



NR 12 (571) 2021
CENA 5,5 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-5095 | NR IND. 35 580 X
MIESECZNIK
www.deltami.edu.pl

MATEMATYKA FIZYKA ASTRONOMIA INFORMATYKA

**Czy to,
co widzisz,
jest tym,
co jest?**
str. 5

UNIWERSYTET
WARSZAWSKI






9 127013 71300106



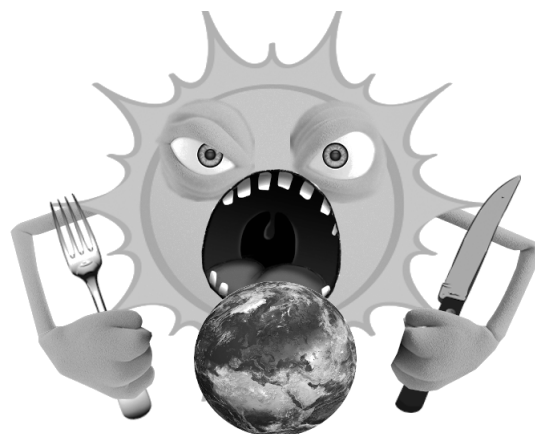
12

Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 12 (571)

Granice poznania <i>Wojciech Czerwiński</i>	str. 1
Matematyczne zoo <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 2
Czy to, co widzisz, jest tym, co jest? <i>Martyna Kobus</i>	str. 5
Co wiemy o tym, na czym to polega, że coś wiemy? <i>Paweł Wawrzyński</i>	str. 7
Tupot małych kroczków albo żart historii <i>Mariusz Skatba</i>	str. 9
W głąb struktury materii <i>Szymon Charzyński</i>	str. 11
Pomiar a granice poznania <i>Jan Chwedeńczuk</i>	str. 15
Czy Wszechświat jest skończony? <i>Marek Biesiada</i>	str. 17
 Zadania	str. 19
 Ile palców? Ile kosteczek? <i>Magdalena Fikus</i>	str. 20
Klub 44	str. 21
Prosto z nieba: YSES 2b, jak powstałaś?	str. 22
Niebo w grudniu	str. 22
Aktualności Dziewięć sekund	str. 24
 Kwadrat? <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze: Planety na obiad



Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Gdy zastanowimy się głębiej nad porównaniem stanu nauki i technologii dzisiaj z tym sprzed 150 lat, to powinniśmy doznać szoku. Świat rozwija się w niesamowitym tempie i czasem można odnieść wrażenie, że wiemy i umiemy już większość tego, co można i co chcielibyśmy wiedzieć – może poza kilkoma wyjątkami (np. lekami na niektóre choroby czy fuzją termojądrową). Czy tak jest w istocie? Po pierwsze trzeba zadać następujące pytanie: co pozwala nam sądzić, że postęp, który dokona się

w przeciągu najbliższych 150 lat, będzie mniejszy niż ten, który dokonał się w przeciągu ostatnich 150 lat? Wydaje się, że postęp przyspiesza w czasie i o ile żaden kataklizm tego procesu nie powstrzyma, to następne 150 lat wpasuje się w panujący wzorzec. Ludzie żyjący w roku 2171 będą być może patrzeć na nasz aktualny stan wiedzy z wyrozumiałym pobażaniem. Z tej perspektywy, moim zdaniem, powinniśmy jako ludzkość zachowywać pokorę wobec przyrody, wynikającą po prostu z trzeźwego myślenia.

Można by jednak postulować, że jesteśmy już tak blisko poznania Wszechświata, że następne wieki wcale nie przyniosą wielu oszałamiających odkryć. Zrozumieliśmy już może najważniejsze, a teraz będziemy jedynie uzupełniać szczegóły tej wiedzy. Trudno w tej chwili orzekać, który scenariusz jest prawdziwy, choć ja osobiście wierzę w ten pierwszy. Wiadomo jednak, że nawet jeśli wiemy już bardzo wiele, to i tak przyroda nieustannie uczy nas pokory. W przeciągu ostatnich 100 lat przekonaliśmy się, że jest wiele granic w poznaniu świata, których człowiek nie przekroczy, choćby nie wiem jak się starał.

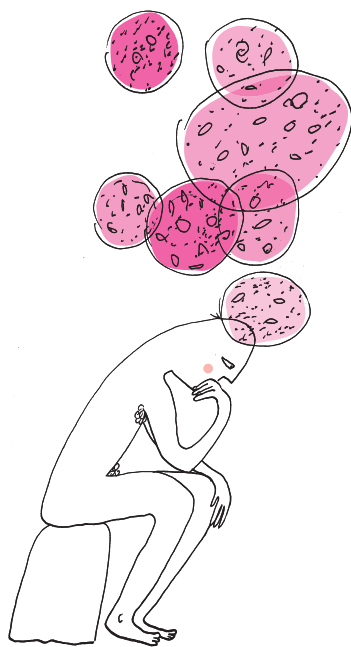
W niniejszym numerze *Delty* staramy się o tych właśnie granicach opowiedzieć. Granice, które znamy, można by z grubsza podzielić na trzy grupy: 1) granice wynikające z matematycznej logiki, 2) granice wynikające z budowy Wszechświata oraz 3) granice wynikające z tego, że jesteśmy tylko ludźmi.

W matematyce granice poznania sięgają głęboko do fundamentów. Okazuje się, że w zasadzie nie bardzo wiadomo, co oznacza sformułowanie „twierdzenie prawdziwe”, i cała matematyka stoi trochę na chwiejnych nogach. Właśnie o tym (m.in. o Pierwszym Twierdzeniu Gödla) przystępnie pisał Szymon Toruńczyk w Δ_{17}^1 . Niewiele lepiej jest z informatyką. Dla wielu problemów nie da się nigdy znaleźć algorytmów, o czym pisałem w Δ_{16}^{10} są to tzw. problemy nierozstrzygalne. O ciekawym problemie nierozstrzygalnym dotyczącym równań pisze w naszym numerze specjalnym Mariusz Skalba.

Nowoczesna fizyka i astronomia w zasadzie na co dzień napotykają na bariery. Nie znamy odpowiedzi na podstawowe pytania dotyczące budowy Wszechświata i części z nich najprawdopodobniej nigdy nie poznamy. Marek Biesiada pisze m.in. o tym, że Wszechświat jest być może nieskończony, ale cała ta nieskończoność, poza skończonym kawałkiem, nigdy nie będzie mogła być dostrzeżona z Ziemi. W mikroskali napotykamy jeszcze więcej problemów. Aktualnie za najbardziej podstawowe cząstki materii uznawane są kwarki i leptoni, lecz wcale nie wiadomo, czy nie składają się one z czegoś jeszcze bardziej „podstawowego”, o czym opowiada Szymon Charzyński. Nie dość, że nie wiemy, jakie są podstawowe składniki materii, to nawet te, które znamy całkiem dobrze, są w pewnym sensie niepoznawalne. O tej niepoznawalności, albo inaczej niemożliwości dokładnego zmierzenia pewnych ich parametrów, czyli słynnej zasadzie nieoznaczoności Heisenberga, pisał w Δ_{17}^{10} Jan Chwedeńczuk. Ten sam autor w aktualnym numerze przedstawia inny problem z pomiarami w mikroskali. Kłopoty wynikają z efektów występujących w mikroskali, ale problem dotyczy narzędzi badania Wszechświata w makroskali, czyli interferometru LIGO wykrywającego fale grawitacyjne docierające do nas z odległości milionów lat świetlnych.

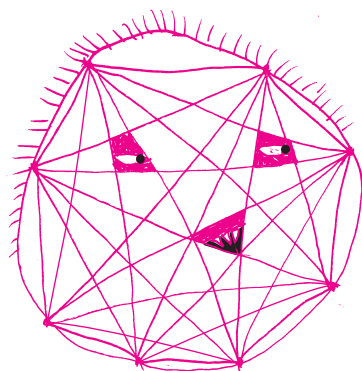
Najciekawsze być może są jednak bariery wynikające z tego, kim my, ludzie, sami jesteśmy. O naszym mózgu i tym, co to w ogóle znaczy, że coś wiemy, opowiada Paweł Wawrzyński, przy okazji nawiązując do sztucznej inteligencji. Michał Miśkiewicz pisze w numerze o fenomenach matematycznych, które wydają się

zaskakująco skomplikowane jak na naszą ludzką percepcję. Może z tą percepcją jest coś nie tak? W to, czy nasze wyobrażenie rzeczywistości ma faktycznie coś wspólnego z rzeczywistością, wprowadza nas Martyna Kobus. A więc parafrazując mistrza: Wiemy coś, czy nie wiemy? – oto jest pytanie.



Matematyczne zoo

Michał MIŚKIEWICZ



Nauczyciele i wykładowcy nieustannie starają się nas przekonać, że w matematyce rozwiązania problemów cechują się zaskakującą elegancją. Przy czym nie chodzi tu o rozwiązania redagowane przez uczniów – z tymi bywa różnie – tylko o same obiekty matematyczne, które stanowią odpowiedź na postawione problemy. Zazwyczaj są one eleganckie, proste w opisie, symetryczne lub po prostu „piękne”. Jak twierdził Godfrey Hardy: *There is no permanent place in the world for ugly mathematics.*

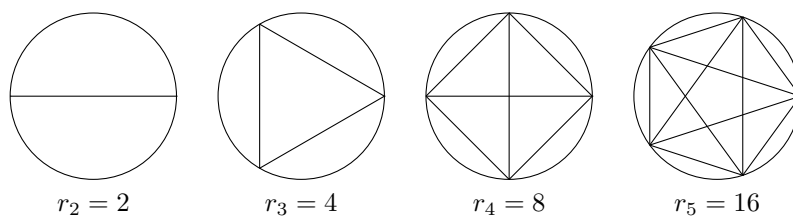
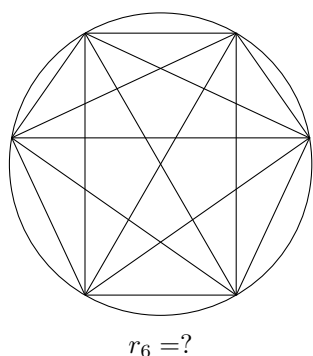
Przykładowo, na płaszczyźnie wśród wszystkich figur o obwodzie 2π największe pole ma koło jednostkowe – i tylko ono, a nie żaden z nieforemnych 123-kątów. Podobnych sytuacji jest dużo i zajmują one (zresztą słusznie) sporo miejsca również w *Delcie*.

Na przekór tym tendencjom chciałbym poprowadzić Czytelnika przez matematyczne zoo – trzy problemy, których rozwiązania zaskakują. Czy są brzydkie? Raczej nie, ale na pewno inne, niż byśmy się spodziewali, a w każdym razie bardziej skomplikowane. A może fakt naszego zaskoczenia wynika jedynie z naszego punktu widzenia, a przedstawione przykłady – podobnie jak słonie i szympansy, które w innym klimacie są tak zwyczajne jak konie i jeże – byłyby dla nas naturalne, gdybyśmy wiedzieli i rozumieli więcej?

To samo pytanie można zadać ogólniej: czy odkrywane przez nas struktury matematyczne są proste dlatego, że matematyka jest prosta, czy są proste, bo tylko takie umiemy odkryć?

Problem Mosera

Na okręgu zaznaczamy n punktów i rysujemy wszystkie cięciwy łączące te punkty. Jeśli nie mamy pecha, żadne trzy cięciwy się nie przecinają, co daje maksymalną możliwą liczbę obszarów, na które podzielone zostało koło. Ile tych obszarów jest? Zobaczmy:



Liczba obszarów r_n to kolejno 2, 4, 8, 16, i odpowiedź narzuca się sama: $r_n = 2^{n-1}$.

O dziwo dla $n = 6$ podobny rysunek z sześcioma punktami równomiernie rozłożonymi na okręgu daje jedynie 30 (a nie $2^5 = 32$) obszarów. Oczywiście jest to wina trzykrotnego przecięcia w samym środku. Ale czy tylko? Czytelnik może samodzielnie sprawdzić na rysunku obok, że po nieznacznej poprawce obszarów jest 31, czyli nadal o jeden za mało. Mamy więc do czynienia z niemiłą niespodzianką – zamiast wzorem $r_n = 2^{n-1}$ liczba obszarów wyraża się mniej elegancką formułą

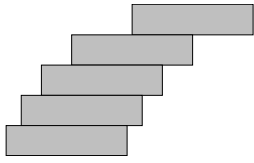
$$r_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}.$$

Ten problem – po raz pierwszy opisany przez Leo Mosera w 1949 roku – dobrze pokazuje, jak może nas zwieść oczekiwanie prostych odpowiedzi na proste pytania.

Napotkane przez nas zwierzę jest jednak egzotyczne jedynie powierzchownie. Wynik można bowiem przedstawić w postaci $r_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1}$, co tłumaczy, dlaczego pokrywa się z 2^{n-1} dla $n \leq 5$, ale nie dla większych n . Zachęcam Czytelnika do samodzielnego wyprowadzenia jednej lub drugiej postaci wzoru na liczbę obszarów.

Odnosińki do dalszej lektury:
L. Moser, W. Bruce Ross, *Mathematical Miscellany*, Mathematics Magazine, 23 (1949).
Dividing a circle into areas, Wikipedia.
Ciąg A000127, Internetowa Encyklopedia Ciągów Liczbowych.

Bardzo pochyłe stosy cegieł



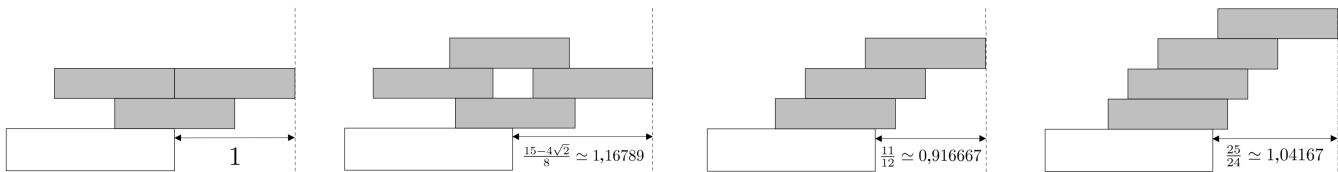
Ułożenie cegieł w *stos harmoniczny* – optymalne, jeśli w każdej warstwie ma być jedna cegła

Mamy do dyspozycji stół oraz n identycznych sześciennych cegieł o krawędzi 1 (jednorodnych, bez tarcia). Zadanie polega na tym, by z cegieł ułożyć na stole stos, który będzie sięgał jak najdalej poza krawędź stołu (w poziomie). Można o tym problemie przeczytać w artykule Karola Gryszki Δ_{19}^7 wraz z przykładowym ułożeniem cegieł (jak na rysunku). W takiej wieży górna cegła jest wysunięta o $1/2$ względem drugiej, druga o $1/4$ względem trzeciej itd. – dolna n -ta cegła jest wysunięta o $1/(2n)$ poza krawędź stołu. Łączne wychylenie wynosi

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \approx \frac{1}{2} \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

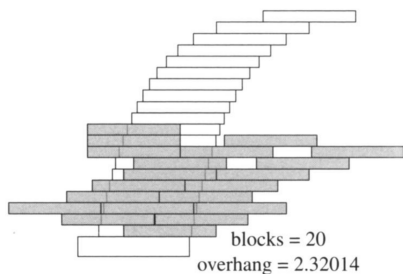
a więc może być dowolnie duże, jeśli tylko mamy pod ręką wystarczający zapas cegieł. Całkiem imponujące.

Ale czy jest to optymalne ułożenie? Jeśli umówimy się, że cegły wolno kłaść tylko kolejno jedna na drugiej, to okazuje się, że tak. Ale w ogólności da się lepiej – dla $n = 3, 4$ łatwo zauważyć, że użycie niektórych cegieł jako przeciwwagi wbrew pozorom pozwala uzyskać większe wychylenie. Konstrukcję zilustrowaną poniżej można uogólnić na dowolną liczbę cegieł i okazuje się, że daje to optymalne rozwiązanie dla $n = 1, 2, \dots, 19$, ale na tym koniec.



Porównanie optymalnych stosów 3 i 4 cegieł z odpowiednimi stosami harmonicznymi.

Źródło: M. Paterson, U. Zwick, *Overhang*, Amer. Math. Monthly 116 (2009), no. 1



Optymalny stos z 20 cegieł.
Źródło: M. Paterson, Y. Peres, M. Thorup, P. Winkler, U. Zwick, *Maximum Overhang*, Amer. Math. Monthly 116 (2009), no. 9

Paterson i Zwick znaleźli numerycznie przybliżone optymalne rozwiązania dla wszystkich $n \leq 30$. Efekt tej optymalizacji dla 20 cegieł można podziwiać na marginesie. Trudno dopatrzeć się jakiegokolwiek symetrii w tej konfiguracji. Kto by się spodziewał?

Grupa Monstrum

There's a thing called the Monster Group, which is a beautiful, very large symmetrical thing. (...) There's never been any kind of explanation of why it's there and it's obviously not there just by coincidence.

John Conway

Ograniczę się tutaj do pobieżnej prezentacji grupy monstrum i jej roli w teorii grup, a dużo bogatsze omówienie Czytelnik znajdzie w artykule Gabrieli Majewskiej w Δ_{13}^5 . Przegląd grup skończonych zaczniemy od permutacji – są to po prostu bijekcje między ustalonym zbiorem skończonym a nim samym. Do ich zapisu zastosujemy następujący zapis oparty na cyklach. Na przykład tę samą bijekcję ze zbioru $\{1, \dots, 6\}$ w niego samego można opisać na dwa sposoby:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{array} \longleftrightarrow (235)(46).$$

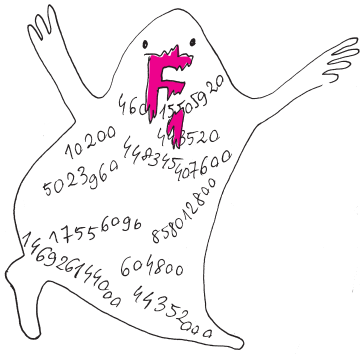
Pierwszy sposób tłumaczy się sam, natomiast drugi oznacza, że bijekcja ta przeprowadza 2, 3, 5 na 3, 5, 2 (odpowiednio), 4, 6 na 6, 4, a elementy pominięte w zapisie (w tym przypadku 1) pozostawia w miejscu.

Odnotujmy jeszcze, że permutacje zbioru $\{1, \dots, n\}$ można składać (jako funkcje). Zbiór wszystkich takich permutacji wraz z działaniem składania (oznaczanym tu przez $*$) nazwiemy *grupą permutacji* S_n . *Podgrupą* S_n nazwiemy natomiast każdy podzbiór $G \subseteq S_n$ zamknięty na działanie składania[®]. Dla przykładu:

- Jeśli jako zbiór Z_n przyjmijemy cykl $(123 \dots n)$ wraz ze wszystkimi jego iteracjami (wielokrotnymi złożeniami), to powstały n -elementowy zbiór jest podgrupą. W przypadku $n = 4$ jest to zbiór

$$Z_4 = \{(1234), (13)(24), (1432), \text{id}\}.$$

[®]Wypada tu uprzedzić Czytelnika, że dla zwięzłości postanowiłem przytoczyć definicje skrojone do potrzeb artykułu, które jednak zawodzą w innych sytuacjach. Poprawne ogólne definicje omawia Joachim Jelisiejew w Δ_{19}^4 .



- Dla $n \geq 3$ podgrupą S_n nie jest zbiór wszystkich transpozycji (czyli permutacji postaci (ab)) wzbogacony o permutację identycznościową. Mianowicie dwie transpozycje (12) , (23) po złożeniu dają $(23) * (12) = (132)$, co transpozycją już nie jest.
- Podgrupą jest za to zbiór A_n wszystkich permutacji parzystych, czyli takich, które dają się przedstawić jako złożenie parzystej liczby transpozycji. Okazuje się, że stanowi to dokładnie połowę wszystkich permutacji, np. dla $n = 4$ jest to

$$A_4 = \{ \text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243) \}.$$

Na potrzeby niniejszego wprowadzenia przyjmujemy, że grupa skończona to nic innego jak podgrupa którejś z grup permutacji S_n .

Przejdźmy do problemu klasyfikacji grup skończonych. Na zasadzie analogii pomyślmy najpierw o klasyfikacji zbiorów skończonych. Jest ich bardzo dużo, więc umówmy się, że dwa zbiory utożsamimy, jeśli są równoliczne (czyli istnieje między nimi bijekcja). Sprowadza nas to do klasyfikacji liczb naturalnych $1, 2, 3, \dots$, gdyż zbiory k -elementowe można utożsamiać z liczbą k . Za pomocą iloczynu można rozkładać niektóre liczby na prostsze, np. $6 = 2 \cdot 3$ (w świecie zbiorów odpowiada to produktowi kartezjańskiemu). Istnieją oczywiście liczby nierozkładalne (są to $2, 3, 5, 7, \dots$), nazywamy je pierwszymi. Znając je, możemy zrekonstruować całe bogactwo liczb naturalnych poprzez tzw. rozkład na czynniki pierwsze.

- > Homomorfizm grup A, B to funkcja $f: A \rightarrow B$, która zachowuje działanie, czyli $f(a_1 * a_2) = f(a_1) * f(a_2)$ dla dowolnych $a_1, a_2 \in A$.
- > Izomorfizmem grup nazwiemy homomorfizm będący bijekcją zbiorów.
- > Grupę C nazywamy rozszerzeniem grup A, B , jeśli A jest izomorficzna z pewną podgrupą $A' \subseteq C$ oraz istnieje homomorfizm $f: C \rightarrow B$, dla którego $f(C) = B$ oraz $f^{-1}(\{\text{id}\}) = A'$.

Uwaga ☹ pozostaje tutaj w mocy!

Nie inaczej jest z grupami skończonymi. Zamiast równoliczności rozważamy pojęcie *izomorfizmu* – dwie grupy utożsamiamy, jeśli mają tę samą strukturę. Dla przykładu, grupa $\{\text{id}, (124), (142)\}$ (podgrupa S_4) działa tak samo jak grupa \mathbb{Z}_3 , więc nie ma sensu ich odróżniać przy klasyfikacji. Z kolei iloczyn liczb należy zastąpić przez *rozszerzenie* grup. Grupy, których nie da się w ten sposób rozłożyć na prostsze, nazywamy *prostymi*. Wszystkie te pojęcia opierają się na kluczowej koncepcji *homomorfizmu*; skrótowe omówienie można znaleźć na marginesie.

Ludzkości udało się sklasyfikować wszystkie skończone grupy proste. Rezultat jest piękny, ale raczej skomplikowany; do jego osiągnięcia potrzebna była praca kilkuset matematyków na przestrzeni dziesiątek lat i tysięcy stron publikacji. Niemniej udało się podzielić wszystkie skończone grupy proste na 18 nieskończonych rodzin oraz 26 „niedobitków”, które do żadnej z rodzin nie pasują. Czytelnik zna już dwie z tych rodzin:

- grupy \mathbb{Z}_p (*cykliczne*) dla p będącego liczbą pierwszą,
- grupy A_n (*alternujące*) dla $n \geq 5$,

choć nie musi być oczywiste, dlaczego te grupy są proste.

Przejdźmy do *niedobitków*, znanych jako grupy sporadyczne. Jest ich 26, a największa z nich nosi nazwę *grupa Monstrum*. Posiada ona

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 = 808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000,$$

czyli około $8 \cdot 10^{53}$ elementów. Dla porównania liczba atomów we Wszechświecie jest rzędu 10^{80} . Nie jest to oczywiście największa ze skończonych grup prostych – więcej elementów ma np. A_{44} – ale największa wśród sporadycznych. Jest jednak zaskakujące, że tak ogromny obiekt stanowi jedną z podstawowych „cegiełek”, z których zbudowany jest świat skończonych grup.

Podobne zaskoczenie towarzyszyło odkrywcom tej grupy w latach 70. ubiegłego wieku. Jej istnienie przewidział Bernd Fischer, a ściśle zweryfikował Robert Griess, który nadał jej nazwę *friendly giant* (przyjazny olbrzym). Ostatecznie jednak przyjęła się nazwa *monster group* (grupa Monstrum), zaproponowana przez Johna Conwaya. Ten ostatni poświęcił badaniu monstrum wiele uwagi, chcąc odpowiedzieć na pytanie, dlaczego ono tak naprawdę istnieje.

Przykład: grupa S_n jest rozszerzeniem A_n i S_2 , więc nie jest prosta dla $n \geq 3$. Istotnie, funkcja $f: S_n \rightarrow S_2$ przyporządkowująca id permutacjom parzystym i (12) pozostałym jest homomorfizmem spełniającym $f(S_n) = S_2$ i $f^{-1}(\{\text{id}\}) = A_n$.

Historię i matematykę stojącą za grupą Monstrum można też poznać poprzez filmy w serwisie YouTube: *Monster Group* i *Life, Death and the Monster* na kanale Numberphile oraz *Group theory, abstraction, and the 196,883-dimensional monster* na kanale 3Blue1Brown.

Czy to, co widzisz, jest tym, co jest?

Martyna KOBUS*

*Instytut Nauk Ekonomicznych PAN



Rozwiązanie zadania F 1037.

Początkowa energia kinetyczna E_k tramwaju o całkowitej masie m wynosi $E_k = mv^2/2$. Podczas hamowania działa siła tarcia $F = mg\mu_k$. Tramwaj zatrzyma się, gdy siła tarcia wykona na drodze s pracę $W = Fs$ równą początkowej energii kinetycznej E_k . Otrzymujemy:

$$s = \frac{v^2}{2g\mu_k}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych dostajemy $s = 96,45 \text{ m} \approx 100 \text{ m}$ (tak duża długość drogi hamowania wyjaśnia, dlaczego tramwaje mają szczególne przywileje w ruchu drogowym). Podczas hamowania wydzielili się ciepło równe pracy W . Do obliczenia wartości W potrzebna jest wartość całkowitej masy tramwaju. Przyjmijmy, że średnio masa pasażera wynosi $m_p \approx 70 \text{ kg}$. Otrzymujemy:

$$W = \frac{(m_0 + 50m_p)v^2}{2}.$$

Podstawienie danych liczbowych prowadzi do wniosku, że $W = 1,929 \text{ MJ}$, czyli tyle, ile czajnik o mocy 1 kW „wyprodukuje” w nieco ponad 32 minuty.



Rozwiązanie zadania F 1038.

Zwiększenie $1+z$ razy długości fali jest równoważne zwiększeniu $1+z$ razy okresu odpowiadających jej drgań pola elektromagnetycznego. Czas trwania procesów prowadzących do zmian jasności gwiazdy możemy „przeliczyć” na liczbę odpowiadających im okresów drgań emitowanej fali. Obserwowany na Ziemi proces zaniku jasności trwa tyle samo okresów drgań fal rejestrowanych na Ziemi, a więc

$$t_0 = \frac{t}{1+z},$$

co po podstawieniu danych liczbowych prowadzi do $t_0 = 30$ dni.

Warto podkreślić, że rozumowanie nie zależy od fizycznego źródła obserwowanego przesunięcia ku czerwieni, którym może być zjawisko Dopplera, przesunięcie grawitacyjne czy kosmologiczna zmiana skali.

Obszerniejszą dyskusję zagadnienia można znaleźć w: Silvia Simionato, *The Physics Teacher* 59, 333 (2021).

Czy nasza percepcja odzwierciedla strukturę świata, który istnieje niezależnie od niej? Innymi słowy, czy to, co widzimy, jest tym, co jest, czy jest tylko mentalną reprezentacją w naszym mózgu? Profesor kognitywistyki z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Irvine, Donald Hoffman, głosi tezę, że ludzka percepcja nie jest poprawna i nie ma na celu wiernego odzwierciedlenia otaczającej rzeczywistości. Jego książka *The case against reality: Why Evolution Hid the Truth from Our Eyes* była szeroko komentowana w mediach popularnonaukowych i popularnych (m.in. Quanta, The Atlantic, The Times). Formalny argument Hoffman wraz ze współautorami przedstawili w wydanym w zeszłym roku w czasopiśmie „Entropy” artykule pt. *Fact, Fiction, and Fitness*.

Autorzy artykułu przedstawili następujące rozumowanie. Dominujący pogląd w kognitywistyce jest taki, że istnieje „obiektywny” (niezależny od ludzkiego postrzegania) świat fizyczny i że ludzkie doświadczenia percepcyjne uchwytują cechy tego świata. Jest tak dlatego, że organizmy, które postrzegały świat prawidłowo, to znaczy miały tzw. poprawną percepcję (*veridical perception*), zdobyły ewolucyjną przewagę nad organizmami, które takiej percepcji nie miały. Hoffman i współautorzy podważają tę właśnie część tradycyjnego poglądu – jego uzasadnienie poprzez naturalną selekcję. Pokazują, że naturalna selekcja raczej kształtuje ludzką percepcję tak, że nie jest ona poprawna. Wspierają za to tzw. teorię interfejsu. Percepcja jest jak interfejs w komputerze. Niebieska ikonka w komputerze nie oznacza, że plik w komputerze jest niebieski. W istocie, pulpity nie mówią za wiele o komputerze, a jednak pulpity są przydatne. Niebieska ikonka pozwala używać komputera. Kieruje zachowaniem użytkownika w taki sposób, że „radzi” on sobie z tym urządzeniem – a jednocześnie ukrywa złożoną rzeczywistość, której użytkownik nie musi znać.

Taka jest główna idea. Percepcja kieruje zachowaniami adaptacyjnymi. Po części wiąże się to z ukrywaniem przed nami rzeczy, których nie musimy wiedzieć. I – zdaniem Hoffmana – jest to prawie cała rzeczywistość. Nie potrzebujesz wiedzieć, w jaki sposób neurony tworzą obraz węża; potrzebujesz uciec, gdy widzisz „ikonę” węża. Węże, podobnie jak cząstki kwantowe, nie mają obiektywnych cech niezależnych od obserwatora. Wedle tej teorii wąż, którego widzę, to opis stworzony przez mój system sensoryczny w celu poinformowania mnie o konsekwencjach moich działań dla przetrwania. Percepcja nie jest poprawna; nie wyewoluowała po to, by dobrze opisywać rzeczywistość, ale by pozwolić Ci w niej przetrwać, a te procesy niekoniecznie są zbieżne, argumentują autorzy. Ewolucja kształtuje rozwiązania akceptowalne, a nie optymalne. Wąż to takie akceptowalne rozwiązanie problemu: „jak mam się zachować w danej sytuacji”. Ewolucyjnie opłaca się raczej „widzieć” węża, widząc poruszające się liście trawy, i uciec.

Rozważmy podany przez autorów przykład, by lepiej zrozumieć szczegóły przedstawionej tezy. Gracze w grach ewolucyjnych rywalizują o wypłaty za lepsze dostosowanie, wybierając różne strategie. Załóżmy, że mamy w takiej grze dwa zwierzęta, które postrzegają tylko dwa kolory. Pierwsze zwierzę widzi jasnoszary, gdy ilość jedzenia w otoczeniu jest poniżej pewnej wartości, i ciemnoszary, gdy jest powyżej. Drugie widzi ciemnoszary, gdy ilość pożywienia znajduje się w pewnym średnim zakresie, i jasnoszary wszędzie indziej. Załóżmy teraz, że funkcja wypłaty jest monotoniczna: im więcej jedzenia, tym wyższa wypłata. Zatem percepcja pierwszego zwierzęcia jest spójna z otoczeniem – zachowuje uporządkowanie ilości pożywienia. Pierwsze zwierzę jest lepiej przystosowane. Ma prostą strategię osiągania wyższych wypłat – jedz na tych obszarach, w których widzisz ciemnoszary.

Teraz załóżmy, że funkcja wypłat jest inna. Największe wypłaty są dla średniej ilości pożywienia, a niższe dla dużej i małej ilości pożywienia. Taka funkcja

wypłat, w odróżnieniu od poprzedniej, nie jest homeomorfizmem struktury rzeczywistości – nie zachowuje porządku co do ilości pożywienia. Czy takie funkcje w ogóle występują w rzeczywistości? Jak najbardziej. Weźmy na przykład ilość tlenu w atmosferze. Tylko wąski zakres ciśnień parcyjnych tlenu, między 19,5% a 23,5%, podtrzymuje ludzkie życie. Za dużo jest dla człowieka śmiertelne i za mało też. To samo dotyczy promieniowania ultrafioletowego, poziomu glukozy we krwi i innych. Niehomeomorficzne funkcje wypłat są więc jak najbardziej realne.

Tym razem pierwsze zwierzę jest gorzej dostosowane. Nie ma ono prostej strategii na uzyskanie większych korzyści. Gdy żywi się tam, gdzie widzi jasnoszary, czasem osiąga wysokie korzyści, a czasem niskie. Z kolei drugie zwierzę jest teraz dobrze przystosowane. Pamiętajmy jednak, że jego percepcja wcale nie odzwierciedla dobrze struktury otoczenia, jaką jest porządek.

Co różni te dwie opisane sytuacje? Kluczowe jest to, czy funkcja wypłaty jest homeomorfizmem struktury świata. Jeśli jest, wówczas percepcja, która też zachowuje strukturę świata, jest lepiej przystosowana i faworyzowana w procesie naturalnej selekcji. Jeśli z kolei funkcja wypłaty nie jest homeomorfizmem struktury świata, to wówczas percepcja, która też nie jest, a jest homeomorfizmem wypłat, ma ewolucyjną przewagę. Zatem to, czy funkcja wypłaty jest, czy nie jest homeomorfizmem struktury świata, decyduje o tym, czy nasza percepcja wyewoluowała tak, by być poprawną. Na ile prawdopodobne jest więc to, że funkcja wypłaty jest homeomorfizmem? Autorzy obliczają prawdopodobieństwa dla czterech rodzajów struktur: porządków, grup cyklicznych, grup permutacji i przestrzeni mierzalnych, zliczając liczbę homeomorfizmów i dzieląc przez liczbę wszystkich możliwych funkcji wypłat. Analizowane struktury są kluczowe dla postrzegania elementów świata fizycznego, takich jak wielkość (głośność, ciepło i inne), rotacje

i translacje obiektów oraz rozkłady prawdopodobieństwa. W granicy, gdy liczba stanów świata i możliwych wartości wypłat dąży do nieskończoności, dla każdej struktury rozważanej prawdopodobieństwo, że funkcja wypłat jest homeomorfizmem, dąży do zera. Naturalna selekcja, jak wskazuje wynik, raczej nie wspiera poprawnej percepcji.

Teza ta rzuca inne spojrzenie na tzw. prawo Stevensa, które na pierwszy rzut oka zdaje się dowodzić tradycyjnego poglądu. To prawo to empirycznie zaobserwowana regularność, zgodnie z którą intensywność odczuwanego wrażenia zmysłowego jest proporcjonalna do siły bodźca go wywołującego. Ścisłe, prawo Stevensa to $\phi(I) = kI^{\alpha(f)}$, gdzie I to wielkość bodźca wywołującego wrażenie, α to wykładnik potęgowy różny dla różnych zmysłów, zaś k to współczynnik proporcjonalności, zależny od rodzaju bodźców i stosowanych jednostek miar. Przykładowo, dla I ciśnienia akustycznego i $\phi(I)$ głośności α wynosi 0,67 dla tonu o częstotliwości 3 kHz. To prawo potęgowe (z różnymi parametrami) zachodzi dla wielu wrażeń, np.: wibracji, jasności, lekkości, pola widzenia, ciepła, bólu, twardości, ciężkości i porażenia prądem. Istnienie takich praw uważa się za dowód, że istnieje monotoniczna zależność (tu konkretna) ze świata fizycznego (I) do świata wrażeń percepcyjnych ($\phi(I)$). Nasi autorzy twierdzą, że ta interpretacja jest niepoprawna. To, co nazywamy zmiennymi fizycznymi (I), może być po prostu innym sposobem pomiaru, jakiego dokonuje obserwator przy użyciu swego systemu percepcyjnego i koncepcyjnego. Wówczas prawo Stevensa jest tylko odwzorowaniem między dwoma systemami pomiarów – bezpośrednimi „fizycznymi” (często przy użyciu urządzeń pomiarowych) i mniej bezpośrednimi pomiarami sensorycznymi. Przypomina to trochę spór o to, czy świat jest matematyczny w swej strukturze, czy matematyzowalny (daje się opisać pojęciami znanymi ludzkiemu mózgowi).

Tak rewolucyjne tezy spotykają się oczywiście z głosami krytycznymi; oto niektóre z nich. Po pierwsze, argument wydaje się trochę zapętłony. Zdaniem Hoffmana fizyczne obiekty, które widzimy, są co najwyżej satysfakcjonującymi rozwiązaniami problemu kompresji i prezentacji informacji koniecznej do przetrwania, istnieją w świadomości, która po prostu jest. Tym samym autor pomija to, że świadomość jest również tym, co wymaga wyjaśnienia w oparciu o zjawiska, które są u swych podstaw fizyczne. Po drugie, w tej argumentacji powstają problemy typu: dlaczego niektóre nietrujące węże ewoluowały, by naśladować jadowite gatunki? Ponieważ drapieżniki unikają prawdziwych jadowitych węży. Imitacja działa tylko wtedy, gdy *istnieje* obiektywna rzeczywistość do naśladowania. Po trzecie, należałoby wyjaśnić, jaka jest ewolucyjna korzyść z dużej różnorodności ikon drapieżników, skoro ich celem jest spowodowanie tej samej reakcji po stronie człowieka?

Ostatecznie, to, czy percepcja jest poprawna, czy jest tylko pożytecznym interfejsem, wymaga danych i ustalenia, czy większość biologicznych systemów sensorycznych tworzy ikony zniekształcające, czy odwzorowujące rzeczywistość. Wyniki formalne, choć wskazują na ciekawe i nieintuicyjne aspekty, bazują na szeregu uproszczeń. Niewątpliwie jednak wnioski autorów inspirują do intelektualnej dyskusji i pozwalają zachować być może potrzebny dystans wobec tego, na ile nasze dociekania dają wgląd w naturę rzeczywistości.



Rozwiązanie zadania M 1695.

Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $3k + 1$. Pokażemy, że p^2 posiada żądaną własność. Istotnie, jej dzielniki to 1 , p i p^2 , skąd średnia arytmetyczna dzielników jest równa $\frac{1+p+p^2}{3}$. Jednakże $1 + p + p^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$, stąd średnia arytmetyczna jest całkowita. Natomiast średnia geometryczna tych liczb jest równa $\sqrt[3]{1 \cdot p \cdot p^2} = p$, więc również liczba całkowita. Jako p wystarczy przyjąć 1033. Tak naprawdę istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $3k + 1$, co jest konsekwencją twierdzenia Dirichleta.

Co wiemy o tym, na czym to polega, że coś wiemy?

*Instytut Informatyki, Wydział
Elektroniki i Technik Informatycznych,
Politechnika Warszawska

Paweł WAWRZYŃSKI*

Modelowaniem procesów poznawczych w ludzkich mózgach zajmuje się neuronauka obliczeniowa (*computational neuroscience*). Nie dostarcza ona na razie wiedzy wystarczającej do tego, żeby zbudować sztuczny mechanizm działający jak ludzki umysł. Zbliżamy się do tego dosyć powoli.

Istotą poznania czegokolwiek jest pojawienie się pewnej reprezentacji tego czegoś w naszym mózgu. Ta reprezentacja powinna być na tyle trwała, aby mózg mógł ją w jakiś sposób wykorzystać. W tym sensie nasze poznanie ma granice związane z faktem, że nie poznamy tego, czego nie zrozumiemy, bo wówczas reprezentacja tego w naszym mózgu będzie błędna. Ponadto nie poznamy tego, czego na dłużej nie zapamiętamy, ponieważ wtedy jedynie osiągniemy chwilowe poczucie, że to poznaliśmy. Odłóżmy na bok analizę procesów w mózgu prowadzących do zrozumienia złożonej rzeczywistości dookoła niego. Skupmy się na problemie prostszym, a mianowicie na czym to polega, że coś wiemy? Spróbujmy na to pytanie odpowiedzieć w sposób wystarczający do tego, aby zbudować sztuczny system, o którym można byłoby powiedzieć, że posługuje się tym samym mechanizmem.

Siedzę na ławce w gmachu mojego wydziału i czekam na kogoś. Blisko mnie stoją dwa dystrybutory z kawą. Do jednego z nich podchodzi dziewczyna, wrzuca monetę i wybiera napój. Dystrybutor wydaje różne dźwięki wskazujące na to, że coś robi, choć akurat nie kawę. Dziewczyna zdradza objawy irytacji, popycha dystrybutor, ostatecznie podchodzi do drugiego i tam już skutecznie kupuje kawę. Następnego dnia sam zaopatruję się w kawę w dystrybutorze – oczywiście tym drugim.

Gromadzenie wiedzy o otaczającym świecie i używanie jej po to, aby podejmować w nim racjonalne akcje – oto oczywista funkcja systemów nerwowych bardziej złożonych organizmów żywych. Skuteczność realizowania tej funkcji niekiedy przesądza o życiu lub śmierci. Stąd bierze się ewolucyjna presja na jej rozwój.

Historia o tym, że coś wiemy, zaczyna się od podstawowego budulca naszych aparatów poznawczych, czyli komórki nerwowej – neuronu. Jądro komórkowe neuronu akumuluje potencjał elektryczny, który z biegiem czasu rośnie. Po przekroczeniu pewnej granicy jądro komórkowe skokowo obniża swój potencjał elektryczny, jednocześnie emitując impuls. Impuls rozchodzi się wzdłuż aksonu – długiego pałąka stanowiącego część neuronu. Akson ma kilka tysięcy zakończeń, którymi poprzez synapsy jest połączony z dendrytami innych neuronów. Rozchodzące się przez akson wyładowanie, poprzez synapsy i dendryty, wpływa na tempo, w którym inne neurony (do których te dendryty należą) zwiększają swój potencjał elektryczny.

A zatem podstawowym zajęciem neuronów tworzących nasze mózgi jest strzelanie do siebie impulsami elektrycznymi. Mamy tych neuronów po około 10^{11} – każdy z nich jest połączony poprzez akson i synapsy z około 7 tysiącami innych neuronów i swoimi impulsami współokreśla chwile, w których te neurony wygenerują kolejne impulsy. Każdy neuron generuje od kilku do kilkuset impulsów na sekundę. Jak ta strzelanina prowadzi do tego, że coś wiemy?

Informacja o tym, że dziewczyna nie zdołała kupić kawy w pierwszym dystrybutorze, przez kilka minut utrzymywała się w moim mózgu w postaci cyrkulacji elektrycznej. Gdyby ktoś w tym czasie poddał mój mózg elektrowstrząsom i zresetował jego naturalną aktywność elektryczną, nie pamiętałbym tego zdarzenia. Świadomość tego, co się wokół nas dzieje, jest podtrzymywana przez strzelające do siebie neurony.

Większość tego, czego jesteśmy świadomi, zapamiętujemy na dłużej. Niekiedy na całe życie. Ja z pewnością pamiętałem następnego dnia zaobserwowaną porażkę w kupowaniu kawy i pewnie będę to pamiętał przez kolejne tygodnie czy miesiące. Ewentualny reset cyrkulacji elektrycznej w moim mózgu nie zatrze tego wspomnienia. Zatrze je natomiast czas, i za kilka lat nie pozostanie po nim ślad. Byłoby ono znacznie trwalsze,



gdyby to zdarzenie było dużo bardziej emocjonujące. Silne emocje istotnie wpływają na trwałość wspomnień.

W ciągu kilku minut cyrkulacji elektrycznej utrzymywania świadomości wydarzenia, którego doświadczamy, wydarzenie to jest równocześnie pakowane do pamięci, która ma trwalszą formę. Tą formą jest siła połączeń synaptycznych pewnych neuronów. Przez zmianę tej siły neurony postsynaptyczne (dołączone dendrytami) będą inaczej reagować na impulsy w neuronach presynaptycznych (dołączonych zakończeniami aksonu). W przyszłości fragment mózgu będzie mógł być odpytany o dane wspomnienie i w odpowiedzi przywoła je. Zarówno pytanie, jak i odpowiedź będą miały postać wyładowań elektrycznych.

W jaki sposób impulsy w neuronach są nośnikami naszej świadomości? W jaki sposób to, czego jesteśmy świadomi, trafia do trwalszej pamięci? W jaki sposób przebiega odpytywanie pamięci długotrwałej i jak ona odpowiada? Nie wiemy tego. Stan wiedzy w tej dziedzinie obejmuje modele zachowania się pojedynczego neuronu. Dzięki różnym technikom obrazowania wiemy z pewną dokładnością, które fragmenty mózgu zwiększają swoją aktywność pod wpływem różnych kategorii bodźców. Jeśli chodzi o świadomość i pamięć, to zbudowaliśmy szereg opisujących je modeli o postaci prostokątów z napisami połączonymi strzałkami. Są one jednak dalece niewystarczające do tego, żeby zbudować sztuczny system o podobnej funkcjonalności.

Pewne hipotezy o funkcjonowaniu mózgu można budować, czerpiąc z obszaru dziedziny uczenia maszynowego zwanego uczeniem permanentnym (*continual learning*). Klasyczny problem rozważany w uczeniu maszynowym wygląda tak: Mamy zestaw par $\langle x_i, y_i \rangle \in \mathbb{R}^{n_x+n_y}$, $i = 1, \dots, N$ i funkcję $m(x, \theta)$ stanowiącą model zależności istniejących w danych. Wyznacza on wektory w \mathbb{R}^{n_y} z wejściami w \mathbb{R}^{n_x} i parametrami w \mathbb{R}^{n_θ} . Model będzie nam służył do zgadywania wektorów $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ na podstawie znanego $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ należącego do tej samej pary, przy założeniu, że owa para $\langle x, y \rangle$ będzie pochodziła z tego rozkładu co nasze dane. Problem sprowadza się do znalezienia minimum funkcji

$$(*) \quad J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|y_i - m(x_i, \theta)\|^2.$$

O uczeniu permanentnym mówimy wtedy, kiedy pary $\langle x_i, y_i \rangle$ przychodzą w pakietach i pakiety przetwarzamy sekwencyjnie – jeden po drugim. Dla przykładu, model powstaje na podstawie danych z kamer umieszczonych na samochodach. Codziennie przychodzi porcja nowych nagrań. Jest ich w sumie zbyt dużo, żeby pamiętać je wszystkie i budować model każdego dnia od nowa. Chcemy jedynie uaktualniać model na podstawie bieżącego pakietu. Aktualizacja modelu przez minimalizację funkcji $J(*)$ zdefiniowanej przez dane z bieżącego pakietu prowadzi do „katastrofalnego zapominania” poprzednich danych. Kiedy bowiem

zmuszamy nasz model m do właściwego reagowania na nowe dane, zmienia się także jego odpowiedź na wcześniejsze dane. Innymi słowy, nie możemy zmienić wykresu funkcji m w niektórych punktach, pozostawiając go nietkniętym w reszcie dziedziny. Co więc zrobić?

Kluczowe podejście do uczenia permanentnego polega na tym, aby poza modelem m budować także inny model, „generatywny”, pozwalający losować wcześniej widziane dane. W istocie ten drugi model stanowi pewną skompresowaną postać tych danych lub przynajmniej reprezentatywnej ich części. Wtedy aktualizacja modelu m polega na minimalizacji funkcji $J(*)$ zdefiniowanej przez dane z bieżącego pakietu i dane z modelu generatywnego. Fakt, że to podejście nie ma lepszej alternatywy, jest rozczarowujący. Chcielibyśmy aktualizować model na podstawie nowych danych bez konieczności pamiętania wszystkich. Tymczasem w jakimś sensie musimy pamiętać wszystkie dane, aby zapewnić, że model faktycznie do nich pasuje.

Taki sposób konsolidowania dawniejszej wiedzy ze świeżą jest oczywiście kosztowny obliczeniowo. Być może jednak każda jego alternatywa jest jeszcze gorsza. Argumentu wspierającego takie przypuszczenie dostarcza sen. Jedną trzecią życia spędzamy, śpiąc i śniąc. To sporo czasu spędzanego w ryzykowny sposób. W naszej przeszłości ewolucyjnej musiało to kosztować niejedno życie – odebrane przez skradające się drapieżniki (albo skonfliktowanych z nami przedstawicieli tego samego gatunku). Musi stać za tym jakaś bardzo istotna potrzeba. Być może jest to potrzeba ciągłego powtarzania wcześniejszych wspomnień, po to aby upakować je do tego samego modelu wraz z nowymi doświadczeniami.

Co faktycznie wiemy o ludzkiej pamięci długotrwałej? Ośrodkiem w mózgu, który zapewne odpowiada za tworzenie się wspomnień, jest hipokamp. Nie wygląda jednak na to, aby on sam był nośnikiem pamięci. Wiele przesłanek wskazuje raczej na to, że pamięć jest rozproszona po korze mózgowej. Ośrodki mózgu „merytorycznie” związane z przetwarzaniem informacji pewnego rodzaju biorą także udział w procesach związanych z tworzeniem się śladów pamięciowych dotyczących takich informacji, ich podtrzymywaniem i przywoływaniem.

Wiele osób intuicyjnie przypuszcza, że część mózgu jest rodzajem twardego dysku, do którego jest kompresowana informacja i potem przywoływana pewnego rodzaju zapytaniem. Jest to jednak intuicja całkowicie błędna. Naturalna pamięć jest rozproszonym, dynamicznym procesem, w którym nowa wiedza jest konsolidowana ze starą w taki sposób, aby uniknąć niekontrolowanej degradacji tej starej. Tymczasem, co takiego robią nasze neurony, aby ten proces podtrzymywać, i co takiego robią, kiedy przywołujemy naszą wiedzę? Odpowiedzi na te pytania są na razie poza granicami naszego poznania. Coraz lepiej jednak rozumiemy skalę trudności tych pytań.

Tupot małych kroczków albo żart historii

Mariusz SKAŁBA

Z chałupy na salony – tak najkrócej można by opisać karierę menueta w europejskiej muzyce użytkowej. Zasięg *drobnych kroczków* (po francusku *menu pas* oznacza właśnie „drobny krok”) okazał się jednak znacznie większy: menuet nie tylko przekroczył ramy barokowej suity, ale za sprawą klasyków wiedeńskich zajął poczesne miejsce jako trzecia część sonaty, najważniejszej formy muzycznej. Wreszcie Beethoven, a potem Chopin dokonali dalekosiężnej transformacji menueta do scherza (po włosku „żart”): już u pierwszego jest ono tylko chwilami żartobliwe, u drugiego zaś scherzo jest w pełni samodzielne i zawsze dramatyczne.

Podobnie było z karierą równań w matematyce. Wyszły one z opłotków arytmetycznej praktyki, trafiając na salony wyrafinowanych spekulacji: równania algebraiczne wzbogacone o równania różniczkowe stały się potężnym i systematycznym narzędziem poznawania świata i jednym z najintensywniej uprawianych i żywych poletek matematyki. Z tej działki wymieńmy trzech gigantów: Newton, Euler i Gauss. Ponoć pierwszy z nich mawiał, że widział dalej niż inni, gdyż stał na barkach poprzedników – olbrzymów.

Pomiędzy teoriami poszczególnych rodzajów równań istnieją potężnie płodne sprzężenia zwrotne, ale w sensie, który podniesiemy w tym artykule, wszystko obraca się cały czas wokół równań pojęciowo najprostszych, czyli *diofantycznych*. Dla dowolnego wielomianu $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o współczynnikach całkowitych

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

możemy mianowicie zająć się równaniem

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

i szukać jego rozwiązań tylko w liczbach całkowitych x_1, \dots, x_n . Możemy ewentualnie dopuścić wymierne wartości niewiadomych. W obu przypadkach mówimy o *równaniu diofantycznym*. Jak zilustrujemy poniżej, trudność konkretnego równania zależy zarówno od liczby niewiadomych, jak i stopnia wielomianu F . Przypadki, gdy stopień F jest mniejszy od 3, można skwitować krótko i pozytywnie: dzisiaj istnieją zadowalające teorie zarówno dla równań diofantycznych liniowych, jak i kwadratowych dowolnej liczby zmiennych. Tytułem przykładów przytoczymy po jednym klasycznym twierdzeniu dla stopnia 1 i 2.

- Równanie $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, gdzie a_1, \dots, a_n, b są dane całkowite, ma rozwiązania w liczbach całkowitych x_1, \dots, x_n wtedy i tylko wtedy, gdy liczba b dzieli się przez NWD(a_1, \dots, a_n).
- Jeśli liczba naturalna d nie jest kwadratem, to równanie $x^2 - dy^2 = 1$ (zwane *równaniem Pella*) ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y , przy czym jeśli x_1, y_1 jest rozwiązaniem z najmniejszym naturalnym x_1 , to wszystkie rozwiązania otrzymamy poprzez potęgowanie liczby $x_1 + y_1\sqrt{d}$, a dokładniej: para liczb naturalnych x, y jest rozwiązaniem tego równania wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że

$$x + y\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

Dla potrzeb dalszej części artykułu rozważmy dokładniej przypadek $d = 2$. Para liczb $(3, 2)$ jest tu najmniejszym rozwiązaniem, a więc wszystkie rozwiązania zawarte są w ciągu (x_n, y_n) :

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n.$$

Ponieważ $x_n - y_n\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^n$, więc możemy wypisać wzory explicite na x_n, y_n :

$$x_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2}, \quad y_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Jak szybko rosną kolejne rozwiązania równania

$$(1) \quad x^2 - 2y^2 = 1?$$

Na mocy powyższych wzorów:

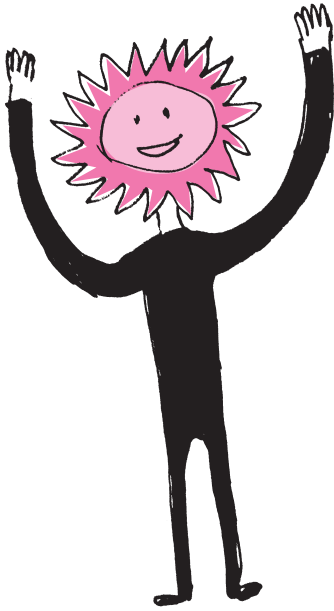
$$\log(x_n) \approx n \log(3 + 2\sqrt{2}) - \log(2), \quad \log(y_n) \approx n \log(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{3}{2} \log(2),$$

gdyż potęgi liczby $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$ są zaniedbywalnie małe dla dużych n . Można to zinterpretować tak, że liczba cyfr w liczbach x_n, y_n jest rzędu cn , gdzie c jest pewną stałą dodatnią.

Wspomniemy teraz o równaniach diofantycznych, w których rozwiązania rosną jeszcze szybciej. Niech mianowicie

$$(2) \quad F(x, y) = y^2 - x^3 - ax - b = 0,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$ spełniają warunek $\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Ten warunek gwarantuje, że zbiór punktów (x, y) spełniających równanie (2) jest krzywą gładką, tzn. taką, która ma styczną w każdym punkcie. Krzywe zadane równaniami typu (2) nazywamy *eliptycznymi*. Podobnie jak w przypadku równania Pella, okazuje się, że każde rozwiązanie w liczbach wymiernych (o ile w ogóle takie rozwiązania



istnieją) można wygenerować ze skończenie wielu rozwiązań za pomocą odpowiedniej procedury geometrycznej: prowadząc sieczne lub styczne przez dane punkty wymierne. Mówi o tym słynne twierdzenie Mordella z 1922 roku. Wnikliwa analiza każdej konkretnej krzywej eliptycznej prowadzi do wniosku, że maksimum licznika i mianownika współrzędnej x generowanych punktów ma około cn^2 cyfr! Tak więc chociaż rozwiązań może być nieskończenie wiele, to na pewno niewiele jest rozwiązań „małych” (przy czym „rozmiar” liczby wymiernej r/s , gdzie $r, s \in \mathbb{Z}$ oraz $\text{NWD}(r, s) = 1$, rozumiemy tu jako $\max(|r|, |s|)$). Równania krzywych eliptycznych to nieliczne równania diofantyczne 3 stopnia, dla których istnieje bogata, głęboka i piękna teoria – jeden z problemów milenijnych: hipoteza Bircha–Swinerton-Dyera, dotyczy zresztą rozwiązań wymiernych równania (2).

Ale czy rozwiązania mogą rosnąć jeszcze szybciej? Rozważmy w tym celu równanie diofantyczne z 1. etapu 68 Olimpiady Matematycznej:

$$(x^2 + 2y^2)^2 - 2(z^2 + 2t^2)^2 = 1.$$

Zadanie polegało na udowodnieniu, że to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych. Niech dalej S oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych postaci $x^2 + 2y^2$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$. Załóżmy najpierw, że dla pewnego n mamy

$$x_n = a^2 + 2b^2, \quad y_n = c^2 + 2d^2, \quad \text{gdzie } a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

i oczywiście x_n, y_n oznaczają n -te rozwiązanie równania Pella (1). Wówczas

$$x_{2n} + y_{2n}\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})^2 = (x_n^2 + 2y_n^2) + 2x_ny_n\sqrt{2}.$$

Mamy ponadto

$$2x_ny_n = (2ad + 2bc)^2 + 2(ac - 2bd)^2.$$

Zatem jeśli $x_n, y_n \in S$, to również $x_{2n}, y_{2n} \in S$. Wychodząc od rozwiązania $x_1 = 3 = 1^2 + 2 \cdot 1^2, y_1 = 2 = 0^2 + 2 \cdot 1^2$, otrzymamy ciąg nieskończony $x_{2^n}, y_{2^n} \in S$, co kończy rozwiązanie zadania z olimpiady. Ciąg x_{2^n} rośnie bardzo szybko – liczba x_{2^n} ma około $c2^n$ cyfr! Powstaje jednak naturalne pytanie, czy w ten sposób wytworzymy wszystkie rozwiązania? Okazuje się, że nie: można sprawdzić na komputerze, że $x_{257}, y_{257} \in S$, i stąd powstaje druga seria nieskończona: $x_{257 \cdot 2^n}, y_{257 \cdot 2^n}$. Czy są jeszcze inne serie? Wiadomość z ostatniej chwili: mamy $x_{937}, y_{937} \in S$, co generuje trzecią serię $x_{937 \cdot 2^n}, y_{937 \cdot 2^n}$ – być może są inne serie z rozwiązaniem „startowym” $x_n, y_n \in S$, gdzie $n < 937$ jest nieparzyste. Czy liczba serii jest skończona? To drugie pytanie jest ekstremalnie trudne i na pewno nie nadaje się na olimpiadę. Przy okazji zajmowania się 10. problemem Hilberta Martin Davis badał równanie podobnego typu:

$$9(x^2 + 7y^2)^2 - 7(z^2 + 7t^2)^2 = 2,$$

i wysunął hipotezę, że ma ono tylko rozwiązania pochodzące z równości $9 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1^2 = 2$. Z prawdziwości tej hipotezy wynikałoby łatwo dokończenie negatywnego rozstrzygnięcia 10. problemu Hilberta, ale niestety są jeszcze inne rozwiązania. Do rozwiązania problemu Hilberta wystarczyłaby osłabiona wersja hipotezy Davisa twierdząca, że rozwiązań jest skończenie wiele, ale nikomu nie udało się udowodnić (ani obalić) nawet tego. Ostatecznie Jurij Matiasiewicz znalazł odpowiednią formułę diofantyczną o wykładniczym wzroście na innej drodze, badając wnikliwie i dogłębnie ciąg Fibonacciego, i w ten sposób dokończył rozwiązanie (negatywne) 10. problemu Hilberta.

Podsumujmy nasze rozważania: niektóre równania czwartego stopnia z czterema niewiadomymi są tak trudne, że nie sposób przy obecnym stanie wiedzy i metod opisać ich *wszystkich* rozwiązań całkowitych, ale... Pomarźmy przez chwilę: może ktoś kiedyś wymyśli przynajmniej jednolity algorytm rozstrzygania, czy dane równanie czwartego stopnia ma w ogóle jakiegokolwiek rozwiązanie całkowite? Przywołajmy teraz anegdotyczną tasmańską metodę liczenia: *Jeden, dwa, . . . , mnóstwo*, i parafrazując Newtona, wyrażmy swoje najskrytsze życzenie – jako matematycy stojący wysoko na gigantycznym i olbrzymim podeście matematyki współczesnej chcemy podskoczyć jeszcze wyżej – przynajmniej na stopień *czwarty!*

Wykażemy na koniec, że nie ma na to szans! Skorzystamy oczywiście z negatywnego rozstrzygnięcia 10. problemu Hilberta: *nie ma algorytmu, który odpowiadałby na pytanie o istnienie rozwiązań dowolnego równania diofantycznego*. Wykażemy teraz, że gdyby taki algorytm istniał dla równań stopnia ≤ 4 (o dowolnej liczbie niewiadomych), to dałoby się go przerobić na algorytm uniwersalny: działający dla równania diofantycznego dowolnego stopnia. Tytułem ilustracji pokażemy teraz, jak zakodować równanie Fermata stopnia n :

$$x^n + y^n = z^n$$

za pomocą równania

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

stopnia ≤ 4 . Określamy najpierw ciąg zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n przyjmujących wartości całkowite dodatnie w następujący sposób: $x_1 = x$ oraz

$$x_2 = x_1 \cdot x_1, x_3 = x_2 x_1, \dots, x_n = x_{n-1} x_1$$

i analogicznie y_1, y_2, \dots, y_n oraz z_1, z_2, \dots, z_n . W tych nowych zmiennych oryginalne równanie Fermata zapisujemy tak: $x_n + y_n = z_n$. Ale powiązanie wszystkich $3n$ zmiennych też wymaga zakodowania. Ostateczne równanie wygląda tak:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j x_1)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (y_{j+1} - y_j y_1)^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (z_{j+1} - z_j z_1)^2 + (x_n + y_n - z_n)^2 = 0.$$

Oczywiście każde równanie diofantyczne można zakodować w analogiczny sposób. Zatem: nie ma szans na jednolitą algorytmiczną teorię równań diofantycznych stopnia ≤ 4 !

Zakończmy więc skromnie i z pewną taką nieśmiałością:

Jeden, dwa, trzy (?), ..., mnóstwo!

Do dzisiaj nie wiadomo, czy istnieje algorytm, który rozstrzyga dla dowolnego równania diofantycznego stopnia 3, czy ma ono jakiegokolwiek rozwiązanie całkowite.

W głąb struktury materii

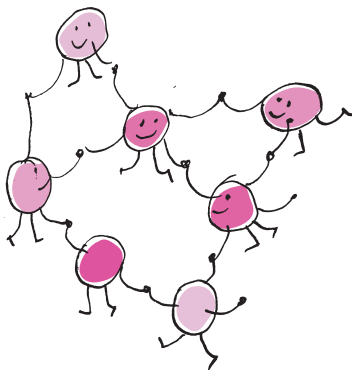
Szymon CHARZYŃSKI

Gdyby cała nauka miała ulec zniszczeniu w jakimś kataklizmie i tylko jedno zdanie można by uratować od zagłady i przekazać następnym pokoleniom, jakie zdanie zawierałoby największą ilość informacji w możliwie najmniejszej liczbie słów? W moim przekonaniu byłoby to zdanie formułujące hipotezę (lub rzeczywistość, jeśli wolicie tak to nazwać) atomistyczną, że wszystko składa się z atomów – w tym jednym zdaniu zawarto ogromną porcję wiadomości o świecie; trzeba tylko posłużyć się odrobiną wyobraźni i inteligencji, aby je dobrze zrozumieć.

Richard Feynman

Cytat pochodzi z podręcznika „Feynmana wykłady z fizyki”, tom 1, tłum. Zofia Królikowska (1963).

Więcej o historii idei atomistycznej można przeczytać w artykułach Grzegorza Białkowskiego Δ_{74}^1 i Krzysztofa Rejmera Δ_{17}^1 .



Hipoteza mówiąca o tym, że materia składa się z niepodzielnych cząstek zwanych atomami, jest znana od starożytności. Jednak przez tysiące lat nie było absolutnie żadnych możliwości doświadczalnego jej potwierdzenia ani obalenia. Tym bardziej nie było możliwości poznania właściwości tych mitycznych atomów. Co więcej, to, co obecnie nazywamy atomami, istotnie różni się od pojęcia, które stworzyli starożytni. Atomy starożytnych filozofów miały być niepodzielne, natomiast nasze, współczesne, atomy składają się z wielu mniejszych cząstek.

Pierwszych pośrednich dowodów na istnienie atomów dostarczyło systematyczne badanie reakcji chemicznych. Zaobserwowano, że aby reakcja chemiczna pomiędzy dwoma substratami przebiegała w taki sposób, aby w jej wyniku poza produktem reakcji nie pozostała nadwyżka żadnego z substratów, to należy łączyć te substraty w ściśle określonych proporcjach. Tego typu właściwości świetnie tłumaczy istnienie podstawowych drobin, różnych typów, których zidentyfikowano w XIX wieku kilkadziesiąt i nazwano *pierwiastkami*. Chemicy zauważyli pewne prawidłowości we właściwościach pierwiastków, co doprowadziło do ułożenia z nich pierwszej wersji układu okresowego, w którym było wówczas jeszcze trochę dziur. Wyjaśnienie całej ogromnej mnogości znanych

O historii badania ruchów Browna i wyjaśniania tego zjawiska można przeczytać w obszernym dwuczęściowym artykule Bogdana Cichońskiego (Δ_{83}^4 , Δ_{83}^5). Wkład Alberta Einsteina został omówiony szerzej w Δ_{05}^6 , natomiast dokonaniom Mariana Smoluchowskiego poświęcony był cały numer Δ_{97}^{12} , wydany z okazji osiemdziesiątej rocznicy jego śmierci.

Obecnie (po reformie układu jednostek z roku 2019, o której pisaliśmy w *Aktualnościach* Δ_{19}^1) liczba Avogadro jest stałą fizyczną równą dokładnie $6,02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Postęp, który dokonał się przez kolejne 100 lat, jest ogromny. Aktualnie fizycy są w stanie utrzymywać w pułapkach pojedyncze jony (zjonizowane atomy) i dokonywać na nich manipulacji albo obserwować przy użyciu skaningowego mikroskopu tunelowego wzory, w jakie atomy układają się na powierzchni kryształów Δ_{21}^7 .

Przed przeprowadzeniem eksperymentu wiadano, że cząstki alfa są jonami helu, czyli atomami helu pozbawionymi elektronów. Dziś wiemy (między innymi dzięki temu eksperymentowi), że są to po prostu jądra helu złożone z dwóch protonów i dwóch neutronów. Cząstki takie są emitowane w niektórych rozpadach jądrowych, np. w rozpadach radonu, który był źródłem cząstek alfa w eksperymencie Rutherforda.

Mechanika kwantowa pozwoliła opisać, w jaki sposób elektrony związane są w atomach. Struktura opisywanych przez mechanikę kwantową stanów zajmowanych przez elektrony w atomie determinuje jego właściwości chemiczne. Struktura tych właśnie stanów znajduje swoje odzwierciedlenie w układzie okresowym pierwiastków. Można więc powiedzieć, że mechanika kwantowa dostarcza wyjaśnienia, dlaczego pierwiastki dają się porządkować w grupy o podobnych właściwościach chemicznych, tworzące układ okresowy pierwiastków.

substancji jako związków chemicznych kilkudziesięciu zaledwie typów atomów, dodatkowo układających się w pełną obiecująco wyglądającą prawidłowości tabelkę, było niewątpliwie ogromnym krokiem naprzód w odkrywaniu reguł opisujących budowę materii.

Kolejnym przełomowym krokiem na drodze do potwierdzenia hipotezy istnienia atomów było wyjaśnienie tzw. ruchów Browna, czyli drobnych drgań cząsteczek zawiesiny, które obserwowano pod mikroskopem i których systematyczne badanie rozpoczął w roku 1828 szkocki botanik Robert Brown. Przez kilkadziesiąt lat zjawisko to nie miało zadowalającego fizyków wyjaśnienia i budziło wiele kontrowersji. Solidna, stworzona przez Alberta Einsteina i Mariana Smoluchowskiego, teoria opisująca to zjawisko w sposób ilościowy powstała na początku XX wieku. Przewidywania tej teorii dały się sprawdzić w doświadczeniach na drobinach zawiesiny o rozmiarach znacznie mniejszych niż obserwowane wcześniej, dzięki skonstruowaniu przez Henry'ego Siedentopfa i Richarda Zsigmondy'ego w roku 1903 tzw. ultramikroskopu. Teoria Einsteina i Smoluchowskiego oparta była na teorii kinetyczno-molekularnej, czyli zakładała ziarnistą strukturę materii. Na jej podstawie można było między innymi z obserwacji ruchów Browna obliczyć wartość stałej Avogadro, co zostało wykonane przez Jeana Perrina w roku 1908. Otrzymany przez niego wynik doskonale zgadzał się z wynikami pomiarów tej samej stałej zupełnie innymi metodami w doświadczeniach z gazami. Wyniki te przekonały nawet najzagorzalszych przeciwników hipotezy atomowej w środowisku fizyków, a Jean Perrin został w 1926 roku uhonorowany Nagrodą Nobla za swoje prace nad ziarnistą strukturą materii.

Początek XX wieku to był zatem ten moment, kiedy istnienie atomów przestało być hipotezą, a stało się faktem. Teorie oparte na postulatcie, że materia składa się z atomów, można było testować doświadczalnie. Dzięki znajomości stałej Avogadro możliwe było wyznaczenie, ile atomów znajduje się w danej próbce pierwiastka. Okazało się więc, że możliwe jest wyznaczenie masy i rozmiaru pojedynczego atomu, czyli zyskaliśmy pewną konkretną wiedzę na ich temat, pomimo tego że samych pojedynczych atomów jeszcze wtedy nie obserwowano, a o ich właściwościach wnioskowano w sposób pośredni z różnych pomiarów.

Zwolennicy hipotezy atomistycznej zaczęli badać budowę wewnętrzną atomów, również na początku XX wieku, prawie równoległe z prowadzeniem opisanych wcześniej badań. Przełomowy był tutaj eksperyment przeprowadzony w 1909 roku przez Hansa Geigera i Ernesta Marsdena na Wydziale Fizyki Uniwersytetu w Manchesterze – kierowanym przez Ernesta Rutherforda, który w 1911 roku przedstawił swoją interpretację wyników. W eksperymencie tym kawałek cienkiej złotej folii bombardowano cząstkami alfa, z których większość przebijała się przez warstwę złota, tak jakby nie napotkały żadnej przeszkody. Część odchyłała się pod różnymi kątami, w tym nieliczne pod dużymi kątami, a niektóre odbijały się nawet wstecz. Rozkład tych kątów, czyli prawdopodobieństwo uzyskania danego kąta odbicia, został dokładnie wyznaczony doświadczalnie. Okazało się, że rozkład ten pasuje idealnie do modelu, w którym cały dodatni ładunek atomu skupiony jest praktycznie w jednym punkcie – Rutherford podał górne ograniczenie na rozmiar ładunku centralnego, jako mniejszy niż $\frac{1}{4000}$ średnicy atomu. Dzięki tym pracom wiadomo więc było, że prawie cała masa atomu skupiona jest w dodatnio naładowanym malutkim jądrze, wokół którego jakoś orbitują leciutkie w porównaniu z jądrem elektrony, czyli że atom to w większości pusta przestrzeń, co było odkryciem dosyć zaskakującym.

Na właściwy model opisujący orbitowanie elektronów wokół jądra trzeba było jeszcze trochę poczekać, gdyż dostarczyła go dopiero mechanika kwantowa, ale sam elektron został odkryty wcześniej – za odkrycie elektronu uważa się eksperyment wykonany w 1897 roku przez Josepha Johna Thomsona. Wykazał on, że tzw. promieniowanie katodowe to w istocie strumień ujemnie naładowanych cząstek (później nazwanych elektronami). Warto podkreślić, że elektron jest najdłużej znaną cząstką materii, która nadal uchodzi za

elementarną, czyli nieposiadającą struktury wewnętrznej. Natomiast jądro atomowe ma swoją strukturę. Kolejne eksperymenty i prace teoretyczne, prowadzone już po przełomowym eksperymencie Rutherforda, doprowadziły do odkrycia protonu i neutronu, czyli składników jądra atomowego. Zrozumiano, że wszystkie pierwiastki chemiczne składają się w istocie z tych trzech cząstek: protonów, neutronów i elektronów, a o tożsamości pierwiastka decyduje liczba protonów w jądrze.

Opisanie całej tej pierwiastkowej menażerii jako różnych konfiguracji trzech tylko cząstek to niewątpliwie ważny krok w kierunku porządkowania naszego zrozumienia budowy materii. Okazało się jednak, że dalej sprawy zaczęły się znowu komplikować. Przez jakiś czas wydawało się, że proton jest cząstką elementarną. Z neutronem (odkrytym w 1932 roku) od początku był pewien problem, ponieważ swobodny neutron jest cząstką nietrwałą i ulega rozpadowi. Jego czas życia to około 15 minut, a produkty rozpadu to proton, elektron i antyneutrino. Dalszy rozwój fizyki jądrowej doprowadził do odkrycia ponad setki nietrwałych cząstek, podobnych do protonów i neutronów. O problemie, czy nazywać te cząstki elementarnymi, pisał w *Delcie* Grzegorz Białkowski prawie 48 lat temu (Δ_{74}^1). Sytuacja z ponad setką niby elementarnych cząstek (co gorsza nietrwałych, przemieniających się w inne cząstki z tej listy) przypominała trochę sytuację z układem okresowym pierwiastków.

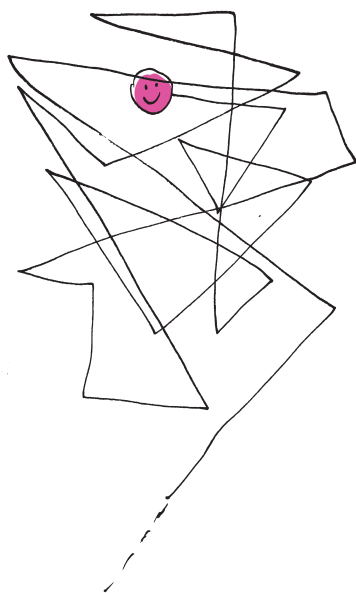
W zakończeniu swojego artykułu Grzegorz Białkowski wspomina o *kwarkach* jako „hipotetycznych cząstkach”, których istnienie być może pozwoli sprawy uporządkować. Kiedy pisał te słowa, hipoteza kwarków była rzeczywiście bardzo świeża. Liczba postulowanych tzw. zapachów kwarków szybko wzrosła z trzech (pierwotnie zaproponowanych przez Murraya Gell-Manna i Georga Zweiga w 1964 roku) do sześciu (Kobayashi i Maskawa, 1972), co było wówczas niezwykle śmiałą hipotezą. Od ukazania się tego artykułu w fizyce cząstek elementarnych dokonał się ogromny postęp, który tę śmiałą hipotezę potwierdził. Wszystkich sześć zapachów kwarków zostało odkrytych doświadczalnie – ostatni, najcięższy kwark *t* został zaobserwowany po raz pierwszy w 1995 roku w Fermilabie. Znacznie wcześniej, bo pod koniec lat sześćdziesiątych XX wieku, w laboratorium SLAC w Stanford przeprowadzono eksperyment polegający na bombardowaniu protonów i neutronów elektronami. Istota tego eksperymentu była bardzo podobna do doświadczenia Rutherforda. Elektrony wnikając do wnętrza nukleonu, rozpraszają się na elementach jego struktury wewnętrznej, podobnie jak cząstki alfa rozpraszają się na jądrach atomów złota kilkadziesiąt lat wcześniej. Hipoteza, że protony i neutrony składają się z kwarków, została potwierdzona doświadczalnie.

Podobnie jak atomy pierwiastków ułożone w układ okresowy okazały się stanami związanymi trzech cząstek, tylko w różnych ilościach, cała menażeria tzw. hadronów okazała się stanami związanymi sześciu rodzajów kwarków (i ich antycząstek). Przy czym atomy, z których my jesteśmy zbudowani, zawierają oczywiście tylko dwa wspomniane wcześniej hadrony, proton i neutron, wchodzące w skład jąder atomowych, a spośród sześciu zapachów kwarków tylko dwa najbliższe, *górnny* i *dolny*, wchodzą w skład protonu i neutronu. Hadrony zawierające któreś z pozostałych czterech zapachów kwarków są nietrwałe – rozpadają się bardzo szybko po tym, jak zostaną wyprodukowane w laboratorium.

Według obecnego stanu naszej wiedzy o budowie materii leptony (elektron i jego krewni) oraz kwarki to elementarne niepodzielne cząstki. Oddziaływania między nimi przenoszone są przez fotony (oddziaływanie elektromagnetyczne), bozony *W* i *Z* (oddziaływanie słabe) oraz gluony (oddziaływania silne). Opisuje to tzw. model standardowy. Ostatnim znalezionym elementem tej układanki jest bozon Higgsa, którego istnienie potwierdzono ostatecznie w 2012 roku w Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC).

Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że wszystko o budowie materii już wiadomo i można uznać sprawę za zakończoną, ale oczywiście tak nie jest, ponieważ wiele pytań wciąż pozostaje bez odpowiedzi. Fizyka cząstek

Istnienie antyelektronu (zwanego też pozytonem) zapostulował Paul Dirac w 1928 roku. Pierwsza obserwacja pozytonu z roku 1932 jest natomiast dziełem Carla Andersona. Neutrino z kolei zostało „wymyślone” przez Wolfganga Pauliego w 1930 roku, żeby ratować zasadę zachowania energii w rozpadach beta. Istnienie neutrino potwierdzono doświadczalnie w 1956 roku.



W 2013 roku, czyli zaledwie rok po ogłoszeniu potwierdzenia istnienia bozonu Higgsa, François Englert oraz Peter Higgs otrzymali Nagrodę Nobla za to, że przewidzieli istnienie cząstki o tych właściwościach. Nagrodzone prace ukazały się w roku 1964. Więcej o tej Nagrodzie Nobla można przeczytać w *Aktualnościach* w Δ_{13}^{12} .

Wysokie energie zderzanych cząstek pozwalają „próbkować” strukturę materii na coraz mniejszych skalach odległości. Żeby uzyskać obraz wnętrza protonu z wystarczającą rozdzielczością, pociski (elektrony), które są na nim rozpraszane, muszą mieć wystarczająco dużą energię. W akceleratorach wytwarza się nietrwale cząstki, które bardzo szybko się rozpadają. Aby takie cząstki wytworzyć, należy dostarczyć odpowiednią ilość energii, która odpowiada masie produkowanej cząstki zgodnie ze wzorem $E = mc^2$. Część energii kinetycznej zderzających się cząstek jest zamieniana na masę tworzących się nietrwających cząstek. Produkowane cząstki mają często masy wielokrotnie większe od mas cząstek zderzanych. Na przykład kwark t ma masę około 184 razy większą od masy protonu, a bozon Higgsa ma masę około 134 razy większą od masy protonu. Obie te cząstki produkowane są w zderzeniach protonów, które muszą zostać rozpędzone do prędkości bardzo bliskiej prędkości światła, a ich energia kinetyczna jest wtedy tysiące razy większa od masy spoczynkowej protonu.

O ciemnej materii można przeczytać więcej w artykułach Anny Durkalec (Δ_{19}^5) i Wojciecha Hellwina ($\Delta_{19}^7, \Delta_{19}^8$).

Czytelnikom zainteresowanym zastrzeżeniami wobec modelu standardowego i pomysłami na jego rozszerzenie polecamy hasła takie, jak *wielka unifikacja, supersymetria, teoria strun*, o których można poczytać w artykułach Piotra Chankowskiego w Δ_{17}^2 , Krzysztofa Meissnera i Jacka Pawelczyka w Δ_{89}^6 lub *Aktualnościach* w Δ_{20}^6 . Piotr Chankowski pisze w serii artykułów ($\Delta_{16}^1, \Delta_{16}^2, \Delta_{16}^3, \Delta_{16}^4, \Delta_{16}^5, \Delta_{16}^6, \Delta_{17}^2$) znacznie bardziej wyczerpująco o tym, czym jest model standardowy cząstek elementarnych, jaka była historia jego powstawania i jakie są z nim problemy. Związkiem fizyki cząstek elementarnych z modelowaniem wczesnego Wszechświata poświęcony jest artykuł Stefana Pokorskiego i Krzysztofa Turzyńskiego w Δ_{05}^3 .

elementarnych to inaczej fizyka wysokich energii. Co ta nazwa oznacza? Energia kinetyczna cząstek alfa, które bombardowały kawałek złotej folii w doświadczeniu Rutherforda, była rzędu 5 MeV. Przy tej energii zderzeń jądro atomowe jest nieodróżnialne od ładunku punktowego. Podróż w głąb struktury materii wymagała zderzania cząstek o coraz wyższych energiach, stąd nazwa *fizyka wysokich energii*. W akceleratorze SLAC, pod koniec lat 60., elektrony zderzały się z protonami przy energii rzędu 20 GeV = 20 000 MeV, co pozwoliło dostrzec strukturę wewnętrzną protonów. Energia zderzających się protonów w LHC, gdzie po raz pierwszy udało się zaobserwować bozon Higgsa, to 13 TeV = 13 000 000 MeV. Przy dostępnych obecnie energiach zderzeń kwarki i leptoni nie ujawniają swojej struktury wewnętrznej – „wyglądają” jak cząstki punktowe. Nie wiadomo jednak, co ujawniłyby zderzenia przy znacznie wyższych, dziś jeszcze nieosiągalnych, energiach. Oprócz doświadczeń w akceleratorach mamy też inne źródła wiedzy o budowie materii. Obserwacje Wszechświata dostarczają licznych argumentów, że poza znaną nam materią istnieje w Kosmosie kilkakrotnie więcej tzw. ciemnej materii, o której naturze możemy tylko spekulować. Jak na razie nie udało się wytworzyć ani złapać cząstek ciemnej materii w laboratorium. Najprawdopodobniej składa się ona z cząstek, których model standardowy nie opisuje. Dodatkowo ten ostatni sam w sobie ma wiele wad, jak choćby fakt, że jest w nim ponad dwadzieścia parametrów (między innymi masy kwarków i leptonów), których nie wylicza się z modelu, a wyznacza doświadczalnie. Istnieje powszechne przekonanie, że model standardowy jest tylko efektywną teorią, za którą stoi bardziej fundamentalna, w pewnym sensie prostsza teoria, pozwalająca wyjaśnić to, czego on nie wyjaśnia (np. dlaczego masy cząstek są takie, a nie inne).

Fizycy teoretycy opracowali wiele najrozmaitszych uogólnień i rozszerzeń modelu standardowego i ciągle pracują nad nowymi, jednak fizyka jest nauką doświadczalną, a więc spośród tych wielu różnych teorii powinniśmy wybrać tę, która wyjaśnia wyniki doświadczeń. Pozycja modelu standardowego jest w tej konkurencji niezwykle silna. Jego przewidywania zgadzają się z wynikami przytłaczającej większości eksperymentów wykonywanych z coraz większą precyzją. Z punktu widzenia poszukiwania fizyki poza modelem standardowym jest to pewien problem. Uwaga badaczy koncentruje się więc tam, gdzie rozbieżności między teorią a eksperymentem jednak się zdarzają, czego przykładem jest rozbieżność w pomiarach momentu magnetycznego mionu (*Aktualności* Δ_{21}^6). Takie odstępstwa są źródłem nadziei na znalezienie doświadczalnych wskazówek dających pogląd na to, w którą stronę powinien iść opis teoretyczny, wychodzący poza model standardowy.

Doświadczalnych wskazówek dotyczących fizyki poza modelem standardowym jest niestety ciągle jak na lekarstwo. Doświadczenie Rutherforda zostało wykonane przez dwóch ludzi: Geigera i Marsdena. Cały zestaw eksperymentalny mieścił się na stole laboratoryjnym. Kolejne budowane urządzenia do przeprowadzania doświadczeń były coraz większe i kosztowniejsze. Budowa LHC trwała kilkanaście lat, kosztowała miliardy euro. Finansowanie możliwe było dzięki współpracy ponad stu krajów. W projekt, budowę, obsługę, interpretację wyników itp. zaangażowane były, lub nadal są, dziesiątki tysięcy osób. LHC jest największym zbudowanym dotychczas akceleratorem (jest jednocześnie największą maszyną istniejącą na świecie) i będzie tę palmę pierwszeństwa dzierżył jeszcze wiele lat, ponieważ nie zanoszą się na razie, żeby szybko znalazło się finansowanie budowy akceleratora, który go prześcignie i dostarczy nowych danych.

Czy to oznacza, że względy finansowe i technologiczne ograniczają nasze możliwości dalszego poznawania budowy materii? Niekoniecznie. Może uda się zrobić użytek z cząstek przylatujących czasem do nas z kosmosu, niosących energie wielokrotnie większe od tych w akceleratorach? A może, jak twierdzi Richard Feynman, wystarczy „odrobina wyobraźni i inteligencji” – i sprytne wykorzystanie istniejących maszyn przez doświadczalników w połączeniu ze świeżymi pomysłami teoretycznymi przyniesie kolejny przełom, zanim jeszcze doczekamy się godnego następcy LHC.

Pomiar a granice poznania

*Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Jan CHWEDENŹCZUK*

0,0000000000000000004 metra (czyli 4×10^{-18} m). 14 września 2015 roku, na ułamek sekundy, o tyle właśnie skróciła się czterokilometrowa rura zakopana pod ziemią w miejscowości Livingston w stanie Luizjana (USA). Skrócenie to było wynikiem przejścia przez Ziemię fali grawitacyjnej będącej echem odległego zderzenia dwóch czarnych dziur. Wraz z drugą rurą, o równej długości, lecz prostopadłą do niej (i jeszcze jedną taką parą, w miejscowości Hanford, stan Waszyngton), tworzą najdokładniejsze urządzenie pomiarowe na naszej planecie, czyli interferometr LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) [1]. Zmierzyć cztery kilometry z taką dokładnością to tak, jakby poznać średnią odległość dzielącą Ziemię od Księżyca, nieco poniżej 500 000 km, z precyzją $\pm 0,5 \times 10^{-13}$ m, co stanowi jedną tysięczną średniego rozmiaru atomu wodoru w stanie podstawowym.

O pierwszej detekcji fal grawitacyjnych pisał Michał Bejger w Δ_{16}^4 .

Poznanie świata poprzez empiryczne badanie jego natury wymaga precyzyjnych urządzeń pomiarowych, a powyższy przykład jest ilustracją tego, jak wiele osiągnęliśmy. Ludzkość, rozumiana jako gatunek *Homo sapiens*, liczy około 300 000 lat, pierwsze słowa padły mniej więcej po 150 000 lat od jej powstania, zaś zaczątki kultury pojawiły się kolejne 100 000 lat później. Współczesna fizyka, licząc od czasów Mikołaja Kopernika (przełom XV i XVI wieku) czy Isaaca Newtona (XVII i XVIII wiek), ma kilkadziesiąt lat, co stanowi około dwóch tysięcznych trwania gatunku. W tym czasie radykalnie przesunęliśmy granice poznania,

między innymi dlatego, że nauczyliśmy się mierzyć wielkości fizyczne tak dokładnie, że sekundę, metr czy masę określamy z precyzją do kilkunastu miejsc po przecinku. Czy postęp ten będzie wieczny? Czy rosnąca dokładność urządzeń pomiarowych będzie się przekładać na coraz głębsze rozumienie mechanizmów rządzących Wszechświatem? A może zdolność do formułowania coraz bardziej abstrakcyjnych teorii fizycznych jest w jakiś sposób ograniczona przez budowę naszych mózgów?

To są pytania filozoficzne, i odpowiadając na nie, trudno pozostać w obrębie nauk przyrodniczych, czyli głównie fizyki, chemii i biologii. Odpowiedź, z punktu widzenia metodologii nauk empirycznych, może więc być w jakimś stopniu spekulatywna. Nie jesteśmy jednak zdani na czysto filozoficzne dociekania – cząstkowej wiedzy na temat granic poznania dostarcza współczesna fizyka. Zastanówmy się nad fizycznym aspektem poznania – prześledźmy, jak przebiega proces pomiaru i co wpływa na jego dokładność. Dzięki temu zrozumiemy, jakie są praktyczne ograniczenia postępu w naukach empirycznych.

Gdy mierzymy długość stołu, by się upewnić, że zmieści się w jadalni, przykładamy linijkę do jego powierzchni. Odczytana na skali wartość stanowi *informację* o tym, jaki jest rozmiar mebla. Słowo *informacja* pada tu nieprzypadkowo, z każdym pomiarem bowiem łączy się przepływ informacji od badanego układu do urządzenia pomiarowego i obserwatora. Gdy zrozumiemy konsekwencje tego spostrzeżenia, stanie się jasne, że każdy pomiar ma ograniczoną dokładność.

Każda z dwóch zakopanych pod ziemią rur interferometru LIGO zakończona jest lustrami. Dzięki temu impuls laserowy, który porusza się wewnątrz rury, wielokrotnie przemierza czterokilometrowy odcinek, a każdy cykl oscylacji (od lustro znajdującego się na początku rury do końca i z powrotem) trwa około 25 mikrosekund. Zmiana długości rury spowodowana przez falę grawitacyjną sprawia, że ten cykl wydłuża się bądź skraca. Oznacza to, że w danej chwili czoło impulsu światła w rurze nietkniętej przez falę grawitacyjną będzie w innym miejscu niż w zaburzonej. Falę grawitacyjną wykrywa się, nakładając na siebie impulsy laserowe pochodzące z obu rur. Dochodzi do interferencji (światło jest falą), w analogii do nakładania się dwu kolistych fal na wodzie. Powstaje zbiór prążków interferencyjnych (dlatego urządzenie pomiarowe nazywamy interferometrem), czyli jaśniejszych i ciemniejszych obszarów, a ich położenie zmienia się w obecności fali grawitacyjnej, co stanowi konsekwencję przesunięcia się czoła impulsu świetlnego w jednej z rur. Zamyka się w ten sposób cykl pomiarowy – informacja o fali grawitacyjnej przechodzi z rury (nazywanej ramieniem interferometru) do impulsu świetlnego, który interferując z wiązką odniesienia, pochodzącą z drugiego ramienia, daje wiedzę o pojawieniu się zaburzenia.

Im większe jest natężenie światła w każdym z ramion, tym wyraźniejsze są prążki interferencyjne, a to rzutuje na czułość interferometru, rozumianą jako jego zdolność do wykrywania subtelnych sygnałów. Stąd prosty przepis na zwiększenie dokładności – wystarczy wpuścić więcej światła do każdej z rur. Rzecz w tym, że mocne impulsy świetlne wprawiają lustra w drgania,





Rozwiązanie zadania M 1694.
Stosując nierówność między średnimi dla k liczb a_k^{k+1} i $\frac{1}{2^{k+1}}$, dostajemy

$$\frac{1}{2} a_k^k \leq \frac{k a_k^{k+1} + \frac{1}{2^{k+1}}}{k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k+1) a_k^k \leq 2k a_k^{k+1} + \frac{1}{2^k}.$$

Sumując otrzymane nierówności po wszystkich k i stosując założenie, mamy

$$\sum_{k=1}^n (k+1) a_k^k \leq 2 \sum_{k=1}^n k a_k^{k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} <$$

$$< 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

Zasada nieoznaczoności Heisenberga (o której można przeczytać więcej w Δ_{17}^{10}) orzeka, że iloczyn rozrzutów dwóch sprzężonych wielkości (np. składowych położenia i pędu w tym samym kierunku) nie może być mniejszy od pewnej granicznej wartości. Dla światła dwiema sprzężonymi wielkościami, dla których obowiązuje zasada nieoznaczoności Heisenberga, są „kwadratury pola”, będące odpowiednikami położenia i pędu cząstki masywnej (na przykład elektronu czy atomu). Stan ściśnięty światła to taki, w którym zmniejszony („ściśnięty”) jest rozrzut jednej z kwadratur kosztem zwiększonego rozrzutu drugiej, przy czym iloczyn tych rozrzutów spełnia zasadę nieoznaczoności. To ściśnięcie sprawia, że pojemność informacyjna stanu światła jest większa niż „zwykłego” impulsu laserowego, stąd stany ściśnięte znajdują zastosowanie w pomiarach interferometrycznych. O stanach ściśniętych i ich wykorzystaniu w detektorach fal grawitacyjnych pisał również Jan Kolodźyński w Δ_{13}^5 .

Literatura

- [1] B. P. Abbott *et al.*, „Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 061102, Feb 2016.
- [2] J. Aasi *et al.*, „Enhanced sensitivity of the ligo gravitational wave detector by using squeezed states of light,” *Nature Photonics*, vol. 7, no. 8, pp. 613–619, 2013.

obniżając ostrość obrazu interferencyjnego. Jest to pozornie nieistotny efekt, ale ma on wpływ na precyzję pomiaru w tak czułym interferometrze, jak LIGO. Urządzenie to ma swój „punkt pracy” – takie natężenie impulsów laserowych rozchodzących się w obu ramionach interferometru, dla którego utrata precyzji wynikająca z drgań luster jest kompensowana przez zysk, który osiągamy, używając mocnego światła.

Nadal jednak, przy ustalonym natężeniu impulsów laserowych, można wiele „ugrać”, pod warunkiem, że umiejętnie skorzysta się z dobrodziejstw mechaniki kwantowej. Światło to fala – tak mówi klasyczna elektrodynamika. Światło to zbiór porcji, drobin, czyli fotonów – tak mówi teoria kwantów. Do tej pory przedstawialiśmy proces pomiaru w LIGO, odwołując się do języka fizyki klasycznej, mówiąc o impulsach świetlnych czy interferencji fal. Użyliśmy wprawdzie kilkakrotnie słowa „laser”, lecz zaraz wróciliśmy do klasycznych fal, sugerując, że kwantowa proveniencja lasera nie ma znaczenia dla naszej dyskusji. Rzeczywiście, tak długo, jak interesują nas kolektywne, falowe własności światła, jego cząstkowy charakter można pominąć. Analogicznie postępujemy, opisując ruch wody w oceanie: pływy, fale, prądy. Nie odwołujemy się do tego, że woda to zbiór cząsteczek H_2O , bo w skali, w której obserwujemy te kolektywne zjawiska, jest to nieistotne. Opis mikroskopowy jest bardzo skomplikowany, a zastosowany do badania zjawisk w oceanie uczyniłby obraz nieczytelny. Ale woda to zbiór cząstek H_2O , a światło to zbiór fotonów, i czasem warto o tym pamiętać. Mechanika kwantowa daje przepis, jak manipulować światłem na poziomie pojedynczych fotonów, by uzyskać *nieklasyczny* stan światła, o egzotycznych własnościach, dla których język klasycznego elektromagnetyzmu nie znajduje opisu. Z punktu widzenia precyzji pomiarowej ważne jest, że te własności mogą zwiększyć pojemność informacyjną impulsu. Jeżeli użyjemy odpowiednio „skrojonego” stanu światła do celów pomiarowych, zewnętrzne zaburzenie, takie jak fala grawitacyjna, może w nim zdeponować więcej informacji niż w klasycznym impulsie o takim samym natężeniu. Tym sposobem, nie podnosząc mocy światła, a zatem nie wprawiając luster w nadmierne drgania, możemy zwiększyć czułość interferometru. W LIGO udało się dokonać pierwszych pomiarów, wpuszczając do jednego z ramion tak zwaną „ściśniętą próżnię” – kwantowe światło, które dzięki swoim własnościom poprawiło precyzję urządzenia [2]. Dokładność pomiaru interferometrycznego rzutuje z odległych zakątków Wszechświata. Zbudowanie tak precyzyjnego narzędzia pomiarowego i, pośrednio, otwarcie naszych zmysłów na nowy rodzaj sygnałów – fale grawitacyjne – przesunęło granice poznania w kosmologii, astronomii i astrofizyce.

Czytelnicy mogą odnieść wrażenie, że dyskutując o precyzji pomiarowej lub rozdzielczości wszelkiego rodzaju kamer czy mikroskopów, poświęcamy czas zagadnieniom technicznym. Częściowo tak jest, ale złożoność tych zagadnień jest wyznacznikiem postępu w naukach empirycznych. Fizyka cząstek elementarnych potrzebuje potężnych akceleratorów, w których rozpedzone niemal do prędkości światła cząstki zderzają się i rozpadają na inne, będące przedmiotem badań. Budowa nowego akceleratora, który przesunąłby granice poznania ku jeszcze mniejszym i bardziej egzotycznym bytom, dając wiedzę o strukturze materii i oddziaływaniach, wymaga ogromnych nakładów finansowych. Czy to oznacza, że polityka i pieniądze wyznaczają granice poznania ludzkości? To też w pewnej mierze jest prawda, ale i to jest konsekwencją niezwyklego postępu technik pomiarowych. Kopernik czy Newton nie potrzebowali międzynarodowych sojuszy, by zdobyć teleskopy, które przysłużyły się do ich przełomowych odkryć. Gotowość społeczeństw dołożenia na wyszukane detektory, których budowa być może przez wiele lat nie da wymiernego (praktycznego, finansowego) zysku, też jest miarą postępu. Przesuwając granice poznania, sięgając do najdalszych zakątków Wszechświata czy dłużej w najmniejszych drobinach materii, doszliśmy do momentu, kiedy postęp zależy od dostępnych zasobów ludzkości i od zdolności mózgu każdego pojedynczego człowieka do wznoszenia się na coraz wyższe poziomy abstrakcji.

Czy Wszechświat jest skończony?

Marek BIESIADA *

*Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Gdyby nieskończony w czasie i przestrzeni Wszechświat był jednorodnie wypełniony gwiazdami – nocne niebo nie mogłoby być ciemne! Opisuje to Paradoxs Olbersa, o którym pisaliśmy jeszcze w XX wieku: *Dlaczego niebo jest ciemne?*, Δ_{1976}^{07} .

Czym jest Wszechświat? Od momentu powstania ogólnej teorii względności pytania dotyczące Wszechświata możemy formułować jako pytania dotyczące globalnej struktury czasoprzestrzeni. Czasoprzestrzeń to arena zdarzeń fizyki – wszystko dzieje się w czasie i przestrzeni (klasycznie zdarzenia te opisują równania dynamiki – mechaniki lub elektrodynamiki). Gdy w wieku XVII (za sprawą Galileusza i Newtona) narodziła się współczesna fizyka, do opisu Wszechświata przydatny okazał się kartezjański obraz przestrzeni euklidesowej, wewnątrz której można śledzić w czasie ruch i ewolucję ciał dyktowaną prawami dynamiki (np. rzuconego kamienia, ale też planet i gwiazd). W ramach takiego opisu zakładano milcząco, że arena zdarzeń – przestrzeń umiejscawiająca zdarzenia, oraz niezależnie płynący czas – rozciągają się w nieskończoność.

Globalna struktura czasoprzestrzeni

Teoria względności przyniosła radykalne zmiany. Po pierwsze czas i przestrzeń przestały być rozdzielone – okazało się, że tworzą czterowymiarową czasoprzestrzeń. Po drugie czasoprzestrzeń przestała być sztywną areną zdarzeń, lecz zaczęła uczestniczyć w „grze”. W myśl równań Einsteina energia (czyli również masa, $E = mc^2$) oraz jej przepływy determinują geometrię (ściślej, krzywiznę) czasoprzestrzeni. Z drugiej strony zakrzywiona czasoprzestrzeń mówi materii, jak się ma poruszać: ruchy swobodne nie są już liniami prostymi, a tzw. geodezyjnymi, czyli ich analogami w przestrzeniach zakrzywionych. W związku z tym istnieje intymny związek między materią i geometrią czasoprzestrzeni.

Kosmologia jednorodnego izotropowego Wszechświata

Rozważając strukturę czasoprzestrzeni w największych skalach (całego Wszechświata), zakładamy, że Wszechświat wygląda tak samo dla każdego obserwatora będącego w ruchu swobodnym, czyli jest jednorodny i izotropowy (tzw. zasada kopernikańska). Metrykę opisującą taki Wszechświat nazywamy metryką Friedmana–Lemaître’a–Robertsona–Walkera (FLRW). Występuje w niej tzw. czynnik skali $a(t)$, zależny od wyróżnionego czasu kosmicznego t . Dodatkowo metryka FLRW zakłada istnienie krzywizny przestrzennego sektora czasoprzestrzeni Σ_t (czyli przestrzeni stałego czasu t), która parametryzowana jest pewnym dyskretnym indeksem $k \in \{+1, 0, -1\}$. Opisuje on odpowiednio: 3-wymiarową sferę \mathbb{S}^3 ($k = +1$), przestrzeń euklidesową \mathbb{E}^3 ($k = 0$) oraz przestrzeń hiperboliczną \mathbb{H}^3 ($k = -1$). Niestety obserwacyjnie nie jesteśmy w stanie z całą pewnością rozstrzygnąć, czy indeks krzywizny naszego Wszechświata jest równy $+1$, 0 bądź -1 . Czynnik skali $a(t)$ występujący w metryce FLRW zmienia się w czasie, a ponieważ skaluje on wszelkie rozmiary przestrzenne, wynikają stąd m.in. obserwowane rozszerzanie się Wszechświata oraz przesunięcia ku czerwieni widm odległych obiektów. Występująca w metryce odległość współporuszająca r nie jest obserwowalna (opisuje ona odległość współrzędnościową do innego obserwatora będącego w ruchu swobodnym, przy zaniedbaniu ruchów wynikających ze wzajemnych oddziaływań między obserwatorami). Chcąc wyznaczyć bardziej intuicyjną dla nas odległość, odzwierciedlającą w danej chwili t pomiar wykonany taśmą mierniczą np. do galaktyki w Andromedzie, używamy tzw. odległości własnej $d(t)$, zależnej od czynnika skali: $d(t) = a(t)r$. Ze względu na czynnik $a(t)$ odległość własna zmienia się w czasie wraz z ekspansją Wszechświata.

Skończoność przestrzenna i czasowa

Czy w takim razie nasz Wszechświat jest skończony? Jaki ma kształt? Z przedstawionej powyżej metryki FLRW tylko przypadek opisujący hipersferę \mathbb{S}^3 ($k = +1$) reprezentuje skończony przestrzennie Wszechświat, pozostałe – nie. W jaki jednak sposób możemy określić wartość parametru k ? W tym celu pozostaniemy przy tej samej metryce, ale skupimy się na wynikającym z niej bezwymiarowym parametrze $\Omega = \rho/\rho_{kr}$, w którym ρ jest całkowitą gęstością energii materialnej zawartości Wszechświata, zaś ρ_{kr} jest gęstością krytyczną.

Metryka FLRW zapisana w sferycznym układzie współrzędnych (t, r, θ, φ) wygląda następująco:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right).$$

W równaniu tym $a(t)$ jest czynnikiem skali, k jest indeksem krzywizny, r jest odległością współporuszającą się, natomiast $d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ jest elementem liniowym dla sfery \mathbb{S}^2 .

Wartość gęstości krytycznej $\rho_{kr} = (3H_0^2)/(8\pi G)$ jest rzędu $10^{-29} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, co odpowiada kilku atomom wodoru w metrze sześciennym. We wzorze na ρ_{kr} znajdziemy parametr H_0 , czyli stałą Hubble’a, oraz stałą grawitacji G .

Parametr ρ_{kr} zależy od wartości stałej Hubble’a (czyli obecnego tempa ekspansji Wszechświata), dlatego dokładny pomiar tej wielkości może rzucić światło na wartość zarówno ρ_{kr} , Ω , jak i ostatecznie na wartość indeksu k . Zależność pomiędzy Ω i k można opisać jako: $k = +1$ dla $\Omega > 1$, $k = 0$ dla $\Omega = 1$ oraz $k = -1$ dla $\Omega < 1$. Przez długi czas obserwacje sugerowały wartość parametru Ω mniejszą od jedności ($k = -1$, \mathbb{H}^3 , tzw. Wszechświat otwarty). Niezwykle precyzyjne obserwacje anizotropii kosmicznego promieniowania tła pokazały, że ewentualne odstępstwo wartości Ω od 1 jest bardzo niewielkie: $\Omega = 1,003 \pm 0,015$. Pomiar ten oznacza, że Wszechświat jest zapewne przestrzenią płaską, $\Sigma_t = \mathbb{E}^3$ (a zatem najprawdopodobniej nieskończony przestrzennie). Jednak nawet taki płaski Wszechświat może charakteryzować się nietrywialną topologią (o czym więcej w ostatniej części moich rozważań). Dlatego też wciąż trwają badania mające potwierdzić lub podważyć aktualną interpretację otrzymanych wyników.

Ale czy również jest nieskończony czasowo? Równania Einsteina jednoznacznie wskazują na to, że Wszechświat miał początek w osobliwości początkowej, a jego ewolucja czasowa opisywana jest przez wspomnianą tu wielokrotnie funkcję $a(t)$. Jej dokładna postać zależy od gęstości energii składników materialnych Wszechświata: promieniowania, materii, stałej kosmologicznej (oraz od parametru krzywizny k), gdyż w różny sposób wpływają one na tempo ekspansji. Wszechświat zamknięty miałby swój początek i koniec w czasie, a zatem miałby skończony czas istnienia. Wszechświaty: płaski i otwarty powinny ekspandować w nieskończoność.

Osobliwość kosmologiczna jest typową własnością klasycznej ogólnej teorii względności, w myśl twierdzenia Hawkinga–Penrose’a. Nie jest to zatem produkt uboczny założeń jednorodności i izotropii omawianych tu kosmologii. Sir Roger Penrose za twierdzenia o osobliwościach otrzymał Nagrodę Nobla z Fizyki za rok 2020 (Δ_{20}^{12}).

Horyzonty

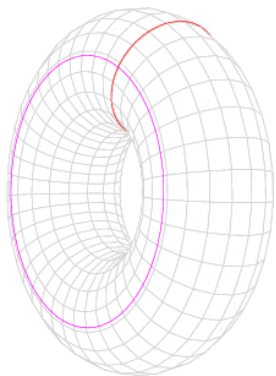
Wiedząc już, że Wszechświat jest nieskończony przestrzennie, ale ma skończony wiek (równy obecnie $\approx 14 \times 10^9$ lat), możemy postawić pytanie: jak duży jest obszar Wszechświata dostępny naszym obserwacjom? W tym celu wprowadzimy pojęcie stożka światła przeszłości, który wyznacza obszar czasoprzestrzeni, z którego mają szansę dotrzeć do nas sygnały: cząstki, a w szczególności fotony bądź fale grawitacyjne biegnące po jego powierzchni.

Nawiązujemy tu do obrazowych opisów stożka światła (rysunków), w których jeden wymiar przestrzenny jest pominięty. W czasoprzestrzeni 4-wymiarowej „powierzchnią” stożka jest wnętrze sfery o środku w obserwatorze. Wnętrze stożka to odpowiedni obszar czasoprzestrzeni.

W przypadku Wszechświata, jaki znamy, metryka FLWR wyznacza pewien promień $r_{\max}(t)$ określający skończony obszar przestrzenny Wszechświata (nieskończonego przestrzennie) dostępny obserwacjom w chwili t (jest to tzw. horyzont cząstek). Promień ten w metryce FLWR rośnie z czasem. Jest on jednak ograniczony ze względu na historię naszego Wszechświata. Ponieważ przed epoką oddzielenia się promieniowania od materii w chwili $t_{dec} \approx 380\,000$ lat (sygnałem pochodzącym z tej epoki jest kosmiczne promieniowanie tła) Wszechświat był nieprzezroczysty, obszar faktycznie dostępny obserwacjom elektromagnetycznym jest nieco mniejszy niż teoretycznie wyznaczony $r_{\max}(t)$. Nie wchodząc w dalsze szczegółowe rozważania, można także określić maksymalny rozmiar przestrzenny dostępny poznaniu kiedykolwiek (tj. w najodleglejszej przyszłości), tzw. horyzont zdarzeń. W świetle obserwowanej przyspieszającej ekspansji Wszechświata możemy sądzić, że horyzont zdarzeń istnieje.

Jaki jest kształt Wszechświata?

Równania Einsteina określają jedynie lokalną geometrię czasoprzestrzeni – jej metrykę, natomiast nie mówią one nic o samej topologii przestrzeni. Dobrą ilustracją jest przykład dwuwymiarowy. W dwuwymiarowej przestrzeni płaska metryka może lokalnie opisywać zarówno geometrię płaszczyzny \mathbb{E}^2 , jak i walca czy torusa \mathbb{T}^2 . Płaszczyzna \mathbb{E}^2 jest tzw. płaszczyzną jednopójną, czyli, krótko mówiąc, wszystkie krzywe zamknięte na płaszczyźnie (tzw. pętle) można ściągnąć do jednego punktu znajdującego się w obszarze danej płaszczyzny. Jednak walec i torus nie są jedno-, lecz wielospójne – obok pętli, które można ściągnąć do jednego punktu, istnieją tam dodatkowe pętle, dla których jest to niemożliwe (np. wokół osi walca czy też na torusie – zobacz rysunek na marginesie). Ta „niemoc” spowodowana jest topologią, czyli „kształtem” rozważanego obiektu. Dobrą ilustracją jest łapanie konia na lasso: gdy nie uda się zarzucić lassa na cel (pozostajemy w \mathbb{E}^3), pętla ściągnie się do



Torus nie jest jednopójny, gdyż żadna z zaznaczonych pętli nie może być ściągnięta do punktu znajdującego się na powierzchni torusa (za Wikipedią)

punktu, natomiast przy udanym rzucie przeszkodą stanie się szyja mustanga, topologicznie równoważna walcowi. Jakby tego było mało, mimo iż geometrycznie torus \mathbb{T}^2 ma taką samą metrykę jak płaskość \mathbb{E}^2 , jest on dodatkowo skończony. Badając te wielospójne przestrzenie płaskie, możemy nawiązać do archetypu, czyli \mathbb{E}^2 .

Poćwiczmy trochę naszą wyobraźnię. Skonstruujmy \mathbb{T}^2 , biorąc odpowiedni prostokąt o bokach L_1 i L_2 oraz identyfikując (sklejając) naprzeciwległe boki. Prostokąt (zwany obszarem fundamentalnym torusa) jest podzbiorem \mathbb{E}^2 . Możemy sobie dalej wyobrazić płaszczyznę \mathbb{E}^2 całkowicie „wykafelkowaną” takimi prostokątami. Pamiętając o utożsamieniach boków, proste w \mathbb{E}^2 odtworzą nam krzywe geodezyjne na \mathbb{T}^2 – opuszczając obszar fundamentalny, prosta wchodząca do jego kopii obrazuje geodezyjną pojawiającą się z kierunku antypodalnego (czyli po obiegnięciu torusa). Proste przecinające kolejne kopie obrazują wielokrotne obiegi torusa.

Powyższe intuicyjnie opisane konstrukcje możemy uściślić. Nazwijmy płaszczyznę przestrzenią uniwersalną nakrywającą torusa. Analogiem trójwymiarowym jest torus \mathbb{T}^3 i powyższą konstrukcję wyobrazić sobie można jako gabinet luster – obszar fundamentalny to prostopadłościan (rozpięty na ortogonalnych wzajemnie wektorach L_1, L_2, L_3) o wszystkich ścianach wyłożonych lustrami. Obserwator widzi nieskończenie wiele kopii samego siebie w przestrzeni \mathbb{E}^3 (przestrzeni nakrywającej). Widzimy zatem, że kuszące jest tu pytanie: czy Wszechświat może mieć nietrywialną topologię (tj. być wielospójny), a płaska przestrzeń

jest jego uniwersalną przestrzenią nakrywającą? Taki płaski przestrzennie Wszechświat miałby skończoną objętość $V_{\text{top}} = a(t)^3 L_1 \cdot (L_2 \times L_3)$ (rosnącą w czasie wraz z ekspansją).

Zauważmy, iż \mathbb{T}^3 nie jest jedynym przykładem płaskiego Wszechświata o nietrywialnej topologii – takich możliwości jest dodatkowo 16 (tzn. nie licząc \mathbb{E}^3 i \mathbb{T}^3). Odpowiadające im dyskretne grupy symetrii (dla \mathbb{T}^3 są to translacje generowane przez wektory L_i ; $i = 1, 2, 3$) są bardziej skomplikowane. Obserwacyjna konfrontacja tych idei jest komplikowana przez ekspansję Wszechświata. Tym niemniej przeprowadzono testy obserwacyjne wielospójnego Wszechświata, w tym w oparciu o dane satelity Planck dotyczące anizotropii kosmicznego promieniowania tła (dla przypadku \mathbb{T}^3), uzyskując wynik negatywny. Wynik ten nie przesądza jednak sprawy, a oznacza jedynie, że jeżeli Wszechświat ma nietrywialną topologię i jest przestrzennie skończony, to rozmiar fundamentalnego prostopadłościanu (o którym była mowa wcześniej) jest większy niż ta część Wszechświata, która jest dostępna naszym obserwacjom, czyli ta znajdująca się wewnątrz horyzontu cząstek. Inaczej mówiąc, nie jesteśmy w stanie odróżnić nieskończonego Wszechświata od takiego skończonego, którego obserwowalną dla nas część mieści się całkowicie w jednym fundamentalnym prostopadłościanie. Podsumowując: jeżeli rozmiar charakterystyczny ($r_{\text{top}} \sim V_{\text{top}}^{1/3}$) Wszechświata płaskiego o nietrywialnej topologii jest większy niż horyzont cząstek, nie możemy się o tym teraz dowiedzieć; w przypadku zaś, gdy jest większy niż horyzont zdarzeń – to nie dowiemy się o tym nigdy...



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1693. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Środki okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC pokrywają się odpowiednio ze środkami okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie ADC . Wiedząc, że $AB = 1$, wyznacz długości pozostałych boków oraz miary kątów czworokąta $ABCD$.

Rozwiązanie na str. 21

M 1694. Niech a_1, a_2, \dots, a_n będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi, takimi że

$$a_1^2 + 2a_2^3 + \dots + na_n^{n+1} < 1.$$

Udowodnij, że

$$2a_1 + 3a_2^2 + \dots + (n+1)a_n^n < 3.$$

Rozwiązanie na str. 16

M 1695. Czy istnieje liczba całkowita większa niż 1000000, taka że średnia arytmetyczna i geometryczna wszystkich jej dzielników są całkowite?

Rozwiązanie na str. 6

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1037. Po spostrzeżeniu przeszkody kierujący tramwajem rozpoczyna hamowanie. Oszacuj, jak długą drogę pokona tramwaj do całkowitego zatrzymania, jeśli jego początkowa prędkość $v = 50$ km/h. Ile ciepła wydzieli się podczas hamowania? Masa pustego tramwaju $m_0 \approx 16\,500$ kg, średnia liczba pasażerów $n = 50$, współczynnik tarcia stali o stal $\mu_k \approx 0,1$, a przyspieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s².

Rozwiązanie na str. 5

F 1038. Stwierdzono, że długości fal linii widmowych obserwowanych w sygnale pochodzącym z supernowej PS1-11mq są $1 + z = 1,81$ (z jest tzw. przesunięciem ku czerwieni) razy większe niż długości fal odpowiadających im charakterystycznych linii widm atomowych mierzonych na Ziemi. Od chwili rozbłysku tej supernowej rejestrowano także zmiany jej blasku i po czasie $t = 54$ dni zaobserwowano charakterystyczną zmianę w kształcie krzywej zaniku jej jasności. Ile czasu, t_0 , trwały procesy prowadzące do tej zmiany w układzie związanym z supernową?

Rozwiązanie na str. 5

Ile palców? Ile kosteczek?

Gdy 380 mln lat temu kęgowce wypelzały z mórza na ląd, to chwilę wahały się, ile mają mieć palców na kończynach przednich, nawet „próbowały” ośmiu. Skończyło się na pięciu. Współcześni ewolucjoniści wykazują wzajemną zależność ewolucji stóp i dłoni. Sądzą nawet, że najpierw zaczęły się zmiany struktury anatomicznej stóp, które nasunęły jakiemś pomysłowemu przodkowi człowieka próby stawania w pionie. Wtedy zorientował się, że mógłby znaleźć inne niż lokomocja zastosowania dla dłoni. Ulepszyć chwytność i dokładność manipulacyjną.

Uważa się również, że ta zmiana podwyższyła znacznie sprawność uchwytu dłoni. Jest ona dziś tak wysoka, że po odpowiednim treningu człowiek może utrzymać swój ciężar podwieszony na jednym palcu (uwaga, wspinacze w górach). Specyficzność manipulacyjna dłoni wzrosła także wraz z pojawieniem się paznokci.

W dłoniach znajduje się $\frac{1}{4}$ wszystkich kości szkieletu ludzkiego. Najstarszy ślad „prawdziwej” ludzkiej dłoni datuje się na 1,42 mln lat temu, co ustalono na podstawie wykopanej w Kenii kości śródreżca z wyrostkiem rylcowatym, łączącym tę kość z palcem wskazującym (starsi przodkowie ludzi takiego wyrostka nie mieli). Istnienie takich kości sugeruje również, że wtedy pojawiło się typowe dla ludzi zjawisko prawo/leworęczności, związane ze zróżnicowaniem półkul mózgu.

Dłoń, bogata w nerwy, naczynia krwionośne, mięśnie, ścięgna, jest raczej płaska i wystawiona na działanie czynników zewnętrznych – warto o nią dbać. Mobilność dłoni warunkowana jest głównie przez mięśnie przedramienia, istnieją także wyspecjalizowane (kciuk, mały palec), krótsze mięśnie wewnętrzne samej dłoni.

Z obserwacji podczas zabiegów chirurgicznych wynika, że w zespole 5 palców człowieka najważniejsze funkcjonalnie są kciuk i piąty, a najmniejszy wpływ na pracę dłoni ma palec wskazujący. Z kolei u tych naczelnych, które wspinają się na drzewa, najważniejsze są palce drugi i piąty. Wśród wszystkich pięciu palców tylko kciuk ma swobodę rotacji, jest przeciwny i obrotowy – to kolejne ulepszenie dłoni ludzi i naczelnych.

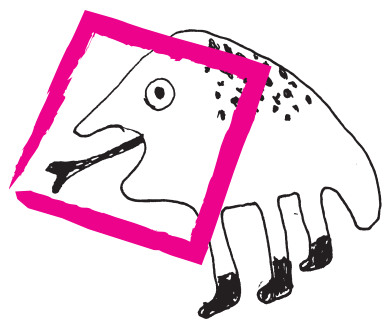
W 120. dniu rozwoju zarodkowego człowieka pojawiają się na opuszkach listewki papilarne, tworzące unikatowy dla każdego osobnika i nieusuwalny wzór: nawet bliźnięta monozygotyczne tym wzorem się różnią. Daktyloskopia zajmująca się badaniem linii papilarnych powstała w końcu XIX wieku i przed erą analiz genetycznych była najważniejszą techniką stosowaną w badaniach śladów przestępstw w kryminalistyce.

Opuszki palców, z poduszkami tłuszczowymi, bogate są w zakończenia nerwowe i receptory dotykowe, bólu, temperatury, nacisku. Znaczący ludzkiej anatomii uważają, że palce są najczulszymi odbiorcami dotykowymi. Wiedza o receptorach wzbogaciła się dzięki pracom tegorocznych (2021) laureatów Nagrody Nobla, naukowców amerykańskich, Davida Juliusa i Ardema Patapoutiana, którzy jako pierwsi poznawali geny receptorowe ciała kęgowców. Choć nie ma jednego narządu zmysłu odbierającego bodźce czuciowe – dłoń mogłaby do takiej roli kandydować.

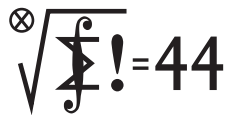
Do wielu zajęć i sprawności człowiek wykorzystał swoje dłonie. Wykonują one najbardziej precyzyjne obróbki materiału, sygnalizują subtelnie gotowość do wykonywania różnych funkcji. O dłonie dbają mechanicy precyzyjni, jubilerzy. . . A ja pomyślałam sobie o tym cudzie biomechaniki, obserwując palce i dłonie pianistów. Biegłość i nieomyślność tych palców zmuszają do podziwu i zdumienia. W dodatku dowodzą, że można rozwijać te cechy uporczywym, wieloletnim, treningiem.

Pierwsze miejsce na XVIII Konkursie Pianistycznym im. Fryderyka Chopina w Warszawie zajął Bruce (Xiaoyu) Liu z Kanady.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2022

Zadania z matematyki nr 831, 832

Redaguje Marcin E. KUCZMA

831. (a) Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki: $a \geq b \geq c \geq d \geq 1$; $bc < ad$. Ustalić, która z liczb A, B jest większa:

$$A = a^{2022} + b^{2021} + c^{2021} + d^{2022}; \quad B = a^{2021} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2021}.$$

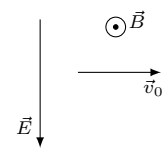
(b) Pokazać, że dla dowolnie zadanych liczb $a > d \geq 1$ oraz $q > 1$ można znaleźć takie liczby $b, c \in (d, a)$, że $bc < qad$, ale wartości wyrażeń A, B określonych w części (a) nie spełniają uzyskanej tam nierówności.

832. Numerujemy wierzchołki n -kąta wypukłego liczbami $1, \dots, n$ (każda występuje raz; kolejność dowolna). Każda krawędź (bok wielokąta) otrzymuje etykietę ze zbioru $\{1, \dots, n-1\}$, określoną jako wartość bezwzględna różnicy liczb będących numerami jej końców.

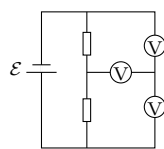
Dla każdego $n \geq 3$ wyznaczyć największą liczbę k , dla której istnieje takie ponumerowanie wierzchołków, że każda liczba ze zbioru $\{1, \dots, n-1\}$ pojawia się jako etykieta pewnej krawędzi, przy czym etykieta k (i tylko ona) pojawia się dwa razy.

Zadanie 832 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Klub 44 F



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 728, 729

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

728. Dodatnio naładowana cząstka porusza się w jednorodnych, wzajemnie prostopadłych polach: elektrycznym o natężeniu E i magnetycznym o indukcji B . W pewnej chwili prędkość cząstki wynosi \vec{v}_0 ($\vec{v}_0 \perp \vec{E}$ i $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$; rys. 1), przy czym $E = v_0 B$. Ile wynosi wartość wektora prędkości cząstki w tych chwilach, gdy tworzy on kąt π z wektorem \vec{v}_0 ?

729. W obwodzie przedstawionym na rysunku 2 wszystkie woltomierze są identyczne. Siła elektromotoryczna baterii wynosi $\mathcal{E} = 5$ V, jej opór wewnętrzny jest zaniedbywalny. Górny woltomierz wskazuje napięcie $U_1 = 2$ V. Co wskazują pozostałe woltomierze?

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Rozwiązanie zadania M 1693. Odpowiedź: $BC = CD = DA = 1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 72^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 108^\circ$.

Ponieważ środki okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ADC leżą na symetralnej odcinka AC , trójkąty te są równoramienne. Ponieważ środki okręgów opisanych leżą na zewnętrznych tych trójkątów, to kąty przy wierzchołkach B i D są rozwarte.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wtedy

$$\sphericalangle AOC = 360^\circ - 2\sphericalangle B.$$

Z drugiej strony O to środek okręgu opisanego w trójkąt ADC , czyli

$$\sphericalangle AOC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle D}{2}.$$

Zatem

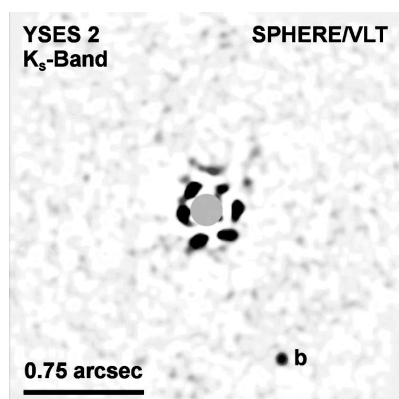
$$360^\circ - 2\sphericalangle B = 90^\circ + \frac{\sphericalangle D}{2}.$$

Podobnie dostajemy, że

$$360^\circ - 2\sphericalangle D = 90^\circ + \frac{\sphericalangle B}{2}.$$

Łącząc te równości, dostajemy, że $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 108^\circ$ oraz $ABCD$ jest rombem.

YSES, czyli *Young Suns Exoplanet Survey*, co w dość zgrubnym polskim tłumaczeniu można nazwać Przeglądem Egzoplanet Młodych Słońc – został przeprowadzony za pomocą Bardzo Dużego Teleskopu Europejskiego Obserwatorium Południowego (ESO) w Chile, przy wykorzystaniu instrumentu SPHERE.



Zdjęcie egzoplanety YSES 2b (na dole po prawej) i jej gwiazdy (w środku). Gwiazda jest zasłonięta przez tzw. koronograf. Źródło: ESO/SPHERE/VLT/Bohn et al.

Prosto z nieba: YSES 2b, jak powstała?

Zespół astronomów pod kierownictwem Alexandra Bohna z Uniwersytetu w Lejdzie (Holandia) wykonał zdjęcie masywnej planety orbitującej w bardzo dużej odległości wokół gwiazdy podobnej do Słońca. Zdjęcie to nie byłoby aż tak bardzo interesujące – jesteśmy już przyzwyczajeni, że niemal codziennie odkrywamy nową planetę pozasłoneczną – gdyby nie fakt, że naukowcy nie są w stanie wytłumaczyć, jak taka planeta mogła w ogóle powstać!

Planeta, o której mowa, to YSES 2b. Znajduje się ona 360 lat świetlnych od Ziemi w kierunku południowego gwiazdozbioru Musca (z łac. *musca* – mucha). Jest to planeta gazowa, sześć razy cięższa od Jowisza, największej planety znajdującej się w Układzie Słonecznym. Nowo odkryta planeta krąży w odległości od swojej gwiazdy 110 razy większej niż Ziemia od Słońca (lub 20 razy większej niż odległość mierzona pomiędzy Słońcem a Jowiszem). Dodatkowo towarzysząca jej gwiazda jest bardzo młoda, ma zaledwie 14 milionów lat, i w swojej młodości przypomina nasze Słońce.

To, co najbardziej zadziwiło naukowców, to wyjątkowo duża odległość, jaka dzieli masywną YSES 2b od jej gwiazdy. Otóż odległość ta, wynosząca około 16 miliardów kilometrów, nie pasuje do żadnego z trzech najbardziej popularnych modeli powstawania dużych gazowych planet. Pierwszy model tłumaczy formowanie się planety z dysku protoplanetarnego, jednak w przypadku YSES 2b model ten się nie sprawdza – w dysku nie byłoby odpowiednio dużo materiału, aby uformować planetę sześciokrotnie większą od Jowisza tak daleko od gwiazdy macierzystej. Kolejny model zakłada tzw. niestabilność grawitacyjną w dysku planetarnym, jednak wydaje się, że planeta nie jest wystarczająco ciężka, aby taki scenariusz miał miejsce. Trzecią możliwością jest to, że planeta uformowała się blisko gwiazdy poprzez akrecję jądra, a następnie migrowała na zewnątrz. Taka migracja wymagałaby jednak grawitacyjnego wpływu drugiej planety, której jeszcze nie znaleźliśmy.

Chociaż obecnie wydaje się, że wszystkie trzy scenariusze powstania planet nie pasują do YSES 2b, to wciąż jest możliwe, że jeden lub więcej z nich rzeczywiście opisuje sposób, w jaki powstała. Jednak bardziej interesująca jest hipoteza, że YSES 2b powstała w wyniku procesu, który nie jest jeszcze znany nauce. Konieczne są dalsze badania, w tym sprawdzenie, jaka jest dokładna orbita planety i czy potencjalnie zwiększa ona swoją masę. Do tego czasu astronomowie, w tym prowadzący badanie YSES, będą kontynuować poszukiwania tych cudownie dziwacznych planet pozasłonecznych.

Katarzyna MAŁEK

Więcej na ten temat można znaleźć w artykule „Discovery of a directly imaged planet to the young solar analog YSES 2b”, Alexander J. Bohn et al., *Astronomy & Astrophysics*, 2021, 648, A73.

Niebo w grudniu

Prawie przez cały grudzień Słońce przebywa na południe od równoleżnika -22° deklinacji, osiągając swoje najniższe położenie na niebie w dniu przesilenia zimowego, które w tym roku nastąpi 21 grudnia wieczorem naszego czasu. Ten dzień jest najkrótszy na północnej półkuli Ziemi. Ze względu jednak na bliskość perihelium, przez które Ziemia przechodzi na początku stycznia, i wynikający z niego szybki ruch naszej planety po orbicie najwcześniejszy zachód Słońca ma miejsce już 13 grudnia. Najpóźniejszy wschód Słońca natomiast następuje 30 grudnia i dopiero od tego momentu dnia przybywa zarówno rano, jak i wieczorem. Przez cały

miesiąc droga Słońca na niebie zmienia się na tyle mało, że trudno jest to zauważyć bez dokładniejszych obserwacji albo bez odpowiedniego punktu odniesienia w postaci przeszkód terenowych.

Miesiąc zacznie się nowiem Księżycą 4 grudnia i całkowitym zaćmieniem Słońca. Niestety wyjątkowo mało stworzeń doświadczy kilkuminutowych ciemności, gdyż cień Księżycy dotknie powierzchni Ziemi gdzieś między Falklandami a Georgią Południową i powędruje w kierunku Antarktydy. Nieliczni szczęśliwcy 18° na lewo od Słońca zobaczą Marsa, a $3,5^\circ$ na południowy wschód od niego – świecącego z jasnością -1^m **Merkurego**, który

kilka godzin później zostanie zakryty przez Księżyc. To zjawisko z kolei da się dostrzec z obszaru od północnej części Ameryki Południowej po Południową Afrykę i Madagaskar. Tutaj jednak na przeszkodzie stanie bliskość Słońca, która spowoduje, że zakrycia nie da się obserwować bez teleskopu i specjalnych przygotowań pozwalających uniknąć szkodliwego patrzenia na Słońce.

Przed nowiem Srebrny Glob pokaże się na niebie porannym w fazie cienkiego sierpa. W grudniu ekliptyka jest dość korzystnie nachylona zarówno rano, jak i wieczorem, stąd przez cały miesiąc panują dobre warunki widoczności Księżyca. Pierwszej nocy grudnia Księżyc wejdzie 5° od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, prezentując tarczę w fazie 13%. O świcie Księżyc zdąży się wzniesić na wysokość prawie 25°. Dobę później o tej samej porze Księżyc pokaże tarczę oświetloną w 6%, zajmując pozycję na wysokości 12°. Tego ranka 4° na południowy wschód od Srebrnego Globu znajdzie się gwiazda Zuben Elgenubi, druga co do jasności gwiazda Wagi (choć oznaczana na mapach nieba grecką literą α), a 6° dalej w tym samym kierunku pokaże się planeta Mars. Kolejnej doby, 3 grudnia, naturalny satelita Ziemi zmniejszy fazę do zaledwie 2%, ale wzniesie się tylko na niecałe 2° ponad widnokrąg. Tym razem Mars znajdzie się w odległości 4° na godzinie 1 względem Księżyca.

W grudniu Czerwona Planeta pokona 20° od środka gwiazdozbioru Wagi przez zodiakalną część Skorpiona po Wężownika. Planeta jest daleko od nas, a zatem wygląd jej tarczy w tym czasie prawie się nie zmieni. Jasność planety wyniesie $+1,5^m$ przy średnicy tarczy 4". Do końca miesiąca Mars nieznacznie oddali się od linii widnokregu, wznosząc się o świcie na 6°.

Po nowiu Księżyc rozgości się na niebie wieczornym, szybko zwiększając wysokość nad horyzontem. O tej porze doby można obserwować dobrze widoczne gołym okiem planety Wenus, Saturn i Jowisz, a także widoczne już w niewielkich teleskopach planety Neptun i Uran. Najbliżej widnokregu pokazuje się planeta Wenus, która pod koniec października osiągnęła swoją maksymalną elongację wschodnią, a w grudniu zacznie szybko zbliżać się do Słońca, dążąc do koniunktacji dolnej na początku stycznia przyszłego roku.

Mimo rosnącego nachylenia ekliptyki do horyzontu Wenus łatwo widoczna pozostanie tylko w pierwszej części miesiąca. Najwyżej planeta wzniesie się 13 grudnia, osiągając o zmierzchu wysokość 10°. Spotykając się ze Słońcem, Wenus przejdzie prawie 5° na północ od niego, dzięki czemu pozostanie widoczna prawie do samej koniunktacji i zacznie pojawiać się na niebie porannym zaraz po niej, stając się ozdobą porannego nieba na początku 2022 roku. W grudniu Wenus zmniejszy jasność z $-4,7^m$ do $-4,2^m$, zwiększając przy tym średnicę tarczy z 39" do 61" i zmniejszając fazę z 28% do 3%. A zatem z każdym kolejnym wieczorem tarcza planety stanie się coraz atrakcyjniejszym celem nawet dla posiadaczy lornetek.

Księżyc spotka się z Wenus 6 i 7 grudnia, zbliżając się doń na odległość najpierw 6°, a potem 8° w fazie bardzo cienkiego sierpa, odpowiednio 8% i 16%. Srebrny Glob przejdzie także 9° od Saturna 7 i 8 grudnia, a 9 dnia miesiąca zbliży się na 6° do Jowisza. Dwie największe planety Układu Słonecznego wędrują przez gwiazdozbiór Koziorożca w odległości około 17° od siebie, ale jeszcze w pierwszej połowie miesiąca Jowisz przeniesie się do gwiazdozbioru Wodnika. W tym czasie też Wenus zbliży się do Saturna na minimalną odległość 14°. Saturn z Jowiszem natomiast dążą do swoich koniunktacji ze Słońcem, i ich warunki widoczności szybko się pogarszają. Planety świecą coraz niżej i przez coraz krótszy czas po zachodzie Słońca. W grudniu Saturn świeci blaskiem $+0,7^m$ z tarczą o średnicy 16", Jowisz natomiast zmniejszy jasność do $-2,1^m$ i średnicę tarczy do 36".

Srebrny Glob przejdzie 11 grudnia przez I kwadrę i jednocześnie 8° od Neptuna, a 4 i 5 dni później, w fazie przekraczającej 90%, zbliży się na 5° do Urana i 3° do planety karłowatej (1) Ceres. Planeta Neptun na początku miesiąca zakreśli na kreślonej przez siebie pętli w odległości 1,5° od gwiazdy 96 Aqr, Uran zaś wędruje niecały 1° od gwiazdy 29 Ari. Ceres przesuwając się dalej na zachód, pokonując w grudniu kolejne 6°, jakieś 7° na południe od Plejad. W grudniu Uran świeci z jasnością $+5,7^m$, Neptun – z jasnością $+7,9^m$, Ceres natomiast zacznie miesiąc z jasnością $+7,2^m$, by pod koniec miesiąca zbliżyć się do jasności Neptuna.

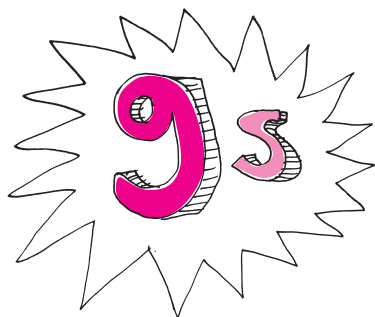
Księżyc przejdzie przez pełnię w Byku 19 grudnia, a 27 grudnia – przez ostatnią kwadrę w Pannie. W ostatnich dniach miesiąca Srebrny Glob ponownie ładnie zaprezentuje tzw. światło popielate, czyli swoją nocną stronę oświetloną światłem odbitym od Ziemi. Szczególnie uroczy konfigurację utworzy ostatniego dnia miesiąca i roku, gdy o świcie jego oświetlona w 9% tarcza pokaże się w towarzystwie jasnych gwiazd Skorpiona, a 8° na wschód od niej (i jednocześnie 5° od Antaresa) znajdzie się Mars. W pierwszy poranek nowego roku można próbować dostrzec bardzo cienki sierp Księżyca na mniej więcej 36 godzin przed nowiem 10° na lewo od Antaresa i jednocześnie 6° od Marsa.

Na początku miesiąca jak co roku promieniują meteory z roju Geminidów. Radiant roju znajduje się kilka stopni na północny zachód od Kastora, drugiej pod względem jasności gwiazdy Bliźniąt, przebywając wysoko na niebie przez prawie całą noc. Geminidy osiągają maksimum zawsze około 14 grudnia. Niestety w tym roku oznacza to obecność Księżyca w fazie około 80%. Na szczęście Księżyc zjedzie z nieboskłonu mniej więcej o godzinie 2, pozostawiając sporo czasu na obserwacje roju. A warto się ich podjąć mimo zimnych nocy przy pogodnym niebie, gdyż można się spodziewać grubo ponad 100 meteorów na godzinę.

Ariel MAJCHER

Dziewięć sekund

Swobodny neutron jest cząstką nietrwałą, rozpada się na proton, elektron i antyneutrino elektronowe. Jak zmierzyć jego średni czas życia? Spoczywające neutrony należy umieścić w naczyniu i sprawdzić, ile z nich pozostanie w naczyniu po pewnym czasie t . Porównując liczbę neutronów N_0 na początku pomiaru z liczbą neutronów N na końcu pomiaru i stosując prawo rozpadu promieniotwórczego $N = N_0 e^{-t/\tau}$, możemy wyznaczyć średni czas życia τ neutronu występujący w tym wzorze.



Wykonanie takiego eksperymentu niesie ze sobą wiele wyzwań. Po pierwsze, neutrony uzyskuje się zazwyczaj w formie szybkobieżnych wiązek powstających w akceleratorach i nie jest specjalnie łatwo spowolnić je do takiego stopnia, żeby można je było uznać za spoczywające. Po drugie, nawet powolne neutrony mogą opuścić naczynie, co doskonale wyobraża sobie każdy posiadacz ogródka, który kiedykolwiek wylapał niszczące go ślimaki do otwartego naczynia i pozostawił je na chwilę bez nadzoru. Po trzecie, neutronów nie widać – nie tylko gołym okiem, ale także w typowych detektorach cząstek naładowanych, trzeba więc zastosować specjalne techniki obrazowania.

Na szczęście trudności opisane wyżej udało się zupełnie niedawno pokonać na tyle, by zmierzyć czas życia neutronu z dokładnością najpierw do jednej sekundy [1], a później, po przeanalizowaniu większej próbki danych, nawet do ułamka sekundy [2]. Badacze z eksperymentu UCN τ – co jest skrótem od *Ultra Cold Neutrons* (ultrazimne neutrony) i greckiej litery ulubionej przez fizyków i stosowanej do oznaczania czasu życia cząstek elementarnych i jąder atomowych – stwierdzili, że neutron żyje średnio 14 minut i 38 sekund.

Średni czas życia neutronu można zmierzyć jeszcze w inny sposób. Polega on na przepuszczaniu wiązki powolnych neutronów przez pułapkę protonową. Gdy neutron rozpada się, powstający w wyniku rozpadu proton jest utrzymywany w pułapce przez kilkutesłowe pole magnetyczne oraz różnicę potencjałów elektrostatycznych na końcach pułapki. Pole elektryczne w pułapce jest okresowo zaburzane. Wtedy protony są wyrzucane z pułapki i wędrują wzdłuż linii pola magnetycznego do detektora krzemowego. Monitorując parametry wiązki neutronów oraz liczbę protonów wykrywanych w kolejnych segmentach pułapki, można oszacować tempo rozpadania się neutronów i wyznaczyć ich średni czas życia. Najdokładniejszy jak dotąd pomiar tego typu został wykonany przez badaczy z National Institute of Standards and Technology w USA, którzy stwierdzili, że neutron żyje średnio 14 minut i 47 sekund.

Dziewięć sekund różnicy to dość dużo jak na eksperymenty badające własności cząstek elementarnych. To również dość dużo w skali kosmologicznej, jeśli uświadomimy sobie, że ilość helu wytworzonego w procesie pierwotnej nukleosyntezy zależy silnie od czasu życia neutronu, a to z kolei wpływa na wyznaczanie nadwyżki materii nad antymaterią we wczesnym Wszechświecie. Pomiar czasu życia neutronu ma także wpływ na dyskusję o tym, czy prawdopodobieństwa reakcji ze zmianą zapachu kwarka u sumują się do jedności – odpowiedź przecząca sugerowałaby konieczność poprawienia Modelu Standardowego cząstek elementarnych.

Dziewięć sekund różnicy nie jest całkowicie nowym wynikiem doświadczalnym. Niezgodność tego rzędu pojawiła się już w eksperymentach w 2005 roku, jednak wówczas większa była niepewność wyznaczenia czasu życia neutronu każdą z dwóch metod. Zmniejszanie tej niepewności sprawiło, że tytułowe dziewięć sekund staje się coraz bardziej widocznym pęknięciem w zrozumieniu otaczającego nas świata. Czy będzie to, by przywołać metaforę Michelsona, chmurka na horyzoncie fizyki, która przyniesie oczyszczającą burzę?

Krzysztof TURZYŃSKI

- [1] Pattie R. W. *et al.*, „Measurement of the neutron lifetime using an asymmetric magneto-gravitational trap and *in situ* detection”, *Science* **360**, 627 (2018)
- [2] Gonzalez F. M. *et al.*, „Improved neutron lifetime measurement with UCN τ ”, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 162501 (2021).



Kwadrat?

Bartłomiej BZDEGA

Uwaga. W całym artykule liczby k, m, n, q, r są całkowite, a liczba p – pierwsza.

Korzystając z tego, że numer niniejszego kępczaka jest kwadratem liczby naturalnej, napiszę o tym, jak rozpoznać liczby, które kwadratami liczb naturalnych na pewno nie są. Wymienię tu trzy najprostsze sposoby.

Sposób I: rozkład na czynniki pierwsze. W rozkładzie kwadratu liczby naturalnej wszystkie czynniki pierwsze występują z wykładnikami parzystymi (por. kępczak nr 31, Δ_{21}^7). Aby wykazać, że dana liczba nie jest kwadratem, wystarczy więc znaleźć jeden czynnik pierwszy, który ma wykładnik nieparzysty. Można to oczywiście uogólnić – w rozkładzie k -tej potęgi wszystkie czynniki pierwsze mają wykładniki podzielne przez k . W praktyce najczęściej stosuje się to tak: jeśli $p \mid n$, ale $p^2 \nmid n$, to n nie jest kwadratem, ani żadną potęgą liczby naturalnej o wyższym wykładniku.

Sposób II: reszty z dzielenia. Ustalmy liczbę $m > 1$. Każdą liczbę naturalną n można jednoznacznie przedstawić w postaci $qm + r$, w której $-m/2 < r \leq m/2$. Wówczas $n^2 = m(q^2m + 2qr) + r^2$, więc aby poznać wszystkie możliwe reszty z dzielenia kwadratów liczb naturalnych przez m , wystarczy wyznaczyć reszty z dzielenia przez m liczb $0^2, 1^2, \dots, \lfloor m/2 \rfloor^2$. Te reszty nazywamy *kwadratowymi*, a pozostałe – *niekwadratowymi*. Jeśli liczba naturalna daje resztę niekwadratową z dzielenia przez m , to nie jest ona kwadratem liczby naturalnej. Można, ogólniej, rozważać reszty sześciennie i reszty dla wyższych wykładników.

Sposób III: szacowanie. Zachęcam do zapoznania się z artykułem *Między kwadratami* autorstwa Michała Kiezy (gazetka OMJ *Kwadrat*, nr 20, wrzesień 2017). Idea jest następująca: liczby znajdujące się pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb naturalnych nie są kwadratami liczb naturalnych. To samo można oczywiście powiedzieć o sześcianach między sześcianami, jak również o wyższych wykładnikach.

Powyższe metody zilustruję dwoma prostymi przykładami.

Przykład 1. Liczba n^2 ma dwie ostatnie cyfry równe c . Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c .

Rozwiązanie. Wartości 0 i 4 są możliwe, bo $10^2 = 100$ i $12^2 = 144$. Ponadto $c \notin \{2, 6\}$, bo wtedy $2 \mid n^2$, ale $4 \nmid n^2$, oraz $c \neq 5$, bo wtedy $5 \mid n^2$, ale $25 \nmid n^2$. Również $c \notin \{3, 7, 8\}$, bo 2 i 3 są niekwadratowymi resztami z dzielenia przez 5, oraz $c \notin \{1, 9\}$, gdyż 3 jest resztą niekwadratową z dzielenia przez 4.

Przykład 2. Udowodnić, że liczba $M = 444 \dots 44$ ($2n$ czwórek) nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie. Możemy zapisać $M = \frac{4}{9}(10^{2n} - 1)$, więc

$$(6 \dots 66)^2 = \left(\frac{2}{3}(10^n - 1)\right)^2 < M < \left(\frac{2}{3}(10^n + 2)\right)^2 = (6 \dots 67)^2.$$

Zadania

1. Czy liczba $n = 657657657 \dots$, która kończy się cyfrą 6, 5 lub 7, może być kwadratem liczby naturalnej?
2. Wyznaczyć wszystkie n , dla których liczba $4^n + 2^n + 17$ jest kwadratem liczby naturalnej.
3. Niech $S(m)$ oznacza sumę cyfr liczby naturalnej m . Udowodnić, że $S(2n^2 + 3)$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.
4. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, których nie da się przedstawić w postaci $a^3 + b^3 + c^3$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c .
5. Wyznaczyć wszystkie n , dla których $2^n + 105$ jest kwadratem liczby naturalnej.
6. Wyznaczyć największą możliwą długość ciągu kolejnych liczb całkowitych, z których każdą można przedstawić w postaci $a^3 + 2b^2$ dla pewnych liczb całkowitych a i b .
7. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne, których kwadraty mają w zapisie dziesiętnym wyłącznie nieparzyste cyfry.

Wskazówki do zadań

1. Jeśli ostatnią cyfrą jest 6 lub 5 – zastanów się nad ostatnią cyfrą kwadratu. Jeśli ostatnią cyfrą jest 7 – zastanów się nad ostatnią cyfrą kwadratu. Jeśli ostatnią cyfrą jest 6 lub 5 – zastanów się nad ostatnią cyfrą kwadratu.
2. Zastosować sposób III – nierówność $4^n + 2^n + 17 \geq (2n + 1)^2$ daje oszacowanie górne na n , więc mamy skończoną liczbę przypadków do sprawdzenia przez bezpośrednie podstawienie.
3. Liczby m i $S(m)$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 9. Liczba $a^3 + b^3 + c^3$ nie daje reszty 4 ani 5 z dzielenia przez 9.
4. Rozważając resztę z dzielenia przez 3, niech $n = 2m$ i $k^2 = 2m + 105$. Dalej wywnioskować, że n musi być parzyste. Można na dwa sposoby: (1) $105 = (k - 2m)(k + 2m)$ i rozważyć wszystkie możliwości uzyskania 105 jako iloczynu dwóch czynników całkowitych; (2) $2m + 105 \leq (2m + 1)^2$, podobnie jak we wskazówce do zadania 2.
5. Rozważając resztę z dzielenia przez 8, niech $n = 2m$ i $k^2 = 2m + 105$. Dalej można na dwa sposoby: (1) $105 = (k - 2m)(k + 2m)$ i rozważyć wszystkie możliwości uzyskania 105 jako iloczynu dwóch czynników całkowitych; (2) $2m + 105 \leq (2m + 1)^2$, podobnie jak we wskazówce do zadania 2.
6. Rozważając resztę z dzielenia przez 8, niech $n = 2m$ i $k^2 = 2m + 105$. Dalej można na dwa sposoby: (1) $105 = (k - 2m)(k + 2m)$ i rozważyć wszystkie możliwości uzyskania 105 jako iloczynu dwóch czynników całkowitych; (2) $2m + 105 \leq (2m + 1)^2$, podobnie jak we wskazówce do zadania 2.
7. Rozważając resztę z dzielenia przez 8, niech $n = 2m$ i $k^2 = 2m + 105$. Dalej można na dwa sposoby: (1) $105 = (k - 2m)(k + 2m)$ i rozważyć wszystkie możliwości uzyskania 105 jako iloczynu dwóch czynników całkowitych; (2) $2m + 105 \leq (2m + 1)^2$, podobnie jak we wskazówce do zadania 2.



44. KONKURS UCZNIOWSKICH PRAC Z MATEMATYKI IM. PAWŁA DOMAŃSKIEGO

W konkursie biorą udział matematyczne, twórcze prace napisane przez uczniów szkół ponadpodstawowych oraz podstawowych w klasach 7-8.

Mówiąc krótko: należy udowodnić coś, czego jeszcze nikt inny nie udowodnił!



TERMIN ZGŁASZANIA PRAC:
30 KWIETNIA 2022 ROKU
FINAŁ:
WRZESIEŃ 2022 ROKU

Regulamin konkursu, przykładowe tematy prac, lista dotychczasowych laureatów, niektóre prace oraz wiele innych przydatnych informacji:

www.deltami.edu.pl/delta/redakcja/konkurs_prac_uczniowskich



deltami@mimuw.edu.pl
f Delta.czasopismo