

$\Pi=6,63 \cdot 10^{-34}$ $h \cdot s$ $\Pi=3,141592\dots$

NR 3 (574) 2022

CENA 6 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0167-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Wacław
Sierpiński
badacz
nieskończoności
str. 2

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA



UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



Nakład: 3500 egz.



SPIS TREŚCI NUMERU 3 (574)

Liczby pseudopierwsze

Mikołaj Rotkiewicz

str. 1

Popularne książki Sierpińskiego

Mariusz Skalba

str. 4

O liczbach Sierpińskiego

Wojciech Guzicki

str. 6

 Zadania

str. 9

Stała Eulera w trójkącie Pascala

Karol Gryszka

str. 10

Trójkąt Sierpińskiego w trójkącie Pascala

Łukasz Rajkowski

str. 11

Wacław Sierpiński – badacz

nieskończoności

Piotr Zakrzewski

str. 12

Od czego zależy wysokość strumienia
wody wypływającej z węza ogrodowego?

Michał Krupiński

str. 15

Podróż do Saturna

Lech Falandysz

str. 18

Mapa skarbów

Piotr Pikul

str. 19

Klub 44


str. 20

Galaktyczna banicja

str. 23

Niebo w marcu

str. 23

 Organoidy – nowe narzędzie
medycyny

Magdalena Fikus

str. 25

 Ekstremalnie!

Bartłomiej Bzdęga

str. 25

W następnym numerze: Rejonizacja
Wszechświata i gwiazdy Populacji III.



Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa

e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

$2^2 \cdot 5 \cdot 7$ urodziny

W roku 1882 w Dniu Liczby π (który wówczas raczej nie był jeszcze obchodzony) urodził się Waław Franciszek Sierpiński, postać kluczowa dla rozwoju polskiego środowiska matematycznego. Aby uczcić tę okoliczność, postanowiliśmy w niniejszym wydaniu *Delty* nakreślić wybrane zagadnienia bliskie sercu Jubilata. Nie mogło rzecz jasna zabraknąć „królowej królowej nauk”, czyli teorii liczb – o pewnych jej aspektach piszą Mikołaj Rotkiewicz i Wojciech Guzicki. Piotr Zakrzewski przybliży zaś fragmenty ogromnego dorobku Waław Sierpińskiego z zakresu podstaw matematyki, czyli teorii mnogości. Jeśli zaś chodzi o „pracę u podstaw” – już nie matematyki, a edukacji – Mariusz Skałba przedstawia działalność Jubilata związaną z upowszechnianiem nauki. Dodajmy, że miłośnicy trójkąta Sierpińskiego również znajdują coś dla siebie. Życzymy sobie i Czytelnikom, aby pamięć o Waławie Sierpińskim, matematyku światowego formatu dostrzegającym i pielęgnującym społeczną rolę nauki, stanowiła inspirację dla przyszłych pokoleń adeptów królowej nauk, tak jak dla obecnych.



*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

D. N. Lehmer, List of Prime Numbers from 1 to 10 006 721 (1914)
<https://locomat.loria.fr/lehmer1914/lehmer1914doc.pdf>

MTF zostało sformułowane (bez dowodu) przez francuskiego matematyka Pierre'a de Fermata (1601–1665). Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), wielki filozof i matematyk, pozostawił manuskrypt z dowodem MTF. Jednocześnie Leibniz (mylnie) stwierdził, że podzielność $n \mid 2^n - 2$ nie jest spełniona przez żadną liczbę złożoną.

Ciekawy kombinatoryczny dowód MTF Czytelnik znajdzie w Δ_{17}^4 . MTF jest bardzo pomocne przy rozwiązywaniu zadań z olimpiad matematycznych.

P. F. Sarrus (1798–1861), znany z *reguły Sarrusa* stosowanej często do obliczania wyznacznika macierzy 3×3 .

Czasami w definicji liczby a -pseudopierwszej przyjmuje się silniejszy warunek, że $n \mid a^{n-1} - 1$. Z warunku $n \mid 2^{n-1} - 1$ wynika, że n jest nieparzystą. Ciekawą klasę tworzą liczby 2-pseudopierwsze parzyste (patrz zadanie 3), czyli liczby parzyste $n > 2$ takie, że $n \mid 2^n - 2$. Jest ich nieskończenie wiele (Beeger, 1951).

Liczby pseudopierwsze

Mikołaj ROTKIEWICZ*

Możliwość szybkiego i poprawnego identyfikowania liczb jako liczb pierwszych jest kluczowa do prowadzenia efektywnych badań w zakresie teorii liczb. Z tego powodu, przed upowszechnieniem się komputerów, publikowano tablice liczb pierwszych. Dla liczb wykraczających poza granice takich tablic czasami do sprawdzenia pierwszości wykorzystywano jeden z najprostszych algorytmów, polegający na zastosowaniu Małego Twierdzenia Fermata. Mówi ono, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla każdej liczby całkowitej a liczba $a^p - a$ jest podzielna przez p . W języku kongruencji ten fakt można zapisać jako $a^p \equiv a \pmod{p}$ lub równoważnie, że $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, jeśli $p \nmid a$.

Za pomocą MTF udowodnimy, że 221 jest liczbą złożoną. Obliczamy $2^{221} \pmod{221}$: niech $x_k = 2^{2^k} \pmod{221}$, więc $x_{k+1} = x_k^2 \pmod{221}$. Dostajemy kolejno:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_k \pmod{221}$	2	4	16	35	-101	35	-101	35

Mamy $221 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$, więc

$$2^{221} \equiv 35 \cdot (-101) \cdot (-101) \cdot 35 \cdot 16 \cdot 2 \equiv 32 \not\equiv 2 \pmod{221},$$

zatem 221 jest złożona. Dla dużej liczby n podany algorytm testowania jej pierwszości jest dużo szybszy od standardowego sprawdzenia warunku $p \nmid n$ dla kolejnych liczb pierwszych $p \leq \sqrt{n}$.

János Bolyai (1802–1860), odkrywca i badacz geometrii nieeuklidesowej, osiągnął również znaczące wyniki w teorii liczb. Znalazł wiele liczb złożonych n takich, że $n \mid a^n - a$ dla pewnych ustalonych liczb a . Między innymi uogólnił podany przez Pierre'a Sarrusa przykład (najmniejszej) liczby złożonej n takiej, że $n \mid 2^n - 2$. Jest nią $341 = 11 \cdot 31$, co łatwo pokazać, korzystając z MTF. Mamy $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, więc $2^{10k} = (2^{10})^k \equiv 1 \pmod{11}$ dla każdej liczby całkowitej k . W szczególności, $11 \mid 2^{340} - 1$. Z drugiej strony $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$, więc $31 \mid 2^{340} - 1$ (bo $5 \mid 340$). Zatem $2^{340} - 1$ jest podzielna przez obie liczby pierwsze, 11 i 31, stąd rzeczywiście $11 \cdot 31$ dzieli dwukrotność $2^{340} - 1$, czyli $2^{341} - 2$.

Definicja. Niech a będzie liczbą całkowitą, $a > 1$. Jeśli n jest liczbą złożoną i $n \mid a^n - a$, to n nazywamy liczbą *pseudopierwszą przy podstawie a* , lub krócej – *a -pseudopierwszą*.

Zatem 341 jest liczbą 2-pseudopierwszą. Takie liczby zwykle się nazywać krótko liczbami pseudopierwszymi. Podamy teraz odrobinę bardziej wyszukany przykład. Pierre de Fermat był przekonany, że wszystkie wyrazy ciągu $F_n = 2^{2^n} + 1$ są liczbami pierwszymi. Euler (1707–1784) zauważył, że tak nie

F_n nazywa się n -tą liczbą Fermata.
Jedyne znane liczby pierwsze Fermata są F_1, F_2, F_3 i F_4 .

jest, gdyż $641 \mid F_5 = 2^{32} + 1$. Niemniej $F_n \mid 2^{F_n} - 2$, więc F_5 jest pseudopierwsza, co zauważył już János Bolyai. Rzeczywiście, z $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{F_n}$ wynika, że $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{F_n}$. Ponadto mamy $2^{n+1} \mid 2^{2^n}$, gdyż $n+1 \leq 2^n$, więc

$$F_n \mid 2^{2^{n+1}} - 1 \mid 2^{2^{2^n}} - 1 = 2^{F_n-1} - 1 \mid 2^{F_n} - 2.$$

Tematyka liczb pseudopierwszych zainteresowała jednych z najpłodniejszych i najwybitniejszych matematyków XX wieku, Paula Erdösa i Wacława Sierpińskiego. Erdős od razu uzyskał znaczące wyniki dotyczące asymptotycznego rozmieszczenia takich liczb. Sierpiński swój wielki entuzjazm i miłość do matematyki, w szczególności teorii liczb, przekazywał swoim uczniom. Jednym z nich był Andrzej Rotkiewicz (mój Tata) – autor kilkudziesięciu prac i monografii z obszaru liczb pseudopierwszych (i ich uogólnień). Sierpiński lubił dzielić się otwartymi, często drobnymi, zagadnieniami, które go interesowały, zmniejszając tym samym dystans między mistrzem a uczniem. Jednym z takich wspólnie rozwiązanych problemów było to, czy dla liczby złożonej n liczba $(2^n - 2)/n$ może być pierwsza. – Nie może.

Liczb pseudopierwszych jest nieskończenie wiele. Krótki i elegancki dowód podał Sierpiński. Dowód ten zamieszczamy w formie zadania na końcu artykułu.

Istnieją liczby złożone n , dla których $n \mid a^n - a$, dla każdej liczby całkowitej a , czyli liczby a -pseudopierwsze przy dowolnej podstawie a . Nazywamy je liczbami Carmichaela. Robert D. Carmichael (1879-1967) słusznie przypuszczał, że takich liczb jest nieskończenie wiele. Hipoteza ta została jednak rozstrzygnięta dopiero w 1994 roku.

Liczby Carmichaela można znajdować, posługując się prostym kryterium Korselta:

Twierdzenie. Niech n będzie liczbą złożoną. Następujące warunki są równoważne:

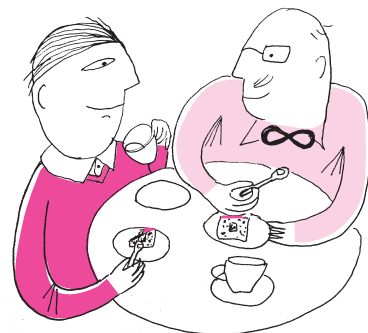
- (i) $n \mid a^{n-1} - 1$ dla każdej liczby całkowitej a , względnie pierwszej z n .
- (ii) n jest iloczynem różnych liczb pierwszych i dla każdej takiej liczby p zachodzi $p - 1 \mid n - 1$.
- (iii) $n \mid a^n - a$ dla każdej liczby całkowitej a .

Zatem $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ jest liczbą Carmichaela, gdyż $2, 10, 16 \mid 560$. Jest ona najmniejszą taką liczbą.

Pójdźmy teraz w innym kierunku: ustalamy podstawę a i zajmmy się konsekwencjami podzielności $n \mid a^{n-1} - 1$, gdzie $2 \nmid n$ i $\text{NWD}(a, n) = 1$. Przedstawmy $n - 1$ w postaci $n - 1 = d \cdot 2^s$, gdzie d jest liczbą nieparzystą, więc $s \geq 1$. Niech $x_j = a^{2^j d}$ dla $0 \leq j \leq s$. Mamy $x_s \equiv 1 \pmod{n}$ i $x_{j+1} \equiv x_j^2 \pmod{n}$. Jeśli n jest liczbą pierwszą, $n \neq 2$, to kongruencja $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$ ma dokładnie dwa rozwiązania (1 oraz -1), więc

- (i) $x_0 \equiv 1 \pmod{n}$ (wtedy $x_0, x_1, \dots, x_s \pmod{n}$ jest ciągiem samych jedynek) lub
- (ii) istnieje k takie, że $s > k \geq 0$ i $x_k \equiv -1 \pmod{n}$ (wtedy $x_{k+1} \equiv x_{k+2} \equiv \dots \equiv x_s \equiv 1 \pmod{n}$).

Jeśli zaś n jest złożona, to rozwiązań modulo n podzielności $n \mid x^2 - 1$ mamy co najmniej 4, poza przypadkami $n = 4, p^{k+1}, 2p^k$, gdzie $p \neq 2$ jest liczbą pierwszą, a k – naturalną (patrz zadanie 2). Liczby złożone n , które spełniają alternatywę (i)–(ii) nazywamy *silnie a -pseudopierwszymi*. Czy dana liczba może być silnie a -pseudopierwsza przy każdej podstawie a ? Okazuje się, że nie – nie istnieją „silne” liczby Carmichaela. Co więcej, dla każdej liczby złożonej n co najmniej 3/4 możliwych wartości a to dobrzy świadkowie złożoności tej liczby, tzn. n nie jest silnie a -pseudopierwsza. Test pierwszośc Miller–Rabina polega na losowaniu k różnych podstaw a i zweryfikowaniu, czy n spełnia powyższy warunek. Prawdopodobieństwo, że liczba złożona n zda powyższy test, jest mniejsze niż $1/4^k$.



Dowód można znaleźć w K. H. Rosen, *Elementary number theory and its applications*.

Jak dużo jest liczb pseudopierwszych? Problemy dotyczące asymptotycznego rozmieszczenia liczb pierwszych nie są proste. Twierdzenie o liczbach pierwszych, kamień milowy w teorii liczb osiągnięty jeszcze w XIX wieku, mówi, że $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$, gdzie $\pi(x)$ jest liczbą liczb pierwszych nie większych niż x . Dla liczb pseudopierwszych ani też dla liczb Carmichaela nie doczekaliśmy się tak dokładnego wyniku. Niemniej wiadomo, że:

Słynne twierdzenie Dirichleta mówi to samo, ale o liczbach pierwszych.

Szereg odwrotności liczb pierwszych jest rozbieżny, więc liczb pseudopierwszych jest istotnie mniej.

To jest także pierwszy dowód, że liczb Carmichaela jest nieskończenie wiele.

- $\pi_2(x)/\pi(x)$ dąży do zera przy $x \rightarrow \infty$, gdzie $\pi_2(x)$ funkcją zliczającą liczby pseudopierwsze nie większe niż x . (P. Erdős, 1950).
- W każdym ciągu arytmetycznym $(an + b)_{n \geq 1}$, gdzie $\text{NWD}(a, b) = 1$, $a \geq 1$, jest nieskończenie wiele liczb pseudopierwszych (A. Rotkiewicz, 1963). Warunek $\text{NWD}(a, b) = 1$ nie jest tutaj warunkiem koniecznym. Na przykład w ciągu $(4n + 2)$ jest też nieskończenie wiele liczb pseudopierwszych. Coś trzeba jednak założyć, bo w niektórych ciągach arytmetycznych nie ma liczb pseudopierwszych (Zadanie 7).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty$ (K. Szyciczek, 1967), gdzie q_n oznacza n -tą liczbę pseudopierwszą.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log q_n} = +\infty$ (A. Mąkowski, 1974).
- Jeśli przez $C(x)$ oznaczymy liczbę liczb Carmichaela nie większych niż x , to $C(x) > x^{2/7}$ dla dostatecznie dużych x (W. R. Alford, A. Granville, C. Pomerance, 1994).

Hipoteza Erdősa mówi, że dla każdego $\epsilon > 0$ zachodzi $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x)/x^{1-\epsilon} = +\infty$. Z drugiej strony dostępne obliczenia funkcji $C(x)$ i $\pi_2(x)$ (patrz tabela poniżej) nie potwierdzają tego. Raczej można przypuszczać, że $\pi_2(x) < \sqrt{\pi(x)}$ (D. Shanks). Obie hipotezy, Erdősa i hipoteza $\pi_2(x) < \sqrt{\pi(x)}$, stoją we wzajemnej sprzeczności, gdyż $\sqrt{\pi(x)} < \sqrt{x}$ i $\pi_2(x) > C(x)$. Do dziś jednak nie obalono żadnej z nich. Cóż, granica ciągu nie zależy od wartości jego początkowych wyrazów. Liczby w nieskończoności różnią się znacznie od tych, które widzimy tutaj w tabeli: średnia liczba dzielników pierwszych liczb nie większych od x rośnie jak $\log \log x$, i chociaż rośnie bardzo powoli, rośnie bez ograniczeń.

$k = \log_{10} x$	3	5	7	9	11	13	15	17
$C(x)$	1	16	105	646	3605	19279	105212	585355
$\pi_2(x)$	3	78	750	5597	38975	264239	1801533	12604009
$\pi(x)$	168	9592	$6,65 \cdot 10^5$	$5,08 \cdot 10^7$	$4,11 \cdot 10^9$	$3,46 \cdot 10^{11}$	$2,98 \cdot 10^{13}$	$2,62 \cdot 10^{15}$
$\pi_2(x)/\sqrt{\pi(x)}$	0,23	0,8	0,92	0,78	0,61	0,45	0,33	0,25
$\log_x \pi_2(x)$	0,159	0,378	0,411	0,416	0,417	0,417	0,417	0,418
$\log_x C(x)$	0	0,241	0,289	0,312	0,323	0,330	0,335	0,339

Na koniec proponuję kilka zadań, których rozwiązanie z pewnością pozwoli lepiej oswoić się z tematyką poruszoną w tym artykule. Wskazówki można odnaleźć jako załącznik do elektronicznej wersji artykułu na stronie internetowej *Delty*.

1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, które są względnie pierwsze z każdym z wyrazów ciągu $2^n + 3^n + 6^n - 1$, $n \geq 1$.
2. Znaleźć wszystkie rozwiązania kongruencji $x^2 \equiv 1 \pmod{680}$.
3. Wykazać, że (a) 91 jest 3-pseudopierwszą, (b) 45 jest liczbą pseudopierwszą przy podstawach 17 i 19, (c) $2 \cdot 73 \cdot 1103$ jest liczbą pseudopierwszą (jest to najmniejsza liczba pseudopierwsza parzysta).
4. Wykazać, że jeśli n jest liczbą pseudopierwszą nieparzystą, to $2^n - 1$ jest liczbą silnie pseudopierwszą. Wynioskować stąd, że liczb pseudopierwszych (i silnie pseudopierwszych) jest nieskończenie wiele. (Sierpiński, 1947)
5. Udowodnić, że jeśli liczby $6k + 1$, $12k + 1$ i $18k + 1$ są pierwsze, to ich iloczyn jest liczbą Carmichaela. Wynioskować stąd, że $307 \cdot 613 \cdot 919$ jest liczbą Carmichaela. (Chernik, 1939)
6. Wykazać, że (a) 25 jest silnie 7-pseudopierwszą, (b) $829 \cdot 1657$ jest silnie pseudopierwszą przy podstawach 2 i 3.
7. Niech $p \equiv -1 \pmod{6}$ będzie liczbą pierwszą, $a = p(p - 1)$, $b = 3p$. Uzasadnij, że ciąg arytmetyczny $(an + b)_{n \geq 1}$ nie zawiera ani jednej liczby pseudopierwszej.
8. Uzasadnić, że jeśli S jest nieskończonym podzbiorem liczb naturalnych takim, że dla dowolnych liczb względnie pierwszych a, b w ciągu $(an + b)_{n \geq 1}$ jest co najmniej jedna liczba ze zbioru S , to w każdym takim ciągu jest nieskończenie wiele liczb z S .
9. Znaleźć wszystkie liczby Carmichaela n takie, że każdy dzielnik pierwszy n jest jedną z liczb 7, 11, 13, 31, 41, 61.

Popularne książki Sierpińskiego

* Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Mariusz SKAŁBA *

Za mojej młodości było kilka źródeł, z których mógł czerpać nieopierzony miłośnik matematyki. Dla mnie najważniejszym były książki Wacława Sierpińskiego. Dotyczyły one teorii mnogości, topologii i przede wszystkim teorii liczb. Zostały napisane w przystępny, a jednocześnie zajmujący sposób. Tomiki te wydawane były po drugiej wojnie światowej dość intensywnie w różnych oficynach, w ramach różnych serii wydawniczych. I tak na przykład w popularnej serii „Biblioteczka Matematyczna” (Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych) wybitny autor umieścił następujące niewielkie (objętościowo) książki:

O stu prostych, ale trudnych zagadnieniach arytmetyki. Z pogranicza geometrii i arytmetyki;
Co wiemy, a czego nie wiemy o liczbach pierwszych;
Liczby trójkątne;
250 zadań z elementarnej teorii liczb;
Wstęp do teorii mnogości i topologii;
Wstęp do teorii liczb.

Inna seria wydawnicza, w której publikował Sierpiński, to „Monografie Popularnonaukowe Matematyka” (Państwowe Wydawnictwo Naukowe):

O rozkładach liczb wymiernych na ułamki proste;
Trójkąty pitagorejskie;
O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych.

W ramach serii „Biblioteka Nauczyciela Matematyki” (PZWS) ukazała się książeczka *O teorii mnogości*.

Dodajmy do tej wyliczanki jeszcze unikalną książkę wydaną przez Wiedzę Powszechną: *Czym się zajmuje teoria liczb?*

W jakim celu wymieniam te książki? I po co było tyle serii popularnonaukowych? Może po to, żeby wprowadzić chaos w umysłach młodych ludzi i odciągnąć ich od krytycznego myślenia o zastanej rzeczywistości? Nie sądzę – niektóre z nich zostały przecież przetłumaczone na wiele języków świata i cieszyły się uznaniem również w krajach demokratycznego kapitalizmu.

Najważniejsze w tym wszystkim jest jednak to, że książki te wprowadzają młodego Czytelnika bezpośrednio w arkana współczesnej nauki. Bardzo dobrze ujmuje to przedmowa „Od Redakcji” do książeczki *O teorii mnogości* i dlatego przytoczę ją w całości:

Chociaż teoria mnogości jest jedną z najmłodszych gałęzi matematyki, to jednak jej elementy stały się obecnie nieodzowną częścią ogólnego wykształcenia matematycznego.

Wielu uczonych od dawna wyrażało opinię, że niektóre zagadnienia teorii mnogości powinny znaleźć się w programie szkoły średniej – mimo wysokiego stopnia abstrakcji nie jest ona bowiem trudna do opanowania, gdyż nie wymaga wiadomości wstępnych.

W tomiku niniejszym znajdą czytelnicy te fragmenty teorii mnogości, które – zdaniem prof. dra Wacława Sierpińskiego – mogą być bez trudu przyswojone przez ucznia liceum czy technikum.

Koledzy Nauczyciele wykorzystają z pewnością tę książeczkę na zajęciach pozalekcyjnych z tą częścią młodzieży, która przejawia specjalne zainteresowania matematyką.

Jedynie wydanie tej niezwyklej książki ukazało się w 1964 roku. Przedmowa do niej świadczy o bliskiej relacji matematyki szkolnej i uniwersyteckiej i o dbałości, z jaką pielęgnowali tę relację giganci matematyki polskiej.



Rozwiązanie zadania M 1703.
Zauważmy, że

$$\sphericalangle TBA = 60^\circ - \sphericalangle BAT = \sphericalangle TAC.$$

Wobec tego trójkąty BAT oraz ACT są podobne. Oznacza to, że $\sphericalangle TXA = \sphericalangle TYC$ (jako odpowiednie kąty między środkową a bokiem w trójkątach podobnych), skąd

$$\sphericalangle TXA + \sphericalangle AYT = 180^\circ,$$

czyli punkty A, Y, T i X leżą na jednym okręgu.



Mnie osobiście najbardziej zainteresowały książeczki z teorii liczb. Nawet z ich pobieżnej lektury wynikało niezbicie, że matematyka jest żywa i atrakcyjna i że w teorii liczb cały czas coś się dzieje: ktoś dowodzi starej hipotezy albo stawia nowe problemy. W ten sposób łatwo było odnaleźć się jakoś w głównym nurcie matematyki, z przyjemnym poczuciem bezpieczeństwa, że wybitny autor cały czas czuwa, aby młody adept matematyki nie utonął: bo to, że nurt go wciągnie, było praktycznie pewne. Pomijając satysfakcję intelektualną czerpaną z lektury, była to potężna dawka motywacji i inspiracji. Wypada teraz na konkretnych przykładach zachęcić Czytelników *Delty* do zaznajomienia się z książkami Wacława Sierpińskiego.

Więcej niż raz pisał on o równaniu diofantycznym

$$(*) \quad x^3 + y^3 + z^3 = 30,$$

o którym bardzo długo nie było wiadomo, czy ma jakiegokolwiek rozwiązania całkowite x, y, z . Wybitny popularyzator wykorzystał chwiejny status tego równania do ilustracji pojęcia zbioru pustego na początku książeczki *O teorii mnogości*. Píše tam mniej więcej tak: *przy obecnym stanie nauki nikt nie potrafi rozstrzygnąć, czy zbiór rozwiązań w liczbach całkowitych powyższego równania diofantycznego jest pusty, czy też nie*. Zresztą ta figura retoryczna jest charakterystyczna dla Sierpińskiego: gdyby zajmował się popularyzacją innych nauk, to pewnie by dodał, że przy obecnym stanie nauki nie sposób przeprowadzić fuzji jądrowej, a przy obecnie panujących stosunkach społecznych nie sposób zlikwidować ubóstwa itp. Dla nas jest ważne, że ten stan rzeczy zmienił się w 1999 roku, gdy znaleziono rozwiązanie:

$$x = 2220422932, \quad y = -283059965, \quad z = -2218888517,$$

a potem jeszcze kilka innych. Dla matematyki ważniejszą dychotomią niż *pusty* – *niepusty* jest tradycyjna dychotomia *skończony* – *nieskończony*. Do dzisiaj nie wiemy, czy rzeczony zbiór rozwiązań jest skończony, czy też nieskończony. Podsumujmy: w badaniach równania (*) uzyskano na przestrzeni lat pewien skromny postęp.

A teraz przytoczymy opowieść Mistrza o przypadku całkowicie beznadziejnym i nierokującym. Niech mianowicie ciąg (q_n) będzie określony rekurencyjnie:

$$q_1 = 3, \quad q_{n+1} = 2^{q_n} - 1 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

O tym ciągu wypowiedziano przypuszczenie, że każdy jego wyraz jest liczbą pierwszą. Pierwsze cztery wyrazy są rzeczywiście liczbami pierwszymi:

$$q_2 = 7, \quad q_3 = 127, \quad q_4 = 2^{127} - 1.$$

Natomiast, jak łatwo oszacować, liczba q_5 ma więcej niż 10^{37} cyfr. Sierpiński konkluduje tak: *Nie podobna jej wypisać, a cóż dopiero badać, czy jest pierwszą. Łatwo jest stawiać przypuszczenia, dotyczące olbrzymich liczb, dla których nie mogą być sprawdzone*.

Niejeden z Czytelników zachnie się na użytą w tytule przesadnie entuzjastyczną kwalifikację: *popularne*. I będzie miał rację: przecież już każdy uczeń młodszych klas szkoły podstawowej wie, że jedyne naprawdę popularne książki to podręczniki. Tutaj Sierpiński dorównał w pewnym sensie swoim późniejszym dokonaniom popularyzatorskim: w doborowym towarzystwie Stefana Banacha i Włodzimierza Stożka wydał przed wojną szereg podręczników do szkoły powszechnej i średniej. Spis tytułów tych podręczników można znaleźć w artykule Andrzeja Schinzla *Wacław Sierpiński a szkoła średnia* (czasopismo *Matematyka*, nr 2, 1980). Poprzestaniemy tu na podaniu danych bibliograficznych jednego z nich:

Arytmetyka i geometria dla VII klasy szkoły powszechnej, 1 wyd., Lwów 1935, s. 184.

Mówi się, że dorośli nie czytają książek, gdyż zachłysłeni się tymi najpopularniejszymi z wczesnych etapów swojej edukacji (vide supra). Dlatego tym bardziej zachęcam wszystkich do sięgnięcia po popularnonaukowe książki Wacława Sierpińskiego i jego podręczniki szkolne – można to zrobić bez obaw w dowolnej kolejności!

Więcej o fundamentalnych trudnościach związanych z rozwiązywaniem równań diofantycznych stopnia większego niż 2 piszemy w Δ_{21}^{12} .

Liczba q_4 była największą znaną liczbą pierwszą w latach 1876–1951.

Skan podręcznika dostępny jest na stronie Podlaskiej Biblioteki Cyfrowej, <https://pbc.biaman.pl/dlibra/show-content/publication/edition/48887?id=48887>

O liczbach Sierpińskiego

Wojciech GUZICKI*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Historia liczb Sierpińskiego zaczyna się chyba od Pierre'a Fermata, prawnika i matematyka z Tuluzy, który około 1640 roku wyraził przypuszczenie, że wszystkie liczby naturalne postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$ (dzisiaj nazywane liczbami Fermata) są pierwsze. Sprawdził, że liczby

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3, F_1 = 2^2 + 1 = 5, F_2 = 2^4 + 1 = 17,$$

$$F_3 = 2^8 + 1 = 257, F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$$

rzeczywiście są pierwsze. Hipoteza Fermata okazała się nieprawdziwa, pierwszy kontrprzykład został znaleziony około 1747 roku przez Eulera:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Można oczywiście zapytać, jak Euler znalazł ten rozkład na czynniki pierwsze. Czy po prostu miał więcej cierpliwości niż Fermat? Otóż nie. Euler udowodnił, że każdy dzielnik pierwszy p liczby Fermata F_n ma postać

$$p = k \cdot 2^{n+1} + 1$$

dla pewnej liczby naturalnej k . Stąd wynika, że dzielnik pierwszy liczby F_5 musi mieć postać $p = 64k + 1$. Teraz wystarczy zbadać 10 liczb (dla $k = 1, 2, \dots, 10$), by znaleźć dzielnik 641.

Odkrycie Eulera i problem badania następnych liczb Fermata spowodowały naturalne zainteresowanie liczbami postaci $k \cdot 2^n + 1$ i w szczególności pytaniem o to, czy są one pierwsze. Waław Sierpiński udowodnił w 1960 roku następujące twierdzenie (znane w literaturze teoriolicznej jako twierdzenie Sierpińskiego).

Twierdzenie. *Istnieje nieskończenie wiele nieparzystych liczb naturalnych k o następującej własności:*

- liczba $k \cdot 2^n + 1$ jest złożona dla każdej liczby naturalnej n .

Od tego czasu nieparzyste liczby k , dla których wszystkie liczby postaci $k \cdot 2^n + 1$ są złożone, zaczęto nazywać liczbami Sierpińskiego. Przedstawię teraz dowód twierdzenia Sierpińskiego. Wcześniej jednak zaprezentuję pewne pojęcie.

Przyjmijmy, że mamy dane dwa ciągi skończone liczb naturalnych tej samej długości t :

$$(a_1, a_2, \dots, a_t) \quad \text{oraz} \quad (m_1, m_2, \dots, m_t),$$

oraz mamy dany pewien podzbiór zbioru liczb naturalnych $A \subseteq \mathbb{N}$. Mówimy, że układ kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ n \equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ \dots\dots\dots \\ n \equiv a_t \pmod{m_t} \end{cases}$$

jest systemem kongruencji pokrywającym zbiór A , jeśli każda liczba naturalna $n \in A$ spełnia co najmniej jedną z tych kongruencji. Mówimy także, że zbiór liczb naturalnych $B \subseteq \mathbb{N}$ pokrywa zbiór A , jeśli każda liczba $n \in A$ jest podzielna przez co najmniej jedną liczbę $p \in B$. Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia Sierpińskiego.

Dowód. Dla dowolnej liczby naturalnej k oznaczmy:

$$A_k = \{k \cdot 2^n + 1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Niech następnie

$$B = \{3, 5, 17, 257, 641, 65537, 6700417\}.$$

Udowodnię, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych k o własności:

- zbiór B pokrywa zbiór A_k .

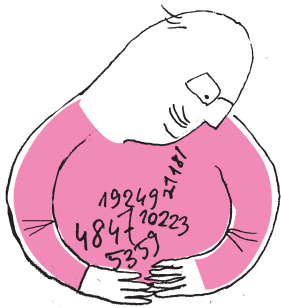
Weźmy trzy ciągi długości 7:

$$(a_1, a_2, \dots, a_7), \quad (m_1, m_2, \dots, m_7) \quad \text{oraz} \quad (p_1, p_2, \dots, p_7),$$



Rozwiązanie zadania F 1043.

Dla zapewnienia komfortu pasażerów wartość wektorowej sumy przyspieszenia a w kierunku poziomym i pionowego przyspieszenia ziemskiego g nie może przekroczyć $2g$. Oznacza to, że $a^2 + g^2 \leq (2g)^2$, czyli $a \leq g\sqrt{3}$. Osiągnięcie prędkości startowej v wymaga rozpędzenia samolotu ze stałym przyspieszeniem a w czasie $t = v/a \geq v/(g\sqrt{3})$, a potrzebna do tego długość pasa startowego wynosi $s = at^2/2 = v^2/(2a) \geq v^2/(2g\sqrt{3})$. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $t \geq 4,1$ s, $s \geq 139,3$ m. Obie wartości to oszacowania z dołu – osiągnięcie przyspieszenia a wymaga pewnego czasu.



zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} a_1 = 1, & \quad a_2 = 2, & \quad a_3 = 4, & \quad a_4 = 8, & \quad a_5 = 16, & \quad a_6 = 32, & \quad a_7 = 0, \\ m_1 = 2, & \quad m_2 = 4, & \quad m_3 = 8, & \quad m_4 = 16, & \quad m_5 = 32, & \quad m_6 = 64, & \quad m_7 = 64, \\ p_1 = 3, & \quad p_2 = 5, & \quad p_3 = 17, & \quad p_4 = 257, & \quad p_5 = 65537, & \quad p_6 = 641, & \quad p_7 = 6700417. \end{aligned}$$

Wówczas układ kongruencji

$$n \equiv a_i \pmod{m_i} \quad \text{dla } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad (*)$$

pokrywa cały zbiór liczb naturalnych \mathbb{N} . Możemy także zauważyć, że

$$2^{m_i} \equiv 1 \pmod{p_i} \quad \text{dla } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Dowody obu powyższych spostrzeżeń pozostawię jako nietrudne ćwiczenie.

Ustalmy teraz na chwilę liczbę $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Liczba p_i jest nieparzysta, więc $\text{NWD}(2^{a_i}, p_i) = 1$. Stąd wynika, że kongruencja

$$2^{a_i} \cdot x \equiv -1 \pmod{p_i}$$

z niewiadomą x ma rozwiązanie. Niech liczba b_i będzie rozwiązaniem tej kongruencji. Wówczas mamy:

$$b_i \cdot 2^{a_i} + 1 \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Teraz skorzystamy z chińskiego twierdzenia o resztach. Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych k spełniających układ kongruencji:

$$k \equiv b_i \pmod{p_i} \quad \text{dla } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Weźmy jedną z takich liczb k oraz dowolną liczbę $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $k \cdot 2^n + 1 \in A_k$. Układ kongruencji $(*)$ pokrywa cały zbiór liczb naturalnych, więc istnieje taka liczba $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, że

$$n \equiv a_i \pmod{m_i}.$$

Wówczas $n = c \cdot m_i + a_i$ dla pewnej liczby $c \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} k \cdot 2^n + 1 &= k \cdot 2^{c \cdot m_i + a_i} + 1 = k \cdot 2^{c \cdot m_i} \cdot 2^{a_i} + 1 = k \cdot (2^{m_i})^c \cdot 2^{a_i} + 1 \equiv \\ &\equiv b_i \cdot 1^c \cdot 2^{a_i} + 1 = b_i \cdot 2^{a_i} + 1 \equiv 0 \pmod{p_i}. \end{aligned}$$

Liczba $k \cdot 2^n + 1 \in A_k$ jest podzielna przez liczbę p_i . Z dowolności n wynika, że zbiór $B = \{p_1, p_2, \dots, p_7\}$ pokrywa zbiór A_k . Istnieje więc nieskończenie wiele liczb k , dla których zbiór B pokrywa zbiór A_k . To kończy dowód twierdzenia. \square

Z dowodu twierdzenia Sierpińskiego możemy także odtworzyć liczby k – najmniejszą z nich jest $k = 15\,511\,380\,746\,462\,593\,381$. Nie jest to jednak najmniejsza liczba Sierpińskiego. W roku 1962 John Selfridge znalazł mniejszą: $k = 78557$. Wykazał także, że zbiór $B = \{3, 5, 7, 13, 19, 37, 73\}$ pokrywa zbiór A_{78557} . Jednak nie wiemy, czy liczba 78557 jest najmniejszą liczbą Sierpińskiego. Według *Wikipedii* do kwietnia 2021 roku było jeszcze pięć kandydatek na najmniejszą liczbę Sierpińskiego:

$$21181, \quad 22699, \quad 24737, \quad 55459 \quad \text{oraz} \quad 67607,$$

tzn. o wszystkich pozostałych liczbach mniejszych od 78557 wiadomo, że liczbami Sierpińskiego nie są.

Metoda znajdowania zbiorów pokrywających ma zastosowanie w innych zadaniach. Pokażę jedno z nich. Weźmy dowolną liczbę $k \geq 2$. Do niej, na końcu, dopisujemy jedynek. Powstaje pytanie, czy dla każdej liczby naturalnej k wszystkie tak utworzone liczby są złożone. Odpowiedź jest prawie natychmiastowa: to nie jest prawdą. Dla $k = 2$ mamy liczbę złożoną 21 oraz liczbę pierwszą 211. Dla $k = 3$ i $k = 4$ wystarczy jedna jedynka: liczby 31 i 41 są pierwsze. Dla $k = 5$ mamy dopiero liczbę pierwszą 511111. Jeszcze gorzej jest dla $k = 32$ i dla $k = 12$: do liczby 32 trzeba dopisać na końcu 35 jedynek, by otrzymać liczbę pierwszą, a do liczby 12 trzeba dopisać aż 136 jedynek.

Okazuje się, że dla liczby 37 jest inaczej. Oznaczmy $s_n = 37111 \dots 111$, gdzie w zapisie liczby s_n mamy n jedynek. Wówczas można pokazać, że zbiór $B = \{3, 7, 13, 37\}$ pokrywa zbiór

$$A = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Warto zauważyć, że dla przeprowadzenia dowodu liczby p_1, \dots, p_7 zostały dobrane tak, żeby 2^{2^i} dzieliło się przez p_i dla $1 \leq i \leq 6$ oraz żeby 2^{2^6} dzieliło się przez p_7 .



Rozwiązanie zadania F 1044.

W zegarku mechanicznym elementem odmierającym upływ czasu jest tzw. balans drgający pod wpływem siły sprężystości sprężyny. Balans drga w powietrzu znajdującym się wewnątrz zegarka i podczas drgań wprawia w ruch także otaczające powietrze. Masa poruszanego powietrza zwiększa „efektywny” moment bezwładności balansu. Na szczycie wysokiej góry ciśnienie atmosferyczne jest mniejsze niż u jej podnóża, a więc i powietrze wewnątrz zegarka jest rzadsze. Tym samym masa powietrza unoszonego podczas drgań zmniejsza się, co prowadzi do zmniejszenia „efektywnego” momentu bezwładności balansu i skrócenia okresu jego drgań. Na szczycie wysokiej góry zegarek profesora Rabiego spieszył się. Podobno podczas wspólnej podróży koleją Rabi wspomniał o swojej obserwacji Enrico Fermiemu, który po godzinie przedstawił dokładny ilościowy opis zjawiska.

Oto dowód. Zauważmy najpierw, że

$$s_n = 37 \cdot 10^n + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) = \frac{333 \cdot 10^n + 10^n - 1}{9} = \frac{334 \cdot 10^n - 1}{9}.$$

Następnie zauważmy, że liczba n jest jednej z czterech postaci:

$$n = 3m, \quad n = 6m + 1, \quad n = 6m + 4 \quad \text{lub} \quad n = 3m + 2,$$

gdzie m jest liczbą naturalną. Mamy zatem cztery przypadki.

Przypadek 1. Niech $n = 3m$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$\begin{aligned} 334 &= 9 \cdot 37 + 1 \equiv 1 \pmod{37}, \\ 1000 &= 27 \cdot 37 + 1 \equiv 1 \pmod{37}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} 334 \cdot 10^n - 1 &= 334 \cdot 10^{3m} - 1 = 334 \cdot 1000^m - 1 \equiv \\ &\equiv 1 \cdot 1^m - 1 = 0 \pmod{37}. \end{aligned}$$

Przypadek 2. Niech $n = 6m + 1$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$\begin{aligned} 3340 &= 477 \cdot 7 + 1 \equiv 1 \pmod{7}, \\ 10^6 &= 142857 \cdot 7 + 1 \equiv 1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} 334 \cdot 10^n - 1 &= 334 \cdot 10^{6m+1} - 1 = 3340 \cdot (10^6)^m - 1 \equiv \\ &\equiv 1 \cdot 1^m - 1 = 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Przypadek 3. Niech $n = 6m + 4$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$\begin{aligned} 3340000 &= 256923 \cdot 13 + 1 \equiv 1 \pmod{13}, \\ 10^6 &= 76923 \cdot 13 + 1 \equiv 1 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} 334 \cdot 10^n - 1 &= 334 \cdot 10^{6m+4} - 1 = 3340000 \cdot (10^6)^m - 1 \equiv \\ &\equiv 1 \cdot 1^m - 1 = 0 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Przypadek 4. Niech $n = 3m + 2$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$\begin{aligned} 33400 &= 1237 \cdot 27 + 1 \equiv 1 \pmod{27}, \\ 1000 &= 37 \cdot 27 + 1 \equiv 1 \pmod{27}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} 334 \cdot 10^n - 1 &= 334 \cdot 10^{3m+2} - 1 = 33400 \cdot 1000^m - 1 \equiv \\ &\equiv 1 \cdot 1^m - 1 = 0 \pmod{27}. \end{aligned}$$

Skoro liczba $334 \cdot 10^n - 1$ jest podzielna przez 27, więc liczba

$$s_n = \frac{334 \cdot 10^n - 1}{9}$$

jest podzielna przez 3.

Wykazaliśmy zatem, że we wszystkich przypadkach liczba s_n jest podzielna przez co najmniej jedną liczbę ze zbioru $B = \{3, 7, 13, 37\}$, a więc zbiór B rzeczywiście pokrywa zbiór A . Stąd wynika, że jeśli liczba jedynek jest różna od zera, to otrzymana liczba jest złożona. Powstaje pytanie, czy istnieje liczba k o tej własności, że analogiczne liczby s_n są złożone dla każdej liczby n , także równej 0. Okazuje się, że liczba $k = 38$ ma tę własność.

Można udowodnić (w sposób podobny do powyższego), że:

- jeśli $n = 3m + 1$ (gdzie m jest liczbą naturalną), to liczba

$$s_n = 38 \cdot 10^n + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1)$$

jest podzielna przez 3,

- jeśli $n = 3m + 2$ (gdzie m jest liczbą naturalną), to liczba

$$s_n = 38 \cdot 10^n + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1)$$

jest podzielna przez 37.

Oba dowody pozostawiamy jako ćwiczenie. Jeśli natomiast $n = 3m$ (gdzie m jest liczbą naturalną), to liczba s_n rozkłada się na czynniki w następujący sposób:

$$\begin{aligned} s_n &= 38 \cdot 10^n + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) = \frac{343 \cdot (10^m)^3 - 1}{9} = \\ &= \frac{(7 \cdot 10^m)^3 - 1}{9} = \\ &= \frac{7 \cdot 10^m - 1}{3} \cdot \frac{(7 \cdot 10^m)^2 + (7 \cdot 10^m) + 1}{3}. \end{aligned}$$

Sprawdzenie, że oba czynniki

$$\frac{7 \cdot 10^m - 1}{3} \quad \text{oraz} \quad \frac{(7 \cdot 10^m)^2 + (7 \cdot 10^m) + 1}{3}$$

są liczbami całkowitymi, większymi od 1, także pozostawiamy jako ćwiczenie.

Na koniec powróćmy jeszcze do liczb Sierpińskiego. W 1993 roku A. S. Izotov udowodnił następujące twierdzenie:

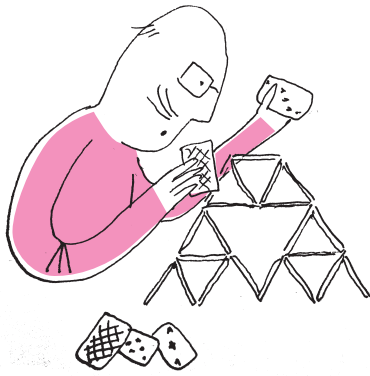
Twierdzenie. *Jeśli liczba naturalna t spełnia układ kongruencji*

$$\begin{cases} t \equiv 1 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537 \cdot 6700417}, \\ t \equiv 0 \pmod{5}, \\ t \equiv 256 \pmod{641} \end{cases}$$

oraz $k = t^4$, to k jest liczbą Sierpińskiego.

Szkic dowodu. Można łatwo pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $m \geq 0$ zachodzą następujące kongruencje:

$$\begin{aligned} k \cdot 2^{2m+1} + 1 &\equiv 0 \pmod{3}, \\ k \cdot 2^{8m+4} + 1 &\equiv 0 \pmod{17}, \\ k \cdot 2^{16m+8} + 1 &\equiv 0 \pmod{257}, \\ k \cdot 2^{32m+16} + 1 &\equiv 0 \pmod{65537}, \\ k \cdot 2^{64m+32} + 1 &\equiv 0 \pmod{6700417}, \\ k \cdot 2^{64m} + 1 &\equiv 0 \pmod{641}. \end{aligned}$$



Natomiast dla liczb n postaci $n = 4m + 2$ liczba $k \cdot 2^n + 1$ rozkłada się na czynniki. Skorzystamy mianowicie z tożsamości Sophie Germain:

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = \\ &= (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2). \end{aligned}$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} k \cdot 2^n + 1 &= 1 + t^4 \cdot 2^{4m+2} = 1 + 4t^4 \cdot (2^m)^4 = 1^4 + 4(t \cdot 2^m)^4 = \\ &= (1 + 2t \cdot 2^m + 2t^2 \cdot 2^{2m})(1 - 2t \cdot 2^m + 2t^2 \cdot 2^{2m}) = \\ &= (1 + t \cdot 2^{m+1} + t^2 \cdot 2^{2m+1})(1 - t \cdot 2^{m+1} + t^2 \cdot 2^{2m+1}) \end{aligned}$$

oraz obie liczby występujące w rozkładzie po prawej stronie są większe od 1. To kończy szkic dowodu.

Zauważmy także, że dla każdej liczby n mamy kongruencję

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 1 \pmod{5},$$

z której wynika, że zbiór $\{3, 5, 17, 257, 641, 65537, 6700417\}$ nie pokrywa zbioru liczb postaci $k \cdot 2^n + 1$. Nie mogliśmy zatem powołać się na rozumowanie przedstawione wcześniej w dowodzie twierdzenia Sierpińskiego.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1702. Na kartce w kratkę zaznaczono $4n$ pól. Udowodnij, że istnieje n zaznaczonych pól, które są parami rozłączne (tzn. nie mają punktów wspólnych).
Rozwiązanie na str. 15

M 1703. Punkt T leży wewnątrz trójkąta ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Ponadto spełniona jest równość

$$\sphericalangle ATB = \sphericalangle CTA = 120^\circ.$$

Punkty X i Y są środkami odcinków AB i AC , odpowiednio. Udowodnij, że punkty A, Y, T i X leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie na str. 4

M 1704. Dane są dwie różne liczby całkowite dodatnie k oraz m . Udowodnij, że

$$\left(k - \frac{1}{k}\right) \left(m - \frac{1}{m}\right) \leq km - 2.$$

Rozwiązanie na str. 13

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1043. Człowiek poddany działaniu przyspieszenia nieprzekraczającego dwukrotnej wartości przyspieszenia ziemskiego nie doznaje przykrych wrażeń. Prędkość startowa dużych samolotów pasażerskich (np. Jumbo Jeta) wynosi $v \approx 250$ km/godz. Jaki jest minimalny czas „rozpędzania” samolotu przed startem, podczas którego pasażerowie nie odczuwają dyskomfortu? Jaka jest minimalna długość poziomego pasa startowego potrzebna do osiągnięcia prędkości startowej? Przyspieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s².

Rozwiązanie na str. 6

F 1044. Profesor Izydor Rabi był bardzo dumny z precyzji, z jaką odmierzał czas jego mechaniczny zegarek. Podczas pobytu w laboratorium badającym promieniowanie kosmiczne, położonym na szczycie wysokiej góry, zaobserwował jednak, że jego zegarek przestał wskazywać poprawny czas. Czy na szczycie góry zegarek spieszył się, czy późnił?

Rozwiązanie na str. 7

Stała Eulera w trójkącie Pascala

Karol GRYSZKA*

*Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Stała Eulera może być wprowadzona jako granica operacji kapitalizacji odsetek w coraz krótszych okresach. Jeśli w danym roku złożyliśmy na 100% (stopa roczna) kwotę równą 1zł i w ciągu roku następuje n okresów kapitalizacji, to po roku będziemy mieć na lokacie $(1 + 1/n)^n$ złotych.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

Pierwszych sześć wierszy trójkąta Pascala

W poszukiwaniu stałych matematycznych często sięgamy po interesujące wzory lub ciekawe zależności liczbowe. Na pierwszy plan zwykle wysuwa się liczba π – stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. W tym artykule zajmiemy się jednak inną ważną stałą – liczbą Eulera e . Jest ona definiowana na dwa równoważne sposoby:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad e := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Jest to liczba niewymierna, w przybliżeniu równa 2,7183.

Okazuje się, że liczbę e możemy odnaleźć w trójkącie Pascala. Jest to trójkątny układ liczb, taki że każda liczba jest sumą dwóch liczb stojących bezpośrednio nad nią (z wyłączeniem wierzchołka trójkąta oraz jego prawego i lewego boku, gdzie znajdują się jedynki). Na marginesie przedstawiono sześć pierwszych wierszy tego trójkąta. Jeśli przez $P(n, k)$ oznaczymy k -ty wyraz n -tego wiersza, to zachodzi dobrze znany wzór $P(n, k) = \binom{n}{k}$. Przypomnijmy, symbol Newtona $\binom{n}{k}$ definiujemy na przykład następująco: jeśli $n \geq 0$ i $0 \leq k \leq n$, to

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Rozważmy teraz iloczyny a_n wyrazów w kolejnych wierszach trójkąta Pascala:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 96, \quad a_5 = 2500, \quad \dots$$

Ciąg ten sam w sobie nie jest szczególnie interesujący – jego wyrazy bardzo szybko rosną do nieskończoności.

Niech teraz $b_n = a_{n+1}/a_n$. Ciąg ten również nie wygląda specjalnie zachęcająco:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 4,5, \quad b_3 \approx 10,7, \quad b_4 \approx 26, \quad b_5 = 64,8, \quad \dots$$

Ponownie można pokazać, że wyrazy ciągu b_n rosną do nieskończoności.

Ostatni krok odkrywa jednak coś interesującego. Niech $c_n = b_{n+1}/b_n$. Wtedy

$$c_0 = 2, \quad c_1 = 2,25, \quad c_2 \approx 2,37, \quad c_3 \approx 2,441, \quad \dots, \quad c_{500} \approx 2,715, \quad \dots, \quad c_{10000} \approx 2,718.$$

Okazuje się, że ciąg c_n zbiega do e (!).

Nietrudno powyższy fakt udowodnić i to właśnie teraz zrobimy. Zauważmy najpierw, że

$$\binom{n+1}{k} / \binom{n}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} / \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k},$$

a zatem

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}}{\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}} = \binom{n+1}{n+1} \prod_{k=0}^n \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \\
 &= \prod_{k=0}^n \frac{n+1}{n+1-k} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.
 \end{aligned}$$

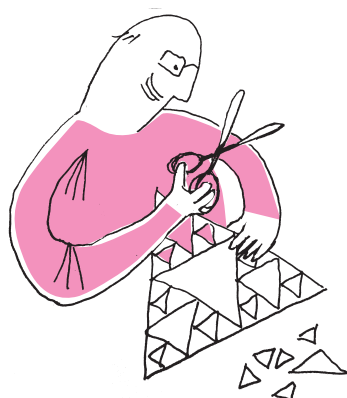
Ostatecznie dostajemy

$$c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n!} / \frac{n^n}{n!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Jest to nic innego jak ciąg definiujący stałą e .

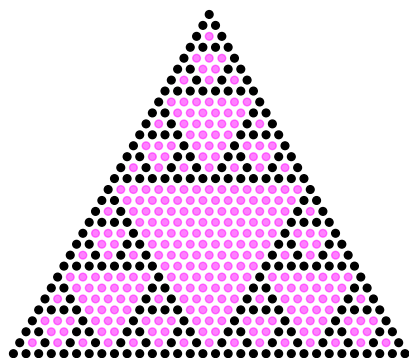
Czytelnik zakłopotany powyższymi ciągami może łatwo zapamiętać regułę otrzymania wyrazów ciągu c_n dążącego do liczby e . Należy wziąć trzy kolejne wiersze, a następnie iloczyn liczb w wierszach skrajnych podzielić przez kwadrat iloczynu liczb z wiersza środkowego.

Nasza przygoda z poszukiwaniem stałej Eulera dopiero się rozpoczyna. Za miesiąc zobaczymy niezwykle fakt z teorii liczb, związany z liczbą e .



Trójkąt Sierpińskiego w trójkącie Pascala

Łukasz RAJKOWSKI



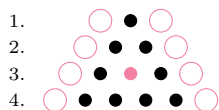
W artykule Karola Gryszki ujawniona została obecność stałej Eulera w trójkącie Pascala. Okazuje się, że ów trójkąt ma jeszcze jednego szlachetnego mieszkańca. Przyjrzyjmy się parzystości występujących w nim liczb. Oznaczmy liczby nieparzyste czarnym kółkiem, a parzyste – różowym. Przedstawienie w ten sposób pierwszych 32 wierszy (rysunek na marginesie) powinno wywołać u odbiorcy pełen zachwyt (tak jak u autora niniejszego tekstu). Otóż oczom naszym ukazuje się kształt jednoznacznie kojarzący się z *trójkątem Sierpińskiego*. W dalszej części tego krótkiego tekstu uzasadnimy, skąd on się tam wziął.

Przypomnijmy, że każda liczba w trójkącie Pascala jest równa sumie dwóch liczb znajdujących się nad nią. No, może nie każda – wszak liczby na brzegu trójkąta nie mogą pochwalić się dwoma liczbami stojącymi ponad nimi. Aby nie przejmować się tą drobną subtelnością, otoczmy trójkąt Pascala zerami. Przenieśmy teraz opisaną rekurencyjną zależność na kolory kółek, o których mowa w poprzednim akapicie. Otrzymamy wówczas następujące reguły kolorowania:

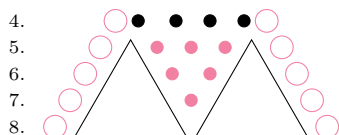
- (i) pod dwoma kółkami różnych kolorów jest kółko czarne
(bo suma liczb różnej parzystości jest nieparzysta),
- (ii) pod dwoma kółkami tego samego koloru jest kółko różowe
(bo suma liczb tej samej parzystości jest parzysta).



Podobnie jak poprzednio, aby nie martwić się sytuacją na brzegu trójkąta, oblóżmy go ze wszystkich stron „wirtualnymi” różowymi kółkami (na marginesie pozabawionymi wnętrza). Posługując się zasadami (i) i (ii), możemy teraz pokolorować trójkąt Pascala, wiersz po wierszu. Zaczynamy od czarnego kółka, wcisniętego pomiędzy dwa „wirtualne” różowe. Ze względu na (i) możemy w drugim wierszu pokolorować dwa kółka na czarno. Idźmy dalej – skoro w drugim wierszu są dwa czarne kółka, to zgodnie z (ii) pod nimi znajduje się różowe kółko. Natomiast na mocy (i) krańcowe kółka w trzecim wierszu możemy pomalować na czarno. Tak samo uzasadnimy, że czwarty wiersz składa się z czterech czarnych kółek. Moglibyśmy tę procedurę kontynuować, wiersz po wierszu, ale spróbujmy być bardziej efektywni.



Podkreślmy raz jeszcze, że po wypełnieniu pierwszych czterech wierszy w ostatnim z nich znajdują się 4 czarne kółka. Korzystając z reguły (ii), wnioskujemy, że „na środku” piątego wiersza znajdują się 3 różowe kółka. Ponownie powołując się na tę samą regułę, dostajemy, że na środku szóstego wiersza muszą być 2 różowe kółka, a na środku siódmego wiersza – jedno. Można pomyśleć, że czwarty „czarny” wiersz rzuca pod siebie trójkątny „różowy cień” (autor przyznaje, że w tym kontekście dobór kolorów nie jest najtrafniejszy).



Jeśli popatrzymy teraz na wiersze od piątego do ósmego, to zobaczymy, że pozostały nam do pomalowania dwa trójkąty (patrz rysunek na marginesie). Skoncentrujmy uwagę na jednym z nich. Zgodnie z regułą (i) na jego szczycie znajduje się czarne kółko. Ponadto trójkąt ten jest „obłożony” różowymi kółkami – sytuacja jest zatem dokładnie taka sama, jak na początku procedury wypełniania. Co prawda tym razem połowa tej różowej otoczki jest „prawdziwa”, a nie wirtualna, jednak nie ma to wpływu na przebieg kolorowania. W tej sytuacji każdy z pozostałych trójkątów musimy pokolorować tak jak trójkąt z pierwszych czterech wierszy. Uzasadnia to również fakt, że ósmy wiersz składa się z samych czarnych kółek.

Podejrzewam, że część z Czytelników wie już, co tu się święci. Dokładnie w ten sam sposób uzasadnimy, że jeśli pomalowanych jest już pierwszych 2^n wierszy, dla pewnej liczby naturalnej n , oraz w ostatnim z tych wierszy znajdują się same czarne kółka, to te czarne kółka rzucają „różowy cień” na kolejnych $2^n - 1$ wierszy. W wierszach od $2^n + 1$ do 2^{n+1} pozostają do wypełnienia dwa trójkąty, które na czubku mają czarne kółko umieszczone pomiędzy dwoma różowymi. Zadaje to warunki brzegowe rekurencji tożsame z tymi, które były na samym początku zabawy, zatem trójkąty te wyglądają dokładnie tak samo jak pierwszych 2^n wierszy (a w wierszu 2^{n+1} znajdują się same czarne kółka). Ten „blokowy” sposób kolorowania uzasadnia demaskatorski tytuł niniejszego tekstu.

Autor dziękuje Michałowi Miśkiewiczowi za podsuniecie przedstawionego w artykule pięknego dowodu i tym samym powstrzymanie przed prezentacją zaczerpniętego skądinąd dowodu wykorzystującego twierdzenie Lucasa. Czytelnikom znającym twierdzenie Lucasa polecam samemu wymyślić ów dowód.

Wacław Sierpiński – badacz nieskończoności

Piotr ZAKRZEWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Na grobie Wacława Sierpińskiego w Alei Zasłużonych na warszawskich Powązkach widnieje napis „Badacz nieskończoności”. Badaniem nieskończoności, a ściślej – zbiorów nieskończonych, zajmuje się teoria mnogości (*mnożość* to archaiczne określenie zbioru), której właśnie poświęcona jest duża część dorobku Sierpińskiego.

Kluczową rolę w teorii mnogości odgrywa porównywanie zbiorów nieskończonych pod względem mocy, czyli pod względem ich „liczebności”. I tak, zbiory A i B są *tej samej mocy* (są *równoliczne*, co oznaczamy $|A| = |B|$), jeśli istnieje funkcja wzajemnie jednoznacznie przekształcająca jeden z nich na drugi (czyli łącząca ich elementy w rozłączne pary: każdy element zbioru A z dokładnie jednym elementem zbioru B tak, by żaden element zbioru B nie pozostał bez pary). Z kolei zbiór A jest mocy co najwyżej takiej jak B (oznaczenie: $|A| \leq |B|$), jeśli jest równoliczny z jakimś podzbiorem zbioru B . W końcu, zbiór A jest mocy mniejszej niż B (oznaczenie: $|A| < |B|$), jeśli $|A| \leq |B|$, ale nie jest prawdą, że $|A| = |B|$. Zbiory skończone lub równoliczne ze zbiorem $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ liczb naturalnych to zbiory przeliczalne (wśród nich jest zbiór \mathbb{Q} liczb wymiernych), pozostałe zbiory są nieprzeliczone (wśród nich jest zbiór \mathbb{R} liczb rzeczywistych).



Okazuje się, że każde dwa zbiory można porównać pod względem mocy: dla dowolnych zbiorów A i B mamy albo $|A| \leq |B|$, albo $|B| < |A|$ (i warunki te się wykluczają). Ponadto \mathbb{N} jest zbiorem najmniejszej mocy nieskończonej: jeśli zbiór B jest nieskończony, to $|\mathbb{N}| \leq |B|$, bo sukcesywnie wybierając coraz to nowe elementy zbioru B , dostaniemy nieskończony i różnowartościowy ciąg o wyrazach z B . Zbiory najmniejszej mocy nieskończonej, czyli zbiory równoliczne z \mathbb{N} , nazywamy też zbiorami mocy \aleph_0 (czytamy: „alef zero”; zamiast pisać $|A| = |\mathbb{N}|$, piszemy też $|A| = \aleph_0$).

Istnieją również zbiory najmniejszej mocy nieprzeliczonej – nazywamy je zbiorami mocy \aleph_1 (czytamy: „alef jeden”) i piszemy np. $|A| = \aleph_1$, jeśli zbiór A jest nieprzeliczonej i dla każdego zbioru nieprzeliczonego B zachodzi warunek $|A| \leq |B|$. Właśnie takim zbiorom oraz ich związkom ze zbiorem \mathbb{R} wiele uwagi poświęcił Wacław Sierpiński.

Jak można sobie wyobrazić zbiór mocy \aleph_1 ? W podejściu, które tu – wykorzystując pomysły Sierpińskiego – przedstawimy, kluczowe okazuje się pojęcie łańcucha zbiorów.

Powiemy, że rodzina zbiorów \mathcal{L} jest *łańcuchem*, jeśli każde dwa zbiory A i B z \mathcal{L} można porównać w sensie zawierania: $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$. Dla oswojenia się z tym pojęciem przyjrzyjmy się następującemu przykładowi. Niech rodzina \mathcal{L}_0 składa się ze wszystkich zbiorów postaci $O_n = \{i \in \mathbb{N} : i < n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wszystkie zbiory należące do \mathcal{L}_0 są skończone, a dodatkowo łańcuch ten ma pewną interesującą własność: jest *maksymalny* wśród wszystkich łańcuchów, których elementami są skończone podzbiory \mathbb{R} : jeśli $F \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem skończonym spoza \mathcal{L}_0 , to F nie jest porównywalny w sensie zawierania z pewnym zbiorem A z \mathcal{L}_0 (a więc nie istnieje łańcuch skończonych podzbiorów \mathbb{R} , którego \mathcal{L}_0 jest właściwą podrodziną – to właśnie oznacza maksymalność \mathcal{L}_0). Istotnie, założymy, że skończony zbiór $F \subseteq \mathbb{R}$ nie należy do \mathcal{L}_0 , ale jest porównywalny z każdym zbiorem O_n . Oczywiście nie może wtedy być tak, że $O_n \subseteq F$ dla każdego n , bo wtedy F zawierałby cały zbiór liczb naturalnych i nie byłby skończony. Niech więc m będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $O_m \not\subseteq F$. Wtedy $m > 0$ (bo $O_0 = \emptyset \subseteq F$) i z jednej strony mamy $O_{m-1} \subseteq F$, a z drugiej – $F \not\subseteq O_m$ (bo F jest porównywalny z O_m i $O_m \not\subseteq F$), skąd wynika, że $F = O_{m-1}$, czyli $F \in \mathcal{L}_0$, wbrew założeniu.

Przypominamy znaczenie symboli:
 \subseteq : „zawiera się”,
 $\not\subseteq$: „nie zawiera się”,
 \subsetneq : „zawiera się, ale nie jest równe”.

Łańcuch \mathcal{L}_0 nie jest oczywiście maksymalny wśród łańcuchów przeliczalnych podzbiorów \mathbb{R} , bo np. zbiór \mathbb{N} nie należy do \mathcal{L}_0 , ale jest nadzbiorem każdego zbioru O_n . *Zasada maksimum Hausdorffa*, udowodniona przez Felixa Hausdorffa (1914 r.), gwarantuje jednak możliwość powiększenia każdego łańcucha przeliczalnych podzbiorów \mathbb{R} do maksymalnego takiego łańcucha. Nasz



Rozwiązanie zadania M 1704.

Po przemnożeniu przez km pozostaje do wykazania nierówność

$$k^2 m^2 - k^2 - m^2 + 1 \leq k^2 m^2 - 2km,$$

która jest równoważna nierówności $1 \leq (k - m)^2$. Oczywiście ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych różnych liczb całkowitych dodatnich k i m oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|k - m| = 1$.

Uwaga: Polecamy wykorzystać to zadanie do rozwiązania zadania 5 z finału LXIV Olimpiady Matematycznej.

przykładowy zbiór mocy \aleph_1 będzie właśnie – zgodnie z jednym z pomysłów Sierpińskiego, które tu wykorzystujemy – zdefiniowany z pomocą maksymalnego łańcucha \mathcal{L}_1 przeliczalnych podzbiorów zbioru \mathbb{R} . Możemy na przykład, korzystając z zasady maksimum Hausdorffa, rozszerzyć \mathcal{L}_0 do takiego łańcucha, istotne jest jednak tylko to, że łańcuch \mathcal{L}_1 składa się ze zbiorów przeliczalnych i jest maksymalny wśród takich łańcuchów podzbiorów \mathbb{R} . Definiujemy zbiór $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}$ (oznaczenie Ω_1 zostało przyjęte na potrzeby tego artykułu) jako sumę wszystkich zbiorów tworzących \mathcal{L}_1 . Pokażmy teraz, że $|\Omega_1| = \aleph_1$.

Po pierwsze zauważmy, że Ω_1 jest zbiorem nieprzeliczalnym. To wynika natychmiast z maksymalności łańcucha \mathcal{L}_1 . Gdyby bowiem zbiór Ω_1 był przeliczalny, to biorąc $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega_1$, dostalibyśmy przeliczalny zbiór $\Omega_1 \cup \{x\}$, przeczący maksymalności \mathcal{L}_1 , bo każdy zbiór należący do \mathcal{L}_1 byłby jego właściwym podzbiorem.

Weźmy teraz dowolny zbiór nieprzeliczalny B . Chcemy pokazać, że $|\Omega_1| \leq |B|$. Przypuśćmy więc, że jest przeciwnie, czyli $|B| < |\Omega_1|$, i niech $T \subseteq \Omega_1$ będzie zbiorem równolicznym z B ; w szczególności T jest nieprzeliczalny oraz $|T| < |\Omega_1|$. Skoro Ω_1 jest sumą wszystkich zbiorów tworzących \mathcal{L}_1 , to dla każdej liczby $x \in \Omega_1$ możemy wybrać zbiór $A_x \in \mathcal{L}_1$ taki, że $x \in A_x$. Zauważmy, że Ω_1 jest także sumą wszystkich tych zbiorów postaci A_x , że $x \in T$. Istotnie, gdyby pewna liczba $y \in \Omega_1$ była poza wszystkimi takimi zbiorami, to dla każdego $x \in T$ mielibyśmy $A_y \not\subseteq A_x$ (bo $y \in A_y \setminus A_x$), a więc $A_x \subseteq A_y$, bo zbiory A_x i A_y będąc elementami łańcucha \mathcal{L}_1 , są porównywalne w sensie zawierania. W szczególności dostalibyśmy więc, że $T \subseteq A_y$, co jest niemożliwe, bo zbiór T jest nieprzeliczalny. Przedstawiliśmy zatem zbiór Ω_1 w postaci sumy rodziny przeliczalnych zbiorów postaci A_x , gdzie $x \in T$, których jest mniej niż Ω_1 , bo $|T| < |\Omega_1|$. To jest jednak niemożliwe, bo zbiory nieprzeliczalne spełniają następującą „zasadę szufladkową”: żaden nieprzeliczalny zbiór X nie może być sumą zbiorów z takiej rodziny R swoich podzbiorów przeliczalnych, że $|R| < |X|$ (innymi słowy, jeśli elementy nieprzeliczalnego zbioru X umieścimy w szufladkach, których w sensie mocy jest mniej niż elementów zbioru X , to w jednej z tych szufladek znajdzie się nieprzeliczalnie wiele elementów).

Wykazaliśmy więc, że istotnie Ω_1 jest zbiorem mocy \aleph_1 – użyjemy go w dalszej części artykułu jako modelowego przykładu zbioru tej mocy.

Hipoteza continuum

Wacław Sierpiński sporo uwagi poświęcił tzw. *hipotezie continuum* (w skrócie: CH od angielskiej nazwy *Continuum Hypothesis*), czyli sformułowanemu w 1878 r. przez jednego z twórców teorii mnogości, Georga Cantora, przypuszczeniu, że $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. W wyniku późniejszych odkryć Kurta Gödla (1939 r.) i Paula Cohena (1963 r.) wiadomo, że na gruncie powszechnie przyjętych aksjomatów teorii mnogości hipotezy continuum nie można ani udowodnić, ani obalić. W wydanej w 1934 roku monografii *Hypothèse du continu* Sierpiński w szczególności pokazał jedenaście stwierdzeń równoważnych CH, oznaczonych od P_1 do P_{11} . Przyjrzyjmy się dwóm spośród nich: P_6 i P_1 .

P_6 : Zbiór \mathbb{R} jest sumą pewnego łańcucha swoich przeliczalnych podzbiorów.

Pokażmy najpierw, że stwierdzenie P_6 jest konsekwencją CH. Załóżmy więc, że $|\mathbb{R}| = \aleph_1$. Wtedy $|\Omega_1| = |\mathbb{R}|$ i niech funkcja $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ przekształca wzajemnie jednoznacznie Ω_1 na \mathbb{R} . Przypomnijmy, że Ω_1 jest sumą łańcucha \mathcal{L}_1 przeliczalnych podzbiorów \mathbb{R} . Jeśli teraz zdefiniujemy \mathcal{L} jako rodzinę podzbiorów \mathbb{R} , złożoną z obrazów elementów \mathcal{L}_1 względem funkcji f , to \mathcal{L} będzie łańcuchem przeliczalnych podzbiorów \mathbb{R} , którego sumą jest \mathbb{R} .

Na odwrót, pokażmy, że ze stwierdzenia P_6 wynika CH. Załóżmy więc, że \mathbb{R} jest sumą łańcucha swoich przeliczalnych podzbiorów i (posługując się np. wspomnianą wcześniej zasadą maksimum Hausdorffa) rozszerzmy ten łańcuch do maksymalnego łańcucha \mathcal{L} przeliczalnych podzbiorów \mathbb{R} . Wtedy jednak, powtarzając dowód tego, że $|\Omega_1| = \aleph_1$, pokazujemy, że suma łańcucha \mathcal{L} jest mocy \aleph_1 . Ale ta suma jest całym zbiorem \mathbb{R} , co kończy dowód CH.



P_1 : Płaszczyzna \mathbb{R}^2 jest sumą dwóch swoich rozłącznych podzbiorów A i B takich, że część wspólna zbioru A z każdą prostą pionową jest przeliczalna i część wspólna zbioru B z każdą prostą poziomą jest przeliczalna (dokładniej, dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zbiory $\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$ i $\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in B\}$ są przeliczalne).

Znów zaczniemy od pokazania, jak stwierdzenie P_1 wynika z CH. Jak już wiemy, z założenia CH wynika prawdziwość stwierdzenia P_6 . Niech więc \mathcal{L} będzie łańcuchem przeliczalnych podzbiorów \mathbb{R} , którego sumą jest \mathbb{R} . Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ wybierzmy zbiór $A_x \in \mathcal{L}$ taki, że $x \in A_x$ (podobnie postąpiliśmy wcześniej w dowodzie tego, że $|\Omega_1| = \aleph_1$). Zdefiniujemy zbiory A i B w następujący sposób:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in A_x\}, \quad B = \mathbb{R}^2 \setminus A.$$

Oczywiście $\mathbb{R}^2 = A \cup B$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ widzimy, że $\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\} = A_x$ jest zbiorem przeliczalnym. Ustalmy teraz $y \in \mathbb{R}$ i biorąc pod uwagę, że $\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \notin A\} = \{x \in \mathbb{R} : y \notin A_x\}$, zauważmy, że

$$\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in B\} \subseteq A_y,$$

bo jeśli $(x, y) \in B$ (czyli $y \notin A_x$), to $A_y \not\subseteq A_x$ (bo $y \in A_y \setminus A_x$), a stąd $A_x \subseteq A_y$ (gdyż A_x i A_y należą do tego samego łańcucha \mathcal{L}) i w szczególności $x \in A_y$. To pokazuje, że zbiór $\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in B\}$ jest przeliczalny, jako podzbiór przeliczalnego zbioru A_y .

Na odwrót, załóżmy teraz, że $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, gdzie A i B mają własności ze stwierdzenia P_1 . Dla każdego $y \in \mathbb{R}$ oznaczmy $B^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in B\}$ i niech \mathcal{R} będzie rodziną złożoną ze wszystkich zbiorów postaci B^y dla $y \in \Omega_1$. Rodzina \mathcal{R} składa się z \aleph_1 zbiorów przeliczalnych, więc ze wspomnianej wcześniej „zasady szufladkowej” wynika, że suma S tworzących ją zbiorów nie może mieć mocy większej niż \aleph_1 . Z drugiej jednak strony $S = \mathbb{R}$, bo w przeciwnym razie, biorąc liczbę x spoza S , dla każdego $y \in \Omega_1$ mielibyśmy $x \notin B^y$, czyli $(x, y) \notin B$, a więc, wobec równości $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $(x, y) \in A$. Tym samym jednak dostalibyśmy zawieranie

$$\Omega_1 \subseteq \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\},$$

które przeczy przeliczalności zbioru po prawej stronie powyższej inkluzji. Ostatecznie więc \mathbb{R} nie może mieć mocy większej niż \aleph_1 , zatem jako zbiór nieprzeliczalny ma moc dokładnie \aleph_1 , co kończy dowód CH.

Znajomości w zbiorach nieskończonych

Znane *twierdzenie Ramseya*, udowodnione przez Franka P. Ramseya (1928 r.), głosi, że w każdej nieskończonej grupie osób znajdzie się nieskończenie wiele takich, że każda zna każdą, lub nieskończenie wiele takich, że żadna nie zna żadnej. Ścisłej, jeśli X jest zbiorem nieskończonym, a f dowolną funkcją, która każdemu dwuelementowemu podzbirowi zbioru X przypisuje jedynekę albo zero, to X zawiera przeliczalny nieskończony podzbiór H o tej własności, że wszystkim jego dwuelementowym podzbirowom funkcja f przypisuje tę samą liczbę.

Wacław Sierpiński podał prosty przykład pokazujący, że nieprzeliczalność zbioru X nie gwarantuje istnienia nieprzeliczalnego zbioru $H \subseteq X$ o powyższej własności. Może się więc trafić nieprzeliczalna grupa osób, w której nie ma nieprzeliczalnego grona złożonego z samych znajomych bądź z samych nieznanymych.

Dokładniej, opierając się na pomysły Sierpińskiego, zdefiniujemy funkcję f określoną na rodzinie wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru Ω_1 o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$ w następujący sposób.

Przypomnijmy, że Ω_1 jest sumą łańcucha \mathcal{L}_1 przeliczalnych podzbiorów \mathbb{R} , i dla każdego $x \in \Omega_1$ znów wybierzmy zbiór $A_x \in \mathcal{L}_1$ taki, że $x \in A_x$.

Dla każdej pary liczb $x, y \in \Omega_1$ takich, że $x < y$, zdefiniujemy:

$$f(\{x, y\}) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } A_x \subseteq A_y, \\ 0, & \text{jeśli } A_y \not\subseteq A_x. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja f jest określona poprawnie, bo skoro zbiory A_x i A_y pochodzą z łańcucha \mathcal{L}_1 , to albo $A_x \subseteq A_y$, albo $A_y \subseteq A_x$.

Niech $H \subseteq \Omega_1$ będzie dowolnym zbiorem o tej własności, że wszystkim jego dwuelementowym podzbirowom funkcja f przypisuje jedynekę. Pokażemy, że zbiór H jest przeliczalny.

Dla każdej pary $\{x, y\}$, gdzie $x, y \in H$ i $x < y$, z przedziału otwartego (x, y) wybierzmy liczbę wymierną $q_{x,y}$. Zauważmy, że zachodzi zawieranie:

$$\{z \in H : z < q_{x,y}\} \subseteq A_y.$$

Istotnie, jeśli $z, y \in H$ i $z < q_{x,y}$, to $z < y$. Ale skoro $f(z, y) = 1$, to $A_z \subseteq A_y$ i w szczególności $z \in A_y$.

Wynika stąd, że każdy zbiór postaci $\{z \in H : z < q_{x,y}\}$ jest przeliczalny. Zbiorów tych jest jednak przeliczalnie wiele (bo zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny), więc ich suma też jest zbiorem przeliczalnym (to, że taka suma nie jest zbiorem nieprzeliczalnym, wynika na przykład z wykorzystywanej przez nas już wcześniej „zasady szufladkowej”). Z drugiej strony tą sumą jest cały zbiór H , z wyjątkiem liczby największej w H , o ile taka w H istnieje. Istotnie, jeśli dla $x \in H$ istnieje liczba $y \in H$ taka, że $x < y$, to $x < q_{x,y}$. Pokazaliśmy tym samym, że zbiór H jest przeliczalny. Przy założeniu $f(\{x, y\}) = 0$ dla każdej pary $x \neq y$ liczb ze zbioru H , dowód jego przeliczalności jest analogiczny.

Warto odnotować, że Sierpiński, modyfikując powyższy argument, zdefiniował funkcję, która każdemu dwuelementowemu podzbirowi całego zbioru \mathbb{R} przypisuje jedynekę albo zero w taki sposób, że każdy zbiór $H \subseteq \mathbb{R}$ o tej własności, że wszystkim jego dwuelementowym podzbirowom funkcja przypisuje tę samą wartość, jest przeliczalny. Okazuje się natomiast, jak pokazali Paul Erdős i Richard Rado, że gwarancją tego, by w nieprzeliczalnej grupie osób znalazło się nieprzeliczalne grono złożone z samych znajomych bądź z samych nieznanymych, jest założenie, że ta grupa osób jest mocy większej niż \mathbb{R} .

Od czego zależy wysokość strumienia wody wypływającej z węża ogrodowego?

Michał KRUPIŃSKI

Kto kiedykolwiek używał gumowego węża ogrodowego do podlewania roślin lub mycia samochodu, ten wie, że zasięg i wysokość wylatującej wody mogą być regulowane w bardzo prosty sposób. Gdy ściśniemy wylot węża lub częściowo zatkamy go palcem, woda zacznie wypływać z większą prędkością i wznieść się wyżej. Zjawisko to jest tak powtarzalne i proste, że korzystamy z niego intuicyjnie, nie zastanawiając się, jaka jest jego przyczyna. Warto jednak choć raz zadać sobie pytanie zawarte w tytule niniejszego artykułu i zastanowić się, co powoduje, że prędkość wypływającej wody ulega tak znacznemu zwiększeniu. Na pierwszy rzut oka można sądzić, że zjawisko to wynika z prostej zasady zachowania masy. Opcjonalnie, z zasady zachowania objętości, która działa dla cieczy nieściśliwych, a woda w dobrym przybliżeniu taka właśnie jest. Zasada owa mówi, że w każdej sekundzie objętość cieczy doprowadzanej do węża jest równa objętości cieczy z niego wypływającej. Zależność tę możemy zapisać jako

$$(1) \quad \frac{V}{t} = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const.},$$

gdzie V/t to strumień objętości, czyli objętość wody V przepływająca w czasie t przez wąż ogrodowy. A_1 i A_2 to natomiast pola przekroju węża na wlocie i wylocie, a v_1 i v_2 oznaczają wartości prędkości wody w środku węża i tuż za jego wylotem (patrz rysunek). Wydawałoby się, że równanie (1) wszystko wyjaśnia. Częściowe zatkanie wylotu powoduje zmniejszenie wartości A_2 , co pociąga za sobą zwiększenie prędkości v_2 wylatującej wody. Brzmi pięknie, ale niestety niczego nie tłumaczy. Woda w wężu nie płynie bowiem zawsze z taką samą prędkością, a zaciśnięcie wypływu powoduje równoczesne zmniejszenie prędkości v_1 . Oznacza to, że założenie o stałości objętości wody płynącej przez wąż w danym czasie nie ma racji bytu. Innymi słowy, równanie (1) mówi nam jedynie, że prędkość wody wylatującej z częściowo zatkanego końca będzie większa niż prędkość wody przepływającej przez wąż, ale nie pozwala nam obliczyć, ile ta prędkość będzie wynosić i jak będzie się zmieniać w zależności od pola przekroju wylotu. Szukajmy zatem dalej. Być może w rozwiązaniu naszej zagadki pomocnym okaże się równanie Bernoulliego, które jest wyrażeniem zasady zachowania energii dla nielepkich płynów przepływających bez wirów. Dla naszego przypadku możemy zapisać je w postaci

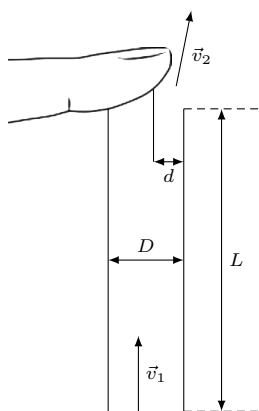
$$(2) \quad p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

W powyższym równaniu ρ to gęstość wody wynosząca około 1000 kg/m³, natomiast p_1 i p_2 oznaczają odpowiednio ciśnienie wody wewnątrz węża i tuż za jego wylotem. Te dwa oznaczenia możemy „zwinąć” do nadciśnienia wody w rurociągu wyrażonego jako $p = p_1 - p_2$, które wynosi najczęściej kilka barów. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest ono stałe i równe 3 barom, czyli 0,3 MPa. Zauważmy, że jeżeli prędkość wody w wężu ogrodowym ma wartość 10 m/s (co odpowiada całkiem szybkemu przepływowi), to składnik $\frac{1}{2} \rho v_1^2$ jest równy zaledwie 0,05 MPa, czyli wynosi sześciokrotnie mniej niż wartość nadciśnienia wody. Zazwyczaj prędkości przepływu wody w wężu ogrodowym są jednak niższe niż 10 m/s, co oznacza, że składnik ten możemy w większości przypadków zaniedbać w porównaniu z p . Otrzymujemy wtedy

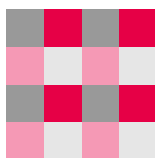
$$(3) \quad v_2 = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}.$$

Jeżeli założymy, że woda leci do góry bez oporów, jak kamień w próżni (co nie jest prawdą, ale znakomicie upraszcza nam obliczenia), otrzymamy maksymalną wysokość, na którą wznieść się strumień wody z węża ogrodowego:

$$(4) \quad h_{\max} = \frac{p}{\rho g}.$$



Rozwiązanie zadania M 1702.
Pokolorujmy każde pole kartki według następującego wzoru:



Wówczas łatwo zauważyć, że pola jednokolorowe są rozłączne. Użyliśmy czterech kolorów, a zaznaczyliśmy $4n$ pól, więc z zasady szufladkowej Dirichleta możemy wskazać n zaznaczonych pól w tym samym kolorze, co kończy rozwiązanie.

Po prostych obliczeniach dostaniemy wartość $h_{\max} = 30$ m. Kto kiedykolwiek miał do czynienia z węzłem ogrodowym, ten wie, że wyznaczona w ten sposób wysokość jest znacznie zawyżona. Co więcej, z równania (4) wynika, że niezależnie od tego, jak mocno ściśniemy lub zatkamy wylot węża, woda będzie zawsze wylatywać z niego na tę samą wysokość, określoną jedynie nadciśnieniem wody w sieci wodociągowej. No cóż, to także nie jest zgodne z obserwacjami. Wygląda więc na to, że równanie Bernoulliego nie odpowiada na pytanie zadane na początku niniejszego artykułu i niepoprawnie przewiduje zachowanie wody wypływającej z węża. Po chwili zastanowienia dojdziemy do wniosku, że to w zasadzie nic dziwnego. W powyższych rozważaniach nie uwzględniliśmy bowiem ważnej własności każdej (prawie) cieczy, jaką jest lepkość. Jest ona skutkiem wewnętrznego tarcia pomiędzy cząsteczkami i powoduje, że przepływająca w ogrodowym węźle woda przekształca część swojej energii na ciepło, zupełnie tak samo jak podczas klasycznego tarcia przesuwających się względem siebie ciał stałych. W przypadku cieczy ta strata energii zależy zarówno od długości przewodu, jak i od prędkości przepływu. Im większa prędkość, tym więcej energii mechanicznej przekształca się w ciepło. Zastanówmy się, jaki jest wpływ lepkości na prędkość wypływającej wody. Gdy wąż jest całkowicie zatknięty palcem, woda w nim nie płynie, a zatem zjawiska związane z lepkością nie grają żadnej roli. Jeżeli lekko odchylimy palec, tworząc bardzo mały otwór, woda zacznie wypływać, ale jej wypływ będzie na tyle niewielki, że woda wewnątrz węża będzie płynąć niemrawo, z prędkością bliską zero. To również jest przypadek, kiedy straty energii mechanicznej związane z lepkością możemy pominąć. Wnikliwy Czytelnik zauważy, że taki przypadek rozważaliśmy już przy okazji dyskusji równania Bernoulliego. Istotnie, równanie to całkiem dobrze opisuje wypływ wody z węża przy bardzo małym otworze końcowym i braku strat energii mechanicznej przy wylocie. Możemy zatem uznać, że wysokość, na którą wzniesie się strumień przy najmniejszym możliwym odchyleniu palca, dążyć będzie do wartości danej równaniem (4). Czytelnik Doświadczony w Podlewaniu Ogrodów zapewne zaprotestuje, mówiąc że nawet przy mocnym ściśnięciu węża wartość 30 metrów nie jest osiągalna. Owszem, równanie (4) nie uwzględnia bowiem strat energii przy samym wypływie ani też oporu powietrza. Całkiem nieźle jednak oddaje sytuację, gdy lepkość wody nie powoduje znaczących strat energii mechanicznej. Gdy palec będziemy odchylić jeszcze bardziej, wypływ wody wzrośnie, równocześnie powodując zwiększenie prędkości przepływu wody przez wąż. Zjawiska związane z lepkością zaczną odgrywać coraz większą rolę, sprawiając, że energia mechaniczna przepływającej przez wąż wody zamieniać się będzie częściowo w ciepło. To z kolei spowoduje spadek pędu wody na wylocie, co objawiać się będzie jako mniejszy zasięg strumienia. Innymi słowy, poprzez zaciśnięcie końcówki węża

lub zakrycie jej palcem zmniejszamy straty energii spowodowane tarciami wewnętrznymi wody w węźle, przez co energia kinetyczna cząsteczek na wylocie może osiągnąć większą wartość. Oto prawdziwa przyczyna zwiększenia zasięgu strumienia przy częściowym zakryciu palcem wylotu węża ogrodowego! Czy możemy oszacować straty energii związane z lepkością? Owszem, możemy, choć nie jest to rzecz łatwa, gdyż wszelkie rozproszenia energii mechanicznej w cieczach zazwyczaj wymykają się prostym opisom analitycznym. Spróbujmy podejść do tego zagadnienia, zaczynając od znanego nam już równania Bernoulliego. Zmodyfikujmy więc zależność (2), dzieląc ją stronami przez $g\rho$ oraz dodając składnik h_L związany z energią mechaniczną rozproszoną poprzez tarcie wewnętrzne cieczy:

$$(5) \quad \frac{p}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + h_L.$$

Na wartość współczynnika h_L mają wpływ dwa czynniki, co możemy zapisać jako $h_L = h_f + h_c$. Pierwszy z nich, h_f , związany jest z rozpraszaniem energii mechanicznej podczas przepływu wody przez wąż ogrodowy. Drugi, h_c , opisuje tarcie cząsteczek spowodowane zawirowaniami cieczy na końcu węża, czyli w miejscu, gdzie przyłożyliśmy palec. Czynniki związane z tarciami podczas przepływu opisać możemy empirycznym równaniem Darcy'ego–Weisbacha:

$$(6) \quad h_f = f \frac{v_1^2 L}{2g D}.$$

Jak widzimy, powyższe równanie uwzględnia wpływ rozmiarów węża ogrodowego (patrz rysunek). Im jego długość L jest większa oraz im mniejszą ma szerokość D , tym straty związane z lepkością rosną. Dodatkowo zależą one od kwadratu prędkości przepływu v_1 oraz od współczynnika oporu f , którego wartość może być odczytana ze specjalnych tablic Moody'ego, sporządzonych dla wody płynącej z różną prędkością przez rury o zróżnicowanej szorstkości i średnicy. Na przykład dla węża o gładkich ściankach i średnicy 1 cm, przez który płynie woda z prędkością 1 m/s, wartość współczynnika f wynosi około 0,03. Drugim czynnikiem powodującym rozproszenia energii mechanicznej cieczy są straty przy wylocie, które możemy wyrazić poprzez:

$$(7) \quad h_c = K_L \frac{v_2^2}{2g}.$$

Tym razem kluczowymi parametrami okazują się prędkość wypływu wody v_2 oraz współczynnik oporu K_L . Niestety, wartość tego ostatniego może być dokładnie wyznaczona jedynie w eksperymentach prowadzonych dla konkretnej ręki dzierżącej konkretny wąż. Aby otrzymać wysokość, na którą wzniesie się woda, należy połączyć równania (5), (6) i (7) oraz wykonać kilka przekształceń. Czytelnika zainteresowanego pełnym wyprowadzeniem odsyłamy do artykułu [*], który dostarcza końcowego wzoru na wysokość osiąganą przez wodę wypływającą z węża ogrodowego częściowo zatkanego palcem:

$$(8) \quad h \approx \frac{p}{\rho g (1 + K_L + f \frac{d^4 L}{D^5})}.$$

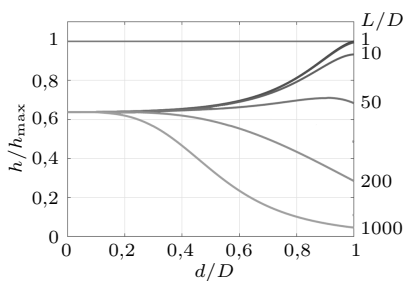


Zauważmy, że powyższa zależność jest tylko przybliżeniem. Nie powinno to dziwić, bo nasze rozważania są zaledwie szacunkowe. Zastosowaliśmy jednak bardzo prosty model opisujący straty energii wody na wylocie węża. Dodatkowo lepka ciecz traci energię na wszystkich zagięciach, nieregularnościach, zwężeniach itp., których nie wzięliśmy pod uwagę. Wszystkie te czynniki są bardzo trudne do uwzględnienia, nawet numerycznie. Pozostaje więc zadowolić się prostą, szacunkową zależnością. Zwróćmy również uwagę, że uwzględnienie rozprożeń energii związanych z lepkością daje niższe wysokości niż te przewidywane przez wzór (4), co jest zgodne z intuicją. Co więcej, zależne są one od d , czyli średnicy wylotu, czego spodziewamy się na podstawie naszych doświadczeń. Wzór (4) możemy zresztą wykorzystać, aby równanie (8) napisać w zgrabniejszej formie. Wprowadźmy zatem symbol h_{\max} oznaczający maksymalną wysokość, na którą wzniosłaby się woda, gdyby była cieczą pozbawioną lepkości oraz nie czuła oporów powietrza:

$$(9) \quad h \approx \frac{h_{\max}}{1 + K_L + f \frac{d^4 L}{D^5}}.$$

Teraz pozostaje nam zastanowić się, co z powyższego wyrażenia wynika. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy długość węża wynoszącą 10 metrów, a nadciśnienie w sieci wodociągowej ustalmy na wartości 3 barów. Żeby cokolwiek obliczyć, musimy także znać wartości współczynników K_L oraz f . Całkiem niezłym oszacowaniem tego pierwszego okazuje się prosta zależność

$$K_L = 1 - (d/D)^2,$$



natomiast wartości f dostępne są w tablicach. Wykres pokazuje obliczenia wysokości, na którą wzniesie się woda dla kilku wartości stosunku L/D , począwszy od 1, a skończywszy na 1000. Pierwszy przypadek oznacza, że mamy do czynienia z bardzo szeroką rurą o średnicy 10 metrów, podczas gdy ostatnia wartość dotyczy cienkiego węża ogrodowego o średnicy zaledwie 1 cm. Każda zależność wykreślona jest w funkcji d/D , co oznacza, że wartość 1 odpowiada w pełni otwartemu wylotowi, a wartości bliskie 0 odnoszą się do wylotu niemalże całkowicie zatkanego. Widzimy, że w przypadku cienkich rur (wysokie wartości L/D) każde zatkanie odpływu wody wiąże się ze zwiększeniem wysokości, na którą wzniesie się ciecz. Ale co ciekawe, dla grubych rur (małe wartości L/D) częściowe zatkanie odpływu da przeciwny rezultat – im mocniejsze przesłonięcie wylotu, tym mniejsza wysokość strumienia wody. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład w przypadku hydrantów ulicznych, które są grubymi, ale zazwyczaj krótkimi rurami. Kto kiedykolwiek widział otwarty hydrant, ten wie, że woda z niego ma naprawdę spory zasięg. Wystarczy jednak lekko zakręcić zawór, aby zasięg ten znacząco spadł, co znakomicie przewiduje wypracowana zależność. Zachowanie takie związane jest ze zwiększeniem strat energii mechanicznej cieczy na zaworze.

Z jeszcze ciekawszym przypadkiem mamy do czynienia dla rur średnio grubych i średnio długich ($L/D = 50$), gdzie występuje maksimum wysokości wypływającej wody dla $0 < d/D < 1$. Oznacza to, że aby uzyskać maksymalny zasięg strumienia, należy jedynie w niewielkim stopniu przesłonić odpływ. Dalsze zatykanie wylotu będzie skutkowało spadkiem prędkości wypływającej wody. Powyższe rozważania mogą zostać wsparte eksperymentami, do których mocno zachęcamy wszystkich Czytelników. Pomiar wysokości osiągniętej przez wodę wypływającą z węża ogrodowego wydaje się prostym doświadczeniem, które znakomicie urozmaici wszelkie prace ogrodowe. Ambitniejsi Czytelnicy mogą również sprawdzić, jak wysokość ta zależy od długości węża oraz od stopnia przesłonięcia jego wylotu palcem. A jeszcze ambitniejsi porównać zmierzone wartości z przewidywaniami teoretycznymi.

[*] M.-R. Alam, „Why does water shoot higher if we partially block the garden hose outlet?”, Am. J. Phys. 89 (2021) 567–574.

Podróż do Saturna

Lech FALANDYSZ

U starożytnych Rzymian Saturn był bogiem rolnictwa i zasiewów. Uczyniono go nawet władcą Italii, a za jego panowania trwał tzw. „złoty wiek”. Na pamiątkę tych czasów w okolicy 20 grudnia obchodzono „Saturnalia”. Było to święto radości, pojednania oraz powszechnej równości – nawet z niewolnikami. Wzajemnie obdarowywano się prezentami.

Na nocnym niebie przy sprzyjających warunkach możemy zaobserwować planetę nazwaną na cześć boga Saturna. Jest to najdalsza z planet, którą można dostrzec okiem nieuzbrojonym w teleskop.

Przy bardzo sprzyjających okolicznościach w ustawieniu planet udaje się gołym okiem dostrzec planetę Uran – jeszcze dalszą od Saturna.

Dzięki nowoczesnemu statkowi kosmicznemu odbyliśmy bezpieczną i niezbyt długą podróż w okolice tej planety. To olbrzym tylko niewiele mniejszy od Jowisza. Ma średnicę wynoszącą około 120 tysięcy km i masę aż 95,2 razy większą od masy Ziemi. Promień jego orbity wynosi około 9,94 AU. Saturn pędzi po swojej orbicie z szybkością 9,7 km/s, a jeden obieg wokół Słońca trwa 29,45 lat ziemskich. Podobnie jak Jowisz, szybko wiruje wokół swej osi – z okresem 10 godz. i 39 min. Również jego budowa wewnętrzna jest podobna do tej, którą widzieliśmy już, odwiedzając Jowisza. Wokół skalistego jądra wielkości Ziemi znajduje się ciekły metaliczny wodór. Atmosfera planety składa się z wodoru, amoniaku, helu, etanu i innych gazów. Ponad gęstymi chmurami unosi się warstwa rozrzedzonego, krystalicznego amoniaku. Temperatura w górnych warstwach atmosfery wynosi około -180°C . Podobnie jak na Jowiszu, atmosfera jest niespokojna – występują silne wichry i liczne cyklony. Planeta ma też silne pole magnetyczne. Przy atmosferze często rozbłyskują potężne wyładowania i ukazują się rozległe pęki błyskawic. Z Ziemi poprzez lunetę można dostrzec okazałe pierścienie otaczające Saturna. Gdy już jesteśmy blisko, ukazuje się nam niezwykle widok. W jednej płaszczyźnie planeta otoczona jest szerokim pasem drobnych brył skalistych i lodowych. To jakby mikroksiężyce okrążające planetę. W tym szerokim pasie są przerwy, więc jest on widoczny jako zbiór wielu wąskich pierścieni. Zapewne piękny byłby widok, gdybyśmy przemieszczali się pod pierścieniami, a po drugiej ich stronie widoczne by było odległe Słońce. Promienie słoneczne przedzierająby się poprzez szczeliny pomiędzy bryłkami skał i lodu. Będąc w ruchu, widzielibyśmy efekt szybkiego mrugania światła słonecznego, a czasem zaiskrzyłyby bryłki lodowe. To piękne otoczenie Saturna jest jeszcze wzbogacone licznym orszakiem księżyców. Dotąd wiadomo, że Saturn ma ich najwięcej – bo aż około 82.

Saturna i jego otoczenie badały sondy kosmiczne Voyager 1 oraz Cassini. Bardzo unowocześniona i bogato wyposażona w aparaty sonda Cassini wystartowała z Ziemi w 1997 roku i po 7 latach dotarła do przestrzeni otaczającej Saturna. Przez dłuższy czas jej aparaty badały planetę, pierścienie

oraz księżyce. Niezwykle interesujące były badania Tytana, największego z księżyców, o średnicy 5150 km – większego od planety Merkury. Krąży on wokół Saturna w odległości 1,22 mln km z szybkością 5,6 km/s i w okresie 15,94 dni ziemskich. Okazało się, że Tytan otoczony jest pomarańczową mgłą, poprzez którą nie widać jego powierzchni. W styczniu 2005 roku od sondy oddzielił się lądowik o nazwie Huygens, by wylądować na Tytanie. Wszedł w atmosferę Tytana z szybkością 1600 km/h (444 m/s). Na wysokości około 180 km rozłożyły się hamujące spadochrony, i po 19 minutach szybkość spadła do 600 km/h. Wkrótce rozłożył się największy, trzymetrowy spadochron, skutecznie zmniejszając szybkość. Wreszcie lądowik bezpiecznie osiadł na powierzchni Tytana. Zakładamy, że my wylądowaliśmy tam w taki sam sposób. Nie wychodzimy z lądownika, jeśli jeszcze nie znamy szczegółów dotyczących klimatu oraz powierzchni. Księżyc ten ma skaliste jądro zawierające też substancje promieniotwórcze. Skalista skorupa pokryta jest lodem wodnym i metanowym. Kraterów jest niewiele. Pomiędzy skorupą a jądrem znajduje się duży ocean wody, głęboki na setki kilometrów. Powierzchnia jest gładka i lekko falista, z niewielkimi wzgórzami. Grunt składa się ze skał i metanowego lodu. Przezrzystość atmosfery niewielka. Z powierzchni księżycyca nie widać gwiazd. Krajobraz tonie w gęstym półmroku. Ale atmosfera ma też swój urok. Gdy podczas lądowania byliśmy na wysokości powyżej 80 km, atmosfera miała postać fioletowej mgły. Niżej, pomiędzy 80 km a 60 km, mgła stała się biała. Poniżej atmosfera ma barwę pomarańczową. Na wysokości około 20 km unoszą się metanowe chmury. Atmosfera składa się głównie z azotu, 85% (na Ziemi 77%), zawiera też 12% argonu i nieco innych gazów. Ciśnienie atmosferyczne wynosi 1500 hPa, a więc jest około 1,5 raza większe niż normalne, na Ziemi. Temperatura na powierzchni to około minus 170°C . Znajdujemy się na dużym, nieco jaśniejszym, obszarze powierzchni, wielkości ziemskiej Australii. Ta kraina została nazwana Xanadu. Lecz oto ożywiły się dwa niewielkie wulkany. Wyrzuciły parę wodną oraz mieszaninę wody i amoniaku. To wszystko szybko zamarza i opada na powierzchnię. Wkrótce przybyły gęste chmury, które obdarowały nas metanowym deszczem obmywającym lądownik. Pomarańczową atmosferę rozcinają ciemne gęste kreski opadających kropli amoniaku i staje się ona jakby przybrudzona. Widoczność zrobiła się jeszcze słabsza. Niedaleko od nas znajdują się dwa duże jeziora: jedno ma długość 20 km, a drugie 25 km. To jeziora ciekłego metanu. Rzeczką i strumykami do jezior spływa metan. Kojarzymy to sobie z ziemskim obiegiem wody. I byłoby tu wspaniale, gdyby to była woda i było ciepło. Metan paruje z jezior na półkuli, gdzie jest lato, i opada z chmur na półkuli zimowej. Od czasu do czasu widać błyskawicę. Jeśli dla klimatu Tytana tak duże znaczenie ma obieg metanu, to może też istnieją jakieś formy choćby prymitywnego życia. Źródłem metanu mogą być bakterie metanowe.

Na harfie Saturna promienie drgają
 Rzucając nuty jaskrawe.
 Budują boską oktawę,
 Niebiańską harmonią tak zgodnie grają.
 Oto przed nami wulkanem strzeliła
 Para z głębin księżycza;
 Wielkością swoją zachwyca,
 Czarną toń nieba i Saturna okryła,
 W baldachim się rozłożyła.
 Miliardy kuleczek lodu,
 Miliardy płatków śniegu
 Spadają i przestrzeń bielą,
 Przed nami dywanik ścielą.
 A poprzez tę przestrzeń muzyka płynie
 – Z harfy Saturna – ciche symfonie.
 Opadła kotara, niebo jest czarne
 W nim przestrzeń, której nikt nie
 ogarnie.

Wracamy do naszej błękitnej planety.

Obserwacje wykazały, że powierzchnia księżycza zmienia swoje położenie i dryfuje powoli po wodnym oceanie. Lądownik Huygens pozostał na Tytanie. Lecz my wyobrażamy sobie start lądownika z nami i przelot przez atmosferę. Najpierw wokół lądownika mamy pomarańczową otoczkę, która jaśniej i przechodzi w prawie białą mgłę. Później otacza nas mgła fioletowa i wreszcie jesteście ponad atmosferą. Oddalając się od Tytana, mijamy inny księżyc – Enceladus, o średnicy około 500 km. Ciężar człowieka tutaj byłby równy ciężarowi tabliczki czekolady na Ziemi. Księżyc ten jest biały niczym duża śniegowa kula. Na gładkiej powierzchni jest mało kraterów. We wnętrzu księżycy pływy ogrzewają wodę i wzrasta tam ciśnienie. Co pewien czas spod powierzchni wystrzeliwuje w górę fontanna wody, jej krople szybko zamarzają. Zanim odleciemy na Ziemię, obejrzyjmy to piękne widowisko na tle z pierścieniami Saturna.

Wracamy do naszej błękitnej planety.

Mapa skarbów

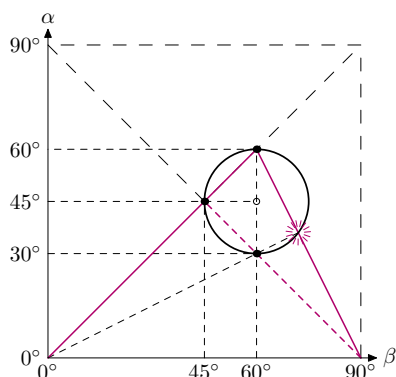
Piotr PIKUL*

*Doktorant, Instytut Matematyki,
 Uniwersytet Jagielloński

W moim poprzednim artykule (*Jak wyznaczyć najbardziej dowolny trójkąt?*, Δ_{21}^{06}) wspomniałem o *mapie zbioru wszystkich trójkątów*. Właściwie to o dwóch różnych jej wersjach, ale dziś chciałbym powrócić do „tej drugiej”, na której punktowi (β, α) odpowiada trójkąt o miarach kątów $\alpha \leq \beta \leq 180^\circ - \alpha - \beta$. Fakt, że interesują nas tylko dodatnie miary kątów, pozwala (poprzez przeanalizowanie wszystkich wymaganych nierówności liniowych) ustalić, że mapa ta ma kształt trójkąta o wierzchołkach $(0^\circ, 0^\circ)$, $(90^\circ, 0^\circ)$ oraz $(60^\circ, 60^\circ)$.

Jak się okazuje, dzięki takiej mapie można znaleźć nieoczekiwany „skarb”!

W tekście podaję współrzędne trójkątów na mapie, czyli miary dwóch najostriejszych kątów.



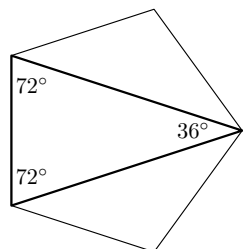
Nanieśmy na nią trzy „najsłynniejsze” trójkąty, znane z kart szkolnych podręczników. Chodzi oczywiście o trójkąt równoboczny $(60^\circ, 60^\circ)$, prostokątny równoramienny $(45^\circ, 45^\circ)$ oraz trójkąt „30–60–90” $(60^\circ, 30^\circ)$. Na razie nic ciekawego się nie wydarzyło, ale łatwo zauważyć, że środkiem okręgu przechodzącego przez wspomniane punkty-trójkąty jest punkt $(60^\circ, 45^\circ)$, który reprezentuje jeden z *najbardziej dowolnych trójkątów*!

To jednak nie koniec. Gdy patrzymy na wspomniany okrąg, w oczy rzuca się punkt jego przecięcia z prawą krawędzią mapy. Oznacza on pewien trójkąt równoramienny, który postaramy się zidentyfikować.

Łatwo zauważyć, że punkt $(60^\circ, 30^\circ)$ stanowi ortocentrum mapy. Wobec tego, spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka $(0^\circ, 0^\circ)$ leży na okręgu o średnicy $(60^\circ, 60^\circ) - (60^\circ, 30^\circ)$. Wysokość ta ma oczywiście równanie $\beta = 2\alpha$, co oznacza, że kąt przy podstawie poszukiwanego trójkąta równoramiennego jest dokładnie dwukrotnie większy od kąta w wierzchołku. Ten prosty wymóg już jednoznacznie określa wszystkie miary kątów: $72^\circ, 36^\circ, 72^\circ$. Są one w świecie matematycznym dobrze znane, a legitymujący się nimi wielokąt nazywamy *złotym trójkątem*.

Już samo *złoto* w nazwie mogłoby wystarczyć do odtrąbienia znalezienia skarbu, ale pozwolę sobie jeszcze na dodatkowe dwa zdania podkreślające doniosłość znaleziska. Ostatecznie *nie wszystko złoto, co się świeci*. Nawet jeśli Czytelnik dotąd ze wspomnianym trójkątem się nie zetknął, to sądzę, że *złota liczba* $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$, będąca stosunkiem długości boków złotego trójkąta (zachęcam do zmierzenia się z wyznaczeniem tego stosunku – nie jest to wcale takie trudne), jest już lepiej znana. Niemniej niekończące się opowieści o złotych podziałach, antycznych kanonach piękna, złotych prostokątach, liczbach Fibonacciego, mnożących się królikach, pszczelich drzewach genealogicznych czy nawet *zwykłym* pięciokącie foremnym pozwolę sobie tutaj pominąć. Niejednokrotnie na łamach *Delty* podobne tematy bywały poruszane. Teraz do bogatej kolekcji ciekawostek związanych ze złotą liczbą dochodzi fakt, że ostrokątny trójkąt równoramienny o tak zadanym stosunku ramion do podstawy leży (oczywiście nie sam trójkąt, ale reprezentujący go punkt) na jednym okręgu z trzema innymi sławnymi punktami świata trójkątów.

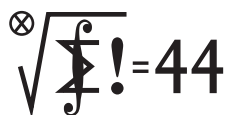
Niby taka prosta mapa, a wskazuje drogę do całkiem ciekawego „skarbu”.



Złoty trójkąt w pięciokącie foremnym

Czytelnik Zaznajomiony z „tą pierwszą” mapą zbioru trójkątów zechce na niej powtórzyć opisane tu poszukiwania. Dają inny rezultat, ale jaki?

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2022

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl

Zadania z matematyki nr 837, 838

Redaguje Marcin E. KUCZMA

837. Wewnątrz wypukłego n -kąta $A_1A_2 \dots A_n$ leży taki punkt P , że każdy z trójkątów PA_iA_j jest równoramienny ($1 \leq i < j \leq n$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P ?

838. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb całkowitych x, y, z większych od 1, spełniających równanie

$$x^4 + y^4 = z^2 + 1.$$

Zadanie 838 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

Przypominamy treść zadań:

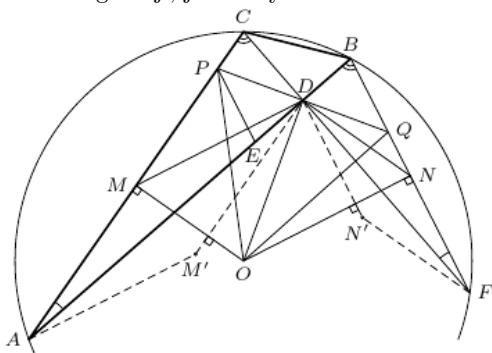
829. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle A < \sphericalangle B < 90^\circ < \sphericalangle C$, jest wpisany w okrąg o środku O ; odcinek CD jest wysokością. Punkt E jest symetryczny do B względem D ; punkt M jest środkiem boku AC . Okrąg przechodzący przez O, D, M przecina prostą AC w punktach M i P . Udowodnić, że trójkąty DCP i DEP mają równe promienie okręgów opisanych.

830. Znaleźć wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych x, y, z , spełniające równanie

$$\arctg x + \arctg y + \arctg z = \frac{\pi}{4}.$$

829. Należy udowodnić, że $\sphericalangle DCP = \sphericalangle DEP$; teza zadania jest równoważnym (trochę wymyślnym) przeformułowaniem tej równości.

Niech prosta CD przecina okrąg ABC ponownie w punkcie F ; niech N będzie środkiem odcinka BF , a Q – punktem przecięcia BF z prostą PD . Podane założenia o kątach trójkąta ABC uzasadniają układ rozważanych punktów w konfiguracji, jak na rysunku.



Równoramienne trójkąty DMA i DNF są podobne, bo ich kąty ostre MAD i NFD są kątami wpisanymi w okrąg ABC , opartymi na łuku BC . Uzupełniamy te trójkąty do rombów $AMDM'$ i $FNDN'$; widzimy cztery trójkąty podobne; połączymy je w pary: $\triangle DMA \sim \triangle DN'F$, $\triangle DNF \sim \triangle DM'A$. W obu tych parach podstawy AD

i FD są prostopadłe; stąd (i z usytuowania punktów M, N', N, M' względem prostych AD, FD) wynika, że $DM \perp DN'$, $DN \perp DM'$.

Jednocześnie $ON \perp DN'$ (bo $ON \perp FN$, a $FNDN'$ jest rombem), i podobnie $OM \perp DM'$. W połączeniu z wcześniejszymi relacjami prostopadłości znaczy to, że $DM \parallel ON$, $DN \parallel OM$; czworokąt $DMON$ jest równoległobokiem.

Okrąg przechodzący przez punkty O, D, M, P (o którym mowa w treści zadania) ma średnicę OP , bo kąt OMP jest prosty. W takim razie również kąt ODP jest prosty. Tak więc czworokąt $DONQ$ ma kąty proste przy wierzchołkach D, N , czyli ma okrąg opisany o średnicy OQ . Te dwa okręgi są opisane (odpowiednio) na trójkątach DMO i OND , które są przystające, skoro $DMON$ to równoległobok. Mają zatem równe średnice: $OP = OQ$. [Czytelnicy znający twierdzenie o motylku (the Butterfly Theorem) widzą zapewne, że ostatnia równość także z niego wynika.]

W równoramiennej trójkącie POQ odcinek OD jest wysokością, więc i środkową: $DP = DQ$. Ponadto $DE = DB$ (z założenia) oraz $\sphericalangle EDP = \sphericalangle BDQ$ (kąty wierzchołkowe), i w konsekwencji trójkąty EDP i BDQ są przystające. Stąd $\sphericalangle DEP = \sphericalangle DBQ$. Pozostaje zauważyć, że kąty DBQ i DCP to kąty wpisane oparte na łuku AF . Dostajemy równość $\sphericalangle DCP = \sphericalangle DEP$, którą chcieliśmy udowodnić.

830. Przyjmijmy, że liczby x, y, z spełniają podane warunki oraz (bez straty ogólności) $x \geq y \geq z$. Liczby $\alpha = \arctg x$, $\beta = \arctg y$, $\gamma = \arctg z$ są dodatnie, ich suma wynosi $\pi/4$, więc $\alpha \leq \beta \leq \gamma < \pi/4$; stąd $z = \ctg \gamma > 1$. Ponadto $\gamma \geq (\alpha + \beta + \gamma)/3$, zatem $z \leq \ctg(\pi/12) = 2 + \sqrt{3} < 4$. Tak więc $z = 2$ lub $z = 3$.

Równanie $\alpha + \beta + \gamma = \pi/4$ przekształcamy równoważnie do postaci:

$$\ctg(\alpha + \beta) = \ctg\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right);$$

$$\frac{\ctg \alpha \ctg \beta - 1}{\ctg \alpha + \ctg \beta} = \frac{-\ctg \frac{\pi}{4} \ctg \gamma - 1}{\ctg \frac{\pi}{4} - \ctg \gamma};$$

$$\frac{xy - 1}{x + y} = \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Gdy $z = 2$, dostajemy równanie $xy - 1 = 3(x + y)$, czyli $(x - 3)(y - 3) = 10$, z rozwiązaniami $x = 13, y = 4$ oraz $x = 8, y = 5$. Gdy $z = 3$, mamy równanie $xy - 1 = 2(x + y)$, czyli $(x - 2)(y - 2) = 5$, z rozwiązaniem $x = 7, y = 3$ (wszystko przy założeniu $x \geq y \geq z$). Rozumowanie się odwraca, więc znalezione trójki (x, y, z) spełniają równanie wyjściowe.

Odpowiedź: $(x, y, z) = (13, 4, 2), (8, 5, 2), (7, 3, 3)$ oraz permutacje tych trójek.

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 722 ($WT = 1,63$) i 723 ($WT = 3,77$) z numeru 9/2021

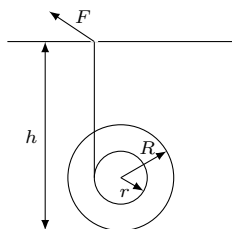
Konrad Kapcia	Poznań	1 - 42,51
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Sławomir Buć	Mystków	36,88
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Jacek Konieczny	Poznań	31,90
Ryszard Woźniak	Kraków	31,46
Ryszard Baniewicz	Włocławek	30,74
Tomasz Wietecha	Tarnów	15 - 28,11
Aleksander Surma	Myszków	4 - 27,75
Marian Łupieżowicz	Gliwice	2 - 25,85

Klub 44 F

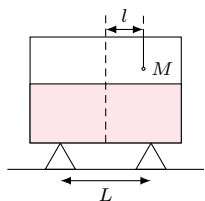


Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2022

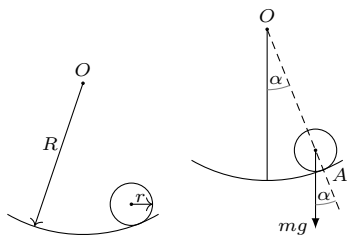
Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl



Rys. 1

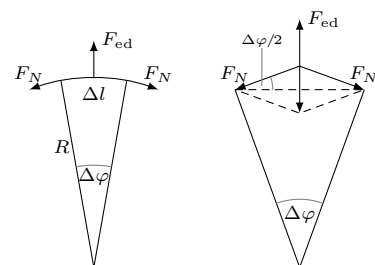


Rys. 2



Rys. 3

Rys. 4



Rys. 5

Rys. 6

727. Ponieważ długość zwojnicy jest dużo większa od jej średnicy, możemy przyjąć, że pole magnetyczne wewnątrz zwojnicy jest jednorodne, równoległe do osi zwojnicy i wartość wektora indukcji wynosi $B = \mu_0 NI/L$, a pole na zewnątrz zwojnicy jest zaniedbywalne. Powstaje pytanie: Jaka jest wartość wektora indukcji pola magnetycznego, w którym znajduje się pojedynczy zwoj? Pole zarówno po wewnętrznej, jak i zewnętrznej stronie zwoju jest superpozycją pola wytworzonego przez sam zwoj – oznaczmy jego wartość przez B_1 – oraz pozostałych $N - 1$ zwojów o wartości B_{N-1} . Wewnątrz zwojnicy $B_{N-1} + B_1 = B$, na zewnątrz $B_{N-1} - B_1 = 0$, stąd $B_{N-1} = \mu_0 NI/2L$.

Zadania z fizyki nr 734, 735

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

734. Na poziomym stole leży szpulka, na którą nawinięta jest cienka, nieważka, gładka nić. Promień zewnętrzny szpulki wynosi R , wewnętrzny r . Koniec nici przeciągnięty jest przez niewielki otwór znajdujący się na wysokości h nad powierzchnią stołu. W chwili początkowej szpulka jest nieruchoma, a nić pionowa (rys. 1). Koniec nici zaczynamy ciągnąć stałą siłą F i szpulka toczy się po stole bez poślizgu. Znaleźć maksymalną prędkość szpulki. Masa szpulki wynosi M . Należy przyjąć, że połowa tej masy skupiona jest na osi szpulki, a druga połowa rozłożona równomiernie na obwodzie zewnętrznym o promieniu R .

735. Prostokątne naczynie z wodą stoi na dwóch podporach symetrycznych względem osi naczynia i odległych od siebie o L . Nad wodą, na poprzeczce łączącej krawędzie naczynia, wisi na nici kawałek ołowiu o masie M , w odległości l od osi naczynia (rys. 2). Siły reakcji podpór wynoszą R_1 i R_2 , odpowiednio dla lewej i prawej podpory. Jakie będą te siły reakcji, gdy nić wydłużymy i ołów zanurzy się w wodzie? Gęstość ołowiu jest n razy większa od gęstości wody.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

Przypominamy treść zadań:

726. Cienka obręcz o promieniu r toczy się bez poślizgu po wewnętrznej powierzchni walca o promieniu R i wykonuje małe drgania wokół położenia równowagi (rys. 3). Znaleźć okres tych drgań.

727. W zwojnicy o liczbie zwojów N , długości L i promieniu $R \ll L$ płynie prąd o natężeniu I . Jaka jest wytrzymałość drutu, z którego zrobiono zwojnicę, skoro nie ulega ona rozerwaniu?

726. Ponieważ nie ma poślizgu przy toczeniu, możemy ruch obręczy potraktować jako czysty obrót wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez jej punkt styczności A z powierzchnią walca (rys. 4). Równanie tego ruchu obrotowego ma postać

$$(1) \quad I_A \varepsilon = -mgr \sin \alpha,$$

gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym, m masą obręczy, kąt α opisuje odchylenie środka obręczy od pionu. $I_A = 2mr^2$ jest momentem bezwładności obręczy względem osi przechodzącej przez punkt A . Ponieważ drgania są małe, możemy przybliżyć $\sin \alpha$ przez α , i równanie (1) przybiera postać

$$(2) \quad 2mr^2 \varepsilon + mgr \alpha = 0.$$

Środek obręczy porusza się po okręgu o promieniu $R - r$, stąd wartość jego przyspieszenia $a = (R - r)d^2 \alpha / dt^2$. Z drugiej strony $a = \varepsilon r$, bo nie ma poślizgu. Z porównania:

$$(3) \quad \varepsilon = \frac{(R - r)}{r} \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

Podstawiając (3) do (2), otrzymujemy

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{2(R - r)} \alpha = 0.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego częstość drgań $\omega = \sqrt{g/(2(R - r))}$. Szukany okres drgań

$$T = 2\pi \sqrt{2(R - r)/g}.$$

Indukcja pola, w którym znajduje się pojedynczy zwoj, jest połową indukcji pola w zwojnicy.

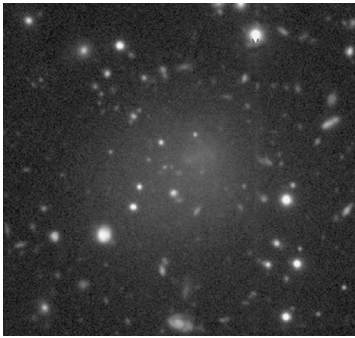
Na każdy niewielki element zwoju o długości $\Delta l = R \Delta \varphi$ (rys. 5), w którym płynie prąd o natężeniu I , działa siła elektrodynamiczna $\mathbf{F}_{ed} = I \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B}_{N-1}$ o wartości $F_{ed} = BI \Delta l / 2$, równoważona wypadkową sił F_N naprężenia drutu. Z rysunku 6 widać, że $F_{ed} / 2F_N = \Delta \varphi / 2$. Z porównania z poprzednim wzorem: $F_N = \mu_0 NI^2 R / 2L$.

Wytrzymałość drutu, czyli maksymalna siła jego naprężenia, spełnia nierówność:

$$W > \mu_0 NI^2 R / 2L.$$

Galaktyczna banicja

Galaktyki ultra-rozproszone, zaobserwowane po raz pierwszy w gromadzie galaktyk Coma w 2015 roku (!), charakteryzują się zawartością masy gwiazdowej typową dla galaktyk karłowatych, czyli $M_* < 10^9 M_\odot$. Oznacza to, że typowa UDG posiada 10–100 razy mniej gwiazd niż nasza galaktyka, jednak jej rozmiar jest porównywalny do rozmiarów Drogi Mlecznej, co daje jej niezwykle niską jasność powierzchniową.



Zdjęcie ultra-rozproszonej, izolowanej a równocześnie nieaktywnej gwiazdotwórczo galaktyki DGSAT I. Galaktyka ta została odkryta w roku 2016 (Martínez-Delgado et al., „The Astronomical Journal”, 151,4, 2016). Znajdujące się w tej galaktyce gwiazdy są tak bardzo oddalone od siebie, że w tle pomiędzy nimi można dostrzec odległe galaktyki. Źródło: Aaron Romanowsky/University of California Observatories/D. Martínez-Delgado/ARI.

Więcej na temat pochodzenia martwych, izolowanych galaktyk ultra-rozproszonych można znaleźć w artykule „Quiescent Ultra-diffuse galaxies in the field originating from backplash orbits”, José A. Benavides et al., Nature Astronomy, September, 2021.

Obserwacje astronomiczne sugerują, że galaktyki występują w szerokim zakresie kształtów, rozmiarów i kolorów. Istnieje jednak grupa galaktyk, których dostrzeżenie nawet za pomocą największych teleskopów jest nadzwyczaj trudne (po raz pierwszy zaobserwowano je dopiero w 2015 roku!) – są to galaktyki o bardzo niskiej jasności powierzchniowej, zwane galaktykami ultra-rozproszonymi (*Ultra-diffuse Galaxies*, UDGs).

Jak do tej pory, obserwacyjnie potwierdzono wyraźny podział w populacji UDG. W gęstych środowiskach galaktycznych, takich jak grupy i gromady galaktyk, UDG charakteryzują się wygaszonym procesem gwiazdotwórczym (produkują małe ilości gwiazd). Z drugiej strony, UDG obserwowane w pewnym odosobnieniu od innych galaktyk wykazują zwiększoną aktywność gwiazdotwórczą. Czy oznacza to, że środowisko (czyli sąsiedzi) ma główny i w zasadzie jedyny wpływ na aktywność ultra-rozproszonych galaktyk?

Ten logiczny, binarny podział na izolowane, ale aktywne gwiazdotwórczo ultra-rozproszone galaktyki i ich martwe odpowiedniki znajdujące się w gęstszym otoczeniu niestety okazał się błędny. Późniejsze dane obserwacyjne potwierdziły kilka przypadków izolowanych ultra-rozproszonych galaktyk, w których procesy gwiazdotwórcze już dawno ustały. Co ciekawe, odkrycie to jest sprzeczne z teoriami powstawania galaktyk, ponieważ aby gaz został usunięty z galaktyki i by przestały się w niej tworzyć gwiazdy, galaktyka powinna znajdować się w otoczeniu innych galaktyk. Jak więc wytłumaczyć te obserwacje?

Dzięki wykorzystaniu najnowszych symulacji kosmologicznych IllustrisTNG José A. Benavides, doktorant w Instytucie Astronomii Teoretycznej i Eksperymentalnej w Argentynie, przestudiował różne ścieżki ewolucji tych galaktyk i sprawdził ich parametry fizyczne. Okazuje się, że izolowane, aktywne galaktyki UDG były kilka miliardów lat wcześniej galaktykami-satelitami (czyli galaktykami znajdującymi się w obszarze halo ciemnej materii masywniejszej galaktyki), lecz zostały wyrzucone na bardzo odległą, eliptyczną orbitę i dziś wyglądają na odizolowane. Te martwe, odizolowane UDG mają jedną wspólną historię – wszystkie zdołały wydostać się z gęstego środowiska, ale w procesie tym utraciły zasoby gazu niezbędne do dalszego formowania gwiazd.

Zgodnie z analizą wykonaną przez zespół kierowany przez José A. Benavidesa wygaszone UDG mogą stanowić nawet 25% populacji ultra-rozproszonych galaktyk. Liczba ta jednak nie przekłada się na obserwacje, gdzie odsetek ten jest znacznie mniejszy. Najprawdopodobniej galaktyki te są zbyt ciemne, aby mogły być zaobserwowane przez dzisiejsze teleskopy.

Katarzyna MAŁEK

Niebo w marcu

Trzeci miesiąc roku wyróżnia się dniem równonocy, kiedy to na półkuli południowej kończy się astronomiczne lato, na północnej zaś – astronomiczna zima. W tym momencie Słońce przecina równik niebieski w drodze na północ, by przez kolejne pół roku pozostać na północnej półkuli nieba. Przecięcie równika niebieskiego nastąpi 20 marca o godzinie 16:33 naszego czasu. Niecały tydzień później, w nocy z 26 na 27 marca, nastąpi zmiana czasu z zimowego na letni. Należy pamiętać o przesunięciu wskazówek zegarków o godzinę do przodu. Oznacza to, że w ostatnich dniach miesiąca Słońce pokaże się nad widnokresem około 6:30 i schowa się zań po godzinie 19. W dalszym ciągu szybko wydłuża się czas przebywania Słońca nad widnokresem. Ostatniego dnia marca od wschodu do zachodu Słońca w środkowej Polsce minie 13 godzin.

Tegoroczny marzec okazuje się miesiącem niekorzystnym do obserwacji planet Układu Słonecznego. Najlepsze warunki obserwacyjne ma planeta **Uran**, która zbliży się do koniunktury ze Słońcem na początku maja. W pierwszej

połowie marca na początku nocy astronomicznej (około 19:30 czasu zimowego) planeta wznosi się na wysokości 30° ponad zachodnią część nieboskłonu, świecąc z jasnością $+5,9^m$. Niestety Uran szybko zbliży się do widnokregu, gdyż do zmniejszającej się odległości kątowej od Słońca dojdzie coraz później zapadający zmierzch. W efekcie pod koniec miesiąca na początku nocy astronomicznej (21:15 czasu letniego) planeta znajdzie się już pod linią horyzontu. Dlatego obserwacje Urana są możliwe tylko w pierwszej części miesiąca, potem planeta zniknie w zorzy wieczornej, a po majowej koniunktury przeniesie się na niebo poranne. Jednak tam wiosną nachylenie ekliptyki do widnokregu jest niekorzystne i planeta przebiega przez zorzę poranną dopiero w drugiej połowie lipca, gdy Słońce zacznie ponownie szybko kierować się na południe.

Pozostałe planety Układu Słonecznego z dużych północnych szerokości geograficznych w marcu widoczne są słabo albo wcale. **Jowisz** 5 dnia miesiąca przejdzie przez koniunkturę ze Słońcem. Już 8 dni później to

samo uczyni **Neptun**. Stąd obie planety są w marcu niewidoczne. Jowisz znacznie przebiegać się przez zorzę poranną od maja. Na możliwość dostrzeżenia znacznie słabiej świecącego Neptuna trzeba poczekać aż do lipca.

Reszta planet przebywa całkiem daleko na zachód od Słońca, co oznacza widoczność poranną. **Saturn** jest miesiąc po spotkaniu ze Słońcem, od analogicznego spotkania **Marsa** ze Słońcem natomiast mija właśnie 5 miesięcy. Planeta **Mercury** w drugiej połowie lutego osiągnęła daleką maksymalną elongację zachodnią (26°), **Wenus** zaś 20 marca przejdzie przez swoją maksymalną elongację zachodnią, oddalając się wtedy od Słońca na ponad 46° . Niestety wszystkie te planety oglądane z półkuli północnej padną ofiarą małego nachylenia ekliptyki do horyzontu. Za to bardzo dobrze widoczne są z półkuli południowej, gdzie właśnie kończy się lato i ekliptyka rano tworzy duży kąt z widnokregiem.

Z krajów położonych tak daleko na północ od równika jak Polska widoczne są w zasadzie tylko planety Wenus i Mars. Saturn znacznie wylaniać się z zorzy porannej dopiero pod koniec miesiąca. Dwie najbliższe sąsiadki Ziemi w marcu utworzą dość ciasną parę o separacji 5° na początku i na końcu miesiąca i około 4° w jego środku, z największym zbliżeniem między nimi 16 marca. Oczywiście **Wenus** przez cały czas pozostanie wyraźnie lepiej widoczna, na co złoży się nie tylko jej znacznie większy blask, ale także położenie kilka stopni na północ od ekliptyki. W marcu jasność Wenus spadnie z $-4,4^m$ na początku miesiąca do $-4,2^m$ pod jego koniec. W tym czasie jej średnica kątowna spadnie z $31''$ do $22''$, faza urośnie zaś z 36% do 55%.

Planeta **Mars** jest wciąż daleko od Ziemi i jej wygląd zmienia się znacznie wolniej. Średnica kątowna jej tarczy przez cały miesiąc utrzyma się na poziomie $5''$, troszkę wzrośnie jej jasność, od $+1,3^m$ na początku miesiąca do $+1^m$ pod koniec. Na początku świtu cywilnego (Słońce 6° pod widnokregiem, co oznacza mniej więcej godzinę 5 na początku miesiąca i również 5 pod jego koniec, ale już po zmianie czasu na letni) Wenus zajmuje pozycję na wysokości niewiele ponad 10° po południowo-wschodniej stronie nieboskłonu, Mars natomiast około $4-5$ stopni niżej. W ostatnich dniach marca obie planety wzniosą się na podobną wysokość około 6° , a dodatkowo między nimi znajdzie się planeta **Saturn**, która świeci z jasnością $+0,7^m$, a zatem jest wyraźnie jaśniejsza od Marsa. W tych dniach średnica tarczy Saturna przekracza $16''$, ale przy tak niskim położeniu nad widnokregiem dostrzeżenie pierścieni uda się tylko przy wyjątkowo stabilnej atmosferze. Na odnalezienie Tytana, największego i najjaśniejszego księżycy Saturna, na razie nie ma szans. Szóstej planety Układu Słonecznego początkowo należy szukać pod Wenus, a w pierwszych dniach kwietnia Saturn przejdzie między dwoma najbliższymi Ziemi krążącymi planetami Układu Słonecznego, by 5 dnia miesiąca minąć Marsa w odległości zaledwie $18'$.

Podobnie jak w lutym, Księżyc okaże się ozdobą nocnego nieba szczególnie w pierwszej połowie miesiąca. Marzec zacznie się od nowiu naturalnego satelity Ziemi – 2 marca i w kolejnych dniach, dzięki korzystnemu nachyleniu ekliptyki do zachodniego widnokregu, wieczorem Księżyc szybko nabierze wysokości, świecąc długo po zmierzchu mimo małej fazy. Niestety tym razem

raczej nie uda się dostrzec Księżyca na drugi dzień po nowiu, ponieważ wędruje on daleko na południe od ekliptyki i zejdzie z nieboskłonu niecałą godzinę po Słońcu. Bardzo ładnie za to Księżyc zaprezentuje się w kolejnych dniach, ukazując w pełnej krasie tzw. światło popielate. I kwadra przypada 10 marca i do tego czasu Księżyc przejdzie przez pogranicze gwiazdozbiorów Ryb, Wieloryba i Barana, a następnie przetnie gwiazdozbiór Byka. Godzinę po zachodzie Słońca 4 marca Srebrny Glob zajmie pozycję na wysokości około 10° , a jego sierp pogrubi się do tego czasu do 5%. Dobę później faza Księżyca urośnie do 10%, a jego wysokość nad widnokregiem zwiększy się do 20° .

W dniach 6 i 7 marca Księżyc minie Urana, mając tarczę oświetloną odpowiednio w 17 i 25%, zwiększając dodatkowo wysokość nad horyzontem o następne 10° . W Polsce za każdym razem do planety zabraknie Księżycowi kilku stopni, natomiast z okolic Wysp Fidzi, Nowej Kaledonii i Nowej Zelandii da się dostrzec zakrycie Urana przez Księżyc. Obecnie planeta **Uran** znajduje się zaledwie $3'$ dalej od ekliptyki niż opisywana miesiąc temu gwiazda Zuben Egenubi, a sezon jej zakryć trwa jeszcze krócej, niecałe 13 miesięcy, od lutego 2022 do lutego 2023. W tym czasie Księżyc zdoła przesłonić Urana 15 razy. Tym razem Europa ma jednak więcej szczęścia, ponieważ z naszego kontynentu da się dostrzec aż 5 z nich. Niestety dwa zakrycia zdarzą się w ciągu dnia. Pas widoczności pozostałych trzech zjawisk (14 września, 5 grudnia 2022 r. oraz 1 stycznia 2023 r.) na szczęście przebiega przez Polskę. Granica zakrycia styczniowego przecina północną część naszego kraju, stąd w Polsce dojdzie wtedy do brzegowego zakrycia Urana przez Księżyc.

Kolejne trzy noce Srebrny Glob ma zarezerwowane na odwiedzin gwiazdozbioru Byka. W nocy z 7 na 8 marca Księżyc przejdzie 4° na południe od Plejad, mając tarczę oświetloną w 34%. Dobę później Księżyc przejdzie 6° na północ od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka, 10 marca zaś podzielona na pół księżycowa tarcza dotrze na 3° do El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy tej konstelacji.

Środkową część marca całkowicie zdominuje silny blask Księżyca bliskiego pełni. Tutaj warto odnotować zbliżenie Księżyca w fazie 71% do Polluksa 12 marca oraz do Regulusa i η Leonis trzy dni później. Wtedy jednak tarcza Księżyca pokaże fazę 95%. Pełnia przypada 18 marca rano, a tej nocy Srebrny Glob przejdzie 8° na południe od Deneboli, drugiej co do jasności gwiazdy Lwa. Pierwszej wiosennej nocy Księżyc przejdzie 4° na północ od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, by trzy noce później dotrzeć już do jasných gwiazd Skorpiona.

Księżyc osiągnie ostatnią kwadrę 25 marca, docierając tego dnia do środka zodiakalnej części Strzelca. Niestety wtedy Srebrny Glob znajdzie się kilka stopni na południe od ekliptyki, co sprawi, że w większej części Polski jego wysokość podczas górowania nie przekroczy 10° . Spowoduje to, że już cztery dni przed nowiem, 1 kwietnia, zniknie on w zorzy porannej. A szkoda, gdyż w dniach 28 i 29 marca Księżyc odwiedzi trójkę wspomnianych wyżej planet: Mars, Wenus i Saturn. Przy czym Saturna należy szukać 2° pod Wenus.

Ariel MAJCHER

Organoidy – nowe narzędzie medycyny

Organoidy to kolejna wersja realizacji podstawowej potrzeby medycyny: lepszego, głębszego poznania człowieka, jego fizjologii i procesów patologicznych. Lekarzowi badającemu pacjenta przychodzą z pomocą naukowcy dysponujący różnymi metodami badawczymi: może to być biochemia w próbkach, mogą też być to organizmy modelowe. Wybór organizmów modelowych nie powinien budzić etycznych wątpliwości, a w określonym zakresie powinny one przypominać organizm człowieka. Lata badań pozwoliły na wyodrębnienie:

- drożdży *S. cerevisiae* (najwięcej osiągnięć z badań genetycznych),
- nicienia wolno żyjącego w glebie, *C. elegans* (poznanie mechanizmów kontrolowanej śmierci komórki, apoptozy, także działania układu nerwowego),
- rybki z gatunku danio przegowany, *D. rerio* (krótki cykl życiowy, badania etapów rozwoju kręgowców),
- muszki *D. melanogaster* (mutageneza),
- myszy domowej *M. musculus* (bardzo podobne do ludzkich geny i zespoły genów, choroby genetyczne, terapie).

Ograniczeniem takich badań jest często znaczna odległość ewolucyjna między człowiekiem a danym organizmem modelowym. Badania te wiążą się także z koniecznością budowania ukierunkowanych standardowych laboratoriów – różnych dla różnych modeli. Nic więc dziwnego, że trwają poszukiwania doskonalszych narzędzi doświadczalnych dla medycyny, jedną z takich propozycji stała się konstrukcja tworów nazwanych organoidami (2010). Nie będąc organami, są jednak bliskie strukturą i funkcją docelowego ludzkiego organu. Szybko i na standaryzowanej drodze można ich dużo nagromadzić.

Organoid to trójwymiarowy (3D) zespół komórek określonej tkanki, o specyficznym dla tej tkanki sposobie „życia”. Konstrukcję organoidu zaczyna się od komórek macierzystych (zarodkowych albo wydzielonych z dojrzałych tkanek) lub też macierzystych indukowanych. Takie komórki, hodowane w zdefiniowanych pożywkach, z dodatkami biologicznie aktywnych substancji, zdolne są do samoorganizacji i częściowego uporządkowania strukturalnego do postaci zadanej prawidłowej tkanki. Rozmiary? No cóż, na razie skromne – milimetrowe. Nauczono się powoływać do istnienia, a także przechowywać w bankach organoidy ludzkie wywiedzione z jelit, żołądka, siatkówki, gruczołu mlecznego, ślinianki, nerek, wątroby, płuc, trzustki, prostaty, pęcherza czy neuronów. Istnieją organoidy embrionalne, które można utworzyć z komórek macierzystych wczesnych stadiów zarodkowych człowieka (blastocysta). Te ostatnie, choć wyjątkowo pobudzające i fantazję, i pomysły doświadczalne, ograniczane są ze względów etycznych, i niewiele o nich wiadomo. NIE SĄ to malutkie zarodki ludzkie, choć wykazują ich pewne cechy charakterystyczne.

Oczywiście zaraz za embrionalnymi hodowlami wyjątkowym zainteresowaniem cieszą się różne wersje organoidów neuronalnych. Odpowiednio hodowane wykazują np. cechy kory mózgowej – warstwowość oraz aktywność elektryczną. Ta ostatnia przejawia się spontanicznie i w różnych momentach hodowli w postaci coraz bardziej złożonych oscylacji. Najciekawsza

obserwacja mówi, że oscylacje te przypominają widoczną w analizie EEG elektryczną aktywność mózgow wczesniaków, w dodatku starzejące się organoidy coraz bardziej przypominają cechy mózgow coraz starszych dzieci. I znowu należy wyraźnie podkreślić, że takie organoidy NIE SĄ małymi mózgami, są jedynie grupą neuronów (1 miliard = 1/4 liczby neuronów mózgu myszy) niezwiązaną z żadnym ciałem, ani nie są wyposażone w komunikację z żadnymi narządami zmysłów.

Nowym narzędziem w tych badaniach jest tworzenie układu różnych organoidów komunikujących się ze sobą za pośrednictwem przepływającej przez kolejne układy hodowlane cieczy, reprezentującej osocze krwi. Takie „ciało na płytce” opisano w 2020 roku. Składa się ono z sześciu organoidów odpowiadających wątrobie, sercu, płuc, naczyniom krwionośnym, mózgowi i jądru.

Ten stan wiedzy pozwala na zadanie pytania: I co dalej? Tematyka ta jest „delikatna” w różnych aspektach, więc też delikatnie formułuje się zadania na przyszłość, takie jak badania toksykologiczne i farmaceutyczne. Organoidy można tworzyć z indukowanych komórek macierzystych DANEGO pacjenta, a więc podjąć analizę indywidualną („twoje ciało na płytce”) jego reakcji na obce substancje. Można też je tworzyć z komórek macierzystych uprzednio poddanych mutagenezie metodą CRISPR/Cas – w celu poznania mechanizmów i perspektyw terapii chorób genetycznych. Szczególnie korzystne okazały się badania w zakresie chorób zakaźnych, zwłaszcza zakażeń wirusowych – warto wiedzieć, że użyto różnorodnych organoidów, przygotowując szczepionki przeciw pandemicznemu wirusowi SARS-Cov-2. Organoidy są także modelem w badaniach nowotworów i potencjalnych leków przeciwnowotworowych.

System organoidów, choć dopiero startuje w molekularnej biologii, już dziś przyczynia się do rozumienia indywidualnego rozwoju człowieka, pozwalając na zmniejszenie zakresu stosowania modeli zwierzęcych.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



Ekstremalnie!

Bartłomiej BZDEGA

Zajmiemy się zadaniami z kombinatoryki, w których należy wyznaczyć największą liczbę x spełniającą zadane warunki. Chcemy, powiedzmy, dowieść, że poszukiwaną liczbą jest x_0 . Rozwiązanie zadania musi składać się z dwóch części:

- (1) uzasadnienie, że liczba x_0 spełnia zadane warunki;
- (2) wykazanie, że liczby $x > x_0$ tych warunków nie spełniają.

Ale skąd wziąć x_0 ? Zazwyczaj jedna z powyższych części – ta konstruktywna – jest nieco łatwiejsza od drugiej, co daje możliwość odgadnięcia tej liczby. Na ogół jest to część (1), choć zdarzają się wyjątki. Próby przeprowadzenia dowodu drugiej z części dokonują weryfikacji.

Analogicznie rozwiązuje się zadania polegające na znalezieniu najmniejszej liczby spełniającej dane warunki – jedyna różnica polega na tym, że w punkcie (2) wykazujemy, że liczby $x < x_0$ tych warunków nie spełniają.

Aby zademonstrować metodę, rozwiążemy następujące zadanie.

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Ze zbioru $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$ należy wybrać m liczb, ale tak, by żadna wybrana liczba nie dzieliła innej. Jaka jest największa liczba m , dla której jest to możliwe?

Rozwiązanie. Wykażemy, że największą taką liczbą jest $m = n$.

- (1) W n -elementowym zbiorze $B = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\} \subset A$ żadna z liczb nie jest dzielnikiem innej, bo jeśli $a, b \in B$ i $a < b$, to $a < b < 2a$.
- (2) Dla każdej liczby ze zbioru A rozważmy jej największy dzielnik nieparzysty. Może nim być jedna z liczb: $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$. Możliwości jest n , więc jeśli wybierzemy więcej niż n liczb ze zbioru A , to pewne dwie z nich – nazwijmy je a i b – będą miały ten sam największy nieparzysty dzielnik d . Pozostaje zauważyć, że wtedy $a = d \cdot 2^{t_1}$ i $b = d \cdot 2^{t_2}$ dla pewnych liczb całkowitych $t_1, t_2 \geq 0$, więc mniejsza z liczb a, b jest dzielnikiem większej.

Zadania

1. Niech A oznacza zbiór $4n^2$ punktów płaszczyzny, których obie współrzędne należą do zbioru $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$, oraz niech $O = (0, 0)$. Niektóre z tych punktów pokolorowano na czerwono, z zachowaniem następującego warunku: jeśli punkty P i Q są czerwone, to $|\sphericalangle POQ| \neq 90^\circ$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów czerwonych.
2. Niech $m, n \geq 2$ będą liczbami naturalnymi. Jaką największą liczbę wież można ustawić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, żeby każda była atakowana przez co najwyżej dwie inne?
3. W układzie współrzędnych pomalowano na niebiesko wszystkie punkty o obu współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Chcemy narysować pewną liczbę prostych w taki sposób, by przez każdy niebieski punkt przechodziła przynajmniej jedna prosta, a ponadto żadna narysowana prosta nie może być równoległa do osi układu współrzędnych. Jaka jest, w zależności od $n \geq 2$, najmniejsza liczba potrzebnych prostych?
4. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech $A \subset \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ oraz $|A| = k$. Każdy podzbiór zbioru A ma sumę elementów różną od k . W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k , dla której jest to możliwe.
5. Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią n . Permutacje (a_1, a_2, \dots, a_n) i (b_1, b_2, \dots, b_n) ciągu $(1, 2, \dots, n)$ nazwiemy *podobnymi*, jeśli $a_i = b_i$ dla przynajmniej jednego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k , dla której istnieje k różnych permutacji ciągu $(1, 2, \dots, n)$, z których każde dwie są podobne.
6. W zależności od liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć największą liczbę k o następującej własności: dla każdego podziału kwadratu o boku $2n$ na prostokąty o wymiarach 2×1 istnieje prosta, która przecina co najmniej k prostokątów (prostokąt uznajemy za przecięty, jeśli prosta dzieli go na dwie części o dodatnim polu).

1. Odpowiedź: $2n^2$.
 Rozważać te punkty ze zbioru A , które mają obie współrzędne dodatnie lub obie ujemne. Podzielić zbiór A na czwórki $\{(x, y), (x, -y), (-x, y), (-x, -y)\}$. Jeśli jest więcej niż $2n^2$ czerwonych punktów, to pewne trzy z nich należą do tej samej czwórki.
2. Odpowiedź: $m + n$.
 Ustawić $m + n - 1$ wież wzdłuż dwóch sąsiednich boków szachownicy i jedną w jednym pozostałym wolnym narożniku. Jeśli wieża jest atakowana przez najwyżej dwie inne, to sama „atakuje” co najwyżej dwie jedności bziegu szachownicy.
3. Odpowiedź: $2n - 2$.
 Można to zrobić za pomocą prostych o współrzędnych całkowitych o różnym x i y .
4. Odpowiedź: $2n$.
 Jeśli $k < 2n$, to istnieją takie $\{n, n + 1, n + 2, \dots, 3n\} \setminus \{2n\}$.
5. Odpowiedź: $n - 1$.
 Każda prosta przykrywa co najmniej dwa punkty na „bziegu” kwadratu z niebieskimi punktami.
6. Odpowiedź: $2n$.
 W zbiorze $\{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ dla $t = 1, 2, \dots, n$ nie są podobne.
7. Odpowiedź: $3n - 1$.
 Rozważać dwie proste równoległe do przekątnej kwadratu, znajdujące się bardzo blisko niej, po jej różnych stronach. Nie można przeciąć więcej prostokątów, jeśli wszystkie są zorientowane poziomo.
8. Wskazówki do zadań



MATHEMATICS. DON'T JUST READ IT. FIGHT IT!

PAUL HALMOS



STAW CZŁO MATEMATYCZNYM WYZWANIAM!

UNIwersytet Warszawski
MIM
WYDZIAŁ
MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI

WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI
UNIwersytetu Warszawskiego
www.mimuw.edu.pl/rekrutacja