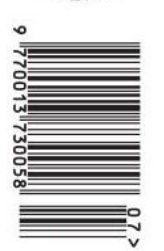




nr=6,63·10⁻²⁴·J/s $\tau=3,141592...$

NR 7 (578) 2022
CENA 6 ZŁ - VAT 8%
PL ISSN 0167-3005 | NR KD 35 550 X
MIESIECZNIK
www.deltami.edu.pl

Co można napisać na odwróconym kalkulatorze?
str. 5



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 7 (578)

Big Science

Grzegorz Łach



Zadania

Niewidzialna rewolucja lamp ledowych

Ajeesh Somakumar

Dioda bez dziur

Ludwik Lehman, Witold Polesiuk,
Grzegorz F. Wojewoda

Co można napisać na odwróconym
kalkulatorze?

Tomasz Janiszewski

Ktoś w Internecie się myli!

czyli o twierdzeniu Clairaut

Michał Miśkiewicz



Kto ty jesteś? Polak mały!

Magdalena Fikus

Wyniki olimpiad 2020/2021

Szeregowanie zadań na
superkomputerach z uwzględnieniem
buforów impulsowych

Jan Kopański

Ustawka Technologiczna *CryptoBrawl*

Klub 44

Prosto z nieba: Życiodajny cyjanowodor
– protogwiazdy o zapachu migdałów

Niebo w lipcu

Aktualności

Fizyczne potyczki w Kolumbii



Reguła włączeń i wyłączeń

Bartłomiej Bzdęga

str. 1

str. 2

str. 3

str. 4

str. 5

str. 7

str. 10

str. 11

str. 15

str. 18

str. 20

str. 22

str. 22

str. 24

str. 25

W następnym numerze:
W którą stronę jechał rower?



Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

* Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Aktualizowana w miarę pojawiania się nowych danych doświadczalnych tabela parametrów Modelu Standardowego znajduje się tutaj:

glach.wikidot.com/smparameters



Rozwiązanie zadania F 1051.

Podczas wbiegania na wzniesienie pokonywana jest siła ciężkości F równa iloczynowi masy m zwierzęcia i przyspieszenia ziemskiego g : $F = mg$. Masa zwierzęcia jest proporcjonalna do jego objętości: $m \propto L^3$. Moc zużywana podczas ruchu z prędkością v przeciwko sile ciężkości wynosi $P = Fv$ – tutaj v jest pionową składową prędkości. Mamy więc $P \propto L^3 v$ oraz:

$$P = Fv = mgv \propto L^3 v.$$

Ostatecznie otrzymujemy $v \propto \frac{1}{L}$.

Oszacowanie to potwierdzają pomiary wykonywane przez biologów.

Przykłady można znaleźć w książkach: John Maynard Smith, *Matematyka w biologii*, Wiedza Powszechna, Warszawa, 1974, Knut Schmidt-Nielsen, *Dlaczego tak ważne są rozmiary zwierząt*, Skala, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994.



Rozwiązanie zadania F 1052.

Powietrze składa się niemal wyłącznie z gazów dwuatomowych: tlenu (O_2) i azotu (N_2), i w warunkach podanych w treści zadania spełnia równania gazu doskonałego. Energia wewnętrzna U powietrza jest więc równa energii kinetycznej ruchu cząsteczek: ruchu postępowego i rotacyjnego, i wynosi:

$$U = \frac{5}{2} nRT,$$

gdzie n oznacza liczbę moli gazu, $n = V/V_m$, a T jego temperaturę w skali bezwzględnej, $T = t + 273,15$ K. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $U \approx 2,53 \cdot 10^5$ J, z czego $3/5$ to energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek, a $2/5$ ich ruchu rotacyjnego.

Nagrania z transportu i inne informacje o eksperymencie KATRIN można obejrzeć na filmach:

youtu.be/Ruk50AzD1eU
youtu.be/N4i3mVEVZ30

Współczesna teoria cząstek elementarnych, nazywana skromnie Modelem Standardowym, zawiera w swoim opisie szereg parametrów. Wśród nich można wskazać parametry będące liczbami całkowitymi (takie jak np. liczba rodzin leptonów i kwarków czy ich ładunki), ale aby model był spójny, te liczby muszą spełniać szereg warunków i trudno mówić tu o dużej dowolności. Inaczej sytuacja wygląda w przypadku parametrów będących liczbami rzeczywistymi (np. masy cząstek), których struktura teorii nie ogranicza i trzeba je uzyskać eksperymentalnie. Wszystkich takich liczb jest w Modelu Standardowym 24, z czego 14 to masy cząstek:

- masy bozonów pośredniczących (Z_0 i W_{\pm}) i bozonu Higgsa: m_Z, m_W, m_H ,
- masy kwarków: $m_d, m_u, m_s, m_c, m_b, m_t$,
- masy leptonów – elektronu, mionu i taonu: m_e, m_{μ}, m_{τ} ,
- masy neutrin m_1, m_2, m_3 .

Zaraz, zaraz – ktoś uważny zaprotestuje – powyżej jest 15 parametrów, a nie zapowiadanych 14. To prawda, tyle że pozostaje nam jeszcze swoboda wyboru tego, w jakich jednostkach te masy mierzymy. Masy podane wyżej są w lubianych przez fizyków wysokich energii gigaelektronowoltach podzielonych przez prędkość światła (c^2) do kwadratu, ale jak wyjaśnić, ile to jest gigaelektronowolt? Moglibyśmy wyrazić gigaelektronowolt przez wybraną z mas (np. masę elektronu) – a to sprawi, że faktycznych liczb, które musimy podać, jest o jedną mniej. Inaczej mówiąc: fizyczne znaczenie mają tylko stosunki mas, stąd wspomnianych 14 parametrów.

Masy kwarków, leptonów, bozonów pośredniczących i cząstki Higgsa wyznaczono na przestrzeni lat z wielu eksperymentów, głównie polegających na zderzaniu cząstek w akceleratorach, choć akurat np. masy elektronu i mionu wyznaczono inaczej (ale to już zupełnie inna historia). W przypadku neutrin, oddziałujących bardzo słabo, nie daje się zastosować żadnej ze znanych technik, którymi wyznaczono masy innych cząstek. Przez wiele lat myślano, że masy neutrin są równe zero, ale obserwacje tzw. oscylacji neutrin wskazały, że nie – neutrina mają masy, i to trzy różne. Niestety za pomocą pomiarów oscylacji można zmierzyć jedynie różnice kwadratów mas różnych odmian ($m_1^2 - m_2^2$ oraz $m_2^2 - m_3^2$), i dotychczasowe pomiary dają tylko bardzo słabe oszacowanie, ile każda z tych trzech mas wynosi.

Od dawna jednym z eksperymentów, w których próbuje się wyznaczyć masę neutrina elektronowego, jest rozpad jądra trytu (^3H). Produktami rozpadu jądra trytu są: jądro ^3He , elektron i neutrino (dokładniej: anty-neutrino) elektronowe. Neutrino ucieka niezauważone, ale można dokładnie zmierzyć energię wystrzelonego z jądra elektronu. Mierząc histogram tych energii, można otrzymać informację, jak duża część różnicy masy jąder ^3H i ^3He została przejęta przez neutrino – część przez jego energię spoczynkową (mc^2), a część przez jego energię kinetyczną. Jest to bardzo subtelny pomiar, bo jądra trytu z konieczności muszą być związane w cząsteczkach $^3\text{H}_2$. Każdy rozpad prowadzi zatem do jednego z bardzo wielu możliwych stanów końcowych: cząsteczka może zdysocjować (np. na $^3\text{H} + ^3\text{He}^+$ lub na $^3\text{H}^+ + ^3\text{He}$), może pozostać cząsteczką, ale przejść do stanu wzbudzonego oscylacyjnie lub rotacyjnie albo jednocześnie oscylacyjnie i rotacyjnie.

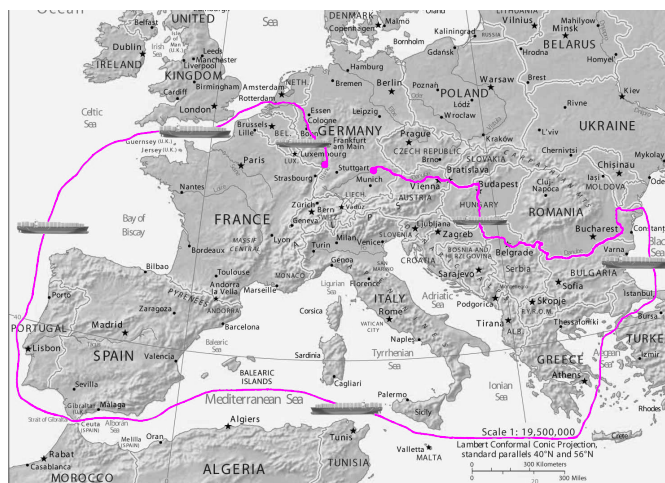
W 2005 roku w Karlsruhe Institute of Technology rozpoczęto budowę eksperymentu, który miał zmierzyć masę neutrina elektronowego z niespotykaną wcześniej dokładnością. Głównym elementem eksperymentu KATRIN (*Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment*) jest gigantyczna komora próżniowa spektrometru, w którym w pieczołowicie dobranych polach elektrycznym i magnetycznym mierzone są energie elektronów pochodzących z rozpadu cząsteczek trytu. Komorę próżniową (200 ton, 10 m średnicy, 24 m długości) wyprodukowano w zakładach MAN DWE GmbH w Deggendorf w Bawarii, tylko 300 km w linii prostej od Karlsruhe. Okazało się jednak, że ze względu na rozmiar komory spektrometru nie da się przetransportować drogami (wymagałoby to wyburzenia

kilkunastu mostów i wiaduktów). Z powodu ciężaru z kolei nie dało się go też przetransportować drogą powietrzną, np. śmigłowcem. Po przeanalizowaniu wielu dostępnych opcji (jedną z nich było zbudowanie gigantycznego wypełnionego wodorem sterowca) wybrano taką:

- spektrometr ładowany jest na barkę, która płynie Dunajem przez Austrię, Węgry, Serbię i Rumunię (ocierając się też o Słowację, Chorwację, Bułgarię i Mołdawię),
- w Rumunii przeladowany jest na statek, którym płynie przez Morze Czarne, Dardanele, Morze Marmara, Bosfor, Morze Egejskie i resztę Morza Śródziemnego, Gibraltar, zatokę Biskajską, kanał La Manche, Morze Północne do Rotterdamu,
- w Rotterdamie przeladowany jest ponownie na barkę, którą płynie w górę Renu, a następnie jest wyładowany na jedną z zanurzonych ramp, przygotowaną dawno temu (podczas oczekiwanej inwazji wojsk Układu Warszawskiego) pod kątem ewentualnego pancernego kontrataku wojsk NATO na zajęte przez ZSRR Niemcy,
- ostatnie 7 km pokonuje na wielokołowej platformie, przejeżdżając przez badeniskie miasteczko Eggenstein-Leopoldshafen, w którym wcześniej zdemontowano latarnie, znaki drogowe i tymczasowo przesadzono kilka rosnących przy ulicy drzew.

Ta niezwykła podróż, w czasie której komora próżniowa pokonała ponad 8000 km, odbyła się pod koniec

2006 roku i trwała prawie dwa miesiące. Minęły kolejne lata, zanim zestaw doświadczalny został uruchomiony, a ponad dekada, zanim zaczął dostarczać pierwsze wyniki. Niedawno (w lutym 2022 roku) opublikowano wyniki obróbki danych zbieranych w detektorze przez ostatni rok i już wiadomo, że neutrino elektronowe ma masę nie większą niż $0,8 \text{ eV}/c^2$ (czyli prawie milion razy mniej niż masa elektronu). W kolejnych latach to górne ograniczenie ma zmaleć do $0,2 \text{ eV}/c^2$ – chyba że mamy szczęście i neutrino elektronowe ma masę większą od tego ograniczenia, wtedy eksperyment tę masę wyznaczy, „dopinając” zbiór parametrów Modelu Standardowego.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1714. Na szachownicy 8×8 umieszczono pewną liczbę gońców tak, aby żadne dwa gońce nie zagrażały sobie nawzajem. Udowodnij, że liczba wszystkich takich układów jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie na str. 6

M 1715. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wiadomo, że $\sphericalangle FAE = \sphericalangle BDC$, a czworokąty $ABDF$ i $ACDE$ można wpisać w okrąg. Udowodnij, że proste BF i CE są równoległe.

Rozwiązanie na str. 20

M 1716. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

Rozwiązanie na str. 20

Przygotował Andrzej MAJHOFER

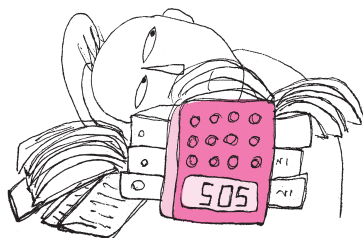
F 1051. Jak szybkość v wbiegania na wzniesienia skaluje się z wielkością (rozmiarem liniowym) L zwierzęcia?

Wskazówka: Moc P wytwarzana przez organizm zwierzęcia jest proporcjonalna do kwadratu jego rozmiaru L : $P \propto L^2$.

Rozwiązanie na str. 1

F 1052. Ile wynosi energia kinetyczna zgromadzona w objętości $V = 1 \text{ m}^3$ powietrza w temperaturze $t = 0^\circ\text{C}$? Stała gazowa $R = 8,3 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$, objętość molowa $V_m = 22,4 \text{ l}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Rozwiązanie na str. 1



Niewidzialna rewolucja lamp ledowych

Ajeesh SOMAKUMAR*

*Doktorant, Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk

Pierwsze diody LED na podczerwień zostały wynalezione ponad 65 lat temu. Od tego czasu znalazły liczne zastosowania. Zanim jednak przyjrzymy się najnowszym zmianom w tej dziedzinie, oto kilka interesujących faktów na temat LED świecących na podczerwień.

Diody LED są obecnie uważane za jedno z najlepszych źródeł światła, jeśli chodzi o oszczędzanie energii. Cechuje je bardzo wysoka wydajność, przy żywotności znacznie przewyższającej konkurencyjne lampy. Działanie diody oparte jest na zjawisku elektroluminescencji: pod wpływem odpowiednio dobranych impulsów elektrycznych półprzewodniki zawarte w diodzie zostają wzbudzone po to, by po chwili wyświecić spontanicznie otrzymaną energię.

Pierwszy prototyp nowoczesnej diody LED został zbudowany już w 1907 roku, za sprawą brytyjskiego naukowca Henry'ego Josepha Rounda. W swoim urządzeniu użył on kryształu karborundu (węglika krzemu) jako materiału elektroluminescencyjnego. Po zrozumieniu zasady działania tego urządzenia zaczęto szukać również innych materiałów elektroluminescencyjnych. Wśród nich znaleziono takie wydajne materiały, które świecą światłem niewidocznym dla człowieka. W 1955 roku Rubin Braunstein, zatrudniony w Radio Corporation of America, zbudował pierwszą diodę „świecącą” w podczerwieni (IR-LED, *infrared LED*). Było to jednak urządzenie w randze ciekawostki, bez określonych zastosowań. Powoli zaczęto odkrywać możliwości, jakie stworzyła dioda świecąca światłem niewidzialnym. W 1961 roku dwaj amerykańscy naukowcy, James Biard i Gary Pittman, zmodyfikowali technologię Braunsteina. Opracowali nowszą, ulepszoną diodę IR-LED, a firma Texas Instruments wykorzystwała tę technologię do produkcji i sprzedaży pierwszej na świecie komercyjnej diody IR LED o nazwie SNX-100 (900 nm).

Samo promieniowanie podczerwone jest podzielone na trzy typy, nazywane bliską, średnią i daleką podczerwienią. Podczerwień bliska (*near infra-red*, NIR) i średnia podczerwień (*mid infra-red*, MIR) są najpowszechniejsze, ze względu na ich szerokie zastosowanie w spektroskopii, naukach biologicznych i medycynie.

Jednym z głównych powodów stosowania światła w bliskiej podczerwieni (NIR) w medycynie jest to, że może ono wnikać do ludzkich tkanek głębiej niż światło widzialne, czyli aż do 5 mm, nie powodując żadnej szkody. Dzieje się tak, gdyż zawarte w ludzkim ciele cząsteczki, takie jak woda, melanina i hemoglobina, mają bardzo niski współczynnik absorpcji w zakresie NIR, przynajmniej w porównaniu do światła widzialnego. Stąd ta część widma elektromagnetycznego jest również nazywana „oknem bliskiej podczerwieni” lub „oknem terapeutycznym” w odniesieniu do żywej materii. Obecnie wytwarza się świetnie kontrolowane i precyzyjne źródła bliskiej podczerwieni, które znajdują coraz szersze zastosowanie. Niestety, mimo że światło NIR jest bezpieczne, półprzewodniki odpowiedzialne za elektroluminescencję już takie nie są. Do ich produkcji najczęściej używa się arsenku galu, który może być bardzo szkodliwy. Nawet mała ilość tej substancji ma działanie toksyczne i jest niebezpieczna dla ludzkiego organizmu. Badania wykazały, że dłuższa ekspozycja na arsenek galu może prowadzić do uszkodzeń płuc, nerek i narządów rozrodczych. W 2008 roku stan Kalifornia zakazał używania arsenku galu i wpisał go na listę substancji rakotwórczych. Tak więc „biokompatybilność” nowo

opracowanych materiałów emitujących światło okazała się poważną przeszkodą w dalszym rozwoju LED.

Istotnym celem naukowym stało się więc znalezienie materiałów emitujących promieniowanie podczerwone, które będą jednocześnie bezpieczne. Azotek galu (GaN), niebędący substancją toksyczną, staje się ciekawą alternatywą. Odpowiednio domieszkowany innymi pierwiastkami (ziem rzadkich lub metali przejściowych z układu okresowego) pozwala na tworzenie bezpiecznych źródeł promieniowania. Okazuje się również, że diody oparte na GaN są kilkukrotnie wydajniejsze niż ich poprzedniki. Diody oparte na azotku galu znalazły już zastosowanie w przemyśle zbrojeniowym, np. w urządzeniach noktowizyjnych, czujnikach termicznych oraz w urządzeniach komunikacyjnych. Obecnie zaczyna się produkcja diod LED i laserów NIR o pożądanej długości fali przy bardzo niskich kosztach, zapewniających lepszą wydajność i bezpieczeństwo. Wydaje się, że wkrótce azotek galu trafi „pod strzechy”.

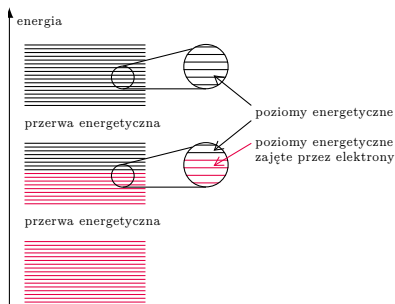
Nie ma więc wątpliwości, że źródła IR wykorzystujące GaN są zwiastunem wielkiej rewolucji w świecie półprzewodników, i to rewolucji, której nie widać gołym okiem.

Tłumaczenie: Krzysztof PAWŁOWSKI

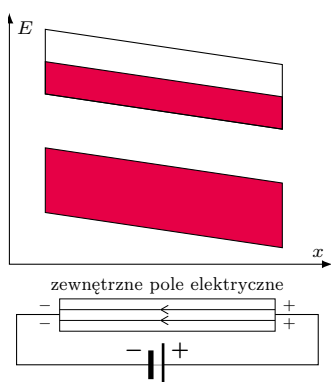


Dioda bez dziur

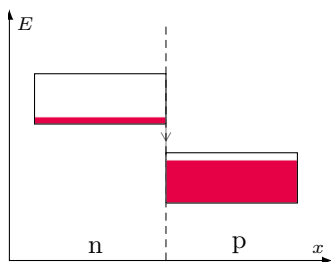
Ludwik LEHMAN, Witold POLESIUŁ, Grzegorz F. WOJEWODA



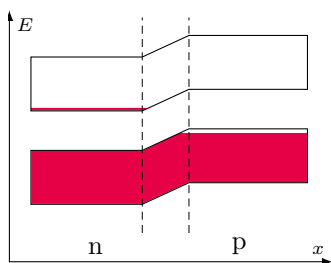
Rys. 1. Pasma energetyczne w przewodnikach. Pomiędzy pasmami całkowicie zapełnionymi a pustymi występuje pasmo częściowo zapełnione, w którym jest dużo elektronów mogących swobodnie się przemieszczać



Rys. 2. Przewodnik podłączony do źródła napięcia. Pole elektryczne wewnątrz niego powoduje nachylenie pasm energetycznych



Rys. 3. Najwyższe pasma energetyczne w półprzewodnikach typu n i p. W półprzewodniku typu n najwyższe pasmo zawiera niewiele elektronów, natomiast w półprzewodniku typu p najwyższe pasmo jest prawie całkowicie wypełnione, ale niewielka część poziomów tego pasma pozostaje nieobsadzona. Wszystkie pasma poniżej tych na rysunku są całkowicie zapełnione, a pasma powyżej są puste (patrz rys. 4)



Rys. 4. Pasma w złączu p-n

Współczesna elektronika opiera się na własnościach półprzewodników. Szczególne znaczenie ma tzw. złącze p-n, którego najprostszym zastosowaniem jest dioda półprzewodnikowa. Poprawny opis działania diody w terminach dziur i elektronów jest stanowczo zbyt trudny dla niespecjalistów.

Proponujemy model diody „bez dziur”, jako uproszczony model alternatywny dla opisu tradycyjnego. Sama dziura jako puste miejsce zachowujące się jak ładunek dodatni jest bardzo abstrakcyjnym pojęciem, trudno zrozumiałym dla laików. Dodatkowo trzeba rozważać jednocześnie prąd elektronów i prąd dziur, które znikają w złączu p-n. W rzeczywistości poruszają się tylko elektrony, dlatego opis działania diody wyłącznie z ich użyciem powinien być pojęciowo dużo prostszy.

Niezbędną podstawą do wyjaśnienia złącza p-n jest model pasmowy ciał stałych. W atomach poziomy energetyczne elektronów grupują się w powłoki. W ciałach stałych w wyniku oddziaływań między atomami powłoki zamieniają się na pasma w całym kryształ. Poziomów w każdym paśmie jest tak dużo, że praktycznie „zlewają się” ze sobą (rys. 1). Na każdym poziomie zgodnie z zasadą Pauliego mogą być co najwyżej dwa elektrony.

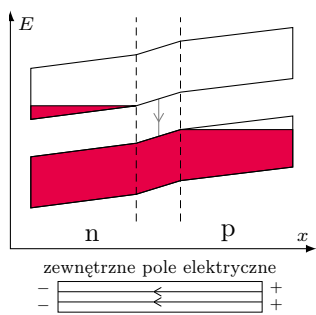
W prostym modelu ciała stałego elektrony można sobie wyobrażać jak ziarenka sypkiego piasku. Gdy do przewodnika przyłożymy napięcie (a właściwie pole elektryczne), poziomy i pasma nachylają się (rys. 2).

Dzieje się tak dlatego, że energia elektryczna elektronów rośnie wzdłuż linii pola. Co się stanie, gdy pudełko częściowo wypełnione piaskiem przechylimy, tak jak górne pasmo z rysunku 2? Wtedy piasek zacznie się zsuwać w dół, w obszar o mniejszej energii. Analogicznie, elektrony będą przemieszczać się w stronę mniejszej energii, a to oznacza powstanie prądu elektrycznego. Jest to intuicyjne wyjaśnienie dla laików, ale właśnie dla nich tworzymy proste modele. Z tego modelu wynika na przykład, że przewodnik musi mieć jedno pasmo niecałkowicie wypełnione elektronami, bo tylko w takim paśmie mogą się one „przesypywać” (w bardziej precyzyjnym ujęciu – zmieniać stan energetyczny). Na przykład elektrony w niższym paśmie na rysunku 2 nie mogą zmieniać stanów, bo pasmo to jest całkowicie wypełnione. Piasek nie może się przesypywać, więc nie może też powstać prąd.

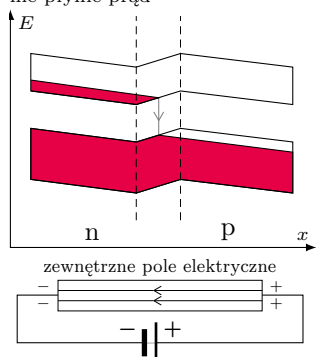
Złącze p-n powstaje wtedy, gdy trwale połączymy dwa półprzewodniki. Jeden z nich ma być typu n (rys. 3), czyli taki, którego najwyższe pasmo z elektronami zawiera ich bardzo mało (dlatego właśnie jest półprzewodnikiem, bo swobodnych ładunków jest w nim bardzo mało). Drugi ma być półprzewodnikiem typu p. W półprzewodniku typu p najwyższe pasmo z elektronami jest nimi prawie całkowicie wypełnione. Dzięki temu, że do całkowitego zapełnienia pasma trochę jeszcze brakuje, elektrony mają pewną swobodę poruszania się. Pasma ze swobodnymi (czyli mogącymi zmieniać stan) elektronami w półprzewodniku typu n jest położone wyżej niż w półprzewodniku typu p (rys. 3). Natychmiast po utworzeniu złącza elektrony zaczną spadać, czyli przechodzić z półprzewodnika typu n do półprzewodnika typu p (rys. 3). Zatem po jednej stronie styku powstanie ich nadmiar, a po drugiej niedomiar. Tak rozdzielone ładunki utworzą pole elektryczne, które spowoduje nachylenie poziomów i zahamuje dalszy przepływ elektronów (rys. 4). W ten sposób ustali się równowaga. W obszarze przejściowym nie ma elektronów swobodnych, które mogłyby utworzyć prąd.

Jakie są własności diody (złącza p-n)? Przyłożymy najpierw do niej takie napięcie, że linie pola są od warstwy n do warstwy p (rys. 5).

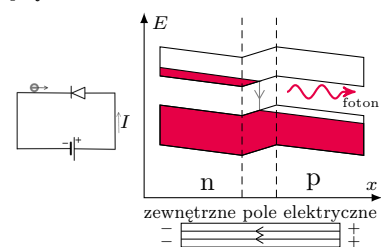
Poziomy i pasma nachylają się tak, że obszar bez elektronów swobodnych zwiększa się. Elektrony nie mogą tego obszaru „przeskoczyć”, zatem prądu w tę stronę nie ma.



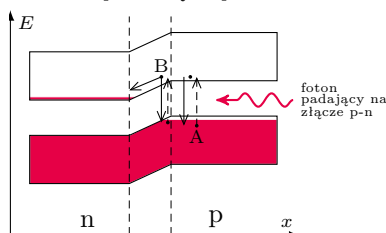
Rys. 5. Złącze p-n w sytuacji, w której nie płynie prąd



Rys. 6. Złącze p-n w sytuacji przepływu prądu



Rys. 7. Emisja fotonu podczas przejścia elektronu przez złącze p-n



Rys. 8. Pochłonięcie energii fotonu przez elektron w złącze p-n

Przykładamy teraz napięcie w drugą stronę (rys. 6).

Widać, że elektrony przemieszczają się tak, że mogą spadać do niższego pasma w warstwie typu p. **Dopóki złącze jest przyłączone do źródła napięcia, elektrony przez nie przepływają.** W ten sposób przez diodę **plynie** prąd. Mamy zatem w miarę proste, a zarazem wystarczająco precyzyjne wyjaśnienie, dlaczego dioda przewodzi prąd tylko w jedną stronę. Możemy również wyjaśnić, dlaczego prąd powstaje tylko po przekroczeniu pewnego napięcia progowego. Na rysunku 4 widać, że obszar przejściowy między obu półprzewodnikami jest pozbawiony elektronów swobodnych. Dopiero odpowiednio silne pole może je przesunąć do krawędzi tego obszaru, skąd już mogą spadać i poruszać się dalej.

Dlaczego dioda może świecić? Podobnie jak w atomie, elektrony spadając na niższy poziom, muszą pozbyć się nadmiaru energii. W niektórych półprzewodnikach emitują wtedy foton (rys. 7). W innych może to być fonon. Jak widać, warstwa typu p musi być w diodzie świecącej tak cienka, by nie pochłaniała powstałych fotonów. Złącze p-n jest również podstawą działania ogniw fotowoltaicznych i to także wyjaśnia nasz prosty model. W ogniwach zachodzi proces odwrotny do świecenia diody – padające fotony są pochłaniane przez elektrony. Przy wystarczającej energii fotonów elektrony w warstwie p przechodzą do wyższego pasma (rys. 8).

Te oddalone od strefy przejściowej prawie natychmiast spadną znowu do niższego pasma (elektron A z rys. 8). To samo dotyczy elektronów pochłaniających foton w warstwie typu n. Jednak elektron na granicy strefy przejściowej (B na rys. 8) ma dwie możliwości. Może spaść jak jego kolega A. Może też „stoczyć się” w lewo i wtedy już nie może spaść do niższego pasma. Właśnie te elektrony powodują, że półprzewodnik typu n staje się zaciskiem ujemnym ogniwa, a typu p – dodatnim. Widać, jak ważne dla działania ogniw fotowoltaicznych jest nachylenie poziomów w strefie przejściowej.

Przedstawiony model jest dużym uproszczeniem złącza p-n, nie może zatem wyjaśnić wielu efektów w nim występujących. Jednak naszym zdaniem wyjaśnia zadowalająco wszystkie najbardziej istotne cechy diody, będąc jednocześnie modelem dość prostym. Zauważmy, że nie tylko nie ma w nim dziur – ani w sensie dosłownym, ani w przenośnym, ale również nie posługujemy się w nim pojęciem dyfuzji, które występuje w profesjonalnym opisie. Jego użycie jest kolejnym dużym utrudnieniem dla laików. Wiedzą oni bowiem ze szkolnej termodynamiki, że dyfuzja jest procesem powolnym. Trudno zatem zrozumieć, że w przypadku złącza p-n działa praktycznie natychmiastowo.

Naszym zdaniem przedstawiony model działania diody może być z pożytkiem wprowadzony do nauczania w szkołach ponadpodstawowych. Pojęcie diody i tranzystora występuje, i słusznie, w obowiązującej podstawie programowej. Można też w podobny sposób wyjaśnić działanie tranzystora polowego, ale to już byłby temat na osobny artykuł.

Co można napisać na odwróconym kalkulatorze?

Tomasz JANISZEWSKI

W książce pt. „Jak UNIX tworzył historię” Brian Kernighan opisuje sytuację z 1972 roku, kiedy to jeden z jego kolegów z Bell Labs zadzwonił do niego i zapytał, jakie słowa może wyświetlić na kalkulatorze trzymany do góry nogami. Na pytanie, jakie litery są dostępne, usłyszał: „BEhILOS”. Po chwili kolega otrzymał listę wszystkich słów.



Artykuł na Wikipedii zamieszczony pod hasłem „Calculator spelling” wspomina większy zbiór dostępnych liter, a mianowicie „BEghILOSZ”. Zwróciłem się z tym do Briana Kernighana, który stwierdził, że nie przypomina sobie liter „g” (6) oraz „Z” (2) i pozostawi swoją historię bez zmian.



Rozwiązanie zadania M 1714.

Niech \mathcal{A} oraz \mathcal{B} będą zbiorami możliwych ustawień pewnej liczby gońców na, odpowiednio, białych i czarnych polach, tak aby żadne dwa nie zagrażały sobie nawzajem. Zauważmy, że obrót o 90° zadaje bijekcję między zbiorami \mathcal{A} i \mathcal{B} . Ponieważ gońce z białych pól nie atakują gońców z czarnych pól, zbiór wszystkich dopuszczalnych konfiguracji odpowiada iloczynowi kartezjańskiemu $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, wobec czego jego liczebność to $|\mathcal{A}|^2$.

POSIX (*Portable Operating System Interface for UNIX*) to standard opisujący działanie systemu operacyjnego, mający ułatwić uruchamianie programów na różnych systemach operacyjnych z rodziny UNIX.

POSIX-Extended Regular Expressions:

.	dowolny znak z alfabetu
AB	konkatenacja wyrażeń AB
\b	początek lub koniec słowa
a-z	dowolny znak z zakresu (a-z)
[...]	dowolny znak spośród wymienionych (np. [abc] jeden z a, b, c)
[^...]	żaden spośród wymienionych (np. [^abc] – żaden z a, b, c)
	lub (a b \equiv [ab])
()	grupowanie wyrażenia (np. (abc)* oznacza powtórzenie całego abc)
*	powtórzenie poprzedzającego wyrażenia 0 lub więcej razy
+	powtórzenie poprzedzającego wyrażenia 1 lub więcej razy (a+ \equiv aa*)
{m}	powtórzenie poprzedzającego wyrażenia dokładnie m razy (a{2} \equiv aa)
{m,}	powtórzenie poprzedzającego wyrażenia co najmniej m razy (a{2,} \equiv aaa*)
{m,n}	powtórzenie poprzedzającego wyrażenia co najmniej m, ale co najwyżej n razy (a{2,3} \equiv aa aaa)

Dodatkowo format ten wprowadza predefiniowane grupy znaków, np. [:digit:] \equiv [0-9].

Zakładamy, że na kalkulatorze można wpisywać zera wiodące, np. dopuszczamy słowo „solo”, odpowiadające liczbie 0705. Jeżeli chcemy wykluczyć takie słowa, poprawnym wyrażeniem regularnym będzie [behilos]*[behils].

Algorytmy oparte na przeszukiwaniu z nawrotami zasadniczo sprawdzają wszystkie możliwe dopasowania wzorca do tekstu. Tych może być jednak wykładnicza liczba, np. wyrażenie (a|aa)*b w tekście „aa...ab”. Warto zaznaczyć, że istnieją szybsze algorytmy, które działają w czasie liniowym względem długości przeszukiwanego tekstu, oparte na automatach skończonych (Δ_{18}^9).

W jaki sposób tak szybko udało się znaleźć wszystkie słowa? Było to możliwe dzięki użyciu wyrażenia regularnego do automatycznego przeszukania słownika. W tym artykule postaram się przybliżyć tę tematykę.

Wyrażenie regularne to sposób opisu języka wymyślony przez Stephena Kleenego w latach pięćdziesiątych ubiegłego wieku. Oczywiście języka formalnego, więc przez alfabet (Σ) będziemy tu rozumieli ustalony zbiór znaków. Słowo będzie oznaczać dowolny ciąg znaków z alfabetu ($w = a_1a_2 \dots a_n, a_i \in \Sigma$), a sam język będzie dla nas zbiorem słów. Na przykład komputery operują językiem binarnym, czyli zbiorem słów złożonych z 0 i 1. Innym przykładem są kody pocztowe. Każdy kod to jedno słowo, które składa się z następujących po sobie dwóch cyfr, myślnika i trójki cyfr. W tym przypadku alfabetem są cyfry i myślnik $\Sigma = \{-, 0, 1, \dots, 9\}$.

Wyrażenie regularne powstaje poprzez dowolne (w tym wielokrotne) złożenie kilku prostych operacji (| – alternatywy, \cdot – konkatenacji, czyli łączenia słów, * – powtórzenia). Definicję kodu pocztowego można streścić w jednej linii w formie następującego wyrażenia regularnego:

$(0|1|\dots|9) \cdot (0|1|\dots|9) \cdot - \cdot (0|1|\dots|9) \cdot (0|1|\dots|9) \cdot (0|1|\dots|9)$.

W praktycznych implementacjach dodano kilka usprawnień do definicji wyrażeń regularnych, tak aby były jeszcze łatwiejsze do zapisania i czytania. Niestety nie ma jednego wspólnego formatu definiowania wyrażeń regularnych. Chyba najpopularniejszym jest POSIX-Extended Regular Expressions wywodzący się z systemu UNIX: to tam Ken Thompson stworzył pierwszą implementację wyrażeń regularnych w edytorze ed, które następnie były przenoszone do kolejnych narzędzi, takich jak grep, sed czy awk.

Wycinek pełnego standardu znajduje się na marginesie. Korzystając z tej notacji, można by zapisać definicję kodu pocztowego w następującej postaci: $[0-9]\{2\}-[0-9]\{3\}$.

Wracając do historii z początku artykułu – żeby znaleźć wszystkie słowa, które można wyświetlić na odwróconym kalkulatorze, należy sprawdzić, czy słowa z danego języka (np. polskiego) są akceptowane przez następujące wyrażenie regularne: [behilos]+. W słowniku sjp.pl jest 239 takich słów. Przykłady znajdziemy, wpisując na kalkulatorze 50715 lub 31717:



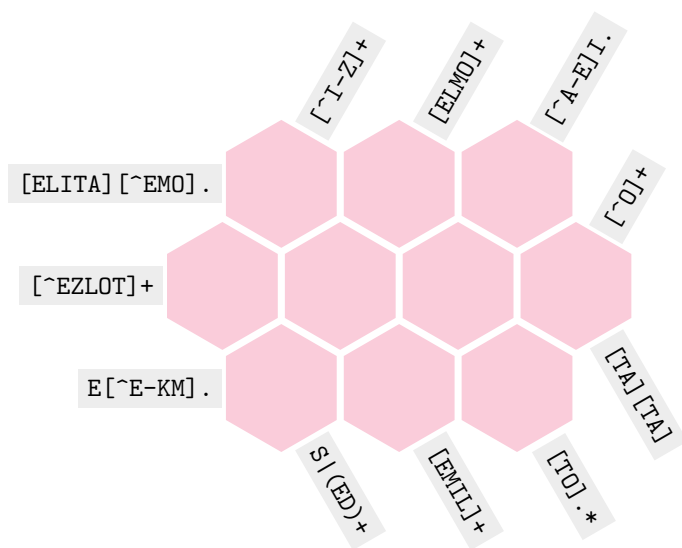
Jeśli w systemie zgodnym z POSIX (np. macOS lub GNU/Linux) zapiszemy wszystkie słowa w pliku slova.txt, to te możliwe do wyświetlenia na kalkulatorze znajdziemy poniższą komendą (ponieważ różne systemy w różny sposób traktują znak nowej linii, ograniczamy słowo przez znak końca słowa (\b) na początku i końcu):

```
grep "\b[behilos]+\b" slova.txt
```

O ile wyrażenia regularne wydają się idealnym narzędziem do przeszukiwania tekstu czy walidacji danych, to jednak należy ich używać ostrożnie. Większość silników stara się znaleźć najdłuższe dopasowanie, a to może wymagać sprawdzania wszystkich spójnych podciągów badanego tekstu. W dniu 20 lipca 2016 roku strona StackOverflow przestała działać właśnie przez takie zachowanie silnika wyrażeń regularnych dla wyrażenia, które miało znaleźć białe znaki na końcu komentarza. Feralny wpis miał 20 000 spacji zakończonych tekstem. Wyrażenie sprawdzało od początku wszystkie spacje, a kiedy napotkało tekst, zaczynało od kolejnej spacji, i tak

$$20\,000 + 19\,999 + 19\,998 + \dots + 3 + 2 + 1 = 200\,010\,000$$

razy – co spowodowało zawieszenie serwera. Co ciekawe, nie jest to najgorsze, co może nas spotkać przy korzystaniu z wyrażeń regularnych. Pesymistyczna złożoność używanych w praktyce algorytmów opartych na przeszukiwaniu z nawrotami (*backtracking*) może dojść do wykładniczej względem rozmiaru przeszukiwanego tekstu.



O ile wyrażenia regularne są potężnym narzędziem do szukania wzorca, to należy jednak pamiętać, że nie pozwalają zdefiniować dowolnego języka. Na przykład za pomocą wyrażenia regularnego nie sprawdzimy, czy wszystkie nawiasy są poprawnie zamknięte.

O językach regularnych pisaliśmy w Δ_{10}^{11} oraz Δ_{14}^6 .

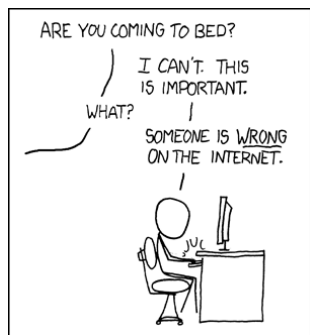
Rozrywkowym zastosowaniem wyrażeń regularnych są krzyżówki. W krzyżówce poniżej zadanie polega na dobraniu liter w taki sposób, aby wszystkie wyrażenia regularne były spełnione.



Ktoś w Internecie się myli! czyli o twierdzeniu Clairaut

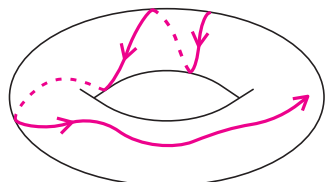
Michał MIŚKIEWICZ* Na jednym z kanałów edukacyjnych na platformie YouTube widziałem ostatnio dość popularny (ponad milion wyświetleń) 10-minutowy film. A w nim dwa błędy, o których chciałbym napisać.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk



Duty calls, Randall Munroe (xkcd.com/386)

Film Eugene Khutoryansky'ego *Beauty of Geodesics* można obejrzeć: youtu.be/NfqrCdAjiks



Tak nie wyglądają geodezyjne na torusie

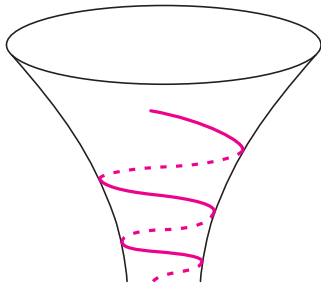
Nie można ślepo wierzyć w treści znalezione w Internecie, ale to już wszyscy wiemy. Zresztą film zawiera dużo pouczających animacji, więc nie zamierzam przestrzegać przed jego oglądaniem. Chciałbym zwrócić uwagę na inny aspekt sprawy – oba błędy wynikają z przesadnego zaufania do symulacji numerycznych. Symulacja to cudowna rzecz, zwłaszcza jeśli pozwala zwizualizować niełatwy fragment matematyki, jakim są krzywe geodezyjne. Ma jednak swoje ograniczenia, i czasami nie uciekniemy przed dobrą staromodną matematyką (taką uprawianą na papierze). Mam nadzieję, że ta teza znajdzie oparcie w poniższych przykładach.

Co to były za błędy?

Będzie tu mowa o *krzywych geodezyjnych*; można było o nich przeczytać m.in. w *Kartografii Płaszczyzaków* z Δ_{21}^7 . Krzywe geodezyjne na danej powierzchni (np. sferze, walcu albo torusie) odpowiadają prostym na płaszczyźnie i opisują ruch *prosto przed siebie*; w każdym razie na tyle prosto, na ile się da bez odrywania od powierzchni. W dobrym przybliżeniu geodezyjną uzyskamy, jeśli wzdłuż powierzchni poprowadzimy długi a wąski pasek papieru, nie zginając go przy tym.

Około 6. minuty filmu pojawiają się dwie geodezyjne na torusie. Jedna z nich początkowo ciasno nawija się wokół torusa (jak drut na cewce), by po pewnym czasie przenieść się na zewnętrzną stronę i tam już pozostać, okrążając torus po dużym obwodzie. Wbrew obserwacji poczynionej przez narratorkę jest to niemożliwe – geodezyjna, która nawinie się raz, musi to robić w nieskończoność, w równych odstępach czasu przechodząc przez punkt najbliższy środkowi.

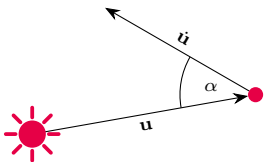
Potem widzimy geodezyjne na nieskończonym lejku, który ku dołowi robi się dowolnie wąski, ale nigdy nie kończy. Spośród kilku geodezyjnych, które początkowo kierują się ku środkowi lejka, niektóre wydostają się z powrotem na górę, ale pozostałe wchodzi głębiej i głębiej. Narratorka ostrzega, że żegnamy się z nimi na zawsze – ale to również nie jest prawdą. Pojedyncza geodezyjna wysłana wprost ku środkowi lejka rzeczywiście jest skazana na wieczny spadek,



Tak nie wyglądają geodezyjne na lejku

Dla skrócenia zapisu będziemy czasem pomijać argument t , choć oczywiście wszystkie wielkości są zależne od czasu.

Tak jak wcześniej, przez przyspieszenie krzywej $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ rozumiemy tu wektor drugich pochodnych $\ddot{\mathbf{u}} = (\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \ddot{u}_3)$. To nie to samo co przyspieszenie odczuwane przez Płasczaka, którego percepcja ogranicza się do powierzchni \mathcal{M} ; dla niego ruch po geodezyjnej nie wiąże się z przyspieszeniem (więcej na ten temat w *Kartografii Płasczaków*).



Moment pędu:
 $|\dot{\mathbf{u}}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \sin \alpha$

Tak naprawdę kąt między \mathbf{n} i $\dot{\mathbf{u}}$ może wynosić $90^\circ - \alpha$ lub $90^\circ + \alpha$. Najwygodniej jest więc przyjąć $u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1$ za definicję L , co niesie ze sobą konwencję dotyczącą znaku α : kąt ten uważamy za dodatni lub ujemny zależnie od tego, w którą stronę wskazuje $\dot{\mathbf{u}}$.

ale *wszystkie* pozostałe prędzej czy później muszą się wydzwignąć i wyjść na powierzchnię.

Jak widać, nie są to błędy wołające o pomstę do nieba. W pierwszym przypadku winna jest zapewne dokładność symulacji (i stopniowe nawarstwianie się błędów numerycznych), a w drugim zwyczajny brak cierpliwości (prędzej czy później doczekalibyśmy się powrotu geodezyjnych marnotrawnych). Ciekawe jest jednak to, że w obu przypadkach możemy z właściwą matematyce pewnością wykluczyć opisane zachowanie przy użyciu tego samego narzędzia: *twierdzenia Clairaut*.

Dwa słowa o geodezyjnych

Będzie to jednak wymagało pewnego wstępu. Zaczniemy od punktowego ciała (o jednostkowej masie), którego ruch po przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^3 jest opisany funkcją $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (czyli *krzywą*) – innymi słowy, pozycja ciała w chwili t to $\mathbf{u}(t)$. Chwilowa prędkość ciała to nic innego jak pochodna $\dot{\mathbf{u}}(t)$, a chwilowe przyspieszenie to druga pochodna $\ddot{\mathbf{u}}(t)$. Oczywiście jeśli przyspieszenie jest zerowe, to prędkość nie ulega zmianie. Ale jest też prawdziwe ciut ogólniejsze stwierdzenie:

Stwierdzenie. Jeśli w każdej chwili t przyspieszenie $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ jest prostopadłe do prędkości $\dot{\mathbf{u}}(t)$, to szybkość ruchu $|\dot{\mathbf{u}}(t)|$ pozostaje niezmienna.

Dowód. Wymaga to od nas obliczenia pochodnej kwadratu szybkości:

$$\frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{u}}|^2 = \frac{d}{dt} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) = 2\dot{u}_1 \ddot{u}_1 + 2\dot{u}_2 \ddot{u}_2 + 2\dot{u}_3 \ddot{u}_3 = 2\langle \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}} \rangle = 0.$$

Wynik okazuje się dwukrotnością iloczynu skalarnego $\dot{\mathbf{u}}$ i $\ddot{\mathbf{u}}$, który jest zerowy dzięki prostopadłości $\dot{\mathbf{u}} \perp \ddot{\mathbf{u}}$. Skoro pochodna $|\dot{\mathbf{u}}|^2$ po czasie jest zerowa, to wielkość ta pozostaje stała. \square

Czytelnik z pewnością zna ten fenomen na przykładzie ruchu jednostajnego po okręgu – przyspieszenie dośrodkowe jest niezerowe, ale ponieważ działa wzdłuż promienia okręgu, powoduje jedynie zmianę kierunku $\dot{\mathbf{u}}$, przy czym $|\dot{\mathbf{u}}|$ pozostaje stałe. Podobnie wygląda ruch po geodezyjnej:

Definicja. Mając daną powierzchnię $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$, krzywą $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ nazwiemy geodezyjną, jeśli w każdej chwili wektor przyspieszenia $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ jest prostopadły do \mathcal{M} w punkcie $\mathbf{u}(t)$.

Wektor $\ddot{\mathbf{u}}$ jest prostopadły do \mathcal{M} , więc w szczególności prostopadły do chwilowej prędkości $\dot{\mathbf{u}}$. Ze Stwierdzenia wiemy zatem, że szybkość ruchu po geodezyjnej $|\dot{\mathbf{u}}|$ jest stała!

Zasada zachowania momentu pędu

Podobieństwa idą jeszcze dalej. W przypadku ruchu jednostajnego po okręgu, albo też ruchu Ziemi po orbicie słonecznej, zachowany jest moment pędu definiowany jako wartość prędkości $|\dot{\mathbf{u}}|$ przemnożona przez długość promienia wodzącego $|\mathbf{u}|$ (czyli odległość \mathbf{u} od początku układu współrzędnych) i sinus kąta α między tymi dwoma wektorami (zob. rysunek obok):

Zasada zachowania momentu pędu. Jeśli $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest krzywą na płaszczyźnie i w każdej chwili przyspieszenie $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ jest równoległe do wektora $\mathbf{u}(t)$, to moment pędu $L(t) = |\dot{\mathbf{u}}(t)| \cdot |\mathbf{u}(t)| \cdot \sin \alpha(t)$ jest stały w czasie.

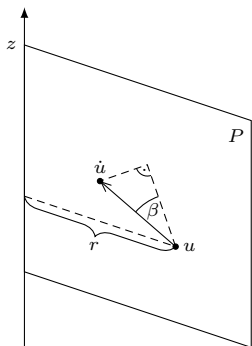
Dowód. Jeśli obrócimy \mathbf{u} o 90° , otrzymamy wektor $\mathbf{n} = (-u_2, u_1)$ tworzący z $\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ kąt $90^\circ - \alpha$. Z własności iloczynu skalarnego mamy wtedy

$$u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1 = \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = |\mathbf{n}| \cdot |\dot{\mathbf{u}}| \cdot \cos(90^\circ - \alpha).$$

Ponieważ $|\mathbf{n}| = |\mathbf{u}|$ oraz $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, otrzymany wynik to nic innego jak L . Zrózniczkowanie tego wyrażenia względem czasu daje nam

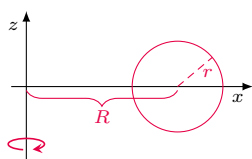
$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} (u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1) = \dot{u}_1 \ddot{u}_2 + u_1 \ddot{u}_2 - \dot{u}_2 \ddot{u}_1 - u_2 \ddot{u}_1.$$

Ponadto według założeń mamy równości $\ddot{u}_1 = \lambda u_1$ i $\ddot{u}_2 = \lambda u_2$ dla pewnej liczby λ , co po podstawieniu redukuje pozostałe dwa wyrazy, a zatem $\frac{d}{dt} L = 0$. \square

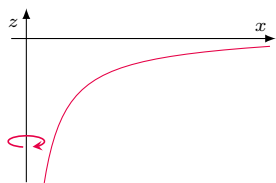


Powyżej oznaczyliśmy \mathbf{u} jako punkt, a nie wektor, gdyż punkt zaczepienia (początek układu współrzędnych) nie gra tu żadnej roli

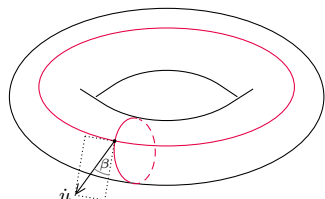
Intuicja stojąca za ZZMP II: przyspieszenie ku osi z lub równoległe do z nie powoduje obrotu wokół tej osi; na moment pędu ma jedynie wpływ przyspieszenie *prostopadłe* do P .



Torus \mathcal{T} powstaje przez obrót okręgu $(x - R)^2 + z^2 = r^2$



A lejek \mathcal{L} przez obrót ramienia hiperboli $z = -1/x$



Kąt β między $\dot{\mathbf{u}}$ i P to ten sam kąt, co między $\dot{\mathbf{u}}$ i południkiem

Jak to jest naprawdę

Na pierwszy ogień weźmy geodezyjną na lejku \mathcal{L} . Jeśli jej początkowa prędkość $\dot{\mathbf{u}}(0)$ ma kierunek południkowy (wprost ku osi z lub wprost przeciwnie), to tak też pozostaje, i geodezyjna może zginąć w czeluściach lejka. W przeciwnym przypadku mamy $\beta(0) \neq 0$, a zatem także $r(0) \sin \beta(0) \neq 0$. Przypuśćmy, że taka geodezyjna również przepada, czyli że $u_3(t) \rightarrow -\infty$ przy $t \rightarrow \infty$. Wówczas $r(t)$, czyli odległość $\mathbf{u}(t)$ od osi z (równa $1/|u_3(t)|$), zbiega do zera. To samo możemy powiedzieć o wielkości $r(t) \sin \beta(t)$, gdyż $|\sin \beta(t)|$ nie przekracza wartości 1. Tymczasem zbieżność $r(t) \sin \beta(t) \rightarrow 0$ jest wykluczona przez twierdzenie Clairaut!

Z torusem \mathcal{T} jest trochę inaczej. Przyjmijmy, że w chwili 0 geodezyjna \mathbf{u} przecina wewnętrzną krawędź torusa, lub równoważnie, że $r(0) = R - r$ (jest to

W trzech wymiarach ma miejsce analogiczna zasada. Przyjmijmy oś z jako oś obrotu i wprowadźmy pewne oznaczenia:

- $r(t) = \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$ – odległość $\mathbf{u}(t)$ od osi z ;
- $P(t)$ – płaszczyzna wyznaczona przez oś z oraz punkt $\mathbf{u}(t)$;
- $\beta(t)$ – kąt między wektorem prędkości $\dot{\mathbf{u}}(t)$ a płaszczyzną $P(t)$.

Wówczas zachodzi:

Zasada zachowania momentu pędu II. Jeśli $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest krzywą w przestrzeni i w każdej chwili przyspieszenie $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ leży w płaszczyźnie $P(t)$, to moment pędu $L(t) := |\dot{\mathbf{u}}(t)| \cdot r(t) \cdot \sin \beta(t)$ względem osi z jest stały w czasie.

Dowód. Spójrzmy na całą sytuację z góry, czyli rozważmy ewolucję dwóch pierwszych współrzędnych: $\mathbf{v} := (u_1, u_2)$. Warunek $\ddot{\mathbf{u}} \in P$ oznacza dokładnie tyle, że $\dot{\mathbf{v}}$ wskazuje w kierunku równoległym do \mathbf{v} . Z dwuwymiarowej zasady zachowania momentu pędu wiemy więc, że $u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1$ jest stałe.

Pozostaje przekonać się, że wielkość ta pokrywa się z $L = |\dot{\mathbf{u}}| \cdot r \cdot \sin \beta$. Tak jak poprzednio, wprowadźmy w tym celu wektor $\mathbf{n} = (-u_2, u_1, 0)$. Jest on prostopadły do P , więc z wektorem $\dot{\mathbf{u}}$ tworzy kąt $90^\circ - \beta$, w rezultacie

$$u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1 = \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = |\mathbf{n}| \cdot |\dot{\mathbf{u}}| \cdot \cos(90^\circ - \beta).$$

Jako że $|\mathbf{n}| = r$, interesujące nas wielkości rzeczywiście się pokrywają. \square

Twierdzenie Clairaut

Załóżmy teraz, że \mathcal{M} jest powierzchnią obrotową, powstałą przez obrót wokół osi z jakiejś krzywej leżącej w płaszczyźnie xz , na przykład jedną z poniższych:

$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \right\}, \quad \mathcal{L} = \left\{ (x, y, z) : z = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}.$$

Każdą powierzchnię obrotową możemy podzielić na *równoleżniki* – okręgi powstające jako ślad któregoś z punktów $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ przy obrocie wokół osi z . Możemy ją też pociąć na *południki* – tniemy wówczas wzdłuż płaszczyzny wyznaczonej przez punkt $\mathbf{p} \in \mathcal{M}$ oraz oś z .

Jeśli krzywa $\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ jest geodezyjną, to zgodnie z definicją przyspieszenie $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ jest wektorem prostopadłym do \mathcal{M} w $\mathbf{u}(t)$, a więc skierowanym ku osi z . Innymi słowy, wektor $\dot{\mathbf{u}}(t)$ zawsze należy do $P(t)$, i zachodzi zasada zachowania momentu pędu. Uwzględniając stałość $|\dot{\mathbf{u}}(t)|$ (na mocy Stwierdzenia), wyprowadziliśmy w ten sposób:

Twierdzenie Clairaut. Jeśli \mathbf{u} jest krzywą geodezyjną na powierzchni obrotowej, to wielkość $r(t) \sin \beta(t)$ jest stała w czasie.

Pożyteczna jest obserwacja, że w opisanej przez nas sytuacji β jest kątem między wektorem prędkości $\dot{\mathbf{u}}$ a południkiem, na którym leży \mathbf{u} . Jest tak dlatego, że każdy wektor styczny do \mathcal{M} w \mathbf{u} rozkłada się na składową styczną do południka (czyli leżącą w P) i składową styczną do równoleżnika (czyli prostopadłą do P).

minimalna możliwa odległość od osi z). Pomijając skrajny przypadek $\beta = \pm 90^\circ$ (gdy geodezyjna krąży po owej wewnętrznej krawędzi), mamy $|\sin \beta(0)| < 1$. Twierdzenie Clairaut mówi nam, że w dowolnej chwili t zachodzi

$$|\sin \beta(t)| = \frac{r(0)}{r(t)} |\sin \beta(0)| \leq |\sin \beta(0)|,$$

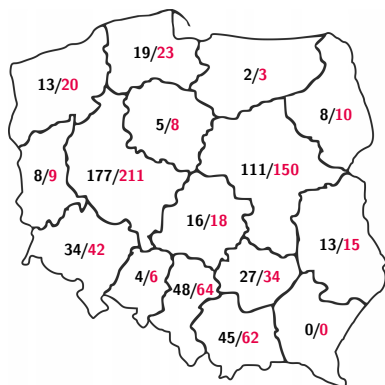
a więc również $|\cos \beta(t)| \geq |\cos \beta(0)| > 0$. Jak wspomnieliśmy wcześniej, $\beta(t)$ jest kątem między prędkością a kierunkiem południkowym, więc dolne ograniczenie na $|\cos \beta(t)|$ to dolne ograniczenie na składową prędkości odpowiedzialną za *nawijanie się* na torus. Po skończonym czasie t_0 geodezyjna musi więc powrócić do wewnętrznej krawędzi. Wówczas z twierdzenia Clairaut wiemy, że $\sin \beta(t_0) = \sin \beta(0)$, więc historia się powtarza, być może z równoleżnikowym przesunięciem.

życie na żywo 135

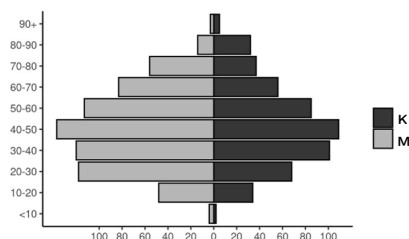
O sekwencjonowaniu DNA pisałam w czerwcowym numerze *Delty*.

[1] *Int. J. Mol. Sci.* 2022, 23(9), 4532; <https://doi.org/10.3390/ijms23094532>
[2] *Int. J. Mol. Sci.* 2022, 23(9), 4532; <https://doi.org/10.3390/ijms23094532>

Z tych 27% tylko ok. 7% to sekwencje kodujące, zgodnie z kodem genetycznym, białko, pozostałe uczestniczą w regulacji tego procesu [1].



Liczba pobranych próbek w poszczególnych województwach. Kolorem oznaczono liczbę wszystkich próbek, a na czarno liczbę próbek od osób niespokrewnionych



Osł rzędnych: wiek w latach; odciętych: liczba jednostek; kobiety (K), mężczyźni (M)

W światowej populacji Słowianie stanowią 4,5%. W 2022 roku opublikowano pracę [2] podsumowując oznaczenie 1222 polskich genomów, w tym 1076 uczestników niespokrewnionych. Badania te zainicjowano w celu poszukiwania ludzkich genów sprzyjających zakażeniu koronawirusami. Uczestniczyło w nich kilkudziesięciu naukowców z kilkudziesięciu polskich laboratoriów. Okazało się, że mimo dużego obszaru polskich ziem i ruchliwości migracyjnej jesteśmy jako grupa etniczna zadziwiająco homogeni genetycznie, co więcej, dzielimy genetyczne dziedzictwo z innymi narodami europejskimi.

Średni wiek uczestników to 45 lat, z przewagą mężczyzn (697 wobec 525); grupa badanych nie stanowi jednak statystycznej reprezentacji Polaków. Nie włączono do badań mniejszości narodowych. Najczęstszymi zgłaszanymi przez badanych chorobami były nadciśnienie (13%), rak (4,6%), cukrzyca (4%), zaburzenia pracy

Kto ty jesteś? Polak mały!

W ciągu 40 lat po opracowaniu zautomatyzowanych procedur oznaczania chemicznej budowy długich fragmentów DNA zestaw metod zwanych sekwencjonowaniem został zastosowany do poznawania szczegółów budowy chemicznej dużych cząsteczek DNA, a nawet całych genomów (cząsteczek DNA obecnych w każdej komórce danego organizmu). Sekwencjonowanie wielu indywidualnych genotypów umożliwia zbudowanie wiedzy o wspólnocie sekwencji w gatunku. Obecnie uznaje się, że budowa chemiczna ludzkiego genomu została ostatecznie oznaczona w 2021 roku, co jeszcze nie znaczy, że zrozumiano **funkcje** wszystkich odcinków. Przyjęło się także, że w danej sekwencji poszukuje się odcinków kodujących odrębne białka, identyfikowanych jako geny. Ku zdziwieniu badaczy DNA okazało się, że za kodowanie białek w genomie człowieka i innych wyższych organizmów odpowiada ok. 27% całego genomu, odkrywanie funkcji pozostałych sekwencji jeszcze przed nami.

Poszczególni ludzie różnią się ponad 4 milionami indywidualnych sekwencji, które są odpowiedzialne za 0,1% różnic między dwoma niespokrewnionymi osobnikami. Indywidualny genotyp jest w ramach gatunku unikatowy, nie ma na świecie (oprócz bliźniąt monozygotycznych) dwu osobników o identycznych genotypach. Korzystają z tego faktu kryminolodzy, sprawia on natomiast trudności transplantologom.

Już na przełomie wieków w ramach tego samego gatunku zaczęto oznaczać różnice między genotypami, poszukując ich charakterystycznych sekwencji. Oznacza się np. sekwencje DNA związane z różnymi stanami patologicznymi, nazywając je w skrócie genomami – dla tkanek nowotworowych, w chorobach układu nerwowego, immunologicznych itd. Wnioskowanie wymaga zgromadzenia dużej liczby oznaczeń indywidualnych upoważniających do budowania statystycznie istotnych procedur terapeutycznych dla zdefiniowanej podgrupy badanych. Takie dane dają nadzieję na jednoznaczny diagnostykę, znalezienie specyficznej terapii, przewidywanie przebiegu życia danej osoby... Nierzadko stawiane są pytania o całe grupy etniczne, ich historie migracji i dziejowych spotkań. Genetyczne pozostałości najazdów mongolskich w średniowieczu znajduje się w DNA współczesnych Europejczyków, ślady spotkań ludzi neandertalskich z europejskimi *Homo sapiens* widoczne są do dziś w genomach tych ostatnich. Mieszkańcy Tybetu noszą geny wymarłej grupy denisowian (jaskinia na Uralu).

Zainteresowanie budzą też genomy izolowanych grup, np. z odległych wysp lub wysokich gór. Podjęto projekty medyczne oznaczania genomów mieszkańców Islandii, Holandii, Sardynii, a także badania większych grup ludzi połączonych wspólnotą narodową: 100 tysięcy genomów w Wielkiej Brytanii, 100 tysięcy genomów azjatyckich, „MY wszyscy” w USA i inne.

tarczycy lub Hashimoto (3%). U 86% uczestników nie stwierdzono innych powszechnych schorzeń.

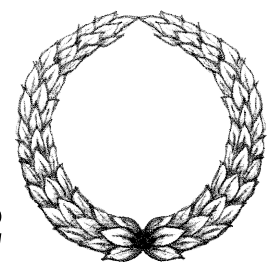
Spotykałam się przy okazji takich badań z pytaniami, czy analiza pojedynczego genotypu może nam powiedzieć, do jakiej grupy populacji należy dany człowiek. Otóż oczywiście – nie. Istnieją na świecie firmy, które analizując naszą próbkę DNA, oceniają, z jakiego regionu świata nadeszli prawdopodobnie nasi przodkowie. Są pewne sekwencje genowe dziedziczone przez epoki i terytoria – ale są to dane przybliżone i bardziej lub mniej statystycznie prawdopodobne.

Cytowana publikacja to pierwsze takie znaczące badanie genomów słowiańskich. Będzie ono uzupełniane i wykorzystywane w wielu celach badawczych. Praca jest dostępna w sieci.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



Wyniki Olimpiad 2021/2022



LXXIII Olimpiada Matematyczna

W zawodach pierwszego stopnia wzięło udział 1875 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 826 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 164 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej postanowił przyznać 43 tytuły laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):

Nagrody stopnia pierwszego

- Antoni Buraczewski** (31) – LO nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu
- Korneliusz Obarski** (31) – Prywatne LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie
- Kosma Kasprzak** (30) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Nagrody stopnia drugiego

- Mateusz Rajs** (26) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- Mateusz Gabzdyl** (24) – V LO w Bielsku-Białej
- Roman Gicala** (24) – I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie
- Maksymilian Wdowiarz-Bilski** (24) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- Marek Zbysiński** (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Michał Ciapka** (23) – V LO w Bielsku-Białej
- Piotr Kuc** (22) – I Ogólnokształcące Liceum Akademickie im. Janiny Kossakowskiej-Dębickiej w Kielcach

Nagrody stopnia trzeciego

- Stanisław Lada** (20) – Szkoła Podstawowa im. Zofii i Jędrzeja Moraczewskich w Sulejówku
- Paweł Pielasa** (20) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Witold Sikora** (20) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- Łukasz Skiba** (20) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Daniela Spurtacz** (20) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Helena Arendacz** (18) – XIII LO w Szczecinie
- Mariam Baghdasaryan** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- Bartłomiej Bychawski** (18) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu
- Mikołaj Cudny** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Kamil Dalidowicz** (18) – XIII LO w Szczecinie
- Miron Hunia** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Robert Kluszczyński** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- Miłosz Kwiatkowski** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Michał Lipiec** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- Piotr Łaba** (18) – I LO im. ONZ w Biłgoraju

- Hai An Mai** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Michał Mańka** (18) – VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach
- Piotr Marszałik** (18) – I LO im. Adama Mickiewicza w Białymstoku
- Aliaksandr Melnikau** (18) – I LO im. Adama Mickiewicza w Białymstoku
- Piotr Miernik** (18) – LO im. św. Jadwigi Królowej w Kielcach
- Adam Naskręcki** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Mateusz Pałucki** (18) – I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim
- Szymon Pawlus** (18) – I LO im. Leona Kruczkowskiego w Tychach
- Mateusz Przebieracz** (18) – VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach
- Jakub Słowikowski** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Agata Stępińska** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Jan Strzeszyński** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Franciszek Wrzosek** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Krzysztof Zdon** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Igor Klimczak** (17) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Konstanty Smolira** (17) – Prywatne LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie
- Artur Walczak** (17) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- Mateusz Wawrzyniak** (17) – Akademickie LO Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu

Nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie zadania z finału LXXIII Olimpiady Matematycznej otrzymały następujące osoby:

- Kosma Kasprzak** – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- Mateusz Rajs** – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- Konstanty Smolira** – Prywatne LO im. Królowej Jadwigi w Lublinie

Zadania oraz pełną wersję komunikatu można znaleźć na stronie www.om.edu.pl.



LXXI Olimpiada Fizyczna

To już ponad siedemdziesięcioletnia tradycja, że na wiosnę każdego roku odbywa się finał Olimpiady Fizycznej. Po dwóch latach ograniczeń związanych z pandemią koronawirusa Olimpiada odbyła się w normalnym trybie. W dniach 9 i 10 kwietnia 2022 roku zawodnicy rozwiązywali zadania finałowe, a 12 kwietnia w budynku Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego otrzymali dyplomy i nagrody. Również wcześniejsze etapy Olimpiady odbyły się według dawnego schematu – pierwszy stopień polegał na rozwiązaniu zadań w domu, drugi stopień, zarówno jego część teoretyczna, jak i doświadczalna, przeprowadzono w siedzibach Komitetów Okręgowych Olimpiady, czyli w 13 miastach uniwersyteckich.

Finał polegał na rozwiązaniu zadania doświadczalnego i trzech zadań teoretycznych. Zadanie doświadczalne inspirowane było zasadą działania mikroskopu sił atomowych i polegało na wyznaczeniu zależności siły oddziaływania dwóch niewielkich magnesów neodymowych od ich odległości, uczestnicy nie mieli jednak dynamometru. Jeden magnes umiejscowiony był na elastycznej (drewnianej) linijce, drugi był stacjonarny. Należało wyznaczyć częstotliwość drgań linijki z magnesem wokół położenia równowagi dla różnych odległości stacjonarnego magnes od magnesu na linijce i na tej podstawie wyznaczyć szukaną zależność. Zawodnicy mieli do dyspozycji oscyloskop oraz długi przewód miedziany, który służył do zrobienia cewki.

Trzy zadania teoretyczne dotyczyły różnych dziedzin fizyki. Jedno dotyczyło aktualnego problemu, polegało na wyznaczeniu okresu ruchu teleskopu Webba, umieszczonego niedawno na orbicie okołosłonecznej w pobliżu Ziemi. Zadanie to sprawiło zawodnikom dużo kłopotu. Autor jedyne poprawne rozwiązanie dostał specjalne wyróżnienie. Dwa kolejne zadania dotyczyły klasycznych działów fizyki – równowagi naładowanych elektrycznie baniek mydlanych oraz ruchu naładowanej cząstki w zmiennym polu magnetycznym.

Zadania na drugim stopniu Olimpiady też były ciekawe i miały elementy humorystyczne. Jedno z zadań teoretycznych, dotyczących efektu Dopplera i rzutu ukośnego, sformułowane zostało w ten sposób, że będący na równinie świstak emituje dźwięk (pisk) i odbiera dźwięk odbity od nadbiegającego drapieźnika, a więc o innej częstotliwości, a następnie rzuca kamieniem w tego drapieźnika. Zadanie to zostało skrytykowane przez biologów, bo przecież świstaki żyją w górach, a nie na równinach. Kolejne zadanie dotyczyło wyznaczenia przyspieszenia grawitacyjnego pochodzącego od półkuli o danej masie i promieniu. Półkula została opisana jako Ziemia „zgodna z symetryczną teorią”, to znaczy „z jednej strony płaska (żeby zadowolić płaskoziemców), a z drugiej okrągła (żeby zadowolić kulistoziemców)”. To zadanie ma rozwiązanie elementarne, niewymagające jawnego całkowania, jednak nikt z uczestników nie podał takiego rozwiązania. Zadanie doświadczalne na tym stopniu polegało na wyznaczeniu wartości pojemności dwóch kondensatorów i oporu opornika połączonych ze sobą w jeden obwód.

Pełna treść zadań wraz z rozwiązaniami znajduje się na stronie Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej: www.kgof.edu.pl.

Nagrodami w Olimpiadzie Fizycznej były bony podarunkowe oraz książki. Laureaci trzech pierwszych miejsc dostali też nagrody rzeczowe. Ponadto wszyscy finaliści będą zwolnieni z egzaminu maturalnego z fizyki, uzyskując ocenę najwyższą.

W ubiegłych latach pierwszych pięciu laureatów otrzymywało zaproszenia do udziału w Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej. W tym roku sytuacja się skomplikowała, Międzynarodowa Olimpiada Fizyczna, która miała się odbyć w Białorusi, została odwołana. Być może

odbędzie się w trybie zdalnym z innymi organizatorami, ale w momencie pisania tego tekstu (15 maja 2022 r.) nie ma ostatecznej decyzji w tej sprawie. Laureaci pierwszych pięciu miejsc wezmą natomiast udział w Europejskiej Olimpiadzie Fizycznej, która odbędzie się w Słowenii w końcu maja tego roku.

Do zawodów finałowych Olimpiady dopuszczono 80 osób, jedna z nich zrezygnowała, postanowiła wziąć udział w innym konkursie odbywającym się w tym samym czasie. Ostatecznie w finale uczestniczyło 79 uczniów ze wszystkich rejonów Polski, **tytuły laureatów przyznano 28 osobom**. Oto ich lista w porządku zajętych miejsc:

Korneliusz Piotr Obarski, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi w Lublinie, nauczyciel: Piotr Kononowicz

Kacper Paciorek, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, nauczyciel: Tomasz Zajac

Filip Tomasz Baciak, I Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Chrzanowie, nauczyciele: Anna Oprządek, Łukasz Białas, Maciej Maruszczak

Stanisław Marcin Karpiejczyk, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: Leszek Gładczuk

Mateusz Tomasz Kamiński, VI Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Krakowie, nauczyciele: Piotr Kamiński, Joanna Sobczuk

Piotr Borodako, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, nauczyciel: Witold Zawadzki

Antoni Buraczewski, III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu, nauczyciele: Paweł Zięba, Edyta Waszak-Dobrowolska

Jakub Łukasz Nowrotek, I Liceum Ogólnokształcące Dwujęzyczne im. E. Dembowskiego w Gliwicach, nauczyciel: Zbigniew Gawron

Stanisław Sawicki, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, nauczyciel: Dagmara Sokołowska

Piotr Jan Łaba, I Liceum Ogólnokształcące im. ONZ w Biłgoraju, nauczyciel: Krzysztof Wesołowski

Tomasz Piotr Grewenda, Uniwersyteckie I Liceum Ogólnokształcące im. Juliusza Słowackiego w Chorzowie, nauczyciel: Patryk Wolny

(ex aequo) **Michał Piotr Lipiec**, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, nauczyciel: Witold Zawadzki

(ex aequo) **Piotr Maksymiuk**, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi w Lublinie, nauczyciel: Piotr Kononowicz

Stanisław Antoni Pańkowski, II Liceum Ogólnokształcące im. księżnej Anny z Sapiechów w Białymstoku, nauczyciel: Dariusz Bossowski

Jeremiasz Igor Preiss, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu, nauczyciel: Marian Bąk

Jakub Krzysztof Jurczak, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: Elżbieta Zawistowska

Dawid Ratyński, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: Elżbieta Zawistowska

Grzegorz Piotr Adamiec, II Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. A. Frycza Modrzewskiego w Rybniku, nauczyciel: Grzegorz Łopatka

(ex aequo) **Paweł Karol Pielasa**, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: Elżbieta Zawistowska

(ex aequo) **Jakub Kośmicki**, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: Elżbieta Zawistowska

Kamil Marek Abendroth, Publiczne Liceum Ogólnokształcące Politechniki Łódzkiej w Łodzi, nauczyciel: Bogusława Kłos

Mikołaj Tomasz Kuziuk, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi w Lublinie, nauczyciele: Piotr Kononowicz, Grzegorz Zawadzki, Waldemar Berej

Szymon Niewadzi, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: Elżbieta Zawistowska

Justyna Strejczek, V Liceum Ogólnokształcące im. Ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie

Adam Łukasz Naskręcki, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: Elżbieta Zawistowska

Wojciech Kukielka, I Liceum Ogólnokształcące w Radzynie Podlaskim, nauczyciel: Leszek Szalast

Andrzej Franciszek Maroń, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie, nauczyciel: Włodzimierz Zielicz

Damian Wróblewski, I Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki w Łomży, nauczyciel: Marek Ciecierski



XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 7790 uczniów z 1013 szkół, do zawodów stopnia drugiego przystąpiło 1202 uczniów z 644 szkół, a do zawodów stopnia trzeciego – 158 uczniów ze 127 szkół. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów na posiedzeniu w dniu 26 marca br. postanowił przyznać 77 osobom tytuł laureata pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia.

Laureaci I stopnia

Michał Jacek (maksymalna liczba 30 punktów), Szymon Anders, Maria Bażęcka, Błażej Dratwa, Ignacy Kus, Stanisław Paweł Lada, Antoni Filip Mazur, Mateusz Grzegorz Miernik, Aleksander Adam Misterski, Stanisław Aleksander Mocny, Mateusz Jacek Orleański, Adam Sienkiewicz, Kamil Szmurło, Jakub Marcin Wilczyński, Mateusz Wilgoz, Michał Wolny, Jan Żąbkiewicz

Laureaci II stopnia

Piotr Karol Bacciarelli-Grobelny, Jakub Biekionis, Kazimierz Chomicz, Łukasz Ganczarek, Grzegorz Gniadzik, Bartosz Jażdżyk, Mateusz Jurach, Jan Kosiorowski, Julian Zbigniew Kuryłłowicz-Kaźmierczak, Oliwier Dawid Kwiatkowski, Juliusz Paweł Marszałek, Zuzanna Łucja Mosionek, Emilia Maria Pitera, Antoni Pusz, Tadeusz Ryłski, Filip Sopala, Karol Szczygieł, Filip Lech Śliwa, Szymon Urban, Jan Uss, Jakub Łukasz Wasilewski, Szymon Karol Wróblewski, Rafał Żebruń

Laureaci III stopnia

Artur Arczewski, Sebastian Bednarek, Zuzanna Buraczewska, Tymoteusz Czapkowski, Maria Czerwińska, Maria Dondzik, Jan Jakub Drabikowski, Michał Franciszek Fronczek, Piotr Furtak, Samuel Juszkiewicz, Piotr Wiktor Kaczmarek, Rafał Lucjan Karpiński, Marek Bernard Kazimierzczak, Filip Janusz Klim, Wojciech Kołodziejczyk, Maciej Kosiec, Stanisław Kowalczyk, Milena Kwiatkowska, Marcin Laskowski, Stanisław Piotr Lewandowski, Hai Khoi Mai, Krzysztof Maksymowicz, Michał Masny, Jan Micyk, Zofia Maria Mroziuk, Wojciech Ignacy Nowacki, Aleksander Olszewski, Mateusz Papiernik, Jędrzej Pastwa, Magdalena Anna Pawicka, Sławomir Pietrzak, Aleksandra Rachuna, Jeremi Jacek Rusin, Bolko Paweł Wieleba, Tomasz Włodarczyk, Adam Bogdan Wnuł, Błażej Zima

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów pragnie serdecznie podziękować Fundacji mBanku, która ufundowała stypendia dla najlepszych laureatów XVII OMJ, oraz szkołom organizującym zawody trzeciego stopnia XVII OMJ: V Liceum Ogólnokształcącemu w Bielsku-Białej, IX Liceum Ogólnokształcącemu im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie oraz Szkole Podstawowej nr 112 Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie.

Zadania oraz pełną wersję komunikatu można znaleźć na stronie www.omj.edu.pl.

LXV ogólnopolska Olimpiada Astronomiczna

Wraz z początkiem roku szkolnego 2021/2022 wystartowała 65. edycja Olimpiady Astronomicznej organizowanej corocznie dla uczniów szkół ponadpodstawowych.

Tegoroczna Międzynarodowa Olimpiada z Astronomii i Astrofizyki (IOAA) była organizowana przez Kolumbię. To właśnie w tym kraju powstały zadania dla uczestników Olimpiady, koordynowany był jej przebieg i tam były oceniane prace uczestników. Po raz kolejny jednak ze względu na pandemię COVID-19 Olimpiada odbywała się w formie

zdalnej. W tym roku w zawodach wzięli udział reprezentanci 47 krajów. Reprezentacja naszego kraju liczyła 5 osób i byli to tradycyjnie laureaci ogólnopolskiej Olimpiady Astronomicznej organizowanej przez Planetarium Śląskie w Chorzowie.

W tym roku w zawodach finałowych ogólnopolskiej Olimpiady Astronomicznej uczestniczyło 21 uczniów. Rozwiązali oni zadania teoretyczne oraz prowadzili obserwacje nocnego nieba. A oto laureaci:



- I miejsce: **Maciej Pilarczyk**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- II miejsce: **Aleksander Waczyński**, CXXII LO im. Ignacego Domeyki w Krakowie
- III miejsce: **Jakub Dunikowski**, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- IV miejsce – ex aequo – **Julia Tokarska** oraz **Maksymilian Wdowiarz**, oboje reprezentujący V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- VI miejsce: **Olaf Kurpiński**, XIII LO w Szczecinie
- VII miejsce – ex aequo – **Weronika Bednarek**, XIII LO w Szczecinie oraz **Paweł Ptaszek**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie

Pełna lista finalistów dostępna jest na stronie www.planetarium.edu.pl.



XXIX Olimpiada Informatyczna

W dniach 5–7 kwietnia 2022 roku odbyły się zawody III stopnia XXIX Olimpiady Informatycznej. Zostały one zorganizowane w trzech okręgach: Krakowie, Warszawie i Wrocławiu. Do zawodów III stopnia zakwalifikowało się 189 zawodników, którzy wyjątkowo nie mieli jeszcze zagwarantowanego tytułu finalisty, ze względu na to, że zawody II stopnia z powodu pandemii odbywały się zdalnie, przez Internet.

W ciągu dwóch dni zawodów III stopnia zawodnicy rozwiązywali w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Ceremonia zakończenia XXIX Olimpiady Informatycznej odbyła się 13 kwietnia w Warszawie. Komitet Główny przyznał tytuł finalisty Olimpiady 104 zawodnikom, którzy w zawodach III stopnia uzyskali co najmniej 124 punkty, i wyróżnił tych spośród finalistów, którzy zdobyli co najmniej 160 punktów. Komitet Główny przyznał tytuły laureata I, II i III miejsca zgodnie z poniższą listą (w nawiasach liczba zdobytych punktów oraz szkoła). Laureaci Olimpiady otrzymali stypendia z Programu Stypendialnego Olimpiady Informatycznej ufundowane przez NASK – PIB; stypendia przyznano także nauczycielom za osiągnięcia w pracy z uczniami uzdolnionymi informatycznie. Lista wszystkich finalistów jest dostępna na stronie oi.edu.pl.

Laureaci I miejsca

1. **Jan Strzeszyński** (447, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa)
2. **Michał Stawarz** (427, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa)
3. **Kacper Paciorek** (424, V LO im. Augusta Witkowskiego, Kraków)
4. **Jeremiasz Preiss** (407, LO nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław)
5. **Antoni Buraczewski** (404, LO nr III im. Adama Mickiewicza, Wrocław)
6. **Marek Zbysiński** (402, XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa)
7. **Bartłomiej Czarkowski** (392, III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)

Laureaci II miejsca

8. **Antoni Długosz** (353, V LO, Kraków)
9. **Hubert Wasilewski** (313, XIV LO, Warszawa)
10. **Mateusz Jacniacki** (310, I LO, Lublin)
11. **Franciszek Witt** (309, III LO, Gdynia)
- 12.–13. **Wiktor Krzeziński** (294, LO nr XIV, Wrocław)
- Krzysztof Olejnik** (294, I LO, Koszalin)
14. **Stanisław Karpiejczyk** (288, XIV LO, Warszawa)
15. **Jakub Pniewski** (287, III LO, Gdynia)

16. **Marek Muzyka** (283, LO nr XIV, Wrocław)
17. **Michał Kuśmirek** (273, XIII LO, Szczecin)
18. **Stanisław Czech** (268, III LO, Gdynia)
19. **Dominik Smater** (263, III LO, Gdynia)
- 20.–22. **Jakub Bereza** (253, XIV LO, Warszawa)
- Piotr Pływacz** (253, XIV LO, Warszawa)
- Paulina Żeleźnik** (253, LO nr XIV, Wrocław)

Laureaci III miejsca

23. **Franciszek Sobota** (244, VIII LO, Warszawa)
- 24.–25. **Maksym Iskiński** (240, XIII LO, Szczecin)
- Jakub Misiaszek** (240, II LO, Białystok)
26. **Joanna Suwaj** (238, LO nr XIV, Wrocław)
27. **Julia Kędziorska** (237, VI LO, Bydgoszcz)
28. **Tymon Cichocki** (236, III LO, Gdynia)
- 29.–30. **Bartosz Drabiński** (234, III LO, Gdynia)
- Łukasz Piekutowski** (234, I LO, Białystok)
- 31.–32. **Kajetan Ramsza** (233, XIV LO, Warszawa)
- Grzegorz Ryn** (233, V LO, Kraków)
33. **Wiktoria Rozkosz** (232, XIV LO, Warszawa)
34. **Konstanty Smolira** (221, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi, Lublin)
- 35.–36. **Jerzy Olkowski** (218, XIV LO, Warszawa)
- Igor Staszkievicz** (218, XIV LO, Warszawa)
- 37.–38. **Rafał Bawolek** (217, V LO, Kraków)
- Korneliusz Obarski** (217, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi, Lublin)
39. **Jakub Bartecki** (215, XIV LO, Warszawa)
40. **Łukasz Skiba** (214, XIV LO, Warszawa)
41. **Kamil Szymczak** (213, VIII LO, Warszawa)
42. **Andrzej Gwiazda** (211, XIV LO, Warszawa)
43. **Maksymilian Wdowiarz-Bilski** (210, V LO, Kraków)
44. **Marcin Giembicki** (209, VIII LO, Warszawa)
45. **Artur Wojtuszkiewicz** (207, XIV LO, Warszawa)
- 46.–47. **Jakub Gonera** (206, LO im. KEN, Warszawa)
- Piotr Łaba** (206, I LO, Biłgoraj)
48. **Jan Gwiazda** (202, XIV LO, Warszawa)

Szeregowanie zadań na superkomputerach z uwzględnieniem buforów impulsowych

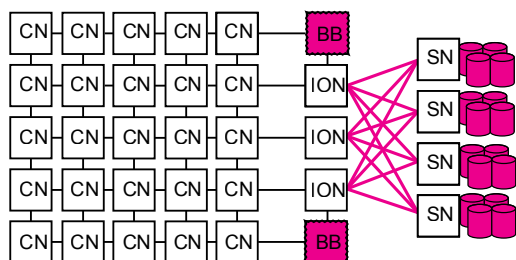
Jan KOPAŃSKI*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Praca magisterska autora pt. *Optimisation of job scheduling for supercomputers with burst buffers* otrzymała pierwszą nagrodę w XXXVIII Ogólnopolskim Konkursie Polskiego Towarzystwa Informatycznego na najlepsze prace magisterskie z Informatyki. Na jej podstawie powstał artykuł *Plan-Based Job Scheduling for Supercomputers with Shared Burst Buffers* opublikowany na konferencji Euro-Par 2021. Opiekunem pracy oraz współautorem publikacji był Krzysztof Rządca.

Co to jest superkomputer?

W najprostszym ujęciu superkomputer to bardzo wiele komputerów połączonych ze sobą specjalistyczną siecią. Sieć ta charakteryzuje się dużą przepustowością danych, krótkim czasem dostępu oraz przede wszystkim wysoką niezawodnością. Poniższy rysunek prezentuje schemat superkomputera.



Źródło: <https://glennklockwood.blogspot.com>

Pojedynczy komputer w sieci nazywamy węzłem obliczeniowym (CN). Oprócz węzłów obliczeniowych istnieją także inne typy węzłów, np. węzły operacji wejścia/wyjścia (ION), które przekierowują ruch z sieci łączącej węzły obliczeniowe do macierzy dyskowych (SN) tworzących główną pamięć trwałą superkomputera.

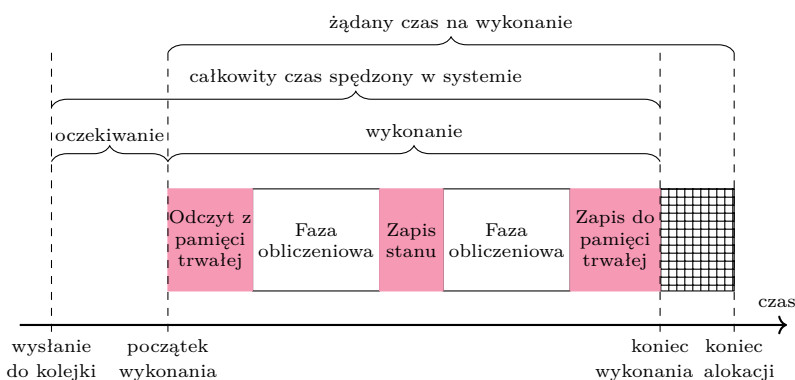
O superkomputerach pisaliśmy już w *Delcie* w 2017 roku („Superkomputery”, Δ_{17}^7). Od tego czasu powstały trzy superkomputery, które według rankingu TOP500 były w czasie pisania tego artykułu najszybsze na świecie: amerykańskie Summit i Sierra oraz szybszy od nich japoński Fugaku. Fugaku posiada 158 976 węzłów obliczeniowych, każdy z procesorem specjalnej konstrukcji w architekturze ARM wyposażonym w 48 rdzeni obliczeniowych. Węzły połączone są za pomocą sieci w topologii sześciowymiarowego torusa. Pojedynczy węzeł ma teoretyczną przepustowość 40,8 GB/s.

Bufory impulsowe

Problemem podkreślanym od wielu lat jest stale zwiększająca się różnica pomiędzy wydajnością jednostek obliczeniowych a przepustowością dostępu do pamięci trwałej. Wraz z rosnącą liczbą węzłów rośnie wydajność obliczeniowa superkomputerów. Za tym wzrostem nie nadąża jednak rozwój pamięci trwałych. Również przepustowość pomiędzy węzłami obliczeniowymi a główną pamięcią trwałą jest ograniczona. Próbą rozwiązania tego problemu są właśnie bufory impulsowe (*burst buffers*, oznaczone na diagramie BB). Bufory impulsowe to w uproszczeniu inteligentnie brzmiący neologizm odnoszący się do szybkich dysków SSD umieszczonych pomiędzy węzłami obliczeniowymi a główną pamięcią trwałą.

Programy uruchamiane na superkomputerach składają się zazwyczaj z naprzemiennie następujących po sobie faz obliczeniowych oraz faz zapisu i odczytu (patrz rysunek na dole strony).

Typowym scenariuszem w fazie zapisu i odczytu jest zapis stanu wykonania programu: programy periodycznie zapisują swój globalny stan po wykonaniu kolejnych faz obliczeń na wypadek wyłączenia (czyli po prostu ich przerwania) lub błędu. Taki globalny zapis stanu generuje nagły ogromny strumień danych, który może przewyższyć przepustowość zapisu do głównej pamięci trwałej. Bufory impulsowe umożliwiają szybkie zaabsorbowanie zapisu stanu, wznowienie obliczeń, a następnie w ograniczonym tempie przesłanie zapisu do głównej pamięci trwałej. Bufory impulsowe pozwalają także m.in. na załadowanie danych wejściowych przed rozpoczęciem zadania czy rozszerzenie pamięci RAM.



Ćwiczenie dla Czytelnika Znającego
 Programowanie Liniowe: Dany jest
 superkomputer posiadający N węzłów
 obliczeniowych i M buforów impulsowych,
 pojemność każdego bufora wynosi B .
 W kolejce znajduje się K zadań. Każde
 zadanie to trójka (n_i, b_i, t_i) oznaczająca
 kolejno: wymaganą liczbę węzłów,
 pojemność bufora per węzeł oraz czas
 rezerwacji. Zadanie może otrzymać wiele
 buforów impulsowych. Dla danego węzła
 wymagana pojemność bufora nie może
 zostać przydzielona do więcej niż jednego
 bufora impulsowego. Napisać program
 całkowitoliczbowy, który będzie
 maksymalizował wykorzystanie zasobów.

Algorytm 1. Agresywne szeregowanie z dopełnianiem

```

1: procedure EASY-BACKFILLING( $Q$ )
2:   for  $J \in Q$  do                                ▷  $Q$  – kolejka zadań oczekujących na wykonanie
3:     if  $J$  może otrzymać wymagane procesory i buforów impulsowe then
4:       Uruchom  $J$  i usuń je z  $Q$                     ▷ Alokacje nie mogą na siebie nachodzić
5:     else
6:       Przerwij pętlę
7:    $J^* \leftarrow$  zdejmij pierwsze zadanie z  $Q$ 
8:   Zarezerwuj procesory [i buforów impulsowe] dla  $J^*$  w najwcześniejszym
   możliwym momencie w przyszłości
9:   for  $J \in Q$  do                                ▷ Alokacje i rezerwacje nie mogą na siebie nachodzić
10:    if  $J$  może otrzymać wymagane procesory i buforów impulsowe then
11:      Uruchom  $J$  i usuń je z  $Q$ 
12:   Usuń rezerwacje zasobów dla  $J^*$ 
13:   Wstaw  $J^*$  na początek  $Q$ 

```

Problem szeregowania zadań

Z superkomputera korzystają zazwyczaj dziesiątki osób jednocześnie. Każdy użytkownik wysyła do systemu swoje zadania, które następnie są kolejgowane i oczekują na wykonanie. Zadanie składa się z programu do wykonania oraz deklaracji wymaganych zasobów: ile węzłów/rdzeni obliczeniowych, pamięci RAM i buforów impulsowych jest potrzebnych i na jaki czas. Kluczowy jest ostatni parametr: jeśli program nie zakończy się samoistnie, to po upływie przydzielonego czasu zostanie on wywłaszczony.

Superkomputery sterowane są przez zaawansowane oprogramowanie nazywane systemami zarządzania zasobami i szeregowania zadań. Najpopularniejszym obecnie systemem tego typu jest SLURM (*Simple Linux Utility for Resource Management*). To te systemy odpowiadają za przydział zasobów do zadań i kolejność ich wykonania. Celami tych systemów są:

1. Maksymalizacja ciągłego wykorzystania zasobów superkomputera.
2. Minimalizacja czasu spędzonego w systemie przez każde zadanie (czas oczekiwania na rozpoczęcie + czas wykonania).
3. Sprawiedliwy przydział zasobów i unikanie „zagłodzenia”, czyli sytuacji, w której zadanie oczekujące w kolejce przez długi czas nie otrzymuje potrzebnych zasobów.

W rozważaniach teoretycznych zakłada się często, że zadania nie mogą zażądać pojedynczych rdzeni, tak jak ma to miejsce w praktyce, a całe węzły obliczeniowe. Pamięć RAM, jako zasób lokalny względem węzłów, może zostać wtedy pominięta w rozważaniach. Problem szeregowania zadań sprowadza się wówczas do optymalizacji przydziału procesorów – węzłów obliczeniowych. Wprowadzenie buforów impulsowych znacząco komplikuje ten problem, ponieważ podobnie jak procesory, buforów impulsowe są zasobem globalnym.

Algorytmy szeregowania zadań

Najpopularniejszym algorytmem szeregowania zadań jest szeregowanie z dopełnianiem (*backfilling*). Istnieje

kilka wariantów tego algorytmu. SLURM implementuje konserwatywny algorytm szeregowania z dopełnianiem. My natomiast skupimy się na wariantcie „agresywnym”, który przedstawia **algorytm 1**.

Na wejściu dana jest kolejka zadań oczekujących na wykonanie. Na początku uruchamiamy kolejne zadania z kolejki tak długo, aż natrafimy na pierwsze zadanie, dla którego nie ma wystarczająco dużo wolnych zasobów w systemie (linie 2–7). Wówczas tworzymy rezerwacje zasobów dla tego zadania w najwcześniejszym możliwym momencie w przyszłości, w oparciu o przewidywane czasy zakończenia uruchomionych już zadań (linia 8). Następnie staramy się uruchomić pozostałe zadania w kolejce, tak aby nie opóźnić zadania z rezerwacjami (linie 9–11), i w końcu wstawiamy to zadanie na początek kolejki (linie 12–13).

Istotą problemu w obecnych implementacjach szeregowania z dopełnianiem jest naiwne rozszerzenie ich o obsługę buforów impulsowych. Alokacja zasobów w systemie SLURM została dodana poza procedurę szeregowania z dopełnianiem (by to odwzorować w linii 8, buforów impulsowe ujęliśmy w nawiasy kwadratowe). To rozwiązanie może prowadzić jednak do głodzenia zadań wymagających buforów impulsowych.

Symulowane wyżarzanie

Jak widać, algorytm szeregowania z dopełnianiem jest stosunkowo prosty. Szeregowanie zadań można ulepszać na dwa główne sposoby:

1. Użytkownicy zazwyczaj deklarują wymagany czas dla zadania znacznie dłuższy od rzeczywistego czasu jego działania. Zamiast korzystać z czasów podanych przez użytkowników przy tworzeniu rezerwacji, można oszacować rzeczywisty czas działania każdego zadania. Dobrym narzędziem do tego jest uczenie maszynowe, np. drzewa decyzyjne czy wzmacnianie gradientowe (*gradient boosting*).
2. Stworzyć bardziej wyrafinowane algorytmy szeregowania zadań. Do tego można wykorzystać znane metody optymalizacyjne, takie jak algorytmy

genetyczne lub symulowane wyżarzanie, bądź ponownie zdać się na uczenie maszynowe za pomocą uczenia ze wzmocnieniem.

My skupimy się na tym drugim podejściu, a konkretniej stworzymy algorytm szeregowania zadań przy użyciu symulowanego wyżarzania. Symulowane wyżarzanie to algorytm heurystyczny przeszukujący pewną przestrzeń rozwiązań w poszukiwaniu minimum globalnego (najlepszego rozwiązania) dla zadanej funkcji celu. W każdej kolejnej iteracji symulowanego wyżarzania znajdujemy alternatywne rozwiązanie i wyznaczamy wartość funkcji celu. Jeśli jest ono lepsze od poprzedniego rozwiązania, to akceptujemy je, a jeśli jest gorsze, to z pewnym prawdopodobieństwem akceptujemy lub odrzucamy. Postępujemy w ten sposób, aby uniknąć utknięcia w minimum lokalnym przeszukiwanej przestrzeni. Ważne jest także to, aby prawdopodobieństwo malało wraz z kolejnymi iteracjami i zbliżaniem się do minimum globalnego – za to odpowiada parametr nazywany *temperaturą*. Symulowane wyżarzanie zostało opisane także w artykule *O układaniu optymalnych planów zajęć w systemie USOS* (Δ_{13}^2)

Zauważmy, że efektywność szeregowania w algorytmie szeregowania z dopełnianiem zależy od kolejności zadań w kolejce. Naszą przestrzenią poszukiwań będą zatem permutacje zadań! Zdefiniujmy teraz funkcję celu. Niech Q ponownie oznacza kolejkę zadań czekających na rozpoczęcie, a P jedną z możliwych permutacji zadań w kolejce. Przez W_j^P oznaczmy oczekiwany czas na rozpoczęcie j -tego zadania w kolejce, gdy przydział zasobów do zadań następuje zgodnie z permutacją P .

Naszą funkcją celu, którą będziemy minimalizować, jest:

$$f(P) = \sum_{j \in Q} (W_j^P)^\alpha,$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}^+$. W praktyce będziemy stosować $\alpha = 2$, czyli minimalizować sumę kwadratów czasów oczekiwania,

gdyż daje to dobre rezultaty, a jednocześnie zapobiega głodzeniu zadań.

W jaki sposób uzyskać oczekiwane czasy na rozpoczęcie zadań? Mając daną permutację P , wystarczy dla każdego kolejnego zadania znaleźć najwcześniejszy możliwy przydział zasobów, który nie nachodzi na rezerwacje dla pozostałych zadań. Innymi słowy, stworzyć plan wykonania dla wszystkich zadań.

Algorytm 2 przedstawia nasz schemat symulowanego wyżarzania. Na początku w oparciu o wiedzę z dziedziny wyznaczamy niewielki zbiór permutacji będących kandydatami na minimum globalne. Spośród nich wyłaniamy najlepszą i najgorszą permutację na podstawie funkcji celu (linie 2–3). Posłużą nam one do wyznaczenia początkowej permutacji oraz temperatury (linie 4–6). W każdej iteracji wyżarzania wyznaczamy nową permutację, zamieniając ze sobą kolejnością dwa zadania w obecnej permutacji (linia 9). Następnie symulujemy przydział zasobów, tworząc plan wykonania i obliczamy nową wartość funkcji celu (linie 10–11). Jeżeli jest lepsza od obecnej, to akceptujemy zmianę, a jeżeli jest gorsza, to akceptujemy ją z pewnym prawdopodobieństwem (linie 12–13). Prawdopodobieństwo to zależy od temperatury, którą zmniejszamy co N iteracji (linia 16). Jeżeli nowa permutacja jest lepsza od wszystkich poprzednich, to zapisujemy ten fakt (linie 14–15). Algorytm kończy wykonanie najlepszej znalezionej permutacji (linia 17).

Zauważmy, że powyższy algorytm nie wspomina nic o buforach impulsowych. Istotne jest, aby były one rezerwowane jednocześnie z procesorami podczas tworzenia planu wykonania. Schemat ten jest na tyle ogólny, że można go w prosty sposób rozszerzyć o inne typy zasobów obecnych w superkomputerach: pamięć RAM, pamięć HBM, karty graficzne, karty FPGA czy licencje na oprogramowanie.

Algorytm 2. Szeregowanie oparte na planie wykonania

```

1: procedure PLAN-BASED( $Q, r, N, M$ )
2:    $P_{\text{best}}, S_{\text{best}} \leftarrow$  znajdź permutację o najniższym wyniku spośród kandydatów
3:    $P_{\text{worst}}, S_{\text{worst}} \leftarrow$  znajdź permutację o najwyższym wyniku spośród
      kandydatów
4:   if  $S_{\text{best}} \neq S_{\text{worst}}$  then
5:      $T \leftarrow S_{\text{worst}} - S_{\text{best}}$ 
6:      $P \leftarrow P_{\text{best}}; S \leftarrow S_{\text{best}}$ 
7:     for  $i = 1..N$  do
8:       for  $j = 1..M$  do
9:          $P' \leftarrow$  zamień dwa zadania na losowych pozycjach w  $P$ 
10:        Stwórz plan wykonania dla  $P'$ 
11:         $S' \leftarrow$  oblicz funkcję celu dla  $P'$  na podstawie planu wykonania
12:        if  $S' < S \vee \text{random}(0, 1) < e^{(S-S')/T}$  then
13:           $P \leftarrow P'; S \leftarrow S'$ 
14:        if  $S' < S_{\text{best}}$  then
15:           $P_{\text{best}} \leftarrow P'; S_{\text{best}} \leftarrow S'$ 
16:         $T \leftarrow r \cdot T$ 
17:   Zarezerwuj zasoby i uruchom zadania zgodnie z planem wykonania dla  $P_{\text{best}}$ 

```

Aby wykazać, że nasz nowy algorytm szeregowania zadań jest lepszy niż istniejące metody, musimy przeprowadzić eksperymenty. By nasze eksperymenty były wiarygodne, powinniśmy wykorzystać rzeczywiste dane. A co, jeśli dane nie istnieją dla nowego rodzaju sprzętu – buforów impulsowych? Wówczas możemy wykorzystać tradycyjny zbiór zadań i wzbogacić go o wiarygodnie wygenerowane żądania buforów impulsowych. Ponadto mało prawdopodobne jest, aby ktoś udostępnił nam superkomputer na wyłączność do testowania naszych algorytmów. Potrzebny jest nam zatem symulator superkomputera! Na potrzeby naszego problemu możemy stworzyć taki symulator od podstaw lub dostosować do niego jeden z istniejących symulatorów. Zasadniczą zaletą drugiej opcji jest wykorzystanie sprawdzonego już w innych pracach rozwiązania, co może uczynić wyniki naszych eksperymentów bardziej wiarygodnymi.

Ustawka Technologiczna *CryptoBrawl*

Michał SIERAKOWSKI*

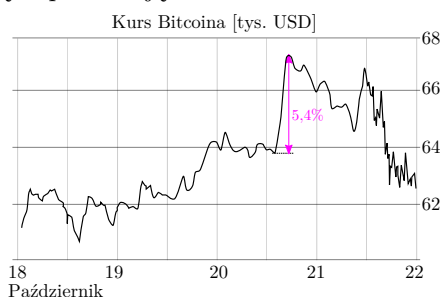
W październiku 2021 roku odbyła się kolejna impreza z cyklu o wdzięcznej nazwie *Ustawka Technologiczna*, tym razem pod sezonową marką *CryptoBrawl*. Wydarzenie ponownie zostało zorganizowane przez IBM Polska oraz Wydział MIM UW. Tym razem jego uczestnicy mieli wykazać się skutecznością zarządzania wirtualnym portfelem kryptowalut. Kilka przyjętych uproszczeń w porównaniu z rzeczywistymi platformami tradingowymi (m.in. wyeliminowanie opłat transakcyjnych) miało uatrakcyjnić tę dwurundową rozgrywkę i zapewnić bezwzględne kryterium selekcji zwycięzców, jakim była wartość portfela w chwili zakończenia każdego ze 120-godzinnych etapów.

III miejsce. Testuj i optymalizuj, czyli jak znaleźć odpowiednią strategię handlu na rynku krypto

Jakub GRĄTKIEWICZ, Michał MOJKOWSKI, Józef WESOŁOWSKI*

*Podchorążowie, Wydział Cybernetyki, Wojskowa Akademia Techniczna

Podczas trwania konkursu na rynku panowała hossa wywołująca zwiększone ruchy na giełdzie, powodujące duże wahania kursu w krótkich jednostkach czasu. Był to idealny moment dla graczy typu *trader* – czyli tych, którzy zarabiają na krótkotrwałych skokach cenowych. Jak widać na załączonym poniżej wykresie, wahania kursu oscylowały w granicach 1–2%. Dodatkowo wystąpił też jednokrotny, bardzo duży wzrost ceny bitcoina, kiedy to w ciągu 3 godzin kurs wzrósł aż o 5,4% – co jest bardzo rzadko spotykane na rynkach z tak dużą kapitalizacją.



Środowisko konkursowe pozbawione było wielu wskaźników oraz narzędzi dostępnych w aplikacjach giełdowych, które ułatwiają handel. Pierwszym pomysłem na zdobycie przewagi nad innymi zespołami było stworzenie aplikacji w Pythonie, która pozwoliłaby nam na automatyczny handel walutami wtedy, gdy kurs będzie sprzyjający. Krytycznym punktem okazało się wyposażenie jej w mechanizm określenia najkorzystniejszych kryteriów kupna oraz sprzedaży. Strategie przetestowaliśmy offline, prowadząc symulację zysków na podstawie bazy danych kursów z giełdy Binance. Skuteczna okazała się prognoza na podstawie ekstremów lokalnych kursów oraz ich odchylenia od aktualnej wartości waluty. W przypadku, kiedy

*IBM, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Konkursem zainteresowały się osoby z 40 krajów, a w rundzie finałowej wzięło udział 20 najlepszych zespołów. Zespoły z najlepszej trójki zrealizowały nie więcej niż 3700 transakcji, a najwyżej uplasowany zespół, który dokonał jednej transakcji, zajął szóste miejsce. Natomiast najbardziej intensywnie platformę konkursową wykorzystywała drużyna dokonująca średnio ponad 25 operacji na sekundę(!). Zapleczem technicznym była chmura i komputer IBM LinuxONE.

Laureaci zgodzili się podzielić z Czytelnikami *Delty* swoimi strategiami, w których – zgodnie z treścią zaproszenia do udziału w rozgrywce – przeplatały się *dowolne techniki mieszane* z wielu dyscyplin, od obliczeń inżynierskich po inżynierię oprogramowania.

kurs odchyłał się od ostatniego minimum o pewien procent z tendencją rosnącą, bot wykonywał operację kupna kryptowaluty, następnie przechodził w tryb poszukiwania właściwego momentu sprzedaży. W tej procedurze bot aktualizował maksimum, począwszy od momentu kupna kryptowaluty, i w przypadku wystąpienia odchylenia aktualnego kursu od wartości maksymalnej z tendencją malejącą dokonywał sprzedaży. Optymalny wskaźnik procentowy odchylenia ustaliliśmy w kolejnej serii symulacji na danych historycznych, otrzymując w symulacjach zysk w granicach 10–15% tygodniowo. Wynik ten nie był dla nas zadowalający, więc rozpoczęliśmy pracę nad kolejnym rozwiązaniem. Ostatecznie w etapie finałowym użyliśmy strategii, która analizowała kurs w czasie rzeczywistym nie tylko na platformie konkursowej, ale również na rzeczywistych giełdach. Zauważyliśmy duże podobieństwo kursu bitcoina do kursu podawanego na stronie CoinGecko – więc właśnie z niej zaczęliśmy pobierać dane do prognozowania dalszych wzrostów i spadków. Niestety, pierwszy wariant tej strategii okazał się zbyt czuły na drobne fluktuacje kursu, co kosztowało nas ponad 18 000 \$ waluty konkursowej. Problem ten rozwiązaliśmy przez wprowadzenie bufora, który w przypadku nieznaczających wzrostów i spadków powstrzymywał się od pochopnych działań. Do automatyzacji współpracy z interfejsem platformy wykorzystaliśmy bibliotekę Selenium. Za jej pomocą nasz program wykonywał wszystkie kroki, które musiał wykonać użytkownik, takie jak: wypełnienie pola formularza, wciśnięcie przycisku, odświeżenie strony itp... Jednocześnie spowalniało to nasz program o kilka sekund na transakcję – i przez to przy wielu transakcjach traciliśmy niewielkie kwoty. Z drugiej jednak strony nasze prognozy były na tyle trafne, że pozwoliły nam zająć miejsce na podium.

II miejsce. Ryzykując więcej, zarobiliśmy jeszcze więcej

Kinga ARENDARSKA, Szymon GRUSZCZYŃSKI*

* Studenci, Wydział Cybernetyki,
Wojskowa Akademia Techniczna

Próbowaliśmy prognozować, choć bez większego zysku, m.in. na podstawie wykładniczej średniej kroczącej dla danych z ostatniej doby.

Jak wiadomo, czas to pieniądz, więc naszym podstawowym celem było zautomatyzowanie operacji wykonywanych na platformie konkursowej. Analizując ruch sieciowy generowany przez przeglądarkę podczas wysyłania zapytań http, już na wstępnym etapie konkursu zaimplementowaliśmy bibliotekę w Pythonie, która umożliwiła nam wykonywanie z poziomu programu wszystkich operacji dostępnych dla użytkownika. Dodatkowo zaimplementowaliśmy własne mechanizmy archiwizacji kursów, które miały posłużyć nam do predykcji występujących trendów i cykli. Z oczywistych względów monitorowaliśmy również zmiany sald pozostałych drużyn, aby poznać ich strategię.

Na początkowym etapie graliśmy, konstruując prognozę kursu na podstawie danych historycznych, przy uwzględnieniu powtarzalnych cykli – jednak zaobserwowaliśmy, że nasze przychody były niższe niż u innych drużyn. Spowodowało to, że zaczęliśmy poszukiwać lepszych rozwiązań.

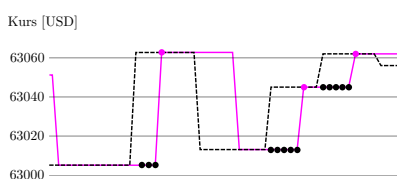
I wtedy z niejakim osłupieniem zauważyliśmy, że... kurs na platformie jest skorelowany z rzeczywistym kursem walut – więc błyskawicznie napisaliśmy aplikację, działającą w trybie ciągłym przez całą dobę, która wykonywała transakcje na podstawie bieżących kursów z wielu serwisów internetowych (dane pobieraliśmy z udostępnionych API lub za pomocą *web scrapingu*). Początkowo graliśmy w ten sposób zachowawczo, tylko częścią kapitału, jednak dopiero wykorzystanie całego portfela pozwoliło nam zachować konkurencyjność względem innych drużyn.

Choć w trakcie hackathonu kursy kryptowalut bywały rekordowo wysokie, zachowaliśmy zimną krew (co było o tyle łatwe, że nie graliśmy prawdziwymi pieniędzmi). W rundzie finałowej przez większość czasu inwestowaliśmy głównie w Ethereum, które na podstawie doświadczenia z poprzednich rund uznaliśmy za stabilniejsze – jednak na samym końcu etapu zdecydowaliśmy się na inwestowanie również w bitcoina, aby utrzymać się na zadowalającym drugim miejscu.

I miejsce. Podążając drogą mistrza Sun Zi

Grzegorz KOPERWAS, Kamil KOWALCZYK*

* Studenci, Wydział Matematyki
Stosowanej, Politechnika Śląska



Fragment wykresu: przerywana linia to przewidywany kurs, kolorowa to kurs na platformie, kropki pokazują momenty, w których nasz program posiada walutę (kolorem oznaczono momenty sprzedaży)

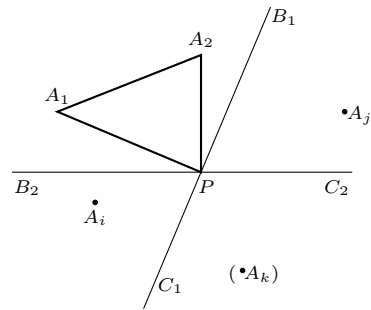
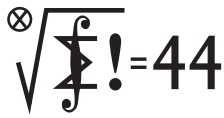
¹ Cytat pochodzi ze *Sztuki wojny Sun Zi* (albo: Sun Tzu, Sun Wu), przekł. Jarosław Patereczek oraz inni.

„Poznaj dobrze wroga...” Jeszcze podczas sesji treningowej zauważyliśmy parę ciekawych subtelnosci działania platformy konkursowej. Odkryliśmy szybko, że kursy kryptowalut są odświeżane co minutę. Dzięki temu pobierając kurs z serwisu CoinGecko chwilę przed odświeżeniem kursu na platformie, mogliśmy przewidzieć zmiany w kursie konkursowym. Przyjrzelśmy się również, jak wygląda proces zlecenia transakcji na platformie konkursowej, a następnie zaimplementowaliśmy go w naszym programie. Komunikując się bezpośrednio z API, bez użycia przeglądarki, mogliśmy zlecać i potwierdzać transakcje w milisekundy, co – jak się wydaje – dało nam dużą przewagę nad konkurencją.

„...i poznaj siebie...” Jednym z elementów naszej strategii było generowanie na żywo wykresów, które pomagały nam śledzić poczynania naszego programu. Dzięki temu mogliśmy łatwo wprowadzać wiele optymalizacji, a najważniejszą z nich było porzucanie inwestycji, jeżeli na bieżąco okazywało się, że inna była lepsza. Przykładowo: jeśli kupiliśmy bitcoina, ale inwestycja w Ethereum stawała się bardziej opłacalna, to kupowaliśmy Ethereum za nasze bitcoiny. Obserwowanie wykresów stało się naszą ulubioną (aczkolwiek nieco grzeszną – przyp. red.) rozrywką podczas zajęć na uczelni.

„...a w stu bitwach nie doznasz klęski.”¹ Choć niemal od początku sesji konkursowej byliśmy w czołówce, to nie przestaliśmy opracowywać kolejnych strategii. Na samym początku zostaliśmy zmuszeni do porzucenia pierwszego podejścia, wykorzystującego zaokrąglenia w przeliczaniu kursów walut. Testowaliśmy serwis Coinbase jako alternatywne źródło danych oraz rozważaliśmy możliwość połączenia go z danymi z CoinGecko. Z czasem ulepszyliśmy także odporność naszego programu na błędy, co pozwoliło nam na koniec osiągnąć prawie zerowe przestoje.

Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 831 ($WT = 2,52$) i 832 ($WT = 2,24$) z numeru 12/2021

Witold Bednarek	Łódź	41,13
Kacper Morawski	Warszawa	40,83
Andrzej Kurach	Ryjewo	40,81
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Paweł Najman	Kraków	37,33
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Marek Spychała	Warszawa	34,25
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,34



Rozwiązanie zadania M 1715.
Niech K będzie punktem przecięcia odcinków AE i BF . Wtedy

$$\begin{aligned} \sphericalangle AKB &= \sphericalangle AFB + \sphericalangle FAE = \\ &= \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC = \\ &= \sphericalangle AEC. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $BF \parallel CE$.



Rozwiązanie zadania M 1716.
Ponieważ

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b(b+1)},$$

po przeniesieniu prawej strony na lewą stronę dostajemy do pokazania następującą nierówność:

$$\frac{y-x}{y(y+1)} + \frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leq 0.$$

Możemy założyć, że x jest największą z trzech podanych liczb. Możliwe są dwa przypadki.

1) $y \geq z$. Wtedy

$$\frac{x-y}{x(x+1)} \leq \frac{x-y}{y(y+1)}, \quad \frac{y-z}{x(x+1)} \leq \frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy

$$\frac{x-z}{x(x+1)} \leq -\frac{y-x}{y(y+1)} - \frac{z-y}{z(z+1)}.$$

2) $y < z$. Wtedy

$$\frac{z-y}{z(z+1)} \leq \frac{z-y}{y(y+1)}, \quad \frac{x-z}{x(x+1)} \leq \frac{x-z}{y(y+1)}.$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy

$$\frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leq -\frac{y-x}{y(y+1)}.$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2022

Przypominamy treść zadań:

837. Wewnątrz wypukłego n -kąta $A_1A_2 \dots A_n$ leży taki punkt P , że każdy z trójkątów PA_iA_j jest równoramienny ($1 \leq i < j \leq n$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P ?

838. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb całkowitych x, y, z większych od 1, spełniających równanie

$$x^4 + y^4 = z^2 + 1.$$

837. Odpowiedź: tak. Przypuśćmy bowiem, że np. $PA_1 \neq PA_2$. Odcinek A_1A_2 jest wtedy jednym z bocznych ramion trójkąta równoramiennego PA_1A_2 , wobec czego kąt A_1PA_2 jest ostry. Przez punkt P prowadzimy prostą B_1C_1 , prostopadłą do PA_1 , oraz prostą B_2C_2 , prostopadłą do PA_2 ; punkty B_i, C_i wybieramy na tych prostych tak, by kąty A_2PB_1, A_1PB_2 były ostre, a kąty A_2PC_1, A_1PC_2 rozwarte (wówczas także kąty B_1PC_2, B_2PC_1 są ostre, a B_1PB_2, C_1PC_2 rozwarte).

Gdyby w obszarze kąta wypukłego C_1PC_2 (branego z brzegiem) leżał jakiś wierzchołek A_k , kąty A_1PA_k, A_2PA_k byłyby rozwarte (lub proste); równoramienne trójkąty A_1PA_k, A_2PA_k musiałyby mieć równe ramiona PA_1, PA_k, PA_2 , wbrew przyjętemu założeniu. Tak więc w tym obszarze nie ma wierzchołków badanego wielokąta.

Skoro P jest punktem wewnętrznym tego wielokąta, a w sektorze C_1PC_2 nie ma wierzchołków, zatem wewnątrz kąta wypukłego B_2PC_1 musi leżeć jakiś wierzchołek A_i . Podobnie, wewnątrz kąta wypukłego B_1PC_2 musi leżeć jakiś wierzchołek A_j . W każdym z trójkątów równoramiennych $A_2PA_i, A_iPA_j, A_jPA_1$ kąt przy wierzchołku P jest nieostry, skąd wniosek, że odcinki PA_2, PA_i, PA_j, PA_1 są równymi ramionami tych trójkątów. To ostatecznie obala przypuszczenie, że $PA_1 \neq PA_2$, i uzasadnia odpowiedź „tak” na postawione w zadaniu pytanie.

838. Kluczem do podanej niżej konstrukcji jest trójka pitagorejska (8, 15, 17). Określamy nieskończone rosnące ciągi liczb naturalnych $(x_n), (y_n)$ wzorem rekurencyjnym:

$$(1) \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 11x_n + 15y_n \\ y_{n+1} = 8x_n + 11y_n \end{cases} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Łatwo sprawdzić, że $8x_{n+1}^2 - 15y_{n+1}^2 = 8x_n^2 - 15y_n^2$; a skoro $8x_0^2 - 15y_0^2 = 17$, zatem

$$(2) \quad 8x_n^2 - 15y_n^2 = 17 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Stąd dalej wynika, że

$$(3) \quad \frac{17x_n^2 - 8}{15} = \frac{17y_n^2 + 15}{8} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

(wystarczy wymnożyć „na krzyż” te ułamki i skorzystać z równości (2)).

Z określenia (1) widać, że $y_{n+1}^2 \equiv y_n^2 \pmod{8}$; stąd $y_n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ dla wszystkich $n \geq 0$, dzięki czemu

$$17y_n^2 + 15 \equiv 0 \pmod{8} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

To pokazuje, że wspólna wartość wyrażenia (3) jest (dla każdego n) liczbą całkowitą.

Oznaczmy ją z_n . Wówczas

$$\begin{aligned} z_n^2 &= \left(\frac{15}{17}\right)^2 z_n^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 z_n^2 = \left(\frac{15}{17}\right)^2 \left(\frac{17x_n^2 - 8}{15}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 \left(\frac{17y_n^2 + 15}{8}\right)^2 = \\ &= \left(x_n^2 - \frac{8}{17}\right)^2 + \left(y_n^2 + \frac{15}{17}\right)^2 = x_n^4 + y_n^4 - \frac{2(8x_n^2 - 15y_n^2)}{17} + 1, \end{aligned}$$

co wobec równości (2) oznacza, że $z_n^2 = x_n^4 + y_n^4 - 1$. Każda trójka (x_n, y_n, z_n) jest więc rozwiązaniem badanego równania diofantycznego.

Uwaga. Tę serię rozwiązań wskazał Witold Bednarek, autor zadania. Istnieje wszelako bardzo wiele innych rozwiązań. Podobną serię można wygenerować na przykład przez rekurencję liniową $x_0 = 3, y_0 = 1, x_{n+1} = 19x_n + 40y_n, y_{n+1} = 9x_n + 19y_n$ (tu kluczem jest trójka pitagorejska (9, 40, 41)); początkowe wyrazy ciągu $(x_n^4 + y_n^4 - 1)$ to $9^2, 9644^2, \dots$; i wszystkie dalsze też są kwadratami; aby się o tym upewnić, warto wyrazić liczby $z_n = \sqrt{x_n^4 + y_n^4 - 1}$ wzorami analogicznymi do (3). Zachęcamy do znalezienia jeszcze innych (podobnych) serii – np. takiej, w której znalazłoby się rozwiązanie $x = y = 13$; lub też – co ciekawsze – do rozpoznania ogólniejszego schematu, który kryje się za tymi przykładami.

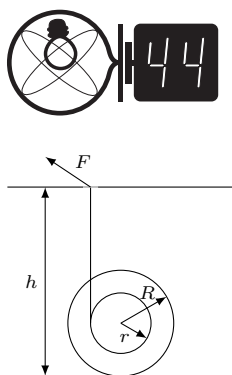
Klub 44 F

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

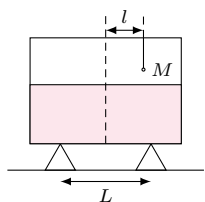
Rozwiązania zadań z numeru 3/2022

Przypominamy treść zadań:

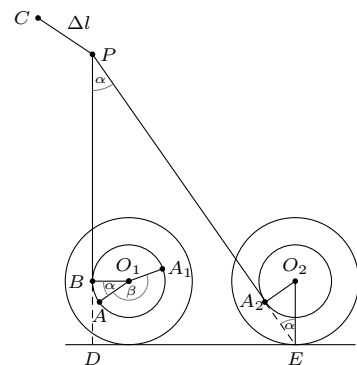
734. Na poziomym stole leży szpulka, na którą nawinięta jest cienka, nieważka, gładka nić. Promień zewnętrzny szpulki wynosi R , wewnętrzny r . Koniec nici przeciągnięty jest przez niewielki otwór znajdujący się na wysokości h nad powierzchnią stołu. W chwili początkowej szpulka jest nieruchoma, a nić pionowa (rys. 1). Koniec nici zaczynamy ciągnąć stałą siłą F i szpulka toczy się po stole bez poślizgu. Znaleźć maksymalną prędkość szpulki. Masa szpulki wynosi M . Należy przyjąć, że połowa tej masy skupiona jest na osi szpulki, a druga połowa rozłożona równomiernie na obwodzie zewnętrznym o promieniu R .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

735. Prostopadłościennic naczynie z wodą stoi na dwóch podporach symetrycznych względem osi naczynia i odległych od siebie o L . Nad wodą, na poprzeczce łączącej krawędzie naczynia, wisi na nici kawałek ołowiu o masie M , w odległości l od osi naczynia (rys. 2). Siły reakcji podpór wynoszą R_1 i R_2 , odpowiednio dla lewej i prawej podpory. Jakie będą te siły reakcji, gdy nić wydłużymy i ołów zanurzy się w wodzie? Gęstość ołowiu jest n razy większa od gęstości wody.

734. Po przyłożeniu siły F szpulka zaczyna toczyć się w prawo. Siła naciągu nici N , równa co do wartości sile F , jest jedyną siłą działającą na szpulkę, która ma niezerowy moment względem punktu podparcia. Powoduje on wzrost prędkości kątowej względem chwilowej osi obrotu aż do chwili, gdy przedłużenie nici przechodzi przez punkt podparcia i ramię siły N jest równoległe do tej siły (rys. 3). Potem moment siły zmienia zwrot na przeciwny, szpulka zwalnia, a po zatrzymaniu zaczyna toczyć się w drugą stronę.

Siła F jest jedyną siłą zewnętrzną wykonującą pracę nad układem, zatem zmiana energii kinetycznej szpulki równa jest pracy tej siły:

$$(1) \quad F\Delta l = Mv^2/2 + Mv^2/4 = 3Mv^2/4,$$

gdzie v jest szukaną prędkością maksymalną,

$$(2) \quad \Delta l = |PC| = |PB| - |PA_2| + s$$

długością nici wyciągniętej przez szczelinę, a s to długość nici odwinętej ze szpulki.

Zachodzą związki: $|PB| = h - R$, $|PA_2| = h/\cos\alpha - R\cos\alpha$.

Aby znaleźć s , oznaczmy przez A_1 położenie w chwili początkowej punktu nici, który w chwili końcowej jest styczny do szpulki w punkcie A_2 . Ponieważ szpulka toczy się bez poślizgu, droga $|O_1O_2| = |BO_2| - r = h\tg\alpha - r$ przebyta przez środek szpulki równa jest długości łuku zakreślonego w tym czasie przez punkt na obwodzie szpulki: $|O_1O_2| = \beta R$, gdzie $\beta = \sphericalangle A_1O_1A_2$.

Długość łuku, jaki zatoczył wyróżniony punkt nici, wynosi $s_1 = \beta r$, a długość nici odwinętej ze szpulki $s = s_1 + ar$. Podstawiając to do wzoru (2), otrzymujemy

$$(3) \quad \Delta l = h - R - (h/\cos\alpha - R\cos\alpha) + r(h\tg\alpha - r)/R + ar.$$

Wyrażając wszystkie funkcje kąta α we wzorze (3) przez $\sin\alpha = r/R$ i podstawiając do (1), otrzymujemy maksymalną wartość prędkości szpulki:

$$v = \sqrt{4F \left[r \arcsin(r/R) - r^2/R + (h - R) \left(1 - \sqrt{1 - (r/R)^2} \right) \right] / 3M}.$$

735. Gdy ciężarek zanurzy się w wodzie, siła naciągu nici zmaleje o wielkość równą sile wyporu $F_A = Mg/n$, a tym samym zmaleje siła nacisku poprzeczki na krawędzie naczynia. Jednocześnie podniesie się poziom wody w naczyniu i jej parcie na dno wzrośnie o taką samą wartość F_A , bo siły zewnętrzne działające na układ nie zmieniają się. Suma sił reakcji podpór pozostanie niezmienną:

$$R_1 + R_2 = R'_1 + R'_2.$$

Jeżeli siła reakcji lewej podpory wzrośnie o wartość f , to prawej zmaleje o taką samą wartość. Wypadkowy moment dodatkowych sił wewnętrznych musi być równy zeru, stąd

$$2fL/2 = F_A L, \quad f = Mg/(nL).$$

Szukane siły reakcji wynoszą:

$$R'_1 = R_1 + Mg/(nL), \quad R'_2 = R_2 - Mg/(nL).$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 728 ($WT = 3,23$) i 729 ($WT = 1,5$) z numeru 12/2021

Konrad Kapcia	Poznań	2 - 3,24
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Ryszard Baniewicz	Włocławek	38,63
Sławomir Buć	Mystków	38,53
Tomasz Wietecha	Tarnów	15 - 38,49
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Jacek Konieczny	Poznań	33,42
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Życiodajny cyjanowodor – protogwiazdy o zapachu migdałów

O przechwytywaniu światła młodych gwiazd przez pył pisaliśmy już między innymi w artykule *O istotności pyłu w obserwacjach galaktyk*, Δ_{20}^{06} .

Protogwiazda to najwcześniejsze stadium życia gwiazdy. Obiekt ten wciąż gromadzi masę z otaczającego go obłoku międzygwiazdowego. Nie zachodzą w nim jeszcze reakcje termojądrowe, przez co nie jest widoczny w zakresie widzialnym promieniowania elektromagnetycznego.

Fotodysocjacja jest reakcją chemiczną, w której cząsteczki związku chemicznego rozpadają się na jony pod wpływem bombardowania ich fotonami.

Na podstawie: „Signatures of UV radiation in low-mass protostars”, A. Mirocha, A. Karska, M. Gronowski et al., *Astronomy & Astrophysics*, December, 2021.

Młode gwiazdy spędzają swoje dzieciństwo w gwiazdnych żłobkach, otoczone obłokami pyłu i gazu. Taka gęsta otoczka pyłu uniemożliwia ich bezpośrednią obserwację. Dlatego też prowadzone są obserwacje pośrednie poprzez detekcję emisji termicznej protogwiazd, głównie w dalekiej podczerwieni, ponieważ zgodnie z prawem Plancka opisującym promieniowanie ciała doskonale czarnego szczyt jasności promieniowania pyłu przekłada się na jego temperaturę. Obserwacje prowadzone są także w zakresie promieniowania submilimetrowego, gdyż występują w nim kluczowe przejścia molekularne przydatne nie tylko do pomiarów temperatury, ale także właściwości otaczającego protogwiazdę gazu. Obserwacje linii rotacyjnych w tym zakresie pozwalają dodatkowo na oszacowanie ilości różnych molekuł otaczających protogwiazdę w jej macierzystym obłoku.

Już wcześniej, za pomocą detekcji molekuł wody przez teleskop *Herschel*, potwierdzono występowanie promieniowania ultrafioletowego (UV) w obszarach protogwiazdowych, jednak ich źródło pozostało nieznanne. Agnieszka Mirocha z Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Jagiellońskiego wraz z Agatą Karską z Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu zdecydowały się poszukać odpowiedzi na pytanie o pochodzenie tego promieniowania. Ich zespół obserwował centralny obszar gwiazdozbioru Węża za pomocą naziemnego 30-metrowego teleskopu należącego do Instytutu Radioastronomii Milimetrowej (*Institute for Radio Astronomy in the Millimeter Range, IRAM*) zlokalizowanego w Hiszpanii. Instrument ten pozwala na obserwacje submilimetrowe, w tym w zakresie aktywnych przejść dla molekuł cyjanowodoru (HCN) oraz rodnika cyjankowego (CN). Molekuła HCN fotodysocjuje w CN pod wpływem promieniowania UV, natomiast CN jest bardziej odporna na fotodysocjację. Dzięki temu pomiar stosunku natężenia obu molekuł jest bardzo dobrym wskaźnikiem występowania promieniowania ultrafioletowego, a dodatkowo obserwacja większego obszaru pozwala na analizę przestrzenną tego parametru.

Okazało się, że rozmieszczenie molekuł HCN i HC wskazuje na scenariusz, w którym promieniowanie UV związane jest z wirowym opadaniem obłoku molekularnego na młodą gwiazdę. Podczas takiej rotacji następuje wsteczny wyrzut materii, która penetruje obszar chmury molekularnej i oddziałuje z nią, wytwarzając emisję światła w zakresie UV.

Zgodnie z przedstawioną analizą wykonaną przez zespół A. Karskiej, stosunek CN do HCN może być wykorzystywany jako próbnik natężenia promieniowania UV w niskomasywnych obszarach gwiazdowych. W kolejnym kroku niezbędne będą dodatkowe symulacje pozwalające na bardziej dokładne zobrazowanie procesów odpowiedzialnych za powstawanie promieniowania UV podczas wyrzutu materii. Już teraz jednak wiemy, że promieniowanie UV nie pochodzi z wnętrza protogwiazd, a z ich oddziaływania z najbliższym otoczeniem. Opracowana metoda umożliwi także analizę powstawania nowych planet, które początkowo również kryją się w obłokach gazu i pyłu.

Katarzyna MAŁEK

Niebo w lipcu

W pierwszej części lipca Słońce nadal przebywa na północ od równoleżnika $+20^\circ$ deklinacji, i dni są jeszcze bardzo długie. Sytuacja zmieni się w trzeciej dekadzie miesiąca, gdy przetnie ono ten równoleżnik w drodze na południe i tym samym skończy się okres najdłuższych dni i najkrótszych nocy w roku. Stopniowo też na południe wycofa się granica widoczności łuku okołohoryzontalnego, a na północ – granica widoczności obłoków srebrzystych. Wraz z końcem lipca w Polsce zakończy się sezon na występowanie obu tych zjawisk.

W lipcu nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokregu szybko zacznie zmieniać się na niekorzystne do obserwacji nieba. Za to rano równie szybko nachylenie ekliptyki wzrasta. Oznacza to, że od drugiej połowy lata sezon dobrej widoczności wieczornej planet i Księżyca się kończy, a zaczyna sezon ich dobrej widoczności porannej. Można się o tym przekonać już na początku miesiąca, gdyż na wieczornym nieboskłonie rozgości się Srebrny Glob, który zdecydowanie nie wzniesie się już tak wysoko po zmierzchu, jak w poprzednich miesiącach.

Księżyc zacznie lipiec w bardzo małej fazie (7%), świecąc na tle gwiazdozbioru Raka. O zmierzchu Księżyc zajmie pozycję na wysokości około 7° i zajdzie godzinę później. Oczywiście słabo świecące gwiazdy Raka raczej nie przebijają się przez zorzę wieczorną. Dwa kolejne wieczory naturalny satelita Ziemi spędzi w pobliżu Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Drugiej nocy lipca sierp Księżyc w fazie 12% pojawi się 10° na prawo od wspomnianej gwiazdy, by kolejnego wieczora, przy fazie zwiększonej do 19%, pokazać się 5° nad nią.

Księżyc spotka się 6 lipca z Porrimą, jedną z jaśniejszych gwiazd Panny, będąc tuż przed I kwadrą. Zbliży się doń na odległość 1°, dobę później natomiast przejdzie 4° nad Spiką, najjaśniejszą gwiazdą tej konstelacji. Następnego wieczora Księżyc wzniesie się najwyżej, osiągając wysokość 20° godzinę po zachodzie Słońca.

W kolejnych dniach Srebrny Glob podąży ku pełni, ale jednocześnie odwiedzi najbardziej na południe wysuniętą część swojej orbity, dlatego jego wysokość nad widnokregiem zacznie maleć. Z ciekawszych spotkań Księżyc z jasnymi gwiazdami warto odnotować jego przejście przez gwiazdozbiór Skorpiona 10 lipca. W tym momencie jednak faza księżycowej tarczy przekroczy 88%, dlatego choć da się dostrzec bez większych kłopotów położonego 4° na prawo i w dół Antaresa, w jego łunie znikną raczej gwiazdy składające się na charakterystyczny łuk w północno-zachodniej części konstelacji.

Pełnia Księżyc wypada wieczorem 13 lipca. Dotrze on wtedy do wschodnich granic gwiazdozbioru Strzelca, wędrując głęboko pod ekliptyką. Wskutek tego przez kilka poprzedzających pełnię nocy naturalny satelita Ziemi podczas górowania ledwo przekroczy wysokość 10°, a nad Bałtykiem nie osiągnie nawet tyle. Oczywiście nie ma też mowy o wystąpieniu zaćmienia Srebrnego Globu.

Dwa dni po pełni Księżyc dotrze wreszcie do obszaru zodiaku, gdzie przebywają planety Układu Słonecznego. Tak samo jak w czerwcu, na pierwszy ogień pójdzie spotkanie z **Saturnem**, a Srebrny Glob minie tę planetę w odległości 5°, prezentując tarczę w fazie 92%. Obecnie Saturn świeci z jasnością +0,5^m, przy średnicy tarczy 19". Dobę później faza Księżyc spadnie do 86%, przesuając się przym tym do gwiazdozbioru Wodnika i zakrywając gwiazdę 4. wielkości τ Aqr. Gwiazda zniknie za jasnym brzegiem księżycowej tarczy 17 lipca około godziny 0:30 i po godzinie pokaże się ponownie przy ciemnej krawędzi.

W lipcu planetoida (4) Westa porusza się łukiem na południe i 9 dnia miesiąca zbliży się do gwiazdy τ Aqr na niewiele ponad 2°. Oczywiście bliskość jasnego Księżyc uniemożliwi jej dostrzeżenie. Na obserwację Westy należy przeznaczyć początek i koniec miesiąca, kiedy to jej jasność dojdzie do +6^m, czyli granicy widoczności gołym okiem.

Srebrny Glob 18 lipca przejdzie 4° na południe od **Neptuna**. W lipcu noce ponownie są ciemne i tym samym rozpoczyna się sezon na obserwacje ostatniej planety Układu Słonecznego. Pod koniec czerwca

Neptun zmienił kierunek ruchu na wsteczny i szykuje się do opozycji w połowie września. Planeta zacznie lipiec 1° na północny zachód od gwiazdy 5. wielkości 20 Psc, która znakomicie nadaje się na punkt odniesienia przy jej poszukiwaniach. Potem Neptun podąży ku równoległobokowi gwiazd, przez który wędrował w zeszłym sezonie obserwacyjnym, i dotrze doń pod koniec października. W lipcu Neptun świeci blaskiem +7,8^m.

Księżyc spotka się z **Jowiszem** 19 lipca. Opozycja Jowisza w tym roku przypada 10 dni po opozycji Neptuna. W lipcu Jowisz przebywa na tle gwiazdozbioru Wieloryba, a pod koniec miesiąca zmieni kierunek ruchu na wsteczny, stąd w lipcu planeta prawie nie porusza się względem gwiazd tła. Przez cały miesiąc planeta pojaśnieje od -2,5^m do -2,7^m, a średnica jej tarczy przekroczy średnicę 44".

Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę 20 lipca po południu naszego czasu, a w nocy z 21 na 22 lipca pokaże się między Marsem a Uranem. Planeta **Mars** na początku grudnia znajdzie się w opozycji do Słońca i powoli nabiera blasku. W lipcu planeta przejdzie z gwiazdozbioru Ryb do gwiazdozbioru Barana, zwiększając przy tym jasność z +0,5^m do +0,2^m. Na razie Mars jest daleko od nas, stąd średnica jego tarczy wynosi 4". Pierwszego dnia sierpnia Mars minie Urana w odległości 1,5°. Planeta **Uran** w lipcu świeci z jasnością +5,8^m, przebywając nieco ponad 2° na północny wschód od gwiazdy σ Ari, którą odwiedzała w zeszłym sezonie obserwacyjnym.

O tej porze roku ekliptyka jest już korzystnie nachylona do widnokregu, stąd Srebrny Glob pozostanie widoczny prawie do samego nowiu, ładnie prezentując tzw. światło popielate. Rano 23 lipca sierp Księżyc pokaże fazę 26% i przejdzie 4° na południe od Plejad. Kolejnego ranka jego sierp zwęzi się do 18% i przesunie się na pozycję 7° na północ od Aldebarana, by jeszcze kolejnego dnia pokażać się 3° na południe od El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy Byka. Jego faza spadnie wtedy do 11%. Lipcowy nów Księżyc przypada na 28 lipca wieczorem.

W dniach 26 i 27 lipca Srebrny Glob odwiedzi planetę **Venus**. Pierwszego z wymienionych dni jego tarcza pokaże fazę zaledwie 6%, a Venus należy szukać 6° na godzinie 7 względem niego. Dobę później sierp Księżyc zwęzi się do 2% i przesunie na pozycję 7° na lewo od Venus. Mimo tak małej fazy zarówno Księżyc, jak i Venus powinno dać się dostrzec bez kłopotu, gdyż na godzinę przed wschodem Słońca oba ciała zdążą się wzniesić na wysokość około 8°. W lipcu Venus nadal przesuwa się w lewo wzdłuż linii widnokregu, przemieszczając się od środka gwiazdozbioru Byka do środka gwiazdozbioru Bliźniąt. Przez cały miesiąc planeta oddala się od nas, dążąc do koniunktury górnej ze Słońcem pod koniec października. W lipcu Venus świeci z jasnością -3,9^m, a jej tarcza nie jest atrakcyjnym celem dla posiadaczy teleskopów, gdyż ma średnicę 11" i fazę około 90%.

Ariel MAJCHER

Fizyczne potyczki w Kolumbii

Międzynarodowy Turniej Fizyków IPT (*International Physicists' Tournament*) to zawody drużynowe, w których uczestniczą studenci fizyki studiów pierwszego i drugiego stopnia z całego świata. Turniej odbywa się w formie tzw. pojedynków, czyli debat naukowych, podczas których uczestnicy prezentują rozwiązanie danego problemu fizycznego lub fizyczno-technicznego. W tym roku turniej rozegrano w Universidad Industrial de Santander w kolumbijskiej Bucaramandze.



Uczestnicy zmierzili się z takimi zagadnieniami, jak zbadanie, czy kształt i parametry krateru po kropli deszczu na piasku pozwalają odtworzyć wielkość i prędkość wytwarzającej go kropli, w jakich warunkach upuszczona z wysokości kreda nie złamie się czy też, dlaczego przy zderzeniu dwóch stalowych kul na umieszczonej między nimi folii aluminiowej powstają koncentryczne zafalowania.

Każda drużyna występuje w roli prezentera, recenzenta i oponenta. Zespół sędziów ocenia rozwiązania zadania omawiane przez prezentera, skuteczność oponenta w znalezieniu błędów i nieścisłości w przedstawionym rozwiązaniu oraz nawiązanie konstruktywnego dialogu między prezenterem i oponentem, a także moderowanie całej dyskusji przez recenzenta.

Drużyna Koła Turnieju Fizyków Uniwersytetu Warszawskiego zakwalifikowała się do półfinału rozgrywek, w którym zmierzyła się z reprezentantami Szwecji i Szwajcarii. Ostatecznie reprezentacja Polski zajęła czwarte miejsce w klasyfikacji generalnej turnieju. Zwycięzcą została reprezentacja Francji z École Polytechnique w Paryżu, na podium stanęli też zawodnicy z Unicamp w Brazylii (II miejsce) oraz szwajcarskiej EPFL w Lozannie (III miejsce).

– Drużyna Wydziału Fizyki UW sprawdziła się doskonale w turnieju gromadzącym drużyny z najlepszych uniwersytetów z całego świata. Uczestnicy zawodów mierzyli się z zadaniami, które są bardzo trudne dla zawodowych fizyków. Świadczy to o tym, że Wydział Fizyki skutecznie przyciąga wybitnie uzdolnionych młodych ludzi i stwarza im dobre warunki do rozwoju – mówi Krzysztof Turzyński, który pomagał w opiece nad drużyną.

Reprezentacja do udziału w mistrzostwach przygotowywała się przez kilka miesięcy. – Poza budowaniem modeli teoretycznych, projektowaniem symulacji komputerowych i przeprowadzaniem doświadczeń musieliśmy nauczyć się pracować zespołowo, a także przygotować się do prezentacji i obrony wyników naszych eksperymentów – mówi Stanisław Rakowski, jeden z członków drużyny.

– Jestem pod ogromnym wrażeniem poziomu rozwiązań zadań turniejowych, zarówno tych przygotowanych i przedstawionych przez drużynę Wydziału Fizyki, jak i inne drużyny uczestniczące w turnieju – podsumowuje Krzysztof Turzyński. – Doceniam zwłaszcza to, że reprezentacja Uniwersytetu Warszawskiego, składająca się ze studentów pierwszego i drugiego roku, była w stanie nawiązać równorzędny dialog naukowy z magistrantami z uczelni zagranicznych – dodaje.

Celem rozgrywek jest nie tylko naukowa rywalizacja, ale także integracja z rówieśnikami i międzynarodowa wymiana doświadczeń. – Mimo ogromnych emocji związanych ze startem w turnieju i zaciętej rywalizacji podczas rozgrywek udało nam się nawiązać znajomości z zawodnikami z innych krajów. Dyskusje z kimś

z zupełnie innego środowiska naukowego o problemie, nad którym spędziliśmy kilka miesięcy pracy, były bardzo inspirujące. Była to znakomita okazja, by zaznajomić się z realiami pracy naukowej w międzynarodowym gronie – podkreśla Stanisław Rakowski.

Dlaczego uczelnie podejmują wysiłek organizacyjny i finansowy, aby uczestniczyć w zawodach Międzynarodowego Turnieju Fizyków? – To dla nas bardzo ważne, aby sprawdzić, jak nasz model kształcenia studentów wypada w porównaniu z programami innych wiodących wydziałów fizyki na świecie – wyznaje Krzysztof Turzyński. – Uzyskiwane przez drużyny Uniwersytetu Warszawskiego wyniki pokazują, że bardzo dobrze, choć widać także kilka elementów kształcenia, nad którymi uczelnia powinna jeszcze popracować.

W tegorocznej edycji turnieju wzięły udział drużyny z 15 państw świata: Brazylii, Chorwacji, Danii, Francji, Holandii, Kolumbii, Niemiec, Polski, Rumunii, Słowenii, Szwajcarii, Szwecji, Ukrainy, Wielkiej Brytanii i Włoch. Koszty udziału drużyny ukraińskiej w turnieju zostały opłacone dzięki internetowej zbiórce.

Agnieszka FIEDOROWICZ

Reguła włączeń i wyłączeń

Bartłomiej BZDEGA

Uogólnimy równość $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na większą liczbę zbiorów – zaczniemy od obserwacji tego, co się dzieje dla trzech. Poniższe diagramy Venna pokazują kolejne etapy przybliżenia liczby $|A \cup B \cup C|$.

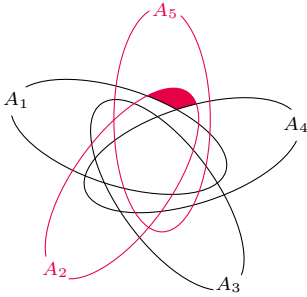
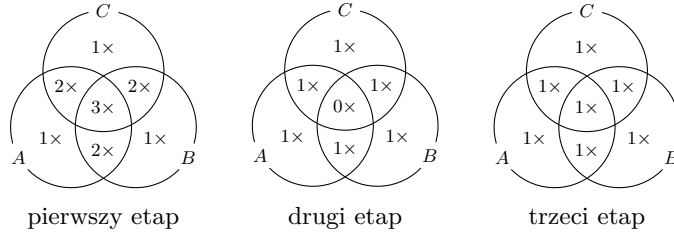


Diagram Venna–Grünbauma z zaznaczoną komórką $C_{\{2,5\}}$

Notka historyczna. Używając jedynie okręgów, możemy narysować diagram Venna dla co najwyżej trzech zbiorów. John Venn wiedział, że można otrzymać diagram dla czterech zbiorów za pomocą elips, ale przypuszczał, że nie jest to możliwe dla pięciu zbiorów. Dopiero w 1975 roku, ponad pół wieku po śmierci Johna Venna, Branko Grünbaum rozstrzygnął tę kwestię, znajdując diagram podobny do tego na rysunku powyżej.



W sumie $|A| + |B| + |C|$ (pierwszy etap) elementy należące do dokładnie jednego ze zbiorów A, B, C są liczone jednokrotnie, należące do dokładnie dwóch – dwukrotnie, a do trzech – trzykrotnie. Wobec tego naturalnym kolejnym krokiem jest wzięcie $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|$. Tutaj elementy należące do dokładnie jednego lub do dokładnie dwóch spośród zbiorów A, B, C liczone są raz, ale elementy części wspólnej $A \cap B \cap C$ nie są liczone wcale. Dopiero w trzecim etapie otrzymujemy

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Widać tu pewną... *regulę*. Ogólniej, zachodzi równość

$$(4) \quad |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n,$$

w której S_k jest sumą liczb elementów wszystkich części wspólnych dokładnie k spośród zbiorów A_1, A_2, \dots, A_n , czyli $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$.

Aby to uzasadnić, zdefiniujemy *komórkę* $C_{\{j_1, \dots, j_m\}}$ jako zbiór elementów należących do $A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_m}$, ale nienależących do żadnego A_j dla $j \neq j_1, \dots, j_m$. Komórkom odpowiadają niepodzielne obszary na diagramie Venna. Każdy element komórki $C_{\{j_1, \dots, j_m\}}$ jest w sumie S_k liczony tyle razy, ile jest zbiorów postaci $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$, zawierających tę komórkę. To zawieranie jest równoważne inkluzji $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{j_1, \dots, j_m\}$. Ponieważ zbiór m -elementowy ma $\binom{m}{k}$ podzbiorów k -elementowych, nasza komórka w całej sumie (4) jest liczona

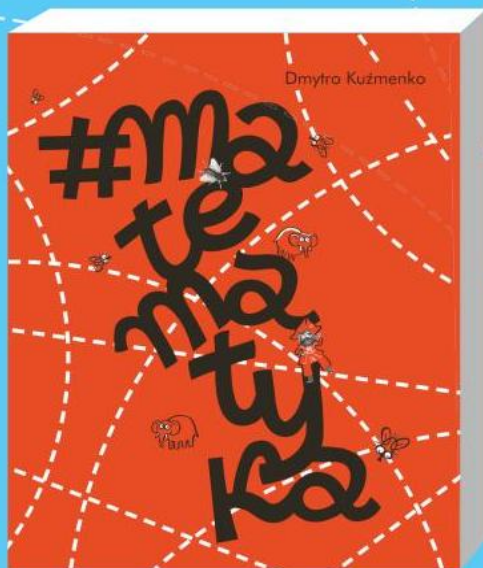
$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} = 1 - (1-1)^m = 1$$

razy, gdyż $(1-1)^m = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m}$ na mocy rozwinięcia Newtona.

Jeszcze kilka uwag na koniec. Zdarza się tak, że liczba elementów każdego ze zbiorów $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ zależy tylko od n i k , w szczególności nie zależy od i_1, \dots, i_k . Możemy ją wtedy opisać funkcją $F(n, k)$ (zadania 2–5). Suma S_k ma $\binom{n}{k}$ składników, więc w tej sytuacji $S_k = \binom{n}{k} F(n, k)$. Wyrażenia (4) na ogół nie da się uprościć, więc zwykle poprzestajemy na odpowiedzi w postaci sumy, w której upraszczamy wszystkie składniki. Reguły włączeń i wyłączeń często nie stosuje się bezpośrednio do tego, co chcemy obliczyć, lecz do zliczania obiektów, które zadanych warunków nie spełniają (zadania 2–6). Na przykład w zadaniu drugim zamiast zliczać rozdania, w których każdy gracz ma co najmniej jednego pika, wygodniej zliczać te, w których co najmniej jeden gracz nie ma żadnego.

Zadania.

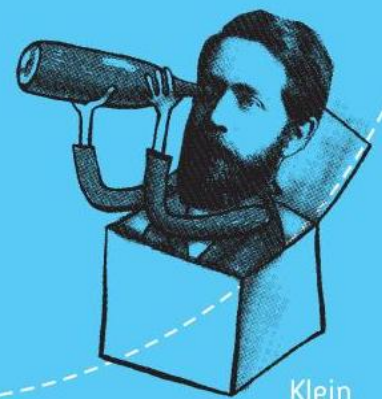
- Ile potęg (liczb dających się przedstawić w postaci a^b dla naturalnych $a, b \geq 2$) znajduje się w zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, 10^6\}$?
- Ile jest rozdań w brydżu, w których każdy z graczy ma co najmniej jednego pika?
- (*Problem roztargnionej sekretarki*) Mamy n listów i n zaadresowanych kopert, każdemu listowi odpowiada dokładnie jedna koperta. Na ile sposobów można umieścić listy w kopertach tak, by każdy z nich był w niewłaściwej kopercie?
- Ile jest suriekcji (funkcji „na”) ze zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ do zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ dla $n \leq m$?
- Na ile sposobów można ustawić w szeregu n par małżeńskich w taki sposób, żeby żadne małżeństwo nie stało obok siebie?
- (*Sito Eratostenesa*) Niech $n \geq 4$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Załóżmy, że znamy wszystkie liczby pierwsze nieprzekraczające \sqrt{n} . Ile jest liczb pierwszych w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$?



Jest takie powiedzenie: *jak coś jest do wszystkiego, to jest do niczego*. Stosuje się zwłaszcza do przedmiotów reklamowanych w mediach – jeśli przekonuje się nas, że konkretny ekspres do kawy nie tylko przygotowuje wyśmienitą espresso, lecz również czekoladę na gorąco, zupeę, babeczki, a także pozmywa później naczynia i odkurzy pokój, to mądrość ludowa każe nam sądzić, że żadna z tych czynności nie zostanie wykonana porządnie. Dmytro Kuźmenko, autor książki **#matematyka**, wydanej przez wydawnictwo Adamada, przyjął odwrotną, dość odważną strategię reklamową: na samym wstępie informuje nas, że z pewnością nie polubimy jego publikacji, niezależnie od tego, czy jesteśmy poważni, czy nie, lubimy matematykę czy nie, jesteśmy uczniami czy nie, skrupulatni czy nie. Dla każdej z tych grup autor podaje powody, dla których książka nie spodoba się jej reprezentantom, słowem: jest to książka dla nikogo.

Lecz może, przewrotnie parafrazując przytoczone na początku powiedzenie, jest to przypadek książki, która jest dla nikogo, a zatem dla wszystkich? Gdyż faktycznie, choć każda z wymienionych grup może odczuwać charakterystyczne dla siebie niedosyty po lekturze, to jednak również każda powinna znaleźć w niej coś, co przypadnie jej do gustu.

Lubiący matematykę ucieszą się z rozpoznania wielu matematycznych przyjaciół (czasem oglądanych z niestandardowego kąta), a nielubiący jej mają szansę poznać bardziej emocjonującą twarz tej pięknej nauki niż ta spoglądająca z szarych kart podręczników szkolnych. Uczniowie docenią luźny styl, w którym utrzymana jest książka, a nauczyciele odnajdą w niej sporo anegdot (również nieoklepanych), którymi można ubarwić zajęcia. Niepoważni będą zachwyceni fantastycznymi, fantazyjnymi i dowcipnymi ilustracjami, a zbyt poważni... cóż, uczciwie przyznajmy, że książka ta nie jest dla zbyt poważnych. Jeśli jednak nie zaliczasz się do tej ostatniej grupy, polecamy sięgnąć po **#matematykę** i samemu znaleźć tam coś dla siebie.



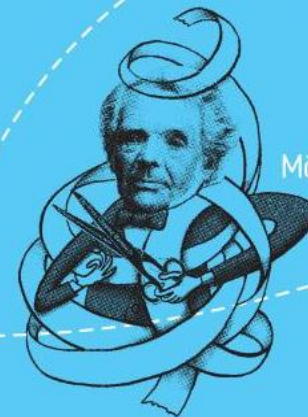
Klein



Mandelbrod



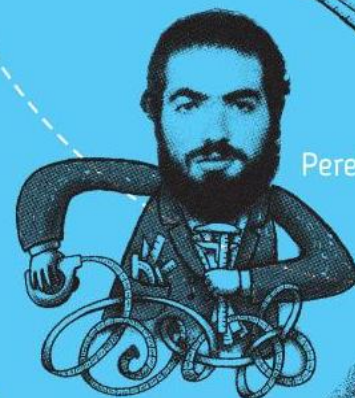
Penrose



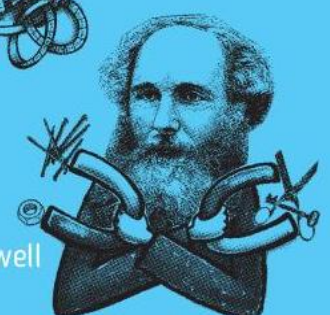
Möbius



Steiner



Perelman



Maxwell