



$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$   $\rho=3,141592...$

NR 8 (579) 2022

CENA 6 ZŁ. VAT 8%

MIĘSIĘCZNIK

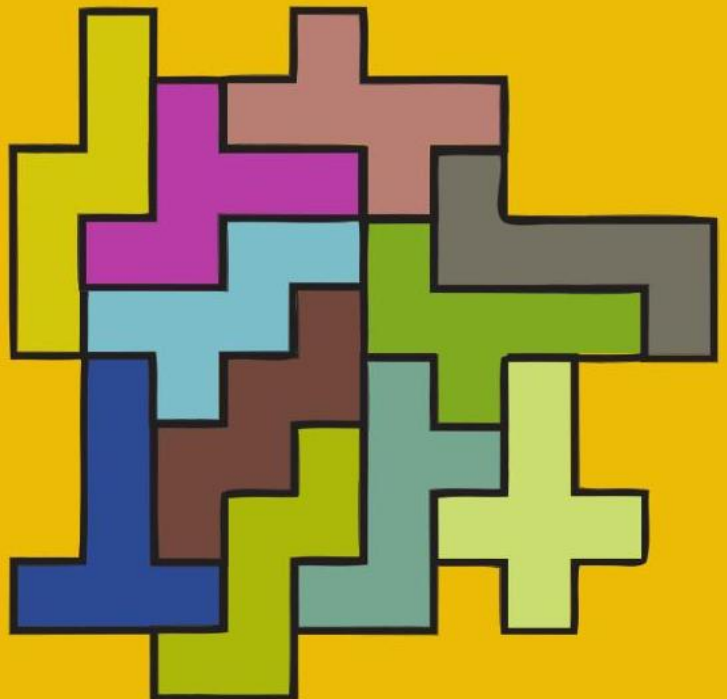
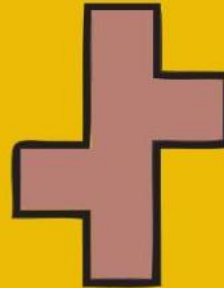
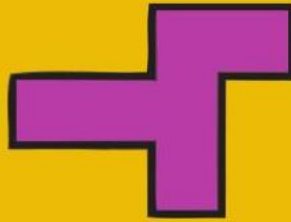
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)



# deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

**Kubomino**  
str. 1



UNIWERSYTET  
WARSZAWSKI



Nakład: 3500 egz.

## SPIS TREŚCI NUMERU 8 (579)

Kubomino  
*Piotr Pikul*


Pierwszy stopień do raju  
*Mariusz Skalba*

 Zadania

Przygoda z meteorem  
*Marek Pfützner*

W którą stronę jechał rower?  
*Agnieszka Chudek*

Język Wszechświata  
*Suhani Gupta*

 Mamy to jak w banku  
*Magdalena Fikus*

Współczynniki wielomianów na okręgu  
jednostkowym kręcą się, kręcą się  
*Radosław Kujawa*


Tożsamość Cauchy'ego, iloczyn Wallisa  
i wzór Stirlinga  
*Bartłomiej Bzdęga*

Klub 44

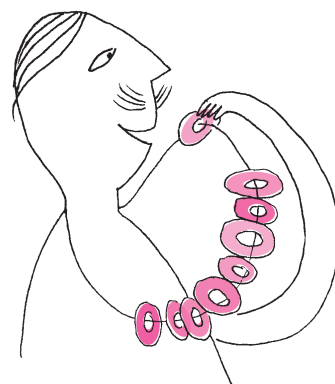
Jak wakacje, to na parterze

Niebo w sierpniu

Aktualności  
Elektron kontra historia  
i terażniejszość Wszechświata

 Kongruencje modulo liczba pierwsza  
*Bartłomiej Bzdęga*

W następnym numerze:  
Czy dobrze rysuję obwarzanki?



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

str. 1  
str. 4  
str. 5  
str. 6  
str. 8  
str. 9

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

str. 13

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

str. 14

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

str. 20

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

str. 22

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

str. 24

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł

str. 25

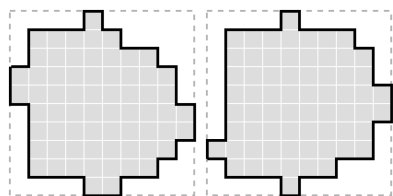
 Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)  
Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

\*Doktorant, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

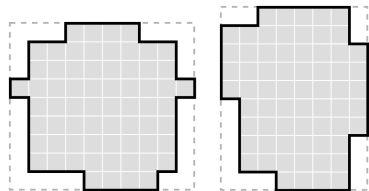
„Kwadrat bez pół narożnych” to przykład figury ułożonej ze wszystkich pentomin i o najmniejszym możliwym obwodzie.

W dzieciństwie „odkryłem” dziesięć różnych siatek sześciangu i dopiero kilka lat po tym „dokonaniu” dowiedziałem się, że to jednak nie były wszystkie...



Przykładowe kształty o obwodzie 40 możliwe do ułożenia z kubomina

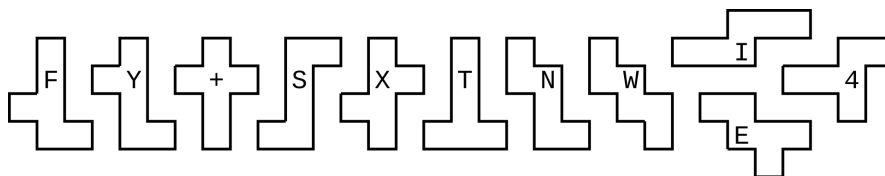
W dalszej części artykułu Czytelnik może odnaleźć drobne wskazówki. Kto domaga się jawnego wzoru, może wyznaczyć minimalny obwód dla małych wartości pola i z tymi danymi udać się na stronę <https://oeis.org>.



Przykładowe kształty o obwodach 38 i 36

Miłośnicy matematyki rekreacyjnej zapewne zetknęli się z *pentominem*, czyli „puzzlami”, których każdy element składa się z pięciu stykających się bokami kwadratów. Mamy tam do dyspozycji 12 różnych części i próbujemy ułożyć z nich konkretne kształty (np. prostokąt  $6 \times 10$ , kwadrat o boku 8 bez pół narożnych albo jakieś mniej abstrakcyjne *zwierzątko*). Oczywiście ktoś spragniony większych wyzwań może przejść do *heksomin*, czyli kształtów złożonych z sześciu jednostkowych kwadratów każdy. Wtedy różnych dostępnych części jest już 35 i na dodatek nie można z takiego kompletu ułożyć żadnego prostokąta. Dowód tego faktu jest standardowy – jeśli heksomino położymy na szachownicy, to albo przykrywa ono tyle samo pół białych co czarnych, albo o dwa pola więcej jednego koloru niż drugiego. Heksomin tego drugiego rodzaju jest nieparzysta wiele, skąd wynika niemożność ułożenia prostokąta.

Wśród heksomin wyróżnia się jedenaście szczególnych – mianowicie siatki sześciangu. Poniżej można zobaczyć ich rodzinne zdjęcie.



Pozwoliłem sobie nazwać łamigłówkę złożoną z siatek sześciangu *kubominem*, zapożyczając od pentomina konflikt pomiędzy nazwą pojedynczego elementu oraz całej układanki. Z kubomin też nie można zbudować prostokąta, co można uzasadnić, pracowicie rozważając wszystkie możliwości uzupełniania narożników prostokąta. Jaki jest w takim razie najbardziej *elegancki* kształt, który można z kubomin zbudować? Pytanie to nie jest szczególnie matematyczne. Łatwiej sformalizować kwestię *ciasnego upakowania* elementów. Można zauważyć, że minimalizacja obwodu ułożonej figury jest równoważna zwiększaniu łącznej długości styku pomiędzy częściami.

Czytelnik mógł spotkać się z twierdzeniem głoszącym, że minimalny obwód przy zadanym polu ma koło, no ale z kubomin go na pewno nie ułożymy. Można udowodnić, że obwód obszaru złożonego z 66 kwadratów jednostkowych wynosi co najmniej 34. Swoją drogą polecam samodzielne znalezienie wzoru na minimalny obwód obszaru o zadanej liczbie pól. Zwarty wzór jest może *dość specyficzny*, ale klasyfikacja wszystkich kształtów, które mogą realizować minimalny obwód, jest całkiem ciekawa. A jakby ktoś zechciał przyjrzeć się obszarom złożonym z trójkątnych pól (tzw. poliamondom), to tam dopiero się cuda dzieją! To jednak nie temat na dzisiaj...

Gdy zacząłem się bawić kubominami i postawiłem pytanie o minimalny obwód, udało mi się znaleźć kilka konfiguracji o obwodzie 40. Później napisałem program poszukujący małego obwodu, któremu szybko udało się ułożyć kształt o obwodzie 38. Niedeterministyczny charakter komputerowych poszukiwań sprawiał, że przy każdym uruchomieniu znajdowane były inne rozwiązania, i w ten sposób dysponowałem rozrastającą się listą konfiguracji o obwodzie 38. Gdy ich liczba przekroczyła 300, za punkt honoru postawiłem sobie znalezienie choć jednego takiego ustawienia bez „krzemowego” wsparcia. Znalazłem dwa rozwiązania, z których żadne nie zostało wcześniej wygenerowane przez program. Gdy tak utwierdzałem się w przekonaniu, że obwód 38 jest najmniejszym możliwym, sprawdzałem, ile mierzą najdłuższe proste krawędzie lub jak wiele wierzchołków mają skatalogowane figury... nieoczekiwanie program „wypluł” jedno rozwiązanie o obwodzie 36. Tym samym poznałem ścisłą odpowiedź na pytanie o minimalny obwód, choć wcześniej uważałem, że zapewne nigdy to nie nastąpi.

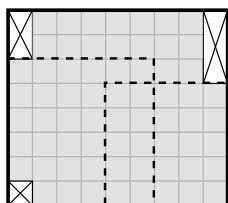
Czytelnik dotarłszy do tego miejsca, zapewne zastanawia się, czy może obwód 35 (a nawet 34?) też jest realny, i kontynuując eksperymenty, komputer w końcu na niego trafi? Otóż nie jest to możliwe. Po pierwsze wędrując wzdłuż obwodu,

„Doskonały dowód” korzystałby zapewne z jakichś specyficznych własności siatek sześciianu.

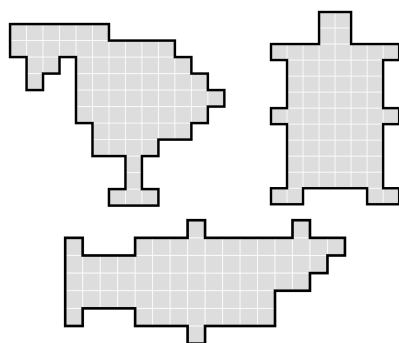
Każde pojedyncze kubomino jest wypukłym poliominem, choć żadne nie jest wypukłym podzbiorem płaszczyzny.

a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1
a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2
a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3
a4	b4	c4	d4	e4	f4	
a5	b5	c5	d5	e5		
a6	b6	c6	d6		...	
a7	b7	c7				

Poglądowy rysunek wierzchołka prostokąta ograniczającego



Przykładowy kształt o polu 66 i obwodzie 34 (nie można go ułożyć z kubomin). W przypadku prostokąta ograniczającego  $8 \times 9$  potrzeba przynajmniej trzech usuniętych pól przy krótszym boku, aby nie wystąpiło *duże naroże*, choć i tak wystąpi wtedy *małe*. Pozostałe trzy pola nie wystarczą, aby wykluczyć *małe naroże* przy przeciwnym boku



Kilka kubominowych zagadek – rozwiązanie na stronie 4. Ułożenie z kubomina kształtu posiadającego oś symetrii nie jest łatwe. Więcej zagadek w załączniku do elektronicznej wersji artykułu na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

musimy tyle samo razy iść „na północ” co „na południe”, jak również tyle samo razy „na wschód” co „na zachód” – obwód musi być zatem liczbą parzystą, więc 35 odpada. Jeśli zaś chodzi o 34, to tutaj nie mogę nazwać znanego mi dowodu eleganckim i błyskotliwym (może Czytelnik znajdzie lepszy...?). Jego zaletą jest fakt, że daje się przeprowadzić „ręcznie”, co nie znaczy, że da się wszystkie szczegóły zmieścić w tym artykule.

Kształtów o obwodzie 34 i polu 66 jest 182 (zob. ciąg A100092 na OEIS), ale na szczęście nie musimy wszystkich z osobna rozważać. Najpierw zauważmy, że każdy taki kształt (oznacmy go przez  $F$ ) musi być „wypukły”, czyli wszystkie wiersze i kolumny muszą być w jednym kawałku (jest to standardowa definicja wypukłości poliomin). Tak rozumiana wypukłość jest równoważna temu, że obwód  $F$  jest równy obwodowi najmniejszego ograniczającego prostokąta (dlaczego?). Gdyby nasz kształt nie był wypukły, to „sprasowując go” do czegoś wypukłego (wyobraźmy sobie, że nagle wszystkie pola tworzące  $F$  opadają na dno ograniczającego prostokąta, a potem jeszcze spychamy je np. na prawo), otrzymamy kształt o mniejszym obwodzie, a 34 jest minimalnym obwodem dla pola 66.

Z wypukłości wyciągamy wniosek, że ograniczający prostokąt też ma obwód 34, a kandydatów o dostatecznie dużym polu jest tylko trzech. Największy z nich ma pole  $8 \cdot 9 = 72$ , czyli odrzucamy co najwyżej sześć pól. Ponadto, aby zachować minimalność obwodu (wypukłość), odrzucone pola muszą tworzyć spójne obszary przylegające do wierzchołków prostokąta (oczywiście od wewnątrz). Ponieważ maksymalnie 6 odrzuconych pól musimy podzielić pomiędzy 4 narożne obszary, otrzymujemy, że ograniczający prostokąt ma wierzchołek, z którego nic nie usunięto, albo taki, którego pozbawiono tylko jednego, narożnego pola (a1 na rysunku).

Teraz przychodzi kolej na nieco żmudne, systematyczne przeanalizowanie możliwych pokryć naroża kubominami. Przykładowo, jeśli pole a1 (patrz rysunek na marginesie) spróbujemy przykryć kubominem „T”, to nie będzie już możliwe pokrycie pola a2 (lub b1, jeśli „T” ustawiliśmy poziomo). Z kolei gdy pokryjemy a1 elementem „4”, to okaże się, że choć teoretycznie pola a3 i b1 można pokryć, to oba wymagają użycia elementu „I”, który jest tylko jeden. Nie wszystkie przypadki są aż tak proste, a gdy rozważamy naroże z usuniętym polem a1 („wyszczerbione”), możliwości robi się nieco więcej (np. trzeba wtedy rozważyć umieszczenie części „+” w rogu). Ważne, że wszystkie próby wypełnienia naroża okazują się płonne, jeśli chcemy pokryć cały kwadrat  $6 \times 6$  (lub wyszczerbiony  $7 \times 7$ ). Co istotne, w całej tej analizie nie trzeba brać pod uwagę położenia pozostałych wierzchołków figury  $F$ , ani nawet wymiarów prostokąta ograniczającego – można ją traktować jak nieograniczoną.

Niestety może tak być, że kształt o obwodzie 34 nie zawiera jako naroża ani całego kwadratu  $6 \times 6$ , ani wyszczerbionego  $7 \times 7$ . Można pokazać (rozważając kilka prostych przypadków, jeden z nich zilustrowany jest na marginesie), że w takiej sytuacji występują co najmniej dwie wersje o jeden mniejsze: kwadrat  $5 \times 5$  lub wyszczerbiony kwadrat  $6 \times 6$ . Okazuje się ponadto (dzięki wspomnianej skrupulatnej analizie sposobów pokrywania naroży), że jedynie wykorzystanie kubomina „E” (do pokrycia pola a2/b1) daje jakiegokolwiek szansę na pokrycie każdej z nich z osobna! Skoro część „E” jest tylko jedna, pokrycie całego obszaru nie jest możliwe, *quod erat demonstrandum*.

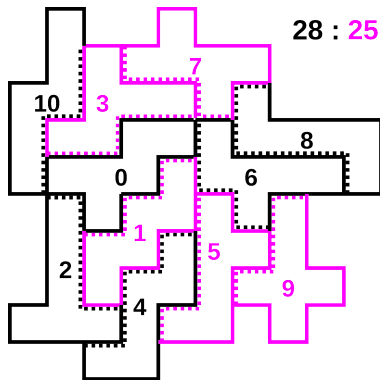
Kto po lekturze powyższej idei dowodu nabrał niechęci do problemu minimalnego obwodu, może na pocieszenie spróbować rozwiązać go w prostszych przypadkach kompletu tromin (dwie części po 3 kwadraty) i tetromin (5 części po 4 kwadraty). Tam argumenty są już eleganckie, choć od dawna znane. Dla kompletu starych dobrych pentomin rozwiązanie jest „mało ciekawe” – realizują one swój teoretycznie minimalny obwód równy 32. To czyni je jednak bardzo wyjątkowymi, ponieważ wszystkie heksomina, przy polu wynoszącym 210, nie są w stanie osiągnąć obwodu 58, gdyż jedyny kształt o takich parametrach to „nieukładalny” prostokąt  $14 \times 15$ . Z kolei dla rodzin jeszcze większych poliomin ( $\geq 7$ -omino) uzyskanie teoretycznie minimalnego obwodu jest już zupełnie



Ze wszystkich heksomin można uzyskać obwód 60, ale margines jest zbyt wąski, aby to pomieścić.

Jeśli chodzi o układy o obwodzie 36, programowi udało się znaleźć tylko 4 egzemplarze, przy czym dwa z nich można lekko zmodyfikować, nie zmieniając obwodu.

Nie zdziwię się, jeśli Znaczący Gier (Nie Tylko) Planszowych wskażą jakiś zapomniany (?) projekt przypominający opisany w tym artykule.



Przykładowa rozgrywka dwóch graczy używających losowo rozdanych kubomin

Tasowanie poliomin może być niewygodnym rozwiązaniem. Można zastosować metodę pośrednią, wykorzystującą na potrzeby tasowania/losowania karty z rysunkami, a *prawdziwych* poliomin można używać dopiero przy wykonywaniu ruchu. Albo ruchy wykonywać, dorysowując kolejne kształty – jak ktoś nie lubi wycinanek. Idąc dalej, można zastąpić rysowanie układaniem zapalek. Wtedy w roli punktów mogą wystąpić niewykorzystane zapalki.

poza zasięgiem, ponieważ znajdują się wśród nich części z dziurami, które uniemożliwiają zbudowanie kształtu wypukłego. Zamiast głośno mówić, że dokładne wartości nie są mi znane, powiem tylko, że ciąg 4, 6, 12, 20, 32, 60 czeka na kolejne wyrazy.

W przypadku kubomina (i nie tylko) poza poszukiwaniem minimalnego obwodu można próbować ustanowić inne „rekordy”. Na przykład: Dla jak dużego  $n$  prostokąt  $1 \times n$  można przykryć kompletem kubomin? Co się stanie, jeśli dodatkowo zażądamy, aby ułożona figura była wypukła? Jaka jest najdłuższa możliwa prosta krawędź ułożonej figury (znów: przy założeniu wypukłości lub bez niego)? Ile wynosi minimalna liczba wierzchołków? Jaka najmniejsza figura (poliomino) pomieści każde kubomino?

Na deser można sobie oczywiście poukładać też rybki, domki i ptaszki... Ciekawym wyzwaniem jest ułożenie kształtu symetrycznego. Po wielu sesjach uruchomieni programu układającego lista rozwiązań o obwodzie 38 liczy ponad 2600 pozycji. Wśród nich jest zaledwie 1 posiadający oś symetrii oraz 4 symetryczne środkowo. Kilka symetrycznych kształtów (o znacznie większym obwodzie) udało mi się też ułożyć osobiście.

Tyle możliwości, a to tylko „standardowe” układanki!

### Pomiędzy kartami a obwodem kubomina

Rozważania na temat minimalnego obwodu i pisanie związanych z tym programów doprowadziło także do pojawienia się koncepcji wieloosobowej gry. Choć liczba różnego rodzaju gier, w których poliomina odgrywają mniej lub bardziej znaczącą rolę, jest całkiem pokaźna, to wydaje się, że pomysł, który zamierzam tu przedstawić, nie był wcześniej rozważany.

Kubomino nie jest niezbędne dla opisanej dalej rozgrywki. Można je zastąpić innym zestawem poliomin. Być może da się wskazać jakiś „lepszy” – cokolwiek to znaczy. Dobór zestawu (zwłaszcza jego liczebności) – co stanie się jasne po dalszej lekturze – jest uzależniony także od liczby graczy.

Podstawowa idea jest prosta. Gracze kolejno dokładają poliomina do już istniejącej figury (chyba że mowa o ruchu początkowym). Za każdy ruch otrzymuje się tyle punktów, ile wyłożony element ma wspólnych (jednostkowych) krawędzi z ustawionymi poprzednio. Gdy kształty się wyczerpią, podliczamy punkty i wygrywa gracz, który zdobył ich najwięcej.

Ponieważ wyłożenie pierwszego elementu jest warte 0 punktów, należy je traktować jako ruch dodatkowy. Wydaje się, że wszyscy gracze powinni dysponować jednakową liczbą ruchów punktowanych, czyli liczba używanych części powinna dawać resztę 1 przy dzieleniu przez liczbę graczy. Można również ustalić, że każdy gracz ma do dyspozycji te same elementy, czyli używać zwiokrotnionego zestawu poliomin.

Powyższe podstawy rozgrywki nadal dopuszczają mnóstwo wariantów. Gracze mogą mieć ustalone na początku (np. na drodze tasowania i rozdawania) komplety figur, z których mogą dowolnie wybierać część wykładaną w konkretnym ruchu. Można też z góry ustalić kolejność wykładania klocków (wtedy gracze nie potrzebują oddzielnych kompletów) albo za każdym razem wybierać następny element drogą losowania. W takim oceanie możliwości na pewno każdy znajdzie coś dla siebie!

Jeśli ktoś potrzebuje dla tej gry jakiejś bajeczki („fabuły”), to można mówić o groźnym działaniu (lub rozstawianiu parawanów na plaży). Każdy chce do tego wykorzystać jak najmniej osobiście zbudowanego płotu. Skąd biorą się tak dziwne kształty groźnego terenu? Tu już trzeba dodatkowej inwencji. Być może hodujemy owce o wyjątkowo matematycznym usposobieniu, które wędrując po siatce sześcianu, czują, że mają więcej *przestrzeni*? Jeśli do gry użyjemy innych kształtów niż kubomino, to sprawa się komplikuje... Czytelnik chcący dalej rozwijać tę opowieść robi to na własne ryzyko.

# Pierwszy stopień do raju

Mariusz SKAŁBA\*

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Nauczyciel (N): *Ile jest dwa dodać dwa?*  
Jasio (J): *Cztery.*  
N: *Dobrze.*  
J: *(uśmiecha się szeroko)*  
N: *A ile jest dwa dodać trzy?*  
J: *... też cztery?*  
N: *Źle!*  
J: *(robi się bardzo smutny)*  
N: *Nie martw się. Musisz to wiedzieć i będziesz wiedział!*<sup>†</sup>  
J: *(uśmiecha się nieśmiało)*

<sup>†</sup>Kreśląc program rozwoju matematyki na XX wiek, David Hilbert miał powiedzieć: *Wir müssen wissen. Wir werden wissen*, czyli *Musimy wiedzieć (i) będziemy wiedzieć*.

Sądząc z powyższej wymiany myśli, mamy tu do czynienia z dobrym nauczycielem, a Jasio też raczej rokuje. Ale dlaczego oceniając odpowiedzi ucznia, nauczyciel użył kwalifikacji moralnych?

Pytanie to pozostawmy bez odpowiedzi. Minęło 12 lat. Jan studiuje teraz na uniwersytecie matematykę wyższą, chociaż jego głównym zainteresowaniem jest ekonomia. Na ćwiczeniach z algebry przerabia równoliczność zbiorów. Przypomnijmy podstawową i ważną definicję:

Zbiory  $A$  i  $B$  nazywamy **równolicznymi** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja  $f : A \rightarrow B$ , która jest różnowartościowa i „na”.

Jeśli  $A$  i  $B$  są równoliczne, to piszemy  $|A| = |B|$ . W przypadku zbiorów skończonych chodzi o to, że  $A$  oraz  $B$  mają po tyle samo elementów. Funkcje różnowartościowe i „na”, które pojawiają się w powyższej definicji, nazywamy *bijekcjami*.

W związku z pojęciem równoliczności studenci w grupie Jana przerabiają następujące zadanie:

*Załóżmy, że  $A, B, C, D$  są zbiorami, które spełniają następujące warunki:*

$$(W1) \quad |A| = |C| \text{ oraz } |B| = |D|,$$

$$(W2) \quad A \cap B = \emptyset \text{ oraz } C \cap D = \emptyset.$$

*Wykazać, że  $|A \cup B| = |C \cup D|$ .*

Robi się to tak: Mając bijekcje  $f : A \rightarrow C$  i  $g : B \rightarrow D$ , określamy funkcję

$$h : A \cup B \rightarrow C \cup D$$

w następujący naturalny sposób:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } x \in A \\ g(x) & \text{gdy } x \in B. \end{cases}$$

Ma to sens, gdyż każdy element  $x \in A \cup B$  należy albo do  $A$ , albo do  $B$ .

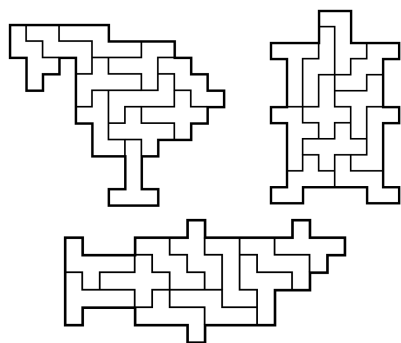
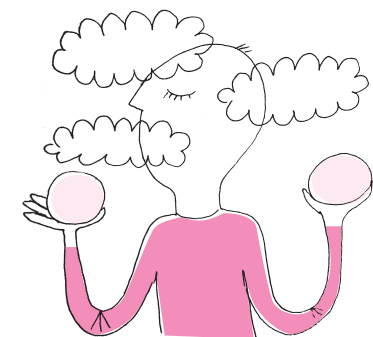
Łatwo sprawdzamy, że  $h$  jest bijekcją, i to kończy dowód, że  $A \cup B$  i  $C \cup D$  są równoliczne. Jan odczuwa teraz dyskomfort: *Za dużo tych warunków! Nie ma to nic wspólnego z ekonomią myśli!* Prowadzący wyjaśnia na przykładzie, że bez założenia warunku (W2) teza może nie zachodzić; rozważmy bowiem zbiory

$$A = B = C = \{1, 2\}, \quad D = \{3, 4\}.$$

Wówczas zbiór  $A \cup B = \{1, 2\}$  ma 2 elementy, a zbiór  $C \cup D = \{1, 2, 3, 4\}$  ma 4 elementy, a więc  $A \cup B$  i  $C \cup D$  nie są równoliczne! Sytuacja jest o tyle prymitywna, że w tym przykładzie wszystkie zbiory  $A, B, C, D$  są skończone.

I wtedy Jan niepytany przez profesora zabiera głos: *Czy trzeba zakładać (W2) w przypadku, gdy nie wszystkie zbiory  $A, B, C, D$  są skończone?* Po krótkiej konsternacji pada odpowiedź i wyjaśnienie:

*Wtedy nie trzeba zakładać (W2). Załóżmy mianowicie, że  $|A| \leq |B|$ . Oznacza to z definicji, że istnieje funkcja różnowartościowa  $k : A \rightarrow B$ . Zatem  $B$  jest zbiorem nieskończonym. Można wykazać, że wówczas  $|A \cup B| = |B|$ . Z założenia (W1) wynika teraz łatwo, że  $|C| \leq |D|$ , czyli znowu  $|C \cup D| = |D|$ . Mamy więc tezę na podstawie (W1).*



Rozwiązania kubominowych zagadek ze strony 2

Student Jan powinien być zadowolony z wyjaśnienia swojego ulubionego profesora, ale nie jest: *Rozumiem, że w przypadku  $|B| \leq |A|$  postępujemy analogicznie, ale co zrobić w przypadku, gdy ani  $|A| \leq |B|$ , ani  $|B| \leq |A|$ ?*

A teraz odpowiedź profesora rozpromienionego wobec dociekliwości Jana: *To się nie może zdarzyć! A przynajmniej nie, jeśli przyjmiemy pewnik wyboru, czyli zasadę mówiącą, że dla dowolnej rodziny niepustych zbiorów rozłącznych istnieje zbiór o jednoelementowym przecięciu z każdym zbiorem z tej rodziny. Ujmując rzecz mniej formalnie, ze zbiorów rozłącznych możemy wybrać po jednym elemencie. Opierając się na pewniku wyboru, można udowodnić, że dla dowolnych zbiorów  $A, B$  mamy  $|A| \leq |B|$  lub  $|B| \leq |A|$ . Dowód implikacji*

$$|A| \leq |B| \Rightarrow |A \cup B| = |B| \quad (\text{gdy } B \text{ jest nieskończony})$$

też zresztą wymaga zastosowania pewnika wyboru. Mając zresztą pewną uprawę w operowaniu tymi pojęciami, można pokazać, że z twierdzenia:

Jeśli  $A, B, C, D$  spełniają warunki:

$$(W1) \quad |A| = |C| \text{ oraz } |B| = |D|,$$

$(W2)'$  nie wszystkie zbiory  $A, B, C, D$  są skończone,

$$\text{to } |A \cup B| = |C \cup D|,$$

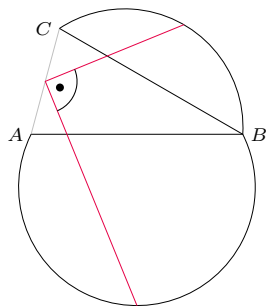
wynika pewnik wyboru! Z tego twierdzenia wynika więc pośrednio, że kulę można podzielić na kilka części, z których można złożyć dwie pełne kule o tym samym promieniu, czyli twierdzenie Banacha–Tarskiego.

Ciekawość to pierwszy stopień do cantorowskiego raję<sup>‡</sup> – uśmiech profesora zasiewa ziarenko wątpliwości w ekonomicznym umyśle Jana: *To mi się chyba nie przyda (?), ale to jest ciekawe. Muszę się tego nauczyć! Nauczę się tego!* Niedoszły ekonomista Jan zaczyna chodzić z głową w chmurach: *Ta wyjściowa kula chyba, niestety, nie jest ze złota...*

<sup>‡</sup>I znowu Hilbertowi przypisuje się powiedzenie, że nikt nie wypędzi matematyków z raję teorii mnogości, który stworzył dla nich Cantor.



## Zadania



Przygotował Dominik BUREK

**M 1717.** Okrąg został podzielony cięciwą  $AB$  na dwa kołowe odcinki i jeden z nich został obrócony o pewien kąt wokół punktu  $B$ . W tym obrocie obrazem punktu  $A$  jest punkt  $C$ . Udowodnić, że odcinki łączące środki łuków odcinków kołowych ze środkiem odcinka  $AC$  są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 21

**M 1718.** Dane są takie liczby rzeczywiste  $x, y$  i  $z$ , że liczby  $x + yz, y + zx$  i  $z + xy$  są wymierne oraz  $x^2 + y^2 = 1$ . Udowodnić, że liczba  $xyz^2$  również jest wymierna.

Rozwiązanie na str. 12

**M 1719.** Wszystkie liczby naturalne zostały ustawione w pewnej kolejności. Czy zawsze mogą wskazać kilka kolejnych liczb (co najmniej dwie), których suma jest liczbą pierwszą?

Rozwiązanie na str. 20

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1053.** W grudniu 2021 roku ludność Ziemi osiągnęła  $N \approx 7,9 \cdot 10^9$  osób. Oszacuj, ile kilogramów powietrza przypada na jednego mieszkańca Ziemi. Promień Ziemi  $R \approx 6400$  km, przyspieszenie ziemskie  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ , a ciśnienie atmosferyczne  $p \approx 10^5 \text{ Pa}$ .

Rozwiązanie na str. 12

**F 1054.** W sierpniu, z maksimum w dniach 12–13 sierpnia, na nocnym niebie można zaobserwować meteory z roju Perseidów. Pomiary radiolokacyjne pozwalają wyznaczyć prędkość przemieszczania się meteoru względem Ziemi i na tej podstawie określić prędkość jego ruchu względem Słońca. Jak na podstawie pomiaru prędkości  $v$  meteoru w znanej odległości  $r$  od Słońca wyznaczyć długą półś  $a$  orbity? Masa Słońca  $M_S$  i stała grawitacyjna  $G$  są znane.

Rozwiązanie na str. 13

# Przygoda z meteorem

Marek PFÜTZNER\*

\*Instytut Fizyki Doświadczalnej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Artykuł zachęcający do amatorskiej astrofotografii, który ukazał się w  $\Delta_{21}^{10}$  (*Kosmiczne selfie*), ośmielił mnie do podzielenia się z Czytelnikami pewną przygodą, jaka przytrafiła mi się podczas uprawiania tego hobby. Ponieważ podobne przeżycie może być udziałem każdego, kto ma choćby średniej jakości aparat fotograficzny ze statywem, historia ta może dodatkowo zachęci Was do prób fotografii nieba.

Każdego lata spędzam część wakacji, najczęściej w sierpniu, w Beskidzie Sądeckim. Jak wiadomo, każdego roku w sierpniu można obserwować meteory z roju Perseid. Jest to jedna z najbardziej popularnych atrakcji astronomicznych w Polsce, ze względu na intensywność tego roju i dogodne warunki obserwacyjne – jest zazwyczaj ciepło, a niebo bywa czyste. W 2018 roku maksimum roju przypadało 12 sierpnia. Tego dnia zapowiadano bezchmurną pogodę i bezksiężycową noc, a więc najlepsze warunki do obserwacji Perseid. Zebrałem więc sprzęt fotograficzny i udałem się na polanę Obidza nad Koszarzyskami w pobliżu Piwnicznej. Jest to bardzo dobre miejsce, położone wysoko (940 m n.p.m.) i stosunkowo ciemne.

Umocowałem aparat na statywie, a obiektyw o szerokim kącie (o ogniskowej odpowiadającej 14 mm dla tzw. pełnej klatki) wycelowałem na południowy wschód. Wybrałem czułość ISO 2000 i maksymalnie otworzyłem przysłonę (f/2.8). Ustawiłem następnie układ wyzwalania tak, aby przez kilka godzin aparat robił serię zdjęć o ekspozycji trwającej 25 sekund z przerwą około 1 sekundy na zapis zdjęcia. Podczas gdy zdjęcia robiły się automatycznie, ja mogłem spokojnie podziwiać rozgwieżdżone niebo. W pewnym momencie, tuż przed północą, ciemności rozświetlił silny błysk. Był to wspaniały bolid o długim i jasnym śladzie. Jego blask był na tyle mocny, że towarzyszący mi syn, który stał obrócony w przeciwną stronę, ujrzał światło odbite od ściany lasu i zdążył się odwrócić, by jeszcze zobaczyć końcówkę toru tego meteoru. Na szczęście wydarzenie to znalazło się w polu widzenia aparatu i zostało uwiecznione na zdjęciu (rys. 1 na okładce). Byliśmy pod wrażeniem tego zjawiska i zastanawialiśmy się, jak daleko od nas przeleciał ten bolid i jak wysoko rozbłysł? Czy np. mógł zagrozić samolotowi lecącemu na wysokości około 10 km? Niestety na podstawie jednej fotografii nie da się odpowiedzieć na te pytania.

Miłośnicy astronomii dobrze znają portal „Astronomiczne zdjęcie dnia” ([apod.pl/apod/](http://apod.pl/apod/)) prowadzony przez amerykańską agencję NASA, ale warto polecić go wszystkim. Codziennie ukazuje się tam ciekawa fotografia na temat związany z astronomią, opatrzona fachowym komentarzem. Łatwo wyobrazić sobie moje zaskoczenie i radość, gdy kilka dni później, 17 sierpnia, zajrzałem do tego serwisu. Na ten dzień wybrano zdjęcie wykonane przez czeskiego astrofotografa Petra Horálka 12 sierpnia 2018 roku na przełęczy Kolonickiej w Parku Ciemnego Nieba na Słowacji (rys. 2 na okładce). Jest to fotografia tego samego bolidu, który zachwycił nas na polanie Obidza! Potwierdza to też zgodność czasu zdarzenia z rysunku 2 z czasem zapisanym przez mój aparat.

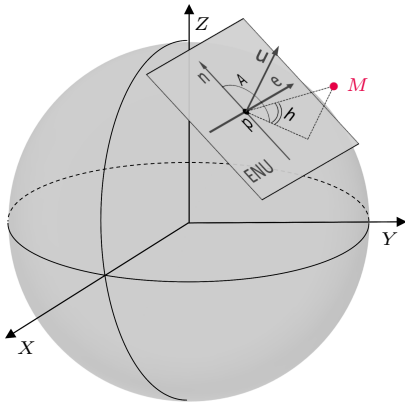
Mając teraz dwie fotografie tego samego zdarzenia na tle nieba, wykonane z różnych punktów, możemy już określić jego położenie w przestrzeni. Zrobimy to dla końca śladu meteoru. Współrzędne geograficzne pierwszego punktu obserwacyjnego  $p_O$  (Obidza) odczytałem w programie Google Earth: ( $49^{\circ}25'22''N$ ,  $20^{\circ}36'44''E$ ), zaś współrzędne punktu w Kolonicach  $p_K$  podane są na fotografii (rys. 2). Kierunek linii prostej od punktu obserwacyjnego do końcowego punktu toru meteoru  $p_M$  można wyznaczyć poprzez położenie gwiazd widzianych w tle fotografii. Pomaga w tym świetny darmowy program Stellarium. Po wpisaniu doń współrzędnych punktu obserwacji, daty i czasu, zobaczymy widok nieba w żądanym momencie. Porównując ten widok z fotografią, możemy odczytać współrzędne punktu  $p_M$  na sferze niebieskiej. Na obu zdjęciach widać obiekty o jasności do  $8^m$  – wszystkie można odnaleźć w Stellarium i odczytać ich współrzędne. Dla naszego celu wygodne będą współrzędne w tzw. układzie horyzontalnym, czyli azymut  $A$  – kąt w płaszczyźnie horyzontu między kierunkiem północy a punktem przecięcia z horyzontem koła wielkiego przechodzącego przez zenit i badany obiekt, oraz wysokość  $h$  – czyli kąt między płaszczyzną horyzontu a kierunkiem do tego obiektu. Analiza obydwu fotografii przyniosła następujące wyniki. Linia  $p_O - p_M$  zadana jest kątami wyrażonymi w stopniach łuku:  $(A_O, h_O) = (109.38, 22.12)$ , zaś linia  $p_K - p_M$  kątami  $(A_K, h_K) = (97.85, 59.84)$ . Przyjąłem też, że każdy z tych kątów obarczony jest maksymalnym błędem około 10 minut łuku, czyli około 0.17 stopnia. Położenie punktów początkowych i kąty kierunkowe wyznaczają





dwie linie proste, na przecięciu których leży punkt  $p_M$ . Ściśle rzecz biorąc, prawdopodobieństwo, że takie proste przetną się w przestrzeni, jest równe zeru, ale możemy przyjąć, że punkt  $p_M$  leży w połowie odcinka łączącego te proste w miejscu, gdzie odległość między nimi jest najmniejsza.

Dla dalszych obliczeń musimy wyrazić równania tych prostych w tym samym układzie odniesienia. W rachunkach szacunkowych moglibyśmy przyjąć przybliżenie płaskiej Ziemi, ale chyba łatwiej, a zarazem dokładniej można przeprowadzić dalszą analizę za pomocą pakietu *Mathematica*. Oferuje on szereg narzędzi do przetwarzania danych geodezyjnych. Pozycja o zadanej szerokości (*lat*) i długości (*lon*) geograficznej (w stopniach łuku) na tzw. elipsoidzie odniesienia, opisującej kształt Ziemi, jest reprezentowana przez obiekt `GeoPosition[lat,lon]`. Jeśli chcemy być dokładniejsi, możemy jeszcze dodać wysokość punktu nad tą elipsoidą w metrach (*w*): `GeoPosition[lat,lon,w]`. Wysokość ta, nazywana wysokością geodezyjną, jest nieco inna niż wysokość nad poziomem morza, ale możemy ją odczytać dla każdego miejsca na Ziemi, wykonując polecenie: `GeoElevationData[GeoPosition[lat,lon], "Geodetic"]`. I tak: dla punktu na Obidzy dostajemy wysokość geodezyjną 982.2 m, a dla punktu na przełęczy Kolonickiej 478.6 m. Przykładowo, pełna definicja punktu  $p_O$  w tym języku brzmi: `p_O = GeoPosition[49.4228, 20.6122, 982.2]`. Kolejną przydatną funkcją jest `GeoPositionXYZ[]`, która podaje współrzędne w kartezjańskim, geocentrycznym układzie odniesienia. Oś *X* tego układu ma początek w środku Ziemi i przechodzi przez punkt przecięcia południka zerowego z równikiem. Oś *Z* prowadzi od środka Ziemi do bieguna północnego, a oś *Y* jest prostopadła do dwóch pozostałych i skierowana na wschód. Wartości współrzędnych podane są w metrach. Pisząc więc `GeoPositionXYZ[p_0]`, otrzymamy współrzędne punktu  $p_O$  w układzie *XYZ*. Ostatnią ważną dla nas funkcją jest `GeoPositionENU[e,n,u,p]`, która reprezentuje położenie w lokalnym, kartezjańskim układzie, którego środkiem jest punkt  $p$ . W tym układzie wartości *e* i *n* oznaczają odległości w metrach od punktu  $p$  w płaszczyźnie horyzontalnej odpowiednio w kierunku wschodnim (*east*) i północnym (*north*), a *u* to wysokość w metrach nad tą płaszczyzną (*up*). Układy odniesienia *XYZ* i *ENU* są schematycznie przedstawione na rys. 3.



Rys. 3. Układy współrzędnych wykorzystywane w artykule. Układ *XYZ* to globalny, kartezjański, geocentryczny układ odniesienia. Układ *ENU* to lokalny kartezjański układ ze środkiem w punkcie  $p$  leżącym na powierzchni Ziemi. Nazwa tego układu pochodzi od angielskich słów East (wschód), North (północ) i Up (w górę). Tym kierunkom odpowiadają osie tego układu oznaczone odpowiednio na rysunku. Meteor jest widziany z punktu  $p$  w kierunku określonym przez azymut *A* i wysokość kątową nad horyzontem *h*

W układzie *ENU* możemy łatwo opisać linię prostą łączącą środek tego układu ( $p$ ) i meteor ( $p_M$ ) – na przykład w postaci parametrycznej:  $L(t) = p + t\vec{m}$ , gdzie  $\vec{m}$  jest wektorem jednostkowym o współrzędnych  $(e, n, u) = (\sin(A) \cos(h), \cos(A) \cos(h), \sin(h))$ . Pamiętajmy, że *A* i *h* to azymut i wysokość kątowa meteoru widzianego z punktu  $p$ . Dowolny punkt na prostej biegnącej np. z Obidzy do meteoru możemy teraz wyrazić we współrzędnych układu *XYZ*: `GeoPositionXYZ[GeoPositionENU[t*e0,n0,u0,p0]]`, gdzie *t* jest odległością tego punktu od  $p_O$  podaną w metrach. Analogiczne wyrażenie opisuje prostą z punktu  $p_K$  w Kolonicach do meteoru. Punkt, w którym odległość między tymi prostymi jest najmniejsza, możemy również znaleźć za pomocą pakietu *Mathematica*, wykorzystując np. funkcję `Minimize[]`.

Obliczenia w naszym przypadku prowadzą do wniosku, że najmniejsza odległość między prostymi znajduje się około 190 km od Obidzy i około 86 km od Kolonic. Odległość ta wynosi 50 m. Przyjmując, że pozycja meteoru  $p_M$  leży na środku najkrótszego odcinka między prostymi, dostajemy współrzędne punktu  $p_M$  w układzie *XYZ*. Aby wrócić do współrzędnych geograficznych, wykonujemy polecenie: `GeoPosition[GeoPositionXYZ[p_M]]`, co prowadzi do wyniku: `GeoPosition[48.881, 22.8527, 75011.9]`. Tor meteoru zakończył się zatem około 75 km nad Ziemią, a więc znacznie powyżej korytarzy lotniczych! Dokładność odczytu pozycji meteoru na tle nieba, równa 0.17 stopnia łuku, przekłada się na błąd wysokości równy około 1 km. Współrzędne geograficzne  $p_M$  wskazują na punkt w zachodniej Ukrainie, w pobliżu miejscowości Roztoka, położony około 13 km od najbardziej wysuniętego na południe skrawka Polski.

W roku 2022 obserwacje Perseid będą utrudnione przez bliski pełni, a więc świecący przez całą noc, Księżyc. Ale w 2023 roku noc z 12 na 13 sierpnia znowu będzie bezksiężycowa. Zachęcam do fotograficznego polowania!

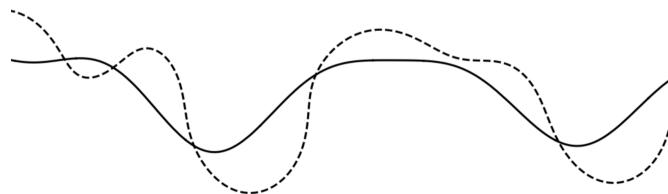
```
Równanie prostych w układzie XYZ
odpowiednio dla Obidzy i Kolonic:
10[t_]:= First[GeoPositionXYZ[
  GeoPositionENU[t*e0,n0,u0,p0]]];
1K[s_]:= First[GeoPositionXYZ[
  GeoPositionENU[s*eK,nK,uK,pK]];
Odległość między dwoma punktami na
tych prostych:
dist[t_,s_]:=
Norm[10[0]+t*(10[1]-10[0])-
  (1K[0]+s*(1K[1]-1K[0]))];
Najmniejsza odległość:
Minimize[dist[t,s],t,s]
Co prowadzi do wyniku:
49.8177, t -> 190210., s -> 86040.5
```

# W którą stronę jechał rower?

Agnieszka CHUDEK

Ta zagadka pojawiła się podczas Świątecznego Maratonu *Delty* w grudniu 2021 roku. Nagranie można obejrzeć na YouTube pod linkiem [youtu.be/ndI8Enf-t-k?t=6703](https://youtu.be/ndI8Enf-t-k?t=6703)

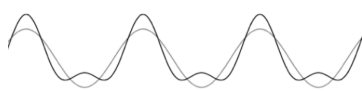
Wyobraźmy sobie, że zostaliśmy wezwani na miejsce napadu, z którego właśnie na rowerze zbiegł złodziej z torbą pełną łupów. Zostawił jednak na śniegu taki oto ślad



Pytanie tylko, w którą stronę odjechał...?



Ślad 1



Ślad 2



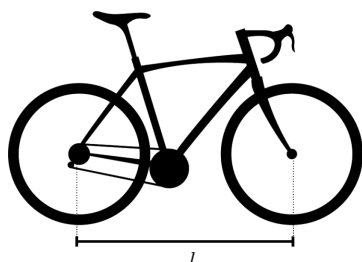
Ślad 4



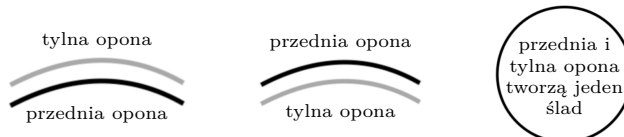
Ślad 4

Oczywiście możemy próbować zgadywać, ale prawdziwy detektyw rzadko zdaje się na przypadek, zwłaszcza jeśli wie, że można być pewnym odpowiedzi. Spróbujmy zebrać narzędzia, które pozwolą nam jednoznacznie i dość szybko określić kierunek jazdy. W tym celu przyjrzyjmy się kilku innym śladom (ślady 1–4 naszkicowane na marginesie) i zastanówmy się, który z nich NIE może przedstawiać śladu roweru.

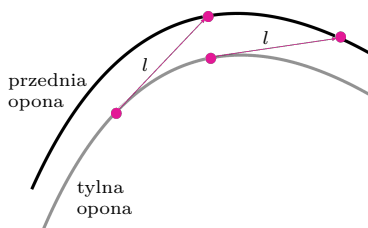
Żeby to sprawdzić, przeanalizujemy budowę roweru. Zwróćmy uwagę na przednie i tylne koło – są ze sobą sztywno połączone. Można sobie to wyobrazić tak, jakby punkty styku przedniej i tylnej opony z podłożem były końcami sztywnego pręta. Można zatem powiedzieć, że punkt styku tylnego koła z podłożem „patrzy” na punkt styku przedniego koła z podłożem, nieważne, jak to przednie koło jest obrócone. Widać, że w przypadku śladu 2 warunek ten nie jest spełniony. Wystarczy spojrzeć np. na „szczyt górki” czarnego śladu i zauważyć, że nie celuje ona w żaden punkt szarego śladu. Dla szarego śladu analogiczną sytuację mamy na „dnie doliny”. Zatem ślad 2 nie może być śladem jadącego roweru.



No dobrze, skoro tak dobrze nam idzie, to pójdźmy za ciosem i zobaczymy, co jeszcze da się wywnioskować z budowy roweru. Czy jesteśmy w stanie przewidzieć, jak będzie wyglądał ślad roweru jadącego w kółko? Rozważmy trzy najczęściej proponowane ślady i opierając się pokusie zgadywania, po prostu zdajmy się na twarde dowody.



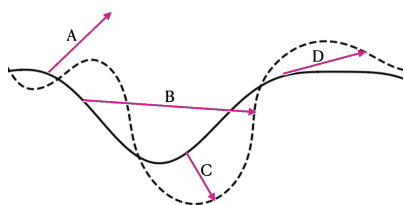
Wiemy już, że przednie i tylne koło są ze sobą połączone na sztywno i odległość między nimi wynosi tyle samo, czyli  $l$ , a tylne koło „patrzy” na przednie. Prześledźmy więc ruch roweru po łuku (rysunek obok) i zobaczymy, co z tego wynika.



Jeśli tylne koło porusza się po łuku, to przednie koło również będzie się poruszało po łuku, ale o większym promieniu.

Wspaniale! Wiemy już, który ślad odpowiada której oponie, dlatego pozostaje nam już tylko dopasować do nich długość roweru.

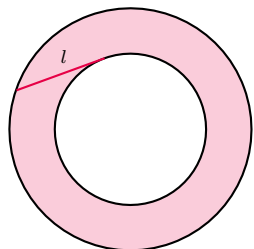
Na początek zastanówmy się, który z odcinków na rysunku obok w ogóle może być taką długością. Skoro wiemy, że odcinek ten musi łączyć oba ślady, to na pewno nie jest to A. Ponadto wiemy, że punkt na śladzie tylnej opony musi patrzeć na ślad przedniej opony, a to oznacza, że linia łącząca te dwa punkty nie może być przypadkowa, tylko jest to styczna do toru ruchu tylnej opony.



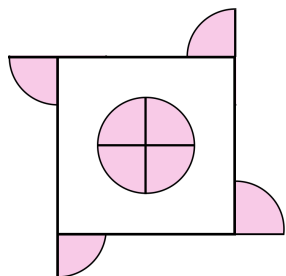
Zatem odpadają odcinki B oraz C. Jako możliwa długość roweru pozostaje odcinek D. Dlaczego możliwa? Bo żeby mieć pewność, musielibyśmy sprawdzić, czy ta długość odłożona w każdym miejscu pasuje do naszego śladu.

A teraz Drogi Czytelniku, już w pełni świadomie i na chłodno, niczym Sherlock Holmes, możesz przyjrzeć się śladowi z początku artykułu i wskazać, w którą stronę uciekł złodziej!

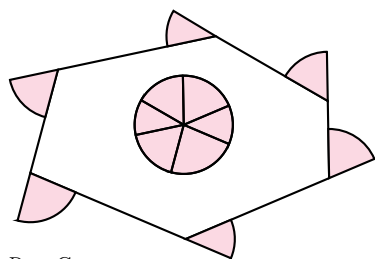
\*Ten i kilka innych ciekawych przypadków omówiono w książce Stana Wagona *Mathematica In Action: Problem Solving Through Visualization and Computation* oraz w artykule *Tractrices, Bicycle Tire Tracks, Hatchet Planimeters, and a 100-year-old Conjecture*, którego autorami są Robert Foot, Mark Levi i Serge Tabachnikov.



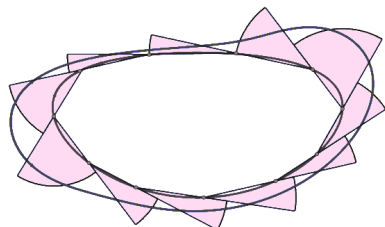
Rys. A



Rys. B



Rys. C



Rys. D

Miejmy nadzieję, że uda się go jeszcze złapać!

Kiedy już udało nam się pojmać złodzieja i ocalić skradzione łupy, przepełnieni dumą i euforią uświadomiamy sobie, że pomimo naszych niewątpliwych zasług, w postaci chłodnego osądu i błyskawicznej dedukcji, również mieliśmy trochę szczęścia.

Dociekliwy Czytelnik zauważył na pewno, że gdyby złodziej uciekał, jadąc idealnie przed siebie, jego ślad byłby jedną prostą linią, i moglibyśmy tylko zgadywać, w którą stronę odjechał. Podobnie niemożliwym byłoby określenie kierunku jazdy w przypadku śladów idealnie okrągłych (choć trudno wyobrazić sobie złodzieja jeżdżącego w kółko w pobliżu miejsca zbrodni).

Czy są to jedyne dwa przypadki, w których niemożliwe jest stwierdzenie kierunku jazdy? Czy możliwe, żeby para gładkich krzywych miała tę właściwość, że każda linia styczna do jednej krzywej zawsze przecina drugą krzywą w dwóch miejscach, z dodatkowym warunkiem utrzymania stałej odległości po obu stronach punktu styku wzdłuż linii stycznej? Czy każda z krzywych musi mieć wtedy stałą krzywiznę?\*

Na koniec wróćmy jeszcze na chwilę do rowerzysty jeżdżącego w kółko (rys. A). Patrząc na powstałe ślady, aż się prosi, żeby policzyć powierzchnię między nimi, a następnie rozszerzyć rozważania o dowolne krzywe. Czytelnik z Podzielną Uwagą na pewno policzył w międzyczasie, że w przypadku śladów okrągłych ta powierzchnia wynosi  $\pi l^2$ , gdzie  $l$  to długość roweru. Jak to będzie w przypadku innych krzywych? (Dla uściślenia, mówimy teraz tylko o krzywych zamkniętych.)

Zacznijmy od prostego przypadku. Wyobraźmy sobie, że jeździmy „w kółko” po kwadracie, w taki sposób, że jak tylne koło dojedzie do jego wierzchołka, to obracamy się na nim o  $90^\circ$  i jedziemy dalej przed siebie. Wtedy przednie koło na zakrętach zakreśli łuki jak na rysunku B, a powierzchnia między śladami zsumuje się również do  $\pi l^2$ . Jeśli będziemy poruszać się po dowolnej wypukłej wielokątnej ścieżce (co przedstawione jest na rys. C), to obszar między śladami przedniego koła i tylnego koła składa się z wycinków koła o promieniu  $l$ . Ponieważ zewnętrzne kąty wielokąta foremnego sumują się do  $360^\circ$ , wycinki te idealnie do siebie pasują, tworząc jedno pełne koło. Zatem obszar między śladami kół przedniego i tylnego dla rowerzysty jadącego po wypukłej wielokątnej ścieżce wynosi  $\pi l^2$ .

Idąc za ciosem, możemy uzyskiwać coraz lepsze przybliżenia obszaru między śladami – używając do przybliżania śladu tylnego koła wielokąta o coraz większej liczbie coraz krótszych boków (rys. D) – i przekonać się, że obszar pomiędzy dowolnymi zamkniętymi ścieżkami również wynosi  $\pi l^2$ . I to wszystko bez względu na długość ścieżek! Ciekawe, jak to będzie w przypadku ścieżki wklęsłej...?

## Język Wszechświata

Suhani GUPTA\*

\* Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk

Trudno jest spoglądając na nocne niebo, nie zachwycić się pięknem ogromu nad naszymi głowami – od migoczących gwiazd, poprzez planety, aż po iskrzący się Księżyc i okazjonalne pokazy meteorów. Spojrzenie na niebo zawsze skłania do zastanowienia się nad naszym miejscem we Wszechświecie i nad tym, że jesteśmy maleńką częścią tego wielkiego kosmicznego oceanu. Kosmologia – dziedzina astronomii, która zajmuje się pytaniami związanymi z narodzinami, ewolucją i ostatecznym losem naszego Wszechświata – jest jednym z najstarszych kierunków myśli człowieka. Nie jest to zaskakujące, ponieważ nocne niebo było obserwowane od niepamiętnych czasów i zawsze zachęcało do zastanawiania się nad jego rozległością. Od czasów starożytnych Greków przez średniowiecze aż po współczesną naukę kosmologia przeszła długą drogę od nauki fenomenologicznej – pozbawionej danych i ograniczonej do myśli i wyobraźni – do precyzyjnej nauki ilościowej i *big-data*, w której przeprowadzamy eksperymenty i obserwacje, aby przetestować nasze teorie i przewidywania. A to stało się możliwe dzięki szybkiemu rozwojowi tej dziedziny w ubiegłym wieku.

Wszechświatem rządzą cztery różne rodzaje oddziaływań: elektromagnetyczne, silne, słabe i grawitacyjne. Oddziaływania silne i słabe mają krótki zasięg i dominują w skali rozmiaru jąder atomowych. Elektromagnetyczne i grawitacyjne są oddziaływaniami dalekozasięgowymi. Siły elektromagnetyczne znoszą się w dużych skalach z powodu neutralności ładunkowej we Wszechświecie (liczby ładunków ujemnych i dodatnich zawartych w dużych objętościach są praktycznie takie same). Grawitacja, która różni się najbardziej od pozostałych trzech sił, dominuje w dużych skalach, kieruje dynamiką galaktyk i gromad galaktyk, ich powstawaniem i ewolucją, co z kolei znajduje zastosowanie w tworzeniu podstaw kosmologii. Dlatego też to grawitacja może zostać uznana za język naszego Wszechświata jako całości.

Grawitacja jest jednym z najbardziej fascynujących, a jednocześnie intuicyjnych zjawisk fizycznych. Jest niezbędna, ponieważ istnieje, jeśli cokolwiek istnieje: działa pomiędzy wszystkimi i wszystkim i elegancko łączy nas z naszym kosmosem, dominując w kosmicznym balecie planet, gwiazd, galaktyk, gromad galaktyk itd.

Na scenie przygotowanej przez prace Galileusza nad prawami grawitacji i ruchu Sir Izaak Newton jako pierwszy zaproponował, że te same prawa fizyczne rządzą dynamiką jabłka spadającego na ziemię, Księżycą krążącego wokół Ziemi, jak również planet krążących wokół Słońca. Teoria Newtona nie tylko pomogła nam zrozumieć prawa ruchu, ale także ugruntowała kopernikańską zasadę, że nie ma żadnego szczególnego miejsca we Wszechświecie i wszyscy podlegamy tym samym prawom fizycznym niezależnie od naszego położenia. Prace Newtona uutorowały również drogę do podjęcia próby zrozumienia dynamiki przestrzeni kosmicznej, a tym samym spojrzenia poza naszą kulebkę i zrozumienia obszarów do tej pory nieosiągalnych dla człowieka. Musiało jednak minąć jeszcze ponad 200 lat, abyśmy uświadomili sobie ogrom całego Wszechświata. Oprócz zastosowań w większości codziennych czynności, a także w misjach lotniczych i kosmicznych teoria Newtona stała się podstawą astronomii i doprowadziła do odkrycia planety Neptun. Prace Newtona były również wystarczające do wykonania gigantycznego skoku ludzkości, jakim była podróż na Księżyc i z powrotem.

Teorię grawitacji Newtona prześladuje jednak pewien problem określany mianem *upiornego działania na odległość*: w teorii tej siła przyciągania grawitacyjnego odczuwana przez odległy obiekt zmienia się natychmiast (bez żadnego opóźnienia), kiedy zmieniają się własności (np. położenie) źródła przyciągania. Ponadto w tym paradygmacie przestrzeń i czas są rozdzielonymi, absolutnymi i niezmiennymi bytami: przestrzeń jest odrębna od ciał znajdujących się w niej, a czas płynie jednostajnie bez względu na to, co dzieje się w świecie.

Jednak, zgodnie z teorią Alberta Einsteina, przestrzeń i czas stanowią jeden byt zwany czasoprzestrzenią, która nie jest niezmienna, lecz dynamiczna: może się zaginać, kurczyć lub rozciągać, a jej zmienność

zależy od obecności materii. Według Einsteina materia rządzi geometrią czasoprzestrzeni, a czasoprzestrzeń rządzi dynamiką materii w niej zawartej. W 1915 roku zaproponował on elegancką ogólną teorię względności, według której grawitacja nie jest siłą, lecz jest wynikiem zakrzywienia czasoprzestrzeni. To właśnie ta krzywizna powoduje, że Księżyc porusza się w czasoprzestrzeni ugiętej przez masę Ziemi, satelita krąży wokół planety, a w ogólności planety wokół gwiazd, gwiazdy wokół centrów galaktyk i tak dalej. Teoria grawitacji Newtona jest szczególnym przypadkiem teorii Einsteina w słabej grawitacji i działa świetnie na Ziemi lub w Układzie Słonecznym. Jednak prawdziwe zastosowanie ogólna teoria względności znajduje w badaniach egzotycznych obiektów, najgęstszych we Wszechświecie, takich jak czarne dziury lub gwiazdy neutronowe, które bardzo mocno zaginają otaczającą czasoprzestrzeń. Również Globalny System Pozycjonowania (*Global Positioning System*, GPS), który ratuje nas przed zgubieniem się w nieznanym terenie, działa dzięki uwzględnieniu poprawek teorii względności. Jak więc widać, teoria względności ma konsekwencje w naszym codziennym życiu, ale jej prawdziwą głębię doceniamy podczas studiowania zjawisk fizycznych zachodzących w przestrzeni kosmicznej.

Teorię Einsteina można przedstawić w postaci poniższego, niezwykle prostego i eleganckiego, równania:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Człony po lewej stronie znaku równości opisują krzywiznę czasoprzestrzeni, natomiast prawa strona równania przedstawia zachowanie się i rozkład materii we Wszechświecie. Równanie Einsteina łączy te dwa światy, co zostało świetnie podsumowane przez Johna A. Wheelera: *Space-time tells matter how to move; matter tells space-time how to curve.* (Czasoprzestrzeń mówi materii, jak się poruszać; materia mówi czasoprzestrzeni, jak się zaginać.)

Nawet teraz, po ponad stu latach od powstania, teoria względności wytrzymuje próbę czasu i zdaje celująco wszystkie przeprowadzane testy – zarówno w zakresie słabej grawitacji, jak w Układzie Słonecznym (np. wytłumaczenie precesji orbity Merkurego, soczewkowanie grawitacyjne, grawitacyjne opóźnienie czasu), jak też w zakresie silnego pola: w przypadku czarnych dziur i gwiazd neutronowych (np. kinematyka pulsarów podwójnych, detekcja fal grawitacyjnych, precesja Schwarzschilda w pobliżu centrum Drogi Mlecznej, obserwacja cienia czarnej dziury w galaktyce M87). Ponadto przewidywania teorii dotyczące wczesnego Wszechświata oraz powstawania i ewolucji struktur wielkoskalowych zostały wzmocnione przez wyniki różnych badań obserwacyjnych prowadzonych na przestrzeni lat.

Biorąc pod uwagę teorię względności jako podstawę dziedziny kosmologii, stosujemy się do podstaw



tworzących model standardowy kosmologii, które zostały potwierdzone przez wiele różnych obserwacji.

Zgodnie z modelem standardowym nasz Wszechświat, wszystko co znamy, a nawet czas, powstały około 13,8 miliarda lat temu w zjawisku określanym jako Wielki Wybuch. Wczesny Wszechświat był niezwykle gorący i gęsty. W miarę upływu czasu ochładzał się, rozszerzał i stawał się coraz mniej gęsty. Ze względu na bardzo wysoką temperaturę i energię na początku istniały tylko cząstki elementarne. Wraz z upływem czasu i zmieniającymi się warunkami cząstki elementarne nie mogły istnieć swobodnie i zaczęły się łączyć, tworząc składniki jąder atomowych, a potem jądra i atomy, a w końcu gwiazdy, skomplikowane cząsteczki chemiczne, planety, galaktyki – czyli Wszechświat, jaki znamy dzisiaj.

Cała materia, którą bezpośrednio obserwujemy, od atomów po galaktyki, składa się z czegoś, co nazywamy barionami. Stanowi ona tylko 5% całej szacowanej przez kosmologów zawartości Wszechświata. Większość materii jest *ciemna*, tzn. nie oddziałuje ze światłem. Jest jej prawie 5 razy więcej niż zwykłej (barionowej) materii, która oddziałuje z fotonami. Skąd więc – biorąc pod uwagę brak bezpośrednich obserwacji lub eksperymentalnych detekcji – wiemy o jej istnieniu?

**Polecamy artykuły Wojciecha Hellwina o historii badań nad ciemną materią,  $\Delta_{19}^7$  i  $\Delta_{19}^8$ .**

Ciemna materia oddziałuje grawitacyjnie ze zwykłą materią, zapewniając m.in. stabilność struktur wielkoskalowych, co wnioskujemy z obserwacji związanych z dynamiką galaktyk i gromad galaktyk.

W czasach, kiedy Einstein tworzył teorię względności, dominował pogląd, że Wszechświat jest statyczny i niezmienny: ani się nie rozszerza, ani nie kurczy. Jednak w 1929 roku Edwin Hubble, pracujący w Obserwatorium Mount Wilson w Kalifornii, odkrył, że Wszechświat rozszerza się, a dodatkowo że dalsze obiekty oddalają się od nas w znacznie większym tempie niż obiekty znajdujące się w naszym sąsiedztwie. Oznacza to, że wszystko oddala się od siebie w skalach czasowych znacznie większych niż skala ludzkiego życia. Brzmi to ekstremalnie, prawda? Ale ku naszemu zaskoczeniu to tylko wierzchołek góry lodowej!

W 1998 roku dwie niezależne grupy badawcze odkryły, że Wszechświat nie tylko się rozszerza, ale do tego rozszerzanie przyspiesza (tempo ekspansji Wszechświata rośnie z czasem). Odkrycie to wstrząsnęło całą społecznością naukową, ponieważ było ono bardzo nieintuicyjne – grawitacyjne przyciąganie oddalających się od siebie galaktyk powinno spowalniać tempo ekspansji. Zaobserwowanego przyspieszenia nie potrafiono wyjaśnić za pomocą proponowanych wtedy modeli. Standardowy model kosmologiczny został więc rozszerzony o coś, co nazywamy „ciemną energią”. Odpowiada ona za kosmologiczne przyspieszenie, a co najbardziej szokujące, stanowi prawie 68% energii zawartej w dzisiejszym Wszechświecie. Nawet

po 24 latach od tego odkrycia odpowiedź na pytanie o to, czym jest ciemna materia, pozostaje jedną z najistotniejszych tajemnic współczesnej fizyki, zarówno na froncie teoretycznym, jak i obserwacyjnym.

Nie tracimy nadziei na rozwiązanie tej zagadki. W międzyczasie powstała bowiem ogromna ilość literatury na temat modelowania i zrozumienia nieznannej fizyki związanej z różnymi procesami zachodzącymi w największych skalach. Stworzyliśmy również potężne komputery, które mogą wykonywać zadania znacznie przekraczające ludzkie możliwości. Symulacje komputerowe umożliwiły generowanie sztucznych replik naszego Wszechświata w celu badania jego rzeczywistych właściwości i modelowania jego ewolucji.

Wymagania zarówno teoretyczne, jak i numeryczne doprowadziły do zbudowania wydajnych narzędzi eksperymentalnych i obserwacyjnych, które bezpośrednio mierzą obserwowalne zjawiska związane z wieloma ważnymi procesami astrofizycznymi i kosmologicznymi. Na froncie obserwacyjnym polegamy na teleskopach działających w całym spektrum elektromagnetycznym, a także korzystamy z rozwijającej się od 6 lat astronomii fal grawitacyjnych, w której do pomiaru zjawisk astrofizycznych wykorzystujemy bezpośrednio grawitację zamiast światła. Teleskopy elektromagnetyczne są wykorzystywane we wszystkich pasmach częstotliwości do badania różnych skal długości i czasu we Wszechświecie – za pomocą teleskopów umieszczonych na Ziemi i w przestrzeni kosmicznej bada się obiekty pozaziemskie, takie jak nasz własny Układ Słoneczny: nasz Księżyc i Słońce, pobliskie planety i ich księżyce, obiekty takie, jak asteroidy, komety, meteory i inne ciała niebieskie. Przy użyciu potężnych teleskopów możliwe jest również wyjście poza Układ Słoneczny i badanie struktury oraz mierzenie odległości do pobliskich i odległych gwiazd, patrzenie na ich narodziny, cykle życiowe i śmierć; obserwowanie galaktyk, ich centrów, morfologii i dynamiki; badanie ośrodka międzygwiazdowego i międzygalaktycznego, oraz związanej z tym fizyki. Zaobserwowaliśmy podobne do Ziemi planety krążące wokół innych gwiazd, co daje nam nadzieję na wykrycie pozaziemskich form życia. Udało nam się zbadać egzotyczne obiekty, takie jak kwazary, których obserwacje są źródłem informacji o odległych zakątkach kosmosu i formowaniu się pierwszych galaktyk. Uchwyciliśmy pierwszy obraz cienia czarnej dziury znajdującej się w galaktyce oddalonej od nas o 54 miliony lat świetlnych (M87). Jedną z najwcześniejszych informacji na temat kosmosu, którą otrzymujemy za pomocą światła, jest promieniowanie z momentu, w którym Wszechświat stał się po raz pierwszy przejrzysty dla promieniowania. Jest ono określane jako kosmiczne mikrofalowe promieniowanie tła (*cosmic microwave background, CMB*). Różne kosmologiczne misje ziemskie i kosmiczne zostały zaprojektowane specjalnie do badania CMB, co ostatecznie przekształciło kosmologię z nauki jakościowej w dziedzinę precyzyjnych pomiarów o dokładności procentowej, albo i lepszej.

**Rozwiązanie zadania F 1053.**

W porównaniu z promieniem Ziemi atmosfera jest bardzo cienka – umownie przyjmuje się, że 100 km nad powierzchnią Ziemi „rozpoczyna się” Kosmos. Na tej wysokości przyspieszenie grawitacyjne wynosi około  $g(6400/6500)^2 \approx 9,7 \text{ m/s}^2$ . Nie popełnimy więc dużego błędu, przyjmując  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$  dla całej grubości atmosfery. Nacisk całej atmosfery na powierzchnię Ziemi równy jest w przybliżeniu ciężarowi atmosfery, tj. iloczynowi jej masy  $m$  i przyspieszenia ziemskiego  $g$ . Tym samym:

$$m \approx 4\pi R^2 p/g.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy  $m \approx 5,15 \cdot 10^{18} \text{ kg}$ , a więc ok.  $6,5 \cdot 10^8 \text{ kg}$  powietrza na jednego mieszkańca Ziemi.

O modelach Wszechświata bez ciemnej energii pisał Andrzej Krasieński w  $\Delta_{16}^1$ .

**Rozwiązanie zadania M 1718.**

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} xyz^2 &= xyz^2 + z - z = \\ &= xyz^2 + (x^2 + y^2)z - z = \\ &= (yz + x)(zx + y) - (xy + z), \end{aligned}$$

więc  $xyz^2$  jest liczbą wymierną na mocy warunków zadania.

*Uwaga:* Z warunków problemu nie wynika,

że liczby  $x$ ,  $y$ ,  $z$  są wymierne.

Na przykład warunki te spełnia trójka

$$\text{liczb: } x = \frac{1-\sqrt{7}}{4}, y = \frac{1+\sqrt{7}}{4}, z = 1.$$

Granicom poznania poświęcony był cały numer  $\Delta_{21}^{12}$ .

Astronomia fal grawitacyjnych ukazuje zupełnie inne procesy zachodzące w przestrzeni kosmicznej. Fale grawitacyjne pomagają nam „zobaczyć” najbardziej gwałtowne wydarzenia: eksplodujące gwiazdy supernowe, zderzające się czarne dziury i gwiazdy neutronowe. Ponadto mają one potencjał do zbadania bardzo wczesnego Wszechświata, w epoce wcześniejszej od CMB, co pozwoliłoby być może rozwikłać kilka zagadek, włączając tę dotyczącą pochodzenia Wszechświata. Ziemskie obserwatoria fal grawitacyjnych LIGO i Virgo otworzyły nową dziedzinę astronomii, a przyszłe misje, takie jak kosmiczne obserwatorium LISA, obejmą znacznie niższe zakresy częstotliwości, inne źródła fal grawitacyjnych i zapewne wiele egzotycznych niewykrytych do tej pory zjawisk.

Dzięki potężnym narzędziom, śmiałym pomysłom i wizjonerskim myślicielom solidny i uzupełniający się rozwój na froncie teoretycznym, numerycznym, eksperymentalnym i obserwacyjnym dąży do dalszego zrozumienia natury ciemnej materii i ciemnej energii: dwóch składników, które odpowiadają za około 95% masy-energii Wszechświata. Specjalne eksperymenty, przeprowadzane na Ziemi i w kosmosie, mają na celu zdobycie bezpośrednich dowodów na istnienie ciemnej materii, a wiele obecnych i nadchodzących badań ma za zadanie zbadanie wzrostu, ewolucji i grupowania się struktur wielkoskalowych podczas kosmicznej ewolucji, w celu lepszego określenia cech ciemnej materii oraz ciemnej energii. Już teraz mamy nadmiar danych obserwacyjnych, które nakładają solidne ograniczenia na te dwa kosmiczne byty. Z drugiej strony, proponuje się również wiele teorii alternatywnych wobec obecnej teorii grawitacji, które wyjaśniają nasz Wszechświat bez odwoływania się do ciemnej materii i ciemnej energii, ale teorie te wymagają solidnych dowodów. Jak dotychczas żadna z nich nie jest jeszcze na tyle przekonująca, by podważyć standardowy model kosmologiczny i znajdującą się u jego podstaw teorię grawitacji, czyli teorię względności Einsteina.

W przeciwieństwie do innych dziedzin nauki w astronomii i kosmologii badacze nie mogą przeprowadzać testów w laboratoriach i są ograniczeni do obserwacji: niestety nie możemy w sposób kontrolowany odtworzyć zdarzenia kosmologicznego ani wypróbować naszej teorii w innym wszechświecie. Dlatego zastanawiamy się nad tym, czy procedura udowadniania poprawności modelu w kosmologii nie powinna być przeprowadzana inaczej. Możemy mieć szczęście, jeśli wykryjemy i zaobserwujemy niektóre z naszych hipotez, a może będziemy mieli jeszcze więcej szczęścia, odkrywając zupełnie nową fizykę, która zmieni dotychczasowy tok myślenia.

Ponieważ Wszechświat ewoluuje w niewyobrażalnie wielkich rozmiarach i absurdalnie długich okresach czasu, jesteśmy bardzo ograniczeni jako ludzie – te skale są poza naszym doświadczeniem i intuicyjnym zrozumieniem. Jednakże, pomimo naszych ograniczeń, dokonaliśmy znaczących postępów w dziedzinie kosmologii, a przyszłe ekspedycje dostarczą kolejnych przełomów. Odkrycie rozszerzającego się Wszechświata, CMB i przyspieszonej ekspansji Wszechświata dokonane w ostatnim stuleciu, a także sformułowanie precyzyjnego standardowego modelu kosmologicznego oraz odkrycie fal grawitacyjnych w tym stuleciu wyraźnie pokazują możliwości ludzkiego umysłu i to, jak daleko pomógł nam on przesunąć granice naszego poznania.

W ciągu ostatnich 400 lat doprowadziliśmy do powstania zasady kopernikańskiej, która uświadamia nam znikomość znanej nam rzeczywistości w porównaniu z najwspanialszym z kosmosów. Badania kosmologiczne pozwalają nam docenić, że natura była na tyle uprzejma, aby podążać za tymi samymi prawami w każdej części Wszechświata, co napędzało odkrycia naukowe w przeszłości i będzie napędzało również w przyszłości. Porywające jest także odkrycie, że materia, z której się składamy, powstała kiedyś we wnętrzach gwiazd, a wszystko, co znamy: ziemia, powietrze, woda, inni ludzie, zwierzęta, rośliny, cała nasza planeta i Układ Słoneczny, zawdzięczają swoje istnienie odległemu Słońcu. Współczesna nauka umożliwia prześledzenie tego procesu do początku Wszechświata, co czyni nas wszystkich nieodłączną częścią naszego kosmosu!



**Rozwiązanie zadania F 1054.**

Wiemy, że na orbicie kołowej o promieniu  $r$  prędkość satelity Słońca wynosi  $v^2 = GM_S/r$ . Zajmijmy się więc orbitą eliptyczną. Podczas ruchu w polu grawitacyjnym energia całkowita meteoru o masie  $m$  ma stałą wartość, a więc w dowolnym punkcie toru jest równa jego energii w aphelium. Niech  $v_a$  i  $r_a$  oznaczają odpowiednio prędkość i odległość od Słońca w aphelium. Mamy:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_S m}{r} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GM_S m}{r_a},$$

czyli

$$v^2 - v_a^2 = 2GM_S \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right).$$

Podczas ruchu stały pozostaje także moment pędu. Przyrównajmy jego wartości w aphelium i w perihelium. Oznaczmy jako  $v_p$  i  $r_p$  prędkość i odległość od Słońca w perihelium. Mamy:

$$mv_a r_a = mv_p r_p$$

oraz (z poprzedniego związku)

$$v_p^2 - v_a^2 = 2GM_S \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right).$$

Na podstawie obu powyższych równań otrzymujemy:

$$v_a^2 \left( \frac{r_a^2}{r_p^2} - 1 \right) = 2GM_S \left( \frac{r_a - r_p}{r_a r_p} \right).$$

Po podzieleniu obustronnie przez  $r_a - r_p > 0$  (dla orbity eliptycznej) i skorzystaniu z faktu, że  $2a = r_a + r_p$ , dostajemy związek:

$$v^2 = GM_S \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Trudne pomiary prędkości wykonywane są zwykle, gdy meteor przecina orbitę Ziemi.

W przypadku roju Perseidów takie pomiary pozwoliły stwierdzić, że są one „odłamkami” pozostawionymi na swej orbicie przez komety Swift-Tuttle o okresie obiegu wokół Słońca równym ok. 133,3 roku i parametrach orbity  $r_p = 0,9595$  au,  $r_a = 51,225$  au (au to tzw. jednostka astronomiczna równa średniej odległości Ziemi od Słońca).

## Mamy to jak w banku

Moje zainteresowanie tematem pobudziła audycja radiowa o liczącej 1300 próbek kolekcji czaszek żubrów zgromadzonej w Instytucie Biologii Ssaków Polskiej Akademii Nauk w Białowieży. Naukowcy chcą śledzić dynamikę zmian kostnych współczesnych pokoleń żubrów. Wiadomo bowiem, że „nasze” żubry to głównie potomstwo XX-wiecznej pary, Planty i Plebejera, ze stada w Pszczynie, są to zwierzęta blisko spokrewnione, a więc podatne na mutacje. Kolekcja czaszek umożliwia tworzenie banku genów żubrów.

W banku genów może znaleźć się wiele różnorodnych substancji. Najprostsze są zbiory nasion. Widzimy takie kolekcje jako zabezpieczenie przed nieodwracalną utratą ziemskich zasobów genowych roślin użytkowych. Szczególnym zainteresowaniem objęte są dzikie ekotypy, odmiany tradycyjne czy miejscowe, które mogą w swym materiale genetycznym zawierać cenne cechy, jak np. odporność na określone choroby. Klasycznym przykładem są badania cech genetycznych dzikich odmian ziemniaka, często bardziej odpornych na groźne patogeny w porównaniu ze współczesnymi odmianami.

Trudniejsze do przechowywania są tkanki i geny z innych niż roślinne organizmów. Powstają jednak banki komórek macierzystych, a nawet tkanek reprodukcyjnych, gromadzone są próbki innych tkanek i narządów. W Holandii gromadzone są sekwencje genowe odmian m.in. takich organizmów, jak bydło, świnie, konie, owce, kozy, psy, kaczki, gęsi, króliki czy drób. Muzeum Górnośląskie w Bytomiu, współpracujące z wyspecjalizowaną pracownią preparacji zwierząt kręgowych, gromadzi tkanki zwierząt zagrożonych wyginięciem w wyniku działalności ludzi. Zebrano i zachowano próbki tkanek kostnych, sierści, skóry i zębów pochodzących od wielu zwierząt: niedźwiedzia polarnego i brunatnego, wilków, a także antylop, w tym oryksów i kudu.

W Polsce systematyczne gromadzenie krajowych zasobów genowych prowadzone jest od roku 1971. W ostatnich dwóch stuleciach wyginęły lub ustąpiły z naszych terenów 124 gatunki roślin. Kolekcjonujemy m.in. nasiona zbóż (40%) i traw (30%). Program Ochrony Zasobów Genowych Roślin Użytkowych obejmuje działalność około 30 różnych zakładów i instytucji naukowo-badawczych, ze szczególnym podkreśleniem roli uniwersyteckich Ogrodów Botanicznych oraz Instytutu Hodowli i Aklimatyzacji Roślin. Zawierają one kolekcje wybranych 73 genotypów roślin o znaczeniu użytkowym.

Największym światowym bankiem nasion jest położony na norweskiej wyspie Spitsbergen budynek wkopany niemal w całości w grunt. Uznaje się, że stanowi zabezpieczenie biologicznej różnorodności roślinnej w obliczu zmian klimatycznych, wojen, sabotażu, chorób, klęsk ekonomicznych, klęsk żywiołowych (trzęsienia, powodzie, susze, erupcje wulkanów). Mieści 1 081 026 odrębnych próbek dokumentujących 13 tysięcy lat rozwoju rolnictwa (dane z 2021 r.), zbieranych z całego świata. Zbiór ten reprezentuje 1/3 roślin uprawnych świata, jest stale uzupełniany i rozszerzany. Wiele krajów prowadzi podobne, choć mniejsze, banki nasion; w ponad 1750 bankach genów zdeponowanych jest około 7,5 mln obiektów.

W tej naukowej dziedzinie ślad zostawia również polityka. Ostatnio media obiegrała wiadomość o spaleniu w wyniku działań wojennych jedynej ukraińskiej kolekcji nasion w Charkowie. Przypominam podobną radziecką akcję w stosunku do unikatowego banku nasion stworzonego w 1924 roku w ZSRR przez genetyka Nikołaja Wawilowa. Aresztowany w roku 1940 i skazany na śmierć za rzekome szpiegostwo (!) zmarł w więzieniu w 1943 roku.

Istnienie kolekcji komórek i tkanek narządów służy zabezpieczeniu wymierających gatunków i osobników do badania ewolucji życia na ziemi, uzyskiwania nowych odmian rolniczych, a nawet prób odtworzenia już wymarłych odmian i gatunków. Skromny sukces osiągnięto w 2004 roku, przenosząc zamrożone zarodki wymarłej rasy kóz z Tennessee do innej współczesnej odmiany. Z tego zabiegu urodziły się kozy zwane „czekoladowymi”.

Warto tu dodać informację o rejestracji (w wymiarze światowym) sekwencji DNA, łącznie z pełnymi genomami, licznych organizmów – takie rejestry także nazywa się bankami genów, ale to temat do odrębnej refleksji.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

# Współczynniki wielomianów na okręgu jednostkowym kręcą się, kręcą się

Radosław KUJAWA

Rozważmy następujący problem: jak pomnożyć dwa wielomiany? Definiując ten problem bardziej precyzyjnie: mamy dane dwa wielomiany stopnia  $n$ :

Moglibyśmy nie zakładać, że  $A(x)$  i  $B(x)$  są równego stopnia, ale dużo wtedy nie zyskujemy, bo możemy niskim kosztem dołożyć „mniejszemu” wielomianowi zerowych współczynników przy brakujących potęgach.

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  i  $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ . Chcemy znaleźć współczynniki takiego wielomianu  $C(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{2n}x^{2n}$ , że  $C(x) = A(x)B(x)$  dla każdego  $x$ .

Przyjrzyjmy się wielomianowi  $C(x)$ . Wygląda on z grubsza tak:  $C(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + (a_{n-1}b_n + a_nb_{n-1})x^{2n-1} + a_nb_nx^{2n}$ . Mamy więc jawny wzór na jego współczynniki! Matematyk powie: „wielomian  $C$  jest znaleziony, problem rozwiązany”. Jednak informatyk może zakrzyknąć: „hola, hola, ale jak to zaimplementować?”. No właśnie.

Naiwna implementacja obliczania współczynników wielomianu  $C(x)$  poddawałaby do siebie wymnożone parami współczynniki wielomianów  $A$  i  $B$ :

```
POMNÓZ NAIWNIEM([a0, ..., an], [b0, ..., bn])
FOR i ← 0 TO 2n DO
  ci ← 0
  FOR j ← 0 TO i DO
    ci ← ci + aj · bi-j
RETURN [c0, c1, ..., c2n]
```

Notację dużego  $O$  można przetłumaczyć na „co najwyżej”. Przykładowo wykonanie algorytmu w czasie  $O(n^2)$  będzie trwać co najwyżej proporcjonalnie do kwadratu danych wejściowych.

Powyższy pseudokod wykona  $O(n^2)$  mnożeń. Jest to bardzo słaby wynik. W następnym kroku pokażę więc przepiękny algorytm, który dzięki kilku Błyskotliwym Trikoma działa w czasie  $O(n \log n)$ , czyli znacznie szybciej.

Błyskotliwy Trik numer 1 związany jest z reprezentacją wielomianu. Powyżej  $A(x)$  i  $B(x)$  były zdefiniowane jako wektory współczynników. Można jednak rozważyć wielomian  $W$  w postaci  $n + 1$  par  $(x_i, W(x_i))$ . Jeśli tylko  $x_i$  będą parami różne, a wielomian będzie stopnia  $n$ , to taka reprezentacja jest jednoznaczna. Zauważmy jej bardzo obiecującą własność: jeśli  $A(x)$  i  $B(x)$  będą zdefiniowane w tych samych punktach, to wyliczenie  $C(x)$  jest banalne – wystarczy wziąć pary  $(x_i, A(x_i) \cdot B(x_i))$ ! Tu jest jeden drobny haczyk – musimy mieć  $2n + 1$  takich punktów, by  $C(x)$  był jednoznaczny, wszak jest on stopnia  $2n$ .

Niestety! Złośliwie zdefiniowaliśmy sobie taki problem, w którym wielomiany do pomnożenia dane są jako współczynniki, a nie jako wartości w punktach. Zmiana treści zadania jest powszechnie uważana za oszustwo. Jeśli chcemy więc, by nasz Błyskotliwy Trik numer 1 był użyteczny, musimy znaleźć sposób na konwersję pomiędzy tymi dwiema reprezentacjami. Ogólny schemat wymarzonego algorytmu będzie taki:

Konwersja ze współczynników do wartości w punktach nazywa się ewaluacją (stąd EWALUUJ). Operacja odwrotna to interpolacja (stąd też INTERPOLUJ w schemacie wymarzonego algorytmu).

```
POMNÓZ SPRYTNIE(A[0..n], B[0..n], X[0..2n])
[a'0, ..., a'2n] ← EWALUUJ(A, X)
[b'0, ..., b'2n] ← EWALUUJ(B, X)
FOR i ← 0 TO 2n DO
  c'i ← a'i · b'i
C[0..2n] ← INTERPOLUJ([c'0, ..., c'2n], X)
RETURN C
```

Od teraz (dla wygody, którą będzie widać niebawem) będę zakładał, że rozważany wielomian  $W(x)$  jest stopnia  $n - 1$  i potrzeba go obliczyć w  $n$  punktach.

Zacznijmy od ewaluacji. Znowu spróbujmy naiwnie:

```
EWALUUJ([w0, ..., wn-1], [x0, ..., xn-1])
FOR i ← 0 TO n - 1 DO
  yi ← wn-1
  FOR j ← n - 2 TO 0 DO
    yi ← yi · xi + wj
RETURN [y0, ..., yn-1]
```

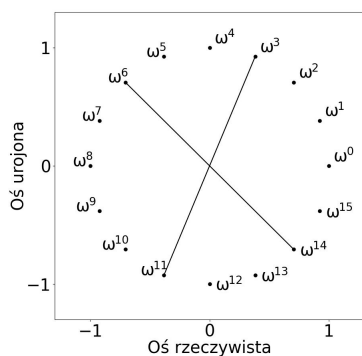
Ten algorytm nie jest aż tak naiwny, jak mógłby być, bo stosuje schemat Hornera, który pozwala wyliczyć wartość wielomianu w czasie  $O(n)$ .



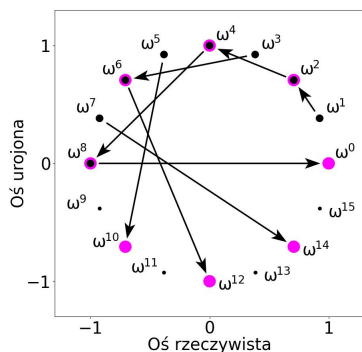
Przykład: weźmy wielomian  $W(x) = 2x^6 + x^2 + 7$ . Jeśli policzymy, że  $W(1) = 10$ ,  $W(2) = 139$ ,  $W(3) = 1474$ , to od razu  $W(-1) = 10$ ,  $W(-2) = 139$ ,  $W(-3) = 1474$ . Trzy na siedem koniecznych wartości mamy za darmo.

Jeśli  $n \neq 2^k$ , to dodanie kolejnych zerowych współczynników przy potęgach większych od  $n$  pozwoli powiększyć dane wejściowe tak, by liczba współczynników stała się najbliższą potęgą dwójki większą od  $n$ .

Będę używał notacji  $\omega_n$  (lub krócej  $\omega$ , jeśli  $n$  będzie jasne) na oznaczenie liczby  $\sqrt[n]{1} = e^{\frac{2i\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$ . Będę starał się myśleć o pierwiastkach z jedności jako o punktach na okręgu:



Liczby przeciwne leżą po przekątnej



Liczby oznaczone czarnymi kropkami podniesione do kwadratu zmieniają się w kolorowe kropki

Niestety widać wyraźnie, że jesteśmy w punkcie wyjścia, bo algorytm wykona  $O(n^2)$  operacji. Trudno zobaczyć, co tutaj można byłoby zrobić lepiej. Jednakże słuszną nadzieję może budzić fakt, że  $x_0, \dots, x_{n-1}$  mogą być zupełnie dowolne (byle tylko parami różne) i póki co z tego nie skorzystaliśmy. Może dałoby się tak dobrać punkty do ewaluacji wielomianu, by się aż tak bardzo nie naliczyło?

Prosta obserwacja jest taka: jeśli wielomian ma iksy tylko w parzystych potęgach, to  $P(x) = P(-x)$ . Można więc liczyć wartości dla par liczb przeciwnych:  $x_0, -x_0, x_1, -x_1, \dots$ . Dla każdej pary wartości wielomianu będą takie same.

Dруга prosta obserwacja: można sprawić, by każdy wielomian miał same parzyste potęgi – wystarczy wyciągnąć jeden  $x$  przed nawias tam, gdzie to konieczne:

$$W(x) = (w_0 + w_2x^2 + w_4x^4 + \dots) + x(w_1 + w_3x^2 + w_5x^4 + \dots).$$

Tym razem oszustwo jest legalne i użyteczne – w obu nawiasach wyrażenia są niewrażliwe na znak argumentu. Co prawda całe  $W(a)$  oczywiście nie będzie równe  $W(-a)$ , ale do obliczenia obu tych wartości każdy z nawiasów wystarczy obliczyć raz.

Bardzo obiecująco wygląda podział na dwa podwielomiany. Pójdźmy dalej tym tropem w stronę jakiegoś algorytmu „dziel i zwyciężaj”. W tym celu poczyńmy jeszcze niegroźne założenie, że  $n = 2^k$ , to bardzo uprości dalsze rozważania, o czym więcej na marginesie.

Żeby mieć prawidłowy algorytm „dziel i zwyciężaj”, potrzebujemy rozłożyć problem na dwa problemy o połowę mniejsze. W naszym przypadku potrzebujemy mieć dwa podwielomiany o połowę mniejszego stopnia. Możemy to zrobić o tak:

$$\begin{aligned} W_e(x) &= (w_0 + w_2x + w_4x^2 + \dots + w_nx^{\frac{n}{2}}), \\ W_o(x) &= (w_1 + w_3x + w_5x^2 + \dots + w_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}), \\ W(x) &= W_e(x^2) + xW_o(x^2). \end{aligned}$$

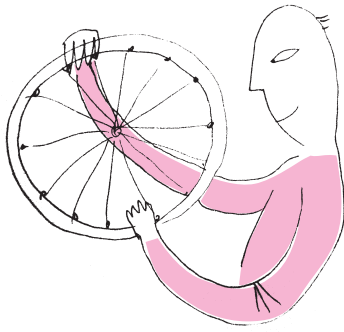
Chcemy wyliczyć  $W(x)$  w punktach  $x_0, -x_0, x_1, -x_1, \dots, x_{\frac{n}{2}}, -x_{\frac{n}{2}}$ . Wystarczy nam w tym celu wartości  $W_e$  i  $W_o$  w punktach  $x_0^2, x_1^2, \dots, x_{\frac{n}{2}}^2$ . Te moglibyśmy policzyć rekurencyjnie, mamy jednak problem: teraz wszystkie  $\frac{n}{2}$  punktów to kwadraty, więc wyglądają tak dodatnio, jak się tylko da, i trudno będzie je ułożyć w pary liczb przeciwnych. Chyba że rozszerzymy dziedzinę na zbiór liczb zespolonych. . .

Tak odkrywamy Błyskotliwy Trik numer 2 – jako punkty ewaluacji wielomianu bierzemy  $n$  zespolonych pierwiastków z jedności!

Rysunki na marginesie przedstawiają pierwiastki 16 stopnia z jedności na płaszczyźnie zespolonej. Liczby z jednego półokręgu są przeciwne do liczb z drugiego półokręgu, zaś podniesione do kwadratu dają cały okrąg, na którym punkty rozmieszczone są dwa razy rzadziej. Czyli mamy obie cechy, na których tak nam zależało! Fantastyczna sprawa.

Możemy teraz napisać pseudokod, który zrobi szybką ewaluację wielomianu w pierwiastkach z jedności:

```
EWALUUJ SZYBK([w0, ..., wn-1])
IF n = 1 THEN
  RETURN [w0]
[(ye)0, ..., (ye)(n/2-1)] = EWALUUJ SZYBK([w0, w2, ..., wn-2])
[(yo)0, ..., (yo)(n/2-1)] = EWALUUJ SZYBK([w1, w3, ..., wn-1])
FOR i ← 0 TO n/2 - 1 DO
  yi ← (ye)i + ωi · (yo)i
  yi+n/2 ← (ye)i - ωi · (yo)i
RETURN [y0, ..., yn-1]
```



Algorytm jest zwięzły i niezwykle estetyczny, a do tego działa satysfakcjonująco szybko: składają się nań  $O(n)$  operacji i dwa obliczenia rekurencyjne. Mamy więc następujące równanie na liczbę operacji:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n).$$

Rekursja ta schodzi na  $\log n$  poziomów, na każdym poziomie jest do wykonania  $O(n)$  operacji, więc całość działa w czasie  $O(n \log n)$ . Wiwat!

Nie możemy jednak spocząć na laurach, bo jesteśmy dopiero w połowie drogi. Została nam wszak do wymyślenia procedura odwrotna, czyli interpolacja. Spróbujmy wydobyć na światło dzienne jeszcze jeden Błyskotliwy Trik, który pozwoli nam wykorzystać ten sam algorytm, który już mamy.

Zapiszmy zagadnienie ewaluacji w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^{2 \cdot 2} & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{(n-1) \cdot 2} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$I$  to macierz identycznościowa, czyli taka, która ma jedynki na przekątnej, a wszędzie indziej zera:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$V$  zawiera pierwiastki z jedności brane z okręgu jednostkowego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.  $V'$  zawiera te same pierwiastki, tylko brane zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Czemu przy  $j \neq i$  suma będzie 0? Interesują nas dwa przypadki:  $m = j - i > 0$  i  $m = j - i < 0$ . Drugi łatwo sprowadzić do pierwszego, bo  $\omega^{j-i} = \omega^{j-i} \cdot 1 = \omega^{j-i} \cdot \omega^n = \omega^{n-(i-j)}$ , a  $n - (i - j)$  już jest dodatnie. Kolejne potęgi  $\omega^m$  układają się na okręgu jednostkowym: zaczynamy od  $1 = \omega^0$  i skaczemy co  $m$ -ty punkt. Jeśli  $NWD(m, n) = 1$ , to zapelnimy cały okrąg jednostkowy. Jeśli  $NWD(m, n) > 1$ , to niektóre pierwiastki będą powtórzone  $NWD(m, n)$  razy, a inne nie będą odwiedzone wcale. Tak czy inaczej, stworzymy jakiś nowy, kompletny zbiór pierwiastków z jedności (być może zwielokrotniony) – a taki zawsze sumuje się do zera.

Równanie to mówi tyle, że  $y_k = W(\omega^k)$  dla  $k = 0, \dots, n - 1$ . Macierz z omegami jest szczególnym przypadkiem macierzy Vandermonde'a, więc nazwijmy ją  $V$ . Powyższe równanie przybiera postać  $V \cdot \vec{W} = \vec{Y}$ . Chcielibyśmy tak je zmodyfikować, by na podstawie  $\vec{Y}$  otrzymać  $\vec{W}$ . Zgadnijmy takie  $V'$ , że  $V' \cdot V = nI$ :

$$V' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \dots & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{(-2) \cdot 2} & \dots & \omega^{(-2)(n-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-(n-1) \cdot 2} & \dots & \omega^{-(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

Sprawdźmy, że  $V' \cdot V$  rzeczywiście da  $nI$ . W  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie mamy:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-ik} \cdot \omega^{jk} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j-i)k}.$$

Jeśli  $j = i$ , to suma oczywiście jest równa  $n$ . Okazuje się, że przy  $j \neq i$  ta suma zawsze jest równa 0 (patrz margines). Zatem mamy  $V' \cdot V \cdot \vec{W} = V' \cdot \vec{Y}$ , czyli  $V' \cdot \vec{Y} = n\vec{W}$ . To równanie bardzo przypomina to, które opisywało ewaluację! Dotarliśmy do sedna Błyskotliwego Triku numer 3 – interpolację robimy *niemal dokładnie tak samo* jak ewaluację, tylko zamiast  $\omega$  weźmiemy  $\omega^{-1}$ , a wynik na końcu podzielimy przez  $n$ .

INTERPOLUJ SZYBKO( $[y_0, \dots, y_{n-1}]$ )

IF  $n = 1$  THEN  
RETURN  $[y_0]$

$[(w_e)_0, \dots, (w_e)_{\frac{n}{2}-1}] = \text{INTERPOLUJ SZYBKO}([y_0, y_2, \dots, y_{n-2}])$   
 $[(w_o)_0, \dots, (w_o)_{\frac{n}{2}-1}] = \text{INTERPOLUJ SZYBKO}([y_1, y_3, \dots, y_{n-1}])$

FOR  $i \leftarrow 0$  TO  $\frac{n}{2} - 1$  DO  
 $w_i \leftarrow (w_e)_i + \omega^{-i} \cdot (w_o)_i$   
 $w_{i+\frac{n}{2}} \leftarrow (w_e)_i - \omega^{-i} \cdot (w_o)_i$

RETURN  $[\frac{w_0}{n}, \dots, \frac{w_{n-1}}{n}]$

Teraz nasza procedura POMNÓŻ SPRYTNIE jest kompletna.

Algorytm ewaluacji w pierwiastkach z jedności nazywa się powszechnie FFT (*Fast Fourier Transform*), algorytm interpolacji to IFFT (*Inverse Fast Fourier Transform*). Szybkie mnożenie wielomianów jest tylko jednym z wielu zdumiewających zastosowań transformacji Fouriera (gorąco zachęcam do zajrzenia do  $\Delta_{19}$  po więcej szczegółów). Bez FFT nie byłoby cyfrowego przetwarzania sygnałów ani kompresji obrazów. Fascynujące jest to, że ten algorytm jest jednocześnie ogromnie przydatny i wyjątkowo piękny. To rzadki ptak!

Bardzo ciekawe jest to, że mnożenia wielomianów w czasie  $O(n \log n)$  nie umiemy uogólnić na mnożenie macierzy, a algorytmy robiące to szybciej niż w  $O(n^3)$  korzystają z zupełnie innych technik (gorąco zachęcam do zajrzenia do artykułu Michała Włodarczyka *Jak proste problemy stały się trudne* ( $\Delta_{18}$ ) po więcej szczegółów).

# Tożsamość Cauchy'ego, iloczyn Wallisa i wzór Stirlinga

\*Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza  
w Poznaniu

Bartłomiej BZDEGA\*

## Wstęp

Celem niniejszego artykułu jest wyprowadzenie wzoru Stirlinga przybliżającego  $n!$ , a przy okazji pokazanie kawałka ładnej matematyki. Umyślnie zatem nie pójdziemy najkrótszą drogą, lecz drogą, która jest możliwie elementarna i pozwala zwiedzającym rozejrzeć się od czasu do czasu.

Punktem wyjścia będzie *tożsamość Cauchy'ego*

$$(1) \quad 4^n = \sum_{i+j=n} \binom{2i}{i} \binom{2j}{j},$$

której przedstawiony tu dowód kombinatoryczny pochodzi z książki *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa* Williama Feller'a (jestem bardzo wdzięczny profesorowi Piotrowi Śniademu z Polskiej Akademii Nauk za wskazanie tego źródła).

Dowód równości w *iloczynie Wallisa*

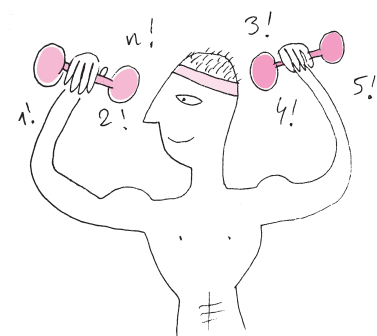
$$(2) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7 \cdot 9} \cdot \dots,$$

który tu zamieszczam, jest lekką modyfikacją dowodu z artykułu Johana Wästlunda zatytułowanego *An elementary proof of Wallis' product formula for pi*. Zmiana polega na wykorzystaniu tożsamości Cauchy'ego.

Dowód *wzoru Stirlinga*

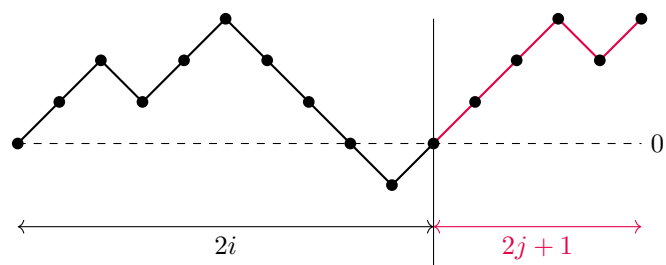
$$(3) \quad n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

korzystający z iloczynu Wallisa, zaczerpnąłem z materiałów dydaktycznych *Stirling approximation formula* profesora Jacka Cichonia z Politechniki Wrocławskiej, czyniąc gdzieś drobne uproszczenia.



## 1. Tożsamość Cauchy'ego

Lewą stronę równości (1) można zinterpretować – dość nietypowo – jako liczbę ciągów binarnych długości  $2n + 1$ , z przewagą jedynek nad zerami. Przedstawiamy je graficznie jako *szlaki górskie*, które rozpoczynają się na wysokości 0 i składają się z  $2n + 1$  *kroków* tej samej długości, wiodących w górę (odpowiednik jedynki) lub w dół (odpowiednik zera) pod kątem  $45^\circ$ . Wszystkie takie szlaki kończą się na nieparzystej wysokości powyżej poziomu 0. Na poniższym rysunku widnieje przykładowy szlak.



Liczbę kroków szlaku będziemy nazywać jego *długością*, a różnicę wysokości pomiędzy końcem i początkiem – jego *względny wysokością*. Wyróżnione punkty na szlaku możemy interpretować jako wartości funkcji określonej na pewnym zbiorze kolejnych liczb całkowitych i przyjmującej wartości całkowite. Każdy punkt znajdujący się na wysokości 0 będziemy nazywać *miejscem zerowym* szlaku, w analogii do funkcji. Oznaczmy pionową linią – *przegrodą* – ostatnie miejsce

zerowe. Dzieli ono szlak na dwie części spełniające następujące warunki:

- (C1) pierwsza część (szlak długości  $2i$ ) zaczyna się i kończy na wysokości 0;
- (C2) druga część (szlak długości  $2j + 1$ ), nie licząc początku, znajduje się całkowicie powyżej poziomu 0.

Miejscem podziału może być początek szlaku – wtedy pierwsza część zostaje zdegenerowana do punktu. Zwróćmy uwagę, że suma współrzędnych każdego punktu szlaku jest tej samej parzystości, w szczególności pierwsza część szlaku zawsze ma parzystą długość.

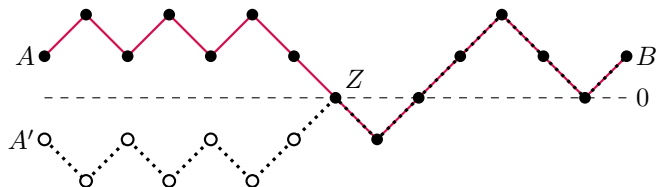
Wykażemy, że liczba szlaków z przegrodą umieszczoną tak jak na rysunku wynosi  $\binom{2i}{i} \binom{2j}{j}$ . W pierwszej części mamy  $i$  kroków w górę i tyle samo w dół, co daje dokładnie  $\binom{2i}{i}$  możliwości, nawet jeśli ta część jest zdegenerowana.

Z drugą częścią nie jest już tak łatwo. Będziemy potrzebować następującej zasady.

**Zasada odbicia.** Niech  $A = (x_a, y_a)$  i  $B = (x_b, y_b)$ , przy czym  $y_a, y_b > 0$  i  $x_a < x_b$ . Ponadto niech  $A'$  będzie punktem symetrycznym do  $A$  względem osi  $OX$ . Wówczas zbiory szlaków:

- $S_1$  – łączących  $A$  i  $B$  mających co najmniej jedno miejsce zerowe,
- $S_2$  – wszystkich łączących  $A'$  i  $B$  są równoliczne.

*Dowód.* Na każdym szlaku  $s \in S_1$  odnajdziemy jego pierwsze miejsce zerowe  $Z$ , następnie odbijmy część od  $A$  do  $Z$  symetrycznie względem osi  $OX$ . Złączając odbitą część z pozostałą, otrzymamy szlak  $f(s)$ , na rysunku zaznaczony linią przerywaną.



Z drugiej strony, każdy szlak  $s' \in S_2$  zaczyna się poniżej zera, a kończy powyżej, więc ma miejsce zerowe (można to nazwać *dyskretną własnością Darboux*). Możemy więc, analogicznie jak dla szlaku  $s \in S_1$ , odbić względem osi  $OX$  część szlaku  $s'$  od  $A'$  do pierwszego miejsca zerowego. Tak określone odwzorowanie jest odwrotne do  $f$ . To dowodzi, że  $f$  jest bijekcją, więc  $|S_1| = |S_2|$ .  $\square$

Oznaczmy przez  $S_{u,d}$  zbiór szlaków o  $u$  krokach w górę i  $d$  krokach w dół, które rozpoczynają się w ustalonym punkcie. Oczywiście  $|S_{u,d}| = \binom{u+d}{u}$ . Nas interesuje liczba szlaków rozpoczynających się w punkcie  $O$ , bez miejsc zerowych poza nim. Zbiór takich szlaków oznaczmy przez  $S_{u,d}^*$ , przy czym  $u$  i  $d$  określamy jak wyżej. Poniższe twierdzenie mówi nam, ile ich jest.

**Twierdzenie Bertranda.** *Zachodzi równość*

$$|S_{u,d}^*| = \frac{u-d}{u+d} \binom{u+d}{d}.$$

*Dowód.* Każdy szlak  $s \in S_{u,d}^*$  zaczyna się krokiem w górę, możemy więc rozważać szlaki mające początek w punkcie  $A = (1,1)$  i koniec w  $B = (u+d, u-d)$ . Wszystkich takich szlaków jest  $|S_{u-1,d}| = \binom{u+d-1}{d}$  (wykorzystaliśmy jeden krok w górę, by dojść do  $A$ ). Liczba wszystkich szlaków od  $A' = (1,-1)$  do  $B$  jest równa  $|S_{u,d-1}| = \binom{u+d-1}{d-1}$ . Na mocy zasady odbicia taka sama jest liczba szlaków od  $A$  do  $B$  mających miejsca zerowe. Z tego wynika, że

$$(4) \quad |S_{u,d}^*| = \binom{u+d-1}{d} - \binom{u+d-1}{d-1},$$

co po prostych rachunkach daje tezę.  $\square$

Tu warto wspomnieć o liczbach Catalana. Można je definiować na wiele sposobów, między innymi za pomocą szlaków. Liczbę szlaków długości  $2n$ , rozpoczynających się i kończących na wysokości 0, bez punktów poniżej 0, oznaczamy przez  $C_n$ . Jeśli na początku takiego szlaku dołożymy krok w górę, otrzymamy szlak, który po wyjściu z punktu startowego nigdy nie wraca do jego poziomu, zatem  $C_n = |S_{n+1,n}^*|$ . Z twierdzenia Bertranda

$$C_n = |S_{n+1,n}^*| = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Wróćmy do dowodu tożsamości Cauchy'ego. Liczba wszystkich szlaków spełniających warunek (C2) jest na mocy (4) równa sumie

$$\sum_{k \geq 0} |S_{j+k+1, j-k}^*| = \sum_{k \geq 0} \left( \binom{2j}{j-k} - \binom{2j}{j-k-1} \right),$$

która, niczym teleskop, składa się do  $\binom{2j}{j}$ .

Pora na krótkie podsumowanie. Łączna liczba szlaków rozpoczynających się na wysokości 0 i kończących na dodatniej wysokości, mających długość  $2n+1$ , jest równa  $4^n$ . Liczba takich szlaków z przegrodą po  $2i$  krokach jest równa  $\binom{2i}{i} \binom{2j}{j}$ , więc  $4^n$  jest sumą takich liczb po całkowitych nieujemnych  $i, j$ , spełniających równość  $i+j=n$ . To kończy dowód tożsamości Cauchy'ego.

## 2. Iloczyn Wallisa

Ciąg iloczynów częściowych

$$(5) \quad W_n = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

jest rosnący, gdyż wszystkie czynniki są większe od 1.

Z analogicznej przyczyny ciąg

$$W'_n = \frac{2n+2}{2n+1} W_n = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdots \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2}$$

jest malejący. Ponadto  $W'_n/W_n \rightarrow 1$  przy  $n \rightarrow \infty$ , więc te ciągi mają wspólną granicę  $W$  oraz

$$(6) \quad W_n < W < W'_n = \frac{2n+2}{2n+1} W_n.$$

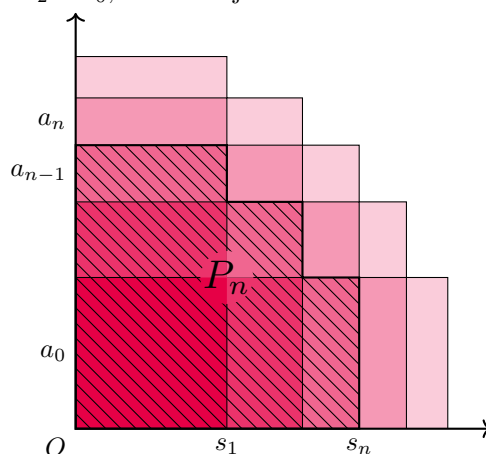
Wykorzystamy tożsamość Cauchy'ego do obliczenia granicy  $W$ . Dla liczb całkowitych nieujemnych  $n$  określamy

$$a_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Na mocy tożsamości Cauchy'ego ciąg  $(a)$  spełnia równanie

$$a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0 = 1.$$

Ma to ciekawą interpretację graficzną. Rozważmy pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych i umieścmy w niej kwadrat o boku  $a_0$  (warstwa nr 0). Obudujmy go dwoma prostokątami o wymiarach  $a_0 \times a_1$  i  $a_1 \times a_0$  (warstwa nr 1). Kontynuujemy z prostokątami  $a_0 \times a_2$ ,  $a_1 \times a_1$  i  $a_2 \times a_0$ , i tak dalej.



Niech  $P_n$  będzie wielokątem utworzonym z warstw od 0 do  $n-1$ . Skoro każda warstwa ma pole 1, to pole  $P_n$  jest równe  $n$ . Na pierwszy rzut oka im większe  $n$ , tym bardziej wielokąt  $P_n$  przypomina ćwiartkę koła o promieniu

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}.$$



Wykażemy, że to nie jest przypadek. Dla wygody przyjmijmy  $s_0 = 0$ , a wtedy:

**Lemat 1.** Dla  $n \geq 0$  zachodzi równość  $s_n = \frac{2n}{4^n} \binom{2n}{n}$ .

*Dowód.* Dla  $n = 0$  jest to oczywiste. Krok indukcyjny jest jednoliniowy:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + a_n = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n} = \\ &= \frac{2n+2}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Pora, by wkroczył do akcji iloczyn Wallisa. Mnożąc licznik i mianownik w iloczynie (5) przez  $2^{2n}(n!)^2$ , otrzymamy

$$(7) \quad W_n = \frac{4^{2n}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2} = \frac{4^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}^2},$$

więc z lematu 1 wynika, że  $s_n^2 W_n = \frac{4n^2}{2n+1}$ . Korzystając z nierówności (6), otrzymujemy

$$2n-1 < s_n^2 W_n < s_n^2 W < \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{4n^2}{2n+1} < 2n.$$

Nie licząc punktu  $O$ , wierzchołkami wielokąta  $P_n$  są punkty  $A_{i,j} := (s_i, s_j)$ , w których  $i+j = n$  lub  $i+j = n+1$ . Oczywiście  $|OA_{i,j}|^2 = s_i^2 + s_j^2$ . Na mocy powyższych nierówności mamy

$$\begin{aligned} \frac{2n-2}{W} &\leq \frac{2i-1}{W} + \frac{2j-1}{W} < |OA_{i,j}|^2 < \\ &< \frac{2i}{W} + \frac{2j}{W} \leq \frac{2n+2}{W}, \end{aligned}$$

więc wspomniane wierzchołki leżą między okręgami o wspólnym środku  $O$  i promieniach  $\sqrt{2(n \pm 1)/W}$ . Pole wielokąta  $P_n$  szacuje się zatem z góry i z dołu przez pola ćwiartek kół o takich promieniach. Przypomnijmy, że wielokąt  $P_n$  ma pole  $n$ , więc

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2(n-1)}{W} < n < \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2(n+1)}{W},$$

a po przekształceniu

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < W < \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Przechodząc z  $n$  do nieskończoności, otrzymujemy  $W = \pi/2$ .

### 3. Wzór Stirlinga

Dla  $n > 0$  określamy

$$f(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n.$$

W kolejnych lematy udowodnimy, że istnieje granica  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n!) - f(n))$ . W tym celu wprowadzamy funkcje pomocnicze

$$\begin{aligned} r(k) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1, \\ R(n) &= \sum_{k=1}^{n-1} r(k). \end{aligned}$$

Dobór tych funkcji uzasadnia poniższy lemat.

**Lemat 2.** Zachodzi równość

$$1 - R(n) = \ln(n!) - f(n)$$

dla wszystkich całkowitych  $n \geq 1$ .

*Dowód.* Dla  $n = 1$  mamy równości  $1 - R(1) = 1 - 0 = 1$  oraz  $\ln(1!) - f(1) = 0 - \frac{1}{2} \ln 1 + 1 = 1$ . Indukcyjnie,

$$\begin{aligned} 1 - R(n+1) &= 1 - R(n) - r(n) = \\ &= \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = \\ &= \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) + n + 1 = \\ &= \ln((n+1)!) - \left(n+1 + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) + n + 1 = \\ &= \ln((n+1)!) - f(n+1), \end{aligned}$$

co kończy dowód.  $\square$

Aby pójść dalej, potrzebujemy dość dokładnego oszacowania wartości funkcji logarytmicznej.

**Lemat 3.** Dla każdego  $x \geq 0$  zachodzą nierówności

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

*Dowód.* Są one równościami, gdy  $x = 0$ , więc wystarczy udowodnić nierówności między pochodnymi

$$\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)' \leq (\ln(1+x))' \leq \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)',$$

równoważnie  $1-x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1-x+x^2$ . Ostatnie nierówności otrzymujemy z podzielenia oczywistych nierówności  $1-x^2 \leq 1 \leq 1+x^3$  przez  $1+x$ .  $\square$

**Lemat 4.** Istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)$ .

*Dowód.* Na mocy lematu 3:

$$\begin{aligned} r(k) &\geq \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right) - 1 = -\frac{1}{4k^2}, \\ r(k) &\leq \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3}\right) - 1 = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3} \leq \\ &\leq \frac{1}{4k^2}. \end{aligned}$$

Szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  jest zbieżny, gdyż

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2.$$

Mamy  $|r(k)| \leq \frac{1}{4k^2}$ , więc na mocy kryterium porównawczego szereg  $\sum_{k=1}^{\infty} |r(k)|$  jest zbieżny. To dowodzi zbieżności szeregu  $\sum_{k=1}^{\infty} r(k)$ , co jest równoważne tezie lematu.  $\square$

Z lematów 2 i 4 wynika, że istnieją również granice

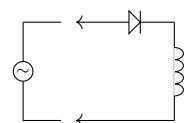
$$\begin{aligned} g &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - R(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n!) - f(n)), \\ G &= e^g = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(n!) - f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Ostatnia prosta! Granicę  $G$  obliczymy za pomocą iloczynu Wallisa, przy wykorzystaniu równości (7):

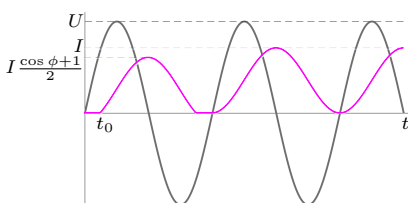
$$\begin{aligned} G &= \frac{G^2}{G} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}\right)^2}{\left(\frac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \sqrt{\frac{2}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n} (2n+1) W_n} = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

To kończy dowód wzoru Stirlinga.

## Klub 44 F



Rys. 1



Rys. 2

**Rozwiązanie zadania M 1719.**

Pokażemy indukcyjnie, jak ustawić liczby naturalne w nieskończony ciąg tak, aby każda suma co najmniej dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu nie była liczbą pierwszą.

Weźmy  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ . Załóżmy, że skończony ciąg  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n > 1$ ) spełniający postulowany warunek został już skonstruowany, i niech  $m$  będzie najmniejszą liczbą naturalną, która nie jest wyrazem tego ciągu.

Wprowadźmy oznaczenie

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + m$$

i niech  $a_{n+1} = S!$  oraz  $a_{n+2} = m$ . Ciąg  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, a_{n+2}$  również spełnia żądany warunek. Rzeczywiście każda suma zawierająca wyraz  $a_{n+1}$  jest równa  $S! + k$ , dla pewnego  $1 < k \leq S$ , i nie jest liczbą pierwszą, ponieważ jest podzielna przez  $k$ .

Kontynuując tę konstrukcję, otrzymujemy ciąg nieskończony spełniający założenie indukcyjne. Z konstrukcji wynika również, że każda liczba naturalna pojawia się w tym ciągu dokładnie raz.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
730 ( $WT = 2,4$ ), 731 ( $WT = 2,25$ )  
732 ( $WT = 1,64$ ) i 733 ( $WT = 3,06$ )  
z numerów 1, 2/2022

Ryszard Baniewicz	Włocławek	43,64
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Tomasz Wietecha	Tarnów	15 - 41,05
Sławomir Buć	Mystków	39,50
Piotr Adamczyk	Warszawa	1 - 36,96
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Jacek Konieczny	Poznań	33,42
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96
Marian Lupieżowicz	Gliwice	2 - 29,78

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**Rozwiązania zadań z numeru 4/2022**

Przypominamy treść zadań:

**736.** Cewkę o indukcyjności  $L$  połączoną szeregowo z idealną diodą podłączono w chwili  $t_0$  do źródła napięcia przemiennego  $u = U \sin \omega t$  (rys. 1). Znaleźć natężenie prądu w cewce w funkcji czasu. Opory omowe zaniedbujemy.

**737.** Lodówka utrzymuje w zamrażalniku stałą temperaturę  $-12^\circ\text{C}$ . Gdy temperatura w pokoju wynosi  $25^\circ\text{C}$ , silnik włącza się co 8 minut, pracuje 5 minut, po czym następuje pauza. Jak często i na jak długo będzie włączać się lodówka, gdy temperatura w pokoju obniży się do  $15^\circ\text{C}$ ? Przy jakiej maksymalnej temperaturze w pokoju lodówka może utrzymać w zamrażalniku zadaną temperaturę? Zakładamy, że lodówka jest idealną maszyną cieplną.

**736.** Jeżeli w chwili podłączenia do źródła napięcie jest ujemne, czyli włączone w kierunku zaporowym dla diody, prąd nie popłynie aż do chwili, gdy napięcie zmieni znak.

Rozważmy więc przypadek, gdy w chwili podłączenia napięcie źródła jest nieujemne i wynosi  $U \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi = \omega t_0 \leq \pi$ . Równanie Kirchhoffa dla naszego obwodu ma postać  $U \sin \omega t = L di/dt$ , a jego rozwiązanie

$$(1) \quad i = -U \cos \omega t / (L\omega) + \text{const.}$$

Stałą wyznaczamy z warunku początkowego  $\omega t_0 = \varphi$  oraz  $i = 0$  i otrzymujemy

$$(2) \quad i = U(\cos \varphi - \cos \omega t) / (L\omega).$$

Natężenie prądu rośnie do chwili, gdy  $\omega t = \pi$  i napięcie źródła spada do zera. Mimo zmiany znaku źródła napięcia prąd w obwodzie nadal płynie kosztem energii pola magnetycznego zmagazynowanej w cewce. Jego natężenie maleje do zera, gdy  $\omega t = 2\pi - \varphi$ . Prąd przestaje płynąć aż do momentu, gdy rosnące napięcie źródła ponownie osiąga wartość zero. Wtedy  $\omega t = 2\pi$ , a równanie (2) ma postać

$$(3) \quad i = U(1 - \cos \omega t) / (L\omega).$$

Odtąd dioda cały czas pozostaje otwarta, a natężenie prądu zmienia się od zera do  $2U/L\omega$ , co ilustruje rysunek 2.

**737.** Wprowadźmy oznaczenia:  $T_1$  – początkowa temperatura w pokoju w skali bezwzględnej,  $T_2$  – ustalona temperatura zamrażalnika,  $\tau_1 = 5$  min – czas pracy silnika w jednym cyklu,  $\tau_2 = 3$  min – czas trwania pauzy,  $W$  – praca wykonana przez silnik w jednym cyklu,  $Q_2$  – ciepło pobrane z zamrażalnika w czasie pracy silnika.

Ponieważ zakładamy, że mamy do czynienia z idealną maszyną chłodzącą, zachodzi związek

$$W/Q_2 = \Delta T/T_2, \quad \text{gdzie } \Delta T = T_1 - T_2,$$

stąd

$$(1) \quad T_2 = Q_2 \Delta T / W.$$

Temperatura zamrażalnika nie zmienia się, więc ciepło pobrane z zamrażalnika w wyniku pracy silnika równe jest ciepłu dostarczonemu do zamrażalnika i jest proporcjonalne do czasu trwania cyklu i różnicy temperatur  $Q_2 \sim (\tau_1 + \tau_2) \Delta T$ , natomiast praca wykonana przez silnik  $W \sim \tau_1$ . Podstawiając to do równania (1), otrzymujemy

$$T_2 \sim (\tau_1 + \tau_2) (\Delta T)^2 / \tau_1.$$

Oznaczając przez  $\tau_1'$  i  $\tau_2'$  czasy pracy silnika i pauzy po obniżeniu temperatury pokoju do  $T_1'$ , możemy napisać

$$(2) \quad (\tau_1 + \tau_2) (\Delta T)^2 / \tau_1 = (\tau_1' + \tau_2') (\Delta T')^2 / \tau_1', \quad \text{gdzie } \Delta T' = T_1' - T_2.$$

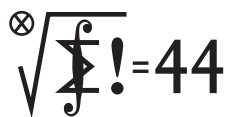
Gdy silnik nie pracuje, szybkość przepływu ciepła z pokoju do zamrażalnika jest proporcjonalna do różnicy temperatur, stąd

$$(3) \quad \tau_2 \Delta T = \tau_2' \Delta T'.$$

Z równań (2) i (3) otrzymujemy:  $\tau_1' = 2$  min,  $\tau_2' = 4,1$  min. Maksymalną możliwą temperaturę w pokoju znajdujemy z warunku  $\tau_2'' = 0$  (silnik pracuje cały czas).

$$\Delta T_{\max} = \Delta T \sqrt{8/5} = 45,8 \text{ K}, \quad t_{\max} = 34,8^\circ\text{C}.$$

# Klub 44 M

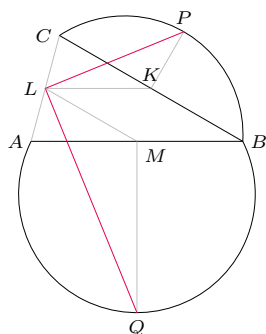


Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 833 (WT = 3,29) i 834 (WT = 1,24) z numeru 1/2022

Witold Bednarek	Łódź	42,13
Kacper Morawski	Warszawa	42,07
Andrzej Kurach	Ryjewo	41,81
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Marek Spychała	Warszawa	38,66
Paweł Najman	Kraków	37,33
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Michał Adamaszek	Kopenhaga	33,29
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,34



## Rozwiązanie zadania M 1717.



Niech  $P$  i  $Q$  oznaczają środki łuków odcinków kołowych odpowiednio  $BC$  i  $AC$ . Niech  $K, L$  i  $M$  będą środkami odcinków odpowiednio  $BC, CA$  i  $AB$ . Wtedy z twierdzenia o linii środkowej w trójkącie mamy

$$\sphericalangle PKL = 90^\circ + \sphericalangle CKL = 90^\circ + \sphericalangle CBA = 90^\circ + \sphericalangle LMA = \sphericalangle LMQ.$$

Ponadto również

$$LK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = LM.$$

Z równości

$$\sphericalangle KPB = \frac{1}{2}\sphericalangle CPB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BQA) = \sphericalangle MBQ$$

wynika, że trójkąty prostokątne  $BKP$  oraz  $QMB$  są podobne, więc  $\frac{KP}{MB} = \frac{KB}{MQ}$ . Wobec tego

$$\frac{KP}{KL} = \frac{KB}{MB} = \frac{KB}{MQ} = \frac{ML}{MQ}.$$

Łącząc powyższą równość z równością kątów  $PKL$  i  $LMQ$ , wnioskujemy, że trójkąty  $PKL$  i  $LMQ$  są podobne. W szczególności  $\sphericalangle QLM = \sphericalangle LPK$ . Zatem

$$\sphericalangle QLP = \sphericalangle QLM + \sphericalangle MLK + \sphericalangle KLP = \sphericalangle QLM + \sphericalangle LMA + \sphericalangle MQL = 90^\circ.$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

## Rozwiązania zadań z numeru 4/2022

Przypominamy treść zadań:

**839.** Funkcja  $f$  (zmiennej rzeczywistej) nazywa się *wypukła* w przedziale  $J$ , gdy dla każdej pary punktów  $x, y \in J$  oraz dla każdej pary liczb  $p, q \geq 0$ , których suma wynosi 1, zachodzi nierówność  $f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y)$ .

Niech będą dane funkcje  $f, F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  związane zależnością  $F(x) = xf(1/x)$ . Udowodnić, że w przedziale  $(0, \infty)$  funkcja  $F$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja  $f$  jest wypukła.

**840.** Dane są liczby naturalne  $n, k > 1$ . Niech  $M = 1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}$ .

- (a) Dowieść, że jeśli  $M \equiv 1 \pmod{n}$ , to  $k^{M-1} \equiv 1 \pmod{M}$ .  
 (b) Wyjaśnić, czy zachodzi implikacja odwrotna (do podanej w części (a)).

**839.** W równaniu wiążącym funkcje  $f$  i  $F$  podstawiamy  $x = 1/z$ ; otrzymujemy  $f(z) = zF(1/z)$ . To pokazuje, że zależność  $f$  od  $F$  wyraża się tym samym wzorem, co zależność  $F$  od  $f$ . Stąd wniosek, że dla dowodu równoważności (z tezy zadania) wystarczy wykazać wynikanie w jedną stronę: że z wypukłości  $f$  wynika wypukłość  $F$ ; czyli że z własności

$$(1) \quad f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y) \quad \text{dla } x, y > 0; \quad p, q \geq 0; \quad p + q = 1$$

wynika analogiczna własność

$$(2) \quad F(PX + QY) \leq PF(X) + QF(Y) \quad \text{dla } X, Y > 0; \quad P, Q \geq 0; \quad P + Q = 1.$$

Przyjmijmy więc założenie (1); weźmy dowolne liczby  $X, Y > 0, P, Q \geq 0$  takie, że  $P + Q = 1$ , i podstawmy w (1):

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y}, \quad p = \frac{PX}{PX + QY}, \quad q = \frac{QY}{PX + QY}$$

(więc  $p + q = 1$ ). Wychodzi

$$f\left(\frac{P}{PX + QY} + \frac{Q}{PX + QY}\right) \leq \frac{PX}{PX + QY} f\left(\frac{1}{X}\right) + \frac{QY}{PX + QY} f\left(\frac{1}{Y}\right),$$

co (wobec równości  $P + Q = 1$ ) przepisujemy w postaci

$$(PX + QY)f\left(\frac{1}{PX + QY}\right) \leq PX \cdot f\left(\frac{1}{X}\right) + QY \cdot f\left(\frac{1}{Y}\right).$$

A ponieważ  $tf(1/t) = F(t)$ , jest to dokładnie nierówność (2), którą chcieliśmy udowodnić.

**840.** Przedmiotem rozważań są warunki:

$$(3) \quad M \equiv 1 \pmod{n}$$

oraz

$$(4) \quad k^{M-1} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Nie zakładając spełnienia któregośkolwiek z nich, zauważamy, że dla dowolnych liczb naturalnych  $n, k > 1$  oraz dla liczby  $M$  (określonej w zadaniu) zachodzi równość  $(k - 1)M = k^n - 1$ , wobec czego  $k^n \equiv 1 \pmod{M}$ . Dzielimy  $M - 1$  przez  $n$  (z resztą); czyli piszemy

$$(5) \quad M - 1 = qn + r \quad (0 \leq r < n).$$

Zatem

$$(6) \quad k^{M-1} = k^{qn} k^r \equiv k^r \pmod{M}.$$

I teraz:

(a) Jeżeli spełniony jest warunek (3), to  $r = 0$ , więc dowodzona zależność (4) wynika wprost ze związku (6).

(b) Odpowiedź *tak*; bowiem jeśli spełniony jest warunek (4), to (zgodnie z (6))

$$(7) \quad k^r \equiv 1 \pmod{M}.$$

Liczba  $k^r$  jest jednym ze składników sumy definiującej  $M$ , więc  $1 \leq k^r < M$ , co (wobec (7)) oznacza, że  $k^r = 1$ . Tak więc  $r = 0$  i z równości (5) wynika (3).

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Jak wakacje, to na parterze

Przesunięcie ku czerwieni może być interpretowane jako konsekwencja zasady równoważności (gravitacja i przyspieszenie są równoważne) lub jako konsekwencja równoważności masy i energii („spadające” w polu grawitacyjnym fotony zyskują energię, a „wspinające się” w dolku potencjału grawitacyjnego tracą energię).

Zasada działania zegara atomowego polega na zliczaniu okresów atomowego wzorca częstotliwości. Wzorem jest na przykład stabilna własność emisyjna atomów uwzględniająca strukturę nadsubtelną atomów (jest to rozszczepienie poziomów energii fotonów emitowanych przez elektrony, których spinowe momenty magnetyczne oddziałują z momentem magnetycznym jądra atomowego).

Zmiana częstotliwości  $f$  w potencjale  $U$  to, w przybliżeniu,

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{\Delta U}{c^2} \approx \frac{g\Delta h}{c^2},$$

gdzie  $\Delta h$  to różnica wysokości w stałym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu  $g$ .

Siatka optyczna powstaje w wyniku interferencji przeciwbieżnie rozchodzących się wiązek laserowych, tworząc przestrzennie periodyczny wzór polaryzacji. W powstałym w ten sposób potencjale okresowym może uwięzić schłodzone do prawie 0 K atomy dzięki efektowi Starka (zasada działania pułapki polega na tym, że światło niebędące w rezonansie powoduje przesunięcia w wewnętrznej strukturze atomu i powstanie potencjału proporcjonalnego do natężenia, co utrzymuje atomy w oczkach siatki). Atomy pobudza się następnie do świecenia specjalnym laserem.

*Resolving the gravitational redshift within a millimeter atomic sample,* T. Bothwell et al., *Nature* **602** 420 (2022)

## Niebo w sierpniu

Sierpień jest pierwszym miesiącem roku z szybko ubywającym dniem i wydłużającą się nocą. Przez cały miesiąc Słońce obniży wysokość górowania o  $10^\circ$  i zmniejszy czas przebywania nad widnokregiem o prawie dwie godziny. Dalszemu pogorszeniu ulega także nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokregu. Jednocześnie zwiększa się jej nachylenie o świcie. Na naszych szerokościach geograficznych objawi się

Ogólna teoria względności stwierdza, że zegary znajdujące się w różnych potencjałach grawitacyjnych tykają w różnym tempie w porównaniu do siebie (lub do zegara „referencyjnego”). Efekt ten znany jest jako grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni (*gravitational redshift*) i został po raz pierwszy opisany przez Alberta Einsteina w 1907 roku, czyli osiem lat przed opublikowaniem przez niego ogólnej teorii względności. W 1971 roku fizyk Joseph C. Hafele i astronom Richard E. Keating wysłali w podróż dookoła świata na pokładach zwykłych rejsowych samolotów kilka zegarów atomowych (cezowych), aby wykryć różnice między wskazaniem zegarów „podróżujących” a wskazaniem analogicznego zegara znajdującego się w laboratorium, zgodne ze szczególną i ogólną teorią względności. Aktualnie zegary atomowe osiągnęły niepewność systematyczną rzędu  $10^{-18}$ , odpowiadającą błędowi mniejszemu niż 1 s w okresie od momentu Wielkiego Wybuchu do teraz (dla porównania, zwykły zegarek kwarcowy, np. mój Casio F-91W, gubi średnio 1 s na dzień).

Równoważnie efekt przesunięcia ku czerwieni rozumiemy jako grawitacyjną dylatację czasu: jeśli dwa takie same źródła promieniowania elektromagnetycznego znajdują się w różnych potencjałach grawitacyjnych, źródło w wyższym potencjale (dalej od ciała przyciągającego) będzie wydawało się świecić bardziej niebiesko (będzie „tykać” szybciej). Z punktu widzenia ustalonego obserwatora źródło będzie miało wyższą mierzoną częstotliwość niż źródło bliżej ciała przyciągającego: czas płynie wolniej na parterze, a szybciej na pierwszym piętrze. Kolor fotonów opisuje więc tempo przepływu czasu, a dostatecznie precyzyjny zegar otrzymany w ten sposób można wykorzystać wprost do badania czasoprzestrzeni.

I tak na przykład w 2020 roku grupa z RIKEN w Japonii, pod kierunkiem Hidetoshiego Katoriego, porównała dwa strontowe zegary wykorzystujące siatki optyczne (*optical lattice clocks*, OLC) odległe od siebie o 450 m, umieszczone w wieży Tokyo Skytree. Badacze uzyskali jeden z najbardziej precyzyjnych ziemskich pomiarów przesunięcia ku czerwieni (w eksperymencie Roberta Pounda i Glena A. Rebki Jr. z 1959 roku – z oczywistych względów mniej dokładnym, w którym po raz pierwszy zmierzono ten efekt, budynek laboratorium Jeffersona w kampusie Harvarda miał zaledwie trzy piętra).

Obecne zegary „siatkowe” stały się tak dokładne, że możliwe są pomiary zmiany przyspieszenia grawitacyjnego w odległościach rzędu milimetra! W pracy Bothwell et al. (2022) (link poniżej), korzystając z technik OLC (100 tys. atomów  $^{87}\text{Sr}$  w temperaturze około 100 nK), zademonstrowano pomiar przesunięcia ku czerwieni oraz względną dokładność pomiaru częstotliwości rzędu ułamkowej niepewności częstotliwości  $7 \cdot 10^{-21}$  pomiędzy dwoma nieskorelowanymi próbkami w jednowymiarowej siatce ustawionej pionowo względem powierzchni ziemi. W przyjętym układzie współrzędnych przesunięciu grawitacyjnemu odpowiada gradient częstotliwości wynoszący  $-1,09 \cdot 10^{-19} \text{ mm}^{-1}$ , natomiast finalny wynik pomiaru to  $-9,8(2,3) \cdot 10^{-20} \text{ mm}^{-1}$ .

Pomiar ten jest dużym krokiem w kierunku badania grawitacji w małych skalach, w dziedzinie najtrudniejszej, czyli na przecięciu ogólnej teorii względności i mechaniki kwantowej – dwóch teorii, których opis w jednym języku jest od dziesięcioleci legendarnie trudnym problemem. Praktyczne zastosowania natomiast to dużo dokładniejsze niż do tej pory satelitarne pomiary okolicznego potencjału grawitacyjnego, czyli geoidy Ziemi.

*Michał BEJGER*

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy, Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

to szczególnie w (nie)widoczności planety **Merkury**, która 27 sierpnia osiągnie bardzo dużą elongację wschodnią, wynoszącą ponad  $27^\circ$ . Jednak pomimo tak dużej odległości kątowej od Słońca planeta zajdzie tego dnia zaledwie pół godziny po nim i zginie w zorzy wieczornej. Wystarczy jednak udać się w obszar szerokości geograficznej wynoszącej  $35^\circ \text{N}$ , albo jeszcze bardziej na południe, by dostrzeżenie Merkurego nie stanowiło



kłopotu. W tej części świata Merkury stanie się ozdobą wieczornego nieba na ponad miesiąc.

Również warunki obserwacyjne Księżyca przez pierwszą część miesiąca pozostaną niezadowalające. W pierwszej dekadzie sierpnia Srebrny Glob ledwo przekroczy wysokość  $10^\circ$  nad widnokregiem, dążąc od I kwadry 5 dnia miesiąca do pełni tydzień później. W tym okresie warto odnotować: zbliżenie się Księżyca w fazie 33% na niecałe  $5^\circ$  do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, 3 sierpnia, I kwadrę 5 sierpnia, koniunkcję  $0,5^\circ$  z gwiazdą Dschubba tuż przed zachodem obu ciał niebieskich dobę później oraz zbliżenie na  $5^\circ$  do Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona, 7 sierpnia. Podczas dwóch kolejnych dni tarcza Księżyca zwiększy fazę do 92% i dotrze na  $3^\circ$  do Nunki, jednej z jaśniejszych gwiazd Strzelca. Tej nocy Księżyc zakryje gwiazdę 3. wielkości  $\tau$  Sgr. Niestety do zakrycia dojdzie kilkanaście minut po godzinie 20, a zatem tuż po zachodzie Słońca, na jeszcze jasnym niebie. Księżyc odsłoni tę gwiazdę dopiero później, gdy niebo wciąż pozostanie jasne, zwłaszcza w północno-zachodniej części kraju.

W nocy z 11 na 12 sierpnia Księżyc przejdzie przez pełnię i jednocześnie zbliży się do **Saturna** na nieco ponad  $6^\circ$ . Złączenie jakiegoś ciała niebieskiego z Księżycem w pełni oznacza, że owe ciało jest bliskie opozycji do Słońca. I tak właśnie jest z Saturnem. Planeta przejdzie przez tę konfigurację 14 sierpnia. Oznacza to, że Saturn w sierpniu jest najbliżej Ziemi, a w związku z tym ma największą jasność i rozmiary kątowe. W tym roku planeta osiągnie jasność  $+0,3^m$  i średnicę kątową  $19''$ , a podczas górowania wzniesie się na wysokość  $23^\circ$ . W sierpniu Saturn wędruje niewiele ponad  $1,5^\circ$  na północ od dwóch jasnych gwiazd Koziorożca: Deneb Algiedi ( $\delta$  Cap) i Nashira ( $\gamma$  Cap).

Pełnia 12 sierpnia oznacza także bardzo słabe warunki obserwacyjne corocznego słynnego roju meteorów Perseidów. Gdyby nie obecność Księżyca na niebie, tej i kolejnej nocy można by liczyć na ponad 100 jasnych meteorów na godzinę. Niestety tym razem większość z nich zginie w księżycowej łunie, da się dostrzec tylko najjaśniejsze z nich. Przy obserwacjach roju Perseidów najlepiej odwrócić się plecami do Księżyca.

Następnej nocy faza Srebrnego Globu nieznacznie się zmniejszy, do 99%, a jego tarcza przejdzie  $3^\circ$  na północ od planetoidy (4) Westa, najjaśniejszej planetoidy na naszym niebie. W trzecim tygodniu miesiąca, 23 sierpnia, Westa przejdzie przez opozycję względem Słońca, osiągając wtedy jasność nawet  $+5,8^m$ , czyli porównywalnie do planety Uran. W sierpniu Westa przemierzy około  $7^\circ$  w kierunku południowo-zachodnim na tle gwiazdozbioru Wodnika, jakieś  $11^\circ$  na południowy wschód od wspomnianej już wyżej gwiazdy Deneb Algiedi, a 29 sierpnia planetoida przejdzie zaledwie  $11'$  od gwiazdy 5. wielkości 41 Aqr. Oczywiście pełnia Księżyca uniemożliwi jej obserwację. Na szukanie Westy wśród gwiazd należy przeznaczyć początek lub koniec miesiąca.

Po pełni naturalny satelita Ziemi wreszcie zacznie wspinać się wyżej. Księżyc przetnie południk lokalny 15 sierpnia na wysokości  $35^\circ$ , zajmując pozycję między planetami **Jowisz** i **Neptun**. Do pierwszej z wymienionych planet Księżycowi zabraknie  $6^\circ$ , do drugiej  $8^\circ$ . W sierpniu jasność największej planety Układu Słonecznego zwiększy się

do  $-2,9^m$ , średnica tarczy zaś urośnie do  $49''$ . Neptun oczywiście świeci znacznie słabiej i nie przebije się przez księżycową lunę. W sierpniu Neptun wędruje jakieś  $1,5^\circ$  na zachód od gwiazdy 5. wielkości 20 Psc, przy czym sama planeta świeci blaskiem  $+7,8^m$ . Obie planety szykują się do wrzesniowych opozycji, a Jowisz stopniowo zbliża się do Neptuna, by pod koniec listopada zmniejszył dystans do tej planety do nieco ponad  $6^\circ$ .

Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę 19 sierpnia i spotka się z dwiema kolejnymi planetami Układu Słonecznego. Ponownie na lewo od Księżyca znajdzie się łatwo widoczna gołym okiem planeta **Mars**, świecąca w tym momencie z jasnością  $0^m$ , przy średnicy tarczy  $9''$ . Natomiast na prawo od niego – znacznie słabiej świecąca planeta **Uran**. Jej jasność wynosi  $+5,7^m$ . Do Marsa zabraknie Księżycowi  $5^\circ$ , do Urana – jedynie o stopień więcej. Mars w sierpniu przemierzy ponad  $17^\circ$ , zaczynając miesiąc nieco ponad  $1^\circ$  na południe od Urana i kończąc  $3^\circ$  od gwiazdy  $\epsilon$  Tauri, czyli najbardziej na północ wysuniętej jasnej gwiazdy Hiad. W tym czasie jego jasność urośnie od  $+0,2^m$  do  $-0,1^m$ , a tarcza zwiększy średnicę z  $8''$  do  $10''$ .

Po ostatniej kwadrze Księżyc powędruje ku nowiu 27 sierpnia, a ponieważ nachylenie ekliptyki do porannego widnokregu jest bardzo duże, Księżyc pozostanie dobrze widoczny prawie do samego spotkania ze Słońcem. W tym czasie Srebrny Glob ładnie zaprezentuje tzw. światło popielate, czyli swoją nocną stronę oświetloną światłem odbitym od Ziemi.

Srebrny Glob 20 sierpnia w fazie 40% minie Aldebarana, najjaśniejszą gwiazdę Byka, w odległości  $7^\circ$ . Dobę później faza Księżyca spadnie do 32% i dotrze on na odległość  $5^\circ$  do gwiazdy El Nath, stanowiącej północny róg Byka. Następne trzy poranki Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Bliźniąt, zmniejszając stopniowo fazę od 23% do 9%. Tak cienki sierp Księżyca 24 sierpnia wzejdzie  $3^\circ$  pod Polluksem i godzinę przed wschodem Słońca zdąży wzniesić się na powyżej  $20^\circ$  ponad widnokrąg.

Podczas dwóch ostatnich poranków przed nowiem również da się dostrzec bardzo cienki sierp Księżyca. I tak 25 sierpnia około godziny 4:40 Srebrny Glob w fazie 5% zdąży się wzniesić na wysokość  $12^\circ$ , a  $10^\circ$  pod nim pokaże się bardzo jasna planeta **Wenus**. Następnej doby sierp Księżyca wżęzi się do zaledwie 1% i o tej samej porze zajmie pozycję na wysokości  $3^\circ$ . Wenus, która przez cały sierpień zbliża się do Słońca i świeci coraz niżej, pokaże się  $4^\circ$  na prawo od Srebrnego Globu. Podczas swojej wędrówki, 18 sierpnia, Wenus przejdzie zaledwie  $0,5^\circ$  na południe od jasnej gromady otwartej gwiazd M44 w Raku. Wenus zbliża się do październikowej koniunkcji górnej ze Słońcem i jest daleko od nas, stąd wygląd jej tarczy podczas kolejnych dni zmienia się bardzo niewiele. Do końca miesiąca tarcza planety utrzyma średnicę  $10''$  i zwiększy fazę do 97%, świecąc z jasnością  $-3,9^m$ .

W połowie lipca przez maksimum swojej aktywności przeszła długookresowa gwiazda zmienna Mira Ceti. W sierpniu Mira powinna nadal wyraźnie przekraczać granicę widoczności gołym okiem. Około godziny 3 Mira zajmuje pozycję na wysokości mniej więcej  $30^\circ$  nad południowo-wschodnią częścią nieboskłonu.

*Ariel MAJCHER*

## Elektron kontra historia i terażniejszość Wszechświata

Każdy, kto zgłębiał tajniki elektryczności i magnetyzmu, wie, że pętla z przewodnika, w której płynie prąd elektryczny, oddziałuje z polem magnetycznym. Miarą tego oddziaływania jest wielkość wektorowa zwana momentem magnetycznym. Mogąc wytracić energię, pętla „najchętniej” ustawia się tak, by moment magnetyczny był skierowany tak jak pole magnetyczne; jeśli energia jest zachowana moment magnetyczny krąży wokół kierunku pola.

Fizyka kwantowa dopuszcza możliwość, że nie tylko pętla z prądem mają moment magnetyczny – może on też być wewnętrzną własnością cząstek elementarnych. Już w 1928 roku Paul Dirac zauważył, że elektron opisywany równaniem, które później nazwano jego nazwiskiem, oddziałuje z polem magnetycznym podobnie do pętli z prądem, a opisujący „siłę” tego oddziaływania moment magnetyczny jest dwukrotnością podstawowej wielkości zwanej magnetonem Bohra. Sformułowaławszy elektrodynamikę kwantową, Julian Schwinger był w stanie obliczyć moment magnetyczny elektronu jeszcze dokładniej. Z obliczeń Schwingera wynikało, że jego wartość jest o około promil większa niż ta przewidywana przez Diraca. Dziś potrafimy obliczyć teoretycznie moment magnetyczny elektronu z dokładnością do 10 cyfr znaczących, a wyznaczyć go doświadczalnie z dokładnością do 12 cyfr znaczących. Jest to wielki triumf pomysłowości teoretyków i zręczności eksperymentatorów, a także najdokładniejsza we współczesnej fizyce weryfikacja przewidywań teoretycznych i wyników doświadczalnych.

Czytelnik Uważny bez wątpienia dostrzeże tu problem i zawoła: „Teoretycy! Do roboty! Ulepszcie przewidywania o czynnik 100”. Nie jest to jednak takie proste. Obecna dokładność wymaga zsumowania ponad dwunastu tysięcy osobno wyznaczanych składników, a odpowiednie zwiększenie dokładności może zwiększyć ich liczbę do setek tysięcy czy nawet milionów. A jeśli elektron jest dodatkowo związany z jądrem atomowym, do głosu mogą dojść trudne do obliczenia czynniki związane z rozmiarami jądra oraz z oddziaływaniami elektronu z nukleonami. Tymczasem to właśnie takie układy pozwalają na bardzo dokładne sprawdzenie przewidywań Modelu Standardowego cząstek elementarnych dla elektronu znajdującego się w ultrasłabym polu elektrycznym jądra atomowego.

W takiej sytuacji przydają się pomiary różnicowe. Czym one są, wie z grubsza każdy, kto jechał na autostradzie za dwiema wyprzedzającymi się ciężarówkami. Zakładając, że taki pojazd z naczepą zrównuje się z drugim po minucie jazdy i wysforowuje się naprzód po kolejnej minucie, możemy łatwo wyznaczyć, że dla standardowych ciężarówek o długości 16,5 metra różnica prędkości między pojazdami wynosi kilometr na godzinę. Aby dojść do tego wniosku, nie musimy mierzyć prędkości każdej ciężarówki z osobna – wystarczy wiedzieć, jak poruszają się one względem siebie.

Podobny pomysł dla elektronów związanych z izotopami jąder neonu 20 i 22 został zastosowany w pracy niedawno opublikowanej w „Nature”. Tim Sailer i współpracownicy unieruchomili takie jony w pułapkach Penninga i badali różnice tempa obrotu momentów magnetycznych elektronów w polu magnetycznym. Drugi użyty przez nich izotop ma o dwa neutrony więcej od pierwszego. Sprawia to, że jądro atomowe jest większe. Jeżeli zaś elektrony oddziałują z neutronami silniej, niż przewiduje to Model Standardowy cząstek elementarnych, to różnica w liczbie neutronów pozwalałaby na uchwycenie tego efektu.

Jakie są wyniki tego eksperymentu? Fani nowej fizyki będą z pewnością zawiedzeni. Oszacowanie promieni jąder zgadza się z istniejącymi wcześniej pomiarami i wiedzą teoretyczną – jest po prostu o rząd wielkości dokładniejsze. Śladów anomalnych oddziaływań elektron-neutron nie stwierdzono.

W pracy Sailera i współpracowników największą uwagę przykuwa jednak coś innego. Po pierwsze, bardzo pomysłowy schemat doświadczalny. Po drugie, niesamowita dokładność pomiarów umożliwiona przez ten schemat. Po co nam aż taka dokładność? Otóż pozwala ona sprawdzić, czy wymyślone cztery lata wcześniej koncepcje teoretyczne dotyczące kosmologicznej historii pola Higgsa i jego oddziaływania z nowo zaproponowanym polem zwanym *relaksjonem* (prawda, że bardzo ładna nazwa?) mogą być poprawne. W pracy Sailera i współpracowników udało się właśnie dość mocno ograniczyć takie teorie. Jest to jeden z wielu przykładów bardzo szybkiego oddziaływania na linii teoretycy–doświadczalnicy.

Krzysztof TURZYŃSKI

T. Sailer, V. Debierre, Z. Harman et al. “Measurement of the bound-electron g-factor difference in coupled ions”, *Nature* 606, 479–483 (2022)



Jeśli  $a$  jest liczbą całkowitą oraz  $p \nmid a$ , to istnieje taka liczba całkowita  $a'$ , że  $aa' \equiv 1 \pmod{p}$  (por. kącik 29. w  $\Delta_{21}^5$ ). Liczbę  $a'$  nazywamy odwrotnością  $a$  modulo  $p$ . Dzięki temu faktowi możemy udowodnić

**Twierdzenie Wilsona.** Liczba  $n \geq 2$  jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy  $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ .

*Dowód.* Dla  $n \in \{2, 3, 4\}$  sprawdzamy bezpośrednio, że teza jest prawdziwa. W dalszej części zakładamy więc, że  $n \geq 5$ .

( $\Rightarrow$ ) Niech  $n = p \geq 5$  będzie pierwsze. Reszta  $r \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  jest swoją własną odwrotnością modulo  $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $r^2 \equiv 1 \pmod{p}$ , równoważnie  $p \mid r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$ . Ma to miejsce dla  $r = 1$  i  $r = p-1$ . Pozostałe liczby ze zbioru  $2, 3, \dots, p-2$  możemy pogrupować w pary  $(r_i, r'_i)$  – liczba i jej odwrotność modulo  $p$ . Niech  $p = 2k + 1$ . Otrzymujemy stąd

$$p! = 1 \cdot r_1 r'_1 \cdot r_2 r'_2 \cdot \dots \cdot r_{k-1} r'_{k-1} \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p},$$

ponieważ  $r_i r'_i \equiv 1 \pmod{p}$  dla  $k = 1, 2, \dots, k-1$ .

( $\Leftarrow$ ) Niech  $n \geq 6$  będzie złożona – wówczas albo  $n = ab$  dla pewnych liczb naturalnych  $1 < a < b < n$ , albo  $n = p^2$  dla pewnej liczby pierwszej  $p \geq 3$ . W pierwszym przypadku w iloczynie  $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)$  występują liczby  $a$  i  $b$ , w drugim – liczby  $p$  i  $2p$ . W obu przypadkach  $n \mid (n-1)!$ , czyli  $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$ .

W zadaniach związanych z kongruencjami modulo liczba pierwsza przydatny bywa poniższy

**Lemat o ciągu arytmetycznym.** Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą i niech  $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$  będzie ciągiem arytmetycznym liczb całkowitych o różnicy  $r$ . Wówczas jeśli  $p \nmid r$ , to każda z liczb  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  daje inną resztę z dzielenia przez  $p$ ; resztami są wszystkie liczby całkowite od 0 do  $p-1$ .

*Dowód.* Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że  $a_i \equiv a_j \pmod{p}$  oraz  $0 \leq i < j \leq p-1$ . Wtedy  $p \mid a_j - a_i = (j-i)r$ . Jednak  $p \nmid r$  oraz  $p \nmid j-i$ , gdyż  $0 < j-i < p$ . Z tego wynika, że w ciągu  $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$  każdy wyraz ma inną resztę z dzielenia przez  $p$ . Wyrazów jest  $p$ , więc muszą to być wszystkie możliwe reszty od 0 do  $p-1$ .

W kąciku pod takim tytułem nie mogłoby zabraknąć najsłynniejszego bodaj twierdzenia związanego z kongruencjami modulo liczba pierwsza:

**Małe twierdzenie Fermata.** Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą,  $n$  jest liczbą całkowitą oraz  $p \nmid n$ , to  $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

*Dowód.* Niech  $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$  będą resztami z dzielenia przez  $p$  liczb  $n, 2n, 3n, \dots, (p-1)n$ . Na mocy poprzedniego lematu ( $a_0 = 0, r = n$ ) otrzymujemy  $\{r_1, r_2, \dots, r_{p-1}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$  (kolejność oczywiście może być inna). Mnożąc stronami kongruencje  $in \equiv r_i \pmod{p}$  dla  $i = 1, 2, \dots, p-1$ , otrzymamy

$$(p-1)! n^{p-1} = n(2n)(3n) \dots ((p-1)n) \equiv r_1 r_2 r_3 \dots r_{p-1} = (p-1)! \pmod{p}.$$

Teraz wystarczy skorzystać z twierdzenia Wilsona albo po prostu podzielić obustronnie powyższą kongruencję przez  $(p-1)!$ , co można zrobić, gdyż jest to liczba względnie pierwsza z  $p$ .

Małe twierdzenie Fermata można wyrazić w innej postaci, bez warunku  $p \nmid n$ : jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, a  $n$  liczbą całkowitą, to  $n^p \equiv n \pmod{p}$ .

## Zadania

- Wykazać, że jeśli  $n$  jest liczbą całkowitą oraz  $p, q, r$  są liczbami pierwszymi, to  $\frac{qn^p + pn^q - (p+q)n}{pq}$  również jest liczbą całkowitą.
- Liczby całkowite nieujemne  $a, b, c$  spełniają dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 2$  podzielność  $n \mid a^n + b^n + c^n$ . Dowiedź, że  $a = b = c = 0$ .
- W zależności od liczby pierwszej  $p \neq 2, 5$  wyznaczyć  $p$ -tą cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka  $\frac{1}{p}$ .
- W zależności od liczby pierwszej  $p \geq 5$  wyznaczyć reszty z dzielenia przez  $p$  liczb: (a)  $(p-2)!$ , (b)  $(p-3)!$ , (c)  $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2p-2)$ , (d)  $1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-1)$ .
- Niech  $(p_1, p_2, \dots, p_{10})$  będzie rosnącym ciągiem arytmetycznym liczb pierwszych. Wykazać, że  $p_{10} > 2022$ .
- Rozwiązać równanie  $2^x + 17 = y^4$  w liczbach całkowitych dodatnich  $x, y$ .
- Dowiedź, że równanie  $a^{11} + b^{11} + c^{11} = 111$  nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych  $a, b, c$ .

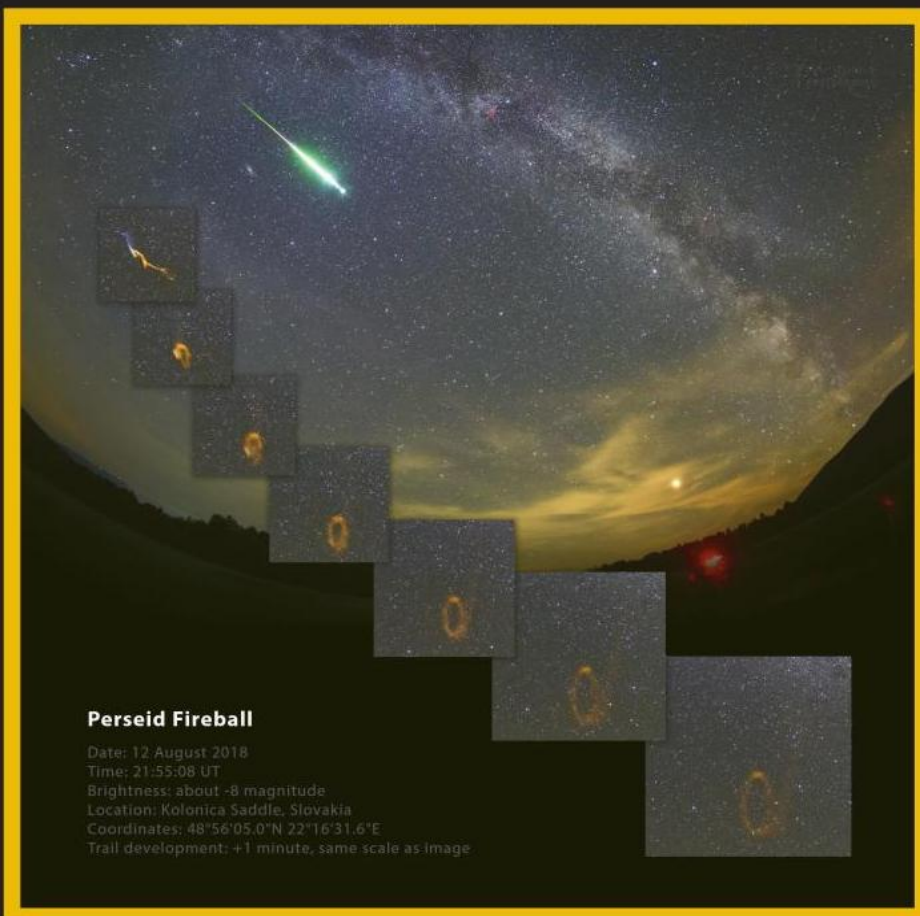
**Wskazówki do zadań**  
 1. Liczby  $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}$  są całkowite na mocy małego twierdzenia Fermata.  
 2. Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to  $a^p + b^p + c^p \equiv a + b + c \pmod{p}$ .  
 3. Z małego twierdzenia Fermata wynika, że  $\frac{1}{p} = \frac{1}{10^p - 1} \cdot \frac{10^p - 1}{p}$ . Stąd  $\frac{1}{p} = \frac{1}{10^p - 1} + \frac{10^p - 1}{p}$ , przy czym  $\frac{10^p - 1}{p}$  jest całkowitą liczbą. Zatem  $\frac{1}{p}$  ma rozwinięcie dziesiętne z cyframi powtarzającymi się co  $p$  cyfr. Zatem  $\frac{1}{p} = \frac{1}{10^p - 1} + \frac{10^p - 1}{p}$  oznacza tu liczbę  $\frac{1}{10^p - 1}$  z dopuszczalnymi zerami początkowymi.  
 4. (a) Odwrotnością liczby  $d$  modulo  $p$  jest  $d^{-1}$ .  
 (b) Odwrotnością liczby  $d$  modulo  $p$  jest  $d^{-1}$ .  
 (c)  $2^{-1} \equiv 2 \pmod{p}$ .  
 (d) Nie trzeba żadnych twierdzeń.  
 5. Trzeba dość sprytnie zastosować lemat o ciągu arytmetycznym, by wykazać, że różnica ciągów dzieli się przez 210 (kropot może sprawić np. to, że jeśli  $7 \mid p$ , to niekomicznie  $p$  jest liczbą złożoną). Jeśli ta różnica jest większa od 210 (tzn. równa co najmniej 420), teza jest oczywista. W przeciwnym wypadku pozostaje jeszcze uzasadnić, że  $p \mid 132$ . Ponieważ  $210 \equiv 1 \pmod{11}$ , mamy  $p \equiv 1 \pmod{11}$ . Analogicznie,  $210 \equiv 3 \pmod{13}$ , więc  $p \equiv 3 \pmod{13}$ . Jedyną liczbą pierwszą  $p \leq 132$  spełniającą te warunki jest 199, ale wtedy nie otrzymamy ciągu samych liczb pierwszych. (Ciekawostka:  $p = 199$  jest najmniejszą, dla którego otrzymamy ciąg liczb pierwszych o różnicy 210.)  
 6. Z danego równania wynika, że  $2^x \equiv y^4 \pmod{p}$ . Można podnieść tę kongruencję obustronnie do czwartej potęgi i skorzystać z małego twierdzenia Fermata dla  $p = 17$ .  
 7. Zamiast równości rozważyć kongruencję modulo 23.



# Przygoda z meteorem (str. 6)



Rys. 1 Bolid Obidza



Rys. 2 Bolid Kolonice