

# delt

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

NR 6 (577) 2022  
CENA 6 ZŁ VAT 8%  
PL ISSN 0157-3005 | NRI ND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK  
www.deltami.edu.pl

**Jak obliczyć  
ratę kredytu?**  
str. 16

UNIWERSYTET  
WARSZAWSKI






9 770013 730058



Nakład: 3500 egz.



## SPIS TREŚCI NUMERU 6 (577)

- Poszukiwanie zderzających się galaktyk  
*William J. Pearson* str. 1
-  Zadania str. 3
- Jak rzucić monetą, której nie ma?  
*Stanisław Cichomski* str. 4
- Pitagoras w Amsterdamie  
*Krzysztof R. Apt* str. 6
- Abstract nonsense*, czyli teoria kategorii  
*Robert Szafarczyk* str. 7
- Po co nam  $\Delta$ ?  
*Michał Miśkiewicz* str. 10
- Princeps Mathematicorum  
*Jarosław Górnicki* str. 13
- Jak obliczyć ratę kredytu?  
*Jakub Pawlikowski, Tomasz Tracz* str. 16
- Klub 44 str. 18
-  Do trzech razy...  
*Magdalena Fikus* str. 20
- Katastrofalnie zatłoczona niska orbita  
okołoziemiska str. 21
- Niebo w czerwcu str. 22
- Donald Knuth, *Liczby nadrzeczywiste* str. 23
- Aktualności str. 24
- LHC po urlopie
-  Liczba i suma dzielników  
*Bartłomiej Bzdega* str. 25

14 kwietnia 2022 zmarł  
**Wojciech Kopczyński**  
fizyk  
w latach 1996–2000  
zastępca redaktora naczelnego *Delty*

19 kwietnia 2022 roku zmarł  
**Antoni Leon Dawidowicz**  
matematyk  
w latach 1993–2016 przewodniczący Jury  
Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

*Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



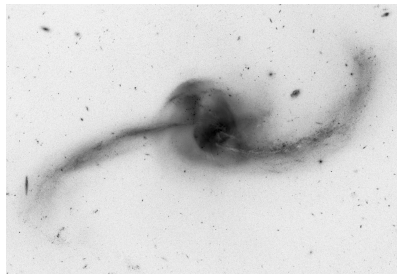
Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Poszukiwanie zderzających się galaktyk *William J. PEARSON\**

\* Adiunkt, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



Rys. 1. Zdjęcie galaktyki NGC 2623 znajdującej się w odległości około 250 milionów lat świetlnych w gwiazdozbiore Raka. Ten kosmiczny węzeł powstał ze splatania się dwóch galaktyk spiralnych. Źródło: NASA/ESA Hubble Space Telescope

Współczesne duże przeglądy nieba mogą dostarczyć katalog danych zawierający nawet 1 miliard obiektów. Powiedzmy, że nasz astronom poszukując zderzających się galaktyk, poświęca 2 sekundy na każde zdjęcie obiektu z takiego katalogu (co i tak jest optymistycznym założeniem). Pracuje bez przerwy, bez snu i przerw na jedzenie. Obejrzenie wszystkich zdjęć zajęłoby mu 555 555,5 godziny, czyli około 63 lata.

Więcej o współczynniku Giniego można przeczytać w artykule Martyny Kobus *Jak się mierzy nierówności społeczno-ekonomiczne?* ( $\Delta_{18}^{05}$ ).

Zderzenia galaktyk to jedne z najbardziej złożonych zjawisk we Wszechświecie. Nie tylko zachwycają swoim pięknem, tworząc niezwykle struktury (jak dla przykładu ta pokazana na rys. 1), ale również stanowią podstawę współczesnych teorii powstawania i ewolucji struktur we Wszechświecie. Znajdujące się odpowiednio blisko galaktyki przyciągają się wzajemnie, wykonując cudownie skomplikowany, trwający miliardy lat taniec, zakończony długo wyczekiwany uściskiem w spiralnych ramionach partnera. Podczas tych kosmicznych płaśów tempo, w jakim obie galaktyki tworzą nowe gwiazdy, gwałtownie wzrasta i każdego roku rozbłyskują one światłem tysięcy nowych gwiazd. Ten kosmiczny balet sprawia, że gaz i pył opadają do wnętrza galaktyk, karmiąc znajdującą się tam supermasywną czarną dziurę, która po jakimś czasie zaczyna uwalniać niesamowite ilości energii, tworząc obiekt znany jako aktywne jądro galaktyki. Mimo tego wszystkiego zidentyfikowanie galaktyk będących w trakcie zderzenia jest wciąż... zaskakująco trudnym zadaniem.

## Klasyfikacja ludzkim okiem

Najbardziej intuicyjną metodą poszukiwania zderzających się galaktyk jest szukanie ich za pomocą „szkiełka i oka”. Postępujące zderzenie galaktyk powoduje ogromne zmiany w strukturze uczestniczących w nim galaktyk, można je więc całkiem łatwo znaleźć na zdjęciach – po prostu kształt takich zlewających się galaktyk bardzo różni się od innych obiektów. Ludzkie oko i mózg doskonale wychwytyują te różnice (przy założeniu, że mamy wystarczająco dobre zdjęcie). Dlatego zidentyfikowane w ten sposób pary zderzających się galaktyk stanowią podstawę, swego rodzaju wzór, dla innych metod. Oczywiście ten rodzaj klasyfikacji ma sporo wad.

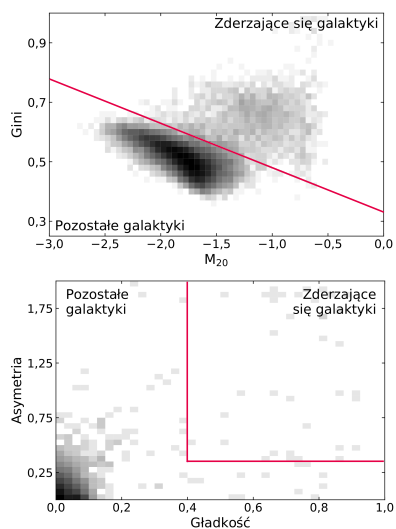
Po pierwsze klasyfikacja wzrokowa jest powolna: wykwalifikowany astronom jest w stanie znaleźć zderzającą się parę galaktyk na zdjęciu w przeciągu kilkudziesięciu sekund. Niby szybko, ale takich galaktyk są przecież miliony! Po drugie katalog zderzających się galaktyk stworzony przez człowieka jest zazwyczaj niemożliwy do idealnego odtworzenia. Klasyfikatorzy nierzadko nie zgadzają się ze sobą, czy dwa obiekty faktycznie są w trakcie zderzenia, zwłaszcza jeżeli mówimy o zdjęciach odległych, których rozdzielczość uniemożliwia dostrzeżenie dokładnych struktur. Co więcej, nawet ta sama osoba może zaklasyfikować obiekt jako zderzające się galaktyki, ale zmienić zdanie następnego dnia lub nawet w przeciągu godziny!

Te wady mogą być nieco złagodzone przez astronomiczne projekty społeczne, takie jak np. Galaktyczne Zoo (*Galaxy Zoo*). W projekcie tym duża liczba wolontariuszy (nie-astronomów) jest proszona o identyfikację tych samych obiektów astronomicznych (np. zderzających się galaktyk). Gdy wszyscy, bądź zdecydowana większość, klasyfikatorzy-amatorzy zgodzą się, że obraz przedstawia zderzające się galaktyki, to możemy mieć niemal pewność, że tak jest naprawdę. Ale nawet twórcy galaktycznego zoo przyznają, że obserwacji, a co za tym idzie zdjęć galaktyk, przybywa w zdecydowanie szybszym tempie niż wolontariuszy. Więc i ta metoda wkrótce przestanie być efektywna.

## Klasyfikacja przy użyciu parametrów opisujących kształt galaktyk

Ponieważ klasyfikacja za pomocą wzroku jest powolna i podatna na błędy (a dodatkowo umożliwia identyfikację zdarzających się galaktyk w bardzo specyficznych stadiach zderzenia), astronomowie opracowali metody zautomatyzowane. Jedną z nich uwzględnia kształt (lub inaczej morfologię) galaktyk. Kształt galaktyki może być opisany przy użyciu wielu różnych parametrów, jednak tylko cztery z nich są najczęściej wykorzystywane do klasyfikacji zderzeń. Są to parametry: Gini,  $M_{20}$ , asymetrii i gładkości.

O parametrach Gini i  $M_{20}$  można by napisać osobne artykuły, tutaj postaram się pokrótce wytłumaczyć, czym są. Współczynnik Giniego, niezbędny do opisu zderzających się galaktyk, ma swoje korzenie w ekonomii! Jest to liczba, która opisuje nierównomierność dowolnego rozkładu. Używana w astronomii



Rys. 2. Przykład klasyfikacji zderzających się galaktyk na podstawie parametrów Gini i  $M_{20}$  (na górze) oraz parametrów asymetrii i gładkości (na dole). W każdym przypadku linia wyznacza granice klasyfikacji obiektów jako zderzające się galaktyki. Intensywność każdego „pikselu” odpowiada liczbie galaktyk o określonych przez niego parametrach – im ciemniejszy odcień, tym więcej galaktyk

opisuje rozkład jasności światła emitowanego przez galaktykę rozłożonego na poszczególne piksele obrazu tej galaktyki. Współczynnik Giniego równy 1 opisuje sytuację, w której całe światło galaktyki zawarte jest w jednym pikselu, podczas gdy Gini równy 0 opisuje sytuację, w której światło jest równomiernie rozłożone na wszystkie piksele obrazu. Drugi z parametrów,  $M_{20}$ , również opisuje rozkład jasności światła galaktyki. Obliczając ten parametr, mierzy się odległości 20% najjaśniejszych pikseli galaktyki od jej centrum i mnoży się je przez natężenie światła w tych pikselach. Suma uzyskanych wartości daje  $M_{20}$ . Parametr ten jest zawsze ujemny, przy czym wartości bliższe zeru wskazują, że światło jest bardziej skoncentrowane w centrum galaktyki.

Kolejne dwa parametry, asymetria i gładkość (jednorodność), są zdecydowanie bardziej intuicyjne. Parametr asymetrii opisuje (rzecz jasna), jak bardzo asymetryczna jest galaktyka. Aby określić ten parametr, stosuje się dość sprytną metodę. Obraca się zdjęcie galaktyki o  $180^\circ$  i odejmuje obróconą wartość od oryginalnego obrazu – piksel po pikselu. Im większa różnica pomiędzy obrazami, tym galaktyka jest bardziej asymetryczna. Z kolei parametr gładkości opisuje, jak jednorodna jest galaktyka. Na obraz nakładany jest filtr wygładzający, a następnie wygładzony obraz jest odejmowany od oryginału. Podobnie jak w przypadku asymetrii, większa różnica wskazuje na mniej jednorodną galaktykę.

Analizując liniowe kombinacje wartości Gini i  $M_{20}$  danej galaktyki lub wartości asymetrii i gładkości, astronomowie identyfikują galaktyki będące w czasie zderzenia. Przyjmuje się, że są to obiekty, dla których  $Gini > -0,15 \cdot M_{20} + 0,33$  (jak pokazano na rys. 2) lub gładkość  $> 0,4$  i asymetria  $> 0,35$ . Metoda ta jest zdecydowanie szybsza niż klasyfikacja ludzka, a jej wyniki są powtarzalne i niesubiektywne.

Klasyfikacja automatyczna wykonana za pomocą opisanego powyżej zestawu parametrów nie jest oczywiście pozbawiona problemów. Parametry są wrażliwe na jakość i rozdzielczość obrazu: niska rozdzielczość i zaszumiony obraz dają niedokładne wartości, dodatkowo obarczone błędem pomiaru. Wiadomo również, że zakresy wartości parametrów używane do kwalifikacji zderzających się galaktyk często opisują zwykle pojedyncze galaktyki o nieregularnym kształcie.

## Poszukiwanie bliskich par galaktyk

Założenie tej metody jest bardzo proste: galaktyki, które są blisko siebie mają sporą szansę się zderzyć. Astronomowie poszukują więc takich bliskich par galaktyk. Jak? Na podstawie ich pozycji na niebie i parametru przesunięcia ku czerwieni (czyli parametru określającego w pewien sposób odległość, pisaliśmy o nim w  $\Delta_{19}^{04}$ ) wyznacza się odległość w przestrzeni trójwymiarowej oraz prędkość względną galaktyk. Ta ostatnia wielkość jest używana do określenia, czy galaktyki ostatecznie zderzą się, czy po prostu przelecą obok siebie. Kryteria identyfikacji bliskich par galaktyk są różne, ale zazwyczaj wybierane są galaktyki, które są oddalone od siebie o co najwyżej 50 kpc ( $1,5 \cdot 10^{18}$  km) i mają prędkość względną mniejszą niż 500 km/s.

Dla przykładu średnica Drogi Mlecznej to około 30 kpc, natomiast odległość Drogi Mlecznej od Galaktyki Andromedy – około 770 kpc.

Metoda ta ma jednak wiele wad. Ponieważ klasyfikuje tylko bardzo bliskie pary galaktyk, pomijane są bardzo wczesne etapy łączenia się galaktyk, gdy galaktyki są

od siebie oddalone o więcej niż 50 kpc. Podobnie tracone są późne etapy zderzenia, gdy galaktyki są już tak blisko siebie, że trudno je odseparować na zdjęciach, lub gdy galaktyki zderzyły się, ale struktura nowo powstałej galaktyki nadal jest zaburzona. Pomimo limitu względnej prędkości często błędnie klasyfikowane są galaktyki, które tylko przelatują obok siebie. Ponadto metoda ta wymaga niezwykle precyzyjnych pomiarów przesunięć ku czerwieni, a te są kosztowne (zarówno pod względem czasowym, jak i finansowym) i wymagają wysoce specjalistycznego sprzętu.

## Metody uczenia maszynowego

W ostatnich latach popularne stały się metody uczenia maszynowego – obecnie szeroko wykorzystywane również w astronomii. Stosuje się je do klasyfikacji typów galaktyk, poszukiwania aktywnych jąder galaktyk, a od niedawna także do identyfikacji zderzających się galaktyk. Metody te w klasycznej odsłonie wykorzystują obrazy rzeczywistych lub symulowanych galaktyk, tych zderzających się i niezderzających się, do trenowania szeregu algorytmów. Ostatnio jednak poza zdjęciami galaktyk uwzględnia się również dodatkowe dane, takie jak parametry morfologiczne lub przesunięcie ku czerwieni.

Dane treningowe mogą pochodzić z katalogów stworzonych z wykorzystaniem wcześniej opisanych metod: klasyfikacji ludzkiej, klasyfikacji morfologicznej, metody bliskich par lub ich dowolnych kombinacji. Po takim treningu algorytmy są w stanie klasyfikować galaktyki w podobny sposób jak którakolwiek z tych metod, ale zdecydowanie bardziej efektywnie.

Ponadto techniki te są w stanie przewyżżyć większość niedociągnięć innych metod. Ponieważ uczenie maszynowe jest algorytmiczne, raz wytrenowane narzędzie uczenia maszynowego zawsze dostarczy taki sam wynik dla tych samych danych, eliminując jedną z głównych wad klasyfikacji ludzkiej – brak powtarzalności. Ale to nie wszystko. Metody uczenia maszynowego dobrze radzą sobie z problemami związanymi z jakością obrazu, przy założeniu, że dane treningowe mają taki sam zakres jakości i rozdzielczości obrazu. Co więcej, w metodach uczenia maszynowego nie jest wymagana wysoka precyzja wyznaczenia przesunięć ku czerwieni, przez co łagodzone są koszty obserwacyjne. Aż w końcu, po przeszkoleniu, metody uczenia maszynowego są o rzędy wielkości szybsze niż klasyfikacja ludzka.

Oczywiście klasyfikacje oparte na uczeniu maszynowym nie są pozbawione wad. Nawet najlepsze metody uczenia maszynowego mogą mieć trudności z powodu wysokiego stopnia zanieczyszczenia próbek. Nieprawidłowa klasyfikacja może sięgać nawet 80% zidentyfikowanych galaktyk. Metody uczenia maszynowego są również z natury swej wrażliwe na jakość próbki treningowej.

Jeśli dane treningowe nie zawierają np. bardzo bliskich par, które są pomijane przez metodę par, wówczas wyszkolone narzędzie uczenia maszynowego nie jest w stanie zidentyfikować tego rodzaju zderzeń, gdyż po prostu algorytm nie wie o ich istnieniu. Oznacza to, że metody uczenia maszynowego w większości przypadków nie są w stanie dokonać zaskakujących odkryć, do których zdolny jest ludzki klasyfikator.

Tak więc istnieje wiele różnych sposobów na identyfikację zderzających się galaktyk. Każda z metod ma swoje wady i zalety. W najbliższej przyszłości spodziewamy się wzrostu wykorzystania technik uczenia maszynowego – ze względu na ich wszechstronność, szybkość i potencjalną niezawodność. Metody te wymagają jednak danych do trenowania, a to wymusza użycie i rozwój także innych metod klasyfikujących. Jednak niezależnie od tego, jakie metody będą stosowane w przyszłości, nawet te jeszcze niewyśnione, wciąż istnieją galaktyki, które wymagają identyfikacji, oraz fascynujące odkrycia, których można dokonać dzięki analizie procesów, jakim podlegają zderzające się galaktyki. Musimy je tylko znaleźć.

*Tłumaczenie: Anna DURKALEC*



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1711.** Udowodnij, że dowolne dwa dzielniki  $d' > d$  liczby  $n$  spełniają nierówność

$$d' > d + \frac{d^2}{n}.$$

Rozwiązanie na str. 4

**M 1712.**  $2n$  promieni podzieliło okrąg na  $2n$  równych części:  $n$  niebieskich i  $n$  czerwonych, pokolorowanych w losowej kolejności. W niebieskich sektorach, zaczynając od pewnego, liczby od 1 do  $n$  są zapisywane w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. W czerwonych sektorach, zaczynając od pewnego, zapisane są te same liczby, ale w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Udowodnij, że istnieje półkole zawierające wszystkie liczby od 1 do  $n$ .

Rozwiązanie na str. 4

**M 1713.** Dany jest trapez  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) wpisany w okrąg  $\Omega$ . Punkty  $M$  i  $N$  są środkami ramion odpowiednio  $AD$  i  $BC$ . Punkt  $P$  jest dowolnym punktem leżącym na krótszym łuku  $AD$  okręgu  $\Omega$ . Udowodnij, że

$$PN + PM \geq BD.$$

Rozwiązanie na str. 9

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1049.** W wyniku przemiany adiabaticznej objętość  $V$  jednoatomowego gazu wzrosła  $q$  razy. Jak, w wyniku tej przemiany, zmieniła się częstość zderzeń atomów gazu z jednostkową powierzchnią ścianek naczynia, w którym ten gaz się znajduje?

Rozwiązanie na str. 15

**F 1050.** W przemianie  $\beta^+$  jądro atomowe krzemu  $^{27}\text{Si}$  ( $Z_1 = 14$ ) rozpada się na lustrzane doń jądro  $^{27}\text{Al}$  ( $Z_2 = 13$ ) i pozyton  $e^+$  oraz neutrino. Maksymalna energia emitowanego pozytonu wynosi  $\Delta E = 3,48$  MeV (wówczas energia neutrino jest zaniedbywalnie mała). Przy założeniu, że ładunek jest rozłożony równomiernie wewnątrz sferycznego jądra o promieniu  $R$ , oszacuj, ile wynosi ten promień.

Wskazówka: energia elektrostatyczna jednorodnie naładowanej kuli o ładunku  $Q$  i promieniu  $R$  wynosi

$$E = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R},$$

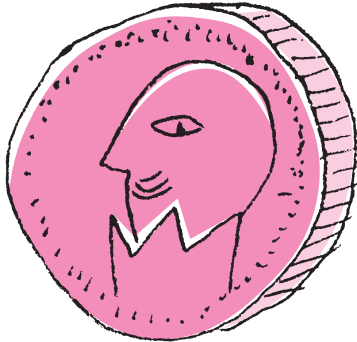
gdzie  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m jest przenikalnością elektryczną próżni. Ładunek elementarny  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C, a promień jądra zależy jedynie od jego liczby masowej  $A$ :  $R = r_0 A^{1/3}$ .

Rozwiązanie na str. 15

# Jak rzucić monetą, której nie ma?

Stanisław CICHOMSKI\*

\*Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rzut monetą jest jedną z najstarszych metod podejmowania decyzji i rozstrzygania sporów. Jeśli stoisz na rozstaju dróg i nie wiesz, dokąd iść, ale musisz wybrać – *w lewo czy w prawo?* – rzut monetą może być całkiem rozsądnym rozwiązaniem. Cóż z tego, skoro moneta, którą trzymasz w kieszeni, zupełnie się do tego nie nadaje... Potrzebujesz przecież monety symetrycznej, takiej, której awers i rewers wypadają z równym prawdopodobieństwem. Twój dukat na symetryczny nie wygląda: z jednej strony wybito krzywego orła, druga przedstawia podobiznę łysego króla.

Załóżmy zatem, że szansa na wyrzucenie orła wynosi  $p$ , gdzie  $p \in (0, 1)$  jest pewną nieznaną stałą. **Czy istnieje procedura, która w oparciu o serię rzutów naszym dukatem pozwoli nam decydować, czy skrócić w lewo, czy w prawo – z równymi prawdopodobieństwami?** Czy korzystając z monety o nieznanym wyważeniu, da się zasymulować rzut monetą idealnie symetryczną?

Przez  $D_1, D_2, D_3, \dots$  oznaczmy kolejne rzuty dukatem. Niech  $O$  (orzwał) i  $R$  (reszka) będą możliwymi wynikami pojedynczego rzutu. Zakładamy naturalnie, że wszystkie rzuty są niezależne, skąd np.

$$\mathbb{P}(O, O, R, O, R) = \mathbb{P}(D_1 = O)^3 \cdot \mathbb{P}(D_1 = R)^2 = p^3(1-p)^2.$$

Prawdopodobieństwo ustalonego ciągu zależy od liczby występujących w nim orłów, ale nie zależy już od ich kolejności. W poszukiwaniu symetrii przyjrzyjmy się podwójnemu rzutowi  $(D_1, D_2)$ :

$\mathbb{P}$	$D_2 = O$	$D_2 = R$
$D_1 = O$	$p^2$	$p(1-p)$
$D_1 = R$	$(1-p)p$	$(1-p)^2$

Choć  $p \in (0, 1)$  jest nieznanne, to niewątpliwie  $\mathbb{P}(O, R) = \mathbb{P}(R, O)$ , i mamy:

$$\mathbb{P}(O, R \mid D_1 \neq D_2) = \frac{\mathbb{P}(O, R)}{\mathbb{P}(D_1 \neq D_2)} = \frac{p(1-p)}{p(1-p) + (1-p)p} = \frac{1}{2},$$

tnz. szanse na wyrzucenie  $(O, R)$  i  $(R, O)$ , pod warunkiem  $D_1 \neq D_2$ , są takie same! Szukana procedura jest więc bardzo prosta – rzucamy dwoma dukatami (lub jednym dwukrotnie) aż do pierwszego momentu, gdy uzyskamy dwa różne wyniki:

- niech  $i = \min \{j \geq 1 : D_{2j-1} \neq D_{2j}\}$ ,
- (a) jeśli  $(D_{2i-1}, D_{2i}) = (O, R)$ , skrócić w **lewo**,  
(b) jeśli  $(D_{2i-1}, D_{2i}) = (R, O)$ , skrócić w **prawo**.

Odnotujmy, że  $\mathbb{P}(i < \infty)$  wynosi oczywiście 1, czyli na pewno prędzej czy później będziemy w stanie podjąć decyzję.  $\square$

Powyższą zagadkę wymyślił i spopularyzował genialny John von Neumann. Problem spodobał się niesłychanie – dziś rozrósł się w multum egzotycznych odmian, znanych zbiorczo pod hasłem *Fabryka Bernoulliego*. Niech  $f : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$  będzie ustaloną funkcją. *Fabryką Bernoulliego* funkcji  $f$  nazywamy każdą procedurę, która korzystając z ciągu niezależnych rzutów (*zmiennych Bernoulliego*)  $D_1, D_2, D_3, \dots$ , gdzie

$$\mathbb{P}(D_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(D_i = 0) = p, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots,$$

produkuje nową monetę (*zmienną*)  $M$ , o rozkładzie

$$\mathbb{P}(M = 1) = 1 - \mathbb{P}(M = 0) = f(p),$$

dla każdego wyboru  $p \in (0, 1)$ . Zagadce von Neumanna odpowiada po prostu funkcja stała  $f \equiv \frac{1}{2}$ .



## Rozwiązanie zadania M 1711.

Niech  $k = \frac{n}{d}$ ,  $k' = \frac{n}{d'}$ , gdzie  $k > k'$ .

Wtedy

$$k^2 > (k+1)(k-1) \geq (k+1)k',$$

więc  $\frac{1}{k'} > \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$ . Wobec tego

$$d' = \frac{n}{k'} > \frac{n}{k} + \frac{n}{k^2} = d + \frac{d^2}{n},$$

co było do pokazania.



## Rozwiązanie zadania M 1712.

„Wędrujemy” po sektorach w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. W pewnym momencie, tuż za niebieskim sektorem  $N$ , znajduje się czerwony sektor  $C$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że  $n$  jest liczbą zapisaną w sektorze  $N$ . Niech liczba  $k$  będzie zapisana w sektorze  $C$ .

Rozważmy grupę  $k$  sektorów, patrząc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zaczynając od  $C$ . Niech wśród nich będzie  $a$  niebieskich i  $b$  czerwonych sektorów. Niebieskie sektory zawierają liczby  $1, 2, \dots, a$  zaś czerwone zawierają liczby  $k, k-1, \dots, k-(b-1)$ . Ponieważ  $a+b=k$ , to  $k-(b-1) = a+1$ , a to oznacza, że sektory te zawierają każdą z liczb od 1 do  $k$  dokładnie raz.

Rozważmy teraz grupę  $n-k$  sektorów, patrząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zaczynając od sektora  $N$ . Niech wśród nich będzie  $c$  niebieskich i  $d$  czerwonych sektorów. Liczby w niebieskich sektorach to kolejno  $n, n-1, \dots, n-(c-1)$ , a liczby w czerwonych sektorach to odpowiednio  $k+1, k+2, \dots, k+d$ . Z równości  $c+d = n-k$ , podobnie jak wyżej, wnioskujemy, że każda z liczb od  $k+1$  do  $n$  występuje dokładnie raz. Połączenie tych dwóch grup daje nam szukany półokrąg.

**Zadanie 1.** Zaprojektuj fabrykę Bernoulliego dla:

- (a)  $f(p) = 1 - p$ , (c)  $f(p) = \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}$ ,  
 (b)  $f(p) = p^2 - 3p^3 + 3p^4 - p^5$ , (d)  $f(p) = \frac{1}{1+p}$ .

Wskazówka do (d):  
 $\frac{1}{1+p} = 1 - p + p^2 - p^3 + p^4 - \dots$



Przykład ciągu binarnego spełniającego a) i b) ( $n = 5$ ):

1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0.

Nie należy sądzić, by wszystkie zadania tego typu były równie proste. Znalezienie odpowiedniej procedury wymaga czasem odrobiny szczęścia i niebagatelnej pomysłowości. Jako dobry przykład rozpatrzmy teraz przypadek fabryki Bernoulliego, którą Santosh Vempala zaprojektował dla funkcji  $f(p) = \sqrt{p}$ .

Na dobry początek zacznijmy od przedstawienia  $f(p)$  w formie wyrobu wielomianopodobnego: rozwijając  $\sqrt{p}$  w szereg Taylora wokół punktu  $p_0 = 1$ , dla  $p \in (0, 1)$  dostajemy tożsamość

$$(*) \quad \sqrt{p} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2^{2n+1}} (1-p)^{n+1},$$

gdzie  $C_n := \binom{2n}{n+1} \frac{1}{n+1}$  (dla  $n = 0$  mamy  $C_0 = 1$ ). Początkowe wartości ciągu  $C_n$  to:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...

Szczęśliwy traf polega na tym, że  $(C_n)_{n \geq 0}$  to tzw. ciąg liczb Catalana, który pojawia się naturalnie w rozmaitych problemach kombinatorycznych dotyczących zliczania. W naszym przypadku pomocna będzie następująca charakteryzacja, której uzasadnienie można znaleźć w artykule Joanny Jaszuskiej *Drogi w kratach i kino* ( $\Delta_{14}^{01}$ ).

Istnieje dokładnie  $C_n$  takich ciągów binarnych długości  $2n$ , w których:

- a) występuje po równo  $n$  zer i  $n$  jedynek,  
 b) w każdym początkowym podciągu występuje nie mniej jedynek niż zer.

I cóż z tego wynika? Otóż... clou programu polega na tym, by teraz chytrze zinterpretować prawą stronę (\*). Rozważmy następujący eksperyment: rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż łączna liczba wyrzuconych orłów po raz pierwszy przekroczy liczbę wyrzuconych reszek – liczba orłów i reszek różni się wtedy o 1, skąd liczba wykonanych rzutów musi być nieparzysta. Szansa, że zdarzenie to zrealizuje się w  $(2n + 1)$ -szym rzucie, wynosi zatem dokładnie  $C_n \cdot 2^{-(2n+1)}$ .

I to jest już prawie koniec – należy jeszcze sprytnie zauważyć, że rzucać symetryczną monetą nauczyliśmy się na samym początku! Niezawodna fabryka wygląda więc następująco:

1. Rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż łączna liczba wyrzuconych orłów po raz pierwszy przekroczy liczbę wyrzuconych reszek; oznaczmy liczbę wykonanych rzutów przez  $\tau$ .
2. Niech  $\tau = 2n + 1$  ( $\tau$  jest nieparzyste); wykonujemy  $n + 1$  rzutów krzywym dukatem:

$D_1, D_2, \dots, D_n, D_{n+1}$ ,

- (a) jeśli  $\max_{1 \leq i \leq n+1} D_i = 0$  (wypadły same reszki), **zwróć**  $M = 0$ ,  
 (b) jeśli  $\max_{1 \leq i \leq n+1} D_i = 1$  (wypadł choć jeden orzeł), **zwróć**  $M = 1$ .

Dlaczego ten algorytm działa? Cóż, możemy wszakże roz�isać:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M = 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(M = 0 \mid \tau = 2n + 1) \mathbb{P}(\tau = 2n + 1) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{n+1} \frac{C_n}{2^{2n+1}}, \end{aligned}$$

skąd  $\mathbb{P}(M = 1)$  jest równe prawej stronie (\*).  $\square$

Kluczowym elementem poprzedniej konstrukcji było wielokrotne użycie triku von Neumanna. Skoro umiemy symulować rzut monetą symetryczną, to o następnych problemach możemy już myśleć tak, jakbyśmy taką właśnie monetą też już mieli w kieszeni.

Okazuje się, że można dokładnie scharakteryzować wszystkie te funkcje, dla których *Fabryka Bernoulliego* istnieje. Matematycy Michael S. Keane i George L. O'Brien pokazali bowiem, że rozwiązanie dla funkcji  $f : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ona następujące dwa warunki:

1.  $f$  jest ciągła,
2.  $f$  jest stała **lub** istnieje taka liczba całkowita  $n$ , że

$$\min \{f(p), 1 - f(p)\} \geq \min \{p^n, (1-p)^n\},$$

dla wszystkich  $p \in (0, 1)$ .

W szczególności, funkcje  $f(p)$  zadane wzorem

$$\frac{1}{\pi}, \sqrt[3]{p}, \cos(p), e^{-p}, \log(1+p)$$

są wszystkie symulowalne (!) Z drugiej wszak strony, funkcji tak prostej jak

$$f(p) = \min\{1, 2p\}$$

nijak wyprodukować się nie da.

# Pitagoras w Amsterdamie

Krzysztof R. APT\*

\*CWI, Amsterdam i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Mieszkam w Amsterdamie. Z okna mojego korytarza widać interesujący budynek (zdjęcie po lewej). To budynek zwany „Pontsteiger” (po polsku: „Molo”), na zdjęciu po prawej stronie, z Wikipedii, widoczny w pełnej glorii.

Dwa zdjęcia budynku Pontsteiger. Zdjęcie po prawej: Ceescamel, licencja Creative Commons, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=82330152>.



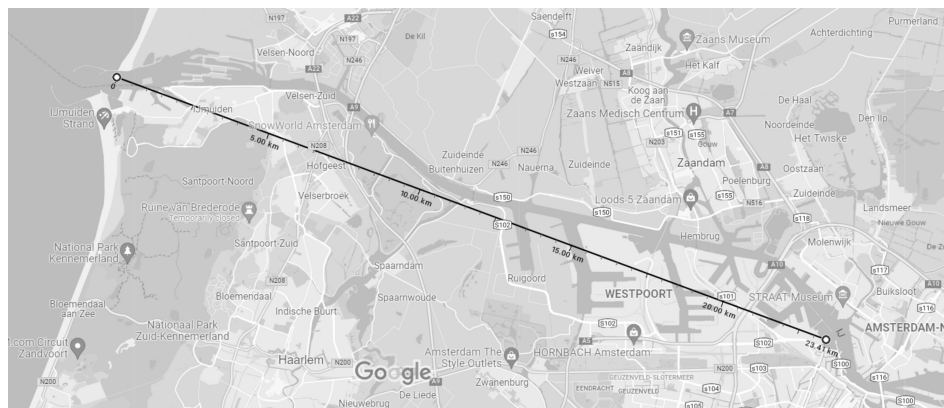
<sup>1</sup> <https://nl.wikipedia.org/wiki/Pontsteigergebouw>

Według opisu zamieszczonego w holenderskiej Wikipedii Pontsteiger ma 92 metry wysokości i 26 pięter<sup>1</sup>. Ponoć w pogodny dzień z niektórych mieszkań widać morze. Ustalmy, czy to prawda, bez odwiedzania tego budynku.

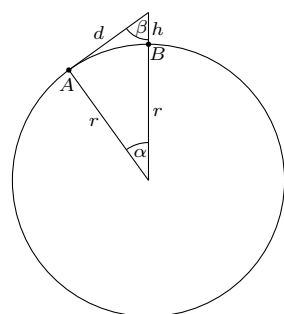
Sprawę nieco komplikuje obecność wydm, które w Holandii zasłaniają widok na wybrzeże Morza Północnego. Dlatego musimy wybrać odpowiedni punkt na wybrzeżu. Pontsteiger leży na brzegu Kanału Morza Północnego, poprowadzonego do Morza Północnego niemal wzdłuż najkrótszej linii.

Mapa przedstawiona na rysunku poniżej pokazuje, że linia łącząca Pontsteigera i koniec Kanału Morza Północnego omija wszelkie wydmy. Ma ona około 23,41 km długości.

Aby odtworzyć rysunek po prawej stronie, wpisz „Pontsteiger” w <https://www.google.com/maps>, następnie umieść myszkę na miejscu Pontsteigera, kliknij prawym przyciskiem myszki, wybierz „zmiar odległość”, wybierz punkt odpowiadający miejscu, w którym Kanał Morza Północnego wpływa do morza, kliknij lewym przyciskiem myszki, a następnie pociągnij linię, która się pojawi, aby sprawdzić, czy można wybrać bliższy punkt. Ta linia przechodzi przez teren przemysłowy Westpoort w Amsterdamie i przez miasteczko IJmuiden. Korzystając z map Google, można sprawdzić, że odpowiednie obszary mają tylko niską zabudowę.



Następnym krokiem jest przypomnienie sobie promienia Ziemi, który wynosi 6371 km. Te informacje wystarczają, aby znaleźć odpowiedź. W tym celu rozważmy rysunek 1.



Rys. 1. Okrąg i trójkąt prostokątny

Oznaczamy na nim przez  $r$  promień okręgu, przez  $h$  odległość jakiegoś punktu (np. któregoś z pięter Pontsteigera) od powierzchni Ziemi, a przez  $d$  długość stycznej z tego punktu do okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$r^2 + d^2 = (r + h)^2,$$

czyli

$$(*) \quad h^2 + 2rh - d^2 = 0.$$

To daje

$$h = -r \pm \sqrt{d^2 + r^2}.$$

Ponieważ  $d \neq 0$ , jedynym dodatnim rozwiązaniem równania (\*) jest  $h = -r + \sqrt{d^2 + r^2}$ .



Biorąc pod uwagę relatywnie małe odległości (w stosunku do promienia Ziemi), zamiast  $d$  możemy użyć  $AB$ . Rzeczywiście  $d = \operatorname{tg}\left(\frac{AB}{r}\right)r \approx 23,4101$  km, a więc  $d \approx AB$ .

Proste obliczenia zostały wykonane przy użyciu Wolfram Alpha, <https://www.wolframalpha.com/>.

Ten genialnie prosty sposób obliczenia promienia Ziemi został zaproponowany przez arabskiego uczonego Al-Biruni około tysiąca lat temu. Dokładniej, zamiast obliczyć  $d$ , Al-Biruni obliczył, używając astrolabium, kąt  $\beta$  pomiędzy styczną  $d$  do horyzontu i pionową linią poprowadzoną ze szczytu góry. Ponadto aby obliczyć wysokość  $h$  wzgórza, porównał on kąty jego elewacji z dwóch miejsc i obliczył odległość między tymi punktami. Ponieważ

$$\sin(\beta) = \frac{r}{r+h},$$

dostajemy wtedy

$$r = \frac{h \sin(\beta)}{1 - \sin(\beta)}.$$

W ten sposób Al-Biruni obliczył promień Ziemi z błędem zaledwie 2%.

Sparavigna, Amelia (2013). *The Science of Al-Biruni*. *International Journal of Sciences*. 2 (12): 52-60. arXiv:1312.7288. doi:10.18483/ijSci.364.

\* Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wyrażenie *abstract nonsense* jest używane do opisu dowodów twierdzeń spoza teorii kategorii, ale wykorzystujących wyłącznie jej metody.

Aby obliczyć  $h$ , musimy teraz obliczyć  $d$ . Ponieważ znamy  $r$  i (długość łuku)  $AB$ , mianowicie: 23,41 km, jest to bardzo proste. Rzeczywiście  $\alpha = \frac{AB}{2\pi r} \cdot 2\pi = \frac{AB}{r}$ , a więc  $d = \operatorname{tg}\left(\frac{AB}{r}\right)r$ . Zatem

$$h = r \left( -1 + \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{AB}{r}\right) + 1} \right).$$

Dla  $r = 6371$  km i  $AB = 23,41$  km otrzymujemy  $h \approx 0,0430098$  km, czyli około 43 metry. Ponieważ  $43/(92/26) \approx 12,15$ , wnioskujemy, że morze widać już z trzynastego piętra Pontsteigera.

W tym rozumowaniu przyjeśliśmy dwa niewinne założenia. Po pierwsze, że budynek leży na poziomie morza. Jest to uzasadnione, gdyż stoi on prawie na poziomie Kanału Morza Północnego. Poza tym założyliśmy również, że Ziemia jest idealną sferą.

Interesującym aspektem równania (\*) jest, że możemy je również użyć do ustalenia  $r$ , promienia Ziemi. Mianowicie: założmy teraz, że znamy wysokość  $h$  i długość stycznej  $d$ . Z (\*) otrzymujemy

$$r = \frac{d^2 - h^2}{2h}.$$

Możemy odtworzyć jego osiągnięcie, prosząc administratora Pontsteigera, aby powiedział nam, z którego piętra mieszkańcy budynku mogą już widzieć morze. Ustaliliśmy wcześniej, że są to mieszkańcy trzynastego piętra. Trzynaste piętro zaczyna się na wysokości  $h = 12 \cdot 92/26$  metrów, a więc około 42,46 metra. Wstawiając w ostatnim równaniu  $h = 0,04246$  km i  $d = 23,41$  km, otrzymujemy  $r \approx 6453,44$  km, wartość, która różni się od prawidłowej odpowiedzi raptem o 1%.

Trzecie zastosowanie równania (\*) polega na obliczeniu  $d$ , gdy znamy  $h$  i  $r$ . Zilustrujemy je, ustalając, jak daleko widać ze szczytu Pontsteigera do horyzontu w kierunku morza. Z (\*) otrzymujemy

$$d = \sqrt{2rh + h^2}.$$

Dla  $r = 6371$  km i  $h = 0,092$  km otrzymujemy  $d \approx 34,2385$  km.

## Abstract nonsense, czyli teoria kategorii

Robert SZAFARCZYK\*

Teoria kategorii, która jest tematem tego artykułu, ma dość nietypowe w matematyce zastosowanie. Właściwie można powiedzieć, że nie jest to wcale teoria; nie jest to odrębny obszar badań, w którym można się wyspecjalizować, zapominając o reszcie matematyki. Teoria kategorii jest pewnego rodzaju językiem, uniwersalną „mową” matematyczną, która pozwala (mniej lub bardziej) połączyć te wszystkie porozrzucone dziedziny matematyczne w jakąś całość.

Zacznijmy od tego, czym jest ta kategoria.

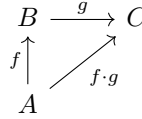
**Definicja 1** (Kategoria). *Kategoria składa się z obiektów i morfizmów. Morfizmy wyobrażamy sobie jako strzałki idące od obiektu do obiektu, czyli morfizm  $f$  z obiektu  $A$  do obiektu  $B$  narysujemy tak:*

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Oczywiście każda strzałka ma dokładnie jeden początek i dokładnie jeden koniec.

Ponadto morfizmy można składać. Gdy dwa morfizmy  $f, g$  są takie, że pierwszy kończy się tam, gdzie drugi zaczyna, to automatycznie otrzymujemy trzeci morfizm, który nazywamy ich złożeniem i oznaczamy  $f \cdot g$  (uwaga: równie często w literaturze spotyka się oznaczenie  $g \circ f$ ).

Kategoria jest trochę jak mapa samochodowa, są na niej miasta i drogi. Planując wycieczkę z miasta  $A$  do miasta  $B$ , możemy podróżować drogą  $f$ . Jeśli chcemy potem pojechać z  $B$  do  $C$  drogą  $g$ , to możemy to zrobić, nazywając całą podróż  $f \cdot g$ . Ponadto w każdym mieście możemy się zatrzymać na zwiedzanie rynku, co nie zmienia w żaden sposób trasy wycieczki  $1_A \cdot f = f = f \cdot 1_B$ .



Dla danych składalnych morfizmów istnieje dokładnie jedno złożenie; morfizmów, które nie są składalne, nie można składać; ponadto zachodzi  $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$  (czyli możemy pisać po prostu  $f \cdot g \cdot h$ ). Ostatnią własnością potrzebną, by kategoria była kategorią, jest to, że każdy obiekt (dla ustalenia uwagi  $A$ ) musi posiadać morfizm  $1_A : A \rightarrow A$  zwany identyznością i spełniający dla dowolnych  $f : A \rightarrow B$  i  $g : C \rightarrow A$  tożsamości  $1_A \cdot f = f$  oraz  $g \cdot 1_A = g$ .

**Przykład 1.** Poniższe struktury tworzą kategorię:

- jeden obiekt i identyzność:  $A \curvearrowright 1_A$ ;
- jeden obiekt i morfizmy  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  takie, że

$$f_m \cdot f_n = f_{m+n} : A \curvearrowright f_n.$$

Poniższe struktury **nie** tworzą kategorii:

- trzy obiekty z identyznościami i dwa morfizmy:

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow 1_A & & \downarrow 1_B & & \downarrow 1_C \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

(brakuje złożenia  $f \cdot g$ );

- jeden obiekt i morfizmy  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  takie, że

$$f_m \cdot f_n = f_{m-n} : A \curvearrowright f_n$$

(brakuje identyzności).

Jak na uniwersalną mowę matematyczną, która (według autora) ma pozwolić na sformalizowany opis całej matematyki, to na pierwszy rzut oka nie wygląda to zbyt obiecująco. Strzałki i kropki nie pojawiają się w matematyce zbyt często, no chyba że w teorii grafów. Mimo to nie traćmy nadziei i spróbujmy coś z tej definicji wywnioskować.

**Lemat 1.** *Każdy obiekt ma dokładnie jedną identyzność.*

*Dowód.* Z definicji kategorii wiemy, że każdy obiekt ma co najmniej jedną identyzność. Trzeba więc pokazać, że nie może mieć ich więcej. Załóżmy nie wprost, że jest jakiś obiekt  $A$ , który oprócz  $1_A$  ma jeszcze jedną identyzność  $i : A \rightarrow A$  nierówną  $1_A$ . Wówczas  $1_A$  i  $i$  są składalne, więc zachodzi  $i = i \cdot 1_A$  (bo  $1_A$  jest identyznością) oraz  $i \cdot 1_A = 1_A$  (bo  $i$  jest identyznością). Ale to znaczy, że  $i = 1_A$ , co jest sprzeczne z naszym założeniem.  $\square$

Teoria kategorii ma to do siebie, że robi się tym ciekawsza, im bogatszy jest wachlarz „słów”, jakimi jesteśmy w stanie operować. Wprowadźmy więc nową definicję.

**Definicja 2 (Monomorfizm).** *Morfizm  $m : A \rightarrow B$  nazywamy monomorfizmem, jeśli dla dowolnego obiektu  $C$  i morfizmów  $f, g : C \rightarrow A$  z równości  $f \cdot m = g \cdot m$  wynika  $f = g$ .*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{m} & B \\ f \uparrow \uparrow g & \nearrow & \\ C & & \end{array} \implies f = g$$

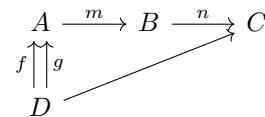
Czyli monomorfizmy to morfizmy posiadające pewną dodatkową własność. Poniżej zostawiam Czytelnikom do udowodnienia fakt ukazujący, że znamy już pewną klasę monomorfizmów.

**Zadanie 1.** *Identyzności są monomorfizmami.*

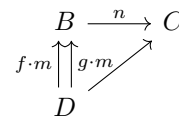
Tymczasem my udowodnimy poniższy lemat.

**Lemat 2.** *Niech  $m : A \rightarrow B$  i  $n : B \rightarrow C$  będą monomorfizmami. Wówczas ich złożenie  $m \cdot n : A \rightarrow C$  również jest monomorfizmem.*

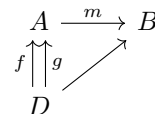
*Dowód.* Weźmy dowolne  $D$  oraz  $f, g : D \rightarrow A$ , takie że  $f \cdot m \cdot n = g \cdot m \cdot n$ . Chcemy wywnioskować, że  $f = g$ . Mamy diagram:



Możemy go przerysować jako:



więc korzystając z tego, że  $n$  jest monomorfizmem, dostajemy  $f \cdot m = g \cdot m$ :



A stąd wynika już, że  $f = g$ , bo  $m$  jest monomorfizmem.  $\square$

No to teraz cała ta teoria kategorii stała się wręcz niepoważna. Ten „dowód” przypomina bardziej zabawę w łączenie kropek niż inteligentny wywód przyczynowo-skutkowy. Nadszedł więc moment, w którym, by zachować przyzwoitość tekstu bądź co bądź matematycznego, muszę niezwłocznie ujawnić sekret przydatności teorii kategorii. A mianowicie: wszystko, co w matematyce interesujące, tworzy kategorię. A oto dowód (empiryczny):

Na przykład ze zbioru dwuelementowego do trójelementowego istnieje  $3^2 = 9$  morfizmów. Z kolei morfizmów ze zbioru jednopunktowego do dowolnego innego zbioru jest tyle, ile ma on elementów.

Pisząc „wszystko tworzy kategorię”, nie miałem na myśli tylko zbiorów, każda porządna struktura matematyczna ma swoją kategorię. Istnieje więc kategoria grup, grafów, przestrzeni topologicznych, funkcji różniczkowalnych, a nawet kategoria wszystkich kategorii.

Jeszcze bardziej magiczne jest to, że ogromną liczbę własności i konstrukcji matematycznych można uogólnić na dowolną kategorię. Na przykład konstrukcję produktu kartezjańskiego zbiorów można opisać kategoriynie. Wówczas, jak można się spodziewać, przyjmuje ona postać produktu grup w kategorii grup, produktu pierścieni w kategorii pierścieni itd. Ale, sprytnie dobierając kategorię, można też powiedzieć, że produktami są pojęcia takie, jak  $A \cap B$ ,  $p \wedge q$ ,  $\text{NWD}(m, n)$  czy  $\min(x, y)$ .



#### Rozwiązanie zadania M 1713.

Niech  $P'$  będzie punktem leżącym na krótszym łuku  $CB$  okręgu  $\Omega$  tak, że  $BP' = PD$ . Wtedy czworokąt  $PDP'B$  jest trapezem równoramiennym, skąd  $PP' = BD$ . Ponadto z tego, że  $P'B = PD$ ,  $DM = BN$  oraz  $\sphericalangle P'BN = \sphericalangle PDM$  (co wynika wprost z wyboru  $P'$ ) wnosimy, że trójkąty  $PDM$  oraz  $P'BN$  są przystające. W szczególności  $NP' = MP$ . Wobec tego z nierówności trójkąta dla  $PNP'$  mamy:  $PN + NP' \geq PP'$ , czyli  $PN + PM \geq BD$ .

**Definicja 3** (Kategoria zbiorów). Oznaczamy przez **Set** kategorię, w której:

- obiektami są zbiory,
- morfizmami są funkcje,
- składanie jest składaniem funkcji,
- identycznościami są funkcje identycznościowe ( $x \mapsto x$ ).

Uważny Czytelnik powinien w tym momencie sprawdzić, że **Set** rzeczywiście spełnia wszystkie warunki bycia kategorią.

Bardzo ważną rzeczą, wręcz kluczową, jest to, że tworząc kategorię zbiorów, tak naprawdę zapominamy, czym zbiory są. Obiekty w **Set** to tylko punkty (bez elementów, bez informacji), morfizmy to tylko strzałki. Jedyna informacja, jaką mamy, to jak dany morfizm składa się z innymi morfizmami (o których również wiemy tylko to, jak składają się z innymi morfizmami...). Wydawałoby się więc, że pozbyliśmy się wszystkiego, co istotne z teorii zbiorów, i dostaliśmy coś kompletnie z nią niezwiązanego. Wprost przeciwnie.

**Twierdzenie 1.** Funkcja jest injektywna (różnowartościowa) wtedy i tylko wtedy, gdy jest monomorfizmem w **Set**.

*Dowód.* Najpierw sprawdzmy, że jeśli  $f$  jest funkcją injektywną ze zbioru  $X$  do  $Y$ , to spełnia własność monomorfizmu. Weźmy dowolny zbiór  $Z$  oraz dwie funkcje  $g, h : Z \rightarrow X$  spełniające  $g \cdot f = h \cdot f$ . Wówczas dla dowolnego  $z \in Z$  mamy  $f(g(z)) = (g \cdot f)(z) = (h \cdot f)(z) = f(h(z))$ , czyli z różnowartościowości funkcji  $f$  dostajemy  $g(z) = h(z)$ , co oznacza  $g = h$ .

Teraz załóżmy, że funkcja  $f$  z  $X$  do  $Y$  spełnia własność monomorfizmu. Chcemy pokazać, że jest injektywna. Weźmy dowolne  $x_0, x_1 \in X$  spełniające  $f(x_0) = f(x_1)$ . Oznaczmy przez  $*$  obiekt w **Set** odpowiadający pewnemu zbiorowi jednoelementowemu (ten jedyny element również nazwijmy  $*$ ) i zdefiniujmy funkcje  $g_0, g_1 : * \rightarrow X$  w ten sposób, że  $g_0(*) = x_0$ , a  $g_1(*) = x_1$ . Wówczas mamy  $(g_0 \cdot f)(*) = f(g_0(*)) = f(x_0) = f(x_1) = f(g_1(*)) = (g_1 \cdot f)(*)$ , czyli  $g_0 \cdot f$  zgadza się z  $g_1 \cdot f$  na wszystkich elementach  $*$ . Morfizmy te są równe, a skoro  $f$  jest monomorfizmem, to również  $g_0 = g_1$ , co oznacza, że  $x_0 = x_1$ .  $\square$

Stało się coś magicznego. Okazało się, że dla zbiorów definicja funkcji injektywnej pokrywa się z definicją monomorfizmu. A mimo to ciężko sobie wyobrazić dwie równie niepodobne do siebie definicje. Jedna jest lokalna, mówi o dwóch zbiorach, ich elementach i jednej funkcji między nimi. Druga wprost przeciwnie, wykorzystuje całą kategorię, wszystkie zbiory i wszystkie funkcje.

Pokazaliśmy już metodą *abstract nonsense*, że złożenie dwóch monomorfizmów jest monomorfizmem. Dostajemy więc „za darmo” poniższy prosty fakt.

**Wniosek.** Złożenie dwóch funkcji injektywnych jest funkcją injektywną.

W taki właśnie sposób działa teoria kategorii. Pozwala uprawiać matematykę jeden poziom abstrakcji wyżej. Jeśli udowodnimy coś dla wszystkich kategorii, to możemy to zastosować dla każdej z nich (dla zbiorów, grup, pierścieni, nawet jeśli nie wiemy, czym one są). Jedno twierdzenie abstrakcyjne jest warte nieskończenie wielu twierdzeń szczególnych.

Jeśli więc Czytelnik miałby ochotę za jednym zamachem rozwiązać nieprzeliczalnie wiele zadań matematycznych (bijąc tym na pewno jakiś rekord Guinnessa), to poniżej jest ku temu okazja.

**Zadanie 2.** Niech  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  będą dowolnymi morfizmami. Pokazać, że jeśli  $f \cdot g$  jest monomorfizmem, to  $f$  jest monomorfizmem. Czy  $g$  też musi być monomorfizmem?

**Zadanie 3.** Skonstruować skończoną kategorię, w której dokładnie połowa morfizmów jest monomorfizmami.

**Zadanie 4.** Definiujemy kategorię  $\mathbb{N}$ . Jej obiektami są wszystkie liczby naturalne, a morfizmami relacja  $\leq$  (strzałka  $m \rightarrow n$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $m \leq n$ ). Sprawdzić, że  $\mathbb{N}$  rzeczywiście tworzy kategorię.

## Po co nam $\Delta$ ?

Michał MIŚKIEWICZ\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski  
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Nie, nie zamierzam poddawać w wątpliwość sensu istnienia tego szacownego czasopisma, bo też trudno sobie wyobrazić, co byśmy bez niego zrobili. Chodzi mi o *delte* znaną nam ze szkolnych lekcji matematyki.

### Równanie kwadratowe a $\Delta$

Ogólna postać równania kwadratowego to  $ax^2 + bx + c = 0$ , ale wystarczy podzielić stronami przez  $a$ , by ją sprowadzić do tej rozważanej obok.

Na tak postawione pytanie odpowiedź sama się narzuca – wyróżnik, czyli popularna *delta*, pozwala nam obliczyć rozwiązania równania kwadratowego. Mianowicie dla równania postaci  $x^2 + bx + c = 0$  możemy najpierw wyznaczyć  $\Delta = b^2 - 4c$ , a następnie uzyskać dwa rozwiązania:

$$(*) \quad x_0 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Jeśli w ten sposób postawimy sprawę,  $\Delta$  pełni jedynie rolę pomocniczej wielkości, która pozwala podzielić proces wyznaczania rozwiązań na dwa etapy.

Wielkość ta nie bierze się jednak znikąd. Jednym ze sposobów na przekonanie się o tym jest odjęcie stronami obu równości w (\*). Współczynnik  $b$  się wtedy skraca i widzimy, że  $\sqrt{\Delta}$  jest równy  $x_1 - x_0$ , czyli różnicy rozwiązań. Przypomnijmy, że sumę rozwiązań możemy wyznaczyć ze wzorów Viète'a. Wzory te (przytoczone na marginesie) wynikają po prostu z przyrównania odpowiednich współczynników wielomianów  $x^2 + bx + c$  oraz  $(x - x_0)(x - x_1)$ . W naszym przypadku wystarczy jeden z nich – jeśli wiemy, że  $x_1 - x_0 = \sqrt{\Delta}$  oraz  $x_0 + x_1 = -b$ , to taki układ dwóch równań liniowych łatwo rozwiązać, otrzymując wzory opisane w (\*).

Wzory Viète'a:  
 $x_0 + x_1 = -b$ ,  
 $x_0 x_1 = c$ .

Pozostaje uzasadnić, skąd wziął się wzór  $\Delta = b^2 - 4c$ . Otóż jeśli  $\sqrt{\Delta}$  jest różnicą rozwiązań, to  $\Delta$  jest kwadratem tej różnicy, a tę wielkość nietrudno wyznaczyć ze wzorów Viète'a:

$$\Delta = (x_1 - x_0)^2 = x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_1 = (x_0 + x_1)^2 - 4x_0x_1 = b^2 - 4c.$$

**Zadanie 1.** Korzystając z zależności  $\Delta = (x_1 - x_0)^2$ , wyjaśnić, o czym świadczy każdy z trzech przypadków:

- $\Delta < 0$ ,      •  $\Delta = 0$ ,      •  $\Delta > 0$ .

**Zadanie 2.** Wielkość  $(x - y)^2$  umiemy wyrazić poprzez  $x + y$  i  $xy$ . Sprawdzić, że podobnie można przedstawić  $x^2 + y^2$ ,  $x^3 + y^3$ ,  $x^4 + y^4$  itd., jak również każde inne wyrażenie wielomianowe symetryczne ze względu na zamianę miejscami  $x$  i  $y$ .

*Wskazówka.* Sukcesywnie wyjmować przed nawias  $xy$  i odejmować  $x + y$  podniesione do odpowiedniej potęgi.

### Równanie trzeciego stopnia – co $\Delta$ mówi o rozwiązaniach?

Przejdźmy krok dalej i rozważmy równanie postaci  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Zaczniemy od przyjrzenia się, co o jego rozwiązaniach może nam powiedzieć wyróżnik.

Powiedzmy, że rozwiązania są trzy:  $x_0, x_1, x_2$ . Motywowani przypadkiem kwadratowym, tutaj wprowadzimy wyróżnik równania jako

$$(**) \quad \Delta = (x_0 - x_1)^2(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_0)^2.$$

Odnotujmy od razu dwie pożyteczne obserwacje:

- Jeśli równanie ma pierwiastek wielokrotny, czyli np.  $x_0 = x_1$ , to  $\Delta = 0$ .
- Jeśli pierwiastki  $x_0, x_1, x_2$  są trzema różnymi liczbami rzeczywistymi, to  $\Delta > 0$ .

Do analizy przypadku  $\Delta < 0$  będziemy potrzebować liczb zespolonych. Przyjmijmy mianowicie, że rozwiązaniem równania  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$  jest liczba zespolona  $x_1 = u + iv$ , gdzie  $u, v$  są liczbami rzeczywistymi i  $v \neq 0$  (a więc nie mamy do czynienia z liczbą rzeczywistą w przebraniu). Kluczowa będzie obserwacja, że jeśli  $x_1$  jest rozwiązaniem równania  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , to rozwiązaniem jest również  $x_2 := u - iv$  (tzw. *sprzężenie*  $x_1$ ). Opiera się to na poniższym fakcie:

Tzw. podstawowe twierdzenie algebry mówi, że zawsze istnieją trzy pierwiastki, jeśli tylko liczymy je zgodnie z ich krotnością i nie unikamy liczb zespolonych.

Dobre wprowadzenie w tematykę liczb zespolonych można znaleźć w tekście Zbigniewa Marciniaka z  $\Delta_{16}^{10}$ .





**Zadanie 3.** Jeśli liczba  $u + iv$  po wstawieniu do wielomianu  $x^3 + bx^2 + cx + d$  (o współczynnikach rzeczywistych) daje  $s + it$  (gdzie  $s, t \in \mathbb{R}$ ), to wstawienie  $u - iv$  daje w wyniku  $s - it$ .

Istotnie, w przypadku, gdy  $s + it = 0$ , zerować się muszą obie liczby  $s$  i  $t$ , a w konsekwencji zerem jest również  $s - it$ . Podstawowe twierdzenie algebry gwarantuje istnienie jeszcze trzeciego pierwiastka  $x_0$ , ale ten musi już być rzeczywisty – inaczej jego sprzężenie byłoby czwartym pierwiastkiem, a co za dużo, to niezdrowo. Ta wiedza pozwala już wyznaczyć znak wyróżnika. Wyraz  $(x_1 - x_2)^2$  wynosi bowiem

$$(x_1 - x_2)^2 = ((u + iv) - (u - iv))^2 = (2iv)^2 = -4v^2,$$

a wyrazy  $x_1 - x_0$  i  $x_2 - x_0$  mnożą się do

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = (u - x_0 + iv)(u - x_0 - iv) = (u - x_0)^2 - (iv)^2 = (u - x_0)^2 + v^2.$$

Po zebraniu wszystkiego razem otrzymujemy  $\Delta = -4v^2((u - x_0)^2 + v^2)^2$ , co dzięki warunkom  $x_0, u, v \in \mathbb{R}$  i  $v \neq 0$  na pewno jest liczbą ujemną. To dopełnia naszej analizy:

- Jeśli równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone, to  $\Delta < 0$ .

### Jak znaleźć $\Delta$ ?

Przekonaliśmy się, że w przypadku równań trzeciego stopnia znak wyróżnika  $\Delta$  daje taką samą informację, jak w przypadku równań kwadratowych. Ale jak wyznaczyć  $\Delta$ , nie znając z góry pierwiastków  $x_0, x_1, x_2$ ? Na pomoc znowu przychodzą wzory Viète'a.

Wzory Viète'a raz jeszcze:  
 $x_0 + x_1 + x_2 = -b$ ,  
 $x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = c$ ,  
 $x_0x_1x_2 = -d$ ,  
 (dla równania  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ).

Po otwarciu nawiasów w  $(\star\star)$  widzimy jedynie szóste potęgi pierwiastków (np.  $x_1^2x_2^4, x_0^2x_1^3x_2$ ). Na zasadzie analogii do wzoru  $b^2 - 4c$  w poszukiwanym wzorze na  $\Delta$  spodziewalibyśmy się więc wyrazów typu  $b^6, c^3, d^2$ , ale nie tylko (np.  $bcd$  też jest szóstego stopnia). Jest ich dużo, więc rozpatrzmy najpierw przypadek równania  $x^3 + cx + d = 0$  z zerowym współczynnikiem  $b$ . W nieznanym jeszcze wzorze na  $\Delta$  wszystkie wyrazy z  $b$  znikają i pozostają jedynie dwie kombinacje stopnia 6:  $c^3$  oraz  $d^2$ . Postulujemy więc, że w przypadku  $b = 0$  wzór ma postać  $\Delta = S \cdot c^3 + T \cdot d^2$ . Pozostaje znaleźć  $S$  i  $T$ .

To jest jednak najłatwiejsza część tego przedsięwzięcia. Wystarczy sprawdzić postulowany wzór na dwóch wybranych równaniach o znanych pierwiastkach:

$$\Delta = S \cdot (-3)^3 + T \cdot 2^2 \quad \leftrightarrow \quad x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 1)(x + 2) \quad \leftrightarrow \quad \Delta = 0$$

$$\Delta = S \cdot (-1)^3 + T \cdot 0^2 \quad \leftrightarrow \quad x^3 - x = x(x - 1)(x + 1) \quad \leftrightarrow \quad \Delta = 4.$$

Rozwiązanie otrzymanego układu równań daje nam  $S = -4$  i  $T = -27$ , a więc:

$$\Delta = -4c^3 - 27d^2$$

Wzór ten można oprawić w ramkę – tak jak wyżej – i przejść do następnej sekcji, by zobaczyć rozwiązanie równania trzeciego stopnia. Można też ten wzór ściśle uzasadnić; nasze owocne poszukiwania nie stanowiły jednak dowodu, że wzór w ramce *działa*. W tym celu zauważmy, że dowolne równanie  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$  daje się sprowadzić do poprzedniego przypadku poprzez podstawienie  $x = y - \frac{b}{3}$ . Po otwarciu nawiasów i uproszczeniu okazuje się bowiem, że  $y$  spełnia równanie postaci

$$y^3 + Cy + D = 0 \quad \text{ze współczynnikami} \quad C = c - \frac{b^2}{3}, \quad D = d + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3},$$

ale już bez współczynnika przy  $y^2$ . Dla powstałego równania wyróżnik – tym razem wyznaczony przez rozwiązania  $y_0, y_1, y_2$  pomocniczego równania – jest dany wzorem w ramce, czyli  $-4C^3 - 27D^2$ .

Zachęcam Czytelnika do złożenia wszystkich elementów tej układanki w całość, a w rezultacie – do ścisłego uzasadnienia wzoru w ramce:

**Zadanie 4.** Uzasadnić, że wyróżniki obu równań (na  $x$  i na  $y$ ) są takie same. Wyprowadzić stąd wzór  $\Delta = \frac{1}{27}(4(b^2 - 3c)^3 - (2b^3 - 9bc + 27d)^2)$ .

**Zadanie 5.** Sprawdzić bezpośrednio, że wzór z zadania 4 po podstawieniu  $b, c, d$  według wzorów Viète'a jest tożsamy ze wzorem  $(\star\star)$ .

Alternatywne uzasadnienie wzoru na  $\Delta$  można otrzymać, opierając się na zadaniu 7.

## Rozwiązanie równania trzeciego stopnia

Piękne wyprowadzenie rozwiązań takiego równania pochodzące od XVI-wiecznych włoskich matematyków można znaleźć w artykule Marka Kordosa z  $\Delta_{11}^1$ . Tutaj jednak, żeby podkreślić rolę wyróżnika  $\Delta$  w rozwiązywaniu równania trzeciego stopnia, pójdziemy za XVIII-wiecznym rozumowaniem Josepha Lagrange'a.

Dla równania  $x^3 + px + q = 0$ :  
 $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ ,  
 $x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = p$ ,  
 $x_0x_1x_2 = -q$ .

Warto zauważyć, że niektóre permutacje pierwiastków zmieniają znak wyrażenia obok, a niektóre nie. Jest to związane z niejednoznacznością  $\sqrt{\Delta}$  – wszak (poza przypadkiem  $\Delta = 0$ ) są dwie liczby dające w kwadracie  $\Delta$ , więc wybór jednej z nich jest całkiem arbitralny.

Kluczową własnością liczby  $\varepsilon$  jest to, że  $\varepsilon^3 = 1$  – stąd też nazwa *pierwiastek z jedynki*. Pozwala to obliczać kolejne potęgi (np.  $\varepsilon^4 = \varepsilon$ ) oraz wielkości takie jak  $1 + \varepsilon + \varepsilon^2$  (które jest równe zero jako iloraz  $\frac{1-\varepsilon^3}{1-\varepsilon}$ ).

Dla uproszczenia sytuacji założmy, że współczynnik przy  $x^2$  jest zerowy, a więc mamy do czynienia z równaniem  $x^3 + px + q = 0$  (oznaczenia tradycyjne); w szczególności  $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ . Widzieliśmy już zresztą, że ogólny przypadek daje się do tego sprowadzić przez liniowe podstawienie.

Na dobry początek zobaczmy, co nam daje wyciągnięcie pierwiastka z  $\Delta$ . Otóż daje tyle:

$$\sqrt{\Delta} = (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_0) = (x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + x_0^2x_2) - (x_0^2x_1 + x_1^2x_2 + x_2^2x_0).$$

Podobne wyrażenie, tylko z plusem, można wyznaczyć ze współczynników równania jako

$$\sum_{j \neq k} x_j^2 x_k = (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0)(x_0 + x_1 + x_2) - 3x_0x_1x_2 = 3q,$$

skąd  $x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + x_0^2x_2 = (3q + \sqrt{\Delta})/2$  i  $x_0^2x_1 + x_1^2x_2 + x_2^2x_0 = (3q - \sqrt{\Delta})/2$ . Do tych wątpliwej urody równości jeszcze wrócimy.

Przebiegłym pomysłem Lagrange'a było zastosowanie *dyskretnej transformaty Fouriera*. W naszym przypadku oznacza to po prostu, że wprowadzimy na scenę pierwiastek trzeciego stopnia z jedynki  $\varepsilon := \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$  i rozważymy pomocnicze wielkości  $s_k = \sum_{j=0}^2 \varepsilon^{jk} \cdot x_j$ , czyli

$$s_0 = x_0 + x_1 + x_2, \quad s_1 = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \quad s_2 = x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_2.$$

Jak łatwo się przekonać, tzw. *odwrotna transformata* daje  $x_k = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 \varepsilon^{-jk} \cdot s_j$ , czyli

$$x_0 = \frac{1}{3}(s_0 + s_1 + s_2), \quad x_1 = \frac{1}{3}(s_0 + \varepsilon^2 s_1 + \varepsilon s_2), \quad x_2 = \frac{1}{3}(s_0 + \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2).$$

Te ostatnie wzory mają dla nas znaczenie jedynie o tyle, że **gdy wyznaczymy**  $s_0, s_1, s_2$ , **będziemy umieli też wyznaczyć**  $x_0, x_1, x_2$ . I to jest pewien postęp, bo ze wzorów Viète'a mamy już  $s_0 = 0$ . Z kolei iloczyn  $s_1 s_2$  jest równy

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - (x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0) = \\ &= (x_0 + x_1 + x_2)^2 - 3(x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0) = -3p. \end{aligned}$$

To oznacza, że  $s_2 = -\frac{3p}{s_1}$  i do pełnego sukcesu wystarczy nam wyznaczyć  $s_1$ .

I tutaj przyda się  $\sqrt{\Delta}$ . Otóż  $s_1$  do sześcianu ma znajomą wartość

$$\begin{aligned} s_1^3 &= (x_0 + x_1 + x_2)^3 + 3(\varepsilon - 1)(x_0^2x_1 + x_1^2x_2 + x_2^2x_0) + 3(\varepsilon^2 - 1)(x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + x_0^2x_2) = \\ &= \frac{3}{2}(\varepsilon - 1)(3q - \sqrt{\Delta}) + \frac{3}{2}(\varepsilon^2 - 1)(3q + \sqrt{\Delta}) = -\frac{27}{2}q - \frac{3\sqrt{3}i}{2}\sqrt{\Delta}, \end{aligned}$$

Tak jak z pierwiastkiem z  $\Delta$ , tak i tutaj jest niejednoznaczność. Pierwiastek sześcienny można wyciągnąć na trzy sposoby, które odpowiadają różnym kolejnościom pierwiastków  $x_0, x_1, x_2$ .

możemy więc wyciągnąć pierwiastek trzeciego stopnia z powyższej wielkości, by wyliczyć  $s_1$ , a następnie  $s_2$  i wszystkie pierwiastki  $x_0, x_1, x_2$ . Choć metoda jest dość zawiła, to jej wynik da się częściowo streścić:

$$x_0 = \frac{1}{3} \left( s_1 - \frac{3p}{s_1} \right), \quad \text{gdzie } s_1 = 3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

I to by było na tyle!

**Zadanie 6.** Jak na ironię, gdy istnieją trzy rozwiązania rzeczywiste  $x_0, x_1, x_2$  (czyli gdy  $\Delta > 0$ ), pomocnicze wartości  $s_1^3$  i  $s_1$  nie są rzeczywiste.

**Zadanie 7.** Niech  $f(x, y, z)$  będzie wielomianem symetrycznym ze względu na permutację zmiennych  $x, y, z$ . Wykazać, że da się go przedstawić jako wyrażenie wielomianowe od wielkości  $x + y + z, xy + yz + zx, xyz$ .  
*(niektórzy Czytelnicy mogą znać to zadanie jako zastosowanie teorii Galois, ale da się je też rozwiązać elementarnie).*

# Princeps Mathematicorum

Jarosław GÓRNICKI\*

\* Wydział Matematyki i Fizyki  
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

[1] J.J. Gray, *A commentary on Gauss's mathematical diary, 1796-1814, with an English translation*, Expo. Math. 2(1982), 97-130.



Carl Friedrich Gauss (1803 r.)

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) to jeden z luminarzy światowej nauki, mający znakomite osiągnięcia w matematyce, astronomii, fizyce oraz geodezji. W 1899 roku odnaleziono *Dziennik* [1] z prywatnymi notatkami Gaussa dotyczącymi jego odkryć. Napisany po łacinie *Dziennik* zawiera 146 lakonicznych notatek z lat 1796–1814. Z zachowanej korespondencji Gaussa oraz z *Dziennika* wylania się postać bardzo pracowitego człowieka, który swoimi przemyśleniami wyprzedzał epokę o kilkadziesiąt lat. Publikował niewiele – gdy musiał. Większą wartość miało dla niego samo odkrycie niż jego ogłoszenie.

Do rozwoju Gaussa (pochodzącego z ubogiej rodziny) przyczynił się mecenat księcia Brunszwiku Karola Wilhelma Ferdynanda. Otoczył on opieką finansową czternastoletniego Carla i pomoc ta trwała do tragicznej śmierci księcia w 1806 roku. W tym czasie Gauss ukończył Collegium Carolinum, studiował na Uniwersytecie w Getyndze (szkoły wybierał ze względu na świetnie zaopatrzone biblioteki). Jednak przede wszystkim uzyskał spektakularne wyniki, które przyniosły mu międzynarodowe uznanie. Wyniki te opisał w *Dzienniku*.

- *Dziennik* rozpoczyna się wpisem z 30 marca 1796 roku dokonany w Brunszwiku: „zasady, według których możliwy jest konstrukcyjny podział okręgu na 17 równych części”. To pierwszy tego typu rezultat od czasów Euklidesa!
- Z października 1797 roku pochodzi dowód zasadniczego twierdzenia algebry. To temat dysertacji *Demonstratio nova theorematis...* opublikowanej w sierpniu 1799 roku, za którą Uniwersytet w Helmsted nadał Gaussowi stopień doktora (promotorem był Johann Pfaff).
- W 1801 roku ukazała się drukiem praca *Disquisitiones arithmeticae* prezentująca odkrycia Gaussa w teorii liczb.
- W połowie września 1801 roku Gauss podał metodę dokładnego wyznaczania orbity ciał niebieskich, co pozwoliło odnaleźć „zgubioną” planetoidę Ceres. Metodę udoskonalił, wprowadzając modyfikacje w styczniu i w maju 1806 roku.

Każde z tych osiągnięć wystarczyłoby do zapewnienia mu trwałego miejsca w historii nauki; a był to dopiero początek...

## Średnia arytmetyczno-geometryczna

Gauss wspomina, że jako czternastoletni chłopak interesował się średnią arytmetyczno-geometryczną liczb  $0 < b < a$ . Jest ona zdefiniowana poprzez następującą konstrukcję. Z liczb  $a$  i  $b$  tworzymy dwa ciągi  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , rozpoczynając od  $a_0 = a$  i  $b_0 = b$ , a następnie dla  $n \geq 1$  kładąc:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}), \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, można indukcyjnie uzasadnić, że dla każdego  $n \geq 1$

$$b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1},$$

zatem ciągi  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  są ograniczone, pierwszy z nich jest malejący, a drugi rosnący. Ponadto

$$\frac{a_n - b_n}{a_{n-1} - b_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{4(a_n + b_n)} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2(a_{n-1} + b_{n-1}) + 4b_n} < \frac{1}{2}.$$

Wniosujemy stąd, że

$$a_n - b_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (a - b), \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Oznacza to, że ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne do tej samej granicy, którą oznaczamy  $M(a, b)$ . Liczbę  $M(a, b)$  nazywamy *średnią arytmetyczno-geometryczną* liczb  $0 < b < a$ . Gauss, będąc wirtuozem obliczeń, w kilku przypadkach przeprowadził rachunki z bardzo dużą dokładnością. Dla  $a = \sqrt{2}$  i  $b = 1$  otrzymał:

Oczywiście można też rozważyć średnią harmoniczo-geometryczną  $(a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n})$ , średnią arytmetyczno-harmoniczną  $(a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n})$  i ich rozmaite warianty.

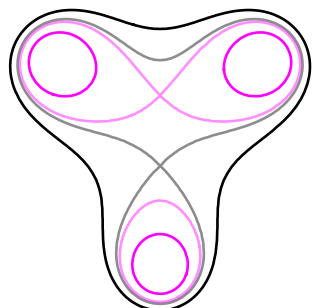
\*Mamy tu do czynienia z tzw. zbieżnością kwadratową, gdyż

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leq \frac{1}{8b}(a_n - b_n)^2,$$

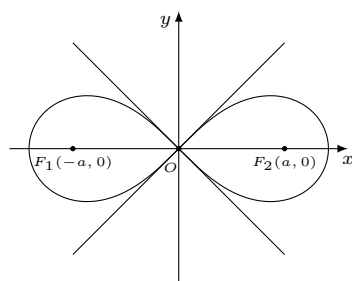
w czym skorzystaliśmy z równości  $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (x - y)/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ .

$a = 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 802$	$b = 1,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$
$a_1 = 1,207\ 106\ 781\ 186\ 547\ 524\ 401$	$b_1 = 1,189\ 207\ 115\ 002\ 721\ 066\ 717$
$a_2 = 1,198\ 156\ 948\ 094\ 634\ 295\ 559$	$b_2 = 1,198\ 123\ 521\ 493\ 120\ 122\ 607$
$a_3 = 1,198\ 140\ 234\ 793\ 877\ 209\ 083$	$b_3 = 1,198\ 140\ 234\ 677\ 307\ 205\ 798$
$a_4 = 1,198\ 140\ 234\ 735\ 592\ 207\ 441$	$b_4 = 1,198\ 140\ 234\ 735\ 592\ 207\ 439$

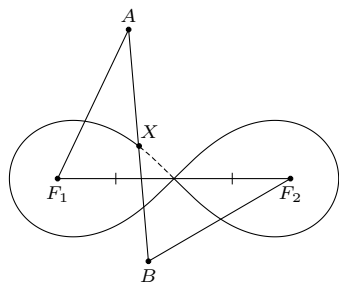
Ciągi te okazały się szybko zbieżne\*, a wyrazy  $a_4$  i  $b_4$  równe do 19 miejsca po przecinku. Wtedy być może Gauss nie przypuszczał, że rezultat ten wykorzysta do obliczania... całek eliptycznych.



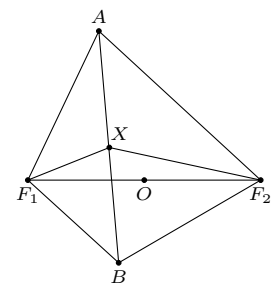
Rys. 1. Lemniskaty o trzech ogniskach



Rys. 2. Lemniskata Bernoulliego



Rys. 3



Rys. 4

## Lemniskata

Lemniskatę o różnych ogniskach  $F_1, F_2, \dots, F_n$  tworzą punkty  $X$  na płaszczyźnie spełniające warunek  $|F_1X| \cdot |F_2X| \cdot \dots \cdot |F_nX| = \text{const} > 0$  (rys. 1). Lemniskata o jednym ognisku to okrąg. W 1694 roku Jacob Bernoulli badał lemniskatę o dwóch ogniskach,  $F_1(-a, 0)$  i  $F_2(a, 0)$ , spełniającą warunek

$$|F_1X| \cdot |F_2X| = a^2, \text{ dla } a > 0.$$

Jej równanie w układzie kartezjańskim to

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

a w układzie biegunowym (gdy przyjmiemy  $x = r \cos \varphi$  i  $y = r \sin \varphi$ ) to

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi} \text{ dla } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Z ostatniej zależności łatwiej jest nam odkryć kształt tej krzywej, którą nazywamy *lemniskatą Bernoulliego* (rys. 2).

Do wykreślenia lemniskaty Bernoulliego możemy wykorzystać mechanizm przegubowy Jamesa Watta: bierzemy dwa odcinki,  $F_1A$  i  $F_2B$ , każdy o długości  $\sqrt{2}a|F_1F_2|$ . Niech punkty  $A$  i  $B$  leżą po przeciwnych stronach prostej wyznaczonej przez punkty  $F_1$  i  $F_2$  oraz  $|AB| = 2a$  (rys. 3). Wtedy podczas ruchu środek  $X$  odcinka  $AB$  zakreśla lemniskatę Bernoulliego z ogniskami  $F_1$  i  $F_2$ . Dostrzeżemy to, analizując trapez równoramienny  $F_1AF_2B$  (rys. 4).

Ponieważ  $\frac{|AF_1|}{|AX|} = \frac{|AB|}{|AF_1|} = \sqrt{2}$  i trójkąty  $\triangle AF_1X$ ,  $\triangle ABF_1$  mają wspólny kąt  $\sphericalangle A$ , więc trójkąty  $\triangle AF_1X$  i  $\triangle ABF_1$  są podobne. Analogicznie podobne są trójkąty  $\triangle BXF_2$  i  $\triangle BF_2A$  (mają one wspólny kąt  $\sphericalangle B$ ). Wówczas

$$|\sphericalangle AF_1X| = |\sphericalangle ABF_1| = |\sphericalangle BAF_2| = |\sphericalangle XF_2B|.$$

W trapezie równoramiennym  $F_1AF_2B$ ,  $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B|$ . Ponieważ  $|\sphericalangle XAF_2| = |\sphericalangle XF_2B|$ , więc  $|\sphericalangle F_1AX| = |\sphericalangle XF_2A|$ . Oznacza to, że trójkąty  $\triangle F_1AX$  i  $\triangle AF_2X$  są podobne. Stąd

$$\frac{|F_1X|}{|AX|} = \frac{|AX|}{|F_2X|} \Rightarrow |F_1X| \cdot |F_2X| = |AX|^2 = a^2,$$

czyli punkt  $X$  leży na lemniskacie Bernoulliego.

Pod datą 8 stycznia 1797 roku Gauss zanotował w *Dzienniku*, że rozpoczął badanie lemniskaty, a 21 marca tego samego roku napisał: „lemniskata podzielona konstrukcyjnie na 5 równych części”.

## Skojarzenia i rachunki

Gauss uczył się, studiując prace wielkich poprzedników. Wspominał: „tyle myśli przychodziło mi do głowy, że zanotować zdążyłem zaledwie ich cząstkę”. Badania nad nieelementarnymi całkami opisującymi długość krzywych prowadziły do odkrywania nowych funkcji i leżały w głównym nurcie XVIII-wiecznej analizy. Ich przybliżoną wartość wyznaczano za pomocą szeregów nieskończonych. Badania te prowadzili di Fagnano, Euler, Landen, Lagrange, Legendre. Z notatek i *Dziennika* Gaussa wynika, że w latach 1797–1800 stworzył on teorię funkcji eliptycznych (30 lat przed Abelem i Jacobim), ale do końca życia zachował te rezultaty dla siebie.



**Rozwiązanie zadania F 1049.**

Niech gęstość atomów o prędkości  $\vec{v}$  wynosi  $\rho(\vec{v})$ . Wówczas w czasie  $\tau$  do elementu  $S$  powierzchni ścianki naczynia dociera  $n(\vec{v}) = \rho(\vec{v})\tau S \vec{v} \cdot \vec{n}$  atomów gazu –  $\vec{n}$  oznacza jednostkowy wektor prostopadły do elementu  $S$  powierzchni. Liczbę wszystkich atomów o prędkości  $v = |\vec{v}|$  docierających do  $S$  otrzymamy, sumując po wszystkich kierunkach prędkości skierowanych „do ścianki” – da to czynnik geometryczny niezależny od  $v$  – oraz po wszystkich wartościach  $v$ . Drugie z sumowań prowadzi do czynnika proporcjonalnego do średniej prędkości  $\langle v \rangle$  atomów gazu w danej temperaturze bezwzględnej  $T$ , mnożonego przez całkowitą gęstość  $\rho$  gazu w naczyniu (gęstość  $\rho(\vec{v})$  jest proporcjonalna do gęstości  $\rho$  gazu w naczyniu). Mamy  $\rho \propto 1/V$  oraz  $\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$  i ostatecznie:

$$n \propto S\tau\rho\sqrt{T} \propto S\tau\frac{1}{V}\sqrt{T}.$$

Podczas przemiany adiabatycznej  $TV^{\kappa-1} = \text{const}$ , gdzie  $\kappa$  oznacza stosunek molowego ciepła właściwego gazu pod stałym ciśnieniem  $c_p$  do jego molowego ciepła w stałej objętości  $c_v$ ,  $\kappa = c_p/c_v$ . Mamy więc:

$$T \propto \frac{1}{V^{\kappa-1}} \propto \frac{1}{q^{\kappa-1}}.$$

Ostatecznie częstość  $n/\tau$  uderzeń atomów po adiabatycznym zwiększeniu objętości  $q$  razy zmaleje:

$$\frac{n}{\tau} \propto \frac{1}{q^{(\kappa+1)/2}}.$$

Dla gazu jednoatomowego  $\kappa = 5/3$ , a więc  $n/\tau \propto 1/q^{4/3}$ .

**Rozwiązanie zadania F 1050.**

Jądra krzemu  ${}^{27}\text{Si}$  i aluminium  ${}^{27}\text{Al}$  mają te same liczby masowe, a więc ich promienie też są takie same. Maksymalna energia emitowanego pozytonu jest równa różnicy energii elektrostatycznych obu jąder:

$$\Delta E = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} (Z_1^2 - Z_2^2).$$

Otrzymujemy:

$$R = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \Delta E} (Z_1^2 - Z_2^2).$$

Po podstawieniu danych liczbowych:  $R = 6,703 \cdot 10^{-15}$  m, co odpowiada  $r_0 = 2,23 \cdot 10^{-15}$  m – na podstawie pomiarów różnymi metodami przyjmuje się  $r_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-15}$  m.

Uwaga: Czynniki  $Z^2$  należałoby zastąpić czynnikiem  $Z(Z-1)$  – dla uniknięcia uwzględniania energii oddziaływania każdego z protonów z jego własnym polem elektrostatycznym. Wprowadzenie tej poprawki daje  $R = 6,454 \cdot 10^{-15}$  m.

Z elementarnego rachunku całkowego wiemy, że długości okręgu jednostkowego oraz wpisanej w niego lemniskaty Bernoulliego są równe odpowiednio:

$$4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oraz} \quad 4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Dla oznaczenia połowy tej drugiej wielkości Gauss wprowadził stałą  $\bar{\omega}$ . Niezwykle jest jego spostrzeżenie, że między trzema stałymi:

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,46\dots,$$

$$\bar{\omega} = 2,622\,057\,554\,292\,119\,74\dots,$$

$$M(\sqrt{2}, 1) = 1,198\,140\,234\,735\,592\,207\,44\dots,$$

zachodzi związek  $M(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$ ; innymi słowy, stosunek między długościami okręgu i lemniskaty to dokładnie  $M(\sqrt{2}, 1)$ . Gauss zaintrygowany tym odkryciem, 30 maja 1799 roku w Brunzswiku, zanotował w *Dzienniku*: „Średnia arytmetyczno-geometryczna liczb 1 i  $\sqrt{2}$  jest równa  $\frac{\pi}{\bar{\omega}}$  do 5 cyfr, dowód tego faktu odkryje nowe obszary analizy”. Był to jedynie domysł oparty na rachunkach, ale intuicja Gaussa nie zawiodła. Ogólną zależność Gauss wykazał 22 maja 1800 roku:

$$(*) \quad \text{dla } 0 < b \leq a, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{M(a, b)}.$$

Oczywiście podstawienie  $\cos \varphi = x$  sprowadza całkę  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}$  do całki postaci  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ .

Wykazanie równości (\*) nie jest trudne. Niech  $a$  i  $b$  generują ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  opisane wcześniej, zbieżne do  $M(a, b)$ . Dla całki  $I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$ , dzięki podstawieniu  $t = b \cdot \text{tg } \varphi$  (wówczas  $\sin^2 \varphi = \frac{t^2}{t^2+b^2}$ ,  $\cos^2 \varphi = \frac{b^2}{t^2+b^2}$ ,  $d\varphi = \frac{b}{t^2+b^2} dt$ ), otrzymujemy

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}.$$

W takim razie

$$I(a_1, b_1) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a_1^2)(t^2+b_1^2)}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a_1^2)(t^2+b_1^2)}}.$$

W ostatniej całce podstawienie  $t = \frac{1}{2}(x - \frac{ab}{x})$  (wówczas  $t^2 + a_1^2 = \frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}$ ,  $t^2 + b_1^2 = \frac{(x^2+ab)^2}{4x^2}$ ,  $dt = \frac{x^2+ab}{2x^2} dx$ ) daje

$$I(a_1, b_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a_1^2)(t^2+b_1^2)}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = I(a, b).$$

Powtarzając to rozumowanie, otrzymujemy  $I(a, b) = I(a_1, b_1) = I(a_2, b_2) = \dots$ , zatem w granicy

$$I(a, b) = I\left(M(a, b), M(a, b)\right) = \frac{1}{M(a, b)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

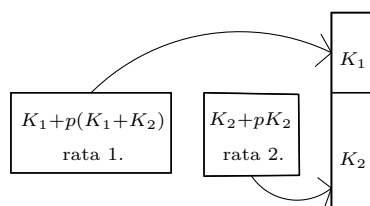
Ze względu na szybkość zbieżności ciągów średnich wzór (\*) daje bardzo efektywny sposób szacowania wartości tego rodzaju całek eliptycznych.

Zapowiedziany przez Gaussa „nowy obszar analizy” pojawia się z chwilą, gdy zapytamy o sens równości (\*) w dziedzinie zespolonej. Pojawiają się wtedy funkcje wielowartościowe, modularne, dla których Gauss uzyskał zupełnie nowe wyniki. Dlaczego ich nie opublikował? Może widział niedoskonałości użytych metod, może przeczuwał, że do pełnej prezentacji potrzebna jest teoria funkcji analitycznych z jej narzędziami analitycznymi – ale ta miała się dopiero narodzić! Poza tym miał dopiero 23 lata i całe życie przed sobą. . .

# Jak obliczyć ratę kredytu?

Jakub PAWLIKOWSKI, Tomasz TRACZ

Większość ludzi bierze przynajmniej raz w życiu jakiś kredyt – na mieszkanie czy na samochód. Spotykamy się wtedy z pojęciami takimi jak oprocentowanie oraz z różnymi metodami naliczania rat, zaczyna nas interesować polityka Narodowego Banku Polskiego w kontekście ustalania stóp procentowych. . . Ostatecznie kończymy z obowiązkiem płacenia co miesiąc pewnej kwoty bankowi. Nie zawsze jednak wiemy, skąd bierze się jej wysokość?



Niniejszy artykuł ma na celu pokazanie, jak obliczyć ratę kredytu gotówkowego. Trudno znaleźć tę wiedzę w powszechnie dostępnych źródłach, a nawet w podręcznikach bywa to temat przedstawiany niedokładnie czy wręcz pomijany. Jest to zaskakujące, gdyż do zrozumienia mechanizmów kredytowych wystarczy znajomość matematyki na poziomie liceum.

Załóżmy najpierw, dla uproszczenia, że bierzemy kredyt na kwotę  $K$  z oprocentowaniem  $p$  w skali rocznej, spłacany w ciągu dwóch lat w (dwóch) ratach rocznych. Oznacza to, że każda rata zawiera część kapitału (odpowiednio  $K_1$  i  $K_2$ , gdzie  $K_1 + K_2 = K$ ) oraz część odsetkową, czyli  $p$ -tą część niespłaconego jeszcze kapitału – całej kwoty w pierwszej racie, a kwoty  $K_2$  w drugiej. Zauważmy, że od podziału  $K$  na  $K_1$  i  $K_2$  zależy nie tylko wysokość rat, ale także suma odsetek, czyli związany z nimi koszt wzięcia kredytu.

Omówimy teraz dwa najbardziej znane typy podziału kapitału.

## Kredyt z dwiema ratami malejącymi

W tym typie kredytu w każdym okresie rozliczeniowym spłacamy taką samą część kapitału – w naszym uproszczonym przypadku będzie to po prostu  $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}K$ . Raty w kolejnych okresach rozliczeniowych wynoszą zatem:

$$R_1 = \frac{1}{2}K + p \cdot K, \quad R_2 = \frac{1}{2}K + p \cdot \frac{1}{2}K.$$

Charakterystyczny dla tego sposobu spłaty jest fakt, że początkowa rata jest wyższa od drugiej.

## Kredyt z dwiema ratami równymi

W tym sposobie spłaty kredytu założeniem jest równość wszystkich rat. Z wcześniejszego przykładu wynika zatem, że należy podzielić kapitał na części  $K_1$  i  $K_2$  w sposób nierówny! Zastanówmy się teraz, jak wyznaczyć wysokość każdej z równych rat i właściwy sposób podziału kapitału.

Oznaczmy szukaną wielkość raty przez  $R$ . Wówczas równanie na drugą ratę ma postać  $R = (1 + p)K_2$ , więc  $K_2 = \frac{R}{1+p}$ . Wstawmy to do równania na pierwszą ratę:

$$R = K_1 + p(K_1 + K_2) = (1 + p)K_1 + pK_2 = (1 + p)K_1 + \frac{p}{1 + p} \cdot R,$$

skąd możemy wyznaczyć  $K_1$  w następujący sposób:

$$(1 + p)K_1 = \left(1 - \frac{p}{1 + p}\right) R,$$

czyli  $K_1 = \frac{R}{(1+p)^2}$ . Skoro  $K_2 + K_1 = K$ , to otrzymujemy równanie:

$$\frac{R}{1 + p} + \frac{R}{(1 + p)^2} = K,$$

skąd wyliczamy

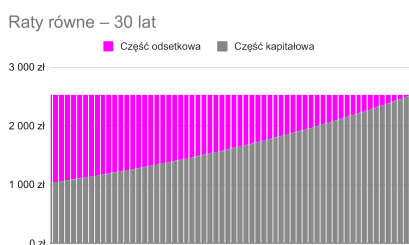
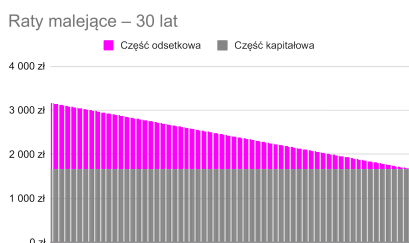
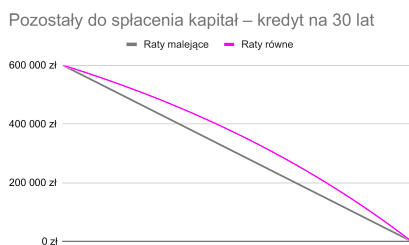
$$R = \frac{K}{\frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2}}.$$

Zauważmy, że w pierwszej racie spłacamy mniejszą część kapitału niż w przypadku rat malejących. Istotnie, mamy bowiem

$$K_1 = \frac{R}{(1+p)^2} = \frac{K}{(1+p) + 1} = \frac{K}{2+p} < \frac{K}{2}.$$

W związku z tym w drugiej racie musimy zapłacić odsetki od większej kwoty, czyli łączna kwota odsetek jest w przypadku równych rat *większa* niż w przypadku rat malejących. Odnotujmy też fakt, że kolejne raty składają się w coraz większej części z kapitału, a w coraz mniejszej z odsetek.





Uogólnijmy teraz przedstawione sposoby obliczania wysokości rat na przypadek większej liczby rat. Rozważmy mianowicie przypadek kredytu na kwotę  $K$  z oprocentowaniem  $p$ , spłacanego w ciągu  $N$  lat w ratach rocznych (przypadek rat miesięcznych uwzględnimy na końcu).

### Kredyt z ratami malejącymi

W przypadku rat malejących w każdym roku spłacamy  $\frac{1}{N}K$  kapitału oraz odpowiednie odsetki, to znaczy:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{N}K + p \cdot K, \\ R_2 &= \frac{1}{N}K + p \cdot \frac{N-1}{N}K, \\ &\vdots \\ R_N &= \frac{1}{N}K + p \cdot \frac{1}{N}K. \end{aligned}$$

### Kredyt z ratami równymi

Oznaczmy przez  $K_1, K_2, \dots, K_N$  części kapitału spłacane w kolejnych ratach równych w wysokości  $R$ . Udowodnimy indukcyjnie, że

$$K_{N-i} = \frac{R}{(1+p)^{i+1}} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Dla  $i = 0$  mamy, jak w uproszczonym przypadku powyżej:  $R = K_N + pK_N$ , stąd rzeczywiście

$$K_N = \frac{R}{1+p}.$$

Ustalmy teraz  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ . Załóżmy, że wzór powyższy działa w przypadku obliczenia wartości  $K_N, K_{N-1}, \dots, K_{N-i+1}$ . Wyprowadzimy teraz wzór na  $K_{N-i}$ .

Spójrzmy na ratę w  $(N-i)$ -tej spłacie. Prawdziwa jest równość:

$$R = K_{N-i} + p(K_{N-i} + K_{N-i+1} + \dots + K_{N-1} + K_N).$$

Na mocy założenia indukcyjnego możemy zapisać:

$$\begin{aligned} R &= (1+p)K_{N-i} + p \left( \frac{R}{(1+p)^i} + \dots + \frac{R}{(1+p)^2} + \frac{R}{1+p} \right) = \\ &= (1+p)K_{N-i} + p \cdot \frac{R}{1+p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+p}\right)^i}{1 - \frac{1}{1+p}} = \\ &= (1+p)K_{N-i} + R \left( 1 - \left(\frac{1}{1+p}\right)^i \right). \end{aligned}$$

Zatem po przeniesieniu na jedną stronę mamy

$$(1+p)K_{N-i} = \frac{R}{(1+p)^i},$$

czyli rzeczywiście

$$K_{N-i} = \frac{R}{(1+p)^{i+1}}.$$

Jak wyżej, zapiszmy teraz równość

$$K_N + K_{N-1} + \dots + K_1 = K$$

za pomocą obliczonych wartości:

$$\frac{R}{1+p} + \frac{R}{(1+p)^2} + \dots + \frac{R}{(1+p)^N} = K.$$

Używając wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, otrzymujemy

$$\frac{R}{1+p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+p}\right)^N}{1 - \frac{1}{1+p}} = K,$$

z czego wyliczamy wartość  $R$ :

$$R = \frac{pK}{1 - \left(\frac{1}{1+p}\right)^N}.$$

Dodajmy jeszcze, że dla kredytu na kwotę  $K$  o oprocentowaniu rocznym  $p$  spłacanym przez  $N$  lat w przypadku  $k$  rat w trakcie roku mamy sumarycznie  $Nk$  rat, w których uwzględniamy oprocentowanie  $\frac{p}{k}$ , w związku z tym wysokość raty wynosi:

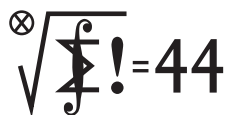
$$R = \frac{pK}{k \left( 1 - \left(\frac{k}{k+p}\right)^{Nk} \right)}.$$

Na zakończenie pokażemy na przykładzie kredytu na 600 000 zł, jak kształtują się wysokości poszczególnych rat oraz ich podział na część kapitałową i odsetkową. Zakładamy oprocentowanie 3% w skali roku – tak było w czasie pisania niniejszego artykułu, w grudniu 2021. Kredyt spłacany jest w ratach miesięcznych.

<b>Suma spłaconego kapitału</b>	600 000 zł	
<b>Oprocentowanie w skali roku</b>	3%	
<b>Liczba lat spłaty</b>	15	30
<b>Liczba miesięcy spłaty</b>	180	360
<b>Raty malejące</b>		
Suma zapłaconych odsetek	135 750 zł	270 750 zł
Suma kosztu spłacenia kredytu	735 750 zł	870 750 zł
Rata początkowa	4 833 zł	3 167 zł
Rata końcowa	3 342 zł	1 671 zł
<b>Raty równe</b>		
Suma zapłaconych odsetek	145 828 zł	310 665 zł
Suma kosztu spłacenia kredytu	745 828 zł	910 665 zł
Rata	4 143 zł	2 530 zł
Niższa od początkowej raty malejącej o	690 zł	637 zł
Dodatkowy koszt odsetek względem rat malejących	10 078 zł	39 915 zł

Warto zauważyć, że początkowa rata kredytu przy ratach malejących jest istotnie wyższa od raty stałej. Niestety łączna kwota odsetek przy ratach równych jest dużo większa – tym większa, im dłużej spłacany jest kredyt. Należy jednak pamiętać, że w całkowity koszt kredytu poza odsetkami mogą wchodzić też inne opłaty (np. prowizja czy ubezpieczenie), których tutaj nie analizowaliśmy.

# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2022

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 829 ( $WT = 3,29$ ) i 830 ( $WT = 1,43$ ) z numeru 11/2021

Witold Bednarek	Łódź	39,87
Krzysztof Maziarz	Kraków	38,88
Kacper Morawski	Warszawa	38,59
Andrzej Kurach	Ryjewo	38,29
Paweł Najman	Kraków	37,33
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Marek Spychała	Warszawa	31,73
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,34

## Rozwiązania zadań z numeru 2/2022

Przypominamy treść zadań:

**835.** Dana jest liczba naturalna  $n$  podzielna przez 3 oraz ciąg  $(x_1, \dots, x_n)$  o wyrazach 1, 2 lub 3, przy czym jedynek, dwójek i trójek jest tyle samo (po  $n/3$ ). Dowieść, że dla pewnych numerów  $k, l$  ( $1 \leq k \leq l \leq n$ ) zachodzi równość  $x_k + \dots + x_l = n$ .

**836. (a)** Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych  $x$ , dla których oba wyrażenia  $x^{1/2} + x^{-1/2}$  oraz  $x^{1/3} + x^{-1/3}$  mają wartości całkowite.

**(b)** Ustalić, ile jest liczb  $x \geq 1$  o powyższej własności takich, że  $[x]$  ma w zapisie dziesiętnym nie więcej niż 2022 cyfry.

**835.** Niech  $s_k = x_1 + \dots + x_k$  dla  $k = 1, \dots, n$  (więc  $s_n = 2n$ ) i niech  $S = (s_1, \dots, s_n)$ . Sąsiadujące elementy ciągu  $S$  różnią się co najwyżej o 3.

Przypuśćmy, że teza zadania nie zachodzi. Wtedy  $s_k \neq s_l + n$  dla  $k, l = 1, \dots, n$ . Ma więc miejsce równoważność:

$$(1) \quad t \in S \iff t + n \notin S \quad \text{dla } t \in \{1, \dots, n\}.$$

Skoro  $2n \in S$ , zatem  $n \notin S$ .

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy  $n - 1 \in S$ . Niech  $n - 1 = s_m$ . Przyjmijmy, że w ciągu  $M = (x_1, \dots, x_m)$  jest  $a$  jedynek,  $b$  dwójek,  $c$  trójek. Tak więc

$$(2) \quad a + 2b + 3c = n - 1.$$

Niech  $x_j$  będzie jedną (dowolną) z tych  $a$  jedynek. Liczby  $\alpha = s_{j-1}$ ,  $\beta = s_j$  różnią się o 1 (gdy  $j = 1$ , przyjmujemy  $\alpha = 0$ ). Liczby  $\alpha + n$ ,  $\beta + n$  nie należą do  $S$  (własność (1)). Wśród trzech kolejnych liczb musi być element  $S$ , wobec czego liczby  $\gamma = \alpha + n - 1$ ,  $\delta = \beta + n + 1$  należą do  $S$ ; różnią się o 3, więc wyznaczają pewien element  $x_r = 3$  (ten, dla którego  $s_r = \delta$ ). W ten sposób każdej jedyńce z ciągu  $M$  została przyporządkowana pewna trójka z ciągu  $N = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ .

Na odwrót, biorąc dowolny element  $x_r = 3$  z ciągu  $N$ , widzimy, że liczby  $\delta = s_r$  oraz  $\gamma = \delta - 3$  należą do  $S$ , liczby  $\gamma + 1$ ,  $\delta - 1$  nie należą, więc  $\alpha = \gamma + 1 - n$ ,  $\beta = \delta - 1 - n$  należą (własność (1)) i wyznaczają pewien element  $x_j = 1$  (ten, dla którego  $s_j = \beta$ ) – każdej trójce z ciągu  $N$  została przyporządkowana pewna jedynka z ciągu  $M$ . Te przyporządkowania są wzajemnie odwrotne i ustalają bijekcję między jedynkami w  $M$  i trójkami w  $N$ . Mamy więc  $a$  trójek w ciągu  $N$  oraz  $c$  trójek w ciągu  $M$ . Stąd

$$(3) \quad a + c = n/3$$

(bo tyle jest wszystkich trójek w  $(x_1, \dots, x_n)$ ).

Pozostaje przypadek, gdy  $n - 1 \notin S$ . Wtedy  $n + 1 \in S$  (bo  $n \notin S$ ). Niech  $n + 1 = s_m$ . Odwracamy kierunek;

## Zadania z matematyki nr 843, 844

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**843.** Po krawędziach wypukłego wielościanu pełza żuk. W każdym wierzchołku wielościanu schodzą się trzy krawędzie. Po dojściu do wierzchołka żuk nie zawraca w krawędź, którą przyszedł, lecz wybiera jedną z pozostałych dwóch krawędzi – lewą lub prawą (orientacja: lewo/prawo – tak, jak widać, patrząc z zewnątrz wielościanu). Gdy na jednym rozdrożu żuk wybrał wariant lewy, na następnym wybiera prawy – i na odwrót. Dowieść, że w pewnym momencie żuk wróci do punktu, z którego rozpoczął wędrówkę.

**844.** Wyjaśnić, czy istnieje liczba pierwsza  $p$ , dla której suma

$$1^p + 3^p + \dots + (2p - 1)^p$$

jest sześcianem liczby naturalnej.

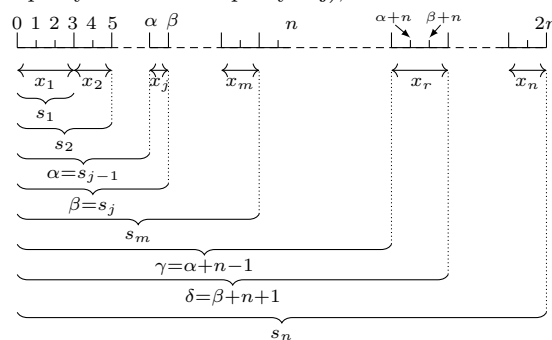
Zadanie 844 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

oznaczamy przez  $a, b, c$  liczby jedynek, dwójek, trójek w ciągu  $(x_{m+1}, \dots, x_n) = N$ , którego elementy teraz sumują się do wartości  $s_n - s_m = n - 1$ ; wzór (2) nadal w mocy. Rozumowanie analogiczne jak poprzednio ustala bijekcję między jedynkami w  $N$  i trójkami w  $M$  i ponownie implikuje równość (3).

Uzyskane w obu przypadkach zależności (2) i (3) dają oczekiwaną sprzeczność:

$$6(b + c) = 3(a + 2b + 3c) - 3(a + c) = 3(n - 1) - 3(n/3) = 2n - 3$$

(liczba parzysta równa nieparzystej); koniec dowodu.



**836.** Niech  $c = x^{1/6} + x^{-1/6}$ . Wówczas

$$(4) \quad x^{1/2} + x^{-1/2} = c^3 - 3c, \quad x^{1/3} + x^{-1/3} = c^2 - 2.$$

Jasne, że jeśli  $c$  jest liczbą naturalną większą od 1, to te wartości są liczbami naturalnymi. Ale i na odwrót: jeżeli liczby  $c^3 - 3c$  oraz  $c^2 - 2$  (więc także  $c^2$  oraz  $c^2 - 3$ ) są naturalne, to  $c = (c^3 - 3c)/(c^2 - 3)$  jest dodatnią liczbą wymierną o kwadracie całkowitym – jest więc liczbą naturalną. Rozważany warunek, by wartości wyrażeń (4) były całkowite dodatnie, sprowadza się do tego, by liczba  $c = x^{1/6} + x^{-1/6}$  była całkowita.

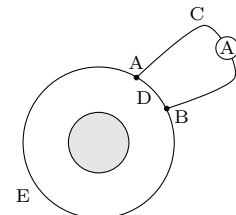
Funkcja  $f(x) = x^{1/6} + x^{-1/6}$  przyjmuje (dla  $x > 0$ ) wszystkie wartości z przedziału  $[2, \infty)$ . Punkty, w których przyjmuje wartości całkowite  $c \geq 2$ , tworzą zbiór nieskończony; to teza (a) zadania.

W części (b) chodzi o ustalenie, w ilu punktach przedziału  $[1, 10^{2022})$  ma ona wartości całkowite. Ponieważ jest w tym przedziale ciągła i ściśle rosnąca, jest to po prostu pytanie o to, ile jest liczb całkowitych w przedziale  $J = [f(1), f(10^{2022})]$ . Skoro  $f(1) = 2$ , zaś  $f(10^{2022}) = 10^{337} + 10^{-337} < 10^{337} + 1$ , zatem do przedziału  $J$  należą liczby całkowite  $2, 3, \dots, 10^{337}$ , i tylko one. Jest więc  $10^{337} - 1$  tych liczb, i taka jest odpowiedź na pytanie (b).

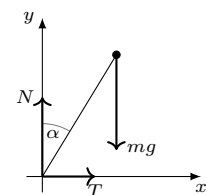
# Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2022



Rys. 1



Rys. 2

**732.** Pręt nie ślizga się, więc kulka porusza się po okręgu o środku w punkcie podparcia. Siły działające na układ przedstawia rysunek 2. Przyspieszenie kątowe  $\varepsilon$  oraz prędkość kątową  $\omega$  możemy wyliczyć z równania ruchu obrotowego

$$mgl \sin \alpha = ml^2 \varepsilon$$

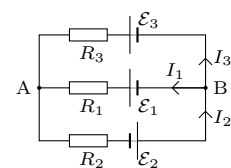
i z zasady zachowania energii

$$mgl(1 - \cos \alpha) = m(\omega l)^2 / 2,$$

gdzie przez  $l$  oznaczyliśmy długość pręta.

Przyspieszenie dośrodkowe kulki  $a_d = \omega^2 l$ , przyspieszenie styczne  $a_s = \varepsilon l$ , przyspieszenia w kierunkach poziomym i pionowym:

$$a_x = a_s \cos \alpha - a_d \sin \alpha, \quad a_y = -a_s \sin \alpha - a_d \cos \alpha.$$



Rys. 3

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

## Zadania z fizyki nr 740, 741

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**740.** Gdy pocisk wystrzelony pionowo do góry rozrywa się w najwyższym punkcie toru, to rozpada się na bardzo dużo odłamków lecących równomiernie we wszystkie strony z prędkością początkową  $v_0$ . Taki sam pocisk lecący pionowo w dół rozrywa się na wysokości  $H$  nad ziemią i w chwili rozerwania ma prędkość  $u$ . Kiedy odłamki będą padać na ziemię z największą częstotliwością?

**741.** Na nieruchome, płaskie zwierciadło o masie  $m$  pada prostopadłe do jego powierzchni płaska fala świetlna o energii  $W_0$ . Znaleźć prędkość końcową zwierciadła i energię odbitej od niego fali. Rozważyć przypadki graniczne, gdy energia fali padającej jest dużo większa oraz dużo mniejsza od energii spoczynkowej zwierciadła.

## Rozwiązania zadań z numeru 2/2022

Przypominamy treść zadań:

**732.** Nieważki pręt z umocowaną na końcu kulką o masie  $m$  postawiono pionowo na podłodze. Kulkę możemy traktować jako punkt materialny. Pręt zaczyna przewracać się z zerową prędkością początkową i nie ślizga się do chwili, gdy przestaje naciskać na podłogę. Jaką wartość ma w tej chwili kąt  $\alpha_0$ , jaki pręt tworzy z pionem? Ile wynosi współczynnik tarcia między prętem a podłogą? Ile wynosi siła tarcia, gdy pręt tworzy z pionem kąt  $\alpha \leq \alpha_0$ ?

**733.** Zmienne pole magnetyczne wytwarza w jednorodnym przewodniku ADBEA w kształcie okręgu (rys. 1) stałą siłę elektromotoryczną  $\varepsilon$ . Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny przewodnika i przechodzą przez powierzchnię w kształcie koła zacięniowaną na rysunku, pole ma oś symetrii przechodzącą przez środek przewodzącego pierścienia i prostopadłą do płaszczyzny przewodnika. W punktach A i B do pierścienia podłączony jest amperomierz. Opory przewodników ADB, AEB i ACB wynoszą odpowiednio  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ . Jakie jest napięcie między punktami A i B?

Równania ruchu w kierunku poziomym i pionowym mają postać

$$T = ma_x, \quad N - mg = ma_y,$$

stąd szukana siła tarcia

$$T = 3mg \sin \alpha (\cos \alpha - 2/3),$$

siła nacisku

$$N = 3mg \cos \alpha (\cos \alpha - 2/3).$$

Pręt przestanie naciskać na podłogę, gdy  $\cos \alpha_0 = 2/3$ ,  $\alpha_0 = 48^\circ$ .

Poślizg nie wystąpi dla kątów  $\alpha < \alpha_0$ , gdy współczynnik tarcia spełnia warunek

$$\mu > T/N = tg\alpha_0 = \sqrt{5}/2.$$

**733.** Oznaczmy natężenia prądu na elementach obwodu ADB, AEB i ACB przez  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , a siły elektromotoryczne indukcji przez  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ . Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że prąd w przewodniku kołowym płynie przeciwnie do wskazówek zegara. Zachodzą związki:  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $R_1/(R_1 + R_2) = \varepsilon_1/\varepsilon$  (z symetrii problemu) oraz  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$  (pole magnetyczne nie przenika przez obszar ograniczony konturem ACBD).

Równania Kirchhoffa dla obwodu elektrycznego przedstawionego na rysunku 3 są takie same jak dla układu na rysunku 1. Mają one postać:

$$\varepsilon - R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0, \quad R_1 I_1 = R_3 I_3, \quad I_2 = I_1 + I_3.$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy natężenia prądu, w szczególności

$$I_1 = \varepsilon R_3 / (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3).$$

Szukana różnica potencjałów między punktami A i B dana jest wzorem

$$V_A - V_B = \varepsilon_1 - R_1 I_1 = \varepsilon R_1^2 R_2 / (R_1 + R_2) (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3).$$

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Do trzech razy...

Już dwa razy ogłoszono, że osiągnięto pełne poznanie ludzkiego genomu. Po raz pierwszy, w roku 2000, wówczas do pełnej sekwencji brakowało 10%. Po raz drugi – w marcu 2022 roku, ponad 100 naukowców ze wszystkich stron świata (kto tu zasłużył na Nobla?) zasugerowało zakończenie prac. Zostało jeszcze 0,4% nieoznaczonych sekwencji, to szansa na trzecie oświadczenie. Genom (ludzki) to pełny zasób cząsteczek DNA przypadających na komórkę, wspólny dla wszystkich osobników gatunku (*Homo sapiens*).

Podstawowe składniki DNA, nukleotydy, połączone są w łańcuchy. DNA zbudowany jest z 4 różnych rodzajów nukleotydów. Kolejność ich ułożenia w DNA (sekwencja) stanowi zapis informacji o różnorodnych funkcjach komórki i organizmu jako całości. Genom człowieka zbudowany jest z ponad 3 miliardów nukleotydów. Są uporządkowane w 23 łańcuchach, każdy wchodzi w skład odrębnego „tworu” w jądrze komórkowym – chromosomu. Dodatkowo płeć odróżniają chromosomy Y (XY – mężczyźni) i X (XX – kobiety).

W roku 2015 oceniano, że różnica między konkretnym genomem a referencyjnym wynosi 0,6%, dlatego jesteśmy różni. Ustalenie sekwencji nukleotydów nazywa się sekwencjonowaniem.

Chemiczną naturę materiału genetycznego poznaliśmy 70 lat temu, sekwencjonowanie zaczęto w 1977 roku, po wynalezieniu odpowiednich metod (Nagroda Nobla w 1980 r.). Noblowskie metody były eleganckie, ale zbyt wolne i zbyt kosztowne. Pierwszą opublikowano sekwencję faga  $\Theta X 174$  (5,4 tys. nukleotydów). Dalszy postęp wymagał automatyzacji procedur, a następnie ich ulepszania lub opracowania nowych. Kolejne lata przyniosły dziesiątki nowych propozycji przyspieszenia metod obliczeniowych do analizy szybko uzyskiwanych wyników sekwencjonowania. Oczywiście oznaczało to także obniżanie kosztów, wyrażane w koszcie ustalenia jednej pozycji nukleotydu w łańcuchu. Kiedy świat naukowy i finansowy uznał, że sekwencjonowanie DNA jest ważne i **konieczne** (połowa lat 80.), jedna pozycja nukleotydu w sekwencji kosztowała około 1 dolara, projekt „ludzki genom” wyceniano na 3 miliardy dolarów. Od tego czasu cenę oznaczenia takiej sekwencji obniżono do 1 tysiąca, obecnie jest dostępna dla indywidualnych zleceniodawców.

Gdy poznawano kolejne genomy innych organizmów, starano się przypisywać im funkcje. Kod genetyczny poznano w latach sześćdziesiątych. Odróżniano takie fragmenty DNA, których sekwencja kodowała syntezę drugiego typu kwasu nukleinowego – RNA, którego sekwencja z kolei kierowała syntezą białka. Tak rozumiano wówczas, czym jest gen: jest fragmentem DNA kodującym białko, te cząsteczki sprawują w komórce wszystkie funkcje życiowe. W pierwszych zsekwencjonowanych organizmach (wirusy, bakterie) cały DNA kodował białka. Sprawa skomplikowała się, gdy zabrano się do sekwencjonowania genomów organizmów bardziej złożonych, także człowieka. W 2000 roku okazało się, że białka kodowane są przez niecałe 30% genomu człowieka. A pozostałe 70%...? Rozumowanie trzeba było odwrócić: szukać funkcji dla poznawanych sekwencji. To zajęło badaczom, wyposażonym w wyszukany sprzęt i technologie, kolejnych 20 lat. W sekwencjach z 2022 roku niewiadomą jest już tylko 0,4%.

W naszym genomie większość stanowią sekwencje powtarzające się. Długie fragmenty łańcuchów, które prawie identycznie powtarzają się obok lub w innych łańcuchach DNA. Niektóre z nich to pozostałość po sekwencjach bardzo dawnych wirusowych zakażeń ludzi i ich przodków. W wyniku pomyłek w procesach replikacji (podwajania) DNA fragmenty łańcuchów mogą przenosić się z miejsca na miejsce. Nie znamy nadal wszystkich procesów towarzyszących podziałowi komórki (a więc także replikacji DNA). Są fragmenty łańcucha zabezpieczające charakterystyczne „końce” chromosomów (telomery). Wreszcie odkryto dużo rodzajów RNA kodowanych przez DNA, bardzo różnej długości (nawet tylko kilkanaście nukleotydów), które nie kodują białek – nazywamy je obecnie rDNA. Wiele cząsteczek takiego RNA odgrywa role związane z regulacją przebiegu i intensywnością różnorodnych procesów.

W 2022 roku nie umiemy zsekwencjonować DNA znajdującego się w regionie centromeru – środkowej części chromosomu, zaangażowanej w procesy podziału komórki i rozdzielania nowo utworzonych potomnych chromosomów. Ta lokalizacja sugeruje funkcję takich sekwencji. To już tylko 0,4% całego genomu.

Większość tych wniosków wysnuto dzięki opracowaniu nowej metody sekwencjonowania bardzo długich odcinków DNA (pierwotne metody pozwalały na uzyskanie sekwencji ok. 500 nukleotydów).

Dla kolejnych badaczy pozostaje zrozumienie i wykorzystanie wiedzy o genomie z zakresu: medycyny, historii naszego gatunku i jego ewolucji, odczytywania źródeł zmienności w obrębie gatunku, genomiki (porównywanie genomów w całym zakresie gatunków), dynamiki rozwoju osobniczego. Od nowa odżyją dyskusje o modyfikacjach genomów w ogóle, ludzkiego w szczególności. Jest o czym myśleć doświadczalnikom i teoretykom wszelkich rodzajów, filozofom, pisarzom, malarzom – nam wszystkim. Zapraszam!

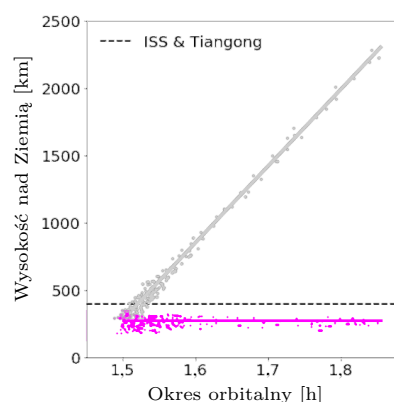
Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

## Katastrofalnie zatłoczona niska orbita okołoziemska

Oczywiście nie tylko Rosja przeprowadza tego typu testy. W ostatnich latach robiły to m.in. Stany Zjednoczone, Chiny i Indie.

Niska orbita okołoziemska rozciąga się na wysokościach od 200 km do 2000 km nad Ziemią.

Takie kaskadowe katastrofy satelitów czasami określane są mianem „syndromu Kesslera”. Donald Kessler, pracownik NASA, jako pierwszy już w latach 70. opisał to zagrożenie. Często bardzo spektakularnie ten efekt jest przedstawiany w produkcjach filmowych, jak np. w filmie „Grawitacja”.



Rysunek przedstawia apogeum (maksymalne odległości od Ziemi, szara linia) i perygeum (minimalne odległości, czerwona linia) odłamków o rozmiarach większych niż 10 cm powstałych po testach ASAT. Przerywana linia przedstawia wysokość orbity Międzynarodowej Stacji Kosmicznej (ISS) i Chińskiej stacji Orbitalnej Tiangong



W połowie listopada 2021 roku Ministerstwo Obrony Rosji przeprowadziło test rakiety antysatelitarnej (*anti-satellite missile test*, ASAT), która trafiła w rosyjskiego, nieczynnego od 30 lat, satelitę COSMOS 1408. Odłamki zostały wyrzucone na niską orbitę okołoziemską (*Low Earth orbit*, LEO). Broń ASAT jest przeznaczona do niszczenia satelitów wojskowych – do tej pory (na szczęście) była używana tylko w testach przeprowadzanych przez dany kraj na jego własnych satelitach. Problem w tym, że obecnie odłamki pozostałe po takich testach stwarzają realne zagrożenie dla wszystkich satelitów znajdujących się na niskiej orbicie. Dlaczego? Ponieważ tych satelitów jest coraz więcej. Duże zagęszczenie obiektów na LEO w połączeniu z testami broni ASAT może doprowadzić do kolizji kaskadowych, w których jedna kolizja tworzy odłamki, a te powodują kolejne kolizje, które kaskadowo powodują kolejne... i tak dalej. Taka lawinowa katastrofa sprawiłaby, że działalność kosmiczna i korzystanie z satelitów znajdujących się na LEO stałyby się poważnie niebezpieczne lub wręcz niemożliwe przez dziesiątki lat. Niestety ryzyko kolizji z odłamkami tworzonymi przez ASAT ciągle wzrasta w związku z pojawiającymi się megakonstelacjami satelitów komercyjnych, takich jak Starlink firmy SpaceX.

### Robi się tłoczno

Przewiduje się, że komercyjne megakonstelacje satelitów zwiększą liczbę obiektów znajdujących się na niskiej orbicie okołoziemskiej o ponad rząd wielkości w ciągu najbliższych kilku dekad. Na przykład w momencie pisania tego artykułu Starlink ma na orbicie 1645 satelitów. SpaceX planuje zwiększyć tę liczbę do 42 000 do roku 2027. Co najmniej ośmiu innych dostawców Internetu rozpoczęło lub planuje uruchomić własne konstelacje satelitów. Ale katastrofą zagrożone są nie tylko nasze przyszłe potencjalne źródła Internetu. Na niskiej orbicie okołoziemskiej znajduje się między innymi Międzynarodowa Stacja Kosmiczna (na wysokości 400–420 km), Chińska stacja orbitalna Tiangong (340–450 km) czy teleskop Hubble’a (540 km).

### Szacowanie ryzyka

O jakim ryzyku więc mówimy? Zagadnieniem tym zajęli się naukowcy z University of British Columbia, Sarah Thiele i Aaron Boley. Wykorzystali oni Standardowy Model Rozpadu stworzony przez NASA (NSBM), aby oszacować liczbę, rozmiary i prędkości fragmentów powstałych w wyniku testów broni ASAT, takich jak te przeprowadzone przez Indie w 2019 roku czy Rosję w 2021. Obliczenia NSBM przewidują, że każdorazowo jeden test tworzy ponad 300 000 odłamków o rozmiarach od 3 milimetrów do 1 metra. Większość z nich to na szczęście dość małe fragmenty – przewidywana liczba odłamków o rozmiarach większych niż 10 cm (jest to z grubsza rozmiar, który dzięki obecnej technologii jesteśmy w stanie śledzić na LEO) wyniosła 1 168. Ich orbity pokazane są na rysunku. Jak widać, odłamki rozrzucone są w całym zakresie LEO (<2 000 km), w tym wiele z nich przecina orbity stacji kosmicznych.

Wykorzystując oprogramowania modelujące zachowanie N-ciał o nazwie *Rebound*, naukowcy prześledzili przewidywane ścieżki ruchu tych odłamków w okresie 2 lat, lub do momentu, gdy wcześniej opadną na Ziemię. W oparciu o rozkład satelitów obliczono prawdopodobieństwo kolizji w czasie wzdłuż ścieżki ruchu każdego odłamka. Łącząc te prawdopodobieństwa dla wszystkich odłamków, obliczono całkowite prawdopodobieństwo, że jedna lub więcej kolizji nastąpi w wyniku pojedynczego testu ASAT.

### Jakie jest prawdopodobieństwo kolizji?

Nie tylko nie jest niezamierzalne, ale wręcz gwarantuje przyszłe kolizje. W przypadku scenariusza zakładającego 65 000 satelitów na LEO (czyli takiego, w którym zrealizowano cały projekt Starlink) prawdopodobieństwo zderzenia któregośkolwiek z tych satelitów ze stosunkowo dużym (>10 cm) odłamkiem, powodującym poważne uszkodzenia, wyniosłoby około 30% dla pojedynczego

Tekst oparty na publikacji Sarah Thiele i Aarona Boleya „Investigating the risks of debris-generating ASAT tests in the presence of megaconstellations”, arXiv:2111.12196, oraz publikacji Macy Huston „Antisatellite Tests Risk Catastrophic Collisions in a Crowded Low Earth Orbit”.

testu ASAT. Biorąc pod uwagę mniejsze fragmenty, o wielkości do 3 mm, prawdopodobieństwo to zbliża się do 100%! Dla porównania, w 2019 roku, gdy na LEO było tylko 3000 satelitów, prawdopodobieństwo jakiegokolwiek kolizji wynosiło jedynie 10%, a prawdopodobieństwo zderzenia z dużym fragmentem (>10 cm) zaledwie 0,05%.

Odłamki po testach broni ASAT stanowią więc poważne zagrożenie nie tylko dla funkcjonalności przyszłych satelitów, ale również zagrażają życiu astronautów przebywających na Międzynarodowej Stacji Kosmicznej. Jeżeli testy tej broni nie zostaną wstrzymane, ludzkość może stracić na lata dostęp do niskiej orbity, a co za tym idzie, dostęp do globalnej komunikacji i możliwości przeprowadzania eksperymentów naukowych w przestrzeni kosmicznej.

*Anna DURKALEC*

Zakład Astrofizyki (BP4), Departament Badań Podstawowych, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

## Niebo w czerwcu

Czerwiec jest miesiącem, w którym Słońce wędruje najwyżej nad widnokreślami, przekraczając podczas górowania wysokość  $60^\circ$ . Dzięki temu w czerwcu jest największa szansa na wystąpienie tzw. łuku okołohoryzontalnego (więcej o nim na angielskiej stronie: [www.atoptics.co.uk/cha2.htm](http://www.atoptics.co.uk/cha2.htm)), czyli małej, lecz intensywnej tęczy kilkanaście stopni nad horyzontem w okolicach południa, jeśli Słońcu na niebie towarzyszą chmury typu cirrus. Jednocześnie Słońce chowa się najpłycej pod widnokreślami w ciągu roku, a w północnej części Polski niebo jest wyraźnie rozjaśnione nawet w najciemniejszej części nocy. To oznacza najkorzystniejsze warunki na dostrzeżenie tzw. obłoków srebrzystych.

Astronomiczne lato na północnej półkuli Ziemi rozpocznie się 21 czerwca przed południem naszego czasu, gdy Słońce osiągnie najbardziej na północ wysunięty punkt ekliptyki. Cztery poranki wcześniej, 17 czerwca, zdarzy się najwcześniejszy wschód Słońca, a 8 dni później – najpóźniejszy zachód Słońca. A zatem jeszcze w czerwcu dnia zacznie ubywać zarówno rano, jak i wieczorem.

Podobnie jak to było w poprzednich miesiącach 2022 roku, czerwiec zacznie się dobrą widocznością Księżyca tuż po nowiu. Tym razem jednak zabraknie przy nim **Merkurego**. Pierwsza planeta od Słońca 16 dnia miesiąca osiągnie swoją maksymalną elongację zachodnią, ale wciąż niezbyt korzystnie ustawiona rano ekliptyka sprawi, że planeta zginie w zorzy porannej i Merkury w czerwcu pozostanie niewidoczny z dużych północnych szerokości geograficznych.

Pierwsze dwa dni czerwca Księżyc spędzi w gwiazdozbiornie Bliźniąt, zwiększając fazę od 5% do 10%. Jego odszukanie w tych dniach ułatwią dwie najjaśniejsze gwiazdy konstelacji, czyli Kastor i Polluks. Pierwszej doby czerwca Srebrny Glob znajdzie się w odległości  $17^\circ$  na godzinie 5 względem nich, dobę później kierunek zostanie zachowany, lecz Księżyc zbliży się na  $6^\circ$  do Polluksa. Kolejnego wieczora tarcza Księżyca zwiększy fazę do 16% i przeniesie się na pozycję w połowie drogi między Polluksem a gromadą otwartą M44 w Raku.

Srebrny Glob dotrze do gwiazdozbioru Lwa 5 czerwca, świecąc  $6^\circ$  od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji, i jednocześnie zbliżając się do gwiazdy  $\eta$  Leonis. Tym razem jednak oba ciała niebieskie znikną z nieboskłonu, zanim dojdzie do zakrycia tej gwiazdy przez Księżyc. Dwa dni później Księżyc przejdzie przez I kwadrę, zajmując pozycję wciąż na tle gwiazdozbioru Lwa, jakieś  $9^\circ$  od Deneboli, drugiej co do jasności gwiazdy konstelacji, stanowiącej najbardziej na wschód wysuniętą gwiazdę głównej figury gwiazdozbioru przypominającej żelazko.

W dniach 9 i 10 czerwca Księżyc odwiedzi Spikę, najjaśniejszą gwiazdę Panny, świecąc za każdym razem około  $10^\circ$  od niej. Dobę później Srebrny Glob zbliży się na mniej więcej  $0,5^\circ$  do gwiazdy Zuben Elgenubi, drugiej co do jasności gwiazdy Wagi. Jednak jego przekraczająca 90% faza znacznie utrudni obserwację tego zblżenia.

Naturalny satelita Ziemi przejdzie przez pełnię 14 czerwca tuż po południu naszego czasu, a poprzedniej nocy dotrzyma towarzystwa Antaresowi, najjaśniejszej gwiazdzie Skorpiona, której charakterystyczna rdzawo-pomarańczowa barwa nie pozwala na pomylenie jej z innym ciałem niebieskim.

W nocy z 14 na 15 czerwca Księżyc wzejdzie około godziny 23, prezentując tarczę w ubywającej fazie 97%. Mniej więcej 60 minut później zza jej ciemnej krawędzi (choć przy takiej fazie można powiedzieć, że oba brzegi księżycowej tarczy są jasne) wyłoni się gwiazda 3. wielkości  $\tau$  Sagittarii. Jest to najjaśniejsza gwiazda, której odkrycie można obserwować z Polski w tym miesiącu.

Dopiero pod koniec drugiej dekady czerwca naturalny satelita Ziemi dotrze do obszaru nieba, gdzie przebywają planety Układu Słonecznego. Rankiem 18 i 19 czerwca Srebrny Glob w fazie odpowiednio 82% i 72% przejdzie kilka stopni od przebywającego na pograniczu gwiazdozbiorów Koziorożca i Wodnika, niecałe  $2^\circ$  od najjaśniejszej w Koziorożcu, choć na mapach nieba oznaczanej dopiero literą  $\delta$ , gwiazdy Deneb Algiedi Saturna. W tym momencie planeta świeci blaskiem  $+0,6^m$ , jej tarcza zaś ma średnicę  $18''$ .





## LHC po urlopie

Wielki Zderzacz Hadronów (LHC) wraca do pracy po ponadtrzyletniej przerwie. Przez ten czas inżynierowie i fizycy ciężko pracowali nad konserwacją i modernizacją tego największego i najpotężniejszego na świecie akceleratora cząstek. Pierwsza wiązka cząstek – o energii 450 GeV, a więc jeszcze nierozpędzonych do docelowych prędkości – ruszyła w trasę wokół dwudziestosiedmiokilometrowego pierścienia w piątek 22 kwietnia. Oznaczało to, że wszystko działa poprawnie i Wielki Zderzacz Hadronów jest gotowy do pracy. Kiedy Czytelnicy Deltę czytają te słowa, rozpędzone do trzydziestokrotnie większej energii protony śmigają już w podgenewskim tunelu – i będą to robić przez kolejne cztery lata, dostarczając fizykom nowych danych.

Ten nowy okres działania Wielkiego Zderzacza Hadronów, określane mianem Trzeciego Przebiegu (Run 3), będzie się odznaczał nie tylko wyższą niż poprzednio energią zderzeń cząstek, ale także większą liczbą zderzających się cząstek. Oznacza to, że zwiększy się liczba dostępnych danych. Trzeba jednak pamiętać, że większa liczba zderzeń to także duże wyzwanie, gdyż naprawdę interesujące dane stanowią mikroskopijny ułamek wszystkich zarejestrowanych procesów, trzeba zatem ulepszyć procedury i algorytmy pozwalające te ciekawe dane znaleźć.

Według oficjalnych komunikatów ta bezprecedensowa liczba zderzeń umożliwi międzynarodowemu zespołowi fizyków w CERN i na całym świecie bardzo szczegółowe zbadanie bozonu Higgsa oraz poddanie Modelu Standardowego fizyki cząstek elementarnych i jego różnych rozszerzeń najbardziej rygorystycznym testom, jakie dotychczas zostały przeprowadzone. Co ciekawe, mało kto chce kusić los, mówiąc otwarcie o perspektywie odkrycia nowych cząstek spoza Modelu Standardowego. Wydaje się, że okres braku sukcesów w tym zakresie w ciągu ostatniej dekady po odkryciu bozonu Higgsa skutecznie utemperował oczekiwania fizyków.

Co się zatem zmieniło przez ostatnie trzy lata? W detektorze ATLAS usprawniono mechanizm wyzwalania zapisu danych, aby skuteczniej odsiewać nieinteresujące przypadki zderzeń, nie tracąc informacji o tych interesujących. Ulepszono także pomiar energii cząstek w kalorymetrach oraz detekcję mionów. Analogicznym ulepszeniom poddano detektor CMS. Detektor LHCb przeszedł całkowitą modernizację, która pozwoli mu na znacznie efektywniejsze zbieranie danych. Zespół doświadczalny używający tego detektora oczekuje, że w ten sposób w czasie Trzeciego Przebiegu uda się zebrać trzykrotnie więcej danych niż przez cały dotychczasowy okres działania detektora.

To bardzo istotne, gdyż jednym z celów badawczych LHCb jest analiza bardzo rzadko występujących procesów oddziaływania cząstek Modelu Standardowego. Ponieważ przewidywane prawdopodobieństwo takich procesów jest bardzo małe, wszelkie odstępstwa od przewidywań teoretycznych powinny być dobrze widoczne. Aby jednak je dostrzec, potrzeba dużej statystyki zderzeń cząstek, i dlatego ulepszenie LHCb było tak ważne. Spektakularne wyniki przyniesie modernizacja ALICE – wyspecjalizowanego detektora do badania ciężkich jonów. Fizycy pracujący z tym detektorem wyrażają nadzieję na pięćdziesięciokrotny wzrost liczby badanych przypadków.

Podczas Trzeciego Przebiegu zadebiutują dwa nowe detektory, zaprojektowane specjalnie w celu poszukiwania oddziaływań wykraczających poza Model Standardowy cząstek elementarnych – FASER i SND@LHC. Pozwolą one na systematyczne zbadanie istnienia nowych cząstek o masie porównywalnej z masą

protonu, ale bardzo słabo oddziałujących. Cząstki takie występują w wielu modelach teoretycznych wyjaśniających zagadkę ciemnej materii we Wszechświecie. Zbudowanie tych detektorów pokazuje, jak szybko środowisko fizyków potrafi reagować na nowe pomysły – w tym przypadku od idei do realizacji upłynęło zaledwie kilka lat.

Wysiłek badawczy fizyków pracujących przy Wielkim Zderzaczem Hadronów bywa czasami niedoceniany. Łatwiej zapewne ekscytować się odkryciem nowej cząstki niż kilkukrotnym zmniejszeniem niepewności pomiarowych w znanych procesach. Tymczasem wyniki tego drugiego rodzaju są niezwykle ważne dla możliwości odkrywania nowych efektów, które, być może, podpowiedzą nam co nieco o bardziej fundamentalnej strukturze Wszechświata. Dlatego z zapartym tchem i drżącą nadzieją na coś nowego czekam na nowe wyniki z LHC.

*Krzysztof TURZYŃSKI*





# KONKURS PTM im. WITOLDA WILKOSZA

na najlepszą studencką pracę  
popularyzującą matematykę

Na Konkurs można nadsyłać prace  
mające na celu  
popularyzację matematyki

Termin zgłoszeń: 30 września 2022 r.

<http://ok-ptm.im.uj.edu.pl/wilkosz.php>

Organizator Konkursu



Oddział Krakowski  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego

Sponsor Konkursu



UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

Wydział  
Matematyki i Informatyki

