży na odcinku AC. Punkty P i Q są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B i E na prostą AD. Dowieść, że jeśli $|BE|=|AE|+|AC|$, to $|AD|=|PQ|$.
(XLIX Olimpiada Matematyczna, zmodyfikowane)

Wskazówki do zadań

1. Weźmy taki punkt X na odcinku AD, że $|AX|=|AB|$. Wtedy $|DX|=|CD|$. Wystarczy wykazać, że $|\sphericalangle BXC|=90^\circ$.
2. Niech X będzie takim punktem na odcinku AM, że $|MC|=|MX|$. Wtedy $|BC|=|BX|$, skąd można wykazać, że trójkąty CBD i XBA są przystające (bkb).
3. Na odcinku BP można wybrać taki punkt Y, że $|BY|=|AB|$ i $|PY|=|CD|$. Trójkąty XBY i CAD są przystające (bkb).
4. Niech punkt X leżący na odcinku AC spełnia równość $|AI|=|AX|$. Wówczas $|AI|+|CD|=|AC|$ $\iff$ trójkąty DCI i XCI są przystające $\iff$ trójkąty AIX i ABD są podobne $\iff$ $|\sphericalangle ABC|=60^\circ+\frac{1}{2}|\sphericalangle BCA|$.
5. Wybierzmy taki punkt X na odcinku BE, by zachodziły równości $|AE|=|EX|$ i $|AC|=|BX|$. Niech dodatkowo punkt F będzie symetryczny do C względem A. Trójkąty równoramienne AXE i FBE są podobne, więc $AX\parallel BF$. Prosta AD jest linią środkową w trójkącie FBC, więc $BF\parallel AD$. Z obu równoległości wynika, że punkt X leży na odcinku AD. Teraz wystarczy skorzystać z tego, że przystające odcinki XB i AC są nachylone do prostej AD pod tym samym kątem.

KONKURS PTM im. WITOLDA WILKOSZA

na najlepszą studencką pracę popularyzującą matematykę

Na Konkurs można nadsyłać prace mające na celu popularyzację matematyki

Termin zgłoszeń: 30 września 2023 r.

http://ok-ptm.im.uj.edu.pl/wilkosz.php

Organizator Konkursu

rok zał. 1919 ptm

Oddział Krakowski
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego

Sponsor Konkursu

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Wydział
Matematyki i Informatyki