

Źródło: atlas.ch, ATLAS Experiment © 2019 CERN



Nakład: 3500 egz.

# deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6.63 \cdot 10^{-34}$  J·s  $\pi=3,141592...$

NR 2 (573) 2022

CENA 6 ZŁ VAT 8%

MIESIĘCZNIK


PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

Szukanie  
dziury w całym  
w Wielkim Zderzacz  
Hadronów  
str. 12

## SPIS TREŚCI NUMERU 2 (573)

Klucze, skarbonki, młotek i superzapis  
*Oskar Skibski*

 Zadania

 Nasz ziemniak codzienny  
*Magdalena Fikus*

Problem Skolema  
*Marcin Wierziński*

Małżeństwa, zaręczyny i algorytmy  
stabilnego dopasowania, czyli nowy  
wspaniały świat, w którym nikt nikogo  
nie zdradza  
*Piotr Skowron*

Zegar biologiczny tyka  
*Joanna M. Ols*

Sinus i cosinus w akcji  
*Jarosław Górnicki*

Szukanie dziury w całym w Wielkim  
Zderzaczu Hadronów  
*Sebastian Trojanowski*

Ciągi Dolda i punkty periodyczne  
*Grzegorz Graff, Mateusz Scharmach*

Klub 44

Powrót na Księżyc

Niebo w lutym

Aktualności  
*Tertium non datur*

 Na tropie wielomianów – część 2  
*Bartłomiej Bzdęga*

**W następnym  
numerze:**

**Wacław Sierpiński**  
Badacz  
nieskończoności



*Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Klucze, skarbonki, młotek i superzapis

Oskar SKIBSKI

Zadanie to pochodzi z książki *Combinatorial problems & exercises* László Lovász. Autor razem z Avim Wigdersonem otrzymał w 2021 roku nagrodę Abela, o czym pisaliśmy w poprzednim numerze, w artykule *Czy losowe bity pomagają?*

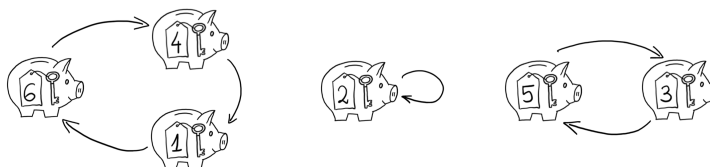
Mamy  $n$  skarbonek i  $n$  pasujących kluczy. Do każdej skarbonki wrzucamy jeden losowy klucz. Chcielibyśmy je teraz wszystkie otworzyć, ale nie mamy żadnego klucza. Mamy jednak młotek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rozbijając  $k$  losowych skarbonek, zdołamy otworzyć wszystkie skarbonki?

Bez straty ogólności przyjmijmy, że rozbijamy pierwsze  $k$  skarbonek – klucze rozrzucone są losowo, więc nie wpłynie to na prawdopodobieństwo. Zaczniemy od przykładu z sześcioma skarbondkami, z których rozbijemy trzy.



Zaczynamy od skarbonki 1. Bieremy zamach i po chwili wyciągamy klucz do skarbonki 6. Otwieramy ją kluczem i z niej wyciągamy klucz do 4. W niej z kolei jest klucz do 1, który nam się nie przyda, bo skarbondkę 1 już roztrzaskaliśmy. Teraz rozbijamy skarbondkę 2, w której niestety znajdujemy nieprzydatny klucz do niej samej. W końcu rozbijamy skarbondkę 3, co pozwala nam otworzyć skarbondkę 5. Trochę kluczyliśmy, ale udało się – nie została nam żadna zamknięta skarbondka.

Widzimy, że najważniejszą kwestią są tworzące się cykle. Jeżeli od każdej skarbonki poprowadzimy strzałkę do skarbonki, do której jest w niej klucz, to powstanie nam taki graf:



Czy graf mógłby wyglądać inaczej niż zbiór cykli? Nie! Jeżeli zaczniemy podążać od dowolnej skarbonki za strzałkami, to musimy w końcu do niej znowu dojść. Jest tak dlatego, że w pewnym momencie skarbonki na naszej ścieżce zaczną się powtarzać i gdyby jako pierwsza powtórzyła się inna skarbondka niż nasza początkowa, to znaczyłoby to, że znaleźliśmy do niej dwa klucze w dwóch różnych skarbondkach.

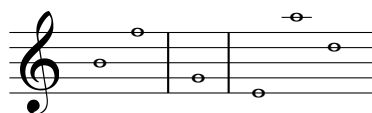
Mamy więc trzy cykle:  $[1, 6, 4]$ ,  $[2]$  oraz  $[3, 5]$ . Widzimy, że udało nam się otworzyć wszystkie skarbonki, bo w każdym cyklu była jakaś skarbondka, którą rozbijaliśmy – rozbijając ją, dobraliśmy się do wszystkich innych skarbonek w tym samym cyklu. Z kolei gdyby tak nie było, tzn. byłby cykl bez żadnej rozbijanej skarbonki, to by nam się nie udało. Zatem początkowe pytanie możemy sformułować tak: jakie jest prawdopodobieństwo, że przy losowym rozmieszczeniu  $n$  kluczy w  $n$  skarbondkach w każdym powstającym cyklu jest przynajmniej jedna ze skarbonek  $1, 2, \dots, k$ ?

Dla  $n = 6$  i  $k = 3$  wynik możemy obliczyć ręcznie, ale nawet taki prosty przypadek wymaga trochę pracy. Permutacji z co najmniej jednym złym cyklem jednoelementowym  $[4]$ ,  $[5]$  lub  $[6]$  jest  $3 \cdot 5! - 3 \cdot 4! + 3! = 294$  (użyliśmy tu zasady włączeń i wyłączeń). Permutacji ze złym cyklem dwuelementowym  $[4, 5]$ ,  $[4, 6]$  lub  $[5, 6]$ , ale bez  $[4, 5]$  i  $[6]$  jest  $3 \cdot (4! - 3!) = 54$ . Permutacji ze złym cyklem trzelementowym  $[4, 5, 6]$  lub  $[4, 6, 5]$  jest  $2 \cdot 3! = 12$ . Czyli spośród  $6! = 720$  wszystkich permutacji dokładnie 360 jest złych. Wiemy więc, że uda nam się z prawdopodobieństwem 50% (ten sam wynik uzyskalibyśmy też argumentując, że albo nam się uda, albo nie uda).

Abyśmy mogli odpowiedzieć na to pytanie, z pomocą przybędzie nam... *superzapis* (czyt. „super zapis”, nie „supeżapis”)! Nazwa ta nie jest nazwą oficjalną, jednak Czytelnik zaraz się przekona, że jest ona bardzo adekwatna.

O co chodzi w superzapisie? Permutacje, czyli ustawienia elementów w dowolnej kolejności, zapisywać można na wiele sposobów. Można po prostu wypisać kolejne elementy, tak jak mieliśmy je przedstawione na początku:  $(6, 2, 5, 1, 3, 4)$ . Nie widać tu jednak, jakie powstają cykle. Można użyć zapisu cyklowego, czyli wypisać cykle permutacji, jak zrobiliśmy to powyżej:  $[1, 6, 4]$ ,  $[2]$ ,  $[3, 5]$ . Zapis ten nie jest jednak jednoznaczny (np.  $[5, 3]$ ,  $[2]$ ,  $[4, 1, 6]$  odpowiada tej samej permutacji), ponadto wymaga dodatkowych nawiasów, które powiedzą nam, gdzie cykl się kończy, a gdzie zaczyna. Natomiast superzapis jest pozbawiony wszystkich tych wad i ma same zalety. Dlatego jest naprawdę super.

Aby skonstruować superzapis, spróbujmy ujednoznaczyć zapis cyklowy. W tym celu na początku każdego cyklu ustawmy jego najmniejszy element. Dla naszej przykładowej permutacji dostajemy cykle  $[1, 6, 4]$ ,  $[2]$  oraz  $[3, 5]$ . Standardowo uszeregowalibyśmy te cykle według tych najmniejszych elementów rosnąco. Będziemy jednak sprytniejsi (musimy w końcu ratować swój honor po tym, jak bezsensownie zatrzaskaliśmy sobie klucze...) i uszeregujemy je według najmniejszych elementów malejąco. Uzyskamy wtedy  $[3, 5]$ ,  $[2]$ ,  $[1, 6, 4]$ . Okazuje się,



Kluczowa obserwacja: nowe cykle w superzapisie zaczyna zawsze element mniejszy niż wszystkie poprzednie elementy. Powyższy rysunek ilustruje superzapis (3, 5, 2, 1, 6, 4) (niestety, brak mu metrum).

Formalnie, superzapis zdefiniować możemy jako bijekcję  $f$  na zbiorze wszystkich permutacji  $\{1, \dots, n\}$ .

Dla  $n = 3$  mamy na przykład:

$$f(1, 2, 3) = (3, 2, 1), \quad f(1, 3, 2) = (2, 3, 1),$$

$$f(2, 1, 3) = (3, 1, 2), \quad f(2, 3, 1) = (1, 2, 3),$$

$$f(3, 1, 2) = (1, 3, 2), \quad f(3, 2, 1) = (2, 1, 3).$$

Czy Dociekliwy Czytelnik, korzystając z superzapisu, będzie potrafił obliczyć prawdopodobieństwo, że w losowej permutacji zbioru  $\{1, \dots, n\}$  liczba 1 jest w cyklu z 2, ale nie z 3? Albo że liczba 1 jest w cyklu długości  $k$ ?

że w tym zapisie możemy pozbyć się nawiasów! Dostajemy ciąg (3, 5, 2, 1, 6, 4), i on jest właśnie superzapisem!

Zastanówmy się, czemu możemy pozbyć się nawiasów. Popatrzmy na nasz ciąg. Pierwszy cykl zaczyna się od 3. Potem jest 5. Skoro 5 jest większe niż 3, to nie może zaczynać nowego cyklu, bo początek kolejnego cyklu musi być mniejszy niż początek obecnego. Potem widzimy 2 – skoro 3 było najmniejszym elementem w swoim cyklu, to znaczy, że 2 musi być w innym cyklu. Pierwszy cykl to zatem [3, 5]. Po 2 mamy 1, które nie może być w cyklu z 2. A więc drugi cykl to [2]. Od 1 zaczyna się ostatni cykl, którego nic już nie przerwie, bo nie znajdziemy nic mniejszego. Ostatni cykl to zatem [1, 6, 4]. Odczytaliśmy, jakie są cykle, a zatem wiemy, jaka to permutacja. Superzapis jest więc odwracalny – każdemu superzapisowi odpowiada dokładnie jedna permutacja. Super!

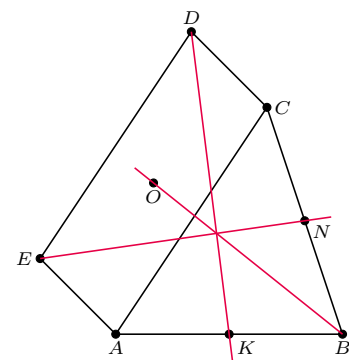
Wróćmy jednak do naszego pytania: jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdym cyklu jest przynajmniej jedna ze skarbonek  $1, 2, \dots, k$ ? Popatrzmy na pierwszą liczbę w superzapisie. Jeżeli jest ona większa niż  $k$ , to znaczy, że istnieje cykl, w którym najmniejszy element jest większy niż  $k$ . W takiej sytuacji nie uda nam się otworzyć wszystkich skarbonek. Jeżeli z kolei pierwsza liczba jest mniejsza bądź równa  $k$ , to znaczy, że w każdym cyklu jest taka liczba (bo najmniejszy element w każdym cyklu jest  $\leq k$ ). I wtedy nam się uda.

Pozostaje stwierdzić, ile jest permutacji, które w swoim superzapisie mają na pierwszej pozycji liczbę  $1, 2, \dots, k$ ? Dla każdej liczby – także większej niż  $k$  – jest ich tyle samo, czyli  $1/n$  wszystkich. Wynika to z tego, że superzapis jest odwracalny, czyli jeden superzapis odpowiada jednej permutacji. Prawdopodobieństwo, że na pierwszej pozycji w superzapisie jest liczba mniejsza bądź równa  $k$ , jest więc równe dokładnie  $k/n$ . I to jest właśnie prawdopodobieństwo tego, że uda nam się otworzyć wszystkie skarbonki.

Okazało się, że klucz do rozwiązania nie chował się w skarbonkach, a był na pierwszej pozycji w superzapisie.



## Zadania



Przygotował Dominik BUREK

**M 1699.** Liczba naturalna większa niż  $10^3$  daje te same reszty przy dzieleniu przez 40 i przez 625. Jaka może być cyfra tysięcy tej liczby?

Rozwiązanie na str. 13

**M 1700.** Każde pole planszy  $100 \times 100$  jest pomalowane na biało lub czarno, przy czym wszystkie pola przylegające do boków planszy są czarne. Ponadto na planszy nie ma jednokolorowego kwadratu  $2 \times 2$ . Udowodnij, że na planszy istnieje kwadrat  $2 \times 2$  pomalowany „w szachownicę”, tzn. niezawierający sąsiadujących pól w tym samym kolorze.

Rozwiązanie na str. 5

**M 1701.** W trójkącie  $ABC$  budujemy równoległobok  $ACDE$  na zewnątrz trójkąta. Punkt  $O$  jest środkiem równoległoboku, natomiast punkty  $K$  i  $N$  są środkami odcinków  $AB$  i  $BC$ . Udowodnij, że proste  $DK$ ,  $EN$  i  $BO$  przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie na str. 12

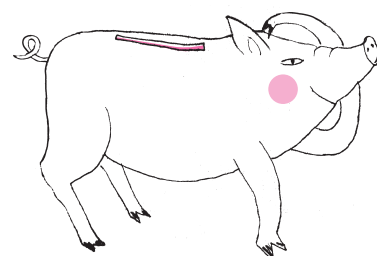
Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1041.** Dwie niewielkie, sferyczne elektrody o promieniu  $r$  każda umieszczono w jednorodnym, słabo przewodzącym ośrodku o oporze właściwym  $\rho$ . Odległość między elektrodami jest znacznie większa od  $r$ . Oszacuj wartość oporu elektrycznego  $R$  między nimi.

Rozwiązanie na str. 10

**F 1042.** Wartość pola elektrycznego mierzona przy powierzchni Ziemi wynosi  $E_0 \approx 100 \text{ V/m}$ . Na wysokości 1,5 km nad Ziemią pole elektryczne wynosi  $E_1 \approx 25 \text{ V/m}$ . Ile wynosi średnia gęstość  $d$  ładunku elektrycznego atmosfery w pobliżu Ziemi? Przenikalność elektryczna próżni  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ , a promień Ziemi  $R \approx 6400 \text{ km}$ .

Rozwiązanie na str. 11



## Nasz ziemniak codzienny

Jadalne bulwy ziemniaka zawierają witaminę C (gotując, wrzucać do wrzątku), błonnik, wiele mikroelementów, zestaw witamin B, skrobię, białka... I najciekawsze – 100 g to tylko 77 kcal. Nie tuczą!

W skali globu pod względem spożycia ziemniaki znajdują się na czwartej pozycji wśród roślin uprawnych, po kukurydzy, pszenicy i ryżu, uprawiane są w 160 krajach. W eksporcie tego warzywa przodują kraje azjatyckie (48%). My obsadzamy ziemniakami 300 tysięcy hektarów i zjadamy 100 kg rocznie na osobę.

Świat zna kilka tysięcy odmian ziemniaków, wykorzystując niektóre do celów spożywczych, w produkcji pasz oraz przemysłowych substancji (skrobia). Tę cenną roślinę przechowuje się w bankach genetycznych w formie nasion lub hodowli *in vitro*.

Genetycy „wytropili” udomowienie ziemniaka na granicy Peru i Boliwii, prawdopodobnie 10–7 tysięcy lat temu. Doceniając cechy hodowlane i spożywcze, z jednej peruwiańskiej odmiany wyprowadzono ich tysiące. Hodowcy kierowali się wartością smakową, tolerancją na warunki glebowe i klimatyczne. Do Europy – to wszyscy wiemy – przywieźli ziemniaki Hiszpanie w drugiej połowie XVI wieku – może to był najcenniejszy ich łup, choć przekazy mówią raczej o złocie i drogich kamieniach. Podobno wytworne damy na dworach królów francuskich przypinały do gorsetów kwiaty tej nowej egzotycznej rośliny. Do Ameryki Północnej ziemniak dotarł... z Europy.

Porzucając królów i ich damy, przyznać należy, że pierwszy szkic genomu ziemniaka opublikowano dopiero w 2009 roku. Tworzy go 12 chromosomów (860 mln nukleotydów). Większość hodowlanych ziemniaków ma w komórkach 4 kopie chromosomu.

Z jednego typu ziemniaka sprzed 10 tysięcy lat cierpliwi hodowcy wyprowadzili przynajmniej 5 tysięcy odmian. Znanych jest 200 odmian dzikich, które krzyżuje się do dziś z hodowlanymi, ze względu na to, że niosą wiele genów odporności na choroby. Niestety – zazwyczaj krzyżówki są niesmaczne. Powszechnie znana zaraza ziemniaczana wywołała w XIX wieku katastrofę monokultury ziemniaczanej: w Irlandii z głodu zmarło ponad 2 mln ludzi.

W Polsce jadano odmiany niemieckie – do czasu, gdy polski hodowca z Beskidu Małego, Henryk Dołkowski, wyprowadził oryginalną odmianę Marius (1893). Do 1939 roku utworzono w Polsce 100 odmian Mariusa. Odmiana ta jest odporna na wirusa liściozwoju, ale łatwo zaraża się rakiem ziemniaczanym, wręcz poetycki jej opis znajdujemy w katalogu hodowcy: „smak z nutą ziół, karczocha i lubczyku”. Marius zdobył, przez żołądki, serca Norwegów (w połowie XX wieku wycofano go z handlu, zachowując w zbiorach banku NordGen). My Mariusa nie zachowaliśmy, ale „odzyskaliśmy” w ramach naukowej wymiany w 1990 roku, od Norwegów właśnie. Aktualnie do polskiego rejestru ziemniaka wpisanych jest 117 odmian, w tym 82 jadalne i 35 skrobiowych. Odmiany polskie stanowią 71,8% rejestru.

Nie będzie dla Czytelnika zaskoczeniem informacja, że inżynierowie genetyczni zabrali się entuzjastycznie do tworzenia genetycznie modyfikowanych odmian. W laboratoriach powstały odmiany odporne na suszę, obficie wytwarzające amylopektynę, odporne na stonkę i wiele chorób wirusowych. Uwzględniając publiczne wątpliwości, wytworzono ziemniak-GMO, nieniosący żadnych obcych genów. W odróżnieniu od wszystkich innych ziemniaków jego stosowanie do produkcji frytek nie łączyło się z powstawaniem szkodliwego dla ludzi akrylamidu. Nawet warianty zaaprobowane przez agencje do spraw bezpieczeństwa żywności w USA i Europie zostały odrzucone przez konsumentów, i zaprzestano ich hodowli.

Bywalcom targowisk donoszę, że w naszych zasobach ziemniaków jadalnych dominują tzw. wszechstronnie użytkowe. Brakuje odmian sałatkowych i najlepszych do wytwarzania puree. Jednym słowem jesteśmy bogaci w odmiany bankowe, ale niezwykle ubodzy w te specjalnych zastosowań kulinarnych. Szkoda...

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



# Problem Skolema

Marcin WIERZBIŃSKI\*

\* Student, Wydział Matematyki,  
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet  
Warszawski

Wiele matematycznych problemów ma bardzo proste sformułowanie, ale ich istota dotyka głębokiej matematyki. Do tej grupy należy tytułowy problem Skolema. Sformułowanie wydaje się bliskie informatyce teoretycznej. Zainteresowany Czytelnik znający tzw. problem stopu może zauważyć tutaj analogię. Techniki służące do rozwiązania problemu pochodzą jednak nie z informatyki teoretycznej, a z algebry. Pełne rozwiązanie problemu przy pomocy tych technik wymagałoby istotnych postępów w tej dziedzinie algebry.

Ciąg Fibonacciego zdefiniowany jest wzorem:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  
 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  dla  $n \geq 2$ . Jego pierwsze wyrazy to: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Pierwsze wyrazy tego ciągu to: 0, 1, 2, 1, -4, -11, -10, 13, 56, 73, -22, -263 ...

Zacznijmy od rozważenia szczególnego przypadku naszego pytania: czy ciąg Fibonacciego ma pewien wyraz równy zero poza wyrazem początkowym? Każdy bez trudu odpowie na to pytanie: nie, tylko dla  $n = 0$  wyraz  $F_n$  jest równy zero. Kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego  $F_n$  zawsze będą dodatnie (suma wyrazów dodatnich jest dodatnia). Dojście do tego wniosku nie wymaga zaawansowanej matematyki. Czy odpowiedź na postawione wyżej pytanie dla dowolnego ciągu podobnej postaci jest taka prosta? Rozważmy na przykład następujący ciąg:

$$(1) \quad \begin{cases} u_n = 2u_{n-1} - 3u_{n-2}, \\ u_1 = 1, \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

Na pierwszy rzut oka problem nie jest łatwy do rozstrzygnięcia. Wypisując kolejne wyrazy, można wysnuć hipotezę, że ów ciąg również, poza pierwszym, nie ma wyrazu równego zero. Problem można sformułować w ogólności dla większej liczby równań. Artykuł ten pokaże, że nawet dla prostych ciągów za rozwiązaniem stoi ciekawa matematyka.

## Problem Skolema

Albert Thoralf Skolem (1887–1963)



Aby lepiej zrozumieć ten problem, należy najpierw wprowadzić potrzebne definicje. Liniowy ciąg rekurencyjny to taki ciąg liczb całkowitych  $u_0, u_1, \dots \in \mathbb{Z}$ , że dla pewnych  $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$ , gdzie  $a_0 \neq 0$ , oraz dla każdego  $n \geq k$  mamy  $u_n = a_0 u_{n-1} + a_1 u_{n-2} + \dots + a_{k-1} u_{n-k}$ . Rząd takiego ciągu to  $k$ .

**Problem Skolema** to pytanie, czy dla danego liniowego ciągu rekurencyjnego istnieje takie  $n$ , że  $u_n = 0$ .

Obecnie wiadomo, że problem Skolema jest rozstrzygalny dla ciągów rzędu 2, 3 i 4, natomiast rozstrzygalność dla rzędu 5 pozostaje nadal otwarta. Znamy jednak rozstrzygalność różnych podprzypadków, nawet dla rzędu 5.

Okazuje się, że już dla ciągów rzędu 2 rozwiązanie nie jest trywialne. W artykule postaram się przedstawić intuicje stojące za ową nietrywialnością. Bardzo przydatne będzie, znane zapewne niektórym Czytelnikom, następujące twierdzenie dotyczące ciągów rekurencyjnych.

**Twierdzenie:** Dla każdego liniowego ciągu rekurencyjnego  $u_n$  rzędu  $k$  można obliczyć niezerowe liczby zespolone  $\lambda_1, \dots, \lambda_j$  oraz wielomiany  $p_1, \dots, p_j$  o współczynnikach algebraicznych takie, że:

$$u_n = p_1(n)\lambda_1^n + p_2(n)\lambda_2^n + \dots + p_j(n)\lambda_j^n$$

oraz

$$\deg(p_1) + \dots + \deg(p_j) \leq k - j,$$

gdzie przez  $\deg(p)$  oznaczamy stopień wielomianu  $p$ .

Dla Czytelnika Zainteresowanego, znającego narzędzia z algebry liniowej, to twierdzenie nie jest trudne do udowodnienia.

## Ciągi rekurencyjne rzędu 2

W dalszej części przedstawię techniki związane z rozwiązaniem problemu Skolema dla liniowych ciągów rekurencyjnych rzędu 2. Rozwiązanie będzie zależało od współczynników, które występują w twierdzeniu powyżej.

Powiemy, że liczba zespolona  $a$  jest liczbą algebraiczną, jeżeli jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Zbiór liczb algebraicznych oznacza się jako  $\mathbb{A}$ . Liczba  $\sqrt{2}$  oraz  $i$  są algebraiczne, gdyż  $\sqrt{2}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $p(x) = x^2 - 2$ , a liczba  $i$  jest pierwiastkiem wielomianu  $p(x) = x^2 + 1$ .



### Rozwiązanie zadania M 1700.

Załóżmy odwrotnie: na planszy nie ma kwadratów  $2 \times 2$  w tym samym kolorze lub pokolorowanych „w szachownicę”. Bok pola wspólny dla dwóch różnokolorowych pól nazwijmy *granicą*; oznaczmy przez  $N$  liczbę granic.

Każdy kwadrat  $2 \times 2$  zawiera dokładnie trzy pola jednokolorowe lub dwa sąsiadujące białe pola i dwa sąsiadujące czarne pola. W obu przypadkach wewnątrz kwadratu znajdują się dokładnie dwie granice.

Łącznie mamy  $99^2$  kwadratów  $2 \times 2$ , a każda granica leży wewnątrz dokładnie dwóch z nich (ponieważ granice nie przylegają do obwodu planszy). Wobec tego  $N = (2 \cdot 99^2)/2 = 99^2$ , czyli jest liczbą nieparzystą.

Z drugiej strony  $N$  musi być parzyste – w każdym wierszu i każdej kolumnie pierwsze i ostatnie pole jest czarne, dlatego musi nastąpić parzysta liczba zmian koloru.

Zainteresowany Czytelnik może przeczytać o liczbach zespolonych w „Liczby zespolone i kwaterniony”,  $\Delta_{16}^{10}$ .

Uogólnijmy teraz nasze rozważania. Można nietrudno pokazać, że w omawianym przypadku  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$  oraz  $c_1 = \bar{c}_2$ . Zatem opisany ciąg będzie przyjmował postać  $u_n = c\lambda^n + \bar{c}\bar{\lambda}^n$ , dla pewnej liczby algebraicznej  $c \in \mathbb{A}$  i liczby zespolonej  $\lambda$ .

Pytając o warunek  $u_n = 0$ , można zauważyć, że  $c\lambda^n + \bar{c}\bar{\lambda}^n = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy część rzeczywista  $c\lambda^n$  jest równa 0. Niech  $v = \frac{\lambda}{|\lambda|}$ , wówczas  $|v| = 1$ . Zamiast badać, czy  $u_n = 0$ , będziemy teraz badać, czy  $\frac{u_n}{|\lambda|^n} = 0$ , co, jak łatwo zauważyć, jest równoważnym pytaniem. Zauważmy, że  $\frac{u_n}{|\lambda|^n} = cv^n + \bar{c}\bar{v}^n$ . Wystarczy sprawdzić, czy  $cv^n + \bar{c}\bar{v}^n = 0$ . To zaś jest równoważne temu, że  $cv^n$  jest czysto urojone (postaci  $ix$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ). Ponieważ  $|v| = 1$ , to musi być  $x = |c|$ . Pytamy więc, czy istnieje takie  $n$ , że  $cv^n = i|c|$ , czyli czy  $v^n = \frac{i|c|}{c}$ .

Pozostaje nam rozwiązać równanie postaci:

$$v^n = \beta, \text{ gdzie } v, \beta \in \mathbb{A}, |v| = 1 \text{ oraz } \beta = \frac{i|c|}{c}.$$

Aby znaleźć ogólne rozwiązanie, niezbędne okazuje się pochylenie nad teorią liczb algebraicznych. Mimo że to pytanie wydaje się proste, to jego rozwiązanie wymaga wprowadzenia pomysłowych norm mierzących wielkość liczb (innych niż wartość bezwzględna danej liczby). Jest to bardzo ciekawa technika, ale opowiedzenie o niej

Z powyższego twierdzenia wynika, że  $j \leq 2$ , gdyż suma stopni wielomianów  $p_i$  musi być nieujemna. Rozważymy kilka przypadków w zależności od wartości  $j$  oraz liczb  $\lambda_i$ .

### Wartość $j = 1$

Z twierdzenia wynika, że

$$u_n = (an + b)\lambda_1^n.$$

Przypomnijmy, że  $\lambda_1 \neq 0$ . Zatem jeśli  $u_n = 0$ , to  $(an + b) = 0$ , co po przekształceniu daje  $n = -\frac{b}{a}$  i kończy rozumowanie w tym przypadku.

*Uwaga do pozostałych przypadków.* W pozostałych przypadkach  $j > 1$ , a zatem  $j = 2$ . Wówczas

$$u_n = p_1(n)\lambda_1^n + p_2(n)\lambda_2^n,$$

gdzie  $\deg(p_1) + \deg(p_2) = 0$ . Wielomiany  $p_1$  oraz  $p_2$  są więc stałe, czyli ciąg  $u_n$  ma postać

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n.$$

Dalej zakładamy, że  $c_1, c_2 \neq 0$ , w przeciwnym przypadku oczywiście zera nie wystąpią w ciągu  $u_n$ .

### Wartość $j = 2$ oraz $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$

Jeśli  $u_n = 0$ , to  $c_1\lambda_1^n = -c_2\lambda_2^n$ , co równoważnie daje:

$$\frac{-c_1}{c_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n.$$

Bez straty ogólności można założyć, że  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . Wówczas  $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| < 1$ . Zatem jeśli  $u_n = 0$ , to  $n = \log_{|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|}(|\frac{c_1}{c_2}|)$ , pozostaje nam więc sprawdzić, czy wyraz ciągu o tym indeksie jest faktycznie równy zero.

### Wartość $j = 2$ oraz $|\lambda_1| = |\lambda_2|$

Przed nami najciekawsza część – przypadek, gdy  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ , ale  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . W tym miejscu wróćmy do przykładu (1) ze wstępu. Można nietrudno obliczyć, że w tym przypadku:  $c_1 = \frac{i}{2\sqrt{2}}$ ,  $c_2 = \frac{-i}{2\sqrt{2}}$ ,  $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2}$  oraz  $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$ .

A zatem omawiany liniowy ciąg rekurencyjny ma postać:

$$u_n = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$

zajęłoby przynajmniej kilka stron. Zainteresowanych Czytelników odsyłam do artykułu: *On the Skolem Problem and Prime Powers* autorstwa George'a Kenisona, Richarda J. Liptona, Joëla Ouaknine'a i Jamesa Worrella.

Możemy jednak wrócić do naszego przykładu (1) i zauważyć, że sprowadziliśmy pytanie, czy  $u_n = 0$ , do pytania, czy  $(1 - i\sqrt{2})^n$  jest liczbą rzeczywistą dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ . Innymi słowy, pytamy, czy argument tej liczby (równy  $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$ ) jest współmierny z  $\pi$ , czy nie. W znanej książce *Dowody z księgi* autorstwa M. Aignera i G. Zieglera można znaleźć dowód, że  $\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$  jest niewspółmierny z  $\pi$ , co oznacza, że w ciągu (1) istotnie nie występuje żaden wyraz równy zero.

Dla ciągów rekurencyjnych rzędu  $k = 3$  również istnieje algorytm bazujący na podobnych rozumowaniach, jednak w ogólności dla  $k \geq 5$  nie jest znane żadne rozwiązanie problemu Skolema. Nawet dla rzędu  $k = 2$  ostatni przypadek opiera się na algebraicznej teorii liczb. Sam dowód wcześniejszego twierdzenia wykorzystuje podstawy algebry liniowej, a sformułowanie problemu jest bliskie problemowi stopu, co ciekawie pokazuje, że wymaga on znajomości kilku działów zarówno matematyki, jak i informatyki.

# Małżeństwa, zaręczyny i algorytmy stabilnego dopasowania, czyli nowy wspaniały świat, w którym nikt nikogo nie zdradza

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Piotr SKOWRON\*

W 1962 roku dwóch amerykańskich matematyków, David Gale i Lloyd Shapley, zadało sobie pytanie, czy możliwe jest dobranie mężczyzn i kobiet w pary tak, aby nawet najbardziej zatwardziali przeciwnicy monogamii nie byli w stanie nawiązać romansu [1]? W tym celu, rzecz jasna, odwołali się do teorii algorytmów i zaproponowali następujący model. Niech  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  i  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_\ell\}$  oznaczają, odpowiednio, zbiory  $n$  mężczyzn i  $\ell$  kobiet. Każdy mężczyzna ma ustalone preferencje względem kobiet; niech  $\succ_m$  oznacza ranking preferencji mężczyzny  $m$ , będący porządkiem liniowym na zbiorze  $K$ . Podobnie, niech  $\succ_k$  oznacza ranking preferencji kobiety  $k$ . W swoim artykule Gale i Shapley przyjęli konserwatywny punkt widzenia i nie wchodzili w kwestie związane z bi- czy też homoseksualizmem.<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Warto jednak dodać, że niektóre z kolejnych prac dotyczących problematyki stabilnego dopasowania prezentowały bardziej progresywne spojrzenie na kwestię małżeństwa [2]. Przykładowo, często rozważany jest model, w którym ranking preferencji danego człowieka może być wyrażony jako porządek względem innych ludzi, niezależnie od płci. Model ten jest bardziej ogólny i algorytmy dla tego przypadku znajdują zastosowanie w szerszym zakresie sytuacji, na przykład przy doborze współlokatorów w akademikach (*the stable roommate problem*). Późniejsze modele zakładały również, że rankingi preferencji mogą być reprezentowane jako słabe porządki lub że ludzie mogą kierować się kilkoma niezależnymi kryteriami przy doborze partnerów. W tym artykule nie rozważamy bardziej złożonych modeli, jednak warto wiedzieć, że dziedzina badań zapoczątkowana przez Gale'a i Shapleya jest szeroka i dotyczy wielu wariantów bazowego problemu.

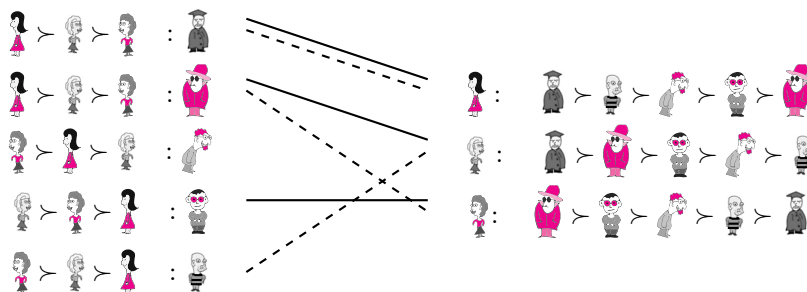
Dopasowaniem nazwiemy zbiór par, z których każda złożona jest z mężczyzny i kobiety, takich, że każdy człowiek jest sparowany z co najwyżej jedną osobą. Formalnie, zbiór  $\Phi \subseteq \{\{m, k\} : m \in M, k \in K\}$  jest dopasowaniem, jeżeli dla dowolnych dwóch par  $p_1, p_2 \in \Phi$  ( $p_1 \neq p_2$ ) zachodzi  $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ . Dla każdej osoby  $o$  przez  $\Phi(o)$  oznaczamy partnera  $o$  w dopasowaniu  $\Phi$ . Jeżeli w ramach  $\Phi$  osoba  $o$  nie jest z nikim sparowana, to stosujemy notację  $\Phi(o) = \perp$ . Zakładamy również, że każda osoba woli być sparowana, niż pozostać bez pary (jako ciekawe ćwiczenie Czytelnik może spróbować wykazać, że założenie możemy poczynić bez straty ogólności), czyli dla dowolnych  $m \in M$  i  $k \in K$  mamy  $k \succ_m \perp$  i  $m \succ_k \perp$ . Jesteśmy gotowi do zdefiniowania kluczowego pojęcia rozważanego w tym artykule.

**Definicja 1.** *Dopasowanie  $\Phi$  jest stabilne, jeżeli nie istnieją mężczyzna  $m \in M$  i kobieta  $k \in K$ , którzy spełniają następujący warunek:*

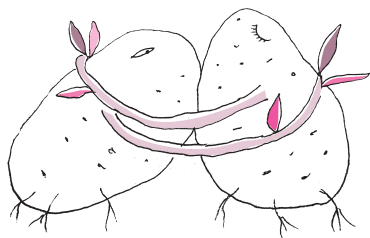
$$k \succ_m \Phi(m) \text{ oraz } m \succ_k \Phi(k).$$

Innymi słowy, dopasowanie jest stabilne, jeżeli nie istnieją tacy mężczyzna i kobieta, którzy woleliby siebie nawzajem niż swoich dotychczasowych partnerów. Zilustrujmy definicję 1 na poniższym przykładzie:

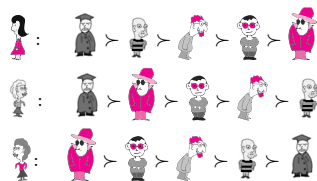
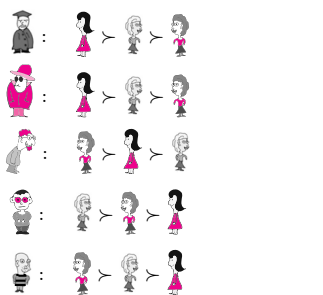
**Przykład 1.** *Rozważmy instancję przedstawioną na poniższym rysunku.*



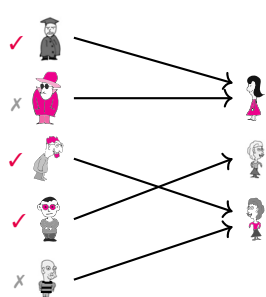
Na rysunku obok każdej osoby umieściliśmy jej listę preferencji. Przykładowo, preferencje mężczyzny  $m_1$  to  $m_1 \succ m_2 \succ m_3$ , dlatego najchętniej zacząłby chodzić z  $w_1$  (jest przecież inteligentna, wrażliwa, czuła i ma świetne poczucie humoru!), w drugiej kolejności z  $w_2$  (no tak, przecież  $m_1$  uwielbia blondynki!), w ostateczności zgadzając się na chodzenie z  $w_3$  (ale tylko dlatego, że  $w_3$  pochodzi z bogatej rodziny, więc zapewne to ona będzie płacić za bilety do kina). Na rysunku zaznaczyliśmy również dwa dopasowania. Dopasowanie  $\Phi_1 = \{\{m_1, w_1\}, \{m_2, w_2\}, \{m_3, w_3\}, \{m_4, w_4\}, \{m_5, w_5\}\}$ , oznaczone przerywaną linią, nie jest stabilne. Spójrzmy na parę  $w_1$  i  $m_2$ :  $w_1$  woli  $m_2$  od  $m_1$  – swojej partnerki w  $\Phi_1$ ; podobnie  $m_2$  woli  $w_1$  od swojego partnera  $w_2$ . Ta para świadczy zatem o tym, że dopasowanie  $\Phi_1$  nie jest stabilne. Taką parę nazwiemy blokującą. Pozostałe pary blokujące dla  $\Phi_1$  to  $w_2$  i  $m_3$  oraz  $w_3$  i  $m_4$ . Dopasowanie  $\Phi_2 = \{\{m_1, w_2\}, \{m_2, w_1\}, \{m_3, w_4\}, \{m_4, w_3\}, \{m_5, w_5\}\}$ , oznaczone ciągłą linią, jest stabilne – nie istnieje para, która blokowałaby  $\Phi_2$ .



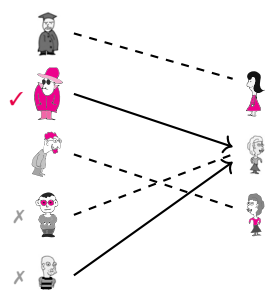




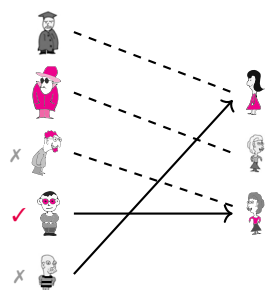
Preferencje



Krok 1



Krok 2



Krok 3

Pojęcie stabilnego dopasowania jest ważne i powszechnie wykorzystywane w praktyce. Algorytmy do znajdowania stabilnego dopasowania są między innymi używane w Stanach Zjednoczonych do przydziału rezydentów lekarskich do szpitali (wtedy rolę mężczyzn przyjmują rezydenci lekarscy, a rolę kobiet wakaty w szpitalach) lub do przydziału uczniów do szkół. Podobne algorytmy są również wykorzystywane przy transplantacji nerek, aby dopasować chorych potrzebujących nerki z potencjalnymi dawcami – zdarza się, że dana osoba  $x$  nie jest w stanie przekazać swojej nerki bliskiej osobie  $y$  ze względu na niezgodność grupy krwi, jednak  $x$  może przekazać nerkę innemu pacjentowi  $z$  w zamian za to, że osoba bliska  $z$  zgodzi się przekazać nerkę dla  $y$ ; w ten sposób możemy tworzyć dopasowania, które zwiększają liczbę możliwych transplantacji. Teoria stabilnych dopasowań jest obecnie ugruntowana, a jeden z jej twórców, wspomniany wcześniej Lloyd Shapley, za stworzenie fundamentów tej teorii otrzymał w 2012 roku Nagrodę Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii.

Rozumiemy już istotę i wagę pojęcia stabilnego dopasowania. Czas zadać kluczowe pytanie. Czy stabilne dopasowanie zawsze istnieje, niezależnie od preferencji mężczyzn i kobiet? Jeżeli tak, to czy potrafimy je efektywnie obliczyć? Otóż na oba te pytania możemy odpowiedzieć **TAK!** (Tak, autor również jest podekscytowany tym faktem!). Oto i algorytm znajdowania stabilnego dopasowania zaproponowany przez Gale'a i Shapleya. Początkowo zakładamy, że nikt nie jest zaręczony, i w pętli wykonujemy następujące kroki:

1. Każdy niezaręczony mężczyzna oświadcza się swojej ulubionej kobiecie spośród tych, które do tej pory nie odrzuciły jego oświadczeń.
2. Każda kobieta  $k$ , której oświadcza się jeden bądź kilku mężczyzn, wybiera swojego ulubionego spośród oświadczających się – nazwijmy go  $x$  – a oświadczeni pozostali definitywnie odrzuca. Jeżeli  $k$  nie jest zaręczona, to przyjmuje oświadczenia  $x$ , i od tej pory  $k$  i  $x$  są zaręczeni. Jeżeli  $k$  jest już zaręczona z mężczyzną  $y$ , to porównuje ona  $x$  i  $y$ . Jeżeli  $x \succ_k y$ , to  $k$  zrywa swoje zaręczyny z  $y$  (oznacza to również, że  $k$  definitywnie odrzuca jego oświadczenia) oraz zaręcza się z  $x$ . W przeciwnym przypadku, czyli gdy  $y \succ_k x$ , kobieta  $k$  odrzuca oświadczenia  $x$ .

Algorytm się zatrzymuje, gdy każdy mężczyzna jest zaręczony bądź jego oświadczenia zostały odrzucone przez każdą kobietę, a następnie zwraca dopasowanie odpowiadające aktualnym zaręczynom. Zwróćmy uwagę, że algorytm na pewno kiedyś się zatrzyma, gdyż mężczyźni nie mogą dwukrotnie oświadczyć się tej samej kobiecie.

Zilustrujmy działanie algorytmu dla instancji z przykładu 1. Pierwsze trzy kroki algorytmu są również przedstawione na rysunkach obok: strzałka oznacza oświadczenia, przerywana linia to zaręczyny, które istnieją tuż przed danym krokiem algorytmu, zaś symbole  $X$  i  $\checkmark$  oznaczają odpowiednio odrzucenie/zerwanie oraz przyjęcie oświadczenia. Początkowo  $\text{M}_1$  i  $\text{M}_2$  oświadcza się  $\text{K}_1$ , ponieważ jest to ich ulubiona kobieta.  $\text{M}_3$  i  $\text{M}_4$  oświadcza się  $\text{K}_2$ , zaś  $\text{M}_5$  oświadcza się  $\text{K}_3$ . Następnie  $\text{K}_1$  odrzuca oświadczenia  $\text{M}_2$  i zaręcza się z  $\text{M}_1$ . Podobnie  $\text{K}_2$  odrzuca  $\text{M}_4$  i zaręcza się z  $\text{M}_3$ ; ponadto  $\text{K}_2$  zaręcza się z  $\text{M}_5$ . W drugim obrocie pętli algorytmu  $\text{M}_2$  i  $\text{M}_4$  oświadcza się  $\text{K}_1$ .  $\text{K}_1$  odrzuca  $\text{M}_4$  i porównuje  $\text{M}_2$  ze swoim dotychczasowym partnerem, czyli z  $\text{M}_1$ . Okazuje się, że  $\text{M}_2$  woli  $\text{M}_2$  od  $\text{M}_1$ , zatem zrywa zaręczyny z  $\text{M}_1$  i zaręcza się z  $\text{M}_2$ . W trzecim obrocie pętli  $\text{M}_4$  oświadcza się  $\text{K}_1$ , a  $\text{M}_5$  oświadcza się  $\text{K}_2$ .  $\text{K}_1$  odrzuca oświadczenia  $\text{M}_4$  (a co za tym idzie,  $\text{M}_4$  został odrzucony przez każdą kobietę), zaś  $\text{M}_4$  zrywa swoje zaręczyny z  $\text{K}_2$  i zaręcza się z  $\text{K}_1$ . W czwartym obrocie pętli  $\text{M}_2$  oświadcza się  $\text{K}_1$ , która go odrzuca, zaś w piątej i ostatniej iteracji  $\text{M}_4$  oświadcza się  $\text{K}_1$  i przez nią również zostaje odrzucony. W tym momencie  $\text{M}_1$  jest zaręczony z  $\text{K}_1$ ,  $\text{M}_2$  jest zaręczony z  $\text{K}_2$ , zaś  $\text{M}_3$  z  $\text{K}_3$ . Dopasowanie odpowiadające tym zaręczynom (czyli  $\Phi_2$ ) zostaje zwrócone przez algorytm Gale'a-Shapleya.

**Twierdzenie 1.** *Algorytm Gale’a–Shapleya zwraca stabilne dopasowanie.*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że dopasowanie  $\Phi$  zwrócone przez algorytm Gale’a–Shapleya nie jest stabilne. Niech  $\{m, k\}$  będzie parą blokującą  $\Phi$ . Mamy zatem  $m \succ_k \Phi(k)$  oraz  $k \succ_m \Phi(m)$ . Ponieważ  $m$  woli  $k$  od swojej partnerki  $\Phi(m)$ ,  $m$  musiał oświadczyć się  $k$  i zostać przez nią odrzuconym (mężczyzna zawsze oświadcza się ulubionej kobiecie, która go do tej pory nie odrzuciła). Skoro  $k$  odrzuciła  $m$ , to znaczy, że w chwili, gdy rozważała jego oświadczenia, otrzymała propozycję bądź była zaręczona z mężczyzną, którego wolała niż  $m$ . To oznacza, że w pewnym momencie  $k$  była zaręczona z kimś, kogo wolała od  $m$ . Zauważmy, że w trakcie działania algorytmu Gale’a–Shapleya każda zaręczona kobieta zrywa zaręczyny tylko wtedy, gdy może się zaręczyć z kimś, kogo woli od obecnego partnera. Z tego wynika, że na koniec działania algorytmu  $k$  musiała być również zaręczona z kimś, kogo woli od  $m$ . Jest to sprzeczne z  $m \succ_k \Phi(k)$ , zatem  $\{m, k\}$  nie może być parą blokującą, co kończy dowód.  $\square$

Zauważmy, że gdybyśmy wykonali algorytm Gale’a–Shapleya z zamienionymi rolami i gdyby to kobiety oświadczały się mężczyznom, wynik działania algorytmu mógłby być inny, jednak zwrócone dopasowanie również byłoby stabilne. Co ciekawe, można pokazać, że oryginalna wersja algorytmu stawia mężczyzn w uprzywilejowanej sytuacji. Można nawet wykazać, że dopasowanie zwrócone przez algorytm Gale’a–Shapleya jest dla mężczyzn optymalne!

**Twierdzenie 2.** *Nie istnieje stabilne dopasowanie, w którym którykolwiek mężczyzna mógłby uzyskać lepszą partnerkę niż ta, którą przydzielił mu algorytm Gale’a–Shapleya.*

*Dowód.* Niech  $\Phi$  oznacza dopasowanie zwrócone przez algorytm Gale’a–Shapleya. Załóżmy nie wprost, że istnieje stabilne dopasowanie  $\Psi$ , w którym dla pewnego mężczyzny  $m_1$  zachodzi  $\Psi(m_1) \succ_{m_1} \Phi(m_1)$ . Oznaczmy  $k_1 = \Phi(m_1)$  i  $k_2 = \Psi(m_1)$ . W algorytmie Gale’a–Shapleya  $m_1$  oświadczył się  $k_2$  przed  $k_1$ , zatem  $k_2$  musiała odrzucić  $m_1$  na rzecz innego mężczyzny  $m_2$ . Oznacza to, że  $m_1$  oświadczył się  $k_1$  po tym, jak  $m_2$  oświadczył się  $k_2$ . Co więcej,  $m_2 \succ_{k_2} m_1$ . Ponieważ  $\Psi$  jest stabilnym dopasowaniem, musi zachodzić  $\Psi(m_2) \succ_{m_2} k_2$ . Oznaczmy  $k_3 = \Psi(m_2)$ . Wiemy, że  $m_2$  musiał się oświadczyć  $k_3$  przed  $k_2$ , zatem  $k_3$  odrzuciła  $m_2$  na rzecz  $m_3$ . Analogicznie,  $m_2$  oświadczył się  $k_2$  po tym, jak  $m_3$  oświadczył się  $k_3$ . Możemy kontynuować to rozumowanie, znajdując kolejne takie pary  $m_i, k_i$ , że  $k_i$  jest partnerką  $m_{i-1}$  w  $\Psi$  (zakładając  $i > 1$ ). Ponieważ mamy skończoną liczbę mężczyzn, w pewnym momencie musi nastąpić sytuacja, że znajdziemy cykl, czyli taką parę  $m_p$  i  $k_p$ , że  $k_p$  będzie partnerem pewnego wcześniej zdefiniowanego  $m_j$  (dla  $j < p$ ).

Otrzymujemy zatem sekwencje  $m_j, m_{j+1}, \dots, m_p$  oraz  $k_j, k_{j+1}, \dots, k_p$  takie, że  $m_j$  oświadczył się  $k_j$  po tym, jak  $m_{j+1}$  oświadczył się  $k_{j+1}$ ,  $\dots$ ,  $m_p$  oświadczył się  $k_p$  po tym, jak  $m_j$  oświadczył się  $k_j$ . Pokazuje to sprzeczność i kończy dowód.  $\square$

#### Literatura

- [1] D. Gale and L. S. Shapley. „College admissions and the stability of marriage”. *The American Mathematical Monthly*, 120(5):386–391, 1962.
- [2] K. Iwama and S. Miyazaki. „A survey of the stable marriage problem and its variants”. In *International Conference on Informatics Education and Research for Knowledge-Circulating Society*, pages 131–136, 2008.

## Zegar biologiczny tyka

W trakcie naszego życia przynajmniej kilkukrotnie spotykamy się z określeniem *zegar biologiczny*, lecz co ono dokładnie oznacza? Jak nasze ciało zdaje sobie sprawę z upływającego czasu? Czy zostawia on jakieś zmiany w naszych tkankach i organach? Jeśli tak, to czy jesteśmy w stanie je zmierzyć i na ile precyzyjnie możemy określić, ile czasu upłynęło?

Choć te pytania mogą brzmieć nieco frywolnie, są w istocie bardzo ważne w procesie identyfikacji anonimowych ciał. W całym zestawie informacji potrzebnych do zidentyfikowania ciała oszacowanie wieku jest zdecydowanie najbardziej istotne. Zadanie to jest na tyle ważne, że na przestrzeni lat opracowano wiele metod estymacji wieku – np. pomiar zasklepienia czaszki, obserwacja zmian w kościach miednicy czy nawet morfologia materiału pobranego z żeber. Niektóre z tych metod mogą mieć bardzo wysoką dokładność, jednak wymagają kosztownego sprzętu i często mogą być wykorzystywane tylko w przypadku szkieletów, a nie

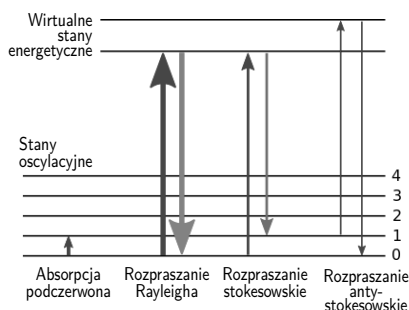
niedawno odnalezionych ciał. Najbardziej zaawansowane i obiektywne metody szacowania wieku we współczesnej nauce bazują na analizie DNA. Na podstawie próbek krwi możliwe jest określenie przybliżonego wieku z wysoką dokładnością.

Szukając innego rozwiązania, japońscy naukowcy z Kioto, prowadzeni przez Hiroshiego Ikegawę, rozważali możliwość wykorzystania spektroskopii Ramana do analizy ludzkiej skóry, dzięki czemu opracowano by nowe, wiarygodne i łatwo dostępne narzędzie do szacowania wieku. Ich pomysł polegał na analizie widm promieniowania lipidów i białek znajdujących się w skórze, które można pobrać podczas autopsji.

Analiza widma promieniowania uzyskana w spektroskopii ramanowskiej jest powszechnie używana w chemii, ponieważ dostarcza „odcisk palca” cząsteczek, na podstawie którego można je później zidentyfikować. Japońscy naukowcy wierzyli, że emisja

Joanna M. OLAS

Doktorantka, Instytut Fizyki PAN



Rys. 1. Efekt Ramana polega na tym, że w widmie światła rozproszonego na danej substancji występują, obok fotonów o takiej samej energii jak fotony padające, fotony o zmienionej energii.

Zdecydowana większość fotonów zachowuje energię, dając pasmo Rayleigha. Zdarza się jednak, że emitowany foton ma mniejszą energię niż padający, a różnica energii zostaje zużyta na wzbudzenie drgań cząsteczki – rejestruje się wtedy światło rozproszone o zmniejszonej częstotliwości, pasmo stokesowskie. Jeżeli cząstka pochłaniająca foton była w stanie wzbudzonym (drgającym), to emitowany foton może mieć również większą energię niż padający, ponieważ cząsteczka przekazuje swój nadmiar energii kreowanemu fotonowi i przechodzi w stan podstawowy – rejestruje się wtedy światło rozproszone o zwiększonej częstotliwości, pasmo antystokesowskie.

Pasma stokesowskie i antystokesowskie o odpowiednio zmniejszonej i zwiększonej częstotliwości są położone symetrycznie po obu stronach pasma Rayleigha. Są one na ogół około 1000 razy słabsze od pasma Rayleigha, a ich liczba i położenie zależą od budowy cząsteczek rozpraszających.

ramanowska obserwowana z powierzchni próbek skóry, czyli biofizyczne połączenie między „odciskiem palca” a specyficznymi zmianami w strukturze skóry, może być podstawą do określenia ludzkiego wieku. Wiadomo było, że struktury białek zwijają się wraz z upływem czasu. Z tego powodu można postrzegać ten proces jako „zegar biologiczny”, który nosimy w skórze.

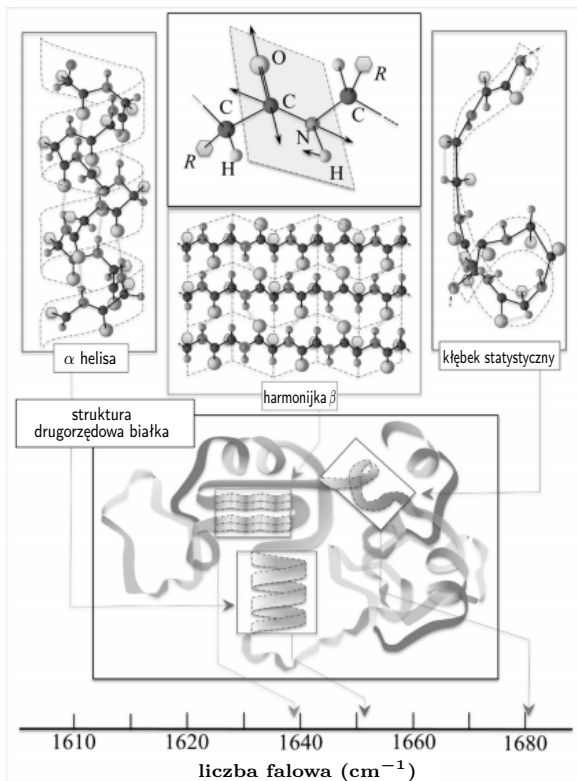
Udowodniono, że białka w naszej skórze zwijają się wraz z upływem czasu, przechodząc w kilka charakterystycznych mezostruktur, nazywanych często strukturami drugiego rzędu. Każda z nich ma inne widmo promieniowania, które można zaobserwować w zakresie liczb falowych od  $1630\text{ cm}^{-1}$  do  $1690\text{ cm}^{-1}$ . Gdy jesteśmy młodzi, nasze białka w skórze ułożone są (głównie, choć nie wszystkie) w strukturę  $\beta$ -kartki (rys. 2). Wraz z upływem czasu białka zmieniają swoje uporządkowanie i nieodwracalnie zwijają się w strukturę nazywaną  $\alpha$ -helisą. Każda z tych konfiguracji oraz ich wzajemny stosunek mogą być zaobserwowane w zmierzonym widmie promieniowania. Zespół Ikegayi postanowił znaleźć relację pomiędzy zmianami stosunku poszczególnych struktur a procesem starzenia.

Aby udowodnić tę teorię, pobrano i przeanalizowano ponad 130 próbek skóry od kobiet i mężczyzn w wieku od kilku miesięcy do 70 lat. Było to podstawą do opracowania modelu, który z dość dobrą dokładnością pozwala na określenie wieku ciała (granica błędów to pojedyncze lata). Choć inne metody określania wieku mogą mieć lepszą dokładność (np. metody bazujące na radiografii stomatologicznej pozwalają na uzyskanie dokładności 0,3–0,8 roku w niektórych grupach badanych, średni błąd w metodach DNA wynosi 3,6 roku i w dużej mierze zależy od miejsca, z którego została pobrana próbka), w większości przypadków wymagają dobrze wyposażonych laboratoriów i specjalistycznej kadry do przeprowadzenia analizy. Natomiast pomiar z użyciem spektroskopii ramanowskiej jest dużo łatwiejszy do przeprowadzenia.

Oczywiście badania zespołu Ikegayi, jak wszystkie inne badania, mają pewne ograniczenia: nie dostarczają innych danych biologicznych, nie zaobserwowano znaczącej różnicy pomiędzy próbkami pochodzącymi od mężczyzn i od kobiet, nie można na tej podstawie ustalić np. przyczyny śmierci. Pewnym utrudnieniem

może być to, że w badaniach Ikegayi oszacowanie wieku wśród ludzi młodych było obarczone większym błędem niż u ludzi starszych. Jest to spowodowane tym, że tempo zwijania się białek jest bardziej zróżnicowane wśród młodych ludzi: decydują o nim geny, ale też poziom stresu, brak snu czy dieta. Zespół Hiroshiego Ikegayi deklaruje, że będzie nadal rozwijać swoją technologię. Choć technologia ta do tej pory wykorzystywała materiał biologiczny pochodzący od osób zmarłych, być może w niedługim czasie będzie mogła być używana również w przypadku żywych.

Aktualnie, w przypadku identyfikacji osób zmarłych, bardzo istotne jest, aby metody identyfikacji mogły być wykorzystywane przez ludzi bez specjalistycznego wykształcenia i w miejscach, gdzie ciała zostały znalezione. Konieczność transportu materiału biologicznego do specjalistycznych laboratoriów powoduje, że ważne informacje o miejscu zbrodni mogą ulec zniszczeniu. Niestety metody pozwalające na spełnienie tych warunków mają stosunkowo małą dokładność. Wszystko zmienić mogą niedawno opracowane spektrometry ramanowskie, które nie wymagają wyposażonych po brzegi laboratoriów oraz specjalistycznie wykształconej kadry. Już dziś każdy oddział policji w Japonii posiada takie urządzenie, aby sprawniej wykrywać narkotyki w miejscach zbrodni. Ręczne spektrometry ramanowskie w kilka minut dostarczają wynik pomiaru, nie potrzebując przy tym drogich odczynników. Biorąc pod uwagę niedawne wyniki badań zespołu Hiroshiego Ikegayi, możemy optymistycznie zakładać, że za jakiś czas określanie wieku w miejscach zbrodni przy pomocy przenośnych spektroskopów ramanowskich będzie standardową procedurą.



Rys. 2. Rysunek pochodzi z pracy zespołu Hiroshiego Ikegayi *A Raman algorithm to estimate human age from protein structural variations in autopsy skin samples: a protein biological clock*. Sci Rep 11, 5949 (2021). <https://rdcu.be/czouh>

# Sinus i cosinus w akcji

Jarosław GÓRNICKI\*

\* Wydział Matematyki i Fizyki  
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Równania potrafią łączyć różne światy (np.  $E = mc^2$ ), a w matematyce zjawiska dyskretne z ciągłymi. Odkrywanie tożsamości zawierających działania nieskończone jest trudne, ale mogą je tworzyć wszyscy, którzy znają elementarne wzory

$$(1) \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha.$$

Idea jest prosta: stosując wzory (1) dla wybranego kąta (np.  $5^\circ, 9^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 18^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 27^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 36^\circ, 40^\circ$  oraz ich dopełnień do  $90^\circ$ ), w skończonej liczbie kroków uzyskujemy równość, w której po obu jej stronach jest taki sam składnik. Iterowanie w nieskończoność tak otrzymanej „pętli” generuje wzór.

*Przykład 1.* Ponieważ  $2 \sin 18^\circ = \sqrt{2 - 2 \cos 36^\circ}$  oraz

$$2 \cos 36^\circ = 2 \sin 54^\circ = \sqrt{2 - 2 \cos 108^\circ} = \sqrt{2 + 2 \sin 18^\circ},$$

więc  $2 \sin 18^\circ = \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \sin 18^\circ}}$  i

$$(2) \quad \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots}}}} = 2 \sin 18^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

przy czym ostatni wzór wynika z analizy dziesięciokąta foremnego.

**Uwaga.** Ciąg

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad a_4 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}, \dots$$

jest zbieżny. Ponieważ

$$a_3 < a_4 < a_7 < a_8 < a_{11} < a_{12} \dots < a_{10} < a_9 < a_6 < a_5 < a_2 < a_1,$$

więc:

- podciąg  $\{a_2, a_6, a_{10}, \dots\}$ , jako ograniczony i malejący, jest zbieżny do granicy  $\alpha \in [a_3, a_1]$ ,
- podciąg  $\{a_4, a_8, a_{12}, \dots\}$ , jako ograniczony i rosnący, jest zbieżny do granicy  $\beta \in [a_3, a_1]$ .

Zatem granice  $\alpha, \beta$  muszą być rozwiązaniami ciągłego równania funkcyjnego,  $\sqrt{2 - \sqrt{2 + x}} = x$ .

Zamieniamy to równanie na układ równań  $\begin{cases} x = \sqrt{2 - y}, \\ y = \sqrt{2 + x}, \end{cases}$  każde z nich podnosimy do

kwadratu, odejmujemy je stronami i tworzymy postać iloczynową. Ponieważ nasze równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie:  $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \in [a_3, a_1]$ , więc  $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  i ciąg  $\{a_n\}$  jest zbieżny.

Podobne postępowanie (choć istotnie trudniejsze) pokazuje zbieżności działań nieskończonych w kolejnych przykładach.

*Przykład 2.* Ponieważ

$$(2 \sin 10^\circ)^2 = 2 - 2 \cos 20^\circ,$$

$$(2 \cos 20^\circ)^2 = 2 + 2 \cos 40^\circ,$$

$$(2 \cos 40^\circ)^2 = 2 + 2 \cos 80^\circ = 2 + 2 \sin 10^\circ,$$

więc

$$2 \sin 10^\circ = \sqrt{2 - 2 \cos 20^\circ} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos 40^\circ}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \sin 10^\circ}}},$$

a stąd

$$(3) \quad \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \dots}}}} = 2 \sin 10^\circ,$$

przy czym cyklicznie powtarzają się znaki  $-, +, +$ .

Korzystając z bogatego arsenału wzorów trygonometrycznych, możemy rozpatrywać bardziej skomplikowane przypadki.

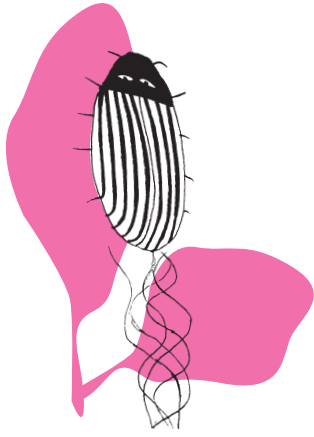


## Rozwiązanie zadania F 1041.

„Ośrodek słabo przewodzący” otaczający elektrody oznacza, że materiał elektrod znacznie lepiej przewodzi prąd niż ośrodek, w którym się znajdują.

W dobrym przybliżeniu powierzchnia każdej z elektrod jest więc powierzchnią ekwipotencjalną. Niech potencjał jednej elektrody wynosi  $V$ , a drugiej  $-V$ . Odległość między elektrodami jest znacznie większa od ich rozmiarów, a więc w pobliżu powierzchni każdej z nich, z dobrym przybliżeniem, pole elektryczne jest sferycznie symetryczne (jak od ładunku punktowego). Wartość pola elektrycznego na powierzchni elektrody równa jest  $E = V/r$ . W ośrodku przewodzącym gęstość prądu  $\vec{j} = \vec{E}/\rho$ . Całkowity prąd  $I$  wypływający z elektrody wynosi  $I = 4\pi r^2 j$ . Taki sam prąd wpłynie na drugą elektrodę. Napięcie  $U$  między elektrodami wynosi:  $U = 2V$ . Otrzymujemy:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2V}{4\pi r^2 j} = \frac{2V\rho}{4\pi r^2 E} = \frac{\rho}{2\pi r}.$$



Przykład 3. Ponieważ

$$\begin{aligned}
 (1 + 2\sqrt{3} \sin 20^\circ)^2 &= 1 + 4\sqrt{3} \sin 20^\circ + 12 \sin^2 20^\circ = \\
 &= 1 + 4\sqrt{3} \sin 20^\circ + 6 - 6 \cos 40^\circ = \\
 &= 7 + 4\sqrt{3} \sin 20^\circ - 4\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40^\circ = \\
 &= 7 + 4\sqrt{3} \sin 20^\circ - 4\sqrt{3} \cos 30^\circ \cos 40^\circ = \\
 &= 7 + 4\sqrt{3} \sin 20^\circ - (2\sqrt{3} \cos 70^\circ + 2\sqrt{3} \cos 10^\circ) = \\
 &= 7 + 2\sqrt{3} \cos 70^\circ - 2\sqrt{3} \cos 10^\circ = \\
 &= 7 - 4\sqrt{3} \sin 30^\circ \sin 40^\circ = \\
 &= 7 - 2\sqrt{3} \sin 40^\circ = \\
 &= 8 - (1 + 2\sqrt{3} \sin 40^\circ)
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 (1 + 2\sqrt{3} \sin 40^\circ)^2 &= \dots = 8 + (2\sqrt{3} \sin 80^\circ - 1), \\
 (2\sqrt{3} \sin 80^\circ - 1)^2 &= \dots = 8 - (1 + 2\sqrt{3} \sin 20^\circ),
 \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned}
 1 + 2\sqrt{3} \sin 20^\circ &= \sqrt{8 - (1 + 2\sqrt{3} \sin 40^\circ)} = \sqrt{8 - \sqrt{8 + (2\sqrt{3} \sin 80^\circ - 1)}} = \\
 &= \sqrt{8 - \sqrt{8 + \sqrt{8 - (1 + 2\sqrt{3} \sin 20^\circ)}}}.
 \end{aligned}$$

Zatem

$$(4) \quad \sqrt{8 - \sqrt{8 + \sqrt{8 - \sqrt{8 - \dots}}}} = 1 + 2\sqrt{3} \sin 20^\circ,$$

przy czym cyklicznie powtarzają się znaki  $-$ ,  $+$ ,  $-$ .

Jednocześnie z tych samych zależności mamy

$$(5) \quad \sqrt{8 - \sqrt{8 - \sqrt{8 + \sqrt{8 - \dots}}}} = 2\sqrt{3} \sin 80^\circ - 1 = 2\sqrt{3} \cos 10^\circ - 1,$$

z powtarzającymi się cyklicznie znakami  $-$ ,  $-$ ,  $+$  lub

$$(6) \quad \sqrt{8 + \sqrt{8 - \sqrt{8 - \sqrt{8 + \dots}}}} = 1 + 2\sqrt{3} \sin 40^\circ,$$

z powtarzającymi się cyklicznie znakami  $+$ ,  $-$ ,  $-$ .

Przykład 4. Korzystając z równości

$$\begin{aligned}
 1 + 4 \sin 10^\circ &= \sqrt{11 - 2(1 + 4 \sin 50^\circ)} = \sqrt{11 - 2\sqrt{11 + 2(4 \sin 70^\circ - 1)}} = \\
 &= \sqrt{11 - 2\sqrt{11 + 2\sqrt{11 - 2(1 + 4 \sin 10^\circ)}}},
 \end{aligned}$$

otrzymamy wzór

$$(7) \quad \sqrt{11 - 2\sqrt{11 + 2\sqrt{11 - 2\sqrt{11 - \dots}}}} = 1 + 4 \sin 10^\circ,$$

z powtarzającymi się cyklicznie znakami  $-$ ,  $+$ ,  $-$ .

Przykład 5. Równość

$$\begin{aligned}
 1 + 4\sqrt{3} \sin 20^\circ &= \sqrt{23 - 2(4\sqrt{3} \sin 80^\circ - 1)} = \sqrt{23 - 2\sqrt{23 + 2(1 + 4\sqrt{3} \sin 40^\circ)}} = \\
 &= \sqrt{23 - 2\sqrt{23 + 2\sqrt{23 + 2(1 + 4\sqrt{3} \sin 20^\circ)}}}
 \end{aligned}$$

daje wzór

$$(8) \quad \sqrt{23 - 2\sqrt{23 + 2\sqrt{23 + 2\sqrt{23 - \dots}}}} = 1 + 4\sqrt{3} \sin 20^\circ,$$

z powtarzającymi się cyklicznie znakami  $-$ ,  $+$ ,  $+$ .

Możliwości jest wiele, każdy może mieć swój wzór i zaproponować „kosmicznie” trudne zadanie: *obliczyć* ... i tu wstawić lewą stronę wzoru (i),  $i = 2, 3, \dots$



#### Rozwiązanie zadania F 1042.

Pole elektryczne Ziemi, w dobrym przybliżeniu, ma symetrię sferyczną – jak pole ładunku punktowego. Przyjmijmy, że ładunek Ziemi wynosi  $Q$ . Na wysokości  $h$  nad Ziemią pole elektryczne będzie polem ładunku Ziemi i ładunku  $q$  zawartego w sferycznej warstwie atmosfery o grubości  $h$ . Mamy:

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \\
 E_1 &= \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 (R + h)^2} \approx \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{2h}{R}\right).
 \end{aligned}$$

W ostatnim z wyrażen możemy pominąć składnik  $2h/R$  w nawiasie. Otrzymujemy:

$$q = 4\pi\epsilon_0 R^2 (E_1 - E_0).$$

Objętość warstwy atmosfery o grubości  $h \ll R$  wynosi  $V \approx 4\pi R^2 h$ . Ostatecznie:

$$d = \frac{\epsilon_0 (E_1 - E_0)}{h}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych:  $d \approx 4,4 \cdot 10^{-13} \text{ C/m}^3$ .

# Szukanie dziury w całym w Wielkim Zderzaczu Hadronów

Sebastian TROJANOWSKI\*

\*AstroCeNT, Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika Polskiej Akademii Nauk

Postęp naukowy w dużej mierze opiera się na nieustannym odkrywaniu luk w poprzednich rozumowaniach. Luki te często prowadzą do całkiem nowych pomysłów i idei. Przysłowiowe szukanie dziury w całym okazuje się więc zajęciem nie tylko przynoszącym satysfakcję, ale również bardzo pożytecznym.

Jednym z głównych zadań Wielkiego Zderzacza Hadronów (*Large Hadron Collider*, LHC) jest poszukiwanie nowych cząstek elementarnych. W tym celu doprowadzamy do około 1 mld zderzeń protonów na sekundę, a następnie analizujemy produkty powstałe po zderzeniu. Wykorzystujemy do tego podziemne detektory o rozmiarach zbliżonych do budynków mieszkalnych, opierając się przy tym na pracy wielkich międzynarodowych zespołów eksperymentalnych, w tym badaczy z Polski. Przed zderzeniem protony są rozpędzane w akceleratorze do prędkości niezwykle bliskich prędkości światła,  $v = 0,999999991c$ . Detektory umieszczone wokół punktu zderzeń protonów są bardzo szczelnie wypełnione elektroniką, ponieważ nie chcemy, aby jakakolwiek istotna informacja na temat zderzenia umknęła naszej uwadze.

Prędkości protonów w Wielkim Zderzaczu można oszacować za pomocą czynnika Lorentza:  $\gamma = E_p/m_p$ , znając energię protonów w zderzaczu,  $E_p = 7000$  GeV, ich masę,  $m_p \sim 1,67 \times 10^{-27}$  kg, oraz pamiętając, że  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ .

Nasze poszukiwania koncentrują się typowo na próbie znalezienia sygnału pochodzącego od coraz bardziej masywnych nowych cząstek, do których wytworzenia potrzeba coraz potężniejszych zderzaczy. Taka strategia badań doprowadziła do wielu wspaniałych odkryć w XX wieku, choć niestety ostatnie kilka lat pracy LHC nie dostarczyło nam w pełni uznanych, naukowych dowodów na istnienie kolejnych nowych cząstek. Udało nam się jednak odkryć bozon Higgsa i tym samym potwierdzić prawdziwość kluczowego mechanizmu odpowiedzialnego m.in. za nadanie mas bozonom cechowania pośredniczącym w oddziaływaniach słabych.

W odróżnieniu od oddziaływań słabych, w oddziaływaniach elektromagnetycznych pośredniczą bezmasowe fotony.

Pomyślmy nieco głębiej o dość dramatycznym zdarzeniu, w którym dwa rozpędzone protony wpadają na siebie, co prowadzi do powstania nowej cząstki o masie  $m$  ponad 100 razy większej niż masa  $m_p$  każdego z protonów z osobna (dla przykładu, masa bozonu Higgsa wynosi  $m \simeq 133 m_p$ ). Proces ten niewątpliwie wymaga, aby nie mała część pędu obu protonów przemieniła się w masę spoczynkową i pęd nowej cząstki. W języku fizyki mówimy wówczas o dużym przekazie pędu pomiędzy zderzającymi się protonami. Nietrudno się domyślić, że nowo powstała cząstka może w dość losowy sposób lecieć w niemal dowolnym kierunku (czyli w przybliżeniu izotropowo) od punktu zderzenia protonów. W żargonie fizyków powiedzielibyśmy, że jej pęd poprzeczny  $p_T$ , czyli składowa wektora pędu skierowana prostopadle do kierunku ruchu protonów, może być bardzo duży. W istocie często jest on zbliżony do masy nowo powstałej cząstki,  $p_T \sim m$ . Nasze eksperymenty powinny więc pokrywać większą część obszaru wokół miejsca zderzenia protonów, aby nowe cząstki nie mogły unikać detekcji.



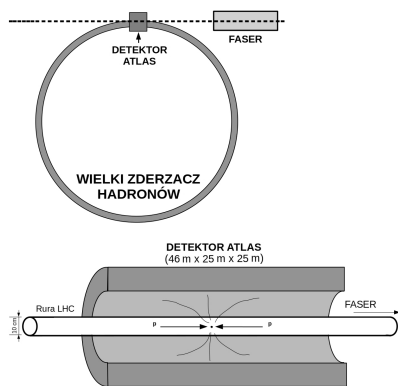
**Rozwiązanie zadania M 1701.** Zauważmy, że odcinki  $BO$  i  $DK$  są środkowymi trójkąta  $ADB$ , więc przecinają się w takim punkcie  $X$ , że  $BX : XO = 2 : 1$ . Rozważmy teraz trójkąt  $CBE$  oraz jego środkowe  $BO$  i  $EN$ . Argumentując w podobny sposób, otrzymujemy, że przecinają się w punkcie dzielącym odcinek  $BO$  w stosunku  $2 : 1$ , licząc od wierzchołka  $B$ , czyli w punkcie  $X$ . Wobec tego proste  $DK$ ,  $EN$  i  $BO$  przecinają się w punkcie  $X$ .

O detektorze IceCube pisał Paweł Przewłocki w  $\Delta_{16}^3$ .

Nieco inna logika od lat napędza niezwykle płodne badania neutrin, które bez wątpienia są najbardziej nieuchwytnymi znanymi nam cząstkami elementarnymi. Neutrino skrywają swe tajemnice tak mocno dzięki temu, że bardzo słabo oddziałują z pozostałymi składnikami materii. Dlatego w tym wypadku rozmiar eksperymentów też ma znaczenie. Przykładowo detektor IceCube ma wielkość około  $1 \text{ km}^3$  i jest umieszczony 1450 m pod arktycznym lodem w pobliżu bieguna południowego. Im większy jest taki eksperyment, tym zwiększa się szansa na uchwycenie bardzo rzadkich procesów z udziałem neutrin, podczas gdy ogromna liczba takich cząstek przelatuje przez detektor bez żadnego widocznego wpływu na urządzenia pomiarowe. W ostatnich latach takie podejście dało przyczynek do rozwoju programu badawczego, w którym analizuje się możliwość istnienia wielu innych lekkich nowych cząstek tego typu.

Co istotne, takie nowe cząstki mogą być stabilne jak neutrino, ale mogą też rozpadać się na inne cząstki po przeleceniu pewnej odległości.

Skala obu tych programów badawczych dotyczących zderzaczy oraz pomiarów neutrin może imponować. Okazuje się jednak, że z tych dwóch wielkich całości można też złożyć jeden bardzo niewielki nowatorski projekt.



Schemat detektora ATLAS będącego częścią Wielkiego Zderzacza Hadronów



**Rozwiązanie zadania M 1699.**  
Odpowiedź: 0 lub 5.

Niech  $n$  – dana liczba,  $t$  – jej reszta z dzielenia przez 40 i z dzielenia przez 625. Wtedy liczba  $n - t$  jest podzielna przez 40 i przez 625, czyli dzieli się przez  $NWW(40, 625) = 5000$ . Oznacza to, że różnica  $n - t$  kończy się na 5000 lub 0000. Ponadto reszta  $t$  jest mniejsza niż 40. Dlatego cyfrą w miejscu tysiąca może być 0 lub 5.

Obie sytuacje są możliwe, np. liczby 10000 i 15000 (obie te liczby mają reszty równe 0 po podzieleniu przez 40 i 625).

A jak nadajemy masę ciemnemu fotonowi? Odpowiedzialne za to może być... „ciemne” pole Higgsa. Ale to już temat na osobną dyskusję.

Ciemne światło? Nie brnijmy dalej w tę analogię...

Takim właśnie zagadnieniem autor niniejszego artykułu miał przyjemność zajmować się kilka lat temu wraz z trójką innych badaczy zatrudnionych wówczas na Uniwersytecie Kalifornijskim w Irvine. Poszukiwaliśmy luk w wielkoskalowych eksperymentach w LHC, licząc, że może uda nam się znaleźć jakiś innowacyjny sposób spojrzenia na zderzacz. Prawdopodobnie jedyną opcją, której rozważanie wcześniej całkowicie nie miało sensu, było spojrzenie na kierunek wzdłuż osi wiązki zderzających się protonów (patrz rysunek). Na pozór nie sposób tam przecież umieścić detektora, bo tam właśnie podróżują protony w swoim nieustannym pędzie ku unicestwieniu w zderzacz. Z drugiej strony, stwarzało to możliwość, że inni badacze przeoczyli jakąś mniej oczywistą naukową okazję.

Wspomnieliśmy wyżej o ciężkich cząstkach, które mogą być produkowane w LHC. Są to jednak bardzo rzadkie zdarzenia. W takim razie, co się dzieje przy większości zderzeń protonów w LHC, których jest przecież tak wiele? Typowa odpowiedź udzielana jeszcze kilka lat temu brzmiałaby: „nic ciekawego”. Jest w tym ziarno prawdy, bo większość takich zderzeń prowadzi do produkcji znanych nam cząstek, np. lekkich mezonów, jak piony, kaony itp. Przykładowo w nadciągającym etapie prac LHC, który ma się na dobre rozpocząć na wiosnę 2022 roku, spodziewamy się wyprodukować oszałamiającą liczbę ponad  $10^{17}$  neutralnych pionów  $\pi^0$  i podobną liczbę pionów naładowanych. Pamiętamy jednak, że  $p_T \sim m$ , a w przypadku pionów  $m \sim 0,1 m_p$ , więc są one typowo produkowane z niskim pędem poprzecznym. Ich całkowity pęd może jednak być bardzo duży,  $p \sim 10^3 m_p$ . Jest on dyktowany przez energię zderzeń w LHC. W rezultacie spora część takich lekkich mezonów będzie charakteryzowała się bardzo niewielkim stosunkiem  $p_T/p \ll 1$ . W praktyce oznacza to, że ich pęd prawie w całości jest skierowany wzdłuż osi wiązki i podróżują one wraz z protonami w rurze akceleratora. W istocie są niemal wystrzeliwane z punktu zderzenia protonów w bardzo skupionej wiązce pędzącej do przodu.

Ta prosta obserwacja zaowocowała pomysłem na nowy eksperyment, nazwany FASER (*ForwArd Search ExpeRiment*) w nawiązaniu do fazera znanego fanom serialu „Star Trek”. Okazało się, że powyższa wiązka jest tak mocno skupiona wokół osi zderzenia protonów, że nawet bardzo niewielki detektor o promieniu 20 cm umieszczony na tej osi około pół kilometra dalej jest w stanie zaobserwować efekty jej istnienia – np. w postaci dużej wiązki wysokoenergetycznych mionów pochodzących z LHC. Pierwszym celem tego eksperymentu jest poszukiwanie śladów rozpadów długo żyjących lekkich nowych cząstek, które mogą być produkowane podobnie do wspomnianych wyżej pionów. Ich istnienie mogłoby być powiązane np. z zagadką istnienia ciemnej materii we Wszechświecie.

Same takie cząstki są niestabilne, więc nie mogą być ciemną materią wypełniającą Wszechświat od zarania dziejów. Mogą one jednak pełnić funkcję bozonów pośredniczących w jej oddziaływaniach ze znaną nam materią, podobnie jak bozony z Modelu Standardowego. Co ciekawe, jednym z flagowych pomysłów jest tzw. „ciemny foton”, który mógłby być masywnym bratem zwykłego fotonu. Co istotne, taki ciemny foton może dość silnie oddziaływać z ciemną materią, a jednocześnie sporo słabiej, ale niezaniebawalnie, ze znanymi nam cząstkami. W ten sposób może on stanowić okno na tajemniczy świat cząstek wykraczający poza Model Standardowy. Z pewnym przymrużeniem oka można powiedzieć, że ciemny foton mógłby być kwantem światła w ciemnym sektorze Wszechświata. Więcej o FASERze mogliśmy przeczytać w  $\Delta_{19}^{05}$ , w artykule Krzysztofa Turzyńskiego *Zrób sobie eksperyment*.

Na tym jednak historia się nie kończy. Nie od dziś wiadomo, że rozpady lekkich mezonów są znakomitym źródłem neutrin. Efektywnie więc LHC jest fabryką wysokoenergetycznych neutrin, które tylko czekają na pomiar. W tym wypadku wiązka neutrin jest również bardzo skupiona, co umożliwia skuteczne pomiary nawet bardzo niewielkim detektorom. Pierwsza taka wstępna obserwacja kandydatów na neutrina w historii LHC została niedawno ogłoszona przez zespół badaczy współpracujących w ramach FASER. Opiera się ona na instrumencie pomiarowym o rozmiarach rzędu  $(10 \text{ cm})^3$ , co trudno jest nawet

zestawiać ze współczesnymi ogromnymi eksperymentami neutrinowymi.

Okazji do współdziałania różnych rodzajów eksperymentów w celu lepszego poznania natury neutrin w najbliższych latach będzie dużo więcej. W szczególności twórcy eksperymentu FASER planują prowadzenie badań przy wykorzystaniu specjalnego detektora FASER $\nu$  umieszczonego tuż przed głównym detektorem FASER. Będzie on nieco większy niż wyżej opisane podręczne urządzenie. FASER $\nu$  o długości 1 m umożliwi obserwację około  $10^4$  zderzeń neutrin z jądrami atomów wolframu. Głównym celem eksperymentu jest bardzo dokładne zmierzenie częstości i przebiegu tych procesów przy energiach neutrin około 1000 GeV, dla których nie zostało to dotychczas zrobione. W tym celu zastosowany zostanie nowoczesny detektor wykorzystujący emulsję filmową, który będzie mógł niejako robić zdjęcia poszczególnym zderzeniom i umożliwi wgląd w szczegółowy rozkład ich produktów.

Okazuje się, że lepsze zrozumienie procesu produkcji neutrin w zderzeniach protonów i ich późniejszych oddziaływań ma też istotne znaczenie dla rozwiązania niektórych zagadek związanych z analizą zderzeń wysokoenergetycznych promieni kosmicznych z atmosferą ziemską, jak również dla naszego rozumienia oddziaływań silnych wiążących jądra atomowe (tzw. chromodynamika kwantowa).

Taki wysokoenergetyczny proton docierający z przestrzeni kosmicznej do Ziemi ma energię  $E_p = 10^8$  GeV i zderza się ze „statycznym” protonem wewnątrz jądra tlenu lub argonu w atmosferze Ziemi. W układzie środka masy energia tego zderzenia jest opisana zmienną Mandelstama,  $s \simeq \sqrt{2E_p m_p} \simeq (14 \text{ TeV})^2$ , co odpowiada energii zderzeń w LHC. Pamiętajmy przy tym, że  $1 \text{ TeV} = 1000 \text{ GeV}$ .

Wyniki eksperymentów FASER i FASER $\nu$  będą więc miały wpływ na szereg dziedzin fizyki cząstek. Dostarczą też one nowych danych dotyczących fizyki neutrin taonowych, które nieustannie stanowią ogromny ból

głowy dla kolejnych pokoleń eksperymentatorów. Dość wspomnieć, że od czasu ich pierwszej doświadczalnej bezpośredniej obserwacji na przełomie tysiącleci w detektorze DONUT nadal dysponujemy zaledwie garścią takich zdarzeń kiedykolwiek zmierzonych z dużą dokładnością oraz dodatkowymi obserwacjami bazującymi na zjawisku oscylacji, które raportowały w późniejszych latach zespoły eksperymentalne IceCube, OPERA oraz SuperKamiokande.

Trwają też dyskusje nad rozszerzeniem tego programu badawczego na dalsze lata działania LHC. W tym celu rozważa się stworzenie jeszcze większego laboratorium podziemnego (*Forward Physics Facility*, FPF), który mógłby pomieścić więcej detektorów umieszczonych na linii osi zderzenia wiązki protonów w LHC. Wśród nich znaleźć by się mogła większa wersja eksperymentu FASER, ale też np. niedawno zaproponowany detektor FLArE (*Forward Liquid Argon Experiment*). Miałby on wykorzystywać technologię ciekłoargonowej komory projekcji czasowej oraz fotonowielacze zbierające pierwszy sygnał zderzenia w detektorze w postaci błysku (*flare*) scyntylacyjnego. Taki eksperyment mógłby też służyć do bezpośredniej detekcji stabilnych lekkich cząstek ciemnej materii, które mogą być nieustannie produkowane w LHC, lub też wykluczyć tego typu scenariusze teoretyczne. Pomimo pandemii w ostatnich miesiącach zorganizowano już (zdalnie) dwa duże międzynarodowe spotkania fizyków zainteresowanych rozbudową tego programu badawczego w LHC. Wykonano też szereg wstępnych prac inżynierskich w celu dokładnego zaplanowania nowego laboratorium i oszacowania kosztów jego budowy. Obecne szacunki opiewają na około 0,5–1% kosztów budowy LHC.

I tak na naszych oczach rodzi się całkiem nowy kierunek badawczy w LHC, co w tym przypadku ma znaczenie niemal dosłowne.

## Ciągi Dolda i punkty periodyczne

Grzegorz GRAFF\*, Mateusz SCHARMACH\*\*

Albrecht Dold (1928–2011), wybitny niemiecki matematyk, był autorem wielu eleganckich konstrukcji topologicznych. W jego pracy z 1984 roku pojawił się pewien specyficzny układ kongruencji, które zajmują ważne miejsce w teorii układów dynamicznych i topologii. Okazuje się, że idea, jaka leży u ich podłoża, jest o wiele bardziej uniwersalna. Artykuł [2] kończy się następującą definicją, która dla nas stanowić będzie punkt wyjścia.

Ciąg całkowitoliczbowy  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nosi nazwę *ciągu Dolda*, jeżeli dla wszystkich  $n \geq 1$

$$(1) \quad \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) a_k \equiv 0 \pmod{n}.$$

Funkcja  $\mu$  występująca w powyższym wzorze to klasyczna funkcja Möbiusa, zdefiniowana następująco:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } n = 1, \\ 0 & \text{jeżeli } n \text{ ma dzielnik będący kwadratem,} \\ (-1)^r & \text{jeżeli } n \text{ jest iloczynem } r \text{ różnych liczb pierwszych.} \end{cases}$$

\* Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska  
\*\* Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



**Parę słów o  $\mu$ :** funkcja  $\mu$  Möbiusa ma wiele pożytecznych własności. Nietrudno udowodnić na przykład, że jeśli liczby naturalne  $a$  i  $b$  są względnie pierwsze, to  $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$ . Ponadto, jeśli  $n > 1$ , to  $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ , bowiem jedyne niezerowe składniki sumy po lewej stronie występują dla  $d$  będących iloczynami różnych pierwszych dzielników  $n$ , a liczba takich iloczynów parzystej długości jest równa liczbie iloczynów długości nieparzystej. Rozważmy teraz dowolny ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i niech  $\tilde{a}_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \tilde{a}_d &= \sum_{d|n} \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) a_e \stackrel{(a)}{=} \sum_{e|n} \sum_{(d|n: e|d)} \mu\left(\frac{d}{e}\right) a_e = \\ &= \sum_{e|n} a_e \sum_{(d|n: e|d)} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \stackrel{(b)}{=} \sum_{e|n} a_e \sum_{h|(n/e)} \mu(h) \stackrel{(c)}{=} a_n, \end{aligned}$$

gdzie równość (a) wynika z zmiany kolejności sumowania, (b) to podstawienie  $h = d/e$ , a (c) jest wnioskiem z uzasadnionego wcześniej faktu, że jeśli  $n/e > 1$ , to  $\sum_{h|(n/e)} \mu(h) = 0$ . Zauważmy ponadto, że jeśli pewien ciąg  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  spełnia  $a_n = \sum_{d|n} b_d$ , to jest on jednoznacznie wyznaczony przez  $(a_n)$ , musi być zatem  $b_n = \tilde{a}_n$  – stwierdzenie to nosi nazwę wzoru inwersyjnego Möbiusa.

Na pierwszy rzut oka ciągi Dolda wydają się dosyć zagadkowe: np. ciąg stały jest ciągiem Dolda (co wynika z jednej z przedstawionych wyżej własności funkcji  $\mu$ ), ale już tak prosty ciąg, jak  $c = (1, 2, 3, \dots)$ , nim nie jest, gdyż już dla  $n = 2$  nie spełnia wymaganych kongruencji:  $c_2 - c_1 \not\equiv 0 \pmod{2}$ .

Okazuje się, że ciągi Dolda mają ścisły związek z punktami stałymi iteracji odwzorowań. Oznaczmy przez  $\mathbf{Fix}(f)$  liczbę punktów stałych odwzorowania  $f$ , przeprowadzającego pewną przestrzeń  $X$  w siebie. Wówczas, niezależnie od odwzorowania, ciąg  $(\mathbf{Fix}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem Dolda! Podamy za chwilę dowód tej niebanalnej obserwacji. Zaczniemy od kilku podstawowych definicji i faktów. Punkt periodyczny  $x$  o okresie minimalnym  $n$  to taki punkt, że  $f^n(x) = x$ , ale dla  $1 \leq k < n$   $f^k(x) \neq x$ . Zdefiniujemy zbiór  $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$  obejmujący wartości kolejnych iteracji  $f$  w punkcie  $x$ , zwany orbitą punktu  $x$ . Orbitsy punktów periodycznych o okresie minimalnym  $n$  ( $n$ -orbitsy) są skończone i mają  $n$  elementów. Co więcej, nietrudno zauważyć, że dwie orbitsy albo się pokrywają, albo są rozłączne.

Załóżmy teraz, że zbiór punktów stałych odwzorowania  $f^n$  jest skończony. Każdy punkt z danej orbitsy  $O(x)$  o okresie minimalnym  $k$  wraca do siebie dopiero po  $k$  iteracjach. Zatem pojedyncza  $k$ -orbita generuje albo  $k$  (jeśli  $k | n$ ), albo 0 (jeśli  $k \nmid n$ ) punktów stałych odwzorowania  $f^n$ .

Oznaczając przez  $L(k)$  liczbę orbit o okresie minimalnym  $k$ , otrzymujemy:

$$(2) \quad \mathbf{Fix}(f^n) = \sum_{k|n} L(k) \cdot k.$$

Stosując wzór inwersyjny Möbiusa do formuły (2), otrzymujemy:

$$(3) \quad L(n) \cdot n = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) \mathbf{Fix}(f^k).$$

Widzimy zatem, że lewa strona powyższej równości jest podzielna przez  $n$ , zatem prawa strona także, a więc rzeczywiście  $(\mathbf{Fix}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem Dolda.

Aby dodatkowo utrwalić wprowadzone pojęcia, wprowadźmy wzór (3) bez odwoływania się do wzoru inwersyjnego Möbiusa, na pewnym prostym przykładzie. Rozważmy  $n = 6$  i pewną funkcję  $f : X \rightarrow X$  o skończonym zbiorze punktów o okresie minimalnym 6 poprzez wyrazić liczbę punktów o okresie minimalnym 6 poprzez punkty stałe  $f^k$  dla  $1 \leq k \leq 6$ . Z  $\mathbf{Fix}(f^6)$  musimy pozbyć się liczby punktów o mniejszych okresach minimalnych, dzielących 6, czyli 1, 2, 3, ale z drugiej strony wyrzuciliśmy trochę zbyt dużo, bo  $\mathbf{Fix}(f^2)$  i  $\mathbf{Fix}(f^3)$  zliczają także  $\mathbf{Fix}(f)$ , musimy zatem przywrócić wyrzucone dwukrotnie  $\mathbf{Fix}(f)$ . Mamy:

$$\begin{aligned} L(6) \cdot 6 &= \\ &= \mathbf{Fix}(f^6) - \mathbf{Fix}(f) - \mathbf{Fix}(f^2) - \mathbf{Fix}(f^3) + 2\mathbf{Fix}(f) = \\ &= \mathbf{Fix}(f^6) - \mathbf{Fix}(f^2) - \mathbf{Fix}(f^3) + \mathbf{Fix}(f) = \\ &= \sum_{k|6} \mu\left(\frac{6}{k}\right) \mathbf{Fix}(f^k). \end{aligned}$$

Podsumowując, kongruencje Dolda wynikają z faktu, że suma po prawej stronie wzoru (3), dzięki zasadzie „włączeń i wyłączeń”, redukuje się do liczby orbit  $n$ -elementowych pomnożonych przez  $n$ .

#### Macierze i ich iloczyny.

Macierzą liczb wymiaru  $n \times m$  nazywamy po prostu tabelkę o  $n$  wierszach i  $m$  kolumnach, wypełnioną liczbami. Aby zdefiniować iloczyn dwóch macierzy, wygodnie jest najpierw przypomnieć, czym jest iloczyn skalarny dwóch wektorów tej samej długości – jest to suma iloczynów odpowiadających współrzędnych. Dla przykładu, iloczyn skalarny wektorów  $[1, 2, 3]$  i  $[7, 5, -2]$  to  $1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 11$ . Jeśli macierz  $A$  ma tyle kolumn, ile macierz  $B$  ma wierszy, to iloczyn  $A \cdot B$  definiujemy jako macierz, która na miejscu  $(i, j)$ , czyli w  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie ma iloczyn skalarny  $i$ -tego wiersza macierzy  $A$  i  $j$ -tej kolumny macierzy  $B$ . Na przykład w (4) macierz  $A^2$  ma na miejscu  $(1, 2)$  liczbę 6, gdyż jest to iloczyn skalarny 1. wiersza i 2. kolumny macierzy  $A$ .

Inną, dość zaskakującą, cechą ciągów Dolda jest ich związek z macierzami kwadratowymi. Zaczniemy od prostego rachunku na pewnej macierzy  $A$  o wymiarze  $2 \times 2$  i jej kwadracie:

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}.$$

Obliczmy teraz  $\text{tr } A^2 - \text{tr } A$ , gdzie „tr” jest śladem macierzy kwadratowej, tzn. sumą elementów leżących na jej głównej przekątnej. W naszym przypadku  $\text{tr } A^2 - \text{tr } A = 13 - 3 = 10 \equiv 0 \pmod{2}$ . Zatem dla ciągu  $(\text{tr } A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  kongruencje Dolda są spełnione dla  $n = 2$ . Okazuje się jednak, że są one prawdziwe dla dowolnej macierzy i dowolnego  $n$ , czyli że ciąg śladów dowolnej macierzy całkowitoliczbowej również jest ciągiem Dolda.

Ten niebanalny fakt, odkrywany wielokrotnie przez różnych autorów, ma liczne konsekwencje. Na przykład dla dowolnej macierzy o wyrazach całkowitych  $A$  i liczby pierwszej  $p$  otrzymujemy:

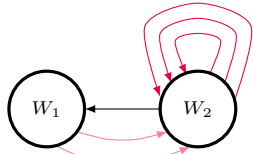
$$\text{tr } A^p \equiv \text{tr } A \pmod{p}.$$

Brzmi jakby znajomo? Rzeczywiście, otrzymaliśmy małe twierdzenie Fermata, tylko w bardziej ogólnej wersji – dla macierzy (zauważmy, że staje się ono dokładnie tym twierdzeniem dla macierzy  $1 \times 1$ ).

Można podać bezpośredni dowód faktu, że  $(\text{tr } A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem Dolda, ale przekraczałoby to ramy tego artykułu (dowód taki znaleźć można w [4]). Możliwy jest jednak

zręczny zabieg (dla macierzy o nieujemnych współczynnikach), który uzasadnia ten fakt na podstawie zdobytej już przez nas wiedzy. Pokażemy mianowicie, że  $(\text{tr } A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem liczby punktów stałych iteracji pewnego odwzorowania.

Dla danej macierzy  $A$  o wymiarze  $s \times s$  i współczynnikach będących liczbami całkowitymi nieujemnymi rozważmy graf skierowany  $G_A$  o  $s$  wierzchołkach, w którym dozwolone są krawędzie wielokrotne, taki że z  $i$ -tego wierzchołka do  $j$ -tego wierzchołka prowadzi dokładnie  $A[i, j]$  krawędzi (przez  $A[i, j]$  oznaczamy liczbę na  $(i, j)$ -tym miejscu macierzy  $A$ ).



Graf skierowany  $G_A$  o dwóch wierzchołkach, odpowiadający macierzy  $A$  danej przez równanie (4)

W opisanym przez nas przykładzie macierzy  $A$  z równania (4) potrzebujemy dwóch wierzchołków, powiedzmy  $W_1$  oraz  $W_2$ . Z  $W_1$  nie ma połączeń do  $W_1$ , ale z  $W_2$  do  $W_2$  wiodą trzy krawędzie. Ponadto z  $W_1$  do  $W_2$  mamy 2 krawędzie, a w przeciwnym kierunku jest 1 krawędź.

Wracając do ogólnego przypadku, łatwo udowodnić indukcyjnie, że  $A^n[i, j]$  (tzn. zawartość komórki  $(i, j)$  macierzy  $A^n$ ) to liczba ścieżek długości  $n$  (z dozwolonym powtarzaniem się krawędzi) prowadzących z wierzchołka  $i$  do wierzchołka  $j$ , mających długość  $n$ . Rzeczywiście, dla  $n = 1$  korzystamy z definicji macierzy  $A$ , natomiast dla  $n > 1$  zauważamy, że ścieżki długości  $n$  od wierzchołka  $i$  do wierzchołka  $j$  możemy podzielić na  $n$  grup: w  $k$ -tej grupie są ścieżki, których „przedostatni przystanek” to wierzchołek  $k$ . Każdą taką ścieżkę możemy otrzymać, biorąc dowolną ścieżkę długości  $n - 1$  z  $i$  do  $k$  (tych jest  $A^{n-1}[i, k]$ ) oraz dowolną krawędź z  $k$  do  $j$  (których jest  $A[k, j]$ ). Zatem w  $k$ -tej grupie mamy  $A^{n-1}[i, k] \cdot A[k, j]$  ścieżek, więc w sumie jest ich  $\sum_{k=1}^n A^{n-1}[i, k] \cdot A[k, j]$ , co zgodnie z definicją mnożenia macierzy jest równe  $(A^{n-1} \cdot A)[i, j]$ , czyli  $A^n[i, j]$ . Stąd ślad macierzy  $A^n$ , czyli suma wyrazów  $A^n[i, i]$ , będzie po prostu liczbą ścieżek długości  $n$  rozpoczynających i kończących się w tym samym wierzchołku.

Ustaliwszy ten fakt, możemy teraz łatwo skonstruować żądane odwzorowanie. Rozpatrzmy przestrzeń  $X$  składającą się z nieskończonych ścieżek w grafie  $G_A$ , reprezentowanych jako ciągi krawędzi  $(k_0, k_1, k_2, \dots)$  i odwzorowanie  $\sigma : X \rightarrow X$  dane wzorem  $\sigma(k_0, k_1, k_2, \dots) = (k_1, k_2, \dots)$ , które można interpretować jako przejście z jednej krawędzi do połączonej z nią kolejnej krawędzi w grafie  $G_A$ .

Punkty stałe  $\sigma$  to ścieżki wykorzystujące tylko jedną krawędź-pętlę, jak np.  $(k_{W_2}, k_{W_2}, k_{W_2}, \dots)$  w naszym przykładzie, gdzie  $k_{W_2}$  oznacza jedną z krawędzi z  $W_2$  do  $W_2$ . Liczba takich nieskończonych ścieżek wychodzących z danego wierzchołka o indeksie  $i$  jest zatem równa  $A[i, i]$ , więc wszystkich takich ścieżek jest  $\text{tr } A$ . Analogicznie, punkty stałe  $\sigma^n$  to ścieżki, które przechodzą na siebie w  $n$ -tej iteracji. Oznacza to, że składają się one z powtórzeń pewnego cyklu długości  $n$ , ale tych jest, jak pokazaliśmy, dokładnie  $\text{tr } A^n$ . Ostatecznie **Fix**  $\sigma^n = \text{tr } A^n$ , zatem  $(\text{tr } A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  jako ciąg liczby punktów stałych odwzorowania  $\sigma$  jest rzeczywiście ciągiem Dolda.

Ciągi Dolda, ze względu na opisane powyżej związki z punktami periodycznymi, stanowią obiecujący obiekt badań na pograniczu teorii układów dynamicznych, topologii i teorii liczb. Definicję ciągów Dolda można uogólnić na różne sposoby. Jedną z takich prób jest rozpatrywanie ciągów wieloindeksowanych. Okazuje się, że mają one podobne właściwości do ciągów klasycznych, a ich opis podany został w pracy nagrodzonej brązowym medalem w Konkursie Prac Uczniowskich im. Pawła Domańskiego (2019) [3].

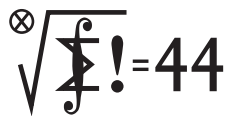
Na koniec ciekawy problem, niejako odwrotny do rozpatrywanego na początku artykułu. Czy dowolny ciąg Dolda  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  składający się z nieujemnych liczb całkowitych da się przedstawić jako ciąg liczby punktów stałych pewnego odwzorowania  $f : X \rightarrow X$ ? Łatwo jest odpowiedzieć na to pytanie twierdząco, jeśli nic nie zakładamy o odwzorowaniu  $f$  ani o przestrzeni  $X$ . Problem staje się jednak otwarty, jeśli zażądamy dodatkowych warunków, np. założymy, że  $X$  jest rozmaitością, a  $f$  jest gładkie. O szczegółach związanych z tym zagadnieniem, jak również o wykorzystaniu ciągów Dolda w różnych obszarach matematyki poczytać można w [1].

#### Literatura

- [1] J. Byszewski, G. Graff and T. Ward, *Dold sequences, periodic points, and dynamics*, Bull. London Math. Soc. (2021), 1–36, doi:10.1112/blms.12531.
- [2] A. Leśniak, *O pewnym uogólnieniu Malego Twierdzenia Fermata,  $\Delta_{15}^{10}$* .
- [3] M. Scharmach, *Dwuwymiarowe Ciągi Dolda*, dostępne na deltami.
- [4] W. Marzantowicz, P. Nowak-Przygodzki, *Finding periodic points of a map by use of a  $k$ -adic expansion*, Discrete Contin. Dynam. Systems 5 (1999), no. 3, 495–514.



## Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2022

Lista uczestników ligi zadaniowej

### Klub 44 M

po zakończeniu sezonu  
(roku szkolnego) 2020/21

Błażej Żmija	1 – 40,50
Janusz Olszewski	21 – 39,34
Kacper Morawski	37,16
Witold Bednarek	8 – 36,36
Adam Woryna	3 – 36,14
Paweł Najman	8 – 34,25
Tomasz Czajka	33,74
Marcin Kasperski	4 – 32,80
Andrzej Kurach	2 – 29,11
Stanisław Bednarek	2 – 27,19
Radosław Kujawa	27,13
Piotr Sołtan	27,12
Tomasz Wietecha	13 – 25,91
Janusz Wojtal	25,48
Marek Spychała	3 – 24,85
Norbert Porwol	24,02
Jędrzej Biedrzycki	23,05
Piotr Lipiński	1 – 23,02
Marian Łupieżowiec	1 – 21,26
Marcin Małogrosz	4 – 20,62
Michał Kieza	4 – 20,46
Karol Matuszewski	1 – 19,74
Szymon Tur	19,46
Grzegorz Wiączkowski	19,44
Semen Slobodianiuik	17,86
Paweł Kubit	7 – 17,80
Marek Prauza	4 – 16,62
Jerzy Cisło	15 – 15,81
Roksana Słowik	2 – 14,38

Legenda (przykładowo): stan konta 8 – 36,36 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 36,36 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2019, 2020 lub 2021.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Niech więc liczba  $c$  spełnia warunki (1) i niech  $x_1, \dots, x_n$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Oznaczając  $k_i = \lfloor x_i \rfloor$  oraz pisząc  $x_i = k_i + r_i$ , dostajemy do udowodnienia nierówność

$$(2) \sum_{i=1}^n (ck_i + \lfloor cr_i \rfloor) \geq (c-1) \sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^n k_i + \left\lfloor \sum_{i=1}^n r_i \right\rfloor,$$

równoważną następującą:

$$\sum_{i=1}^n \lfloor cr_i \rfloor \geq \left\lfloor \sum_{i=1}^n r_i \right\rfloor.$$

## Zadania z matematyki nr 835, 836

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**835.** Dana jest liczba naturalna  $n$  podzielna przez 3 oraz ciąg  $(x_1, \dots, x_n)$  o wyrazach 1, 2 lub 3, przy czym jedynek, dwójek i trójek jest tyle samo (po  $n/3$ ). Dowieść, że dla pewnych numerów  $k, l$  ( $1 \leq k \leq l \leq n$ ) zachodzi równość  $x_k + \dots + x_l = n$ .

**836. (a)** Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych  $x$ , dla których oba wyrażenia  $x^{1/2} + x^{-1/2}$  oraz  $x^{1/3} + x^{-1/3}$  mają wartości całkowite.

**(b)** Ustalić, ile jest liczb  $x \geq 1$  o powyższej własności takich, że  $\lfloor x \rfloor$  ma w zapisie dziesiętnym nie więcej niż 2022 cyfry.

Zadanie 836 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Kubit.

## Rozwiązania zadań z numeru 10/2021

Przypominamy treść zadań:

**827.** Niech  $T_m$  oznacza liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z  $m$  trójek (np.  $T_4 = 3333$ ). Wyjaśnić, czy istnieją takie liczby naturalne  $m, n$ , że suma cyfr liczby  $nT_m$  jest mniejsza niż  $3m$ .

**828.** Dana jest liczba naturalna  $n \geq 2$ . Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste  $c$  takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x_1, \dots, x_n$  zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n \lfloor cx_i \rfloor \geq (c-1) \sum_{i=1}^n \lfloor x_i \rfloor + \left\lfloor \sum_{i=1}^n x_i \right\rfloor.$$

**827.** Odpowiedź: nie istnieją.

Dowód: niech  $s(N)$  oznacza sumę cyfr liczby  $N$ . Ustalmy liczbę naturalną  $m$ . Tezę  $s(nT_m) \geq 3m$  wykażemy przez indukcję względem  $n$ . Dla  $n = 1, 2, 3$  jest to oczywiste. Weźmy  $n \geq 4$  i założmy, że  $s(kT_m) \geq 3m$  dla  $k = 1, \dots, n-1$ . Przyjmijmy, że liczba  $nT_m$  ma  $m+r+1$  cyfr ( $r \geq 0$ ). Zapiszmy ją w postaci  $nT_m = 10^r A + C$ , gdzie  $10^m \leq A < 10^{m+1}$ ,  $0 \leq C < 10^r$ . Weźmy pod uwagę różnicę

$$\begin{aligned} R &= nT_m - 3T_m \cdot 10^r = (10^r A + C) - (10^m - 1) \cdot 10^r = \\ &= 10^r B + C, \quad \text{gdzie } B = A + 1 - 10^m. \end{aligned}$$

Jasne, że  $s(A+1) \leq s(A) + 1$ . Zapis liczby  $B$  to zapis liczby  $A+1$ , z cyfrą wiodącą zmniejszoną o 1. Stąd  $s(B) = s(A+1) - 1 \leq s(A)$ , i wobec tego  $s(nT_m) = s(A) + s(C) \geq s(B) + s(C) = s(R)$ . A ponieważ  $R = (n-3 \cdot 10^r)T_m$ , zatem z założenia indukcyjnego  $s(R) \geq 3m$ , i mamy nierówność  $s(nT_m) \geq 3m$ , czyli tezę indukcyjną. Na mocy zasady indukcji ta nierówność zachodzi dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .

**828.** Załóżmy, że  $c$  jest liczbą o podanej własności. Biorąc najpierw  $x_1 = \dots = x_n = 1$ , a następnie  $x_1 = \dots = x_n = 1/n$ , dostajemy (odpowiednio)  $n \lfloor c \rfloor \geq nc$  oraz  $n \lfloor c/n \rfloor \geq 1$ . Pierwsza z tych nierówności pokazuje, że  $c$  jest liczbą całkowitą; druga – że  $\lfloor c/n \rfloor$  jest liczbą dodatnią, więc nie mniejszą niż 1. Uzyskujemy warunki:

$$(1) \quad c \in \mathbb{N}, \quad c \geq n,$$

konieczne do tego, by liczba  $c$  miała żadaną własność. Pokażemy, że są one również wystarczające.

Oznaczmy lewą i prawą stronę tej ostatniej nierówności odpowiednio przez  $L$  i  $P$ . Szacujemy:

$$L > \sum_{i=1}^n (cr_i - 1) \geq n \sum_{i=1}^n r_i - n \geq n(P-1) \geq P-1.$$

Liczby  $L$  i  $P$  są całkowite, więc skoro  $L > P-1$ , znaczy to, że  $L \geq P$ ; nierówność (2) jest wykazana.

Stąd odpowiedź: własności (1) dokładnie charakteryzują liczby  $c$ , o które pyta zadanie.

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (15), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (21), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (13), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczański, M. Adamaszek (6), P. Kubit (7), J. Cisło (15), W. Bednarek (8), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedziej, M. Miodek, M. Małogrosz (4), K. Kamiński, J. Fiett, M. Spychała (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczbą w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, E. Garncałek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, A. Kurach, J. Łazuka, J. Małopolski, E. Merta, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, M. Pater, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, P. Burdzy, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Józwick, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowicz, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, K. Matuszewski, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikula, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, J. Węgrecki, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zajęc, Z. Zaus, K. Zawislowski, B. Żmija, P. Żmijewski.

## Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 M w roku szkolnym 2020/21

Liczby zakończone zerem domagają się uczczenia: oto 40 lat skończyła matematyczna liga zadaniowa! Dwadzieścia lat temu, z okazji analogicznej (choć o połowę skromniejszej), w dorocznym omówieniu ( $\Delta_{02}^2$ ), uraczyliśmy Czytelników ciekawą statystyką, dającą obraz uczestnictwa w pierwszych dwudziestu sezonach ligowych. Przypomnijmy: sezon ligowy to w zasadzie rok szkolny, wrzesień–czerwiec. We wrześniu roku 1981 ukazały się zadania nr 1, 2, 3 (!). Tak; bowiem przez pierwsze trzy i pół roku mieliśmy po trzy zadania w numerze. Potem do matematyki dołączyła fizyka i od stycznia 1985 zaczęliśmy zamieszczać po dwa zadania z każdej z tych dwóch dziedzin.

Wspomniana statystyka zasługuje na kontynuację. Popatrzmy, jak to się kształtowało w kolejnych czterech dziesięcioleciach, od startu aż do sezonu czterdziestego. W kolejnych kolumnach tabelki widzimy:

- (w nawiasie) liczbę zadań z matematyki w dziesięcioleciu;
- liczbę nowych uczestników ligi;
- (grubą czcionką) liczbę nowych członków **Klubu 44 M**;
- liczbę przekroczeń bariery „44 punkty” (różni się od poprzedniej tym, że liczone są przekroczenia powtórne i wszystkie dalsze);

1981–1991	(222)	506	<b>66</b>	114
1991–2001	(202)	122	<b>29</b>	70
2001–2011	(200)	95	<b>19</b>	77
2011–2021	(200)	72	<b>21</b>	86

(statystykę w rozbięciu na pojedyncze roczniki znajdzie Czytelnik w elektronicznym wydaniu numeru).

Najliczniejszy udział widać w latach początkowych; działał urok nowości – ale chyba nie tylko: życie wówczas było trochę inne; więcej czasu można było przeznaczać na beztroską zabawę (jaką nasza liga zawsze pragnęła być i pragnie pozostać).

Suma liczb z przedostatniej kolumny, równa 135, to aktualna liczba osób zaliczonych w grono członków **Klubu 44 M**; suma liczb z jeszcze poprzedniej kolumny – to łączna liczba wszystkich uczestników, którzy pojawili się w lidze (do momentu zamknięcia sezonu 2020/21); wynosi ona 795.

Pamiętajmy jednak, że niektórzy z nich odeszli tam, skąd się nie wraca. O niektórych wiemy (notki żałobne w lutowych numerach roczników 1993, 1999, 2008, 2016); o innych możemy nie wiedzieć; im wszystkim należy się chwila smutnej zadumy i ciepłe wspomnienie.

\* \* \*

Teraz wybrane zadania z omawianego sezonu (ostatniego, czterdziestego) – więc, jak zwykle, te trudniejsze (wysoki współczynnik trudności  $WT$  i/lub niska liczba poprawnych rozwiązań  $LPR$ ), a także te, w których uczestnicy zaintrygowali niebanalnymi pomysłami rozwiązań albo ciekawymi komentarzami. W e-wydaniu, jak przed rokiem, zamieszczamy wybrane fragmenty prac (w zakładce: „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej”).

**Zadanie 806.** [ $a_1 = 2$ ;  $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$ ;  $f(x) = x^2 - x \Rightarrow \forall n \geq 1: f(a_{n+1}) \equiv 0 \pmod{f(a_n)}$ ] ( $WT=1,80$ ;  $LPR=14$ ). Trudności tu niewiele. **Piotr Kumor** zwrócił uwagę ( $\rightarrow$  e-wydanie numeru), że już w klasycznej książeczce W. Sierpińskiego *250 zadań z elementarnej teorii liczb* znajduje się rozumowanie indukcyjne, dające rozwiązanie naszego zadania; postawił też pytanie, czy poza ciągiem  $(a_n)$  istnieją liczby całkowite  $m \geq 2$  takie, że  $m \mid 2^m + 2$ ,  $(m-1) \mid 2^m + 1$ ; pierwszy z tych warunków spełnia np. liczba  $m = 946$  ( $\neq a_n$  dla wszystkich  $n$ ); czy jedyna taka?

**Zadanie 810.** [Permutacje  $(x_1, \dots, x_n)$  zbioru  $\{1, \dots, n\}$  o własnościach  $\pmod{n}$ : (i)  $\sum_{i=1}^k x_i \not\equiv \sum_{i=1}^l x_i$  dla

$k \neq l$ ; (ii)  $k + x_k \not\equiv l + x_l$  dla  $k \neq l$ ; teza: permutacja o własności (i) istnieje  $\Leftrightarrow$  permutacja o własności (ii) nie istnieje] ( $WT=2,03$ ;  $LPR=11$ ). Wszyscy pokazali, bez większych trudności, że istnienie permutacji jednego lub drugiego typu zależy po prostu od parzystości liczby  $n$ . Kto ciekawy, ile jest takich permutacji (dla danego parzystego/nieparzystego  $n$ ), znajdzie odpowiedź w OEIS (ciągi A141599, A006717) – na co zwrócił uwagę **Michał Adamaszek**.

**Zadanie 812.** [ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: \prod_{k=2}^n (2^k - 2) \equiv 0 \pmod{n!}$ ] ( $WT=1,60$ ;  $LPR=19$ ). To teoria liczb – jak sugeruje treść zadania i prawie wszystkie rozwiązania (w tym firmowe)? Czy może raczej algebra liniowa

z kombinatoryką? Popatrzmy na rozwiązanie, jakie przysłał **Jerzy Cisko**: W przestrzeni liniowej  $\mathbb{Z}_2^n$  wybieramy bazę wektorów  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , biorąc dowolny wektor  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$  ( $2^n - 1$  możliwości); zaś mając wektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j$ , rozpinające podprzestrzeń wymiaru  $j$  (więc mocy  $2^j$ ), mamy  $2^n - 2^j$  możliwości wyboru wektora  $\mathbf{v}_{j+1}$ ; liczba uporządkowanych baz wynosi zatem

$$M_n := \prod_{j=0}^{n-1} (2^n - 2^j) = 2^{n(n-1)/2} \prod_{k=1}^n (2^k - 1).$$

Zliczamy teraz  $n$ -wymiarowe sympleksy o ponumerowanych wierzchołkach: pierwszy wierzchołek wybieramy na  $2^n$  sposobów, a pozostałe uzyskamy, dodając do niego wektory dowolnej bazy uporządkowanej; zatem liczba takich sympleksów wynosi  $2^n \cdot M_n$  i dzieli się przez  $(n+1)!$ , bo tyle jest możliwości ponumerowania wierzchołków. Cofając  $n$  o jeden, widzimy, że  $n!$  jest dzielnikiem liczby  $2^{n-1} M_{n-1}$ . To już prawie teza zadania – pozostaje jedynie skontrolować potęgę dwójki w liczbach:  $n!$  oraz tej danej w zadaniu – a to nietrudne ćwiczenie.

Na podobnym pomysle (dopracowanym w języku macierzy) oparł **Janusz Olszewski** jedno z trzech (!) przysłanych rozwiązań; w każdym z nich ( $\rightarrow$  e-wydanie) wykazał słuszność tezy zadania ze stałą 2 zastąpioną przez dowolną liczbę naturalną  $a \geq 2$ .

[Mała uwaga. Przytoczone rozumowanie pokazuje, że  $2^n M_n / (n+1)!$  to liczba  $n$ -sympleksów w  $\mathbb{Z}_2^n$  (bez numeracji wierzchołków). Dla  $n=3$  to jest 56; wynikałoby stąd, że jest dokładnie 56 czworościanów rozpiętych przez czwórki wierzchołków sześciangu. Jednak nie. Pozostawiamy Czytelnikom znalezienie ich faktycznej liczby oraz zagadkę: czy właśnie została wykryta sprzeczność w matematyce?]

**Zadanie 813.** [Dany  $n$ -kąć wypukły  $W$ , ma  $N$  przekątnych;  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < N$ ;  $S$  – zbiór wszystkich punktów przecięć przekątnych wewnątrz  $W$  (żadne trzy się nie spotykają)  $\Rightarrow \exists M \subset S$ :  $|M| = m$ , nie zawierający cyklu (w cyklu każde kolejne dwa punkty na jednej przekątnej – ale żadne trzy)] ( $WT=2,95$ ;  $LPR=7$ ). Wystarczy rozważać  $m = N - 1$ . **Michał Adamaszek** prosto i dobitnie wyjaśnił, o czym jest to zadanie: należy patrzeć na  $N$  przekątnych jako wierzchołki grafu; połączone są takie dwa wierzchołki, że odpowiadające im przekątne przecinają się wewnątrz  $W$ . Cykle krawędziowe w tym grafie to dokładnie cykle punktów  $S$  według określenia w zadaniu. Graf jest spójny (każde dwa niepołączone wierzchołki mają wspólnego sąsiada); bierzemy jako  $M$  dowolny minimalny spójny podzbiór  $S$  (czyli zbioru krawędzi grafu), wiążący wszystkie  $N$  wierzchołków; z minimalności wynika, że nie ma w nim cyklu – jest więc drzewem, zatem  $|M| = N - 1$ , czyli tak, jak trzeba.

**Zadanie 815.** [ $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\forall x, y: f(x+y^3) + g(x^3+y) = h(xy)$ ;  $f, g, h = ?$ ] ( $WT=3,01$ ;  $LPR=6$ ). Tylko funkcje stałe (takie, że  $f+g=h$ ) spełniają to równanie. Rozwiązanie firmowe

znalazł **P. Kumor**. Nieco inaczej: **M. Adamaszek**, **K. Matuszewski**, **M. Spychała**, **A. Woryna** – pokazując (różnymi metodami, nie bez wysiłku), że  $f$  jest stała w pewnym otoczeniu zera; iterowanie równości  $f(x^9) = f(x)$  (łatwej do uzasadnienia) pozwala wtedy wywnioskować, że  $f$  jest stała na  $\mathbb{R}$ . Jeszcze inaczej, oryginalnie, **J. Olszewski** – przez sprowadzenie do ciekawego układu trzech równań wielomianowych – choć też nie całkiem krótko ( $\rightarrow$  e-wydanie). I jeszcze jedna praca, zawierająca istotę rozumowania, ale z tak licznymi pomyłkami i niedopracowaniami, że nie można jej uznać za pełne rozwiązanie.

Zadanie zostało wzięte z dawnej olimpiady matematycznej jednego z krajów europejskich i włączone do konkursu w nadziei, że błyskotliwe rozwiązanie poznamy od uczestników; jednak nie – więc zapewne prościej zrobić się tego nie da.

**Zadanie 818.** [ $\forall n \geq 9 \exists m \leq n/3: 2^n - 2^m \equiv 0 \pmod{n}$ ; ( $m, n \in \mathbb{N}$ )] ( $WT=2,23$ ;  $LPR=11$ ). Kilku uczestników zauważyło (a nie zauważył tego zawczasu redaktor ligi), że prawie takie samo zadanie było już kiedyś w lidze ( $\Delta_{16}^9$ , zadanie 726). W tym „prawie” kryje się jednak spory kawałek matematyki. Jedyna różnica w treści to oszacowanie dla  $m$ : tam  $n/2$ , tu  $n/3$ ; wszelako to różnica jakościowa. Rozwiązanie firmowe znacznie łatwiejszego zadania 726 nie dawało się łatwo przenieść na nową sytuację, nie dawało nawet znaczącej wskazówki (choć jeden z uczestników złapał się na tę niezamierzoną pułapkę). W obecnym zadaniu wszystkie (poprawne) rozwiązania biegły jednym torem: albo (jak w „firmówce”) z jawnym użyciem funkcji Eulera, albo z wyprowadzeniem jej potrzebnych własności (nie nazywając jej po imieniu).

**Zadanie 820.** [ $\forall a, b, c > 0: \sum_{\text{cykl}} \frac{a^2}{b^2+bc} \geq \frac{3}{2}$ ] ( $WT=1,76$ ;  $LPR=16$ ). Urokliwie elementarne rozwiązanie, jakie zaproponował **Witold Bednarek**, autor zadania (i które zamieściliśmy jako firmowe), pokazuje, że zadanie mogłoby się nadawać do konkursu dla juniorów. Ale oczywiście było ono podatne i na inne techniki. Odnotujmy niektóre podejścia: **Janusz Olszewski** udowodnił ogólniejszą nierówność, słuszną dla  $p, q, x, y, z > 0$ :  $\sum_{\text{cykl}} \frac{x}{py+qz} \geq \frac{3}{p+q}$ ; daje ona tezę zadania, gdy  $(x, y, z) = (a^2, b^2, c^2)$ ,  $(p, q) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  (bo  $bc \leq (b^2 + c^2)/2$ ). Podobną nierówność, tylko dla  $p/q = 3$ , ale z rozszerzeniem na  $n$  składników  $x_i$ , wskazał **Piotr Kumor**; szczegóły tych prac w e-wydaniu numeru.

Szczyt zwięzłości osiągnął **Mikołaj Pater**, używając nierówności Höldera  $(\sum x_i y_i z_i)^3 \leq (\sum x_i^3)(\sum y_i^3)(\sum z_i^3)$ ; (sumy po  $i = 1, 2, 3$ ); wystarczy podstawić  $x_i = a_i^{2/3}(a_{i+1}^2 + a_{i+1}a_{i+2})^{-1/3}$ ,  $y_i = (a_i a_{i+1})^{1/3}$ ,  $z_i = (a_{i+1} + a_{i+2})^{1/3}$ , by przy oznaczeniu  $(a_1, a_2, a_3) = (a, b, c)$  dostać nierówność nieco mocniejszą od tej z zadania.

Kilka prac zaczynało się słowami: „Założmy b.s.o., że  $a \geq b \geq c$ ”. Tak by było, gdyby rozważane wyrażenie było symetryczne; tu jednak mamy tylko

niezmienniczość cykliczną, więc logika szwankuje. Można jedynie „b.s.o.” przyjąć, że  $a \geq b \geq c$  lub  $a \leq b \leq c$  (i oddzielnie analizować te dwie sytuacje).

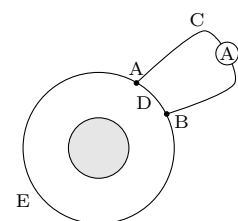
**Zadanie 822.**  $[\triangle ABC]$ ; dla  $D \in BC$ :  $U, V$  – środki okręgów wpisanych w  $ABD, ACD$ ;  $\omega_D$  – okrąg  $DUV \Rightarrow$  wszystkie okręgi  $\omega_D$  mają punkt wspólny (WT=3,05; LPR=6). Przekombinowane było rozwiązanie firmowe (choć ciekawe; koncepcja: **Mikołaj Pater**, autor zadania). Uczestnicy ligi robili to prościej. **Jerzy Cisło**:  $U, V$  leżą na dwusiecznych kątów  $ADB, ADC$ , więc  $\sphericalangle UDV = 90^\circ$ ,

co oznacza, że środek  $S$  odcinka  $UV$  jest środkiem okręgu  $\omega_D$ ; jeśli teraz  $K, L, M$  to punkty styczności boku  $BC$  z okręgami wpisanymi w trójkąty  $ABC, ABD, ACD$ , to dodając stronami trzy równości  $BK = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$ ,  $-BL = \frac{1}{2}(AD - AB - BD)$ ,  $-DM = \frac{1}{2}(AC - AD - CD)$ , otrzymujemy  $LK - DM = 0$ ; a skoro  $S$  leży na symetralnej odcinka  $LM$ , wynika stąd, że  $SK = SD$ , czyli  $K \in \omega_D$ ; tak więc  $S$  jest punktem, którego istnienie należało wykazać. Podobne rozwiązania: **M. Adamaszek, Ł. Merta, J. Olszewski** oraz (z pomocą trygonometrii) **A. Woryna**.

## Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2022



Rys. 1

### Zadania z fizyki nr 732, 733

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**732.** Nieważki pręt z umocowaną na końcu kulką o masie  $m$  postawiono pionowo na podłodze. Kulkę możemy traktować jako punkt materialny. Pręt zaczyna przewracać się z zerową prędkością początkową i nie ślizga się do chwili, gdy przestaje naciskać na podłogę. Jaką wartość ma w tej chwili kąt  $\alpha_0$ , jaki pręt tworzy z pionem? Ile wynosi współczynnik tarcia między prętem a podłogą? Ile wynosi siła tarcia, gdy pręt tworzy z pionem kąt  $\alpha \leq \alpha_0$ ?

**733.** Zmienne pole magnetyczne wytwarza w jednorodnym przewodniku ADBEA w kształcie okręgu (rys. 1) stałą siłę elektromotoryczną  $\varepsilon$ . Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny przewodnika i przechodzą przez powierzchnię w kształcie koła zacieniowaną na rysunku, pole ma oś symetrii przechodzącą przez środek przewodzącego pierścienia i prostopadłą do płaszczyzny przewodnika. W punktach A i B do pierścienia podłączony jest amperomierz. Opory przewodników ADB, AEB i ACB wynoszą odpowiednio  $R_1, R_2$  i  $R_3$ . Jakie jest napięcie między punktami A i B?

### Rozwiązania zadań z numeru 10/2021

Przypominamy treść zadań:

**724.** Ciężka tarcza o promieniu  $R$  stacza się na dwóch nierozciągliwych niciach. Nici są nawinięte na tarczę, a ich wolne końce są zamocowane (rys. 2). Podczas ruchu tarczy nici są cały czas napięte. W pewnej chwili prędkość kątowa tarczy wynosi  $\omega$ , kąt pomiędzy nimi jest wtedy równy  $\alpha$ . Jaką prędkość ma w tym momencie środek tarczy?

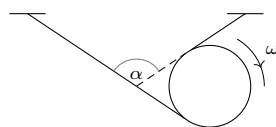
**725.** Przyjmijmy, że Ziemia obiega Słońce po orbicie kołowej o promieniu  $R = 1$  j.a. Po jakim czasie spadłaby na Słońce, gdyby nagle została zatrzymana? Ziemię i Słońce potraktujemy jako punkty materialne.

**724.** Oznaczmy prędkości punktów styczności nici z tarczą w układzie odniesienia związanym ze środkiem tarczy przez  $\mathbf{u}_1$  i  $\mathbf{u}_2$ . Tworzą one ze sobą kąt  $\alpha$  i mają jednakowe wartości  $u = \omega R$ . W układzie odniesienia związanym z Ziemią prędkości tych punktów wynoszą odpowiednio  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}$  i  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}$ , gdzie  $\mathbf{v}$  jest szukaną prędkością środka tarczy. Ponieważ nici są nierozciągliwe, wektory  $\mathbf{v}_1$  i  $\mathbf{v}_2$  są prostopadłe do nici, a tym samym do wektorów  $\mathbf{u}_1$  i  $\mathbf{u}_2$ . Z rysunku 3 widać, że wektor prędkości tarczy tworzy z każdą z nici kąt  $\alpha/2$ , a jego wartość  $v = u / \cos(\alpha/2) = \omega R / \cos(\alpha/2)$ .

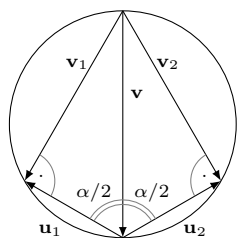
**725.** Gdy Ziemia krąży wokół Słońca o masie  $M$  po orbicie kołowej, jej prędkość  $v_0 = \sqrt{GM/R}$ , a okres obiegu  $T_0 = 2\pi R \sqrt{R/GM}$ . Rozważmy kolejno przypadki, w których Ziemia znajduje się w odległości  $R$  od Słońca w pewnym punkcie  $Z$  orbity kołowej, a jej prędkość w tym momencie jest mniejsza od  $v_0$  i coraz bardziej maleje (rys. 4). Tory ruchu są wtedy elipsami o malejących półosiach, a Słońce znajduje się w ognisku bardziej oddalonym od punktu  $Z$ . Dla każdej z tych elips spełnione jest trzecie prawo Keplera:  $T^2/a^3 = T_0^2/R^3$ , gdzie

$$T = T_0 \sqrt{a^3/R^3} \quad (*)$$

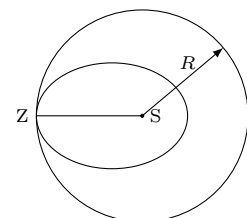
jest okresem obiegu, zaś  $a$  półosią wielką danej elipsy. W granicznym przypadku, gdy prędkość Ziemi w punkcie  $Z$  jest równa zero, elipsa staje się odcinkiem  $ZS$ , a półoś wielka tej zdegenerowanej elipsy wynosi  $R/2$ . Zgodnie z (\*) szukany czas spadania  $t = 0,5T_0 \sqrt{1/8} = 0,25\pi R \sqrt{2R/GM} \cong 65$  dób.



Rys. 2



Rys. 3

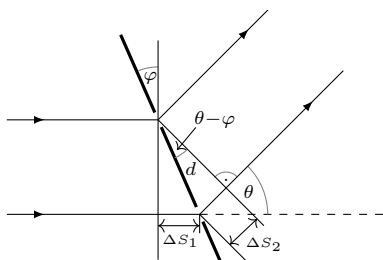


Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klubu 44 F**  
po zakończeniu  
roku szkolnego 2020/21  
(po uwzględnieniu rozwiązań  
zadań 720 ( $WT=2,84$ ) i 721 ( $WT=3,18$ ))

Konrad Kapcia (Poznań)	1	42,51
Tomasz Rudny (Poznań)		41,38
Slawomir Buć (Myszków)		36,55
Mateusz Kapusta (Wrocław)		35,59
Jacek Konieczny (Poznań)		31,90
Ryszard Woźniak (Kraków)		31,46
Ryszard Baniewicz (Wrocław)		30,36
Aleksander Surma (Myszków)	4	27,75
Tomasz Wietecha (Tarnów)	15	25,35
Marian Łupieżowicz (Gliwice)	2	24,22
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	3	17,53
Jan Zambrzycki (Białystok)	3	12,27
Piotr Adamczyk (Warszawa)	1	11,90
Paweł Kubit (Kraków)		11,30

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2019–2021 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 11 punktów. Liczba przed myślnikiem wskazuje, ile razy uczestnik zdobył 44 punkty.



## Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 F w roku szkolnym 2020/21

Średni współczynnik trudności zadań okazał się w tym roku niższy niż w latach ubiegłych, wzrosła natomiast liczba przysyłanych rozwiązań. Aż sześciu uczestników przekroczyło próg 44 punktów: Tomasz Wietecha po raz piętnasty (!), Michał Koźlik po raz piąty, Krzysztof Magiera i Paweł Perkowski po raz czwarty, Jan Zambrzycki po raz trzeci i Piotr Adamczyk po raz pierwszy. Ustaliła się grupa uczestników, którzy przysyłali rozwiązania bardzo regularnie i często bez żadnych usterek. Najbardziej skuteczny okazał się Piotr Adamczyk, którego 14 rozwiązań uzyskało maksymalną ocenę, Tomasz Wietecha takich rozwiązań przysłał 13.

W zadaniu **704** światło monochromatyczne padało prostopadle na siatkę dyfrakcyjną, której szczeliny ustawione były pionowo. Należało odpowiedzieć na pytanie, jak zmieni się obraz interferencyjny na ekranie, gdy siatkę obrócimy o kąt  $\varphi < \pi/2$  wokół osi równoległej do szczelin siatki. Niestety, w rozwiązaniu firmowym pojawił się błąd. Maksymalny kąt ugięcia  $\theta$  w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara (rysunek obok) wynosi  $\pi/2 + \varphi$ , ale prążki na ekranie mogą powstać dla  $\theta < \pi/2$ . Zatem maksymalna liczba maksimów na ekranie dla dodatnich  $\theta$  wynosi  $k_+ = \lfloor d/\lambda \rfloor$ , a nie jak podano  $\lfloor d(1 + \sin\varphi)/\lambda \rfloor$ . Zadanie było otwarte, uczestnicy mogli pisać o tym, co uznali za istotne. Maksymalną ocenę za to zadanie otrzymał **Konrad Kapcia**. Zadanie **721** ( $WT=3,21$ ) dotyczyło elektrostatyki. Wewnątrz wydrążonej, naładowanej, przewodzącej kuli znajdowała się współśrodkowa z nią kula, również naładowana i przewodząca. Między kulą a powłoką umieszczony był ładunek punktowy. Należało znaleźć potencjał kuli oraz powłoki. Pełne i bezbłędne rozwiązanie przysłał **Piotr Adamczyk**, który do znalezienia potencjału kuli wykorzystał metodę obrazów. Tomasz Wietecha poprawnie obliczył potencjał kuli, stosując metodę taką jak w rozwiązaniu firmowym, z tajemniczych powodów (może przez przeoczenie) nie odpowiedział jednak na prostsze pytanie o potencjał powłoki.

**Tomasz Wietecha** był jedynym uczestnikiem, który uzyskał maksymalną ocenę za zadanie **720** ( $WT=2,84$ ). Poszukiwana była tam zmiana prędkości satelity poruszającego się w górnych warstwach atmosfery po wykonaniu jednego okrążenia, przy założeniu, że siła oporu ze strony rozrzedzonego powietrza jest stała. Większość uczestników uznała, że prędkość satelity zmaleje, tymczasem praca siły oporu powoduje zmniejszenie całkowitej energii satelity, jego promień orbity maleje, a prędkość rośnie.

W zadaniu **718** ( $WT=3,1$ ) należało znaleźć zależność od czasu prędkości samochodu, którego silnik pracuje od początku z pełną mocą, a opór powietrza i opory mechanizmów zaniedbujemy. Maksymalne oceny dostali za swoje rozwiązania **Paweł Perkowski** i **Tomasz Wietecha**. Część uczestników nie uwzględniła faktu, że na początku ruchu występuje poślizg, inni uznali, że poślizg występuje przez cały czas ruchu.

Ciekawostką jest, że jeden z uczestników podał odnośniki do źródeł zawierających rozwiązania dwóch tegorocznych zadań ligowych, co obligowało do wystawienia za nie maksymalnej oceny, i do tego ograniczył swoją aktywność w klubie.



### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

## Powrót na Księżyc

W cieniu medialnego wyścigu do kolonizacji Marsa rozwija się drugi – związany z powrotem ludzi na Księżyc. Amerykańskie NASA w porozumieniu z agencjami z wielu krajów, m.in. Australii, Kanady, Japonii, Włoch, Brazylii i Ukrainy, oraz firmami prywatnymi (Airbus, Blue Origin, oczywiście również SpaceX) planuje lądowanie ludzkiej załogi na Księżycu w połowie obecnego dziesięciolecia. Misja Artemis – na cześć bogini Księżycy, Artemidy – będzie składać się z kilku faz, z których pierwsza ma polegać na lądowaniu łazika VIPER (*Volatiles Investigating Polar Exploration Rover*). Jeśli wszystko pójdzie zgodnie z planem, łazik znajdzie się na powierzchni Księżycy w listopadzie 2023 roku. Jego zadaniem będzie poszukiwanie zasobów księżycowych w stale zacienionych obszarach w rejonie bieguna południowego Księżycy, w szczególności poprzez mapowanie rozmieszczenia i koncentracji lodu wodnego. Zgromadzona w ten sposób wiedza przyda się w przyszłości w czasie lądowania ludzi (w drugiej fazie projektu Artemis) i zakładania bazy księżycowej. Komunikację Ziemia–Księżyc zapewni rakieta Orion oraz Dragon XL (do transportu materiałów). Planowana jest także orbitalna stacja przesiadkowa Gateway.

Oczywiście pojawia się pytanie, po co wracać na Księżyc, skoro na Ziemi mamy do rozwiązania wiele naprawę pilnych problemów, związanych na przykład z zaburzonym przez cywilizację klimatem. Argumentem eksploratorów jest to, że właśnie dlatego powinniśmy – jako ludzkość – stworzyć sobie możliwość rozwoju w innym miejscu, na wypadek nieoczekiwanej katastrofy, np. krytycznego w skutkach upadku meteorytu.

Odkładając na bok wątpliwości związane z celnością takiego wytłumaczenia, trzeba przyznać, że Księżyc jest rzeczywiście nie tylko interesujący sam w sobie, ale może także stać się cenną bazą do badań Wszechświata, zapewniając miejsce dla astronomii na wszystkich długościach fal, od promieni gamma po ekstremalnie długie fale radiowe. Jednym z proponowanych księżycowych projektów badawczych jest kilometrowych rozmiarów radioteleskop LCRT (*Lunar Crater Radio Telescope*), który mógłby być zlokalizowany w jednym z kraterów po „ciemnej stronie” Księżycy. LCRT może umożliwić dokonanie nowych odkryć naukowych w kosmologii dzięki obserwacji wczesnego Wszechświata

## Niebo w lutym

Luty jest pierwszym miesiącem, w którym szybko wydłuża się dzień i skraca noc. W ciągu tego miesiąca Słońce zwiększy wysokość górowania o 10°, a w następstwie tego czas jego przebywania nad widnokregiem urośnie do 11 godzin. W tym czasie Słońce przeniesie się od środka gwiazdozbioru Koziorożca do pogranicza Wodnika i Ryb. Po drodze 5 lutego minie planetę Saturn, która z tego powodu pozostanie niewidoczna aż do kwietnia.

Księżyc przejdzie przez nów 1 lutego, stąd na początku miesiąca rozgości się na niebie wieczornym. O tej porze

w paśmie długości fal 10–50 m (tj. w paśmie częstotliwości 6–30 MHz), które do tej pory nie było badane przez ludzi.

Fale elektromagnetyczne to oczywiście nie wszystko. Pierwsza detekcja fal grawitacyjnych miała miejsce ponad 5 lat temu; mimo wielu nieoczekiwanych sukcesów, m.in. rewolucji w obserwacjach wieloaspektowych (*multi-messenger astronomy*), lepszego zrozumienia modeli ewolucji gwiazd, alternatywnych teorii grawitacji, jako dziedzina astronomia fal grawitacyjnych jest wciąż w fazie szybkiego wzrostu. Ponowne zainteresowanie eksploracją Księżycy, którego dowodem jest program Artemis (ale także plany ESA oraz Chińskiej Agencji Kosmicznej), stwarza nowe możliwości do badania fal grawitacyjnych. Niedawno trzy zespoły niezależnie zaproponowały koncepcje księżycowego detektora fal: GLOC (*Gravitational-Wave Lunar Observatory for Cosmology*), LGWA (*Lunar Gravitational-Wave Antenna*) oraz LSGA (*Lunar Seismic and Gravitational Antenna*). Detektor GLOC to pomysł podobny do znanych z Ziemi laserowych detektorów interferometrycznych typu LIGO lub Virgo, natomiast LGWA i LSGA wykorzystają niezwykle niski poziom drgań sejsmicznych Księżycy w celu mierzenia charakterystycznych drgań *catego globu* w reakcji na przejście przez niego fali grawitacyjnej (jest to pomysł analogiczny do pierwszych prób rejestracji fal zaproponowanych w latach 60. XX wieku przez Josepha Webera).

Detektory księżycowe będą idealne do badania częstotliwości fal grawitacyjnych w zakresie od 0,1 Hz do kilku Hz, czyli w zakresie, który jest bardzo wymagający dla detektorów ziemskich. Zakres częstotliwości i przewidywana czułość pozwolą na badanie układów podwójnych z gwiazdami neutronowymi i gwiazdowymi czarnymi dziurami nawet do 70% obserwowalnej objętości Wszechświata, kalibrację odległości do supernowych typu Ia oraz dokładne zbadanie wielkoskalowej struktury Wszechświata. Pozostaje jedynie dobrze oszacować koszty, które zapewne nie będą niskie.

“Gravitational-Wave Lunar Observatory for Cosmology”, K. Jani and A. Loeb, JCAP 06 (2021) 044, “Lunar Gravitational-wave Antenna” J. Harms et al., ApJ 910 (2021) 1.

Michał BEJGER

roku i doby ekliptyka tworzy duży kąt z widnokregiem, zatem Srebrny Glob szybko wzniesie się wysoko ponad horyzont, świecąc na niebie długo po zachodzie Słońca, mimo fazy cienkiego sierpa. Podczas kilku pierwszych wieczorów lutego warto przyjrzeć się księżycowej tarczy, która ładnie zaprezentuje tzw. światło popielate. Jest to nocna (ciemna) strona Księżycy oświetlona światłem odbitym od Ziemi. Fazy Księżycy widocznego z Ziemi i Ziemi widocznej z Księżycy uzupełniają się do pełni. Gdy dla nas Księżyc jest bliski nowiu, to dla selenonautów Ziemia jest bliska pełni. Ziemia odbija



w kosmos więcej światła i ma ponad 3-krotnie większą średnicę. To sprawia, że Ziemia widoczna na księżycowym niebie jest znacznie jaśniejsza od Księżyca na naszym. Dlatego światło popielate jest tak jasne.

W następnych dwóch dniach Księżyc spotka się z **Jowiszem**. Największa planeta Układu Słonecznego szybko zbliży się do marcowej koniunktacji ze Słońcem, stąd w drugiej połowie miesiąca zginie w zorzy wieczornej. Początkowo o zmierzchu Jowisz zajmuje pozycję na wysokości kilkunastu stopni nad południowo-zachodnim widnokregiem, ale szybko doń się zbliży. Planeta świeci z jasnością około  $-2^m$ , prezentując tarczę o średnicy  $34''$ . Jasne tło nieba i niskie położenie planety nad horyzontem oznacza, że obserwacje jej księżyców galileuszowych są trudne, albo wręcz niemożliwe. Drugiej nocy lutego sierp Księżyca w fazie 3% pojawi się  $7^\circ$  pod Jowiszem, dzień później zaś przesunie się na pozycję  $10^\circ$  na lewo i w górę od niego, zwiększając przy tym fazę do 8%. W odległości ponad  $20^\circ$  układowi temu towarzystwa dotrzymają Deneb Kaitos, najjaśniejsza gwiazda Wieloryba.

Podczas kolejnych dwóch nocy, 3 i 4 lutego, Księżyc przejdzie blisko planety **Neptun**, tworząc prawie taką samą konfigurację, jak przy spotkaniu z Jowiszem. Jasność Neptuna to  $+7,8^m$ , stąd na jego obserwacje trzeba poczekać, aż się odpowiednio ściemni. Niestety do tego czasu planeta zbliży się do linii widnokregu na mniej niż  $20^\circ$ , a to oznacza, że jej obraz teleskopowy silnie zaburzy falowanie atmosfery.

Srebrny Glob spotka się z **Uranem** 7 lutego. O zmierzchu oba ciała Układu Słonecznego przedzieli dystans  $3^\circ$ , by około północy, tuż przed ich zachodem, zmniejszyły się dwukrotnie. W lutym Uran jest nadal widoczny bardzo dobrze. Planeta świeci z jasnością  $+5,8^m$ , a zaraz po zapadnięciu ciemności wznosi się na wysokość prawie  $50^\circ$ . Uran zachodzi po północy, a zatem na obserwacje tej planety w dobrych warunkach będziemy mieli ponad 4 godziny. Dobę później, 8 lutego, Księżyc przejdzie przez I kwadrę, świecąc na pograniczu gwiazdozbiorów Barana i Byka

Księżyc powędruje dalej na północny wschód, by 16 lutego przejść przez pełnię. Po drodze, 9 lutego, przetnie linię łączącą Aldebarana, najjaśniejszą gwiazdę Byka, z Plejadami, dobę później zaś przetnie linię łączącą Aldebarana z El Nath, czyli drugą co do jasności gwiazdą Byka, stanowiącą jego północny róg. Podczas tej wędrówki, 12 lutego, Księżyc w fazie 86% zbliży się na niewiele ponad  $2^\circ$  do Meksuty, jasnej gwiazdy Bliźniąt oznaczanej na mapach nieba grecką literą  $\epsilon$ . Następnej nocy Księżyc spotka się z Polluksem, najjaśniejszą gwiazdą Bliźniąt, zbliżając się doń na około  $3^\circ$ .

Świecący pełnią blasku Srebrny Glob wędruje w towarzystwie Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Oba ciała niebieskie przedzieli odległość nieco ponad  $4^\circ$ . Jednocześnie zaledwie  $0,25^\circ$  nad jego tarczą pokaże się gwiazda 3. wielkości  $\eta$  Leonis. Bliskość tak jasnej księżycowej tarczy spowoduje jednak, że do jej dostrzeżenia przyda się lornetka lub teleskop. Noce są wciąż długie, dlatego do rana Księżyc zdąży się oddalić od  $\eta$  Leo na odległość  $6^\circ$ .

Po pełni Księżyc przeniesie się na niebo poranne i podaży do ostatniej kwadry w nocy z 23 na 24 lutego. Przedtem, trzy noce wcześniej, spotka się ze Spiką, najjaśniejszą gwiazdą Panny, prezentując tarczę w fazie 80%. W kolejnych dwóch dniach Srebrny Glob minie Zuben Elgenubi, gwiazdę  $\alpha$  w gwiazdozbiorze Wagi. Tym razem gwiazda również zniknie na jakiś czas za księżycową tarczą. Stanie się to jednak, gdy w Polsce oba ciała niebieskie będą przebywały pod horyzontem.

Zuben Elgenubi znajduje się zaledwie  $20'$  na północ od ekliptyki, co oznacza, że Księżyc mija ją bardzo szybko, sezon jej zakryć jest krótki i z danego miejsca na Ziemi można obserwować najczęściej jedno lub dwa zakrycia z serii. Tak samo jest tym razem: sezon jej zakryć trwa tylko 1,5 roku, od października 2021 do marca 2023 roku. W tym czasie dojdzie do 20 zakryć, z tego z Polski dało się zaobserwować tylko zakrycie ze stycznia br. Pasy widoczności pozostałych zjawisk przejdą daleko od Europy. Dla porównania sezon zakryć Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka położonej  $5,5^\circ$  na południe od ekliptyki, czyli na granicy obszaru zasłanianego przez Księżyc na swojej drodze po niebie, trwa ponad 3 lata i w tym czasie dochodzi do prawie 50 takich zjawisk. Z tego samego miejsca na Ziemi w trakcie trwania sezonu można obserwować ich ponad 10.

Pod koniec miesiąca, 24 lutego rano, Księżyc w ostatniej kwadrze pojawi się na niebie około godziny 2 w towarzystwie jasnych gwiazd Skorpiona. Najjaśniejsza gwiazda konstelacji, Antares, znajdzie się  $3^\circ$  pod Księżycem, a  $2^\circ$  dalej na zachód od Księżyca pokaże się natomiast łuk gwiazd z północno-zachodniej części Skorpiona, z Graffias i Dschubbą na czele.

Do końca miesiąca Księżyc pozostanie na niebie porannym, przebywa jednak pod nisko położoną ekliptyką, stąd zginie w zorzy porannej już kilka dni przed nowiem. Oświetlona w 16% tarcza Srebrnego Globu 27 lutego odwiedzi planety **Venus** i **Mars**, pokazując się w odległości  $5^\circ$  od **Marsa**, na godzinie 4:30 względem niego. Obie planety przez cały miesiąc utworzą parę o rozpiętości od  $9^\circ$  na początku lutego do  $5^\circ$  na jego koniec. Niestety o tej porze roku i doby ekliptyka tworzy na półkuli północnej mały kąt z widnokregiem, dlatego obie planety są widoczne znacznie słabiej, niż miałyby to miejsce jesienią. Venus przez cały miesiąc wędruje kilka stopni na północ od ekliptyki, stąd jej warunki obserwacyjne są wyraźnie lepsze od znajdującego się tuż pod nią Marsa.

Venus oddala się od nas i jej średnica kątowa w lutym zmniejszy się od  $50''$  do  $32''$ , faza urośnie z 15% do 35%, jasność natomiast troszkę się obniży, do  $-4,4^m$ . Mars przeciwnie: dystans między nami a nim się zmniejsza. Na razie pozostanie to bez większego wpływu na jego średnicę kątową, która utrzyma się na poziomie  $4''$ . Zauważalnie zwiększy się za to jasność planety, z  $+1,5$  do  $+1,2^m$ . W pierwszym tygodniu miesiąca, 5 lutego, Czerwona Planeta zbliży się na zaledwie  $12'$  do jasnej gromady kulistej M22, by 6 dni później przejść  $3^\circ$  na północ od Nunki, najjaśniejszej gwiazdy w tej części Strzelca.

*Ariel MAJCHER*

### *Tertium non datur*

W marcu 2021 roku zostały podane do publicznej wiadomości długo oczekiwane wyniki doświadczalne. Zespół eksperymentu ANAIS ogłosił, że wykorzystywane przez niego detektory nie zaobserwowały żadnych oddziaływań, które mogłyby być wynikiem zderzeń cząstek ciemnej materii z substancją czynną – kryształami jodku sodu, NaI. Tym samym zaprzeczono doniesieniom zespołu eksperymentu DAMA/LIBRA, który używając analogicznej techniki doświadczalnej, od dwudziestu lat ogłasza odkrycie takich oddziaływań. Niniejsza rubryka, na podobieństwo tabloidów śledząca „skandale” na salonach fizyki, uważnie przygląda się zwrotom akcji w tej sprawie, o czym Czytelnicy *Delty* mieli ostatnio możliwość przekonać się w zeszłorocznym numerze majowym.

Ta kontrowersja mogła oznaczać jedną z trzech możliwości. Wyniki DAMA/LIBRA zawierają niezidentyfikowany efekt systematyczny, który „udaje” prawdziwy sygnał ciemnej materii. Ponieważ poszukiwania ciemnej materii w detektorach NaI polegają na poszukiwaniu rocznej modulacji liczby zliczeń w detektorze, które nie dają się wyjaśnić innymi efektami, nietrudno wyobrazić sobie istnienie zupełnie zwyczajnego zjawiska zmieniającego się w takim cyklu, które umknęło uwadze badaczy. Drugą możliwością jest to, że wyniki DAMA/LIBRA są poprawne, zaś sygnał obserwowany przez ANAIS zawiera w sobie statystyczną fluktuację w dół, powodującą, że nie da się go w tej chwili dostrzec. Najmniej prawdopodobny jest scenariusz, w którym zachodzi kombinacja zjawisk powodujących, że żadnym z tych wyników nie należy wierzyć.

Nie od rzeczy będzie zatem donieść, że w połowie listopada ubiegłego roku ogłoszono wyniki eksperymentu COSINE-100 (ang. *Consortium between KIMS and DM-ICE Sodium Iodine Experiment*). Wykorzystywany jest w nim detektor zawierający nieco ponad 100 kg jodku sodu domieszkowanego talem, w postaci ośmiu kryształów. Znajduje się on w podziemnym laboratorium przy elektrowni pompowo-szczytowej w Yangyang, 150 km na wschód od Seulu. Gruba warstwa skał chroni detektor przed promieniowaniem kosmicznym, a sama substancja czynna jest osłonięta, patrząc od środka, ciekłym scyntylatorem, skrzynią miedzianą, ścianą z ołowiu i polimerowymi panelami scyntylacyjnymi. Taka konstrukcja zapewnia zarówno osłonę bierną (elementy metalowe), jak i czynną (koincydencja czasowa odczytów z detektora i z osłaniającego scyntylatora).

Wyniki COSINE-100 z pewnością rozczarują wszystkich, którzy oczekiwali jakiegoś definitywnego rozstrzygnięcia opisywanej na początku kontrowersji. Okazuje się bowiem, że są one zgodne *zarówno* z wynikami DAMA/LIBRA, jak i z wynikami ANAIS (które z bardzo dużym prawdopodobieństwem wzajemnie się wykluczają). Polega to na tym, że najbardziej prawdopodobna liczba nadmiarowych oddziaływań jest z dokładnością do czynnika 2 zgodna z tą podawaną przez DAMA/LIBRA, tylko z maksimum nadmiarowych zliczeń występującym o 1–2 miesiące później, ale niepewności statystyczne są na tyle duże, że wynik ten jest zgodny z negatywnym rezultatem ANAIS.

A jak jest naprawdę? Musimy, tak jak fani popularnych seriali na platformach streamingowych, uzbroić się w cierpliwość i czekać na kolejny sezon. COSINE-100 będzie działać jeszcze do końca tego roku, po czym zostanie zdemontowany i na jego miejscu zacznie powstawać ulepszony detektor COSINE-200. Tymczasem badacze otrzymają dodatkowy zestaw danych o objętości porównywalnej z dotychczas uzyskanym. Analiza całości powinna przynajmniej zasugerować, czy ciemna materia została odkryta, czy jednak nie.

Krzysztof TURZYŃSKI





# Na tropie wielomianów – część 2

Bartłomiej BZDEGA

**Uwaga.** W całym artykule (również w zadaniach) rozważamy wyłącznie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych i mówimy wyłącznie o pierwiastkach rzeczywistych.

Korzystając z indukcji matematycznej oraz twierdzenia Bézouta (zob. kącik nr 12 w  $\Delta_{19}^{12}$ ), można wykazać, że wielomian stopnia  $n \geq 1$  ma co najwyżej  $n$  pierwiastków. Z tego wynika następujący fakt, który jest punktem wyjścia do kolejnych rozważań.

**Twierdzenie 1.** *Jeśli wielomian  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  ma więcej niż  $n$  pierwiastków, to jest on wielomianem zerowym. W szczególności zerowy jest każdy wielomian, który ma nieskończenie wiele pierwiastków.*

Prostym wnioskiem z powyższego jest

**Twierdzenie 2.** *Weźmy  $n + 1$  różnych liczb:  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Jeśli wielomiany  $P$  i  $Q$  o stopniu nieprzekraczającym  $n$  spełniają równości  $P(x_k) = Q(x_k)$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ , to  $P = Q$ .*

*Dowód.* Teza wynika z twierdzenia 1 dla wielomianu  $R(x) = Q(x) - P(x)$ .

**Twierdzenie 3.** *Rozważmy pary liczb rzeczywistych  $(x_k, y_k)$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ . Jeśli wszystkie liczby  $x_0, x_1, \dots, x_n$  są różne, to istnieje dokładnie jeden wielomian  $P$  o stopniu nie większym niż  $n$ , który spełnia równości  $P(x_k) = y_k$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ . Nazywamy go wielomianem interpolacyjnym Lagrange’a.*

*Dowód.* Wystarczy skonstruować taki wielomian, bo twierdzenie 2 gwarantuje nam jego jedyność. W tym celu wykorzystamy wielomiany pomocnicze

$$L_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_k - x_1} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n-1}}{x_k - x_{n-1}} \cdot \frac{x - x_n}{x_k - x_n}.$$

Tu warto dokładnie się przyjrzeć, czym się różnią liczniki od mianowników oraz jakiego czynnika tu „brakuje” i dlaczego. Jest jasne, że  $L_k(x_k) = 1$ . Jeśli  $j \neq k$ , to ze względu na czynnik  $\frac{x - x_j}{x_k - x_j}$  mamy  $L_k(x_j) = 0$ . Z tych dwóch obserwacji wynika, że szukanym wielomianem jest

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x).$$

Co więcej, każdy z wielomianów  $L_0, L_1, \dots, L_n$  jest stopnia  $n$ , więc stopień wielomianu  $P$  nie przekracza  $n$ .

## Zadania.

1. Wytropić wszystkie wielomiany  $P$ , które dla każdego rzeczywistego  $x$  spełniają daną równość:

- (a)  $P(x) = \frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$ ;
- (b)  $xP(x-1) = (x-2)P(x)$ ;
- (c)  $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$ .

(H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata*)

2. Niech  $n \geq 2$  będzie liczbą naturalną. Wyznaczyć wielomiany pomocnicze  $L_k(x)$  dla  $x_k = k$  przy  $k = 0, 1, \dots, n$  i podać wartości  $L_k(n+1)$ . Korzystając z tych dobrodziejstw, wyznaczyć  $P(n+1)$ , jeśli  $P$  jest wielomianem o stopniu nie większym niż  $n$  oraz:

- (a)  $P(k) = a^k$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ , przy czym  $a \neq 0$  jest dowolną stałą;
- (b)  $P(k) = \frac{k}{k+1}$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ . (1975 USAMO)

3. Udowodnić, że  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k-1)^{n-1} = 0$ .

4. Dowieść, że  $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$ .

5. Wielomiany  $P$  i  $Q$  mają co najmniej po jednym pierwiastku rzeczywistym oraz spełniają równość

$$P(1+x+Q(x)^2) = Q(1+x+P(x)^2).$$

Dowieść, że  $P = Q$ . ([www.imomath.com](http://www.imomath.com))

**Wskazówki do zadań**  
 1. (a) Niech  $P(0) = a = b$ ;  $P(1) = a + b$ . Ze wzoru  $P(x+1) = 2P(x) - P(x-1)$  oraz indukcji wynika, że  $P(x) = ax + b$  dla wszystkich  $x$  naturalnych. Rozwiązanie kończy zastosowanie twierdzenia Bézouta. Na mocy twierdzenia Bézouta możemy więc zapisać  $P(x) = a(x-1)Q(x)$  dla pewnego wielomianu  $Q$ . Po podstawieniu tego do zadanej równania otrzymujemy  $Q(x) \neq 0$  dla wszystkich  $x \neq 0, 1, 2$ . Niech  $P(x) = a(x+x^2) - b$ . Wstawiamy do zadanej równania  $P(x) = a(x+x^2) - b$  i otrzymujemy  $a(x+x^2) - b = 2(a(x+x^2) - b) - (a(x+x^2) - b)$ . Po obliczeniach  $(-1) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^n = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Z tego wynika, że Lagrange’a dla par  $(x_k, y_k) = (k, k^n)$  przy  $k = 0, 1, \dots, n$  jest wielomianem interpolacyjnym  $L_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n-1}}{x_k - x_{n-1}} \cdot \frac{x - x_n}{x_k - x_n}$ . Wytropić wszystkie wielomiany  $P$ , które dla każdego rzeczywistego  $x$  spełniają daną równość: (a)  $P(x) = \frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$ ; (b)  $xP(x-1) = (x-2)P(x)$ ; (c)  $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$ . (H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata*)  
 2. Niech  $n \geq 2$  będzie liczbą naturalną. Wyznaczyć wielomiany pomocnicze  $L_k(x)$  dla  $x_k = k$  przy  $k = 0, 1, \dots, n$  i podać wartości  $L_k(n+1)$ . Korzystając z tych dobrodziejstw, wyznaczyć  $P(n+1)$ , jeśli  $P$  jest wielomianem o stopniu nie większym niż  $n$  oraz: (a)  $P(k) = a^k$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ , przy czym  $a \neq 0$  jest dowolną stałą; (b)  $P(k) = \frac{k}{k+1}$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ . (1975 USAMO)  
 3. Udowodnić, że  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k-1)^{n-1} = 0$ .  
 4. Dowieść, że  $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$ .  
 5. Wielomiany  $P$  i  $Q$  mają co najmniej po jednym pierwiastku rzeczywistym oraz spełniają równość  $P(1+x+Q(x)^2) = Q(1+x+P(x)^2)$ . Dowieść, że  $P = Q$ . ([www.imomath.com](http://www.imomath.com))  
 Wskazówki do zadań



Polskie Towarzystwo Fizyczne, Politechnika Warszawska, Komitet Fizyki PAN oraz Polskie Stowarzyszenie Fotoniczne ustanowiły rok 2022 Rokiem Mieczysława Wolfkego.

W ramach obchodów zorganizowane zostaną m.in.:

1. Warsztaty „Od pomysłu do wynalazku” prowadzone w szkołach przez ekspertów Polskiego Towarzystwa Fizycznego w całym kraju
2. Pakiety eksperymentalne „Zrób to sam” udostępniane szkołom jako scenariusze lekcji nawiązujących do postaci i osiągnięć Mieczysława Wolfkego
3. Konkursy dla uczniów „Poszukiwanie talentów” obejmujące umiejętności plastyczne i techniczne
4. „Piknik naukowy z Wolfkem” – inauguracyjny w Warszawie, na Politechnice Warszawskiej, w maju, powtarzany w około 5 miejscach w przestrzeni publicznej
5. Sympozjum „Mieczysław Wolfke - 90 lat fizyki technicznej” w maju na Politechnice Warszawskiej
6. Granty badawczo-aparaturowe i nagrody naukowe za osiągnięcia w zakresie fizyki technicznej
7. Stałe instalacje holograficzne w przestrzeni miejskiej (około 15 lokalizacji w całym kraju)

Szczegółowy harmonogram można znaleźć na stronie:

<https://wolfke.fizyka.pw.edu.pl/>

