

delt

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu \quad c=3,141592 \dots$$

NR 8 (567) 2021

CENA 5,5 ZŁ - VAT 8%
PE ISSN 0137-3005 | NR-IND 35-550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Radioteleskop
LOFAR w Polsce
str. 15



Nakład: 3500 egz.

 wielkość Księżyca



Mapa supermasywnych czarnych dziur. Pochodzi z radiowego przeglądu LOFAR LBA Sky Survey (LoLSS)

SPIS TREŚCI NUMERU 8 (567)

O tym, jak użyć królików
doświadczalnych w matematyce
Oskar Skibski


str. 1

Żarówka modelem efektu cieplarnianego?
Paweł Turkowski

str. 4

 Zadania

str. 6

 Przekazać horyzontalnie
Magdalena Fikus

str. 7

Apologia termodynamiki
Piotr Chankowski, Paweł Jakubczyk

str. 8

O soczewkach grawitacyjnych
produkujących nieparzystą liczbę
obrazów
Konrad Topolski

str. 12

Radioteleskop LOFAR w Polsce
*Leszek Błaszkiwicz, Andrzej Krankowski,
Marian Soida, Hanna Rothkaehl,
Robert Pękal*

str. 15

O pewnych średnich w ułamkach
łańcuchowych
Karol Gryszka

str. 17

Klub 44

str. 20

Prosto z nieba: W poszukiwaniu
Tatooine

str. 22


Niebo w sierpniu

str. 22

Aktualności

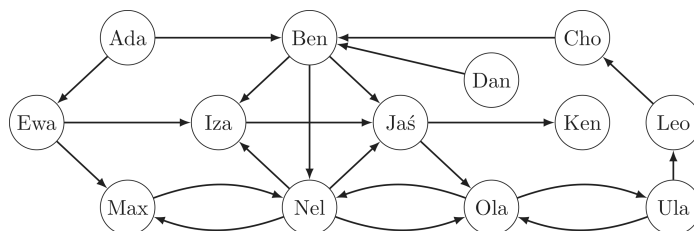
str. 24

Władca z głową w gwiazdach

 Sam nie wiem, co się tu jeszcze
mieści
Bartłomiej Bzdega

str. 25

W następnym numerze dowiemy się, kto powinien zostać
przewodniczącym klasy przy poniższych wyborach:



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej,
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel,
dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący,
prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski,
dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz,
dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk,
dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin,
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący,
dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński,
prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz,
dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak,
dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki,
prof. dr hab. Andrzej Wymolek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol,
Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec,
Tomasz Kazana, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji
osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

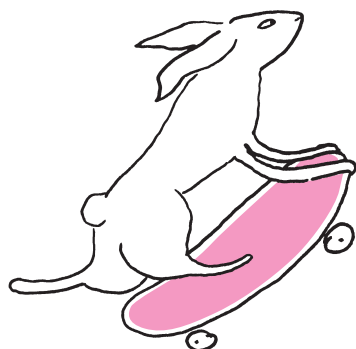
Okładka:

Jedyna na świecie mapa 25 000 supermasywnych
czarnych dziur. Mapa przedstawia 4% północnego
nieba i pochodzi z radiowego przeglądu LOFAR LBA
Sky Survey (LoLSS).

O tym, jak użyć królików doświadczalnych w matematyce

Oskar SKIBSKI

Podczas pisania tego artykułu nie ucierpiał żaden królik.



Czytelnik może znać ten wzór z wartością $n(n+1)/2$ po prawej stronie. Nietrudno jednak zauważyć, że $\binom{n+1}{2}$ jest jej równe: dwa króliki spośród $n+1$ królików możemy wybrać, najpierw wskazując pierwszego królika (na $n+1$ sposobów), a potem drugiego (na n sposobów). W ten sposób dowolną parę królików, powiedzmy Stefana z Edwardem, wybierzemy dwa razy – raz wybierając pierwszego Stefana, a raz Edwarda. Dlatego wynik musimy podzielić przez 2.

Twierdzenia w matematyce mogą być dowodzone na wiele sposobów. Niektórzy prześcigają się w znalezieniu dowodu najprostszego, a niektórzy starają się stworzyć dowód najbardziej elegancki. W tym artykule przedstawimy jedną z najmiłszych, a na pewno najbardziej puszystych metod dowodzenia – użyjemy królików doświadczalnych.

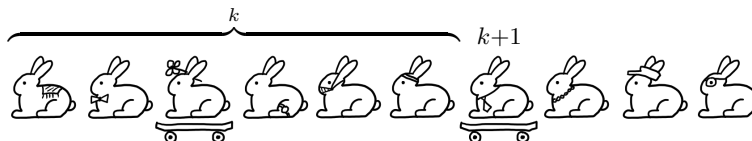
Interpretacje kombinatoryczne – tak nazywa się metoda, której będziemy używać – polega z grubsza na opowiadaniu bajek (wspomnieliśmy już o tym w Δ_{17}^4). Naszym celem jest opowiedzenie prostej historii, która opisuje (interpretuje) skomplikowane wyrażenie matematyczne. Opowiedzenie tej samej historii inaczej pozwala często na przedstawienie tego samego wyrażenia w inny, prostszy sposób. Zamiast tworzyć niepotrzebne definicje skupimy się jednak na przykładach – królikom na pewno bardziej się to spodoba.

W paru zadaniach pojawią się współczynniki dwumianowe: dla dowolnych dwóch liczb naturalnych n i k , $\binom{n}{k}$ to liczba możliwych wyborów k spośród n królików. Zakładamy oczywiście, że króliki są rozróżnialne oraz – co przyda nam się później – że mają różną puszystość, wolną wolę, umieją jeździć na deskorolce i mówić, a także rozróżniają kolory.

Naszą analizę zaczniemy od prostych wzorów, które Czytelnik pewnie już widział, a może nawet i dowodził. Pierwszą formułą będzie suma liczb od 1 do n :

$$1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2}.$$

Aby udowodnić tę formułę, wyobraźmy sobie, że mamy $n+1$ królików, ale tylko dwie deskorolki. Musimy zatem wybrać, które dwa króliki je dostaną. Po prawej stronie równania mamy oczywiście liczbę takich wyborów. Ustawmy zatem nasze $n+1$ królików w rzędzie rosnąco według stopnia ich puszystości i zastanówmy się, jak możemy zinterpretować lewą stronę równania. Z dwóch królików, które dostaną deskorolki, jeden (mniej puszysty) będzie lewy, a drugi (bardziej puszysty) będzie prawy. Jeżeli prawym królikiem będzie ostatni królik w rzędzie, to będziemy mieli n opcji dopełnienia pary lewym królikiem. Z kolei jeżeli prawy królik będzie przedostatni w rzędzie, to będziemy mieli $n-1$ opcji. Aha! A zatem liczbę k w naszej sumie możemy interpretować jako liczbę takich wyborów królików, że prawy królik jest $k+1$ w rzędzie:



k = liczba wyborów 2 spośród $n+1$ królików, którym damy deskorolki, takich, że prawy królik jest na pozycji $k+1$.

Sumując po wszystkich możliwych k , czyli równoważnie po wszystkich możliwych pozycjach prawego królika, dostajemy wszystkie wybory dwóch królików.

Weźmy się zatem za trudniejsze wzory. Niech p będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnimy następujący wzór na sumę ciągu geometrycznego:

$$p^0 + p^1 + \dots + p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}.$$

Zamieńmy najpierw dzielenie na mnożenie (co by nie mówić, akurat w mnożeniu króliki są bardzo dobre):

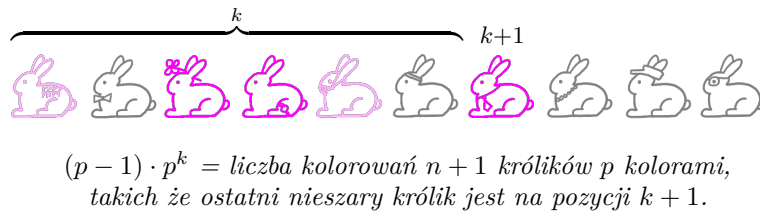
$$(p-1) \cdot p^0 + (p-1) \cdot p^1 + \dots + (p-1) \cdot p^n = p^{n+1} - 1.$$



Mogliśmy także bezpośrednio udowodnić wzór, w którym po prawej stronie jest $(p^{n+1} - 1)/(p - 1)$. Łatwo zobaczyć, że w $1/(p - 1)$ kolorowań, które aktualnie zliczamy, ostatni nieszary królik jest fioletowy. Liczba $(p^{n+1} - 1)/(p - 1)$ to zatem liczba kolorowań $n + 1$ królików p kolorami, w których ostatni nieszary królik istnieje i jest fioletowy. Liczba p^k to wtedy część tych kolorowań, w których ostatni nieszary królik jest na pozycji $k + 1$.

Wróćmy teraz szybko do naszych królików, zanim się rozbiegną. Wyobraźmy sobie, że mamy p różnokolorowych farb, którymi chcemy pomalować wszystkie króliki. Dla pierwszego królika mamy p możliwości, dla drugiego też p i tak dalej. W rezultacie dla $n + 1$ królików dostajemy p^{n+1} możliwych kolorowań. Jeżeli odrzucimy teraz jedno konkretne kolorowanie, np. takie, w którym wszystkie króliki są szare, to dostaniemy $p^{n+1} - 1$ kolorowań. Tak zinterpretujemy zatem prawą stronę równania.

Przejdźmy teraz do lewej strony. Tak jak poprzednio, spróbujmy iść od końca. Jeżeli ostatni królik nie będzie szary, to pozostałe mogą mieć dowolne kolory. Takich kolorowań jest $p - 1$ (kolor dla ostatniego królika) razy p^n (dowolne kolory dla wcześniejszych królików). O, jest to zatem ostatni składnik naszej sumy. W ten sposób policzyliśmy wszystkie kolorowania, w których ostatni królik nie jest szary. Musimy jeszcze policzyć te, w których ostatni królik jest szary (ale któryś wcześniejszy szary nie jest). Rozpatrując kolor przedostatniego królika w takich kolorowaniach, dostajemy $p - 1$ razy p^{n-1} kolorowań, w których ostatni królik jest szary, a przedostatni nie. Uogólniając, znowu udało nam się znaleźć regułę: składnik $(p - 1) \cdot p^k$ odpowiada kolorowaniom, w których ostatni nieszary królik znajduje się na pozycji $k + 1$:



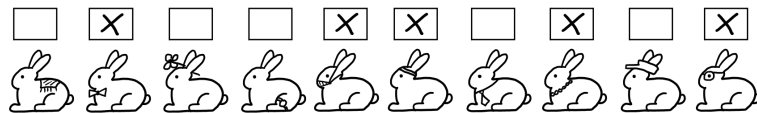
Sumując po wszystkich możliwych pozycjach ostatniego nieszarego królika, dostajemy wszystkie możliwe kolorowania, w których taki królik jest, a zatem prawą stronę.

Świetnie, idźmy więc dalej. Teraz rozpatrzmy następujący wzór na sumę współczynników dwumianowych:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Uwaga! Poniższy fragment zawiera drastyczne elementy! Delikatniejszy Czytelnik może przyjąć, że zamiast wybierać króliki do pasztetu robimy nabór ochotników do testów nowego szamponu do włosów.

Jak ten wzór zinterpretować? Wyobraźmy sobie, że chcemy zrobić pasztet. Mamy n królików, ale nie musimy brać ich wszystkich: może wystarczą nam 3 króliki, a jak będziemy gotowali dla vegetarian, to może nie weźmiemy żadnego. Dla ustalonej liczby k mamy $\binom{n}{k}$ możliwych wyborów k królików. A skoro tak, to liczba pasztetów, jakie możemy zrobić, odpowiada lewej stronie równania. Jak zinterpretować teraz prawą stronę? Wystarczy, że oddamy tę decyzję królikom (tak będzie dla nas łatwiej – w poprzednich przykładach zdążyliśmy się już z nimi zaprzyjaźnić). Podchodzimy kolejno do królików i pytamy: „Panie króliku, czy chce pan iść do pasztetu?” Każdy królik ma dwie możliwości, a zatem możemy uzyskać 2^n różnych zestawów odpowiedzi:



$2^n = \text{liczba możliwych wyborów grupy królików spośród } n \text{ królików,}$
które pójdą do pasztetu.

Skoro każdy taki ciąg odpowiada jednemu pasztetowi, to równość jest udowodniona.

Udowodniliśmy już parę prostych wzorów. Niektórzy mogliby jednak uznać to za przerost formy nad treścią – wszystkie trzy wzory można przecież dość łatwo udowodnić przez indukcję. Dotychczas znaleźliśmy jednak wynik. Pokażemy teraz, że króliki mogą nam pomóc ten wynik znaleźć.

Mieliśmy już sumę liczb naturalnych $k \in \{1, \dots, n\}$, mieliśmy sumę potęg p^k , w końcu mieliśmy sumę współczynników $\binom{n}{k}$. A co będzie, jak połączymy te wszystkie sumy w jedno wyrażenie?

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot k = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot 0 + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot 1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot n$$

Czy umiemy powiedzieć, jaki będzie wynik? Hmm... jedno jest pewne – będziemy potrzebowali dłuższej historii.

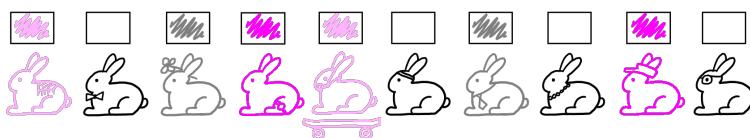
Nie ma się jednak czego bać. Mówiliśmy już przecież, że $\binom{n}{k}$ to po prostu liczba wyborów k królików do pasztetu. Wyrażenie p^k to liczba sposobów, na jakie możemy te k wybranych królików pomalować p kolorami. Z kolei k to wybór jednego z nich, który dostanie deskorolkę. Liczymy zatem wszystkie kombinacje wyborów królików, ich kolorowań oraz opcji wręczenia jednej deskorolki.

Tak jak w poprzednich przykładach, spróbujmy obliczyć naszą sumę w inny sposób. Zamiast najpierw wybierać i malować króliki, zaczniemy od wręczenia deskorolki. Mamy n królików, więc opcji wręczenia też jest n . Królik z deskorolką będzie w pasztecie – to już (niestety dla niego) ustaliliśmy. Nie wiemy natomiast, jakiego będzie koloru: tu dostajemy p możliwości. Wybór królika na deskorolce i jego koloru to zatem $n \cdot p$ opcji.

Weźmy się teraz za pozostałe króliki: musimy wybrać ich część i pomalować je na p kolorów. Spróbujmy znowu oddać tę decyzję w ręce królików. Podchodzimy do pierwszego królika i pytamy: „Panie króliku, czy chce pan iść do pasztetu?” Jeżeli powie, że tak, musimy go jeszcze pomalować. – „Panie króliku, którą farbę pan wybiera?” Wybrał. Zapisujemy decyzję: wybrany kolor lub jego brak, jeżeli królik nie chciał iść do pasztetu, i przechodzimy do kolejnego królika. Po wypyтaniu wszystkich królików mamy listę, na której przy każdym z $n - 1$ królików jest zapisana jedna z $p + 1$ opcji. Łatwo zauważyć, że nasza lista jednoznacznie wyznacza, które króliki weźmiemy do pasztetu oraz jakie będą miały kolory. Wszystkie możliwe kombinacje uda nam się uzyskać, a zmiana na liście oznacza zmianę kombinacji. A zatem wszystkich możliwych kombinacji dla królików bez deskorolek jest $(p + 1)^{n-1}$.

Łącząc obie części, dostajemy wynik:

$$\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot 0 + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot 1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot n = n \cdot p \cdot (p + 1)^{n-1}.$$



$n \cdot p \cdot (p + 1)^{n-1}$ = liczba możliwych kombinacji wyborów grupy spośród n królików do pasztetu, ich kolorowań p kolorami oraz opcji wręczenia jednej deskorolki.

Nasza suma wyglądała groźnie, ale z królikami przy boku znowu udało nam się ją miło i przyjemnie wyznaczyć.

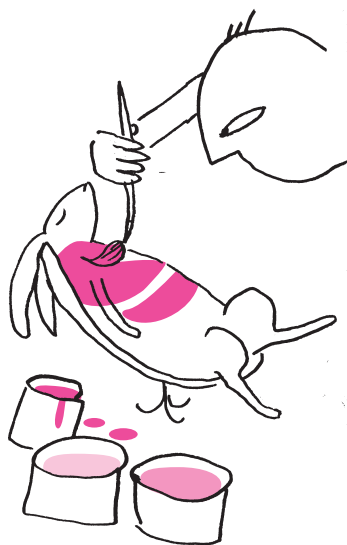
Jeżeli Czytelnikowi spodobały się powyższe interpretacje kombinatoryczne, może spróbować samodzielnie udowodnić w podobny sposób poniższe wzory:

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,
- $\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$,
- $\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$,
- $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$,
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$,
- $\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{l} = 3^n$.

Na koniec warto dodać, że nie musimy koniecznie używać królików. Równie dobrze sprawdzają się koty, ryjówki albo dziki. W interpretacjach kombinatorycznych ogranicza nas tylko nasza wyobraźnia.

Bardziej formalnie nasze wyrażenie to liczba trójek (X, f, x) , gdzie:

- $X \subseteq \{1, \dots, n\}$,
- $f: X \rightarrow \{1, \dots, p\}$ oraz
- $x \in X$.



Żarówka modelem efektu cieplarnianego?

Paweł TURKOWSKI*

* Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Oświetlona przez Słońce czarna, doskonale przewodząca ciepło kula lub żarzące się wolframowe włókno żarówki zamknięte w pozbawionej powietrza szklanej bańce mogą być wykorzystane w celach dydaktycznych jako najprostsze modele opisujące temperaturę Ziemi.

Modele w fizyce

Modele stanowią niezastąpioną pomoc w nauczaniu przedmiotów ścisłych. Modelowanie to także metoda badań stosowana między innymi w fizyce, polegająca na zastąpieniu badanego przedmiotu przez inny podobny do niego „przedmiot”, który jest prostszy i łatwiej dostępny w badaniu. Nazywając model „przedmiotem”, ujęliśmy to słowo w cudzysłów, ponieważ realizacja modelu może przybierać różne, niekoniecznie materialne, formy.

Wyróżnimy tu trzy sposoby zastąpienia skomplikowanego obiektu przedmiotem do niego podobnym. Pierwszym z nich jest użycie miniatURY lub powiększenia badanego obiektu. Dla przykładu, oświetlony z jednej strony globus może służyć za pomoc dydaktyczną wyjaśniającą istnienie pór roku jako następstwo ruchu obiegowego Ziemi wokół Słońca i nachylenia ziemskiej osi do płaszczyzny orbity wokółsłonecznej. Model nazwiemy mechaniczno-geometrycznym, gdy badany obiekt wyobrażamy sobie jako układ punktów, kul, ośrodków lub wyobrażenie to przedstawiamy w formie rysunku. Modele tego typu pozwalają w prosty sposób wywnioskować szereg zjawisk jakościowo. Jeśli posługujemy się układem równań, opisującym właściwości badanego obiektu, to taki model nazwiemy matematycznym. Układy równań występujących w modelach matematycznych są niekiedy skomplikowane i rozwiązanie ich jest możliwe jedynie metodami numerycznymi. Dobrym przykładem skuteczności takich metod są krótkoterminowe, dwu- lub trzydniowe, numeryczne prognozy pogody.

Budowanie modelu matematycznego tak, by spełniał swoją funkcję, a zarazem był stosunkowo prosty, jest rezultatem pewnego kompromisu. Czasem trzeba posłużyć się modelem bardzo uproszczonym, by dojść do zrozumienia wyników pomiarów i w pewien sposób je uporządkować.

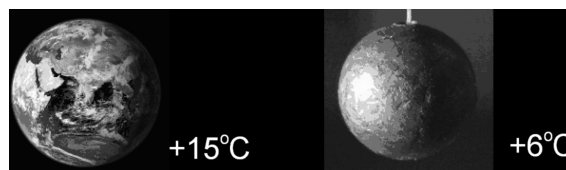
Najprostszy matematyczny model temperatury globalnej Ziemi

Przypomnijmy dwa fakty doświadczalne. Średnia z pomiarów temperatury powietrza i powierzchni oceanów, wykonywanych w wielu punktach Ziemi leżących we wszystkich strefach klimatycznych na półkuli dziennej i nocnej, wynosi około $+15^{\circ}\text{C}$. Ponadto w XX wieku ta średnia temperatura wzrosła o około $\frac{3}{4}$ stopnia. Średnią temperaturę Ziemi w powyższym sensie nazwiemy temperaturą globalną, a obserwowany od początku XX wieku systematyczny jej wzrost to globalne ocieplenie. Pojawiają się w związku z tym przynajmniej dwa pytania: dlaczego temperatura

globalna ma taką, a nie inną wartość oraz jak ta temperatura będzie się zmieniać w ciągu kolejnych stu lat? Odpowiedzi można szukać, analizując odpowiednie modele. Zastanówmy się nad pierwszym, prostszym pytaniem dotyczącym wyjaśnienia aktualnej wartości średniej temperatury Ziemi.

Rozpatrywany tu model był przedmiotem jednego z zadań etapu wojewódzkiego XXV Olimpiady Fizycznej.

Opiszemy matematyczny model temperatury globalnej, oparty na następujących założeniach: Ziemia otrzymuje energię jedynie od Słońca, Ziemia jest ciałem doskonale czarnym (absorbując całkowicie padające nań promieniowanie), doskonale przewodzi ciepło (ma równomierną temperaturę), oddaje energię w postaci promieniowania (w zakresie podczerwieni). Krótko mówiąc, w modelu tym zakładamy, że Ziemia zachowuje się jak oświetlona przez Słońce czarna kula, wykonana z doskonale przewodzącego ciepło materiału (rys. 1).



Rys. 1

Pierwszym krokiem w konstrukcji naszego modelu jest sformułowanie równania bilansu energetycznego, opisującego stan stacjonarny. Dla kuli z naszego modelu w odpowiednio długim czasie t spełnione jest równanie

$$E = Q,$$

gdzie E to energia promieniowania dostarczona kuli przez Słońce w czasie t , natomiast Q to energia wypromieniowana przez kulę w tym czasie. Energia dostarczona kuli przez Słońce w czasie t jest równa iloczynowi: S_1 – pola powierzchni przekroju kuli kołem wielkim, stałej słonecznej L (czyli energii, jaką poza atmosferą ziemską promieniowanie słoneczne przenosi w ciągu jednej sekundy przez jednostkę powierzchni ustawionej prostopadle do kierunku padania promieni słonecznych, w średniej odległości Ziemia–Słońce) oraz czasu t :

$$E = S_1 L t.$$

Energia wypromieniowana przez kulę w czasie t :

$$Q = S_2 \sigma T^4 t,$$

gdzie S_2 – pole powierzchni kuli, σ – uniwersalna stała Stefana–Boltzmanna, T – temperatura kuli w skali bezwzględnej. Występujący tu iloczyn σT^4 to ilość wypromieniowanej energii przez 1 m^2 powierzchni ciała

doskonale czarnego w ciągu jednej sekundy (prawo Stefana–Boltzmana). Równanie bilansu energetycznego przyjmuje zatem postać

$$S_1 L t = S_2 \sigma T^4 t.$$

Po prostych przekształceniach i podstawieniu wartości stałej słonecznej L oraz stałej Stefana–Boltzmana σ otrzymujemy

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1366 \text{ W/m}^2}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4}} = 279 \text{ K} = 6^\circ \text{C}.$$

Nasz wynik odbiega o 9 stopni od zmierzonej wartości temperatury globalnej Ziemi. Czy jest to duża, czy mała różnica? Dla wyrobienia sobie zdania na ten temat porównajmy globalną temperaturę zmierzoną na powierzchni planety Wenus ($+464^\circ\text{C}$) z temperaturą obliczoną na bazie naszego modelu ($T = +54^\circ\text{C}$ dla $L = 2,6 \text{ kW/m}^2$). Z kolei dla powierzchni Marsa średnia zmierzona temperatura -63°C jest niższa od temperatury obliczonej modelowo ($T = -47^\circ\text{C}$ dla średniej wartości stałej słonecznej, dla Marsa równej $0,59 \text{ kW/m}^2$).

Można powiedzieć, że jak na model, który uprościliśmy do granic możliwości, dla przypadku kuli ziemskiej otrzymaliśmy zaskakująco dobry wynik. Pominięte w modelu liczne i skomplikowane efekty szczęśliwie skompensowały się nawzajem. Natomiast nasz model zastosowany do innych planet skalistych pracuje gorzej. Szczególnie w przypadku Wenus otoczonej gęstą atmosferą, złożoną prawie wyłącznie z CO_2 , właściwie zupełnie zawodzi.

Nasz skrajnie prosty model pozwala jednak rozstrzygnąć pewną wątpliwość: czy ilość produkowanej aktualnie przez ludzkość energii jest w stanie zmodyfikować w istotny sposób wartość obliczonej przez nas temperatury globalnej? Przyjmijmy, że ilość energii uzyskanej przez spalanie węgla, paliw płynnych i gazowych oraz działalność elektrowni jądrowych na całym świecie nie przekracza $5,7 \cdot 10^{20} \text{ J}$ rocznie. Stanowi to około 0,0001 część energii uzyskanej przez Ziemię w naszym modelu ze strony Słońca. Jak łatwo sprawdzić, prowadzi to do podwyższenia wyniku obliczonej temperatury globalnej Ziemi zaledwie o około 0,007 K. Zatem to nie ciepło wydzielane podczas spalania paliw jest odpowiedzialne za rozbieżność pomiędzy wynikiem pomiarów temperatury globalnej a temperaturą przewidywaną przez model. Bardziej realistyczny model temperatury globalnej musi uwzględnić przynajmniej jeszcze jeden element układanki – atmosferę planety.

Włókno żarówki otoczone lustrzaną powierzchnią jako model Ziemi z atmosferą

Traktując Ziemię jako doskonale czarną kulę, nie musieliśmy zaprzętać sobie głowy ani tym, z czego jest zbudowana, ani jakie mechanizmy transportu energii, oprócz promieniowania, odpowiadają za jej temperaturę. Taki model jest bardzo przejrzysty. Na temperaturę kuli nie wpływa nawet jej rozmiar. Wystarczy znajomość wartości stałej słonecznej oraz

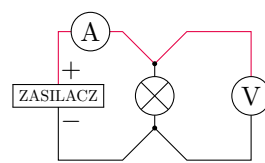
znajomość prawa Stefana–Boltzmana. Jeżeli chcemy uwzględnić wpływ atmosfery na temperaturę globalną, to musimy brać pod uwagę zarówno jej specyficzny skład, jak i różne mechanizmy transportu energii. W celach dydaktycznych można użyć prostego modelu mechaniczno-geometrycznego.

Takie matematyczne modele budowane dla celów dydaktycznych opisano w wielu źródłach i warto je prześledzić. Pomijając katastroficzne przypadki atmosfery zapyłonej, np. w wyniku wojny nuklearnej, modele tego typu przewidują temperaturę Ziemi wyższą niż w przypadku Ziemi pozbawionej atmosfery i zbliżoną do temperatury obserwowanej. Jak zrozumieć, skąd bierze się ten wzrost temperatury? Autorzy, nie ukrywając, że problem w szczegółach jest bardzo złożony, dają nam niekiedy propozycje uproszczonych odpowiedzi na takie pytanie: powierzchnia Ziemi otrzymuje energię nie tylko bezpośrednio od Słońca, ale także dodatkową porcję od atmosfery, która wcześniej różnymi sposobami przechwyciła energię słoneczną.

Wyobraźmy sobie atmosferę jako rodzaj filtra o sferycznym kształcie, który dobrze przepuszcza światło słoneczne docierające z zewnątrz, ale promieniowanie podczerwone Ziemi silnie pochłania, by następnie wypromieniować uzyskaną energię w przestrzeń kosmiczną, częściowo zwracając ją ku Ziemi. Otrzymamy w ten sposób jakościowe wyjaśnienie efektu wzrostu temperatury powierzchni Ziemi otulonej atmosferą. Do doświadczalnego przebadania wpływu ograniczenia emisji energii na temperaturę promieniującego ciała proponujemy posłużyć się żarówką z włóknem wolframowym oraz kawałkiem folii aluminiowej. Na pierwszy rzut oka żarząca się żarówka nie przypomina zupełnie kuli ziemskiej. A jednak temperatura wolframowego włókna jest taka, a nie inna, właśnie dzięki bilansowaniu się energii dostarczonej z zasilacza z energią przez nie wypromieniowaną, podobnie jak w rozpatrywanym powyżej modelu kuli oświetlonej przez Słońce. Nasz model ma tę zaletę, że w prosty sposób umożliwi badanie wpływu obecności atmosfery, którą symulować będziemy, używając osłon z folii aluminiowej.

Za pomocą żarówek ilustrować można prawa rządzące przepływem prądu elektrycznego w obwodach prądu stałego – zarówno w formie zadań, jak i pokazów. Żarówka jest też zasadniczym elementem szkolnego pirometru optycznego. W naszym modelu Ziemi otoczonej atmosferą połączymy te dwa zastosowania, budując odpowiedni obwód elektryczny z żarówką i kontrolując temperaturę jej włókna, podobnie jak w pirometrze. Elementy układu pomiarowego to: żarówka próżniowa z włóknem wolframowym niskonapięciowa (np. 13,5 V/0,18 A), oprawka żarówki z przyłutowanymi do jej zacisków dwoma parami przewodów, zasilacz stabilizowany prądu stałego o regulowanym od zera napięciu, woltomierz i miliamperomierz cyfrowy, folia aluminiowa oraz termometr pokojowy.

Centralną część układu pomiarowego (rys. 2) stanowi żarówka z włóknem wolframowym, oznaczona na schemacie symbolem \otimes . Do zacisków oprawki żarówki dołączono



Rys. 2

dwie pary przewodów. Jedna para przewodów wraz z woltomierzem tworzy obwód pomiaru napięcia. Natomiast po lewej stronie schematu widzimy obwód zasilania żarówki, który tworzą zasilacz i szeregowo dołączony miliamperomierz.

Wstępne pomiary polegają na zasilaniu żarówki napięciami stałymi o dwu różnych wartościach, obliczeniu oporów włókna wolframowego oraz oszacowaniu uzyskanej temperatury przez żarzące się włókno. Następnie błyszczącą folią aluminiową otulamy bańkę świecącej się żarówki i obserwujemy niewielki wzrost oporu włókna, świadczący o kilkustopniowym wzroście jego temperatury. Oświetlenie włókna czerwonym wskaźnikiem laserowym daje podobny efekt. Uzyskany wynik interpretujemy jako wzrost temperatury równowagowej włókna zasilanego stałym napięciem, po ograniczeniu radiacyjnych strat energii. Przez analogię wyjaśniamy, że w przypadku Ziemi podobną do folii rolę pełni atmosfera ziemiska, ponieważ

jej przepuszczalność dla fal elektromagnetycznych promieniowanych przez Ziemię w zakresie średniej podczerwieni jest niewielka. W pełnej wersji artykułu dostępnej na stronie deltami.edu.pl przedstawiamy bardziej szczegółowo przebieg pomiarów i przykładowe wyniki.

Na koniec uwaga terminologiczna. Wpływ atmosfery ziemskiej na temperaturę globalną poprzez ograniczenie strat radiacyjnych nazywa się efektem cieplarnianym. Nazwa ta jest nieco myląca, ponieważ przyczyny podwyższania się temperatury w szklarni („cieplarni”) różnią się od czynników wywołujących efekt cieplarniany w atmosferze. W tym pierwszym przypadku mamy do czynienia głównie z ograniczeniem ucieczki powietrza o wyższej temperaturze na drodze konwekcji, w drugim natomiast z ograniczeniem wypromieniowania energii z powierzchni Ziemi wprost w przestrzeń kosmiczną. Nasz model z żarówką osłoniętą folią aluminiową jest bliższy atmosferycznemu efektowi cieplarnianemu.



Przygotował Dominik BUREK



Zadania

M 1681. Wierzchołki trójkąta równoramiennego oraz środek opisanego na nim okręgu leżą na czterech różnych bokach kwadratu. Wyznacz kąty tego trójkąta. Rozwiązanie na str. 15

M 1682. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(xy) = f(x)y^2 + f(y).$$

Rozwiązanie na str. 9

M 1683. Dla liczb wymiernych x, y, z wiemy, że $x^2 + y^2 + z$, $x^2 + y + z^2$ oraz $x + y^2 + z^2$ są całkowite. Udowodnij, że $2x$ jest liczbą całkowitą.

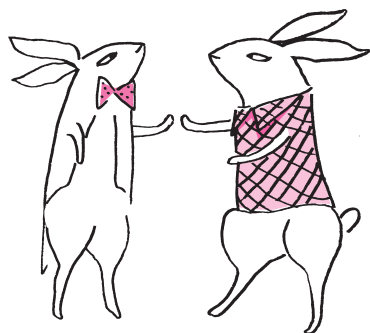
Rozwiązanie na str. 16

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1029. Większość meteorytów ulega całkowitemu spaleni w atmosferze. Część z nich zderza się jednak z powierzchnią Ziemi, powodując powstanie krateru. Oszacuj, jak średnica D powstającego krateru zależy od energii E uderzającego ciała, jeśli dominującym procesem podczas tworzenia krateru jest kruszenie i deformacja podłoża. Załóż, że kruszenie i trwałe odkształcenia podłoża następują, gdy poddane jest ono ciśnieniu przekraczającemu wartość Y . Rozwiązanie na str. 18

F 1030. Spadając bez spadochronu w atmosferze ziemskiej, człowiek osiąga graniczną prędkość $v_z \approx 200$ km/h. Oszacuj, ile wynosiłaby graniczna prędkość v_w przy podobnym skoku na Wenus. Przy powierzchni Wenus gęstość jej atmosfery wynosi $\rho_w = 67$ kg/m³, przyspieszenie grawitacyjne $g_w = 8,87$ m/s². Na Ziemi odpowiednie wartości wynoszą $\rho_z = 1,2$ kg/m³ i $g = 9,81$ m/s².

Wskazówka. Siła oporu działająca na ciało poruszające się z prędkością v w gazie o gęstości ρ wynosi $F_{op} = \frac{1}{2}c\rho v^2 S$, gdzie S jest polem powierzchni ciała prostopadłej do prędkości, a c współczynnikiem zależnym od kształtu ciała. Rozwiązanie na str. 19



Przekazać horyzontalnie

Zjawisko poziomego (horyzontalnego) przekazywania genów, w czasowej skali odkryć genetyki molekularnej, znane jest od dawna. Możliwość przekazywania informacji genetycznej ze środowiska do mikroorganizmu udokumentowano w latach 30. XX wieku i potwierdzono kilkanaście lat później w klasycznych doświadczeniach Avery'ego i współautorów. Nazywamy je obecnie transformacją bakteryjną. Avery wykazał, że bakterie mogą uzyskać dziedzicznie cechy niesione przez cząsteczki DNA znajdujące się w środowisku hodowli bakterii, co uznaje się za pierwszy eksperymentalny dowód na biologiczną funkcję DNA. Z innych obserwacji wynikało, że DNA może być przekazywany z bakterii do bakterii w aktywnym procesie koniugacji, a także że bakteriofag, infekując komórkę bakteryjną, może wbudować we własny genom odcinek DNA swojego gospodarza. Kiedy następnie ten sam wirus zakazi inną komórkę bakterii, może przekazać jej ten fragment DNA (transdukcja). Więcej, oznaczenia sekwencji ludzkiego genomu wykazują istnienie w nim kilkunastu procent sekwencji niewątpliwie „pozostawionych” niegdyś przez zakażające wirusy. Pionierskie obserwacje z lat 30. XX wieku wskazały także na istnienie w roślinach (kukurydza) „ruchomych” elementów genetycznych (fragmentów DNA), a procesy takiego przenoszenia wewnątrz genomu potwierdzono dużo później także dla mikroorganizmów. Wbrew temu, co myślimy o stałości i niskiej zmienności materiału genetycznego, DNA był (jest) aktywnym wędrowcem w procesach życiowych.

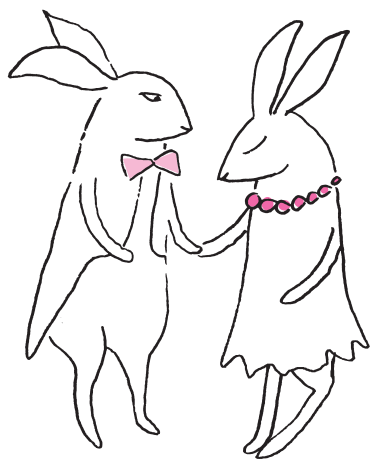
Złożoną historię „wędrówek” materiału genetycznego po różnych gatunkach (im bliższe sobie gatunki, tym bardziej prawdopodobne to zjawisko) obejmujemy wspólną nazwą horyzontalnego przeniesienia genów (HGT, *Horizontal Gene Transfer*), różniącego się od pionowego przekazywania genów od rodziców do potomstwa. Dane takie zaczęły narastać lawinowo od momentu pojawienia się instrumentów i metod szybkiego i taniego sekwencjonowania DNA.

Z porównania sekwencji wynikały hipotezy kolejnych etapów ewolucji gatunków i budowanie drzew i drzewek ewolucyjnych; w świecie mikrobów takie ewolucyjne wnioski utrudnia fakt częstego przenoszenia genów między gatunkami. Genetycy zrozumieli też od razu, że HGT mógł być źródłem utrwalania cech pożytecznych i szkodliwych (najprostszy przykład: nabywanie oporności na antybiotyki przez bakterie chorobotwórcze, dla nich pożyteczne, szkodliwe dla chorych). Wielokomórkowe organizmy, w których nowe cechy nabywa ich mikrobiom, uzyskują możliwość przyspieszonego reagowania na zmiany otoczenia.

Przenoszenie genów stało się podstawą laboratoryjnych manipulacji genowych obejmowanych wspólnym terminem inżynierii genetycznej. Ulepszanie tej techniki sprowadza się do coraz dokładniejszego kontrolowania jej przebiegu i efektu końcowego, tak aby każdy zabieg był ściśle opisywalny i powtarzalny.

W majowym numerze (2021 r.) czasopisma „Cell” ukazał się artykuł o przeniesieniu genu z rośliny na zwierzę, zapewne przez pośredniczącego wirusa. Gen, o którym mowa, znaleziony został w mączlikach (małe owady, długości 0,2 cm), żerujących na spodniej stronie liści różnych gatunków roślin, m.in. pomidorów, papryki, kapusty, również wielu roślin ozdobnych. Współpracujących badaczy z Chin i Szwajcarii zainteresował fakt odporności mączlika na roślinne fenolowe glikozydy, toksyczne dla owadów. Oznaczając genom owada, zauważyli w nim nowy, nieopisany dotychczas gen BtPMT1, niespotykany u innych owadów, neutralizujący roślinne toksyny. Podobny gen znaleziono w bazach danych jedynie w niektórych roślinach. Bardzo prawdopodobną jest zatem teza, że przeniósł go z rośliny na owada wirus, a moment tego transferu wyliczono na 35 mln lat temu (!). Widząc w zjawisku możliwość ochrony roślin przed szkodnikami, genetycy poszli dalej. Skonstruowali pomidora zdolnego do blokowania działania genu BtPMT1. Żerujące na tym pomidorze mączliki ginęły...

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



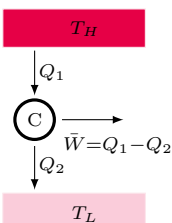
Apologia termodynamiki

Piotr CHANKOWSKI*, Paweł JAKUBCZYK*

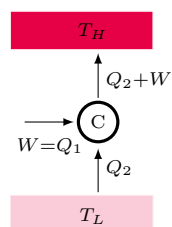
Równoważne sformułowaniu

W. T. Kelvina jest sformułowanie R. Clausiusa: Nie można zbudować cyklicznie pracującego urządzenia, którego jedynym skutkiem działania byłoby przekazanie ciepła ze zbiornika zimniejszego do cieplejszego. Druga zasada ma też inne, bardziej abstrakcyjne sformułowania, ale wszystkie one idą w kierunku przekształcenia termodynamiki z teorii fenomenologicznej, tj. opartej na uogólnieniu bezpośrednich obserwacji, w teorię dedukcyjną, tj. opartą na abstrakcyjnych postulatach.

Druga zasada mówi, że nie można całego ciepła pobranego z jednego zbiornika przekształcić w pracę. Najprostsze możliwe urządzenie przekształcające ciepło w pracę mechaniczną musi więc składać się z przynajmniej dwóch zbiorników ciepła. (Może też być ich i więcej). Drugi jest potrzebny do tego, by silnik mógł doń przekazywać „zmarnowane” ciepło, tj. to, którego w myśl drugiej zasady nie zużyje na pracę. Współczynnik η , czyli sprawność silnika, mówi, jak dużo ciepła dany silnik „marnuje”.



Silnik Carnota działa odwracalnie, tzn. może też, działając w odwrotną stronę, przekazywać ciepło ze zbiornika o niższej temperaturze T_L do zbiornika cieplejszego, o temperaturze $T_H > T_L$, kosztem pracy $W = -\bar{W} > 0$ dostarczanej mu z zewnątrz.



Taki sposób przekazywania ciepła jest już zgodny z drugą zasadą w sformułowaniu Clausiusa.

Do wniosku wyrażonego wzorem (1) doszedł francuski inżynier Nicolas Léonard Sadi Carnot (syn Lazara Carnota, ministra wojny z czasów Wielkiej Rewolucji Francuskiej – pamiętamy: Danton, Robespierre, jakobini, trybunały rewolucyjne i tym podobne przyjemne okoliczności...) w roku 1824, czyli na długo przed sformulowaniem drugiej zasady przez Kelvina i Clausiusa (1851).

Naturalnie wielu było też takich, którzy w sposób świadomy, wykorzystując różne znane sobie (ale nie do końca...) procesy fizyczne, usiłowali zaprojektować urządzenie mające wyższą sprawność niż silnik Carnota. Celem takich prób było zazwyczaj stworzenie tzw. *perpetuum mobile* drugiego rodzaju, czyli silnika o sprawności $\eta = 1$. To oczywiście nie mogło się udać...

Termodynamika kojarzy się niektórym wyłącznie z zadaniami polegającymi na obliczaniu końcowej temperatury kilku różnych substancji umieszczonych w jednym kalorymtrze. Możemy świetnie zrozumieć brak entuzjazmu uczniów zmuszanych programem liceum do robienia takich obliczeń, bo rzeczywiście nie są to interesujące problemy. Nie stanowią one jednak istoty termodynamiki! Ilustrują w gruncie rzeczy tylko jedną z zaledwie kilku podstawowych zasad stanowiących jej fundament, a mianowicie to, że każdy makroskopowy (tj. składający się z wielu oddziałujących wzajemnie elementów – atomów, cząsteczek itp.) układ fizyczny osiąga po pewnym (zazwyczaj dość krótkim) czasie stan tzw. równowagi termodynamicznej. Drugim fundamentem termodynamiki jest zasada zachowania energii. Rozróżnia ona tylko jej postaci (energia ruchu cząsteczek, energia momentów magnetycznych w zewnętrznym polu magnetycznym) i sposoby przekazywania (w postaci pracy lub ciepła), bo jednym z „kanonicznych” zagadnień fizyki (z których w ogóle rozwinęła się termodynamika) było przekształcanie energii cieplnej (zmagazynowanej np. w kotle z wrzącą parą wodną) w użyteczną pracę mechaniczną (np. napędzanie lokomotywy). Najważniejszy jest trzeci fundament termodynamiki, zwany jej drugą zasadą. Można ją sformułować bardzo prosto słowami Lorda Kelvina: niemożliwe jest stworzenie działającego cyklicznie urządzenia (maszyny cieplnej), które pobierając ciepło (z jakiegoś rezerwuaru), zamieniałoby je całkowicie w użyteczną pracę. To, co czyni termodynamikę tak fascynującą, to ogólność (interesującej na pierwszy rzut oka tylko inżynierów!) sformułowanej zasady. Z drugiej zasady wynika jednak istnienie tajemniczej wielkości fizycznej zwanej entropią oraz prawo niemalenia tejże we wszystkich procesach fizycznych, chemicznych, biologicznych... Z kolei istnienie entropii pozwala wykorzystać drugą zasadę w sposób matematyczny, co prowadzi do różnych ilościowych i często zupełnie nieoczekiwanych związków występujących między zdawałoby się różnymi, bezpośrednio mierzalnymi wielkościami fizycznymi. Ogólność i siła drugiej zasady bierze się z tego, iż w zwarty sposób ujmuje ona zasadnicze ograniczenia, jakie na procesy fizyczne nakłada funkcjonowanie przyrody na poziomie mikroskopowym. Wnioski z niej wynikające są jednak czasem nieoczywiste i zaskakujące nawet dla wytrawnych nauczycieli fizyki! Jeden z takich wniosków, dotyczący bardzo prostej sytuacji fizycznej, a ilustrujący w znakomity sposób, jak mikroskopowa struktura materii wpływa na zwykłe procesy, jest tak pouczający, że warto go tu przedstawić.

Jednym z elementarnych wniosków, jakie w zasadzie bez użycia skomplikowanej matematyki i wprowadzania pojęcia entropii można wywieść z drugiej zasady w sformułowaniu Kelvina, jest to, że ze wszystkich silników cieplnych pracujących pomiędzy dwoma zbiornikami ciepła o ustalonych temperaturach: wyższej T_H i niższej T_L , największą sprawnością, tj. stosunkiem $\eta = \bar{W}/Q$ wykonanej pracy mechanicznej \bar{W} do pobranego (w całym cyklu) ciepła Q , odznacza się silnik Carnota. Jego sprawność η_C zależy tylko od stosunku T_L/T_H temperatur bezwzględnych wykorzystywanych w cyklu zbiorników ciepła:

$$(1) \quad \eta_C = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

W szczególności, sprawność silnika musi maleć do zera, jeśli $\delta T = T_H - T_L \rightarrow 0$ (co jest po prostu wyrazem drugiej zasady w ujęciu Kelvina). Wniosek (1), zwany twierdzeniem Carnota, jest absolutnie niepodważalny i całkowicie równoważny drugiej zasadzie. Wszystkie konsekwencje drugiej zasady, w tym istnienie entropii i prawo jej wzrostu, można wyprowadzić, rozpatrując elementarne silniczki cieplne i przyjmując, że ich sprawność nie może przewyższyć sprawności odwracalnego silnika Carnota. Niemniej, niekiedy można się zapędzić i o tym zapomnieć...

Na pierwszej Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej w roku 1967 (odbywającej się w Warszawie) uczestnicy otrzymali do rozstrzygnięcia następujący problem.



Rozwiązanie zadania M 1682.

Zamieniając miejscami x i y , dostajemy

$$f(xy) = f(y)x^2 + f(x).$$

Porównując prawe strony naszych równości, mamy

$$f(y)x^2 + f(x) = f(x)y^2 + f(y)$$

lub równoważnie

$$(\dagger) \quad f(x)(y^2 - 1) = f(y)(x^2 - 1).$$

Wobec tego

$$\frac{f(x)}{x^2 - 1} = \frac{f(y)}{y^2 - 1}$$

dla dowolnych $x, y \neq \pm 1$, skąd istnieje stała C , dla której $f(x) = C(x^2 - 1)$ dla każdego $x \neq \pm 1$.

Jednakże wzór ten zachodzi również dla $x = \pm 1$, gdyż podstawiając $x := \pm 1$ w równaniu (\dagger) , dostajemy równość

$$f(\pm 1)(y^2 - 1) = f(y)((\pm 1)^2 - 1) = 0,$$

zachodzącą dla dowolnego $y \neq \pm 1$, skąd oczywiście wynika, że $f(\pm 1) = 0$.

Podstawiając wzór naszej funkcji do wyjściowego równania, dostajemy:

$$Cx^2y^2 - C = Cx^2y^2 - Cx^2 + Cy^2 - C,$$

więc funkcja $f(x) = C(x^2 - 1)$ spełnia warunki zadania dla dowolnej stałej C .

Matematycznie współczynnik liniowej rozszerzalności jest zdefiniowany jako pochodna

$$\alpha = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial T} \right)_{p,g}.$$

Można go wyznaczyć doświadczalnie. Można go też obliczyć teoretycznie, jeśli znany jest związek promienia R z temperaturą T . Należy też przyjąć (tak jak to wynika z dalszych rozważań), że może on zależeć od warunków, w jakich znajduje się kula: np. od ciśnienia p (które w rozpatrywanym problemie jest ustalone, i nie ma znaczenia dla rozwiązania) i wartości g pola ciężkości (przyjmujemy tu, tak jak wyjaśnione to jest w tekście, że rozpatrujemy zawsze kulę przymocowaną do stołu i zmieniamy znak g). Związek taki nazywa się równaniem stanu (układu fizycznego, jakim tu jest kula).

Jednak w roku 2015 (niemal pół wieku po wspomnianej Olimpiadzie!) zauważono [*,], że gdyby przytoczone wyżej rozwiązanie standardowe było poprawne, to możliwe by było skonstruowanie silnika o wyższej sprawności niż silnik Carnota (a wiadomo, że francuska technika jest zawsze najlepsza!). Cykl dający taki silnik składałby się z następujących etapów. (1) Na stole o temperaturze T_L leży żelazna kula, taka jak rozpatrywane wyżej, także o temperaturze T_L . (2) Kulę tę izolujemy od stołu i doprowadzamy do kontaktu termicznego z dużym zbiornikiem ciepła (grzejnikiem) o temperaturze $T_H = T_L + \delta T > T_L$. Zgodnie

Dane są dwie identyczne (jednorodne) kule, np. żelazne. Obie mają takie same temperatury. Jedna z nich, kula A , spoczywa (w ziemskim polu grawitacyjnym) na poziomej powierzchni, np. na stole, druga zaś, kula B , zwisa z sufitu na sznurze. Oba kulom dostarczona zostaje ta sama ilość ciepła δQ . Która z nich będzie miała wyższą temperaturę? Wszelkie straty ciepła związane z podłożem (kula A) czy sznurkiem (kula B) i powietrzem należy pominąć (doświadczenie można przeprowadzić w próżni).

Oczekiwane przez autorów rozwiązanie (nazwijmy je standardowym) zadania miało być proste i opierać się na wzięciu pod uwagę rozszerzalności cieplnej ciał: wskutek występowania tego zjawiska środek ciężkości kuli A (leżącej na stole) po jej podgrzaniu powinien się podnieść. Tym samym część energii dostarczonej w formie ciepła kuli A zostałaaby zużyta na zwiększenie jej energii potencjalnej i tylko pozostała część spowodowałaby wzrost temperatury. Z tego samego powodu przekazanie ciepła kuli B (zwisającej) powinno spowodować obniżenie jej środka ciężkości. Utracona dzięki temu energia potencjalna zamieniona zostałaby na dodatkowe ciepło, które także zostałoby zużyte na zwiększenie energii wewnętrznej kuli. Oczekiwana odpowiedź miała więc być taka, że to kula B , wisząca na sznurze, będzie miała na końcu temperaturę wyższą niż kula A leżąca na stole.

Zanim za autorami analizy [*] pokażemy, że rozwiązanie standardowe jest sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki, warto przeanalizować je nieco bardziej ilościowo. Przyjmijmy, że znamy pojemność cieplną C_0 kul (i tak jak się to czyni w rozwiązaniu standardowym, że nie zmienia się ona wskutek znajdowania się kul w polu ciężkości), ich masę M , promień R oraz współczynnik ich (liniowej) rozszerzalności α zdefiniowany w ten sposób, że zmiana promienia kuli towarzysząca zmianie jej temperatury o δT jest równa

$$(2) \quad \delta R = \alpha R \delta T.$$

Bilans energii w przypadku kuli A jest następujący:

$$(3) \quad \delta Q = C_0 \delta T_A + Mg \delta R_A = C_0 \delta T_A + Mg \alpha R \delta T_A = (C_0 + Mg \alpha R) \delta T_A.$$

Analogiczny bilans energii w przypadku kuli B ma postać

$$(4) \quad \delta Q = (C_0 - Mg \alpha R) \delta T_B.$$

Ponieważ $\alpha > 0$, z bilansów tych wynika, że $\delta T_A < \delta T_B$. Dobrze jest jednak spojrzeć na problem nieco inaczej, co okaże się dalej bardzo wygodne. W tym celu zauważmy, że kulę wiszącą na sznurze można traktować tak jak leżącą na stole (i doń przytwierdzoną), jeśli przyjmie się, że znajduje się ona w polu ciężkości skierowanym do góry. Sytuacje obu kul można więc odróżnić tylko znakiem stałej g : kula A znajduje się w polu ciężkości $g > 0$, a kula B w polu ciężkości $g < 0$. Pozwala to zdefiniować wzorem

$$(5) \quad C_g(g) = C_0 + MgR\alpha$$

efektywną pojemność cieplną zależną od wartości g i zapisać wzory (3) i (4) w zwarty sposób jako

$$(6) \quad \delta T = \delta Q / C_g(g).$$

Ponieważ według rozwiązania standardowego efektywna pojemność cieplna C_g kuli B jest mniejsza, bo $g < 0$, to wzrost jej temperatury $\delta T_B = \delta Q / C_g(-|g|)$ jest większy.

z rozwiązaniem standardowym pobierze ona ciepło $\delta Q = (C_0 + Mg \alpha R) \delta T$ i środek jej masy podniesie się o $\delta R = \alpha R \delta T$. (3) Następnie, bez zmieniania położenia kuli, podwieszamy ją na sznurze do sufitu i usuwamy spod niej stół. (4) W kolejnym kroku doprowadzamy kulę do kontaktu termicznego ze zbiornikiem ciepła (chłodnicą) o temperaturze T_L (takiej samej jak temperatura stołu). Po oziębieniu się kuli do temperatury T_L i przekazaniu przez nią ciepła do chłodnicy jej promień powróci do swej wyjściowej wartości i tym samym środek kuli podniesie się jeszcze dodatkowo o δR . W ten sposób zyskałaby ona energię

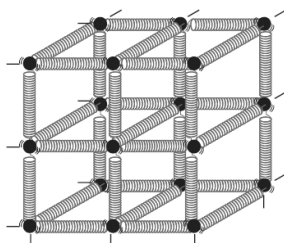
potencjalną równą $2Mg\delta R$, którą można bez kłopotu przekształcić, jako ostatni (5) etap cyklu, w pracę mechaniczną $\delta W = 2Mg\delta R$, spuszczać ją z powrotem na stół. Jaka byłaby zatem sprawność takiego silnika uzyskana w wyniku wykonania przezeń całego cyklu? To proste:

$$(7) \quad \eta = \frac{\delta \bar{W}}{\delta Q} = \frac{2Mg\alpha R}{C_0 + Mg\alpha R}.$$

Sprawność ta jednak nie zależy od różnicy temperatur $\delta T = T_H - T_L$ i tym samym nie maleje do zera, gdy $\delta T \rightarrow 0$! Oznacza to, że przy dostatecznie małej różnicy δT sprawność ta byłaby wyższa niż sprawność silnika Carnota wykorzystującego te same zbiorniki ciepła, czyli że działanie takiego silnika byłoby sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki! Zatem rozwiązanie standardowe problemu olimpijskiego musi być błędne! Gdzie jednak został popełniony w nim błąd?!

Odpowiedź skrywa się w na pozór niewinnym i nawet nie przedyskutowanym wyżej założeniu, że kula stanowiąca „serce” naszego silnika pozostaje kulą, tj. ma symetrię sferyczną niezależnie od wartości (i znaku, gdy traktujemy kulę zawieszoną na sznurze

jak leżącą na stole) siły ciężkości. Rzeczywista kula ulega w takim polu odkształceniu: kula A leżąca na stole nieco się spłaszczy, a kula B wisząca na sznurze (lub przytwierdzona do stołu, ale znajdująca się w polu ujemnym) nieco się wyciągnie. Tym samym środek ciężkości kuli, stanowiącej serce naszego silnika, gdy leży ona na stole, jest nieco niżej niż zakładaliśmy i nieznacznie jeszcze się obniży, gdy podwiesimy ją na sznurze i usuniemy spod niej stół. Te niewielkie efekty muszą być uwzględnione w analizie, zwłaszcza gdy rozpatrujemy granicę $\delta T \rightarrow 0$ i proporcjonalna do δT zmiana położenia środka ciężkości kuli powodowana wymianą ciepła ze zbiornikami jest niewielka: efekty powodowane odkształceniami nie maleją w tej granicy i przy dostatecznie małej różnicy temperatur δT będą większe niż uwzględniana w rozwiązaniu standardowym zmiana położenia środka ciężkości proporcjonalna do δT . To właśnie ten efekt „ratuje” drugą zasadę termodynamiki. Należy jednak odwrócić kota do góry ogonem i powiedzieć, że to ta zasada mówi nam, że efekty odkształcenia spowodują, iż rzeczywisty silnik nie będzie miał sprawności wyższej niż silnik Carnota.



Mikroskopową strukturę kuli można sobie wyobrazić w postaci trójwymiarowej siatki małych kulek (atomów żelaza) połączonych sprężynkami. (W tradycji warszawskiego Wydziału Fizyki taki układ nazywa się *materacem Brojana*.) W polu siły ciężkości położenia równowagi sprężynek, które w rzeczywistości nie spełniają dokładnie prawa Hooke'a, ulegną pewnemu przesunięciu, co spowoduje zmianę składających się na energię wewnętrzną materiału energii kinetycznej drgań kulek i energii potencjalnej sprężynek.

Równanie stanu $f(T, Y, g) = 0$ pełni tu tę samą rolę, jaką znane ze szkoły równanie Clapeyrona $pV - nRT = 0$, czy mniej znane równanie Van der Waalsa $(p + A/V^2)(V - B) - nRT = 0$, pełni w termodynamice gazów. Mocne nadużywanie gazu doskonałego jako „kanonicznego” przykładu w nauczaniu termodynamiki skutkuje na ogół niezrozumieniem, a z pewnością niedocenieniem ogólności tej pięknej teorii. To, co czyni termodynamikę interesującą także z matematycznego punktu widzenia, to jej związek z formami różniczkowymi (w zasadzie w termodynamice wykorzystuje się tylko tzw. jedno-formy) i ich klasyfikacją na różniczki zupełne, formy całkowne, czyli mające czynnik całkujący (taką jest właśnie forma dQ), i pozostałe. Wiąże się z tym twierdzenie C. Caratheodory'ego i jego sformułowanie drugiej zasady termodynamiki. Wspominamy tu o tym, aby zachęcić Czytelnika do samodzielnych studiów.

Wydawać się może, iż bez skorzystania z informacji o wewnętrznej mikroskopowej budowie materiału, z którego wykonana jest kula, nie da się wyjść poza podane wyżej jakościowe wyjaśnienie, dlaczego w rzeczywistym świecie zaproponowany silnik nie będzie lepszy niż silnik Carnota. Co więcej, wydaje się, że analiza taka musiałaby być dość skomplikowana, bo dotyczyłaby zachowania się wielkiej liczby cząsteczek. Jednak termodynamika – i to właśnie stanowi jej siłę i piękno! – pozwala pójść dalej, uwzględniając wpływ budowy materii w sposób, jak to się w fizyce mówi, fenomenologiczny. Przedstawiona poniżej termodynamiczna analiza problemu, która jest adaptacją argumentów wziętych z pracy [*], może wydawać się skomplikowana, ale nie chcemy jej pominąć, bo stanowi doskonałą ilustrację standardowych metod termodynamiki.

Analiza ta wymaga po pierwsze sparametryzowania kształtu kuli (która w polu siły ciężkości kulą w sensie matematycznym być przestaje, ale żeby nie komplikować, będziemy ją nadal nazywać kulą), np. odległością Y jej środka ciężkości od podłoża (według konwencji, w której kula zawsze spoczywa na stole), i, po drugie, przyjęcia, że jej energia wewnętrzna, tradycyjnie w termodynamice oznaczana literą U , zależy nie tylko od temperatury T , ale także od wartości g (i zapewne też od ciśnienia, ale to, jako że jest ustalone, nie odgrywa w analizie roli i będziemy je tu pomijać): $U = U(T, g)$. Z tego, że kształt kuli zależy zarówno od jej temperatury, jak i od wartości pola g wynika, iż musi istnieć jakiś związek postaci

$$(8) \quad f(T, Y, g) = 0,$$

pełniący rolę równania stanu, który mówi, że z trzech zmiennych tylko dwie są niezależne, i pozwala wyrazić np. Y jako funkcję T i g . Siła termodynamiki polega na tym, że nawet bez znajomości konkretnej postaci energii wewnętrznej U jako funkcji T i g oraz dokładnej postaci tego równania stanu, korzystając tylko z ogólnych zasad, możemy rozwiązać olimpijski problem!

Zachowanie energii, czyli pierwsza zasada termodynamiki, ma w przypadku kuli, której dostarczone ciepło δQ , postać

$$(9) \quad \delta Q = \delta U + Mg\delta Y.$$

Wyraża ona po prostu to, że część ciepła δQ przekazanego układowi (kuli), zostaje zużyta na zmianę jego (jej) energii wewnętrznej, a część na wykonanie przez układ pracy (która, gdy $g > 0$, jest dodatnia, bo wykonywana przeciw sile ciężkości, i ujemna, gdy $g < 0$) przy przemieszczaniu się środka ciężkości układu (kuli). W połączeniu z drugą zasadą pozwala ona znaleźć ogólną postać

Tak jak energia wewnętrzna U , również entropia S może być tu traktowana jak funkcja niezależnych zmiennych T i g . Gdy jej oba argumenty ulegną niezależnym zmianom o dT i dg , jej wartość ulega zmianie o

$$\Delta S = S(T + dT, g + dg) - S(T, g).$$

Na potrzeby prezentowanego tu rozumowania wystarczy wiedzieć, że różniczka dS jest po prostu główną, liniową względem zmian dT i dg , częścią zmiany ΔS i można ją wyrazić przez tzw. pochodne cząstkowe funkcji S po jej argumentach

$$dS \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_g dT + \left(\frac{\partial S}{\partial g}\right)_T dg.$$

Pochodną $(\partial S/\partial T)_g$ oblicza się tak jak zwykłą pochodną df/dx funkcji $f(x)$ jednej zmiennej, traktując drugą zmienną, tj. g , jak stałą. To właśnie oznacza dopisek $_g$. Analogicznie oblicza się pochodną $(\partial S/\partial g)_T$.

Jako że utożsamiliśmy δQ z $dQ = TdS(T, g)$, a przy dostarczaniu ciepła kuli rozpatrywanej w naszym problemie wartość g pozostaje stała, czyli $dg = 0$, co oznacza, że

$$dQ|_{g=\text{const.}} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_g dT,$$

przeło z porównania powyższej równości ze wzorem (6) i wzorem (11), wnioskujemy, że

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_g = C_g(T, g).$$

Wyznaczenie zależności pojemności cieplnej $C_g(T, g)$ od g jest teraz kwestią zastosowania znanego twierdzenia z analizy funkcji wielu zmiennych, które mówi, że

$$\left(\frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_g\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial H}{\partial g}\right)_T\right)_g.$$

Wynika z niego tzw. tożsamość Maxwella, czyli związek $(\partial S/\partial g)_T = -M(\partial Y/\partial T)_g$. Pozwala ona (ponownie korzystając z przemienności drugich pochodnych, tym razem entropii) napisać:

$$\begin{aligned} (12) \quad \left(\frac{\partial C_g(T, g)}{\partial g}\right)_T &= \left(\frac{\partial}{\partial g} T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_g\right)_T = \\ &= T \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial S}{\partial g}\right)_T\right)_g = -MT \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial T^2}\right)_g \equiv \\ &\equiv -MTY \left[\alpha^2(T, g) + \frac{\partial \alpha(T, g)}{\partial T}\right]. \end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z definicji współczynnika rozszerzalności $\alpha Y = (\partial Y/\partial T)_g$, takiej samej jak na marginesie na str. 9, tylko z R zastąpionym przez Y . Zwróćmy tu uwagę, że kluczowe w wyprowadzeniu tego wzoru było zapisanie pobranego ciepła w formie $TdS(T, g)$ (co z kolei pozwoliło wyrazić pierwszą

zależności pojemności cieplnej C_g kuli od g , a to właśnie, poprzez wzór (6), da prawidłową odpowiedź, która z kul, A czy B , będzie cieplejsza. Druga zasada w sformułowaniu Kelvina poprzez rozumowania, które wykorzystują cykl Carnota, prowadzi do wniosku, że gdy proces, jakiemu podlega układ, jest odwracalny (tak jak cykl Carnota), to pobrane przez układ ciepło δQ można utożsamiać z wyrażeniem różniczkowym $dQ = TdS$, gdzie dS jest różniczką (wspomnianej już) entropii układu, czyli infinitezymalną zmianą tej tajemniczej wielkości przy zmianie stanu układu (tu zachodzącej pod wpływem pobrania przez układ ciepła). Ponieważ entropię, która jest uczciwą funkcją stanu układu, można traktować jak funkcję dowolnej pary z trzech zmiennych T , Y i g , to możemy przepisać równość (9) w postaci

$$(10) \quad dU(T, g) = TdS(T, g) - Mg dY(T, g).$$

Aby zredukować przekształcenia do niezbędnego minimum, wygodnie jest zamiast funkcji $U(T, g)$ posłużyć się nową funkcją stanu (w termodynamice nazywa się ją entalpią) $H(T, g) = U(T, g) + MgY(T, g)$. Jej różniczka ma, jak łatwo zobaczyć, postać

$$dH(T, g) = TdS(T, g) + MY(T, g) dg.$$

Wykorzystując w powyższym wyrażeniu różniczkę entropii obliczoną tak jak na marginesie i porównując tak otrzymane wyrażenie z definicją różniczki entalpii, uzyskujemy tożsamości wiążące różne pochodne, które przydadzą się nam w dalszych obliczeniach:

$$(11) \quad dH(T, g) = \underbrace{T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_g}_{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_g} dT + \underbrace{\left[T \left(\frac{\partial S}{\partial g}\right)_T + MY(T, g)\right]}_{\left(\frac{\partial H}{\partial g}\right)_T} dg.$$

zasadę termodynamiki w postaci związków między zmianami funkcji stanu), czyli wykorzystanie właśnie (matematycznej konsekwencji) drugiej zasady termodynamiki.

Uzyskany wzór daje zupełnie przeciwny wniosek niż wynikający ze wzoru (5), zgodnie z którym $(\partial C_g(T, g)/\partial g)_T > 0$. Pochodna $\partial \alpha(T, g)/\partial T$ jest na ogół mała i w przypadku większości materiałów, z których może być wykonana kula, dodatnia. Niewątpliwie zawsze dodatni jest też wyraz $\alpha^2(T, g)$ i o znaku pochodnej $(\partial C_g(T, g)/\partial g)_T$ decyduje występujący po prawej stronie (12) znak minus. Zatem konkluzja płynąca z poprawnego zastosowania termodynamiki jest przeciwna: to temperatura kuli A będzie wyższa!

Pora na wnioski. Jak wiadomo, fizyka teoretyczna jest sztuką idealizacji polegającą na pomijaniu „nieistotnych” elementów rzeczywistości, które komplikowałyby analizę i uniemożliwiały ujęcie zjawisk w mniej lub bardziej proste, ale zawsze piękne matematyczne równania. Jak pokazuje przedstawiony tu problem, w takim postępowaniu kryje się jednak niebezpieczna pułapka, od której może nas (w takim przypadku jak tu) uchronić niezachwiana wiara w słuszność drugiej zasady termodynamiki. Rozpatrzony tu problem znakomicie ilustruje także status drugiej zasady termodynamiki jako zasady *par excellence* fizycznej. Na gruncie czystej analizy matematycznej można sobie wyobrazić świat, w którym ciała stałe nie ulegają odkształceniom, lub ulegają takowym w dowolnie małym stopniu (ciała takie nazywa się w mechanice bryłami sztywnym), i w którym rozwiązanie standardowe problemu kul byłoby słuszne. Druga zasada termodynamiki w takim świecie nie byłaby bezwzględnie słuszna – możliwe by było jej obchodzenie. Jednak bezwzględne jej obowiązywanie

w rzeczywistym świecie fizycznym mówi nam, że idealizacja polegająca na pominięciu odkształceń jest w problemie kul niedopuszczalna. Druga zasada jest uogólnieniem wniosków płynących z wielu różnych doświadczeń i w ten sposób uwzględnia to, jakie są rzeczywiste właściwości materii wynikające z jej mikroskopowej (cząsteczkowej) budowy. Przykład kul pokazuje też funkcjonowanie termodynamiki jako teorii fenomenologicznej: pole ciężkości wpływa w pewien sposób na energię wewnętrzną U kuli, ale nie musimy tego analizować na poziomie mikroskopowym. Wystarczy wiedzieć, że jest to zakodowane w równaniu stanu (8). A równanie to – poprzez związek $dQ = TdS$, będący matematyczną konsekwencją drugiej zasady termodynamiki – dyktuje, jak U i w konsekwencji C_g zależą od g . Potrzebne jest więc tylko wyznaczenie równania stanu (8), a kompletna informacja o jego

postaci jest zawarta w bezpośrednio mierzalnych współczynnikach, takich jak α .

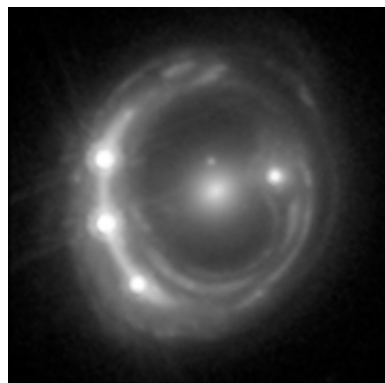
Termodynamika, dzięki niewielkiej liczbie zasad, na których jest oparta, jest najogólniejszą z teorii fizycznych. Stosuje się ona do wszystkich makroskopowych układów. Czasem, jak w przypadku takich egzotycznych układów jak czarna dziura, słuszność jej zasad może wydawać się nieoczekiwana, ale pozostaje niewzruszonym faktem. Odznacza się też wielką elegancją formalną i znakomicie służy wyrabianiu nie tylko intuicji fizycznej, ale także precyzji rozumowania i formułowania myśli. Dlatego na zawsze powinna pozostać fundamentem wykształcenia każdego fizyka.

[*] G. De Palma, M. C. Sormani *Counterintuitive effect of gravity on the heat capacity of a metal sphere: re-examination of a well-known problem*, American Journal of Physics **83**, 723 (2015).

O soczewkach grawitacyjnych produkujących nieparzystą liczbę obrazów

*Student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Konrad TOPOLSKI*

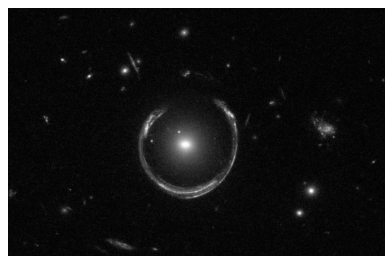


Rys. 1. Obraz odległego kwazara RXJ1131-1231; centralnie położona galaktyka rozsmarowuje obraz tła, tworząc jasny łuk (po lewej) i cztery wyraźne obrazy. ESA/Hubble/NASA/Suyu

Jednym z najbardziej intrygujących zastosowań topologii różniczkowej w astronomii jest *twierdzenie o nieparzystej liczbie obrazów* w opisie zjawiska soczewkowania grawitacyjnego. Mówi ono o tym, że przy pewnych założeniach na temat charakteru soczewki oraz źródła liczba obrazów, jakich może spodziewać się obserwator, jest zawsze nieparzysta. Czytelnicy zapoznani z obserwacjami astronomicznymi mogą zaprotestować – wiele przypadków soczewkowania tworzy bowiem parzystą liczbę obrazów. Mają tu oni oczywiście rację – przytoczone twierdzenie mówi bowiem o pewnym szczególnym przypadku, realizowanym nie we wszystkich sytuacjach.

Niezgodność pomiędzy teorią a praktyką spowodowana jest tu zarówno uproszczeniami w twierdzeniu, które wykluczają pewne scenariusze obserwowane w rzeczywistości, jak i trudnościami w znajdowaniu kolejnych obrazów, z jakimi muszą mierzyć się astronomowie.

Opowiemy teraz pokrótce, czym jest soczewkowanie grawitacyjne i kiedy zachodzi. Przedyskutujemy potem treść tytułowego twierdzenia, wprowadzimy nieco aparatu matematycznego i przedstawimy szkic dowodu. Na zakończenie wskażemy potencjalne uogólnienia i rozwinięcia tego pomysłu.



Rys. 2. Pierścień Einsteina, o nazwie LRG 3-757, tworzący niepełny okrąg. Pierścień Einsteina powstaje, gdy (silne) soczewkowanie tworzy obraz okręgu lub, częściej, łuku okręgu. ESA/Hubble & NASA

Soczewkowanie grawitacyjne

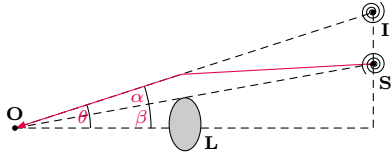
Silne soczewkowanie występuje najczęściej w wyniku przejścia promieni świetlnych pochodzących od galaktyki lub aktywnego kwazara przez soczewkę, którą stanowi inna galaktyka bądź gromada galaktyk. Charakterystyczne dla tego soczewkowania jest powstanie wielokrotnych obrazów źródła oraz w bardzo szczególnym przypadku, gdy obserwator, soczewka i źródło znajdują się w przybliżeniu na jednej prostej – pierścienia Einsteina. Taki pierścień jest mocno zdeformowanym obrazem źródła. Model używany do opisu soczewkowania zakłada zwykle przybliżenie geometrycznie cienkiej soczewki (tzn. promień świetlny porusza się po linii prostej z wyjątkiem jednego odchylenia zmieniającego jego kierunek ruchu) i niewielkie odstępstwo od współliniowości składników (rys. 3). Równanie dla takiej soczewki grawitacyjnej ma postać:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta),$$

gdzie matematyczny opis zjawiska ugięcia promieni świetlnych zawarty jest w zależności $\alpha(\theta)$. Przy zadanym kącie β równanie dopuszcza wiele rozwiązań ze względu na θ , co oznacza powstanie obrazów wielokrotnych.

Przytoczmy teraz treść interesującego nas twierdzenia.

Twierdzenie. Liczba obrazów źródła po przejściu przez przezroczystą, nieosobliwą soczewkę grawitacyjną o skończonych rozmiarach jest nieparzysta.

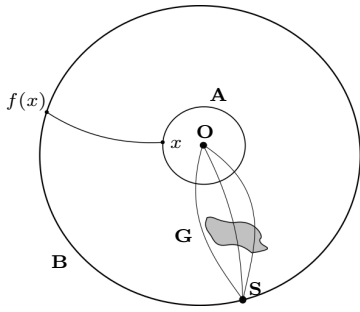


Rys. 3. Modelowanie soczewkowania grawitacyjnego za pomocą geometrycznie cienkiej soczewki. O jest położeniem obserwatora, S – źródła, L – soczewki, a I – obrazu. Zdefiniowane odległości wyznaczone są poprzez przeprowadzenie linii prostej prostopadłej do płaszczyzn soczewki oraz źródła. Na rysunku zaznaczono też kąty: α – kąt pomiędzy obserwowanym obrazem a prawdziwym położeniem źródła, β – kąt pomiędzy linią prostą a prawdziwym położeniem źródła oraz θ – pomiędzy prostą a obrazem

Przezroczystość soczewki oznacza, że światło ze źródła nie jest pochłaniane przez soczewkę. Założenie o nieosobliwości w tym twierdzeniu wyklucza między innymi możliwość uwięzienia promieni świetlnych w soczewce, np. przez czarną dziurę. Nie wyklucza to jednak możliwości fizycznego zaistnienia fenomenu nieparzystej liczby obrazów, gdy soczewką jest czarna dziura.

O topologii różniczkowej w kilku słowach

Przyjmijmy, że B to duża sfera (o środku w punkcie obserwacji O), na której znajduje się źródło S , a A to „mała” sfera odpowiadająca kierunkom, z których dochodzą do obserwatora promienie światła. Odwracając bieg promieni, można wprowadzić funkcję $f : A \rightarrow B$ w następujący sposób. Z punktu obserwacji wysyłamy promień w kierunku $x \in A$, który oczywiście może się wyginać przy przechodzeniu przez różne galaktyki, i patrzymy, w którym miejscu $f(x) \in B$ dochodzi do sfery B . Obserwowane obrazy źródła odpowiadają wtedy przeciwobrazowi $f^{-1}(\{S\})$ (gdzie S to obserwowane przez nas źródło). Może to być więcej niż jeden punkt, co oznacza więcej niż jeden obraz.



Rys. 4. Ilustracja sfer używanych do opisu soczewkowania grawitacyjnego. Źródło światła znajduje się w punkcie S , a obserwator w punkcie O . Pomiędzy S a O znajduje się przezroczysta galaktyka G . Definiujemy odwzorowanie z mniejszej sfery A do większej B . Odwzorowanie $f : A \rightarrow B$ przypisuje punktowi x na sfery A punkt $f(x)$ na sfery B , jeśli promień światła przechodzący przez punkty O i x przecina B . Liczba obrazów S widzianych przez O jest równa liczbie punktów ze sfery A , których obraz pod działaniem f jest punktem S

Niech $f : A \rightarrow B$ będzie gładką funkcją pomiędzy dwiema sferami dwuwymiarowymi. Możemy sobie wyobrazić, że sfera A znajduje się w obszarze ograniczonej sferą B . Przekształcenie sfery A na B przy użyciu funkcji f możemy sobie wyobrazić jako rozciągnięcie sfery A , tak żeby przykleić ją od wewnątrz do sfery B . Gładkość f oznacza, że możemy sferę A rozciągać, zaginać tak, żeby przyklejać kilka warstw, ale nie wolno nam jej rozcinać. Formalnie jako założenie twierdzenia przyjmuje się, że funkcja f ma określone wszystkie pochodne.

Definicja 1. Zbiorem punktów krytycznych funkcji f nazywamy zbiór wszystkich punktów, w których macierz pochodnych nie jest odwracalna,

$$\Sigma_f = \{x \in A \mid \det(Df(x)) = 0\}.$$

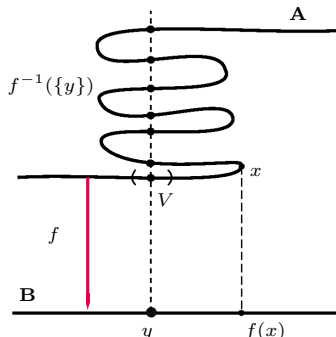
Zbiorem wartości krytycznych f nazywamy obraz powyższego zbioru pod działaniem f , czyli $f(\Sigma_f)$. Punkty A , które nie są punktami krytycznymi, nazywamy punktami regularnymi funkcji f , a wartości funkcji f , które nie są krytyczne – wartościami regularnymi.

W naszym przykładzie przyklejania sfery A do sfery B punkty krytyczne to te znajdujące się na brzegu fałdy (na przykład punkt x na rysunku 5). Natomiast punkty regularne to te, w których funkcja f jest lokalnie odwracalna, czyli przeciwobraz punktu regularnego y może zawierać wiele punktów, ale każdy z tych punktów ma otoczenie, które funkcja f przekształca w sposób jednoznaczny (i gładki) na otoczenie punktu y . W punktach krytycznych funkcja f może nie być odwracalna nawet lokalnie.

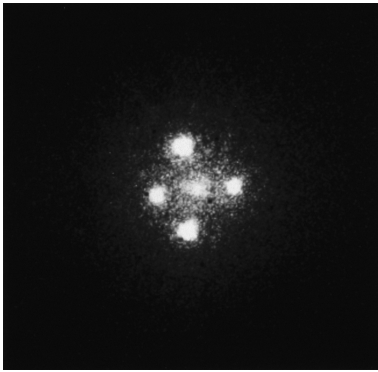
Definicja 2. Definiujemy stopień topologiczny (stopień Brouwera) wartości regularnej y jako:

$$\deg(f, B, y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{sgn} \det(Df(x)).$$

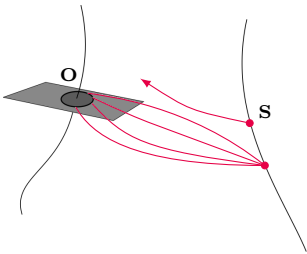
Ten pozornie skomplikowany wzór to suma znaków wyznaczników macierzy pochodnej, czyli w istocie suma jedynek i minus jedynek. Znak jacobianu determinuje, czy otoczenie punktu x jest przyklejane do sfery B z zachowaniem orientacji (znak plus), czy ze zmianą orientacji na przeciwną (znak minus). Stopień topologiczny zlicza więc, o ile więcej (lub mniej) jest punktów przeciwobrazów $f^{-1}(\{y\})$, w których nie zmienia się orientacja względem punktu y , od tych, w których się zmienia. W naszym przypadku punkty $f^{-1}(\{S\})$ są po prostu obrazami źródła! Stopień topologiczny oblicza natomiast różnicę między liczbą obrazów prostych i odwróconych.



Rys. 5. Schematyczne przedstawienie odwzorowania $f : A \rightarrow B$ w przypadku jednowymiarowym. Widoczne są fałdy nad punktem $y \in B$, któremu odpowiada przeciwobraz $f^{-1}(\{y\})$. Funkcja f jest w otoczeniu V jednego z tych punktów lokalnym dyfeomorfizmem na obraz $f(V)$. Zilustrowany jest punkt osobliwy x , w którym funkcja nie jest odwracalna i $\det(Df(x))$



Rys. 6. Krzyż Einsteina (Q2237+030, QSO 2237+0305) to jeden z pierwszych zaobserwowanych przykładów silnego soczewkowania grawitacyjnego, którego źródłem jest kwazar oddalony od nas o 8 miliardów lat świetlnych. Soczewkowanie przejawia się tutaj poprzez zwiokrotnienie obrazu źródła. Widoczne są bowiem cztery wyraźne obrazy zewnętrzne i jeden słabszy w centrum; towarzyszy im ogólne zniekształcenie. Obraz centralny jest najsłabszy, ponieważ został w największym stopniu rozproszony na masie soczewki.
NASA, ESA, STScI



Rys. 7. Ilustracja warunku koniecznego do powstania wielokrotnych obrazów. Hiperpowierzchnia, na której znajduje się obserwator, ma w jego otoczeniu płaską metrykę, a trajektorie swobodnych fotonów wysłane w pewnym momencie w przeszłości przecinają ją w kształcie figury zbliżonej do sfery. Pomiędzy źródłem a obserwatorem zachodzi soczewkowanie

Szkic dowodu

Kluczowy w naszym dowodzie jest fakt, że stopień topologiczny funkcji f w punkcie obserwacji \mathbf{S} (rys. 4) jest równy 1. Ściśle rzecz biorąc, okazuje się, że stopień topologiczny funkcji gładkiej jest stały (na zbiorze spójnym, czyli składającym się „z jednego kawałka”). Łatwo sobie wówczas wyobrazić, że przynajmniej jeden punkt ze sfery \mathbf{B} ma jednoelementowy przeciwobraz (czyli istnieje punkt na sferze \mathbf{A} , do którego fałdy nie zawierają). Ponieważ zaś sfera jest spójna, to każdy punkt na niej ma stopień równy jeden!

Można to intuicyjnie zilustrować, zaniedbując jeden wymiar (w przypadku dwuwymiarowym dowód jest trochę bardziej złożony, ale opiera się na analogicznych argumentach). Przypadek jednowymiarowy przedstawia rysunek 5. Nad każdym punktem przeciwdziedziny ($y \in \mathbf{B}$) leżą fałdy dziedziny (\mathbf{A}). Jeśli pofałdowanie zmierza na rysunku w prawo, odpowiada ono obrazowi o orientacji prostej, a jeśli zawraca, to odpowiada mu obraz odwrócony. Skoro funkcja f jest gładka, to pofałdowania nie mogą się przerywać – mogą się tylko rozciągać i zaginać. Niezależnie od tego, ile razy zawrócą, muszą w końcu wrócić do pierwotnego kierunku – chcemy bowiem w sposób gładki odwzorować naszą pierwotną sferę \mathbf{A} . Oznacza to, że dla każdego punktu na sferze \mathbf{B} mamy zawsze przynajmniej jedną fałdę więcej zmierzającą w prawo niż w lewo. Fałdy zmierzające w prawo nad punktem dodają do stopnia topologicznego wartość $+1$, a te idące w lewo wartość przeciwną.

Gdy pęk promieni przejdzie przez soczewkę grawitacyjną, oczekujemy wielu obrazów pochodzących z jednego źródła. Załóżmy, że jest ich łącznie $n = n_+ + n_-$, dla n_+ odpowiadającego liczbie obrazów prostych, a n_- – odwróconych.

Stosując rozważania dotyczące pofałdowań dla punktu \mathbf{S} , widzimy, że zachodzi $n_+ - n_- = 1$. Płynie stąd prosty wniosek, że $n_+ = n_- + 1$, a zatem całkowita liczba obrazów to $n = 2n_- + 1$. Udowodniliśmy tym samym tytułowe twierdzenie.

Dyskusja i uwagi

Sformalizowanie powyższego dowodu do postaci działającej w pewnych ogólnych czasoprzestrzeniach można znaleźć w [3] i [1], i wymaga ono sporo wysiłku. Pierwszą trudnością jest odpowiedni dobór powierzchni \mathbf{A} i \mathbf{B} takich, by były topologicznymi sferami oraz by funkcja f miała odpowiedni stopień różniczkowalności. Po drugie, istnienie choćby jednego punktu $y \in \mathbf{B}$ takiego, że jego przeciwobraz jest zbiorem jednoelementowym, nie zawsze jest tak oczywiste, jak w omówionym powyżej szczególnym przypadku. Można sobie wyobrazić specyficzne ustawienie soczewki i źródła, dla którego taki scenariusz nie zaistnieje.

Najważniejszym zastrzeżeniem wobec powyższego dowodu jest jednak fakt, że nie bierze on pod uwagę struktury topologicznej (kształt) i metrycznej (krzywizna czasoprzestrzeni, pomiar odległości). Jeśli jednak ograniczymy się do *rozsądnych* topologii czasoprzestrzeni oraz słabych pól grawitacyjnych, dowód odbywa się w przestrzeni euklidesowej (można go znaleźć w [2]) i do jego przeprowadzenia wystarczy wiedza z kursu analizy matematycznej.

Okazuje się, że odpowiedni warunek do uogólnienia twierdzenia na czasoprzestrzeń \mathcal{M} o dowolnej topologii i metryce g formalnie brzmi następująco:

Literatura

- [1] Fabio Giannoni i Marco Lombardi. “Gravitational lenses: odd or even images?” W: *Classical and Quantum Gravity* 16.6 (1999), s. 1689–1694. doi: 10.1088/0264-9381/16/6/303.
- [2] Marco Lombardi. “An application of the topological degree to gravitational lenses”. W: *Modern Physics Letters A* 13.02 (1998), s. 83–86. doi: 10.1142/S0217732398000115. eprint.
- [3] Volker Perlick. *Gravitational Lensing from a Spacetime Perspective*. 2010. arXiv: 1010.3416 [gr-qc].

Przecięcia pęków geodezyjnych zerowych (trajektorie swobodnych fotonów) wychodzących ze źródła S z przestrzenną hiperpowierzchnią o metryce lokalnie euklidesowej, na której znajduje się obserwator, tworzą powierzchnie z osobliwościami przybliżające (w sensie topologicznym) sfery. Warunek ten ilustrowany jest na rysunku 7.

Zaawansowane narzędzia topologii różniczkowej, w tym tzw. *teoria Morse’a zerowych geodezyjnych*, pozwalają ściśle rozważać warunki powstawania parzystej bądź nieparzystej liczby obrazów, a nawet klasyfikować je ze względu na ich charakter (obrazy ścięte, powiększone, przekształcone w łuki okręgów) [1].

Radioteleskop LOFAR w Polsce

Leszek BŁASZKIEWICZ, Andrzej KRANKOWSKI, Marian SOIDA,
Hanna ROTHKAEHL, Robert PEKAL

L.B. i A.K. – Centrum Diagnostyki Radiowej Środowiska Kosmicznego, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie; M.S. – Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Jagiellońskiego; H.R. – Centrum Badań Kosmicznych PAN; R.P. – Poznańskie Centrum Superkomputerowo-Sieciowe.

Radioastronomia to dziedzina badań Kosmosu, dzięki której odkryliśmy i poznaliśmy kwazary, pulsary czy też kosmiczne masery. Za początek radioastronomii uznajemy odkrycie dokonane przez Karla Jansky'ego (1905–1950), który podczas prac badawczych prowadzonych dla Bell Telephone Laboratories odkrył, a później opisał, promieniowanie radiowe Drogi Mlecznej. Już przed II wojną światową inżynier Grote Roemer (1911–2002) eksperymentował z antenami kierunkowymi o klasycznym kształcie czaszy (jak np. antena satelitarna), ale prawdziwy rozkwit radioastronomii nastąpił dopiero pod koniec lat 40.

Czym jest interferometr?

Od samego początku w radioastronomii kluczową rolę odgrywał kształt i rozmiar czaszy radioteleskopu. Wpływa on na dwa ważne dla każdego instrumentu obserwacyjnego parametry: czułość instrumentu oraz jego rozdzielczość. Z czasem tworzono coraz lepsze odbiorniki, które instalowano na coraz większych czaszach teleskopów. Dzięki temu zwiększano ich czułość, która jest zależna od powierzchni głównego zwierciadła radioteleskopu (analogią tutaj może być łapanie deszczówki – im większa powierzchnia naczynia, tym więcej wody złapiemy). Jednak czułość to nie wszystko. Ważna jest też rozdzielczość instrumentu, czyli zdolność do obserwacji obiektów o określonej odległości kątowej, którą determinują rozmiary instrumentu oraz to, jakie fale elektromagnetyczne obserwujemy. Przy tej samej średnicy teleskopu zdolność rozdzielcza dla obserwacji fal radiowych jest zdecydowanie mniejsza niż dla obserwacji wykonywanych w zakresie światła widzialnego. Dlatego nawet największe pojedyncze radioteleskopy mają gorszą rozdzielczość od małych amatorskich teleskopów optycznych.

Radioastronomowie bardzo sprytnie poradzili sobie z problemem rozmiarów teleskopów, a mianowicie zaczęli łączyć ze sobą mniejsze instrumenty. Sir Martin Ryle (1918–1984) jako pierwszy przeprowadził obserwacje za pomocą dwóch anten jednocześnie, a skomplikowane operacje związane ze wspólną analizą odebranych sygnałów (zwane syntezą apertury) pozwoliły mu na uzyskanie wyniku takiego, jakby użył teleskopu o średnicy równej odległości pomiędzy antenami. Tak narodziła się technika zwana interferometrią radiową, dziś stosowana powszechnie, między innymi jako interferometria wielkobazowa, nazywana w skrócie VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*).

Jak działa VLBI?

W celu zwiększenia rozdzielczości obserwacji powstały interferometry o zasięgu globalnym – z antenami rozproszonymi po całej kuli ziemskiej, a nawet interferometry, w których skład wchodzi anteny znajdujące się w kosmosie. Przykładem jest radioteleskop HALCA (*Highly Advanced Laboratory for Communications and Astronomy*) działający w ramach projektu VSOP (*VLBI Space Observatory Programme*). Problem z interferometrią radiową pojawiał się jednak, gdy próbowano zastosować ją do detekcji fal radiowych o długości w okolicach metra i więcej.

Każdy z nas widział zapewne, jak migoczą gwiazdy. To efekt związany z ruchami powietrza, które zniekształcają ich obraz. Podobnie jest z falami radiowymi – bardzo krótkie fale radiowe (do kilkudziesięciu centymetrów) przechodzą przez atmosferę bez większych zakłóceń, jednak te o długości powyżej metra ulegają odkształceniom w sposób podobny do światła, aczkolwiek wolniejszy i bardziej wielkoskalowy. Próbowano oczywiście budować interferometry pracujące na falach metrowych, ale miały one bardzo małe rozmiary i były nieskomplikowane, tak aby można było dokonać korelacji sygnału poprzez analogowe systemy elektroniczne. Większe rozmiary interferometrów (dłuższe bazy) sprawiały, że

Rozdzielczość wieloelementowego instrumentu to

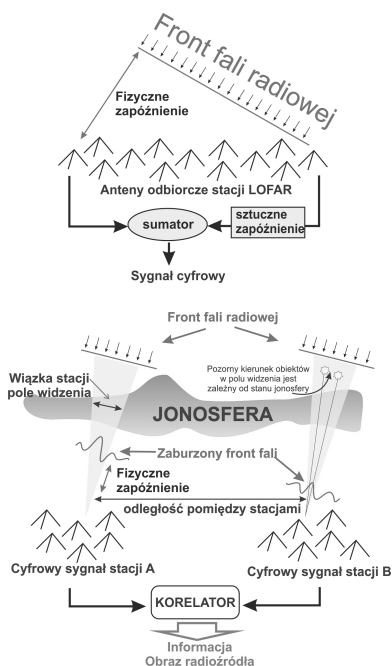
$$\alpha\lambda/L,$$

gdzie L to odległość między skrajnymi elementami, α to pewien parametr, dla LOFAR-a wynoszący 0,8, zaś λ to długość fali radiowej w metrach. W przypadku instrumentu LOFAR, gdzie odległość między skrajnymi instrumentami to około 2000 km, maksymalna zdolność rozdzielcza to mniej niż 0,1 arcsec.



Rozwiązanie zadania M 1681.

Niech XYZ będzie danym trójkątem, a punkt O będzie jego środkiem okręgu opisanego. Przypuśćmy, że $X \in BC$, $Y \in CD$, $Z \in DA$, $O \in AB$, gdzie $ABCD$ jest kwadratem. Ponieważ odcinek OY przecina odcinek XZ , to $\sphericalangle XYZ > 90^\circ$, więc XZ jest podstawą trójkąta XYZ , tj. $XY = YZ$. Wtedy też $OY \perp XZ$, a ich rzuty na prostopadłe proste BC i AB , odpowiednio, są równe (bokowi $BC = CD$ kwadratu). Wobec tego również $OY = XZ$, czyli podstawa XZ jest równa promieniowi okręgu opisanego na XYZ . Oznacza to, że trójkąt OXZ jest równoboczny, czyli $\sphericalangle XYZ = 150^\circ$, skąd wynika oczywiście, że pozostałe kąty mają po 15° .



Na początku działania cyfrowego teleskopu LOFAR rolę systemu przetwarzania danych odgrywał superkomputer IBM Blue Gene/P z przeszło ćwiercią miliona procesorów. Dziś system obliczeniowy bazuje na klastrze COBALT, na który składa się kilkadziesiąt kart graficznych NVIDIA Tesla – które muszą poradzić sobie ze strumieniem około 13 terabitów danych na sekundę.



Rozwiązanie zadania M 1683.
Liczby wymierne możemy zapisać w postaci

$$x = \frac{a}{D}, \quad y = \frac{b}{D}, \quad z = \frac{c}{D},$$

gdzie $\text{NWD}(a, b, c, D) = 1$. Wtedy

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{D^2}$$

jest całkowita, więc $D^2 \mid a^2 + b^2 + c^2$, skąd $D \mid a^2 + b^2$. Podobnie $D \mid b^2 + c^2$ oraz $D \mid c^2 + a^2$. Zatem liczba

$$2c^2 = (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)$$

jest podzielna przez D . Podobnie $D \mid 2a^2$ i $D \mid 2b^2$.

Gdyby liczba pierwsza $p > 2$ dzieliła D , to z otrzymanych podzielności wnioskujemy, że $p \mid a$, $p \mid b$ oraz $p \mid c$ – co przeczy założeniu $\text{NWD}(a, b, c, D) = 1$. Wobec tego D jest potęgą dwójki.

Gdyby jednak $4 \mid D$, to analogicznie uzyskalibyśmy podzielności $2 \mid a$, $2 \mid b$ oraz $2 \mid c$ – znów sprzeczność ze względu na pierwszość a, b, c i D .

Ostatecznie $D \in \{1, 2\}$, skąd $2x = \frac{2a}{D}$ jest liczbą całkowitą.

sygnał był zniekształcony tak dalece, że uniemożliwiał obserwacje. Przez długi czas więc obserwowanie rozległymi interferometrami fal radiowych o długości powyżej metra nie było możliwe. Na szczęście nasza wiedza na temat jonosfery jest obecnie tak duża, że nawet dla interferometrów o dużych rozmiarach jesteśmy w stanie uwzględnić dynamikę atmosfery ziemskiej w obserwacjach. Dzięki temu zbudowano interferometr pracujący na falach o długości od metra do około 17 metrów, który jest zdolny penetrować Wszechświat na wcześniej niezbadanych obszarach widma radiowego.

Mowa tutaj o interferometrze *Low Frequency Array* (LOFAR). Jest to sieć radioteleskopów o budowie hierarchicznej, gdzie pojedyncze zestawy elementów odbiorczych, zwane stacjami, powstały na początku 2010 roku w Holandii, a później zaczęły powstawać w innych krajach Europy. Dziś cała sieć to 52 stacje – z czego 38 stacji znajduje się na terenie Holandii (24 stanowią tzw. *Core*, w tym 6 ulokowano na sztucznej wyspie, w tzw. obszarze *Superterp*, czyli centralnej części całego LOFARA. Pozostałych 14 stacji jest rozproszonych na terenie całej Europy, trzy z nich zainstalowano w Polsce. Dodatkowo planowana jest budowa kolejnych dwóch stacji we Włoszech i w Bułgarii. Każda ze stacji to dwa pola anten tworzących tzw. układ fazowy. Składa się on ze 192 (96 par) anten dipolowych pracujących w zakresie 30–90 MHz oraz 3072 anten działających w zakresie 110–240 MHz, pogrupowanych w 32-elementowe zespoły. Każda z anten pracuje, rejestrując sygnał, który jest próbkowany 200 milionów razy na sekundę. Z zarejestrowanego sygnału po procesie cyfryzacji powstaje strumień nawet 10 GB/s danych. To bardzo dużo informacji. Te dane trzeba przetworzyć, co stanowi nie lada problem – szczególnie gdy wytwarza je jednocześnie ponad 100 tysięcy anten z całego interferometru!

Jak dokładnie działa teleskop LOFAR?

Każda stacja LOFAR składa się z dużej liczby pojedynczych dipoli. Rejestrowana fala elektromagnetyczna wzbudza w nich zmienne prądy elektryczne, które w postaci napięć są mierzone z częstotliwością 200 MHz. Każda z anten w stacji „widzi” z grubsza całe niebo znajdujące się ponad horyzontem, przy czym jej czułość jest największa w pewnym zakresie obszaru wokół zenitu (najwyższego punktu na niebie w danym miejscu). Mając układ wielu anten, połączonych przewodami równej długości z systemem sumującym ich sygnał, jesteśmy zdolni obserwować obszar wokół zenitu, a wielkość tego obszaru zależy od ilości anten oraz od długości rejestrowanej fali. Dzieje się tak dlatego, że sygnał w postaci fali elektromagnetycznej dochodzi w tym samym momencie do wszystkich elementów teleskopu fazowego – i dzięki temu wzmacnia się. Tutaj dobrym przykładem są dwie dodawane do siebie sinusoidy. Sygnał sumuje się, gdy ich fazy są zgodne, lub wygasa, gdy fazy są przeciwne.

A co, jeśli chcemy obserwować obiekt oddalony od zenitu? Wtedy wystarczy „powiedzieć” systemowi sumującemu o sygnałach z poszczególnych anten, do której z anten i w jakim momencie dotrze czoło fali (patrz rysunek). W ten sposób sztucznie wprowadzane jest opóźnienie, co widać po prawej stronie ilustracji. Oczywiście proces ten, zwany formowaniem wiązki, jest realizowany po wyborze współrzędnych obserwowanego obiektu i dla długości fal obserwowanych teleskopem LOFAR.

Tak dzieje się w pojedynczej stacji LOFAR, a jak wygląda sytuacja w przypadku interferometru? Jest analogiczna, przy czym sygnał całej stacji traktuje się jako ten od jednego elementu układu. Musimy przy tym bardzo dobrze znać geometrię interferometru oraz precyzyjnie zsynchronizować zegary systemowe we wszystkich stacjach. I nie byłoby kłopotu, gdyby nie fakt, że na kształt czoła sygnału w częstotliwościach obserwowanych przez LOFAR ma wpływ jonosfera, która nie jest jednorodna. I jeszcze jedna kwestia – pokazująca, jak potężnym jest i może być radioteleskop. Skoro w teleskopie LOFAR każdy jego element widzi jednocześnie całe niebo, a my niejako tylko wybieramy interesujący nas kierunek, to czy można obserwować więcej niż jeden kierunek, to znaczy, czy można obserwować więcej niż jedno źródło w tym samym momencie? Odpowiedź brzmi: tak! Jednak sam proces formowania wiązki

LOFAR w Polsce

Polska dołączyła do systemu LOFAR jako konsorcjum POLFAR. W jego skład weszło 9 instytucji: Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, Uniwersytet Jagielloński, Centrum Badań Kosmicznych PAN w Warszawie, Poznańskie Centrum Superkomputerowo-Sieciowe – jako instytucje zaangażowane infrastrukturalnie, a obecnie tworzące konsorcjum operacyjne POLFARO, oraz Centrum Astronomiczne Mikołaja Kopernika PAN, Uniwersytet Szczeciński, Uniwersytet Zielonogórski, Uniwersytet Mikołaja Kopernika i Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu. W roku 2015 w trzech polskich lokalizacjach powstały stacje systemu: Stacja PL612 w Baldach pod Olsztynem, należąca do Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, gdzie zainstalowano maksymalną konfigurację, czyli łącznie 3264 dipole. Podobna konfiguracja znajduje się w stacji w Borówcu pod Poznaniem, należącej do Centrum Badań Kosmicznych. Ostatnia stacja, należąca do Uniwersytetu Jagiellońskiego, została zbudowana w Łazach koło Krakowa, w nieco mniejszej wersji. Od początku 2016 roku polskie stacje biorą udział w badaniach prowadzonych w ramach Europejskiej grupy – International LOFAR Telescope (ILT). O transfer gigantycznej ilości danych oraz częściowo o ich przechowywanie dba Poznańskie Centrum Superkomputerowo-Sieciowe.

wymaga bardzo skomplikowanych systemów cyfrowych i informatycznych. Zatem jeśli te będą odpowiednio wydajne, to za pomocą interferometru LOFAR można teoretycznie obserwować nawet 2^8 , czyli 256 obiektów jednocześnie, co wiąże się z maksymalnym podziałem pasma na tyleż kanałów.

Co badamy radioteleskopem LOFAR?

Trwające już od ponad dekady obserwacje radioastronomiczne na falach wcześniej nieeksplorowanych zaowocowały wieloma znakomitymi wynikami, na wyliczenie których nie ma tu miejsca. Warto jednak podkreślić, że od początku zainicjowano kilka wiodących tematów badawczych – nazwano je projektami kluczowymi. W wielu z tych projektów uczestniczą naukowcy z Polski. Jednym z nich są obserwacje Słońca i Kosmiczna Pogoda – tematy bardzo istotne nie tylko w sensie poznawczym, ale i społecznym, bo wyniki tych badań wykorzystywane są w telekomunikacji satelitarnej. Wykorzystując LOFAR, możemy też na falach radiowych obserwować najwcześniejsze momenty istnienia Wszechświata – tzw. epokę rejonizacji. Ponadto tworzymy przeglądy całego nieba uwzględniające odległe obiekty kosmiczne, takie jak kwazary czy radiogalaktyki, badając m.in. ich pola magnetyczne. Ważną częścią pracy systemu LOFAR (także pojedynczych jego elementów) są obserwacje zjawisk i obiektów szybkozmiennych w czasie. Do takich zaliczamy pulsary, które akurat w zakresach częstotliwości LOFAR-a emitują najwięcej promieniowania. Dzięki teleskopowi LOFAR badane są też promieniowanie kosmiczne oraz zjawiska burzowe.

Warto na koniec dodać, że LOFAR to niezwykle ważny instrument dla prawdopodobnie najbardziej rozbudowanego radioteleskopu, który aktualnie powstaje w Australii i RPA – jest bowiem swego rodzaju „pathfinderem” technologii dla projektu *Square Kilometre Array* (SKA). Sam LOFAR niebawem wkroczy też w kolejną fazę swojego istnienia. W 2022 roku zacznie się bowiem transformacja systemu do wersji LOFAR 2.0.

O pewnych średnich w ułamkach łańcuchowych

Karol GRYSZKA*

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Prawo Benforda jest przykładem niezwyklej zależności obserwowanej wśród danych liczbowych. Głosi ono, że dla wielu zbiorów liczb o różnym pochodzeniu (powierzchnia państw, kwoty wystawiane na czekach, parametry pierwiastków chemicznych, pierwsze cyfry kolejnych potęg liczby 143) pierwsze cyfry znaczące tych liczb występują z częstością w dobrym przybliżeniu określoną przez wzór

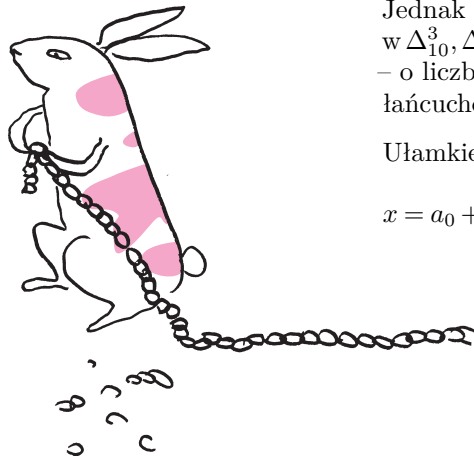
$$(1) \quad P(k) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{k} \right),$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, 9$. Tym samym około 30,1% wszystkich liczb w wielu zbiorach danych rozpoczyna się od 1, a tylko 4,6% od 9. Prawo to jest dość uniwersalne, choć oczywiście nie wszystkie dane liczbowe je spełniają (np. wzrost człowieka).

Jednak nie prawem Benforda będziemy się tu zajmować (o tym pisano już w $\Delta_{10}^3, \Delta_{10}^{12}$ czy Δ_{16}^4). Nas interesować będzie podobne w sformułowaniu pytanie – o liczby, jakie znajdują się w rozwinięciu liczby rzeczywistej w ułamek łańcuchowy. Wyjaśnijmy pokrótce to pojęcie (omówione np. w Δ_{21}^5).

Ułamkiem łańcuchowym liczby $x > 0$ nazywamy wyrażenie postaci

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-2} + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k + \dots}}}}}}, \quad \text{przy czym każde } a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$



**Rozwiązanie zadania F 1029.**

Zderzenie meteorytu z powierzchnią Ziemi jest zderzeniem całkowicie niesprężystym i cała energia kinetyczna E „pocisku” przetwarzana jest na odkształcenie i kruszenie (częściowo też topienie) materiału gruntu (skał) w objętości V odpowiadającej objętości krateru. Mamy więc $E \propto Y \cdot V$. Przyjmując, że krater uderzeniowe mają podobne kształty, otrzymujemy, że $V \propto D^3$, gdzie D jest średnicą krateru. Ostatecznie:

$$D \propto E^{1/3}.$$

Rozważany w treści zadania i w jego rozwiązaniu model zakładający dominację procesów „niszczenia” gruntu dotyczy niewielkich kraterów o średnicach rzędu 1 m. Głębokość krateru jest proporcjonalna do jego średnicy dla kraterów niewielkich (do ok. 1 km). K. A. Holsapple, *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* 21, 333 (1993). R. J. Pike, *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf.* 11th, pp 2159-2189 (1980).

Formalnie $P(k)$ definiujemy następująco. Niech $a = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ oraz niech $K_{n,k}$ oznacza liczbę liczb k w rozwinięciu liczby a w ułamek łańcuchowy na pozycjach od 1 do n . Wtedy

$$P(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n,k}}{n}.$$

k	$P(k)$	k	$P(k)$
1	0,415037	10	0,011973
2	0,169925	100	0,000141
3	0,093109	1000	$1,44 \cdot 10^{-6}$
4	0,058894	10^6	$1,44 \cdot 10^{-12}$
5	0,040642		

Nietrudno uwierzyć w (2). Po zlogarytmowaniu lewa strona staje się granicą średnich logarytmów pierwszych n liczb rozwinięcia x w ułamek łańcuchowy, a prawa strona wartością oczekiwaną logarytmu zmiennej o rozkładzie Gaussa–Kuzmina.

Często zamiast rozległej notacji stosuje się notację poziomą i zapisuje powyższy ułamek w jednej linii jako wyrażenie

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots].$$

Ułamki łańcuchowe mogą być nieskończone (jak w zapisie obok) lub skończone. Dowodzi się ponadto, że każda liczba rzeczywista może zostać zapisana w postaci takiego ułamka.

Własności. Ułamek łańcuchowy liczby wymiernej p/q jest skończony. Ułamek łańcuchowy liczby niewymiernej jest nieskończony. Jeśli x jest pierwiastkiem niewymiernym trójmianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych, to jego ułamek łańcuchowy jest okresowy. Na przykład $\sqrt{114} = [10; \overline{1, 2, 10, 2, 1, 20}]$, gdzie poziome nadkreślenie oznacza część okresową.

W dalszej części rozważać będziemy tylko liczby rzeczywiste w przedziale $[0, 1]$, i wtedy również $a_0 = 0$, jednak rozważania można będzie przenieść na pełen zakres liczb. W ułamku łańcuchowym dowolnej liczby niewymiernej interesować nas będzie teraz problem następujący: czy istnieje odpowiednik prawa Benforda dla liczb a_1, a_2, a_3 i kolejnych? Zwróćmy uwagę na to, że pytamy o **liczby**, nie o cyfry wiodące kolejnych a_i . Okazuje się, że dla *prawie wszystkich* (który to termin wyjaśnimy niebawem) liczb rzeczywistych x oraz dowolnej liczby naturalnej $k > 0$ granica $P(k)$ częstości występowania k w coraz dłuższym rozwinięciu x w ułamek łańcuchowy istnieje i dana jest wzorem

$$P(k) = \log_2 \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right).$$

Rozkład prawdopodobieństwa określony powyższym wzorem nosi nazwę rozkładu **Gaussa–Kuzmina**. Gauss rozważał go już na początku XIX wieku, Kuzmin zaś w pierwszej połowie XX wieku określił rząd zbieżności rozkładów kolejnych liczb „losowego” ułamka łańcuchowego do powyższego wyrażenia.

Tabela na marginesie przedstawia kilka wybranych wartości rozkładu Gaussa–Kuzmina. Niezwykle jest w nim to, że choć a_i może przyjmować nieskończenie wiele wartości, to z prawdopodobieństwem nieco większym niż $2/3$ jest to jedna z liczb 1, 2, 3. Ponadto liczby 14 wwyż stanowią 10%, a od 144 wwyż poniżej 1% wszystkich współczynników występujących w „typowym” ułamku łańcuchowym. W ogólności, liczby od 1 do N występują w rozwinięciu „typowej” liczby rzeczywistej w ułamek łańcuchowy z częstością

$$P(1) + P(2) + \dots + P(N) = \sum_{k=1}^N \log_2 \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right) = \log_2 \frac{2N+2}{N+2},$$

a ostatnią równość nietrudno wykazać przez indukcję.

We wcześniejszym sformułowaniu użyliśmy określenia „prawie wszystkich”. Określenie to oznacza, że zbiór liczb pozbawionych tej własności jest w pewnym sensie niewielki, jego miara Lebesgue’a jest równa 0. O mierze Lebesgue’a (którą oznaczamy przez λ) nie będziemy się szczegółowo rozpisywać (jej formalną definicję można znaleźć w Δ_{19}^6), tutaj zaznaczymy tylko, że miarą Lebesgue’a odcinka jest jego długość, zbiór jednoelementowy ma miarę 0, tak samo jak każdy zbiór przeliczalny, w szczególności zbiór liczb wymiernych. Z kolei zbiór liczb niewymiernych zawarty w odcinku (a, b) ma miarę równą $b - a$.

Wróćmy do rozkładu Gaussa–Kuzmina. Na jego podstawie można sformułować i udowodnić bardzo ciekawy wniosek dotyczący średniej geometrycznej liczb występujących w rozwinięciu liczby $x \in [0, 1]$ w ułamek łańcuchowy.

Twierdzenie. Dla prawie wszystkich $x \in [0, 1]$ poniższa granica średnich geometrycznych istnieje i jest równa

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right)^{\log_2 k} =: K_0.$$

Występującą powyżej stałą K_0 nazywa się stałą Chinczyna i jest ona w przybliżeniu równa $K_0 \approx 2,685452001$. Jest to liczba, o której niewiele wiadomo,

począwszy od tego, czy jest to liczba wymierna. Wiadomo jednak, że jest również granicą wyrażenia zdefiniowanego dla $p < 1$:

$$K_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p},$$

gdy $p \rightarrow 0$. Okazuje się, że istnieje jawny wzór na K_p . Jest on dany przez wyrażenie podobne do tego z Twierdzenia:

$$K_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^p \log_2 \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \right) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Jeśli podstawimy teraz $p = -1$, to we wzorze na K_p otrzymamy granicę średnich harmonicznych wyrazów rozwinięcia liczby x w ułamek łańcuchowy, która dla prawie wszystkich x jest równa $K_{-1} \approx 1,74540566$.

Wydaje się, że nie powinniśmy mieć żadnego problemu ze wskazaniem liczby x , której liczby rozwinięcia w ułamek łańcuchowy pojawiają się zgodnie z rozkładem Gaussa–Kuzmina i spełniają (2), skoro prawie wszystkie liczby mają tę własność. Okazuje się, że sprawa jest jednak zupełnie inna – do dziś nie znamy **żadnego jawnego** (w sensie: niestworzonego tylko na tę okoliczność) przykładu liczby, która ma przedstawione własności. Jest to fakt zdumiewający, gdyż wcześniej napisaliśmy, że prawie wszystkie liczby rzeczywiste spełniają to prawo! Potrafimy co prawda wskazać taki ciąg liczb całkowitych, których średnie geometryczne zbliżają się do K_0 , w szczególności więc wiemy, jak może wyglądać ułamek łańcuchowy takiej liczby (a zatem i sama liczba). Nie potrafimy jednak podać żadnego „szkolnego” przykładu, typu $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, „złota liczba”, e (o tych wiemy, że nie spełniają tego prawa) lub π (kwestia tej stałej pozostaje otwarta).

Równości wiążące stałe K_0 oraz K_p z odpowiednimi granicami są faktami przyporządkowywanymi teorii liczb, jednak ich współczesne dowody wykorzystują w dużej mierze aparat teorii miary i elementy tak zwanej teorii ergodycznej. Jest to dziedzina matematyki koncentrująca się na zachowaniu układu zmieniającego się wraz z iterowaniem jakiegoś procesu. Ponadto przestrzeń stanów jest wyposażona w miarę (probabilistyczną) „ważącą” różne stany. Przedstawione w artykule wyniki można uzyskać, wykorzystując jedno z najważniejszych twierdzeń teorii: twierdzenie ergodyczne Birkhoffa.

Stała Chinczyna K_0 pojawia się w wielu innych interesujących tożsamościach. Poniżej prezentujemy jedną z bardziej eleganckich:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 - 1/k) \ln(1 + 1/k) = -\ln(K_0) \ln 2.$$

Dowód tej relacji jest dość złożony, dlatego nie będziemy go przedstawiać na łamach *Delty*. Co ciekawe, powyższa tożsamość ma swojego bliźniaka wyrażonego w języku całek:

$$\ln(K_0) \ln(2) = \int_1^{\infty} \frac{\ln[x]}{x(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{\ln[1/x]}{1+x} dx,$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Przypomnijmy – całka z funkcji nieujemnej na danym przedziale jest równa polu powierzchni części płaszczyzny zawartej między wykresem funkcji a osią OX .

Na koniec wróćmy jeszcze na chwilę do liczby π . Ułamkiem łańcuchowym tej liczby jest

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \dots]$$

i choć nie wiemy, czy średnia geometryczna liczb rozwinięcia π w ułamek łańcuchowy zbiega do K_0 , to jednak wiemy, że dla 17 001 303 początkowych liczb ta średnia jest równa 2,686393, a zatem jest to wynik z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Podobnie średnia harmoniczna tych liczb to 1,745882, a więc zgodność jest do 3 miejsc po przecinku. Oczywiście są to tylko dane empiryczne i nie można z nich wyciągać żadnych ogólnych wniosków. Podobne obserwacje zauważono dla stałej Eulera γ czy dla samej stałej Chinczyna K_0 , jednak problem zbieżności średnich geometrycznych do stałej K_0 pozostaje dla nich otwarty.

Średnią harmoniczną liczb a_1, \dots, a_n jest

$$H(a_1, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Złota liczba, $\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{3}$ mają okresowe rozwinięcia w ułamki łańcuchowe, jako rozwiązania równań kwadratowych o współczynnikach całkowitych. Liczba e ma rozwinięcie postaci

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots],$$

gdzie co trzecia liczba jest kolejną liczbą parzystą, pozostałe zaś są równe 1.

Zachęcamy do przeczytania artykułu „O potęgach dwójki” Pawła Strzeleckiego z Δ_{84}^8 , dostępnego również on-line.



Rozwiązanie zadania F 1030.

Graniczna prędkość spadku osiągnięta jest, gdy siła oporu zrówna się z sumą sił przyciągania grawitacyjnego ciała przez powierzchnię planety i siły wyporu jej atmosfery. Gęstość ciała ludzkiego jest niewiele większa od gęstości wody $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ – przyjmijmy, że jest jej równa. Niech objętość skaczącego wynosi V . Mamy wówczas: na Ziemi

$$\rho g V - \rho_z V g = \frac{1}{2} c \rho_z v_z^2 S$$

i na Wenus

$$\rho g_w V - \rho_w V g_w = \frac{1}{2} c \rho_w v_w^2 S,$$

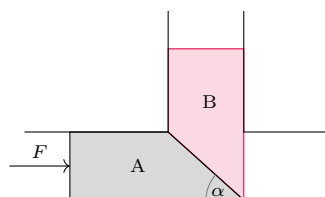
gdzie przyjęliśmy, że współczynnik c , objętość i powierzchnia człowieka są na obu planetach takie same (wymagaloby to zastosowania sztywnego skafandra ze względu na 91 razy większe ciśnienie atmosfery na Wenus niż na Ziemi).

Otrzymujemy:

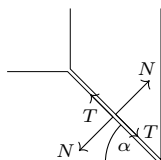
$$\left(\frac{v_w}{v_z} \right)^2 = \frac{(\rho - \rho_w) \rho_z g_w}{(\rho - \rho_z) \rho_w g}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $v_w = 0,123 v_z = 24,6 \text{ km/h}$ – to mniej niż 7 m/s, czyli prędkość, z jaką na Ziemi lądują skoczkiwie spadochronowi.

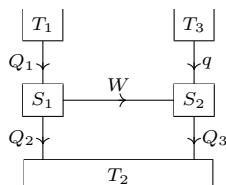
Klub 44 F



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
710 ($WT = 2,33$), 711 ($WT = 2,55$)
z numeru 1/2021

Michał Koźlik	Gliwice	4 – 42,82
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Piotr Adamczyk	Warszawa	37,77
Konrad Kapcia	Poznań	1 – 36,18
Paweł Perkowski	Ożarów	3 – 35,32
Sławomir Buć	Mystków	31,94

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2021

Przypominamy treść zadań:

716. Sztabka A może poruszać się w prowadnicy poziomej, a sztabka B w prowadnicy pionowej (rys. 1). Ścianki prowadnic są idealnie gładkie. Płaszczyzna styku sztabek nachylona jest do poziomu pod kątem α , a współczynnik tarcia między sztabkami wynosi μ . Jaką poziomą siłę należy przyłożyć do sztabki A, aby wprawić ją w ruch? Masa sztabki B jest równa m .

717. Do ogrzewania budynku wykorzystywane jest ciepło oddawane przez pracujący silnik cieplny. Silnik ten napędza chłodziarkę, która pobiera ciepło od wód gruntowych i również ogrzewa wodę w kaloryferach. Jaka jest maksymalna sprawność takiego cyklu ogrzewczego, jeżeli temperatura w kotle silnika cieplnego wynosi $t_1 = 210^\circ\text{C}$, temperatura wody w kaloryferach równa jest $t_2 = 60^\circ\text{C}$, a wody gruntowe mają temperaturę $t_3 = 10^\circ\text{C}$?

716. Na rysunku 2 przedstawione są siły oddziaływania między sztabkami. Warunek równowagi sił działających na sztabkę B w kierunku pionowym ma postać

$$N \cos \alpha - T \sin \alpha = mg.$$

Siły działające na sztabkę A w kierunku poziomym w stanie równowagi spełniają równanie

$$F = T \cos \alpha + N \sin \alpha.$$

Dopóki sztabki pozostają w spoczynku, T jest tarciem statycznym i spełniony jest warunek $T \leq \mu N$. W przypadku granicznym

$$N(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = mg \text{ oraz } F = N(\mu \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Sztabki zaczną się przesuwac, gdy

$$F > mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)/(\cos \alpha - \mu \sin \alpha),$$

a współczynnik tarcia $\mu < 1/\tan \alpha$.

717. Schemat działania układu przedstawia rysunek 3. Silnik S_1 pobiera z kotła ciepło Q_1 uzyskane w wyniku spalania paliwa, oddaje ciepło Q_2 do układu ogrzewczego i wykonuje pracę $W = Q_1 - Q_2$. Zakładamy, że silnik ten ma maksymalną możliwą sprawność $\eta_1 = (T_1 - T_2)/T_1 = W/Q_1$. Stąd

$$W = Q_1(T_1 - T_2)/T_1 \text{ oraz } Q_2 = Q_1 T_2/T_1.$$

Cykl pracy chłodziarki S_2 jest cyklem odwrotnym. Pobiera ona ciepło q od wód gruntowych i przekazuje układowi ogrzewczemu ciepło $Q_3 = W + q$.

Ponieważ znowu zakładamy, że jest to maszyna idealna, zachodzą związki $\eta_2 = W/Q_3 = (T_2 - T_3)/T_2$. Stąd

$$Q_3 = WT_2/(T_2 - T_1) = Q_1(T_1 - T_2)T_2/T_1(T_2 - T_3).$$

Ciepło zużyte na ogrzewanie budynku wynosi

$$Q = Q_2 + Q_3 = Q_1 T_2 (T_1 - T_3)/T_1 (T_2 - T_3).$$

Uwzględniając, że $T_1 = 483 \text{ K}$, $T_2 = 333 \text{ K}$, $T_3 = 283 \text{ K}$, otrzymujemy sprawność układu

$$\eta = Q/Q_1 \cong 2.$$

Fakt, że sprawność ta jest większa od 1, nie przeczy prawom termodynamiki, ponieważ pobierane jest tu ciepło z ubocznego źródła – wód gruntowych.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2021

Przypominamy treść zadań:

819. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkątów o boku 1. Rozważamy ciągi kolejno przyległych trójkątów, z których żaden nie powtarza się (trójkątki przyległe mają wspólny bok).

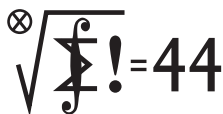
(a) Wyznaczyć największą możliwą liczbę trójkątów w takim ciągu.

(b) Czy i jak zmienia się wynik, jeśli dodatkowo zażądamy, by ostatni trójkąt przylegał do pierwszego?

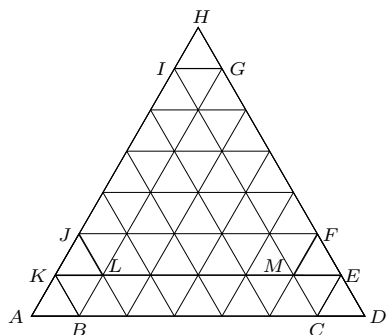
820. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich a, b, c :

$$\frac{a^2}{b^2 + bc} + \frac{b^2}{c^2 + ca} + \frac{c^2}{a^2 + ab} \geq \frac{3}{2}.$$

Klub 44 M



819. Malujemy pola planszy (trójkąciki jednostkowe) dwoma kolorami w „szachownicy”: trójkąciki podobne do dużego trójkąta w jednokładności prostej – to pola białe; w odwrotnej – czarne. Pola narożne (tj. mające wspólny wierzchołek z dużym trójkątem) są białe. Pola przyległe mają różne kolory. W ciągu długości d (kolejno przyległych pól) jest co najmniej $\lfloor d/2 \rfloor$ pól czarnych. Łączna liczba pól czarnych wynosi $(n^2 - n)/2$ (nietrudne sprawdzenie). Zatem $d \leq n^2 - n + 1$. Gdy ponadto taki



Łatwo sprawdzamy, że dla $n = 2$ tak jest (dla $n = 1$ zadanie nie ma wiele sensu). Ustalmy liczbę naturalną $n \geq 3$ i przyjmijmy słuszność stwierdzenia dla $n - 1$. Weźmy trójkąt ADH o boku n ; na jego obwodzie zaznaczmy kolejno punkty $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$, zaś wewnątrz – punkty L, M tak, by trójkąciki ABK, CDE, GHI były polami narożnymi trójkąta ADH , zaś trójkąciki KLJ, MEF – polami narożnymi trójkąta KEH , o boku $n - 1$. W nim (z założenia) istnieje ciąg długości $(n - 1)^2 - (n - 1) + 1$, czyli $n^2 - 3n + 3$, łączący pola KLJ i MEF . Polami trapezu $CEKB$ (w liczbie $2n - 3$) dopełniamy go do cyklu długości $n^2 - n$.

W trójkącie KEH istnieje też (z założenia) ciąg długości $n^2 - 3n + 3$, biegnący od pola GHI do MEF . Dołączamy do niego pola równoległoboku $CEKA$, od CEM do KAB (jest ich $2n - 2$). Dostajemy ciąg długości $n^2 - n + 1$, łączący pola narożne GHI, ABK . Przez obrót o 120° można dostać początek i koniec w dowolnie wybranych narożnikach.

Uzyskaliśmy obie części tezy indukcyjnej. Z udowodnionego stwierdzenia wynikają odpowiedzi dla obu części zadania: (a) $n^2 - n + 1$; (b) $n^2 - n$.

820. Ponieważ $2bc \leq b^2 + c^2$, zatem

$$\frac{a^2}{b^2 + bc} \geq \frac{a^2}{b^2 + \frac{1}{2}(b^2 + c^2)} = \frac{2a^2}{3b^2 + c^2}.$$

Podobnie szacujemy z dołu dwa pozostałe składniki podanego wyrażenia. Wystarczy wobec tego pokazać, że

$$(1) \quad \frac{a^2}{3b^2 + c^2} + \frac{b^2}{3c^2 + a^2} + \frac{c^2}{3a^2 + b^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Oznaczmy: $3b^2 + c^2 = u, 3c^2 + a^2 = v, 3a^2 + b^2 = w$. Ten układ trzech równań z niewiadomymi a^2, b^2, c^2 ma jedyne rozwiązanie:

$$(2) \quad a^2 = \frac{9w - 3u + v}{28}, \quad b^2 = \frac{9u - 3v + w}{28}, \quad c^2 = \frac{9v - 3w + u}{28}.$$

Lewa strona dowodzonej nierówności (1) przybiera po wprowadzeniu wartości (2) postać

$$L = \frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} = \frac{1}{28} \left(\frac{9w - 3u + v}{u} - 3 + \frac{v}{u} + \frac{9u - 3v + w}{v} - 3 + \frac{w}{v} + \frac{9v - 3w + u}{w} - 3 + \frac{u}{w} \right) = \frac{9}{28} \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{w} + \frac{w}{u} \right) - \frac{9}{28} + \frac{1}{28} \left(\frac{v}{u} + \frac{w}{v} + \frac{u}{w} \right).$$

W ostatnim uzyskanym wyrażeniu sumy w nawiasach są nie mniejsze niż 3 (nierówność między średnimi). Teza (1) wynika stąd natychmiast:

$$L \geq \frac{9}{28} \cdot 3 - \frac{9}{28} + \frac{1}{28} \cdot 3 = \frac{3}{4}.$$

(Witold Bednarek, autor zadania, przedstawił ten ładny dowód).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 813 ($WT = 2,95$) i 814 ($WT = 1,02$) z numeru 1/2021

Jerzy Cisło	Wrocław	43,40
Paweł Burdzy	Warszawa	43,18
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Mikołaj Pater	Opole	40,11
Michał Adamaszek	Kopenhaga	35,88
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Witold Bednarek	Łódź	33,04
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Kacper Morawski	Warszawa	32,13

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: W poszukiwaniu Tatoonie

Luke Skywalker w zadumaniu spoglądający na zachód dwóch słońc. W tle rzewna muzyka. Przed ekranem siedzący w zadumie widz, wyobrażający sobie życie na planecie krążącej wokół dwóch gwiazd. W 1977 roku, gdy powstawała pierwsza część *Gwiezdných Wojen*, taki system planetarny był czystą fikcją. Ba! W tamtych czasach nikt nie miał dowodów na istnienie planet poza Układem Słonecznym.

Oczywiście teraz wiemy, że egzoplanety, czyli planety pozasłoneczne, nie tylko istnieją, ale są wręcz normą w Galaktyce. Jednak czy mogłyby istnieć planeta krążąca wokół dwóch gwiazd? Toż to podręcznikowy problem trzech ciał! Ruch obiektów w takim układzie jest prawie całkowicie nieprzewidywalny. Na planetę znajdującą się w takim układzie działałyby liczne i złożone siły. Jej orbita byłaby bardzo niestabilna. W efekcie całkiem łatwo mogłaby zostać wystrzelona w daleką przestrzeń lub rozbić się o jedną z gwiazd. Życie takiej planety byłoby bardzo krótkie i niesamowicie chaotyczne. Nie ma mowy, żeby istniała. Prawda?

...Prawda?

A jednak! Pierwsza taka planeta została odkryta już w 2000 roku: PSR B1620-26b krąży równocześnie wokół pulsara i białego karła. Od tego czasu zaobserwowaliśmy już 11 układów binarnych gwiazd posiadających planetę. Zdarza się, że jest tych planet wiele. Ich orbity są mniej lub bardziej stabilne, ale istnieją. Co więcej, znaleźliśmy również planetę krążącą w układzie nie dwóch, nie trzech, a czterech gwiazd!

Na planetach znajdujących się w układach podwójnych gwiazd najprawdopodobniej nie istnieje życie w formie takiej jak na Ziemi. Drastyczne zmiany temperatury wynikające z obecności dwóch gwiazd są wystarczającą przeszkodą. Aczkolwiek jedna z tych planet (Kepler-1647b) teoretycznie znajduje się w tzw. „strefie zamieszkania” i na jej powierzchni mogłaby istnieć woda w stanie ciekłym. Planeta ta jest niestety gazowym gigantem, więc szanse są bardzo małe, możemy jednak spekulować, że życie mogło rozwinąć się na jednym z jej księżyców.

Dzięki coraz lepszym teleskopom jesteśmy w stanie dokładniej przyjrzeć się układom podwójnym gwiazd. W szczególności poszukujemy niewielkich zmian jasności i położenia gwiazd – wskazujących na istnienie planet. Jednym z takich instrumentów jest satelita TESS (*Transiting Exoplanet Survey Satellite*). To właśnie dzięki temu satelicie w 2020 roku odkryta została kolejna interesująca planeta w znanym układzie podwójnym gwiazd. TOI-1338 to planeta wielkości mniej więcej naszego Saturna. Okrąża dwie gwiazdy w ciągu niecałych 95 dni. To, co ją wyróżnia spośród innych tego typu planet, to jej zadziwiająco stabilna orbita. Oszacowano, że nie zmieniła się ona od około 40 000 lat. To dobra wiadomość dla planety – oznacza, że w najbliższym czasie nie zostanie ona wystrzelona ze swojej orbity. Niestety, jest gazowym gigantem, więc próżno doszukiwać się na niej piasków Tatoonie.

Ale wciąż szukamy.

... i niech moc będzie z nami.

Anna DURKALEC

Jak do tej pory zaobserwowaliśmy około 4000 planet spoza Układu Słonecznego.



Niebo w sierpniu

Ósmy miesiąc roku jest pierwszym po przesileniu letnim, w którym Słońce szybko wędruje na południe, obniżając w ciągu miesiąca wysokość górowania o ponad 10°. W ślad za tym wyraźnie zmniejsza się czas przebywania Słońca nad horyzontem, skraca się długość dnia i wydłuża długość nocy. W sierpniu na terenie całego kraju występują noce astronomiczne, a zatem przy nieobecności Księżyca można obserwować nawet słabsze obiekty niebieskie, które zwykle przy nie do końca ciemnym niebie są trudne do dostrzeżenia.

Nie ma już szans na pojawienie się u nas zjawiska łuku okołohoryzontalnego (więcej o nim na angielskiej stronie: www.atoptics.co.uk/cha2.htm), ponieważ Słońce wędruje za nisko, ale warto pamiętać o nim podczas wyjazdów w basen Morza Śródziemnego lub dalej na południe, gdzie sezon na to zjawisko trwa dłużej. Na początku sierpnia nad Bałtykiem można jeszcze próbować dostrzec obłoki srebrzyste, ale nawet tam im bliżej września, tym szansa na ich pojawienie się zbliża się do zera.

W sierpniu dobrze, lub bardzo dobrze, widoczne są cztery ostatnie planety Układu Słonecznego. Jowisz i Saturn przechodzą w tym miesiącu przez opozycję względem Słońca, Uran i Neptun też szykują się do swoich opozycji, przez które przejdą we wrześniu (Neptun) i w październiku (Uran). Planety typu ziemskiego z dużych północnych szerokości geograficznych widoczne są słabo bądź wcale. **Merkury** pierwszego dnia sierpnia przejdzie przez koniunkcję górną, czyli spotka się ze Słońcem, wędrując wtedy po przeciwnej jego stronie niż Ziemia. Następnie podąży w kierunku maksymalnej elongacji wschodniej, by w połowie września oddalić się na bardzo dużą, jak na tę planetę, odległość 27° . Elongacja wschodnia oznacza położenie na wschód od Słońca i widoczność wieczorną. O tej porze doby na przełomie lata i jesieni ekliptyka jest nachylona do horyzontu pod małym kątem. Wskutek tego Merkury w dniu maksymalnej elongacji zachodzi mniej niż pół godziny po Słońcu i jest niewidoczny. Bardzo dobre warunki obserwacyjne tej planety występują za to bliżej równika i na półkuli południowej.

Druga z planet wewnętrznych dąży do swojej maksymalnej elongacji wschodniej, którą osiągnie pod koniec października. **Wenus** niestety też pada ofiarą niskiego położenia ekliptyki – mimo tego, że pod koniec sierpnia oddali się od Słońca na ponad 40° , to już w momencie jego zachodu zajmuje pozycję na wysokości mniejszej niż 10° i znika z nieboskłonu zaledwie godzinę później. Nie pomaga tutaj fakt, że w sierpniu planeta przechodzi na południe od ekliptyki i aż do końca jesieni pozostanie po tej stronie. Jednak pomimo tych przeciwności jej zaobserwowanie jest możliwe, a to dlatego, że świeci bardzo jasno. Nie jest to łatwe, gdyż na dostrzeżenie planety po zachodzie Słońca jest tylko kilkadziesiąt minut. W sierpniu blask Wenus wynosi -4^m , a jej tarcza ma średnicę $15''$ i fazę ponad 75%. Znacznie lepiej widać ją na południe od Polski.

Dwie największe planety Układu Słonecznego są widoczne całkiem dobrze. Nie można napisać, że bardzo dobrze, ponieważ **Saturn** góruje na wysokości około 20° , **Jowisz** zaś tylko o 5° wyżej, i ich światło przed dotarciem do powierzchni Ziemi musi przejść przez grubą warstwę atmosfery. Pocieszeniem jest fakt, że planety górują kilka stopni wyżej niż rok temu, a zatem ich obraz teleskopowy jest mniej zdegradowany. Drugiego dnia sierpnia Saturn znajdzie się w opozycji względem Słońca, zaś 20 sierpnia tę samą konfigurację zajmie Jowisz. Stąd też druga połowa lata jest najlepszym okresem widoczności obu planet, które teraz mają największe jasności i rozmiary kątowe. Jowisz świeci z jasnością $-2,9^m$ przy średnicy tarczy $49''$, blask Saturna natomiast wynosi $+0,2^m$, a jego tarcza ma średnicę $19''$. Jowisza od Saturna oddziela na niebie niecałe 20° .

W tym roku Jowisz przechodzi przez równonoc i płaszczyzna jego równika jest równoległa do płaszczyzny orbity Ziemi. W ślad za tym płaszczyzny orbit księżyców galileuszowych planety również ustawione są równoległe do ekliptyki. W rezultacie co jakiś czas dochodzi do wzajemnych zakryć i zaćmień jednych księżyców galileuszowych przez inne, co przez teleskopy można obserwować jako zlewanie się księżyców ze sobą, albo

kilkugodzinne pociemnienie zaćmiewanego księżyca. Więcej o tych zjawiskach można poczytać na stronie amerykańskiego czasopisma *Sky and Telescope* (skyandtelescope.org/astronomy-news/mutual-event-season-heats-up-at-jupiter/).

Neptun przechodzi przez opozycję w połowie września, natomiast **Uran** niecałe dwa miesiące później. Neptun w swojej wędrówce dotarł już na pogranicze gwiazdozbiorów Wodnika i Ryb, przecinając południk lokalny 10° wyżej od Jowisza. Uran kreśli swoją pętlę w gwiazdozbiornie Barana i góruje o świcie, ale pod koniec nocy astronomicznej przekracza wysokość 50° nad widnokregiem. A zatem w sierpniu warunki obserwacyjne dwóch ostatnich planet Układu Słonecznego są znacznie lepsze od dwóch największych. W sierpniu Neptun osiąga jasność $+7,8^m$, Uran natomiast jest o $2,1^m$ jaśniejszy. Do dostrzeżenia Neptuna potrzebna jest większa lornetka lub teleskop. Urana na ciemnym niebie można dostrzec gołym okiem.

W sierpniu promieniują meteory ze znanego roju **Perseidów**, osiągając maksimum aktywności około 12 dnia miesiąca. Jest to najchętniej obserwowany rój meteorów, gdyż o tej porze roku noce najczęściej są jeszcze ciepłe, a i podczas wakacji zwykle jest więcej wolnego czasu. Radiant roju znajduje się na pograniczu gwiazdozbiorów Perseusza i Kasjopei. Około godziny 3, na koniec nocy astronomicznej radiant osiąga wysokość 60° nad wschodnią częścią nieboskłonu. W maksimum aktywności można spodziewać się nawet ponad 100 meteorów na godzinę. W tym roku warunki obserwacyjne Perseidów są bardzo dobre, nie przeszkodzi nam w tym słabo widoczny wtedy Księżyc przed I kwadrą.

Srebrny Glob zacznie miesiąc od ostatniej kwadry i spotkania z Uranem w gwiazdozbiornie Barana i podąży do nowiu 8 sierpnia. O tej porze roku rano ekliptyka tworzy duży kąt z widnokregiem, stąd **Księżyc** można obserwować prawie do samego spotkania ze Słońcem. Po drodze 2 sierpnia 35-procentowy sierp Księżyc przejdzie 7° na południe od Plejad, dobę później zaś odchudzony do 27% dotrze na 5° na północ od Aldebarana. Kolejno 5, 6 i 7 dnia sierpnia bardzo cienki już sierp Srebrnego Globu odwiedzi gwiazdozbiór Bliźniąt. W tym czasie jego tarcza pokaże fazę, odpowiednio, 12%, 6% i zaledwie 2%. Na godzinę przed wschodem Słońca 7 sierpnia bardzo cienki sierp Księżyc zdaży się wznieść na wysokość 6° , a kolejno 6° i 10° nad nim znajdzie się para gwiazd Polluks i Kastor.

Po nowiu, 11 sierpnia, naturalny satelita Ziemi w fazie 12% przejdzie 5° od Wenus, dwa dni później, w fazie zwiększonej do 30%, przejdzie 5° od Spiki w Pannie, by 15 sierpnia osiągnąć I kwadrę w Wadze. Dobę później tarcza Księżyc minie Antaresa w Skorpionie w odległości nieco ponad 3° . Pełnia Księżyc przypada na 22 sierpnia, a wcześniej odwiedzi on planety Saturn i Jowisz. Przed końcem miesiąca Srebrny Glob dotrze do ostatniej kwadry, przechodząc wtedy między Plejadami a Hiadami. Zanim to nastąpi, 24 sierpnia czeka Księżyc spotkanie z Neptunem, zaś 4 dni później – z Uranem.

Ariel MAJCHER

Władca z głową w gwiazdach

Nikt nie wątpi, że naukowcy, zwłaszcza zajmujący się naukami ścisłymi i przyrodniczymi, są bardzo umiędzynarodowioną społecznością. Jednak, gdy myślimy o tym, skąd wzięła się wiedza, na której zbudowane są obecne przekonania o funkcjonowaniu świata, mamy niewątpliwą tendencję, by zawęzić nasze myślenie do osiągnięć kultury Zachodu.

Dlatego tylko wtajemniczeni wiedzą, że wnuk mongolskiego wodza Timura, zwanego również Tamerlanem, był wybitnym piętnastowiecznym astronomem (baza filmowa IMDb wręcz uważa go za postać fikcyjną). **Uług Beg** (1394–1449), bo o nim będzie mowa, towarzyszył swojemu dziadkowi w podbojach, z woli ojca-władcy został w wieku szesnastu lat gubernatorem Samarkandy (obecnie Uzbekistan), a nieco później rządził również całą otaczającą ją prowincją. Wybudowawszy w swej stolicy medresę, której budowlę można do dziś podziwiać, uczynił ją ważnym ośrodkiem życia naukowego.

Uług Beg pasjonował się przede wszystkim astronomią. Wybudował wielkie obserwatorium, doskonale wyposażone w różnorodne przyrządy naukowe, w tym olbrzymi sekstans o promieniu 36 metrów, za pomocą którego mógł osiągnąć dokładność kątową w określaniu położenia Słońca i Księżyca odpowiadającą rozmiarowi pięciogroszówki oglądanej z odległości pół kilometra. Dzięki temu mógł np. wyznaczyć nachylenie osi obrotu Ziemi do płaszczyzny obiegu Ziemi wokół Słońca tak dokładnie, że uzyskana przez niego wartość jest zgodna z mierzoną obecnie w zakresie dzisiejszych (!) niepewności pomiarowych.

Uług Beg był także autorem niezwykle precyzyjnego katalogu ponad tysiąca gwiazd, którego stworzenie może się równać z dokonaniem Ptolemeusza i Tycho Brahe. Co więcej, dzięki doskonałej precyzji swoich obserwacji Uług Beg był w stanie poprawić błędy w katalogu tego pierwszego, popełnione przez samego autora, jak również jego następców uzupełniających te zestawienia.

Dzięki pozycji politycznej i bogactwu Uług Beg mógł prowadzić swoje działania w dużej skali. Zlecił budowę pięćdziesięciometrowego gnomonu, za pomocą którego wyznaczył długość roku gwiazdowego (okres obiegu Ziemi wokół Słońca) z dokładnością mniejszą niż minuta, a kilka lat później uzyskał wynik dwukrotnie dokładniejszy. Był to wynik lepszy nawet od późniejszego – niemal o stulecie – rezultatu przytoczonego przez Kopernika za Thabitem ibn Qurra, który formalnie miał mieć dokładność rzędu pojedynczych sekund, ale był zaburzony przez niepewności systematyczne.

Trudno wyobrazić sobie pracę astronoma niekorzystającego z funkcji trygonometrycznych. Uług Beg sporządził zatem tablice wartości funkcji sinus i tangens z dokładnością do ósmego miejsca po przecinku. Opierały się one na dokładnym obliczeniu wartości $\sin 1^\circ$. Uług Beg zauważył, że jest ona rozwiązaniem pewnego równania trzeciego stopnia, które wyznaczył za pomocą metod numerycznych. Względna dokładność tego rachunku była lepsza niż jedna stubilionowa.

Zaangażowanie naukowców w politykę często przynosi marne rezultaty.

Po śmierci ojca Uług Beg ruszył do stolicy cesarstwa Timurydów, by objąć opuszczony tron. Jednak ten sam pomysł przyszedł do głowy jego bratankowi, który pobił wojska stryja, niwecząc jego plany sukcesyjne. W międzyczasie przeciw Uług Begowi wystąpił także jego najstarszy syn, który wykorzystał przewagę militarną oraz bunt w Samarkandzie i pozbawił ojca władzy. Uług Beg otrzymał zezwolenie na pielgrzymkę do Mekki, która miała być swoistym wygnaniem, jednak wysłani przez zapobiegliwego syna skrytobójcy dopilnowali, aby z niej nie powrócił.

W tym roku pamięci Uług Bega poświęcona była jedna z sesji wielkiej, międzynarodowej konferencji grawitacyjno-astrofizycznej im. Marcela Grossmanna.





Sam nie wiem, co się tu jeszcze mieści

Bartłomiej BZDEGA

Ten odcinek kącika poświęcony jest zadaniom, w których musimy rozstrzygać, czy dana liczba obiektów pewnego rodzaju mieści się na określonym obszarze. Najczęściej pytamy o największą możliwą liczbę obiektów (niech m będzie tą liczbą) – w takim przypadku rozwiązanie zadania powinno się składać z dwóch części:

- (1) wykazania, że m obiektów się zmieści;
- (2) wykazania, że nie zmieści się ich więcej niż m .

Jako przykład rozwiążemy następujące zadanie:

0. Na kwadracie o boku 2 należy wybrać największą możliwą liczbę punktów, tak by odległość pomiędzy każdymi dwoma z nich była nie mniejsza niż 1.

Część (1) jest zazwyczaj prostsza – tu wystarczy podać jedno rozmieszczenie największej możliwej liczby punktów. Nietrudno zgadnąć, że jest ich 9: w narożnikach, na środkach boków i na środku kwadratu.

Część (2) jest trudniejsza – trzeba udowodnić, że jeśli wybrano więcej punktów, to nie spełniają one założeń zadania, czyli rozważyć wszystkie możliwe wybory większej liczby punktów. Jest ich na ogół bardzo dużo, a czasem – jak w tym zadaniu – nieskończenie wiele, więc nie da się przeanalizować ich wszystkich po kolei; do tego potrzebna jest metoda. Pokażę tutaj dwie, pierwsza z nich pozwala na dokończenie rozwiązania.

Metoda podziału polega na tym, że dzielimy obszar na kilka mniejszych, na których potrafimy oszacować liczbę obiektów. Kwadrat o boku 2 można podzielić na 9 kwadracików o boku $\frac{2}{3}$. Z nierówności $\frac{2}{3}\sqrt{2} < 1$ wynika, że na każdym kwadraciku można wybrać co najwyżej jeden punkt, a zatem ich liczba nie może przekroczyć 9.

Drugą jest **metoda miary**, którą zazwyczaj stosujemy wtedy, gdy obiekty, które umieszczamy, mają miarę, czyli na przykład pole lub objętość. Idea jest bardzo prosta: łączna miara umieszczanych obiektów, o ile są one parami rozłączne, nie może przekroczyć miary obszaru, na którym je umieszczamy.

Metody miary nie możemy bezpośrednio zastosować do powyższego zadania, ale da się to zrobić po jego lekkiej modyfikacji. Jeśli narysujemy koła otwarte o promieniu $\frac{1}{2}$, których środkami są wybrane punkty, to te koła są rozłączne, bo odległości między wybranymi punktami wynoszą co najmniej 1. Obszar, na którym te koła się znajdują, nie jest już kwadratem o boku 2, bo mogą one poza ten kwadrat wystawać. Jest to kwadrat o boku 2 obudowany czterema prostokątami o wymiarach $2 \times \frac{1}{2}$ i czterema ćwiartkami koła o promieniu $\frac{1}{2}$. Jego pole jest równe $8 + \frac{1}{4}\pi$, a pole pojedynczego koła to $\frac{1}{4}\pi$. Jeżeli zatem n jest liczbą umieszczonych punktów, to $\frac{1}{4}\pi \cdot n \leq 8 + \frac{1}{4}\pi$, co daje $n \leq 11$. W tym przypadku metoda nie dała pożądanego rezultatu, oszacowanie jest za słabe. No cóż... trzeba spróbować inaczej.

Zadania

1. Na szachownicy 8×8 należy umieścić największą możliwą liczbę figur szachowych danego rodzaju w taki sposób, by żadne dwie z nich się nie atakowały:
(a) wieże; (b) gońce; (c) skoczki; (d) króle.
2. Jaką największą liczbę prostopadłościaków o wymiarach $2 \times 2 \times 1$ można zmieścić w sześciennym pudełku o krawędzi 3?
3. Czy w kwadracie o boku 5 można tak umieścić 6 punktów, by każde dwa z nich były oddalone co najmniej o 3?
4. Rozstrzygnąć, czy w sześciennym pudełku o krawędzi 4 można umieścić 65 kul o średnicy 1 (52 OM).
5. Na płaszczyźnie umieszczono 2017 punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest większa od 1. Wykazać, że odległość pomiędzy pewnymi dwoma spośród tych punktów jest większa od 35 (69 OM).
6. Wewnątrz koła o średnicy 1 chcemy narysować pewną liczbę okręgów o sumie średnic większej niż 1. Dodatkowym warunkiem jest istnienie takiej prostej ℓ , że każda prosta równoległa do ℓ jest sieczną co najwyżej jednego narysowanego okręgu. Czy to jest możliwe?

Wskażówki do zadań
1. We wszystkich podpunktach można zastosować metodę podziału.
(a) W każdej kolumnie mieści się najwyżej jedna wieża.
(b) Trzeba rozważyć 13 nierywalnych, równoległych diagonal i jedną główną, prostopadłą do nich.
(c) Skoczek atakuje pola innego koloru niż to, na którym stoi. W prostokącie 2×4 mieszczą się najwyżej 4 skoczki.
(d) W kwadracie 2×2 mieści się najwyżej jeden król.
2. Wbrew pozorom metoda miary daje tu optymalne oszacowanie.
3. Jest to możliwe. Należy powstrzymać od ruchów ustawiania pierwszych czterech punktów w narożnikach kwadratu.
4. $16 + 9 + 9 + 16 + 9 + 16 > 64$.
5. Wystarczy wykazać (dlaczego?), że te 2017 punktów nie zmieści się w kwadracie o boku 35. Można to zrobić, stosując metodę miary do modyfikacji tego zadania.
6. Zrutować okręgi na średnicę prostopadłą do ℓ i zastosować metodę podziału do otrzymanych odcinków.
Wywnioskować stąd, że istnieje prosta równoległa do ℓ , która jest sieczną co najwyżej dwóch narysowanych okręgów.

$61^{+2\epsilon}$

SZKOŁA MATEMATYKI POGLĄDOWEJ

„OGRANICZENIA”

27-29 SIERPANIA 2021, MIEJSCE: WCIAŻ INTERNET

$61^{+2\epsilon}$

$O(n^3)$

$\neq 0 = c?$



REJESTRACJA
do 20 SIERPANIA

$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \dots$



smp.uph.edu.pl

 SzkMatPog