

# deltoid

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu \cdot s \quad \pi=3,141592\dots$$

NR 6 (565) 2021  
CENA 5,5 ZŁ VAT 8%  
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK  
[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

Jak wyznaczyć  
najbardziej dowolny  
trojkąt?  
str. 12



UNIwersytet  
WARSZAWSKI

9 770137 300106

90

Nakład: 3500 egz.



19 kwietnia 2021 roku zmarł  
**Andrzej Białynicki-Birula**  
nestor matematyki warszawskiej  
wychowawca wielu pokoleń matematyków  
autor *Delty*

## SPIS TREŚCI NUMERU 6 (565)

Z kamerą wśród egzotycznych nuklidów  
*Marek Pfułtner*



Zadania

Jak powstały szczepionki mRNA  
*Magdalena Fikus*

$3 \leq \pi \leq 4$

*Michał Miśkiewicz*

Czy życie musi być oparte na węglu?  
*Janusz Pętkowski*

Jak wyznaczyć najbardziej dowolny trójkąt?  
*Piotr Pikul*

Podejrzane twierdzenie o ciągach  
*Adam Bobrowski, Adam Gregosiewicz*

John Horton Conway (1937–2020)  
*Józef H. Przytycki, Witold Rosicki*

Klub 44

Prosto z nieba: Nagła śmierć we  
Wszechświecie

Niebo w czerwcu

Aktualności  
Młyny nauki



Jednoznaczność rozkładu w  $\mathbb{N}$  –  
część 1  
*Bartłomiej Bzdęga*

str. 1 **Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

str. 4 **Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

str. 6 **Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

str. 8 **Adres do korespondencji:** Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

str. 12 Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia. Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja. Druk: Drukarnia Greg [www.greg-drukarnia.pl](http://www.greg-drukarnia.pl)

str. 14 **Prenumerata:** Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

str. 18 **Numer archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

str. 20 Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł

str. 22  **Strona internetowa** (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)  
**Można nas też znaleźć na** [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

str. 24

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Z kamerą wśród egzotycznych nuklidów

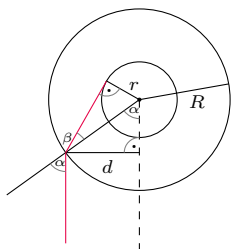
Marek PFÜTZNER\*

\*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



## Rozwiązanie zadania F 1025.

Obserwator zewnętrzny jako wewnętrzny brzeg rurki zaobserwuje promień stychny do tego brzegu i opuszczający zewnętrzną powierzchnię rurki najdalej od jej środka.



Mamy:

$$\begin{aligned}d &= R \sin \alpha, \\r &= R \sin \beta, \\ \sin \alpha &= n \sin \beta.\end{aligned}$$

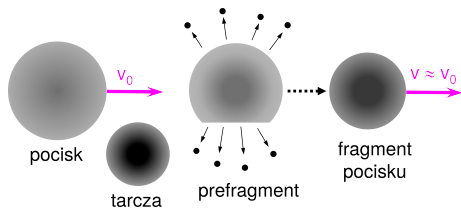
Otrzymujemy:  $d = n \cdot r$ . Jest to wynik poprawny, jeśli  $r < R/n$ . Gdy  $r \geq R/n$ , to obserwator zewnętrzny nie może dostrzec wewnętrznej powierzchni rurki.

W centrum każdego atomu znajduje się jądro złożone z neutronów i protonów. Siły jądrowe wiążą te cząstki (zwane nukleonami) w bardzo ciekawy obiekt, którego rozmiary są rzędu femtometrów ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ), a gęstość rzędu  $10^{17} \text{ kg/m}^3$ . Gdy wokół jądra atomowego złożonego z określonej liczby  $N$  neutronów i  $Z$  protonów krąży  $Z$  elektronów, to taki obojętny elektrycznie atom nazywamy nuklidem. Jedno z podstawowych pytań, jakie możemy postawić, to: ile różnych nuklidów może istnieć, a dokładniej, dla jakich kombinacji liczb  $N$  i  $Z$  jądro nuklidu będzie związane przez czas znacznie dłuższy niż  $10^{-21} \text{ s}$ , czyli dłuższy od typowego czasu przemian zachodzących pod wpływem sił jądrowych? Wiemy, że pewne liczby  $N$  i  $Z$  tworzą nuklidy trwałe, występujące w przyrodzie. W laboratoriach potrafimy jednak tworzyć nuklidy o innych liczbach nukleonów, które okazują się nietrwałe, promieniotwórcze, ale żyją dostatecznie długo, by spełnić powyższą definicję istnienia. Te nuklidy, które mają największą dysproporcję pomiędzy liczbami  $N$  i  $Z$ , w stosunku do nuklidów trwałych, i które są na granicy jądrowego istnienia, nazywamy *egzotycznymi*.

Okazuje się, że w teorii jądra atomowego nie potrafimy znaleźć dokładnej odpowiedzi na postawione powyżej pytanie. Co więcej, im dalej od nuklidów trwałych, tym trudniej o dokładne przewidywania teoretyczne. Trzeba jednak przyznać, że stoimy tu przed jednym z najtrudniejszych zadań fizyki: opisać kwantowy obiekt złożony z wielu składników oddziałujących silnie, a na domiar złego występujące tu siły są bardzo złożone i nie do końca poznane. W tej sytuacji ogromną rolę odgrywają badania doświadczalne. Postęp w poznawaniu i rozumieniu nuklidów odbywa się dzięki ciągłemu współdziałaniu eksperymentatorów i teoretyków. Ci pierwsi wytwarzają nowe nuklidy i mierzą ich własności, dostarczając dane potrzebne tym drugim do budowania i ulepszania modeli teoretycznych. Dążymy do opracowania jak najlepszych modeli, bo są one sprawdzianem tego, czy dobrze zrozumieliśmy badane zjawiska, a to przecież jest głównym celem badań naukowych. Jest też inny powód, praktyczny. Czasem potrzebne są własności nuklidów, dla których nie ma żadnych danych doświadczalnych. Na przykład jeden z astrofizycznych procesów nukleosyntezy, tzw. proces szybkiego wychwyty neutronów (proces  $r$ ) zachodzi z udziałem nuklidów tak bardzo neutrono-nadmiarowych, że są one daleko poza zasięgiem współczesnych eksperymentów, a możliwe, że wielu z nich nigdy nie uda się wytworzyć w laboratorium. Astrofizycy badający powstawanie pierwiastków chemicznych w kosmosie muszą w takim przypadku zdać się na przewidywania teoretyczne.

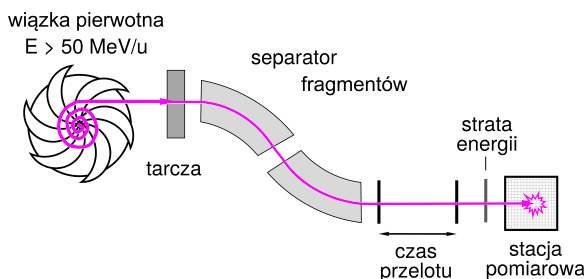
Liczba wytworzonych i zbadanych nuklidów rośnie z czasem, w miarę postępu technik doświadczalnych, a szczególnie metod przyspieszania cząstek i ciężkich jonów. Sto lat temu mieliśmy wiedzę o około 100 nuklidach (choć wtedy nie było tego pojęcia i nie znano jeszcze neutronu). Wiedza ta pochodziła z prac pionierów promieniotwórczości i z badań izotopów trwałych pierwiastków, prowadzonych z użyciem spektrometrów masowych. Na początku lat 80. ubiegłego wieku w tablicy nuklidów było już około 2200 pozycji, a obecnie znamy ich około 3300. Prace w tej dziedzinie nie ustają – w ostatnich kilku latach odkrywano średnio około 30 nowych nuklidów rocznie. Najnowsze i najbardziej zaawansowane modele teoretyczne przewidują, że wszystkich możliwych nuklidów powinno być około 7000. Oznacza to, że w eksploracji świata nuklidów osiągnęliśmy zaledwie jego połowę, a więc mamy przed sobą jeszcze drugie tyle do poznania.

W ostatnich trzech dekadach największe postępy w wytwarzaniu nuklidów egzotycznych zawdzięczamy metodzie wykorzystującej reakcję fragmentacji pocisku. Reakcja ta wymaga przyspieszenia ciężkich jonów do energii większej niż  $50 \text{ MeV/nukleon}$ . Ich prędkość jest wtedy większa niż 30% prędkości światła – są to więc cząstki relatywistyczne. Wiązka takich pocisków pada na tarczę, w której zachodzi reakcja. Przy tak dużej energii przebieg reakcji możemy w przybliżeniu opisać w prosty sposób: gdy jądro pocisku „zahaczy” o jądro tarczy, to zostanie ucięte, a fragment pocisku poleci dalej z prawie niezmienną prędkością i kierunkiem lotu (rys. 1). Wielkość fragmentu zależy od stopnia przekroczenia zderzających się cząstek, który jest losowy. Łatwo zobaczyć, że w wyniku takich zderzeń można wytworzyć w zasadzie każde jądro, które ma mniej nukleonów niż jądro pocisku. Pociskami są jony nuklidów trwałych, zatem prawdopodobieństwo wytworzenia jądra



Rys. 1. Schemat reakcji fragmentacji. W wyniku zderzenia jądra pocisku, rozpędzonego do prędkości relatywistycznej, ze spoczywającym jądrem tarczy pocisk ulega obcięciu. Powstający prefragment jest silnie wzbudzony i wyrzuca nukleony. Powstały fragment porusza się z prędkością bliską początkowej prędkości pocisku

egzotycznego, które znacznie różni się od pocisku, jest bardzo małe, dlatego wymagane są wiązki pocisków o jak największej intensywności. Tarcza jest na tyle cienka, że produkty reakcji, jak i pociski, które nie wywołały reakcji, przelatują przez nią z niewielką stratą energii. Za tarczą mamy więc intensywną wiązkę wszystkich możliwych produktów reakcji i dużą część pierwotnej wiązki pocisków. Z tej różnorodnej mieszaniny musimy teraz wyłowić interesujące nas produkty, których jest zazwyczaj bardzo mało. Służy do tego tzw. separator fragmentów, złożony układ jonowo-optyczny, w którym odpowiednio uformowane pola magnetyczne przepuszczają tylko jony o wybranych cechach. Na koniec, znacznie zredukowana i oczyszczona wiązka produktów kierowana jest do układów detekcyjnych, gdzie dokonuje się pomiarów wyselekcjonowanych produktów (rys. 2).



Rys. 2. Bardzo uproszczony schemat eksperymentu. Wiązka pocisków pada na tarczę, w której zachodzi reakcja fragmentacji. Przez separator fragmentów przechodzą tylko produkty, których masa i ładunek są w wybranym wąskim przedziale. Pomiar czasu przelotu (prędkości), położenia (odchylenia przez pole magnetyczne) oraz straty energii w materiale detektora pozwalają wyznaczyć masę i ładunek produktu w czasie lotu. Ostatnia faza pomiaru, kiedy pocisk wbija się w materiał detektora i ostatecznie zatrzymuje, nazywa się *implantacja*. W eksperymentach omawianych w artykule wszystkie produkty docierające do końcowego detektora były całkowicie zjonizowane – ich ładunek elektryczny był równy liczbie atomowej  $Z$ . W końcowej stacji pomiarowej obserwujemy rozpad promieniotwórczy wybranych produktów

Opisana metoda fragmentacji ma kilka ważnych zalet wynikających z dużej prędkości produktów reakcji. Docierają one do końcowych detektorów po czasie rzędu mikrosekundy, co umożliwia badanie przemian o bardzo krótkich czasach życia. Mogą głęboko wbijać się w materiał detektora (*implantacja*), co pozwala rejestrować ich rozpady promieniotwórcze z dużą wydajnością. Ale najważniejsza zaleta wynika z możliwości pełnej identyfikacji jonów w locie. W końcowej części separatora, gdzie intensywność cząstek jest już niewielka, jony przelatują przez kilka cienkich detektorów, które mierzą czas przelotu, położenie, a także straty energii w materiale detektora. Na podstawie tych wartości można niemal natychmiast

i często jednoznacznie określić liczby  $N$  i  $Z$  lecącego jonu, zanim wpadnie on do końcowej stacji pomiarowej. Skutkiem tego jest nadzwyczajna selektywność – potrafimy identyfikować pojedyncze, wybrane egzotyczne nuklidy, a potem obserwować ich przemiany promieniotwórcze. Zasadnicza idea metody fragmentacji pocisku jest, jak widać, bardzo prosta. Wyzwanie polega na tym, że akceleratory przyspieszające ciężkie jony do wysokiej energii i odpowiednie do tej energii separatory są masywne i kosztowne. Dlatego technikę tę stosuje się tylko w kilku laboratoriach na świecie.

Metoda fragmentacji pocisku okazała się kluczowa w badaniach skrajnie neutrono-deficytowego izotopu żelaza  $^{45}\text{Fe}$ . Nuklid ten ma 26 protonów i tylko 19 neutronów, aż o 9 mniej niż najlżejszy trwały izotop tego pierwiastka  $^{54}\text{Fe}$ . Na początku nie było wiadomo, czy tak egzotyczny nuklid istnieje, czy da się go w ogóle wytworzyć. Pierwszy eksperyment przeprowadziliśmy z moimi współpracownikami w 1996 roku w niemieckim laboratorium GSI Darmstadt. Pociskami były jony izotopu niklu  $^{58}\text{Ni}$ , przyspieszone do energii 600 MeV/nukleon, które padały na tarczę berylową o grubości około 2 cm. Produkty reakcji wpadały do separatora fragmentów o długości około 70 m, na koniec którego docierało około 200 jonów na sekundę. Po trzech dniach eksperymentu zidentyfikowaliśmy wśród nich 3 przypadki  $^{45}\text{Fe}$ . Odnalezienie igły w stogu siana nie wydaje się przy tym zadaniem trudnym. Aby powstało jądro  $^{45}\text{Fe}$ , od pocisku trzeba oderwać dokładnie 2 protony i 11 neutronów. O tym, jak mało prawdopodobne jest takie zdarzenie, świadczy fakt, że w trakcie pomiarów na tarczę padło około  $10^{14}$  pocisków. W 2001 roku przeprowadziliśmy drugi eksperyment w tym samym laboratorium i w tych samych warunkach, ale tym razem byliśmy przygotowani do detekcji rozpadów. Próba ta zakończyła się dużym sukcesem, gdyż odkryliśmy nowy rodzaj przemiany promieniotwórczej – jednoczesną emisję dwóch protonów ( $2p$ ) przez  $^{45}\text{Fe}$ .

Zidentyfikowane jony wychodzące z separatora były zatrzymywane w detektorach krzemowych. Służyły one do rejestracji momentu implantacji jonu w detektor i do pomiaru całkowitej energii wyzwalonej podczas rozpadu promieniotwórczego. Teraz zaobserwowaliśmy 6 przypadków  $^{45}\text{Fe}$ . Dla 5 z nich udało się zanotować moment rozpadu i zmierzyć wydzieloną przy tym energię. Wyznaczony czas półrozpadu  $^{45}\text{Fe}$  wyniósł około 3 ms. W czterech przypadkach wydzielana się energia około 1 MeV. Dokładna analiza tych zdarzeń, biorąc pod uwagę także informacje z innych detektorów, doprowadziła do wniosku, że można je wyjaśnić tylko założeniem, że z jądra  $^{45}\text{Fe}$  zostały wyemitowane dwa protony jednocześnie. Gdyby emitowany był tylko jeden proton, to czas półrozpadu powinien być dużo krótszy, poniżej  $10^{-15}$  s. Dla emisji cząstki  $\alpha$  szacunki wskazywały czas rzędu  $10^{10}$  s. Brak obserwacji fotonów o energii 511 keV, emitowanych przy anihilacji pozytonów, wykluczył z kolei przemianę  $\beta^+$ . Mimo bardzo małej próbki (4 zdarzenia!) argumenty

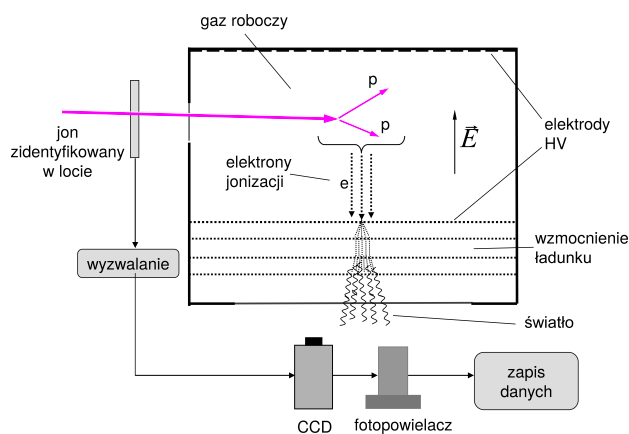
Detektor krzemowy działa tak, że przechodząca przez niego cząstka naładowana, taka jak proton, jonizuje materiał detektora, wskutek czego powstaje impuls elektryczny. Po wzmacnieniu przez elektronikę amplituda tego impulsu jest miarą energii, jaką w detektorze zostawiła ta cząstka. W naszej sytuacji jądro  $^{45}\text{Fe}$  było wbite głęboko w dość gruby detektor, tak że emitowane cząstki musiały się zatrzymać wewnątrz niego, czyli zostawić w nim całą swoją energię. Jeśli emitowane są dwie cząstki jednocześnie, to każda z nich daje swój impuls, ale oba te impulsy nakładają się – elektronika odczytuje to jako jeden impuls, tyle że większy. Nie ma możliwości zobaczenia, czy rejestrowany impuls był wywołany przez jeden proton o większej energii, czy dwa jednoczesne protony o mniejszych energiach. Nie można też sprawdzić, jaka to była cząstka – czy proton, czy może cząstka alfa. Widzimy tylko impuls, który mówi, że nastąpił rozpad z emisją cząstki lub cząstek, i mierzymy całkowitą energię, jaka się wydzieliła. Natomiast detektor gazowy pozwala śledzić trajektorie poszczególnych cząstek.

na rzecz hipotezy emisji  $2p$  były mocne i statystycznie wiarygodne. Co więcej, w podobnym eksperymencie we francuskim laboratorium GANIL, gdzie także zastosowano reakcję fragmentacji wiązki  $^{58}\text{Ni}$ , ale przy niższej energii, 75 MeV/nukleon, zanotowano 12 przypadków rozpadu  $^{45}\text{Fe}$ , w pełni potwierdzając obserwacje z GSI.

Pozostał jednak pewien niedosyt. Podkreśliśmy, że wykorzystywany w opisanym eksperymencie detektor krzemowy nie rejestrował dwóch oddzielnych protonów, tylko sumę ich energii. A chcielibyśmy wiedzieć, jak oba protony dzielą się tą energią i jaki jest statystyczny rozkład kątów między torami cząstek. Aby w pełni poznać ten nowy rodzaj promieniotwórczości, należało zbudować urządzenie, które zarejestruje tory lotu i energię każdego z protonów osobno.

Do tego celu doskonale nadaje się detektor wypełniony gazem, bo w ośrodku o małej gęstości tory cząstek są dostatecznie długie. Do obserwacji torów cząstek w przestrzeni fizycy cząstek elementarnych rozwinęli technikę komór dryfowych z projekcją czasu (TPC, *Time Projection Chamber*). Postanowiliśmy zbudować detektor do obserwacji rozpadów jądrowych w oparciu o tę ideę. Kluczową rolę odegrali tu nasi koledzy z pracowni detektorów dla fizyki cząstek, a w szczególności prof. Wojciech Dominik, który opracował zupełnie nowatorską metodę odczytu sygnałów.

W uproszczeniu zasada działania naszego detektora jest następująca (rys. 3). Jego komora wypełniona jest mieszanką gazową, głównie helu i argonu. Cząstki naładowane poruszające się w tym gazie, takie jak



Rys. 3. Zasada działania detektora OTPC

wpadający jon lub protony emitowane podczas rozpadu, jonizują gaz (odrywają elektrony od atomów gazu), przez co tracą energię, aż do zatrzymania. W objętości aktywnej występuje jednorodne pole elektryczne, więc oderwane elektrony dryfują w tym polu ze stałą prędkością (rzędu 1 cm/ $\mu\text{s}$ ) w kierunku płaszczyzny anody, gdzie znajduje się obszar tzw. wzmacnienia ładunkowego. Następuje tu znaczne powielenie liczby elektronów w układzie specjalnych elektrod wytwarzających silne pola elektryczne. W typowych detektorach TPC powielone elektrony zbiera się na elektrodach odczytujących jako impuls elektryczny i przetwarza dalej metodami elektronicznymi. Innowacyjność naszego podejścia polega na tym, że zamiast odczytywać sygnały elektrycznie, rejestrujemy światło emitowane przez atomy gazu wzbudzone przez elektrony na końcowym etapie wzmacnienia. Do tego celu służy specjalna kamera cyfrowa CCD oraz fotopowielacz. Migawkę wyzwalamy, na pewien ustalony czas ekspozycji, w momencie, gdy do detektora wpada interesujący jon. Na uzyskanej fotografii zobaczymy rzut torów cząstek, przelatujących przez detektor w trakcie ekspozycji, na płaszczyznę anody. Z kolei fotopowielacz rejestruje całkowite natężenie światła w funkcji czasu – jego sygnał wyjściowy jest próbkowany przez oscyloskop cyfrowy. Pozwala to ustalić czasową kolejność zdarzeń i zmierzyć np. czas, jaki upływa między zatrzymaniem jonu w gazie a jego rozpadem z emisją cząstek. Co więcej, dzięki stałej i znanej prędkości dryfu elektronów w komorze, czasowy przebieg sygnału z fotopowielacza niesie informację o położeniu w kierunku dryfu, prostopadłym do powierzchni anody. Łącząc informacje z CCD i z fotopowielacza, można w pełni zrekonstruować tor cząstki w przestrzeni i wyznaczyć jej energię. Ze względu na kluczową rolę detekcji światła w naszym detektorze nazwaliśmy go OTPC (*Optical TPC*). Jest to urządzenie unikatowe, a przy tym znacznie prostsze i tańsze od klasycznych detektorów TPC ze skomplikowanym elektronicznym odczytem sygnałów.

W 2007 r., wyposażeni w detektor OTPC, podjęliśmy kolejną próbę zbadania  $^{45}\text{Fe}$ , tym razem w amerykańskim laboratorium NSCL przy Michigan State University w East Lansing. Ponownie wykorzystaliśmy wiązkę  $^{58}\text{Ni}$ , ale o energii 160 MeV/nukleon. Intensywność wiązki była dużo większa niż w poprzednich eksperymentach – teraz zaobserwowaliśmy sto kilkadziesiąt przypadków  $^{45}\text{Fe}$ ! Ale co najważniejsze, na zdjęciach CCD zobaczyliśmy wyraźne ślady dwóch protonów wychodzących z punktu, w którym zatrzymał się jon  $^{45}\text{Fe}$  (rys. 4ab, zobacz na okładce). Około 90 zdarzeń emisji  $2p$  udało się w pełni zrekonstruować, co przyniosło pierwsze informacje o mechanizmie tego zjawiska. Okazało się, że jest to proces 3-ciałowy, którego nie da się opisać jako sekwencji rozpadów dwu-ciałowych. Porównanie zmierzonego rozkładu kątów między protonami z modelem teoretycznym wykazało, że rozkład ten niesie pewną informację o stanie jądra przed rozpadem, a to bardzo cenna wiedza o nuklidzie tak egzotycznym i dostępnym w tak nikłych ilościach.

Na fotografiach rozpadów  $^{45}\text{Fe}$  ujrzeliśmy jeszcze coś ciekawego! Mimo że najczęstszym sposobem rozpadu  $^{45}\text{Fe}$  jest emisja  $2p$ , to ulega on też, jak każdy nuklid neutrono-deficytowy, przemianom  $\beta^+$ . W przypadku nuklidów dalekich od trwałości jądro po przemianie  $\beta$  jest często tak wzbudzone, że wyrzuca protony – jest to znane zjawisko tak zwanej emisji cząstek opóźnionych. I rzeczywiście, wśród rozpadów  $^{45}\text{Fe}$  zaobserwowaliśmy około 40 przypadków przemiany  $\beta^+$  z emisją jednego i dwóch protonów opóźnionych, zgodnie z oczekiwaniem. Takie protony mogliśmy łatwo odróżnić od protonów z emisji  $2p$ , ponieważ mają dużo większą energię, a zatem dłuższe tory. Ku naszemu zaskoczeniu zobaczyliśmy jednak kilka zdarzeń z emisją trzech protonów opóźnionych – była to pierwsza obserwacja takiego procesu (rys. 4c, zob. okładka). I to jeszcze nie koniec. W trakcie eksperymentu do detektora wpadały też jony  $^{43}\text{Cr}$ , który jest również bardzo egzotycznym nuklidem i którego rozpad rejestrowaliśmy ( $^{43}\text{Cr}$  tworzy się także po emisji  $2p$  przez  $^{45}\text{Fe}$ ). Wśród nich znaleźliśmy zdarzenia emisji jednego, dwóch, a także trzech protonów opóźnionych. Odkryliśmy więc ten nowy proces od razu w dwóch nuklidach!

W następnym eksperymencie, który przeprowadzony został w 2011 roku w NSCL, użyliśmy detektora OTPC do badania innego bardzo egzotycznego nuklidu,  $^{48}\text{Ni}$ . Jako pocisku użyliśmy ponownie  $^{58}\text{Ni}$ , który jest najlżejszym trwałym izotopem niklu. Aby wytworzyć  $^{48}\text{Ni}$ , w reakcji trzeba oderwać od pocisku dokładnie 10 neutronów i ani jednego protonu. Takie zdarzenie jest niezwykle mało prawdopodobne. Dlatego mimo bardzo dobrych warunków doświadczalnych,

po dziesięciu dniach pomiaru, zaobserwowaliśmy tylko 6 rozpadów  $^{48}\text{Ni}$ . Cztery z nich przedstawiały jednoczesną emisję dwóch protonów (rys. 5, zob. okładka)! Odkryliśmy w ten sposób kolejny przypadek promieniotwórczości  $2p$ . Doniesienie o tym wyniku ukazało się w czasopiśmie *Physical Review C*. W zeszłym roku czasopismo to obchodziło 50. rocznicę powstania i z tej okazji redakcja wybrała spośród wszystkich opublikowanych prac „kamienie milowe” 50-lecia. Wśród wyróżnionych publikacji znalazła się nasza, o emisji  $2p$  przez  $^{48}\text{Ni}$ , i była jedyną, której głównymi autorami byli fizycy polscy.

Detektor OTPC został wykorzystany w wielu innych projektach poświęconych poszukiwaniu i badaniu rzadkich przemian egzotycznych nuklidów. Wykazaliśmy między innymi, że proces emisji trzech protonów opóźnionych zachodzi też w  $^{31}\text{Ar}$  i  $^{23}\text{Si}$ . Znamy więc już cztery nuklidy, w których zachodzi taka przemiana – i wszystkie zostały odkryte za pomocą naszego detektora. Badaliśmy też bardzo rzadkie przemiany nuklidów z nadmiarem neutronów. Na przykład po przemianie beta  $^6\text{He}$  raz na milion przypadków stan końcowy rozpada się na cząstkę  $\alpha$  i deuteron. W laboratorium CERN mogliśmy wbijać do detektora paczki zawierające od kilkuset do kilku tysięcy jonów  $^6\text{He}$  i następnie czekać na rozpad z emisją cząstek. Udało nam się takie rozpad zaobserwować (rys. 6, zob. okładka) i uzyskać nowe, wcześniej niedostępne informacje o ich przebiegu.

W przyszłości planujemy następne eksperymenty. Mamy nadzieję, że uda nam się zrobić jeszcze wiele fotografii rzadkich przemian jądrowych, które poszerzą naszą wiedzę o nuklidach na granicy istnienia.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1675.** Na tablicy wypisane są liczby od 1 do 1 000 000. Ahmed wykreśla wszystkie liczby pierwsze, a następnie Hamza skreśla wszystkie liczby podzielne przez

2, 3, 4, ..., 100, oraz 1000, 1001, 1002, ..., 10 000.

Udowodnij, że iloczyn pozostałych liczb jest potęgą (o wykładniku większym niż 1) pewnej liczby całkowitej. Rozwiązanie na str. 17

**M 1676.** W kole matematycznym jest 49 uczniów. Wiadomo, że jeśli trzech członków tego koła nie zna się parami, to dwójka z nich ma w kole wspólnego znajomego. Udowodnij, że jeden z uczniów ma co najmniej 6 znajomych w kole.

Rozwiązanie na str. 15

**M 1677.** Punkty  $P$  i  $Q$  leżą na odcinku  $AB$  trójkąta nierównoramiennego  $ABC$ , tak że  $AC = AP$  i  $BC = BQ$ . Symetralna odcinka  $PQ$  przecina dwusieczną kąta  $ACB$  w punkcie  $R$  (wewnątrz trójkąta). Udowodnij, że

$$\sphericalangle PRQ + \sphericalangle ACB = 180^\circ.$$

Rozwiązanie na str. 14

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1025.** Wewnętrzny promień cienkiej rurki szklanej jest równy  $r$ . Jaki jest „widoczny” promień wewnętrzny  $d$  rurki, gdy obserwowana jest z zewnątrz, z odległości znacznie większej od jej zewnętrznego promienia  $R$ ?

Rurka wykonana jest ze szkła o współczynniku załamania  $n$ .

Rozwiązanie na str. 1

**F 1026.** Neutrino są cząstkami elementarnymi o bardzo małej masie spoczynkowej i bardzo słabo oddziałującymi z materią, co powoduje, że niezmiernie trudno je badać. 23 lutego 1987 roku w detektorze Kamiokande zarejestrowano „błysk” neutrin trwający  $\Delta t \approx 2$  s. Energie zarejestrowanych neutrin mieściły się w zakresie od około 8 MeV do około 40 MeV. Przyjęto, że zostały one wyemitowane podczas wybuchu supernowej SN1987A odległej od Ziemi o  $L \approx 170\,000$  lat świetlnych. Przyjmij, że obserwowane neutrino wyemitowane zostały jednocześnie, i na tej podstawie oszacuj ich masę spoczynkową  $m_\nu$ .

Rozwiązanie na str. 11

## Jak powstały szczepionki mRNA

O pandemii SARS CoV-2 albo już wszystko powiedziano i napisano, albo nadal na wiele pytań nie znamy odpowiedzi. Komentarza warta jest wątpliwość laików, czy uzyskane szczepionki są wiarygodne, skoro tak szybko powstały.

Historii powstania tej szczepionki można by szukać w Nagrodach Nobla ostatnich kilkudziesięciu lat. U podstaw konstrukcji współczesnych szczepionek leżą odkrycia w biologii molekularnej i komórkowej, immunologii, wirusologii oraz analizie biocząsteczek. Przez te lata m.in. rozszyfrowano kod genetyczny, nauczono się (coraz szybciej) sekwencjonować kwasy nukleinowe, poznano budowę genów i regulację ich ekspresji, poznano setki tysięcy różnych genomów, odkryto i sklasyfikowano setki tysięcy różnych wirusów, oznaczono cały szereg struktur przestrzennych kwasów nukleinowych i białek (do tego ostatniego zadania włączono nawet „sztuczną inteligencję”). Zbudowano wiele wyszukanych analitycznych aparatów, rozwinięto metody informatyczne. Wreszcie, w ostatnich latach, rozpoznano liczne właściwości i osobliwości działania układu immunologicznego, kluczowych zjawisk warunkujących aktywność coraz to nowszych i bezpieczniejszych szczepionek. W wielu firmach biofarmaceutycznych rozwijano technologię RNA jako nośnika informacji w szczepionkach i do analizy genomów tkanek zdrowych i nowotworowych.

Z siedmiu rozpoznanych ludzkich koronawirusów atakujących układ oddechowy trzy są groźne: SARS-CoV w latach 2002–2004 zakaził 8098 osób, spowodował 774 zgonów w 29 krajach (śmiertelność 10%), po czym przestał się szerzyć. W 2012 roku w Arabii Saudyjskiej wykryto ognisko wirusa MERS-CoV. Do stycznia 2020 roku potwierdzono 2519 przypadków zachorowania/zakażenia i 866 zgonów w 27 krajach, (śmiertelność 37%). Z obu zakażeń nie rozwinęły się epidemie o światowym zasięgu (pandemie). W roku 2019 w Chinach odkryto nowego wirusa z tej samej grupy, SARS-CoV-2. Budowa i genom wirusa ogłoszone zostały światu 10 stycznia 2020 roku. Struktury i genomy całej trójki są bardzo zbliżone, ale tylko ten najmłodszy wywołał pandemię ogólnoswiatową.

Uprzednie badania powierzchni wirusa HIV ułatwiły rozpoznanie struktury dwu podjednostek białka S, które w wirusie SARS-CoV-2 tworzą kolce, łączące się z białkiem ACL2 na powierzchni zakażanych komórek. Białko ACL2 znajduje się w błonach komórek wielu tkanek, a obficie „zdobi” komórki układu oddechowego. Jako potencjalny cel działania przeciwciał zobojętniających wirusa wybrano najbardziej wysunięte do środowiska kolce (przeciwciała na białka kolców będą rozpoznawać i zobojętniać także całego wirusa). W dwóch niezależnych zespołach, wykorzystując doświadczenia lat ubiegłych, zaprojektowano i zsyntetyzowano mRNA kodujący białko S.

Kolejną trudnością do pokonania była nietrwałość chemiczna RNA. Problem ten rozwiązano:

a) modyfikując chemicznie mRNA białka S bez zmiany jego właściwości kodujących, b) przechowując szczepionkę w niskiej temperaturze, c) zamykając mRNA w ochronnych nanokapsułkach lipidowych (wytwarzanie których na pewnym etapie okazało się limitujące masową produkcję).

mRNA wprowadzony do tkanek szczepionego powoduje syntezę białka S, które aktywizuje układ immunologiczny przeciw obcemu białku. Układ w przyszłości rozpozna wirusa prezentującego białko S i wirusa tego zdezaktywuje.

Dwie szczepionki (mRNA) przeciw SARS CoV-2, firm Pfizer+BioNTech i Moderna, przeprowadzono niezwłocznie przez wszystkie obowiązujące fazy badań klinicznych; w fazie 3. obie zostały sprawdzone na dziesiątkach tysięcy badanych, dla obu skuteczność

okazała się bardzo wysoka (powyżej 90%), co stanowi wyjątkowo udany wynik na polu konstrukcji szczepionek. Obie ocenia się jako bardzo bezpieczne – wywołują niewiele, mało dokuczliwych i mijających, efektów niepożądanych. Ich największą wadą jest konieczność przechowywania w niskich temperaturach.

Ten spektakularny wynik jest rezultatem wielodyscyplinarnych wysiłków setek uczonych w kilkudziesięcioletnim okresie, jak również godnej uznania skłonności naukowców i producentów do współpracy i dzielenia się uzyskanymi wynikami w sytuacji globalnego zagrożenia. Obie szczepionki uratowały od śmierci setki tysięcy, jeżeli nie miliony, chorych na całym świecie.

Według *Science*, **372**, 9 IV 2021, Anthony S. Fauci, dyrektor Instytutu Alergii i Chorób Zakaźnych NIH, doradca Prezydentów USA

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

### 3 ≤ π ≤ 4

#### Michał MIŚKIEWICZ

Po powrocie z krainy Oz Dorotka zauważyła u siebie rzadką a przykrą przypadłość – zapomniała twierdzenia Pitagorasa! Innymi słowy, zapomniała, że w rodzinnym Kansas odległość między dwoma punktami  $A = (x, y)$ ,  $B = (x', y')$  wyraża się wzorem  $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ . Nie byłby to duży powód do niepokoju, gdyby nie to, że Dorotka była gorącą entuzjastką liczby  $\pi$ . Z wielką przykrością stwierdziła, że jej wartości też nie pamięta (nawet w przybliżeniu), a bez twierdzenia Pitagorasa nie była w stanie wyprowadzić jakiegokolwiek wzoru do wyznaczenia  $\pi$ .

Nie wszystko było jednak stracone, bo amnezja nie odebrała Dorotce całej matematycznej wiedzy. Pamiętała operacje dodawania wektorów  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ , mnożenia wektorów przez skalary  $t(x, y) = (tx, ty)$  oraz pewne własności odległości. Wiedziała mianowicie, że odległość punktów  $A, B$  zależy jedynie od wektora  $\vec{AB}$ , czyli wyraża się jako  $\|A - B\|$ , gdzie  $P \mapsto \|P\|$  jest pewną funkcją o nieujemnych wartościach. Ponadto знаła nierówność trójkąta, czyli

$$\bullet \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ dla dowolnych punktów } A, B,$$

oraz wiedziała, że na każdej prostej przechodzącej przez  $(0, 0)$  odległość zachowuje się jednorodnie:

$$\bullet \|tA\| = |t| \cdot \|A\| \text{ dla dowolnej liczby } t \text{ i punktu } A;$$

ponadto  $\|A\| = 0$  jedynie dla punktu  $A = (0, 0)$ .

W krainie Oz Dorotka widziała różne dziwy, w tym geometrie wyznaczone przez tzw. normy nieeuklidesowe (jak na rysunkach). Obawiała się, że w takich światach liczba  $\pi$  może być równa  $\frac{16}{5}$  – jak w niedalekiej Indianie – albo w ogóle nieznaną.

Okazuje się jednak, że z taką wiedzą można już coś konkretnego powiedzieć o liczbie  $\pi$ . Ścisłej – da się zdefiniować długość okręgu jednostkowego, a przecież liczbę  $\pi$  określa się jako połowę tej długości!

Przypomnijmy, że przez koło jednostkowe i okrąg jednostkowy rozumiemy zbiory

$$\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}, \quad \mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}.$$

Jeśli wielokąt  $A_1A_2 \dots A_n$  jest wpisany w koło  $\mathbb{B}$  – co oznacza, że punkty  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_1$  leżą na okręgu  $\mathbb{S}$  w tej właśnie kolejności – to jego obwód możemy określić jako

$$\|A_1 - A_2\| + \|A_2 - A_3\| + \dots + \|A_{n-1} - A_n\| + \|A_n - A_1\|,$$

czyli sumę odległości między kolejnymi wierzchołkami. Następnie jako długość okręgu  $\mathbb{S}$  można przyjąć supremum z obwodów wszystkich takich wielokątów; podobnie definiujemy też długość dowolnego łuku.

Gdy  $\mathbb{S}$  sam w sobie jest wielokątem, nietrudno jest uzasadnić, że rozważane supremum jest równe obwodowi tego właśnie wielokąta. Na ilustracji obok wyznaczono obwód okręgu jednostkowego dla dwóch przykładowych norm. Trzeba tylko uważać – długości odpowiednich odcinków obliczane są według normy  $\|\cdot\|$ , a nie przy użyciu twierdzenia Pitagorasa.

Jak widać, możliwe wartości obwodu koła jednostkowego nie muszą leżeć w okolicach 6,2832. Z drugiej strony, nie mogą też być bardzo daleko od tej liczby – mówi o tym twierdzenie wykazane przez Stanisława Gołąba w 1932 roku.

**Twierdzenie.** Dla dowolnej normy na płaszczyźnie obwód koła jednostkowego mieści się w przedziale od 6 do 8.

Widzieliśmy już przykłady, że obwód może wynosić właśnie 6 lub 8. Prześledźmy więc razem z Dorotką, dlaczego gorzej być nie może.

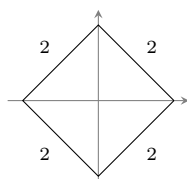
Zanim przejdziemy do dowodu, zauważmy dużo łatwiejsze ograniczenie dolne przez 4. Dowolna średnica  $CD$  okręgu jednostkowego  $\mathbb{S}$  ma mianowicie długość 2.

Znając twierdzenie Pitagorasa, górną część okręgu jednostkowego można przedstawić jako wykres funkcji  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , a następnie obliczyć jej długość:

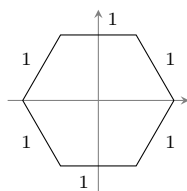
$$\pi = \int_{-1}^1 \sqrt{1+(f')^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nieujemną funkcję  $\|\cdot\|$  spełniającą  $\bullet$  i  $\bullet\bullet$  zwykle się nazywać normą. W artykule Jarosława Górnickiego ( $\Delta_{21}^5$ ) można było zobaczyć wiele przykładów norm, w tym dwie przedstawione niżej na marginesie.

Niesławna ustawa *Indiana Pi Bill* z 1897 r. można rozumieć jako zadekretowanie  $\pi = \frac{16}{5}$ , chociaż ta historia jest trochę bardziej skomplikowana.



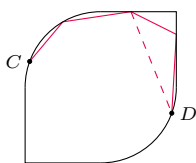
$$\|(x, y)\| = |x| + |y|$$



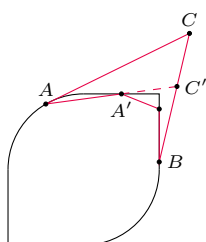
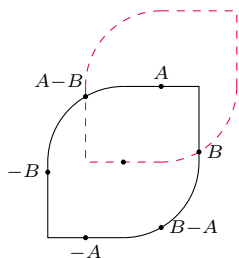
$$\|(x, y)\| = \max\left(|x + \frac{y}{\sqrt{3}}|, |x - \frac{y}{\sqrt{3}}|, \frac{2|y|}{\sqrt{3}}\right)$$

W skrócie:  $3 \leq \pi \leq 4$ .

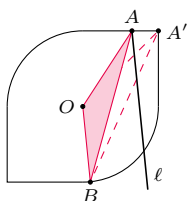




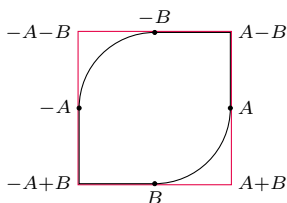
Zarys dowodu indukcyjnego, że łamana z  $C$  do  $D$  ma długość co najmniej  $\|C - D\|$



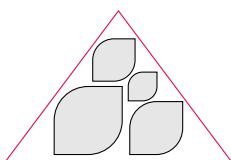
Zarys dowodu indukcyjnego, że łamana z  $A$  do  $B$  ma długość najwyższej  $\|A - C\| + \|B - C\|$



Koło  $\mathbb{B}$  musi leżeć po jednej stronie  $\ell$



Równoległobok opisany na kole  $\mathbb{B}$



Przykładowa rodzina rozłącznych kul zawartych w  $T$

Po wielokrotnym zastosowaniu nierówności trójkąta można wywnioskować, że każda łamana łącząca  $C$  i  $D$  ma długość nie mniejszą niż  $\|C - D\|$ , czyli 2. Długość każdego z dwóch łuków łączących  $C$  i  $D$  jest zdefiniowana jako supremum z długości takich łamanych (z dodatkowym wymaganiem, by punkty łamanej leżały kolejno na okręgu), więc każdy z tych łuków również ma długość 2 lub większą. W konsekwencji okrąg  $\mathbb{S}$  ma długość nie mniejszą niż 4.

Po tej prostej obserwacji przejdźmy do ograniczenia przez 6, które nie jest dużo trudniejsze.

*Dowód ograniczenia dolnego.* Wybierzmy na okręgu  $\mathbb{S}$  dowolny punkt  $A$ , a następnie zakreślmy cyrklem okrąg jednostkowy wokół  $A$  i wybierzmy  $B$  jako jeden z punktów przecięcia (jak na rysunku); w ten sposób zapewniliśmy sobie, że  $\|A\| = \|B\| = \|A - B\| = 1$ . Podobnie jak w poprzednim rozumowaniu, krótszy łuk  $AB$  jest nie krótszy od odcinka  $AB$ , czyli ma długość co najmniej 1.

A co zrobić z resztą okręgu? To samo. Zauważmy, że punkty  $A, B, B - A, -A, -B, A - B$  tworzą sześciokąt wpisany w  $\mathbb{S}$ , a każdy z boków ma długość 1. Tak jak wyżej, każdy z sześciu łuków ma długość ograniczoną z dołu przez długość odpowiedniej cięciwy. Długość całego okręgu ograniczyliśmy więc przez 6.  $\square$

Jak widać, długość łuku jest ograniczona z dołu przez długość odpowiedniej cięciwy, ale jak można ją ograniczyć z góry? Załóżmy, że łuk łączący  $A$  i  $B$  zawarty jest w trójkącie  $ABC$ , przy czym  $C$  leży poza kołem jednostkowym  $\mathbb{B}$ . Dla każdej łamanej przybliżającej łuk  $AB$  wielokrotnie użyta nierówność trójkąta pokazuje, że długość łamanej jest nie większa niż  $\|A - C\| + \|B - C\|$ , czyli suma długości dwóch boków trójkąta. To samo można więc powiedzieć o długości łuku  $AB$ .

*Dowód ograniczenia górnego.* Oznaczmy  $O = (0, 0)$ . Wśród wszystkich punktów  $A, B$  na okręgu jednostkowym  $\mathbb{S}$  wybierzmy takie, dla których pole trójkąta  $OAB$  jest największe. Tutaj Czytelnik może zaprotestować – skoro Dorotka zapomniała wzoru na odległość, to tym bardziej wzoru na pole trójkąta. I bardzo słusznie, ale znalazła sposób na obejście tej trudności. O tym później, a najpierw zobaczymy, co da się powiedzieć o takim trójkącie.

Poprowadźmy prostą  $\ell$  równoległą do  $OB$  i przechodzącą przez  $A$ . Można zauważyć, że całe koło jednostkowe  $\mathbb{B}$  leży po jednej stronie prostej  $\ell$ . Istotnie, gdyby punkt  $A' \in \mathbb{B}$  leżał po przeciwnej stronie niż  $O$  i  $B$ , to trójkąt  $OA'B$  miałby większe pole niż  $OAB$ ; da się przy tym dobrać  $A'$  na samym okręgu  $\mathbb{S}$ , co prowadzi do sprzeczności z określeniem  $A$  i  $B$ .

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla prostej równoległej do  $OA$  i przechodzącej przez  $B$ , co prowadzi nas do konkluzji, że całe koło  $\mathbb{B}$  leży wewnątrz kąta  $\sphericalangle ACB$ , gdzie  $C = A + B$ . Ponieważ odcinek  $AB$  jest w całości zawarty w  $\mathbb{B}$  (to kolejne zadanie na nierówność trójkąta), krótszy łuk  $AB$  mieści się w trójkącie  $ABC$  i możemy zastosować wcześniej otrzymane górne ograniczenie – w ten sposób przekonujemy się, że długość łuku  $AB$  nie przekracza

$$\|A - C\| + \|B - C\| = \|B\| + \|A\| = 2.$$

Żeby dokończyć rozumowanie, do punktów  $A$  i  $B$  dołączamy  $-A$  i  $-B$ , a całe koło  $\mathbb{B}$  zamykamy w równoległoboku jak na rysunku. W ten sposób podzieliśmy  $\mathbb{S}$  na cztery łuki, z których każdy jest nie dłuższy niż 2, co kończy dowód.  $\square$

Wyjaśnijmy jeszcze sprawę porównywania pól trójkątów. Oczywiście takie wyjaśnienie nie jest konieczne do dowodu twierdzenia – nic nie stoi na przeszkodzie, by używać *standardowego* pojęcia pola w *niestandardowym* świecie – ale jak sobie poradziła Dorotka?

Otóż o polu też można myśleć trochę ogólniej. Przyjmijmy na początek, że pole dowolnego koła o promieniu  $r$  jest równe  $r^2$ . Następnie mając dany trójkąt  $T$  (albo inny kształt) i rodzinę  $\mathbb{B}(S_1, r_1), \dots, \mathbb{B}(S_n, r_n)$  parami rozłącznych kul, intuicyjnie stwierdzilibyśmy, że pole trójkąta jest nie mniejsze od łącznego pola

kul, czyli od  $r_1^2 + \dots + r_n^2$ . Jednocześnie (znowu – intuicyjnie) trójkąt da się *dowolnie ściśle* wypełnić kulami, definiujemy więc

pole  $T := \sup \{r_1^2 + \dots + r_n^2 : \text{istnieją parami rozłączne}$

$$\text{kule } \mathbb{B}(S_1, r_1), \dots, \mathbb{B}(S_n, r_n) \subseteq T\}.$$

Tak zdefiniowane pole nosi w literaturze nazwę *zawartości Minkowskiego*. Nie jest to łatwe, ale da się wykazać, że nie zależy od wybranej normy, a więc i od kształtu kul, jakimi wypełniamy  $T$ . Ścisłej rzecz biorąc, prawie nie zależy – zmiana normy powoduje przemnożenie pól wszystkich figur przez pewną stałą.

Na zakończenie proponuję dwa zadania. Pierwsze daje warunek, którego sprawdzenie przenosi nas w znajome rejony geometrii. Drugie natomiast proponuje dokładniejsze zbadanie nieco zaskakującej rodziny norm.

**Zadanie 1.** Jeśli kwadrat normy punktu  $A = (x, y)$  wyraża się wzorem  $\|A\|^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$  dla pewnych  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , to długość okręgu jednostkowego wynosi  $2\pi$ .

**Zadanie 2.** Wyznaczyć długość okręgu jednostkowego dla normy, w której  $\mathbb{B}$  jest  $2n$ -kątem foremnym. Sprawdzić, że długość ta jest mniejsza od  $2\pi$  dla nieparzystych wartości  $n$ , a większa dla parzystych.

## Czy życie musi być oparte na węglu?

Janusz PĘTKOWSKI\*

\* Department of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences, MIT, Cambridge, USA

Idea życia krzemowego została po raz pierwszy zaproponowana przez niemieckiego astrofizyka Juliusa Scheinera pod koniec XIX wieku.



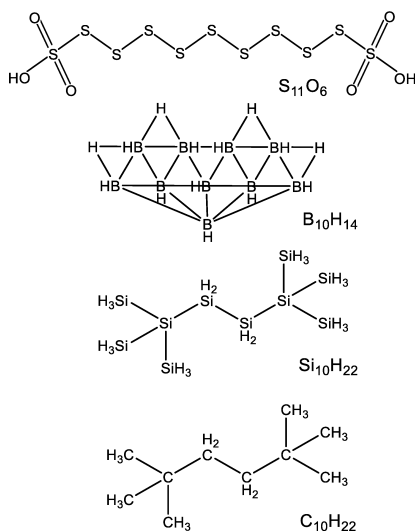
*Heteroatom* to w nomenklaturze chemii organicznej określenie dowolnego atomu, znajdującego się w cząsteczce związku organicznego, który nie jest atomem rusztowania – ani węglem, ani wodorem.

Możliwość istnienia życia, które wykorzystuje pierwiastki inne niż węgiel jako podstawowy budulec swojej biochemii, urzeka ludzką wyobraźnię od ponad wieku. Stałym rywalem węgla jest krzem. Co jednak mamy na myśli, mówiąc „życie oparte na krzemie”? Najczęściej chodzi o różnorodną chemię krzemooorganiczną, a konkretnie biochemię, w której krzem zastępuje węgiel w cząsteczkach organicznych.

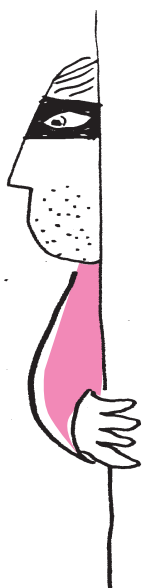
Krzem ma wiele cech wspólnych z węglem i występując pod różnymi postaciami krzemianów w skałach, jest drugim (po tlenie) najbardziej rozpowszechnionym pierwiastkiem w skorupie ziemskiej. Mimo jego obfitości znamy niewiele przykładów zastosowania krzemu przez życie: jest to kwas krzemowy (np.  $\text{H}_4\text{SiO}_4$ ) i krzemionka ( $\text{SiO}_2$ ). Aby odpowiedzieć na pytanie, czemu wykorzystanie krzemu jest tak ograniczone, i dowiedzieć się, czy krzem (lub inne pierwiastki) zamiast węgla może być głównym budulcem jakiejś pozaziemskiej biochemii, musimy najpierw zrozumieć, jakie są ogólne wymagania dotyczące chemii życia, niezależnie od jego chemicznej podstawy.

**Ogólne wymagania dotyczące chemii życia** to kilka cech, które musi spełnić każda biochemia. Zasadnicze są trzy aspekty: wystarczająca różnorodność chemiczna, stabilność i reaktywność oraz obecność rozpuszczalnika. Mimo że różnorodność chemiczna, reaktywność i wymagania dotyczące rozpuszczalników są powiązane, omówimy je oddzielnie poniżej.

**Różnorodność chemiczna** to wymóg istnienia dostatecznie szerokiego zestawu związków chemicznych zdolnych do pełnienia wielu funkcji biologicznych. Życie na Ziemi robi użytek z aminokwasów (do produkcji białek), cukrów i zasad azotowych (do produkcji kwasów nukleinowych), hydrokso- i ketokwasów (jako podstawowych półproduktów metabolicznych), lipidów (do produkcji błon komórkowych) oraz wielu innych substancji. Tak zróżnicowany zestaw związków chemicznych wymaga zestawu pierwiastków zdolnych do budowania cząsteczek złożonych z wielu atomów, które zapewnią wystarczającą funkcjonalność biologiczną. Wymaganą różnorodność chemiczną można osiągnąć jedynie za pomocą dostatecznie uniwersalnego pierwiastka zdolnego do budowy rusztowania cząsteczki. Takie atomy *pierwiastka rusztowania* muszą się z kolei stabilnie wiązać ze sobą i z atomami innych pierwiastków – z heteroatomami (atomami



Rys. 1. Porównanie siarkowych, borowych, krzemowych i węglowych rusztowań cząsteczek chemicznych. Siarka (np. w cząsteczce  $S_{11}O_6$ ) może tworzyć łańcuchy atomów połączonych ze sobą lub wiązać się z różnymi heteroatomami, np. azotem lub tlenem. Jednakże takie siarkowe łańcuchy mają bardzo ograniczoną możliwość rozgałęziania się, co mocno ogranicza różnorodność kształtów cząsteczek zbudowanych z siarkowego rusztowania. Bor (np.  $B_{10}H_{14}$ ) tworzy raczej skupiska atomów niż mniejsze, liniowe cząsteczki, czyli jest niejako przeciwieństwem siarki. Z drugiej strony krzem (np. izomer dekasilanu  $Si_{10}H_{22}$ ) i węgiel (np. izomer dekanu  $C_{10}H_{22}$ ) tworzą łańcuchy o liniowych bądź rozgałęzionych strukturach mogących wiązać się z różnymi heteroatomami. Spośród możliwych alternatywnych pierwiastków rusztowania krzem wydaje się najbardziej obiecującym wyborem jako zamiennik węgla w biochemii



Cukry, na przykład, nie mogą być trwałym składnikiem hipotetycznej biochemii, w której rozpuszczalnikiem jest stężony kwas siarkowy, ponieważ pod wpływem kwasu siarkowego w przeciągu kilkudziesięciu sekund odwadniają się one do amorficznego węgla.

funkcjonalnymi). Dobry atom rusztowania musi łączyć się w łańcuchy i klastry, aby zbudować szkielet cząsteczki, jednocześnie umożliwiając heteroatomom aktywność chemiczną i w efekcie zapewnić funkcjonalność biologiczną cząsteczki. Pierwiastki budujące rusztowanie cząsteczek powinny również zapewniać możliwość tworzenia dużych cząsteczek, a co za tym idzie – dużej liczby różnorodnych biomolekuł. Rusztowanie musi być stosunkowo stabilne i niereaktywne chemicznie i jednocześnie dobrze wiązać się z heteroatomami.

Na Ziemi węgiel jest głównym pierwiastkiem rusztowania cząsteczek wchodzących w skład biochemii, co tłumaczy dosłowny sens terminu „życie oparte na węglu”. Kilka innych pierwiastków niebędących metalami mogłoby stanowić realną alternatywę rusztowania dla węgla. Siarka, bor, a w szczególności krzem są zdolne do tworzenia związków kowalencyjnych, w których wiele atomów tego samego typu wiąże się, tworząc duże cząsteczki (rys. 1). Polimery na bazie siarki, np. amfifilowe (tzn. np. jednocześnie wodo- i tłuszczolubne) politioniany, są jednak ograniczone do łańcuchów liniowych, co poważnie ogranicza różnorodność kształtów takich cząsteczek. Bor również tworzy struktury polimerowe; są one jednak raczej skupiskami atomów niż mniejszymi cząsteczkami (np. dekaboran(14),  $B_{10}H_{14}$ , o strukturze podobnej do nanocząsteczki diamentu). Pośród tych możliwości krzem wydaje się najbardziej obiecującym wyborem jako zamiennik węgla.

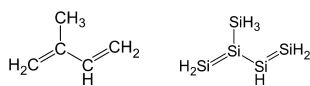
Ponieważ rusztowanie z samego węgla (i wodoru) zapewnia jedynie bardzo ograniczone funkcje związane z metabolizmem, heteroatomy są niezbędne do zapewnienia reaktywności chemicznej. Heteroatomy mogą tworzyć wiązania kowalencyjne z węglem lub innymi pierwiastkami, z których zbudowane jest rusztowanie cząsteczek, różnią się one jednak elektroujemnością od atomów rusztowania. Różnica w elektroujemności zapewnia reaktywność cząsteczek. Reaktywność chemiczna zapewniona przez heteroatomy jest odpowiedzialna za zdecydowaną większość reakcji metabolicznych zachodzących w ziemskich organizmach. Życie na Ziemi wykorzystuje kilka heteroatomów (tlen O, azot N, siarka S i fosfor P), które tworzą wiązania kowalencyjne zarówno z węglowym rusztowaniem biomolekuł, jak i między sobą, co umożliwia chemiczną różnorodność i reaktywność niezbędną do życia.

Krzem tworzy stabilne wiązania kowalencyjne z tymi samymi kluczowymi elementami budulcowymi co węgiel: z samym węglem, a także azotem, tlenem, siarką, fosforem i halogenami (fluorem, chlorem, bromem, jodem), może nawet tworzyć wiązania kowalencyjne z różnymi metalami. Oprócz wszechstronnego wiązania wielu innych pierwiastków w najbardziej powszechnym stanie tetrakoordynacyjnym, krzem może również tworzyć stabilne związki penta- i heksakoordynacyjne z kluczowymi pierwiastkami biogennymi, takimi jak azot, węgiel lub tlen, z ogólnym ładunkiem cząsteczki lub bez niego. Często prowadzi to do powstania krzemowych związków chemicznych, które nie mają bezpośrednich analogów wśród organicznych związków węgla, z czego wynika, że potencjalna różnorodność chemiczna krzemu (choć osiągnięta w inny sposób) może być tak duża, jak węgla. Jednak teoretyczna różnorodność chemiczna, którą zapewnia Si, nie jest wystarczająca, aby przeważać na korzyść krzemu jako dobrego pierwiastka rusztowania – ważna jest również stabilność chemiczna i reaktywność cząsteczek zawierających Si. Przyjrzymy się zatem tym cechom związków krzemu dokładniej.

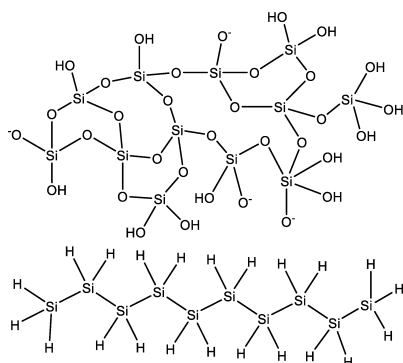
**Stabilność chemiczna i reaktywność** to drugi ogólny wymóg chemii życia: musi istnieć równowaga między stabilnością substancji biochemicznych a ich reaktywnością w rozpuszczalniku. Substancje biochemiczne powinny być odporne na reakcje zarówno z rozpuszczalnikiem, jak i ze sobą nawzajem, w zależności od skali czasowej wymaganej funkcji biologicznej. Innymi słowy, substancje biochemiczne muszą do pewnego stopnia reagować w swoim rozpuszczalniku, aby mogły spełniać wymagane funkcje biologiczne.

Rozpuszczalniki *aprotyczne* (czyli takie, które nie mogą przekazywać protonów) są zwykle mniej reaktywne niż woda, amoniak i kwas siarkowy.

Rozpuszczalniki protonowe (protyczne) zawierają w swojej strukturze chemicznej tak zwane „kwaśne protony”, które mogą ulec oderwaniu lub brać udział w tworzeniu wiązań wodorowych. Rozpuszczalniki protonowe to np. woda, amoniak lub kwas siarkowy. Wszystkie rozpuszczalniki protonowe są również rozpuszczalnikami polarnymi. Rozpuszczalniki aprotone (aprotyczne) nie mają w swojej strukturze chemicznej „kwaśnych protonów”, np. ciekły azot lub ciekły metan. Rozpuszczalniki aprotone mogą być polarne lub niepolarne.



Rys. 2. Tworzenie wielu biologicznie ważnych cząsteczek i grup funkcyjnych jest znacznie mniej wydajne dla krzemu niż dla ich węglowych odpowiedników. Jednym z takich przykładów jest tworzenie struktur nienasyconych. Struktury sprzężonych podwójnych wiązań, takie jak w węglowodorze o nazwie izopren (schemat po lewej), są łatwo tworzone przez życie na Ziemi. Tworzenie jakichkolwiek nienasyconych struktur krzemu (schemat po prawej) (np. zawierających podwójne lub potrójne wiązania między atomami krzemu) jest wysoce nieefektywne. Jeśli w ogóle są stabilne, to tylko wtedy, gdy są chronione przez inne grupy organiczne, i tylko w bardzo niskich temperaturach kriogenicznych



Rys. 3. Polimeryzacja krzemu w warunkach, gdzie tlenu jest pod dostatkiem, prowadzi do powstania siatki łańcuchów Si-O (takich jak przykładowa struktura bezpostaciowej krzemionki, schemat u góry), a nie polimerów liniowych, z wiązaniami Si-Si, takich jak silany (np. n-dekasilan,  $\text{Si}_{10}\text{H}_{22}$ , schemat dolny). W rezultacie chemia Si w środowiskach bogatych w tlen (np. w wodzie) ostatecznie prowadzi do powstania krzemionki ( $\text{SiO}_2$ )

Rozpuszczalność ciał stałych w jakimkolwiek rozpuszczalniku generalnie rośnie wraz z temperaturą, więc powszechnie dostępne rozpuszczalniki aprotone, takie jak ciekły metan (obecny np. na Tytanie, księżycu Saturna) i ciekły azot, są słabymi rozpuszczalnikami, ponieważ są ciekłe tylko w bardzo niskich temperaturach. Chemiczny charakter i temperatura rozpuszczalnika wpływa zarówno na to, jaki rodzaj chemicznych rusztowań jest możliwy, jak również na to, jaka chemia heteroatomów jest stabilna w danym rozpuszczalniku.

Ponadto reaktywność jest znacznie zmniejszona w niskich temperaturach, więc prawie każda substancja chemiczna jest stabilna w aprotycznych rozpuszczalnikach, takich jak ciekły metan lub ciekły azot. Dlatego też bardzo stabilne związki chemiczne nie będą składnikami życia w zimnych, aprotycznych rozpuszczalnikach, po prostu nie będą wystarczająco reaktywne, by wykonywać swoje biologiczne zadania.

W jaki sposób chemia organiczna krzemu spełnia wymagania równowagi między wystarczającą stabilnością a reaktywnością chemiczną? Pomimo potencjalnie bogatej i różnorodnej chemii krzemoorganicznej bezpośrednie zastąpienie węgla krzemem w cząsteczkach organicznych jest często niemożliwe. Wynika to ze znacznie większej reaktywności cząsteczek krzemoorganicznych, zwłaszcza w standardowych temperaturach i w wodzie (rys. 2). Na przykład, chociaż krzem jest zdolny do tworzenia długich łańcuchowych struktur chemicznych z wiązaniami Si-Si (np. w silanach), są one znacznie bardziej reaktywne niż ich odpowiedniki C-C, zwłaszcza w wodzie. W wyniku większej reaktywności wiązania Si-Si najpowszechniejsze stabilne polimery krzemu są zbudowane z łańcuchów Si-O – ponieważ wiązanie Si-O jest nieproporcjonalnie silniejsze od jakichkolwiek innych wiązań zawierających Si. Co więcej, polimeryzacja krzemu często prowadzi do siatki łańcuchów Si-O, a nie liniowych polimerów, jak w przypadku węgla; tworzenie długich liniowych polimerów jest często wymieniane jako podstawowa charakterystyka każdej biochemii. W rezultacie chemia Si w środowiskach bogatych w tlen, np. w wodzie, ostatecznie prowadzi do krzemionki  $\text{SiO}_2$ , która jest chemicznie odpornym ciałem stałym, a nie gazem, jak w węglowym odpowiedniku  $\text{SiO}_2$ , czyli  $\text{CO}_2$  (rys. 3).

Czy znaczy to zatem, że ze względu na ogólnie znacznie wyższą reaktywność krzemu związki zawierające krzem są całkowicie bezużyteczne do życia jako ważny element budulcowy? Niekoniecznie. Stabilność i reaktywność są wypadkową samej chemii, ale także rozpuszczalnika.

**Rozpuszczalnik** jest istotny z następujących powodów: życie chemiczne musi działać w ośrodku, który pozwala cząsteczkom na ruch, ale który jest jednocześnie wystarczająco gęsty, aby powstrzymać duże cząsteczki przed wytrącaniem się w postaci agregatów. Oznacza to, że chemia życia musi działać w gęstym, ale płynnym rozpuszczalniku – w cieczy. Woda jest powszechnie uważana za idealny, być może jedyny, rozpuszczalnik gwarantujący rozwój życia. Woda aktywnie pomaga w samoorganizacji błon i polimerów życia, umożliwiając w ten sposób zjawisko kompartmentalizacji, czyli rozdzielania na przedziały (np. komórki), co jest koniecznym warunkiem życia. Na Ziemi woda w stanie ciekłym odgrywa dodatkowo aktywną rolę w procesach metabolicznych życia. Czy woda w stanie ciekłym może podtrzymać złożoną chemię krzemoorganiczną? Jest to mało prawdopodobne, bo jak wspomniano powyżej, potencjalna przestrzeń możliwości chemii krzemu skutkuje związkami najczęściej zupełnie niestabilnymi w wodzie, co w rezultacie oznacza, że biochemia krzemu na Ziemi jest niezwykle ograniczona chemicznie. W organizmach żywych wykorzystujących Si (np. u okrzemków) atom krzemu jest związany wyłącznie z tlenem, tworząc wiązanie pojedyncze Si-O.

Jeśli woda nie jest odpowiednim rozpuszczalnikiem dla różnorodnej, złożonej chemii krzemu, to może inne, alternatywne rozpuszczalniki są bardziej przyjazne dla chemii krzemu jako budulca życia? W szczególności przyjrzymy się przykładom kwasu siarkowego i krio-rozpuszczalników, ponieważ substancje te są obserwowane w naszym Układzie Słonecznym i mogą mieć znaczenie w skali planetarnej.

Chemia krzemu, a właściwie ogólnie rzecz biorąc każda chemia, jest znacznie bardziej stabilna w zimnych rozpuszczalnikach aprotowych (krio-rozpuszczalnikach) niż w rozpuszczalnikach protonowych. Jednak pomimo sprzyjających warunków dla stabilności i reaktywności pokonanie bariery rozpuszczalności w krio-rozpuszczalnikach jest prawdopodobnie niemożliwe, co utrudnia powstanie jakiegokolwiek rodzaju biochemii w takim środowisku.



### Rozwiązanie zadania F 1026.

Do oszacowania masy spoczynkowej skorzystamy ze związku całkowitej energii cząstki o masie spoczynkowej  $m_0$  z jej prędkością  $v$ :

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła, a  $\beta = v/c$ . Im większa prędkość, tym większa energia cząstki. Czas  $t$  potrzebny do pokonania odległości  $L$  wynosi  $t = L/v = L/(\beta \cdot c)$ . Różnica  $\Delta t$  między dotarciem do detektora cząstek o najmniejszych i największych energiach wyniesie:

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left( \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right) = \frac{L(\beta_2 - \beta_1)}{c\beta_1\beta_2},$$

gdzie parametr  $\beta_1$  odpowiada cząstkom o najmniejszych energiach ( $E_1$ ), a  $\beta_2$  o największych energiach ( $E_2$ ). Obie wartości  $\beta$  muszą być bardzo bliskie 1, jeśli po 170 000 lat lotu różnica czasów przelotu cząstek najszybszych i najwolniejszych wynosi tylko  $\Delta t \approx 2$  s. Wyznamy wartość  $\beta$  dla cząstki o energii  $E$  i skorzystamy z faktu, że obie interesujące nas wartości  $\beta$  są bardzo bliskie 1:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}} \approx 1 - \frac{m_0^2 c^4}{2E^2}.$$

Po podstawieniu do wzoru na  $\Delta t$  i skorzystaniu z faktu, że  $\beta_1\beta_2 \approx 1$ , otrzymujemy:

$$\Delta t = \frac{L}{2c} m_0^2 c^4 \left( \frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} \right),$$

a stąd:

$$m_0^2 c^4 = \frac{2c\Delta t}{L} \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_2^2 - E_1^2)}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych (1 rok  $\approx 31,6 \cdot 10^7$  s) otrzymujemy  $m_0 c^2 \approx 7$  eV. Wartość ta mieści się w przedziale wartości szacowanych na podstawie innych danych eksperymentalnych.



**Dowiedz się więcej:** Petkowski, J. J., Bains, W., & Seager, S., „On the Potential of Silicon as a Building Block for Life”, *Life*, 10(6), 84 (2020), [www.mdpi.com/2075-1729/10/6/84](http://www.mdpi.com/2075-1729/10/6/84)

Z drugiej strony, kwas siarkowy  $H_2SO_4$  jest rozpuszczalnikiem jeszcze bardziej agresywnym chemicznie niż woda, co w konsekwencji oznacza, że nie jest on idealnym rozpuszczalnikiem dla ziemskiej biochemii, szybko niszczonej przez stężony kwas. Znaczna część chemii krzemooorganicznej jest jednak stabilna w trudnych warunkach stężonego  $H_2SO_4$ . Jest to możliwe, ponieważ niestabilność związków krzemu w wodzie wynika w dużej mierze z nukleofilowego „ataku” jonów  $OH^-$  na atom krzemu i stabilności powstałej w ten sposób struktury pentakoordynacyjnej. W warunkach stężonego kwasu siarkowego dominuje natomiast atak elektrofilowy, a atomy krzemu, ubogie w elektrony w prawie wszystkich związkach, nie są skutecznymi celami chemii elektrofilowej. Taka różnica w reaktywności oznacza, że szereg grup chemicznych występujących w związkach krzemooorganicznych, stosunkowo nietrwałych w wodzie, jest stabilny w kwasie siarkowym.

Fakt, że większa liczba krzemowych grup funkcyjnych wydaje się bardziej stabilna w stężonym kwasie siarkowym niż w wodzie, otwiera możliwość szerszego wykorzystania chemii krzemu przez hipotetyczne życie funkcjonujące w kwasie siarkowym. Choć węgiel nadal pełniłby dominującą funkcję jako główny pierwiastek budulcowy w biochemii opartej na kwasie siarkowym, krzem mógłby być szeroko używany jako heteroatom. Jednym z przykładów możliwych stabilnych cząsteczek krzemooorganicznych, które mogłyby zostać wykorzystane przez hipotetyczne życie na bazie kwasu siarkowego, są silany (cząsteczki krzemu zawierające wiązania Si-Si). Łańcuchy Si-Si, o których wiadomo, że są stabilne w stężonym kwasie siarkowym, mają tak ukształtowane orbitale molekularne  $\sigma$ , że umożliwiają przewodzenie elektronów wzdłuż rusztowania cząsteczki. Takie przewodzenie elektronów jest analogiczne do sprzężonych układów alkenowych w biochemii życia na Ziemi. Sprzężone alkeny, takie jak izopren (rys. 2), są bardzo szybko atakowane w stężonym  $H_2SO_4$ , więc w zasadzie długołańcuchowe silany w kwasie siarkowym mogą zastępować funkcje biochemiczne wykonywane przez sprzężone dieny w biochemii ziemskiej. Taka wyjątkowa chemia krzemu może zapewnić niezbędną funkcjonalność biologiczną, którą w innym przypadku trudno byłoby osiągnąć w kwasie siarkowym wyłącznie na bazie węgla.

Podawane tu przykłady potencjalnych biologicznych zastosowań chemii krzemu to oczywiście spekulacje, a nie przewidywania. Używamy ich tutaj wyłącznie w celu zilustrowania, że krzem ma określone zalety jako heteroatom dla biochemii funkcjonującej w kwasie siarkowym jako rozpuszczalniku – zalety, które albo nie mają znaczenia dla jego zastosowania, albo mają mniejsze dla zastosowania w wodzie. Kwas siarkowy, w przeciwieństwie do innych proponowanych alternatywnych rozpuszczalników, takich jak HCN i  $NH_3$ , ma precedens w naszym Układzie Słonecznym – istnieje jako ciecz w skali planetarnej, w chmurach Wenus. Warstwa chmur Wenus rozciąga się w zakresie wysokości od 48 do 60 km, z temperaturami  $< 100^\circ C$  i ciśnieniem  $< 2$  barów, i składa się z kropelek ciekłego kwasu siarkowego. Hipotetyczna biosfera w chmurach Wenus jest przedmiotem spekulacji naukowych od wielu dziesięcioleci. Nie wiadomo, czy i jaka biochemia mogłaby istnieć w tak silnie reaktywnym i agresywnym rozpuszczalniku protonowym, jakim jest kwas siarkowy, ale jak wskazuje powyższa dyskusja, istnieje – przynajmniej teoretycznie – możliwość biochemii, która w szerszym zakresie, niż to znamy z Ziemi, wykorzystuje krzem.

Podsumowując, krzem i węgiel to „fałszywe bliźniaki”: ich chemiczne podobieństwo jest powierzchowne. Życie oparte na krzemie, które wykorzystuje wyłącznie Si jako główny pierwiastek rusztowania, jak to jest często przedstawiane w twórczości *science fiction*, jest prawie na pewno niemożliwe. Potencjalne możliwości chemii krzemu są bardzo ograniczone dla biochemii opartej na wodzie w roli rozpuszczalnika, natomiast jakikolwiek rodzaj biochemii jest bardzo mocno limitowany w rozpuszczalnikach kriogenicznych z powodu ograniczeń rozpuszczalności. Wydaje się jednak, że krzem mógłby być elementem biochemii życia jako często spotykany heteroatom w biochemii opartej na kwasie siarkowym lub, jak to ma miejsce na Ziemi, jako rzadki heteroatom w biochemii opartej na wodzie, ale nie jako główny budulec życia.

# Jak wyznaczyć najbardziej dowolny trójkąt?

Piotr PIKUL\*

\*Doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

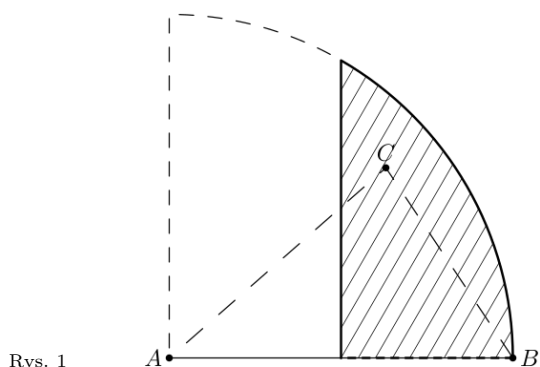
Każda liczba naturalna ma jakąś niezwykłą właściwość. Gdyby tak nie było, istniałaby najmniejsza liczba naturalna nieposiadająca żadnej wyróżniającej jej własności. A to już czyniłoby ją wyjątkową!

To nieco żartobliwe rozumowanie jest pokrewne z problemem, któremu przyjrzymy się w niniejszym artykule. Ze szkolnych lekcji geometrii pamiętam narzekania na rysunki trójkątów. Ktoś rysował „dowolny” trójkąt na tablicy, a potem trzeba było poprawiać, bo wyglądał jak prostokątny. Czasem też bywał za bardzo równoramienny. Zapewne różnie można oceniać zasadność takich narzekania. Można też spróbować nadać im matematyczny sens!

Szukamy trójkąta ostrokątnego, który jest możliwie „najbardziej odległy” od bycia prostokątnym lub równoramiennym. Jest oczywiste, że cecha ta nie powinna zależeć ani od położenia trójkąta na płaszczyźnie, ani od jego wielkości (mówiąc precyzyjnie: trójkąty podobne uznajemy za nierozróżnialne). Można próbować zdefiniować odległość pomiędzy trójkątami w bardzo abstrakcyjny sposób, wybierając najmniejszą „odległość” (np. odległość Hausdorffa lub podobną) pomiędzy reprezentantami klas abstrakcji. Takie podejście może okazać się niewygodne w stosowaniu. Lepiej najpierw nieco „zorganizować” przestrzeń wszystkich trójkątów.

Skoro chcemy być niezależni od podobieństwa, możemy ustalić jeden bok ( $AB$ ). Możemy się ograniczyć do sytuacji, gdy ten konkretny bok jest najdłuższy. Dalej, korzystając z odpowiednich symetrii osiowych, możemy umieścić trzeci wierzchołek „ponad” podstawą  $AB$  i po prawej stronie jej symetralnej (czyli  $|AB| \geq |AC| \geq |BC|$ ).

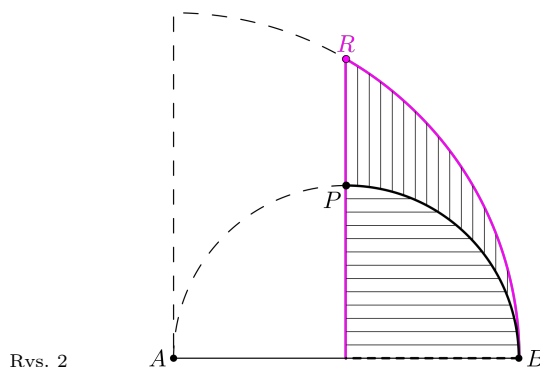
Zauważmy, że każdy punkt wewnątrz zakreskowanego obszaru (ograniczonego odcinkiem  $AB$ , jego symetralną oraz łukiem okręgu o środku  $A$ ) odpowiada jednoznacznie trójkątowi, dla którego jest trzecim wierzchołkiem ( $C$ ). Ponadto, jak już wcześniej wspomnieliśmy, każdy trójkąt ma swojego reprezentanta tej postaci, i to dokładnie jednego. Rysunek 1 przedstawia więc, w pewnym sensie, zbiór wszystkich trójkątów, z dokładnością do podobieństwa.



Rys. 1

To jednak nie koniec, ponieważ możemy zamienić go w prawdziwą mapę zbioru wszystkich trójkątów! Na uzupełnionym rysunku 2 wyróżniono punkty odpowiadające trójkątom prostokątnym (czarny łuk okręgu) oraz równoramiennym (kolorem). Wśród trójkątów

równoramiennych wyróżniają się dwa podzbiory: punkty leżące na pionowym odcinku reprezentują trójkąty mające podstawę nie krótszą od ramion, a te leżące na łuku oznaczają, że to ramiona są nie krótsze od podstawy. Na ich przecięciu leży jedyny i niepowtarzalny trójkąt równoboczny. Drugi charakterystyczny trójkąt, prostokątny-równoramienny, leży oczywiście na przecięciu łuku reprezentującego trójkąty prostokątne i odcinka zarezerwowanego dla równoramiennych.



Rys. 2

Znalezienie na „mapie” trzeciego, często wspomnianego w geometrii szkolnej, trójkąta „30–60–90” pozostawiam jako proste ćwiczenie pomagające pogłębić zachwyty nad geometrią przestrzeni wszystkich trójkątów.

Czarna, przerywana linia oznacza trójkąty zdegenerowane, którym – tradycyjnie – nie poświęcimy już więcej uwagi. Jak Czytelnicy z pewnością spostrzegli, obszar zakreskowany liniami poziomymi zawiera trójkąty rozwartokątne, a linie pionowe ozdabiają dziedzinę trójkątów ostrokątnych, którymi szczególnie się teraz interesujemy.

Dzięki „mapie” określenie, jak *daleki* jest dany trójkąt od bycia równoramiennym (prostokątnym), stało się precyzyjne. Skoro chcemy wyznaczyć trójkąt, który jest jak najbardziej odległy od równoramiennych i prostokątnych, interesuje nas środek największego okręgu, jaki można zmieścić w zakreskowanym pionowo obszarze ( $PBR$ ). W ogólności, jeśli boki „trójkąta” nie są odcinkami, taki maksymalny okrąg niekoniecznie jest styczny do każdego z nich. Czytelnik Zaskoczony proszony jest o samodzielne poszukanie przykładu demonstrującego tę patologię. Akurat w naszym przypadku okrąg wpisany (czyli styczny do wszystkich „boków”) jest maksymalny. Czytelnikowi Ambitnemu polecam zastanowienie się, co sprawia, że tak jest, dlaczego okrąg wpisany w krzywoliniowy trójkąt (właściwie: punkt równoodległy od wszystkich „boków”) w ogóle istnieje i jest tylko jeden. W dalszej części po prostu go wskażemy.

W celu wyznaczenia interesującego nas punktu możemy posłużyć się układem współrzędnych. Ustalając  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (1, 0)$  oraz szukany punkt jako  $C = (d, h)$ , nietrudno wyrazić jego odległości od pionowego odcinka i obu łuków (różnicę długości promienia i odległości punktu od środka odpowiedniego okręgu):

$$d_1 = d,$$

$$d_2 = r_{BR} - |AC| = 2 - \sqrt{(d+1)^2 + h^2},$$

$$d_3 = |CO| - r_{BP} = \sqrt{d^2 + h^2} - 1.$$

Przez  $O$  oznaczamy tu, tradycyjnie, początek układu współrzędnych. Zakładając, że  $d_1 = d_2 = d_3$ , możemy wyliczyć rozwiązanie  $d = \frac{1}{4}$ ,  $h = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Znając  $h$  i twierdzenie Pitagorasa, bez trudu wyznaczmy długość boku  $BC$ , wynoszącą  $\frac{\sqrt{33}}{4}$ . Jeśli więc przemnożymy długości boków przez 4, otrzymamy, że

(werble)

**najbardziej dowolnym trójkątem jest ten o proporcjach boków  $8 : 7 : \sqrt{33}$ .**

Przed przeprowadzeniem wspomnianych obliczeń nigdy o takim trójkącie nie słyszałem, ale to o niczym nie świadczy.

Być może niektórzy Czytelnicy od początku się zastanawiają, dlaczego wcale nie poruszyliśmy kwestii miar kątów. Przecież zarówno *prostokątność*, jak i *równoramiennność* można łatwo wyrazić za ich pomocą, a do tego „za darmo” otrzymujemy niezależność od podobieństwa. Teraz wypróbujemy to podejście.

Rozważmy trójkąt o kątach  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Ponieważ interesują nas trójkąty ostrokątne, mamy  $\alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$ . Aby trójkąt był *jak najmniej prostokątny*, różnice  $90^\circ - \alpha$ ,  $90^\circ - \beta$  oraz  $90^\circ - \gamma$  powinny osiągać jak największe wartości. Aby był *jak najmniej równoramienny*, różnice  $|\alpha - \beta|$ ,  $|\alpha - \gamma|$  i  $|\beta - \gamma|$  powinny osiągać jak największe wartości. Podsumowując, chcemy wyznaczyć takie kąty, żeby wartość

$$\min\{90^\circ - \alpha, 90^\circ - \beta, 90^\circ - \gamma, |\alpha - \beta|, |\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|\}$$

była jak największa.

Ponadto wiemy, że  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ , czyli możemy ograniczyć się do dwóch zmiennych. Po podstawieniu nasze wyrażenie uzyskuje postać:

$$F(\alpha, \beta) = \min\{90^\circ - \alpha, 90^\circ - \beta, \alpha + \beta - 90^\circ, |\alpha - \beta|, |2\alpha + \beta - 180^\circ|, |\alpha + 2\beta - 180^\circ|\}.$$

Wartości  $\alpha$  i  $\beta$ , dla których osiągana jest największa wartość  $F$ , można znaleźć ręcznie, badając układ *kilku* nierówności liniowych i rozpatrując różne przypadki. Można też narysować wykres za pomocą odpowiednio zdolnego oprogramowania.

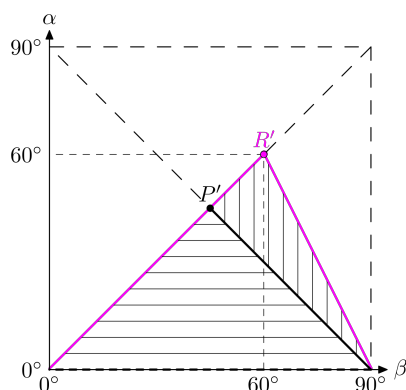
Niezależnie od preferowanej metody rozwiązanie jest, z dokładnością do permutacji miar kątów, jedno: trójkąt o miarach kątów wewnętrznych  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $75^\circ$ .

Zauważmy, że możemy rozważyć osobno „odległość od prostokątności” równą  $\min\{90^\circ - \alpha, 90^\circ - \beta, 90^\circ - \gamma\}$  oraz „odległość od równoramienności” równą  $\min\{|\alpha - \beta|, |\alpha - \gamma|, |\beta - \gamma|\}$ . W przypadku przedstawionego rozwiązania obie wielkości osiągają tę samą wartość  $15^\circ$ .

Zwróćmy jeszcze uwagę, że „podejście kątowe” (po uściśleniu  $\gamma \geq \beta \geq \alpha$ ), generuje alternatywną „mapę” przestrzeni wszystkich trójkątów. I to mapę w kształcie trójkąta!

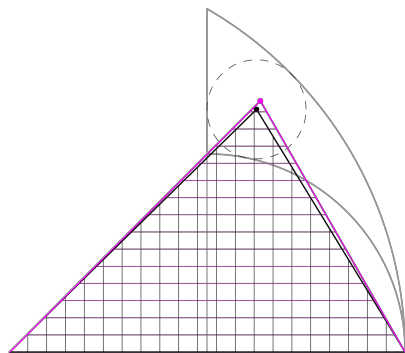
Na tej „mapie” trójkąty o ustalonej mierze któregoś z kątów są reprezentowane przez proste odcinki. Odróżnia ją to od wersji przedstawionej poprzednio. Jeśli ktoś nabral przekonania, że w porównaniu z drugą „mapą” ta pierwsza

nie ma właściwie nic do zaoferowania, proponuję poszukać sposobu konstruowania trójkąta odpowiadającego danemu punktowi „mapy kątowej”.



Rys. 3

Zostawmy jednak na chwilę „mapy” i wróćmy do trójkąta „45–60–75”. W żadnym razie nie chcę podkopać u Czytelnika wiary w piękno matematyki, ale to *nie* jest ten sam trójkąt co wyznaczony wcześniej. Formalne zweryfikowanie tego faktu jest bardzo proste, w przeciwieństwie do rozpoznania „na oko”, z którym *wyjątkowo niewyjątkowym* trójkątem mamy do czynienia.



Rys. 4. Trójkąty „45–60–75” (kolorem) oraz „8 : 7 :  $\sqrt{33}$ ” (na czarno)

Trójkąt (tj. odpowiadający mu punkt na pierwszej „mapie”) uzyskany drugą metodą leży na przecięciu dwusiecznych kątów krzywoliniowego trójkąta  $PBR$  (prostych  $AP$  i  $RB$ ), więc pierwsze podejście również go w pewien sposób wyróżnia. Odrywając się nieco od matematycznych konkretów, możemy powiedzieć, że trójkąt ten, aspirujący do miana *najbardziej dowolnego*, jest niejako pośrednim pomiędzy dwoma *najmniej dowolnymi* – równobocznym i prostokątnym-równoramiennym.

Który spośród wyznaczonych trójkątów jest bardziej dowolny? Zapewne można się spierać. Co więcej, środek okręgu wpisanego w „trójkąty ostrokątne” na drugiej mapie wyznacza trzeciego kandydata do miana *najbardziej dowolnego trójkąta*. Można wskazać zapewne jeszcze całe mnóstwo wyrafinowanych wersji środka dziedziny trójkątów ostrokątnych (por. *Encyclopedia of Triangle Centers*, [faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html](http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html)). Można też zapytać, czy trójkąt  $8 : 7 : \sqrt{33}$  leży w *ciekawym punkcie* drugiej mapy?

Być może jakieś pozamatematyczne badania dotyczące postrzegania kształtów i kątów mogłyby dorzucić do tych rozważań swój wkład, ale na razie wszystko wskazuje na to, że w kwestii wyznaczenia „najbardziej dowolnego trójkąta” panuje pewna dowolność. Chyba trudno wyobrazić sobie lepszą pointę dla tego artykułu.

# Podważane twierdzenie o ciągach

Adam BOBROWSKI\*, Adam GREGOSIEWICZ\*

\* Politechnika Lubelska

Przypomnijmy, że ciągi dodajemy i odejmujemy następująco:  
 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \pm \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n \pm b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Elementarny dowód faktu, że ciąg  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest rozbieżny, Czytelnik znajdzie w ciekawej pracy J. Dence, T. Dence, *Pairs of divergent sequences whose differences converge*, Pi Mu Epsilon Journal 13 (2009), 21–32.

Informacje o tym, w jaki sposób można konstruować całe rodziny nietrywialnych par ciągów rozbieżnych o zbieżnych różnicach, Czytelnik Zainteresowany znajdzie w ciekawej pracy J. Dence, T. Dence, *Pairs of divergent sequences whose differences converge*, Pi Mu Epsilon Journal 13 (2009), 21–32.

Czytelnik być może zechce zajrzeć na stronę 215 monografii „Generators of Markov chains”, wydanej ostatnio przez Cambridge University Press.



## Rozwiązanie zadania M 1677.

Niech  $I$  będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ . Zauważmy, że trójkąty  $ACI$  oraz  $IPA$  są przystające ( $AC = AP$ ,  $\sphericalangle PAI = \sphericalangle IAC$ ,  $AI$  – bok wspólny). Zatem

$$\sphericalangle IPC = \sphericalangle ACI = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB.$$

Podobnie

$$\sphericalangle PQI = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB,$$

więc trójkąt  $QIP$  jest równoramienny, a to oznacza, że  $I$  leży na symetralnej odcinka  $PQ$ . Punkt  $I$  również leży na dwusiecznej kąta  $ACB$ , więc  $I \equiv R!$  Zatem

$$\begin{aligned} \sphericalangle PRQ &= \sphericalangle PIQ = 180^\circ - 2\sphericalangle API = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle ACB. \end{aligned}$$

Nietrudno uzasadnić, że zbieżności dwóch ciągów liczb rzeczywistych wynika zbieżność ich różnicy, z granicą równą różnicy odpowiednich granic. Innymi słowy, jeżeli granice  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  istnieją, to ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} - \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Oczywiście implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa: jeżeli wiemy tylko tyle, że ciąg  $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny, to niewiele można powiedzieć o samych  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – oba mogą być rozbieżne. By się o tym przekonać, wystarczy wziąć dowolny ciąg rozbieżny  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i przyjąć  $b_n := a_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Nieco mniej trywialny przykład można skonstruować, wykorzystując sumy częściowe szeregu harmonicznego. Niech mianowicie

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Dla  $n \in \mathbb{N}$  mamy  $H_{n+1} - H_n = 1/(n+1)$ , zatem przyjmując  $a_n := H_{n+1}$  i  $b_n := H_n$ , widzimy, że ciąg  $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny do zera, a jednocześnie ciągi  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  są rozbieżne do  $+\infty$ .

Przez chwilę można liczyć na to, iż w tego typu kontrprzykładach istotną rolę odgrywa fakt, że rozważane ciągi w pewien sposób od siebie zależą. Może dla ciągów *istotnie* różnych – jakkolwiek tę istotną różnicę zdefiniujemy – takich kontrprzykładów nie da się skonstruować? Nadzieja ta jest jednak płonna. Niech  $a_n := H_n$  i  $b_n := \ln n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . Oba ciągi dążą do  $+\infty$ , a mimo to ciąg  $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ma granicę. Rzeczywiście, jak nietrudno uzasadnić, jest on malejący i ograniczony z dołu, a każdy taki ciąg jest zbieżny. Granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) = 0,577215 \dots$$

nazywamy *stałą Eulera* i oznaczamy zwykle przez  $\gamma$ .

Skoro zbieżność  $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nie mówi zbyt wiele o samych ciągach  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , być może warto rozważyć pewne szczególne podklasy ciągów. Załóżmy na przykład, że jeden z nich jest przesunięciem drugiego, powiedzmy  $a_n := b_{n+1}$  dla  $n \in \mathbb{N}$  i danego  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Jak zauważyliśmy wcześniej (rozważając ciąg o wyrazach  $b_n := H_n$ ), ze zbieżności  $\{b_{n+1} - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nie można wywnioskować zbieżności  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Co ciekawe, można natomiast wykazać implikację nieco inną:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = g$  pociąga za sobą  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/n = g$ .

Wyposażeni już w pewną intuicję, przejdźmy do tytułowego twierdzenia, które być może nie ujrzałoby światła dziennego, gdyby nie to, że – z powodów, nad którymi nie będziemy się tu rozwodzić – jeden z autorów tego artykułu rozważał niedawno klasę ciągów  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  o tej własności, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n (8b_{n+1} - 9b_n + b_{n-1}) = 0.$$

Rzut oka na tę klasę z nieco innej perspektywy pozwolił zauważyć, że każdy jej element spełnia też warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n (b_{n+1} - b_n) = 0.$$

To już wydało się podejrzanym – przez chwilę autor miał wręcz wątpliwości, czy na pewno wspomniana wyżej perspektywa nie wykrzywia rzeczywistości, czy jej nie zakłamuje – ponieważ przyjmując

$$a_n := 3^n (b_{n+1} - b_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

otrzymywał w ten sposób implikację

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (8a_n - 3a_{n-1}) = 0 \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

kłócała w kontekście przykładów rozważanych wcześniej wygląda zaskakująco. Jednak fakt, iż w jej poprzedniku liniowa kombinacja ciągów nie jest po prostu różnicą, ma kluczowe znaczenie: ta implikacja rzeczywiście jest prawdziwa. Stanowi to szczególny przypadek następującego twierdzenia, które – gdy się nad nim chwilę zastanowić – okazuje się wcale nie tak podejrzanym.

**Twierdzenie.** *Jeśli ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ma tę własność, że dla pewnego  $\alpha$  z przedziału  $(-1, 1)$  granica*

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \alpha a_n)$$

*istnieje i jest równa zero, to również*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

*Dla  $|\alpha| \geq 1$  opisana wyżej implikacja nie jest prawdziwa.*





### Rozwiązanie zadania M 1676.

Załóżmy, że każdemu z członków koła znanych jest nie więcej niż pięć osób. Wtedy pojawi się członek koła, który ma nie więcej niż czterech znajomych (nie ma grupy 49 osób, z których każda zna dokładnie pięć osób, ponieważ liczba par znajomych w takiej grupie to  $(49 \cdot 5)/2$ , co jest liczbą niecałkowitą).

Weźmy teraz osobę (nazwijmy ją Ahmed), która ma nie więcej niż 4 znajomych, jego znajomych (nie więcej niż czterech) i ich znajomych (nie więcej niż 16, ponieważ każdy ze znajomych Ahmeda ma co najwyżej 4 innych znajomych). Usuńmy tę grupę z koła (czyli nie więcej niż 21 osób) i rozważmy jeszcze jedną osobę (powiedzmy Hamzę) z powstałej grupy. Hamza może mieć co najwyżej pięciu znajomych i nie więcej niż 20 znajomych swoich znajomych. Usuńmy również tę grupę z naszego koła (czyli nie więcej niż 26 osób). Ponieważ jest tylko 49 osób, a usunęliśmy nie więcej niż 47, pozostał ktoś inny (niech to będzie Thanna). Wtedy jednak Ahmed, Hamza i Thanna nie znajdują się i nie mają wspólnych znajomych – sprzeczność.

Za podsuniecie pomysłu użycia twierdzenia Stolza autorzy dziękują Michałowi Miśkiewiczowi, członkowi komitetu redakcyjnego *Delt*.

Skoro już wiemy, że nasze **twierdzenie** da się wywnioskować z twierdzenia Stolza, warto się zastanowić, czy tego drugiego nie da się jakimś sprytnym sposobem wywnioskować z pierwszego. Analiza dowodu twierdzenia Stolza podanego w podręczniku Fichtenholza (tom 1, str. 55) potwierdza przypuszczenie, że te wyniki są pokrewne. Czy ktoś to potrafi udowodnić?

*Dowód.* By udowodnić drugą, łatwiejszą część tezy, załóżmy, że mamy dane takie  $\alpha$ , że  $|\alpha| \geq 1$ . Ciąg zdefiniowany wzorem  $a_n := \alpha^n$  dla  $n \in \mathbb{N}$  jest wtedy albo rozbieżny, albo stały i niezerowy, a jednak  $a_{n+1} - \alpha a_n = 0$ . Ot, i cały kontrprzykład.

W przypadku  $|\alpha| < 1$  sytuacja zmienia się dramatycznie, a kluczem do istoty rzeczy jest zbieżność szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$  (poniżej zakładamy, że  $\alpha \neq 0$ , bo przypadek  $\alpha = 0$  jest oczywisty). Jeśli bowiem przyjmiemy  $a_0 := 0$  i zdefiniujemy

$$(2) \quad c_n := a_n - \alpha a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

to otrzymamy rekurencję

$$(3) \quad a_n = \alpha a_{n-1} + c_n,$$

spełnioną dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$ , która prowadzi do równości

$$(4) \quad a_n = \sum_{i=1}^n \alpha^{n-i} c_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Specjaliści zauważają, że mamy tu do czynienia z czymś w rodzaju splotu ciągu  $\{\alpha^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ze zbieżnym do zera ciągiem  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Z zależnością (4) w ręku dowód prowadzimy już przebojem: mając dane  $\epsilon > 0$ , znajdujemy  $k$  tak duże, by dla  $i \geq k$  zachodziła nierówność  $|c_i| < (1 - |\alpha|)\frac{\epsilon}{2}$ . Następnie tak dobieramy  $n_0 \geq k$ , że

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{n-i} c_i \right| = |\alpha|^n \left| \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{-i} c_i \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

o ile  $n \geq n_0$ . Dla takich  $n$  mamy

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha^{n-i} c_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{n-i} c_i \right| + \sum_{i=k}^n |\alpha|^{n-i} |c_i| < \frac{\epsilon}{2} + (1 - |\alpha|) \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{n-k} |\alpha|^j < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2},$$

co oczywiście kończy dowód.  $\square$

Powyższy wynik (a dokładniej jego przypadek  $|\alpha| < 1$ ) można również uzyskać, wykorzystując trochę bardziej zaawansowane narzędzia – unikając przy okazji rachunków z epsilonami.

Można użyć na przykład twierdzenia Stolza, które – przypomnijmy – jest ciągłym odpowiednikiem szerzej znanego twierdzenia de l'Hospitala traktującego o funkcjach i pozwala liczyć granice typu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ , ale – jak widać z naszego przykładu – nie tylko. Mówi ono, że jeśli ciąg  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ma granicę nieskończoną, a przy tym rośnie, to z istnienia  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}$  wynika istnienie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$  oraz równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}.$$

Nawiasem mówiąc, przyjmując  $v_n := n$ , otrzymujemy z twierdzenia Stolza wspomnianą wyżej implikację  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = g \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = g$ .

Wracając jednak do naszego głównego twierdzenia w przypadku  $|\alpha| < 1$ , zauważmy, że przy jego założeniach ciąg  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dany wzorem  $v_n := |\alpha|^{-n}$  rośnie do nieskończoności. Równocześnie przyjmując  $u_n := \alpha^{-n} a_n$ , mamy

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \left( \frac{|\alpha|}{\alpha} \right)^{n+1} \frac{a_{n+1} - \alpha a_n}{|\alpha| - 1}.$$

Gdy  $n \rightarrow \infty$ , prawa strona tej równości dąży z założenia do 0, bo  $\frac{|\alpha|}{\alpha}$  to albo 1, albo  $-1$  (patrz też niżej – mamy tu do czynienia z ciągiem ograniczonym). Twierdzenie Stolza pozwala zatem stwierdzić, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{|\alpha|}{\alpha} \right)^n a_n = 0$ , co implikuje też tezę naszego twierdzenia.

Trzeci dowód, który chcemy tu przedstawić, wykorzystuje twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Jest on równie krótki jak poprzedni, a jego podstawową zaletą jest to, że pozwala Czytelnikowi oderwać się od strony rachunkowej, a zająć na chwilę do skarba współczesnej matematyki – choćby nieformalnie poznać pojęcie przestrzeni Banacha.

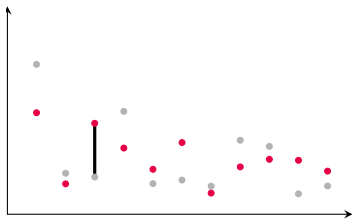
By dowód ten, a przede wszystkim to pojęcie, zrozumieć, trzeba zmienić perspektywę: zamiast myśleć o tym, jak umiejętnie żonglować wzorami opisującymi interesujący ciąg, wyobrażamy sobie raczej zbiór, oznaczany standardowo  $c_0$ , złożony ze wszystkich ciągów  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , które dążą do zera:

$$c_0 = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}.$$

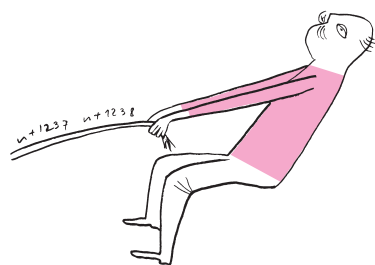
A nie jest to zbiór pospolity.

Za tym stwierdzeniem ukryte jest pewne elementarne twierdzenie o granicach. Jakże?

Czytelnik może pamiętać, że wektory na płaszczyźnie, to jest w przestrzeni wymiaru dwa, można utożsamiać z parami  $(x_1, x_2)$  liczb, a te z przestrzeni z trójkami  $(x_1, x_2, x_3)$ . Przestrzeń ciągów ma nieskończenie wiele wymiarów, bo jej elementy, które wyobrażamy sobie tak:  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , mają nieskończenie wiele współrzędnych.



Na szaro zaznaczono początkowe wyrazy ciągu  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , a kolorem czerwonym wyrazy ciągu  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Odległość między tymi ciągami jest równa długości najdłuższego odcinka łączącego punkty o jednakowych odciętych. W tym przypadku będzie to zaznaczony pionowy odcinek.



O twierdzeniu Banacha można również przeczytać w artykułach J. Górnickiego w  $\Delta_{14}^2$  i  $\Delta_{20}^6$ .

Zbiór  $c_0$  jest przykładem przestrzeni Banacha, to znaczy przestrzeni wektorowej z „dobrze dobraną” normą. Twierdzenie Banacha jest prawdziwe w każdej takiej przestrzeni i w jeszcze szerszej klasie przestrzeni metrycznych zupełnych. Formalna definicja zupełności nie jest zbyt skomplikowana, choć raczej techniczna, ale droga od niej do opisanych tu intuicji (i z powrotem) wymaga pewnego obycia.

Po pierwsze, jego elementy możemy w naturalny sposób dodawać i odejmować, tak jak to opisaliśmy wyżej. Możemy je też mnożyć przez liczby (zwane w takim kontekście skalarami), o tak:  $t \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dla  $t \in \mathbb{R}$ . Co ważne, okazuje się, że opisane tu działania niczym istotnym nie różnią się od operacji, które wykonujemy na wektorach na płaszczyźnie czy w przestrzeni trójwymiarowej. Z tego względu o  $c_0$  mówi się, że jest przestrzenią wektorową (lub liniową).

Po drugie, podobnie jak w przypadku wektorów na płaszczyźnie i w przestrzeni, elementom  $c_0$  można przyporządkować też długość, nazywaną fachowo normą:

$$(5) \quad \|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\| := \text{długość } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \sup_{n \geq 1} |x_n|,$$

i znów okazuje się, że posługiwać się nią można tak samo jak w skończonej liczbie wymiarów. (Swoją drogą, wyrażenie po prawej stronie to w istocie największa z wartości  $|x_1|, |x_2|, \dots$ , a to, że taka największa wartość istnieje i jest skończona, można sprawdzić elementarnie, czyli samemu.) W szczególności dla wszystkich wektorów  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zachodzi nierówność

$$(6) \quad \|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} + \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}\| \leq \|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\| + \|\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}\|,$$

która pozwala myśleć o  $\|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} - \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}\|$  jako o odległości między ciągami  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Czytelnik, który oczekuje na obiecany widok skarbcza, jest może na razie (i słusznie) zawiedziony. Bardziej niż istnienie normy w  $c_0$  zapewne zdziwi go informacja, że w niektórych przestrzeniach wektorowych takiej normy sensownie zdefiniować się nie da. Ale *clou* czeka tuż za rogiem, oczywiście bynajmniej nie jest, i brzmi:

długość ze wzoru (5) pasuje do  $c_0$  jak ulał!

Jak rękawiczka do ręki, jak do nogi dobrze dopasowany mokasyn.

Znaczy to tyle, że zupełnie sensownych norm w  $c_0$  zdefiniować można wiele, ale żadna z nich (chyba że jest normą (5) w jakimś przebraniu) nie opisuje tej przestrzeni dobrze. Na przykład moglibyśmy chcieć przyjąć

$$\|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\| = |x_1| + |x_2| + \dots,$$

ale wtedy wiele ciągów, w tym ciąg harmoniczny  $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , o którym wspomnieliśmy wyżej, miałyby długość nieskończoną. Ta norma, jak źle dobrany but, byłaby za ciasna. Podobne problemy wystąpią, gdybyśmy, idąc za przykładem przestrzeni znanych ze szkoły średniej, zdefiniowali

$$\|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots}$$

Ten pantofelek pasuje na stopę innej dziewczyny, która nazywa się  $\ell^2$  i króluje w fizyce. Z drugiej strony, można by na przykład chcieć używać

$$\|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\| = \frac{1}{2}|x_1| + \frac{1}{2^2}|x_2| + \dots + \frac{1}{2^n}|x_n| + \dots$$

Wtedy wszystkie wektory miałyby skończone długości, ale okazuje się, że wędrując po  $c_0$  z pomocą tej normy, napotykalibyśmy tu i ówdzie obiekty jej obce, takie jak ciąg złożony z samych jedynek, którego granicą nie jest przecież zero, albo ten składający się z jedynek i minus jedynek na przemian, który granicą, o zgrozo, nie ma żadnej; but byłby zbyt luźny.

Powtórzmy to raz jeszcze. Tylko norma ze wzoru (5) jest złotym środkiem, strzałem w dziesiątkę. Nie ma żadnej innej, która pasowałaby do  $c_0$  tak jak ta, nie ma żadnej innej, która by tak dobrze  $c_0$  opisywała. To stwierdzenie głębokie i ważne: na pewno głębsze niż nasze główne twierdzenie. I – trzeba to podkreślić – nie chodzi o to tylko, by norma spełniała nierówności takie jak (6). W szczególności, poniższe twierdzenie Banacha przestaje być prawdziwe, jeśli zamiast normy z (5) użyjemy normy innej, niewłaściwej – omawiany w nim punkt stały mógłby bowiem „wyjść” z przestrzeni.

**Twierdzenie (Banach).** Jeżeli  $T: c_0 \rightarrow c_0$  jest odwzorowaniem zwężającym, to znaczy jeśli

$$\|T(x) - T(y)\| \leq q \|x - y\|, \quad x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$$

dla pewnego  $q \in [0, 1)$ , to istnieje dokładnie jeden element  $\tilde{x} \in c_0$ , zwany punktem stałym, spełniający równość  $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$ .

**Trzeci dowód głównego twierdzenia.** Niech odwzorowanie  $S: c_0 \rightarrow c_0$  przesuwa wyrazy ciągu o jeden w prawo. Innymi słowy:

$$S(x) = S((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (0, x_1, x_2, \dots), \quad x \in c_0.$$



### Rozwiązanie zadania M 1675.

Na tablicy pozostają tylko liczby złożone, a ich czynniki pierwsze mieszczą się w zakresie od 101 do 999 lub od 10001 do 1 000 000. Jednakże żadna z pozostałych liczb nie może być równa iloczynowi trzech lub więcej liczb pierwszych w tych zakresach, ponieważ w tym przypadku iloczyn wynosiłby więcej niż  $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$ . Oznacza to, że wszystkie pozostałe liczby są podzielne przez dokładnie dwa czynniki pierwsze w rozważanych zakresach. Ale wtedy liczby pierwsze muszą należeć do przedziału  $[101, 999]$ , w przeciwnym razie iloczyn jest większy niż  $100 \cdot 10\,000 = 1\,000\,000$ . Ostatecznie iloczyn dowolnych dwóch liczb pierwszych z przedziału  $[101, 999]$  (włączając kwadraty liczb pierwszych) nie przekracza  $999 \cdot 999 < 1\,000\,000$  i dlatego pozostaje na tablicy. Więc jeśli  $p_1, p_2, \dots, p_k$  jest listą wszystkich liczb pierwszych od 101 do 999, to na tablicy zostają:

$$\begin{array}{ccccccc} p_1 p_1, & p_1 p_2, & p_1 p_3, & \dots, & p_1 p_k \\ p_2 p_2, & p_2 p_3, & \dots, & & p_2 p_k \\ p_3 p_3, & \dots, & & & p_3 p_k \end{array}$$

których iloczyn wynosi  $(p_1 p_2 \dots p_k)^{k+1}$ .

Przypomnijmy, że ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nazywamy ograniczonym, jeśli istnieje taka liczba  $M$ , że dla wszystkich naturalnych  $n$  zachodzi nierówność  $|a_n| \leq M$ .

W dowodzie wniosku skorzystaliśmy ze znanego twierdzenia mówiącego, że granicą iloczynu ciągu ograniczonego i ciągu dążącego do zera jest zero.

Zauważmy, że  $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$  (mówimy w tej sytuacji, że  $S$  zachowuje odległość lub że jest izometrią). Następnie, mając dany ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  spełniający warunek (1), zdefiniujemy odwzorowanie  $T: c_0 \rightarrow c_0$  wzorem

$$T(x) = \alpha S(x) + c = (c_1, \alpha x_1 + c_2, \alpha x_2 + c_3, \dots), \quad x \in c_0,$$

w którym ciąg  $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$  zadany jest przez (2). Dla dowolnych  $x, y \in c_0$  otrzymamy  $\|T(x) - T(y)\| = |\alpha| \|S(x) - S(y)\| = |\alpha| \|x - y\|$ , co dowodzi, że odwzorowanie  $T$  jest zwężające (z  $q = |\alpha| < 1$ ). Z twierdzenia Banacha wynika zatem, że istnieje dokładnie jeden element  $\tilde{x} = \{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  przestrzeni  $c_0$ , dla którego  $\tilde{x} = T(\tilde{x})$ . Ostatnia równość jest równoważna temu, że  $\tilde{x}_1 = 0 + a_1 - \alpha a_0 = a_1$  oraz

$$\tilde{x}_n = \alpha \tilde{x}_{n-1} + c_n, \quad n \geq 2.$$

Wobec (3) pokazuje to, że ciągi  $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  spełniają tę samą zależność rekurencyjną, a to z kolei, w połączeniu z faktem, że  $\tilde{x}_1 = a_1$ , implikuje ich równość. Skoro jednak  $\tilde{x}$  należy do  $c_0$ , to do tej samej przestrzeni należy również nasz wyjściowy ciąg, co oznacza, że jego granica istnieje i jest równa zero. To kończy nasze trzecie rozumowanie.

Na koniec zannotujmy, że tytułowe twierdzenie można uogólniać: na przykład  $\alpha$  może zależeć od  $n$ , granica w (1) nie musi też być zerem. W poniższym wniosku zajmujemy się pierwszym z tych dwóch przypadków, zostawiając przyjemność łamania sobie głowy nad drugim wygimnastykowanemu Czytelnikowi.

**Wniosek.** Jeżeli  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem zbieżnym do liczby z przedziału  $(-1, 1)$ , a ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ma tę własność, że granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \alpha_n a_n)$$

istnieje i jest równa zero, to sam  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  też zbiega do zera.

*Dowód.* Jeśli się wie, że z przyjętego wyżej założenia wynika ograniczoność ciągu  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , to dowód jest bardzo prosty. Łatwa do sprawdzenia tożsamość

$$(7) \quad a_{n+1} - \alpha_n a_n = (a_{n+1} - \alpha_0 a_n) + (\alpha_0 - \alpha_n) a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

w której  $\alpha_0$  jest granicą ciągu  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , prowadzi bowiem natychmiast do wniosku, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \alpha_n a_n) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \alpha_0 a_n) = 0$ , co pozwala otrzymać tezę z wersji twierdzenia udowodnionej wcześniej.

Pozostało nam wykazać, że  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ograniczony. Przedstawimy na to dwa dowody. Pierwszy z nich zaczyna się od spostrzeżenia, że gdyby ciąg ten ograniczony nie był, to istniałby jego podciąg  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  o tej własności, że

$$|a_{n_k+1}| \geq \max\{1, |a_{n_k}|\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ  $|\alpha_{n_k}| < 1 - \delta$  dla pewnego  $\delta \in (0, 1)$  i wszystkich odpowiednio dużych  $k \in \mathbb{N}$ , więc dla takich  $k$  mielibyśmy

$$\begin{aligned} |a_{n_k+1} - \alpha_{n_k} a_{n_k}| &\geq \max\{1, |a_{n_k}|\} - |\alpha_{n_k}| |a_{n_k}| \geq \\ &\geq \max\{1, |a_{n_k}|\} (1 - |\alpha_{n_k}|) \geq 1 - |\alpha_{n_k}| > \delta. \end{aligned}$$

Przeczy to jednak temu, że ciąg  $\{a_{n_k+1} - \alpha_{n_k} a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , będący podciągiem ciągu  $\{a_{n+1} - \alpha_n a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , zbiega do zera. Sprzeczność ta dowodzi, że nasz ciąg jest ograniczony.

Dowód drugi jest bardziej bezpośredni. Niech  $\beta$  będzie liczbą z przedziału otwartego o końcach  $|\alpha_0|$  i 1. Z założenia wiemy, że istnieje taka liczba naturalna  $k$ , że nierówności

$$|\alpha_n| \leq \beta \quad \text{i} \quad |a_{n+1} - \alpha_n a_n| \leq 1 - \beta$$

zachodzą dla wszystkich  $n \geq k$ . Dla takich  $n$  zatem

$$|a_{n+1}| = |\alpha_n a_n + a_{n+1} - \alpha_n a_n| \leq \beta |a_n| + 1 - \beta.$$

Z tej zależności można już, poprzez rozumowanie indukcyjne, łatwo wywnioskować, że  $|a_n|$  nie przekracza największej z liczb  $1, |a_1|, \dots, |a_k|$ , o ile tylko  $n \geq k$ . To zaś dowodzi ponownie, że ciąg  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ograniczony.  $\square$

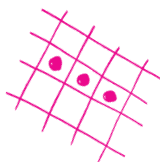
Teraz, gdy nasze – udowodnione na trzy sposoby – twierdzenie przestało być podejrzane, chyba warto je zapamiętać, choćby jako kryterium zbieżności ciągów. Z jego pomocą można na przykład, stosując indukcję względem  $k$ , bezboleśnie dowieść, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \alpha^n = 0$  dla każdego naturalnego  $k$  i każdego  $\alpha$  z przedziału  $(-1, 1)$ . Na pewno jednak znacznie ważniejsze jest, by zapamiętać, przynajmniej intuicyjnie, co to jest przestrzeń Banacha.

# John Horton Conway (1937–2020)

Józef H. PRZYTYCKI\*, Witold ROSICKI\*\*

\*George Washington University  
i Uniwersytet Gdański

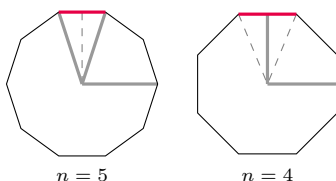
\*\*Wydział Matematyki, Fizyki  
i Informatyki, Uniwersytet Gdański



## Rozwiązania zadań, a w zasadzie szkice rozwiązań z artykułu „ $3 \leq \pi \leq 4$ ”

**Rozwiązanie zadania 1.** Dla  $(x, y) \neq (0, 0)$  zachodzi nierówność  $\|A\|^2 > 0$ , skąd można wywnioskować  $ac > b^2$ . Postać kanoniczna  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{ac-b^2}{a}y^2$  sugeruje postać przekształcenia liniowego  $(x, y) \mapsto (z, w)$ , dla którego  $(x, y) \in \mathbb{S}$  jest równoważne  $z^2 + w^2 = 1$ . Pozostaje sprawdzić, że długość dowolnej łamanej (liczona zgodnie z normą  $\|\cdot\|$ ) jest równa długości jej obrazu (liczonej zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa).

**Rozwiązanie zadania 2.** W obu przypadkach długość okręgu jednostkowego to po prostu  $2\pi$  razy długość boku, ale obliczona zgodnie z normą. Aby wyznaczyć długość pojedynczego boku (czerwony odcinek), porównujemy go z równoległym odcinkiem długości 1 (szary odcinek). Dla nieparzystego  $n$  ta proporcja wynosi  $2 \sin \frac{2\pi}{n}$ , więc jako obwód otrzymujemy  $4n \sin(2\pi/4n)$ . Ponieważ  $\sin x < x$ , jest to mniejsze od  $2\pi$ . Dla parzystego  $n$  sytuacja jest jakościowo inna. Niemniej łatwo wyznaczyć obwód równy  $4n \operatorname{tg}(2\pi/4n)$ , a skoro  $\operatorname{tg} x > x$ , to wynik jest większy od  $2\pi$ .



11 kwietnia 2020 roku zmarł w New Brunswick, w stanie New Jersey w USA, znakomity i wszechstronny angielski matematyk John Horton Conway.

Urodził się 26 grudnia 1937 roku w Liverpoolu. Studiował matematykę w Gonville and Caius College na Uniwersytecie Cambridge. W 1959 roku uzyskał z wyróżnieniem licencjat, w 1964 roku obronił pracę doktorską zatytułowaną *Homogeneous ordered sets*. W 1981 roku Conway został wybrany na członka The Royal Society of London, w 1983 roku otrzymał stanowisko profesora matematyki Uniwersytetu Cambridge, a od roku 1986 pracował jako profesor matematyki w Uniwersytecie Princeton, gdzie objął katedrę imienia Johna von Neumana.

John H. Conway miał bardzo rozległe zainteresowania matematyczne: uzyskał wiele wyników w teorii grup skończonych, teorii węzłów, teorii liczb, teorii gier kombinatorycznych i teorii kodowania. Wniósł także znaczący wkład do matematyki rekreacyjnej.

W roku 1970 stworzył „Grę w życie” (*Game of Life*), jeden z najbardziej znanych automatów komórkowych. W tej grze nie ma przeciwników; na nieskończonej planszy podzielonej na kwadraty jak szachownica znajdują się „żywe” i „martwe” komórki. Człowiek ustala tylko stan początkowy, a następujące reguły wyznaczają jej wygląd w przyszłości:

- Martwa komórka, która ma dokładnie trzech żywych sąsiadów, spośród ośmiu, staje się żywa w następnej jednostce czasu (rodzi się).
- Żywa komórka z dwoma albo trzema żywymi sąsiadami pozostaje nadal żywa; przy innej liczbie sąsiadów umiera (z „samotności” albo „zatłoczenia”).

Zarówno ta gra, jak i jej modyfikacje doskonale obrazują pewne procesy biologiczne i fizyczne.

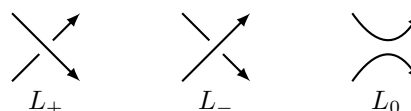
Historia powstania „Game of life” sięga początku lat 60. XX wieku; Conway zainspirowany pracami Stanisława Ulama i Roberta Schrandta eksperymentował z układami sąsiadów i regułami zmian. Zasady obowiązujące w „Grze w życie” wybrał dlatego, że pozwalały utrzymać równowagę pomiędzy rozrastaniem się struktur z jednej strony a znikaniem komórek z drugiej.

Jeszcze jako uczeń szkoły średniej Conway zafascynował się węzłami. Jego jedyna opublikowana praca na ten temat [2] ma swoje źródła już w tym okresie. W swoim artykule Conway wprowadza notację nazwaną dziś jego nazwiskiem. Zacytujmy z [2]: *Opisujemy notację, która pozwala na ręczne wyliczenie wszystkich węzłów, które mają nie więcej niż 11 skrzyżowań, i wszystkich splotów, które mają ich nie więcej niż 10. Rozważamy też pewne własności algebraicznych niezmienników węzłów, których odkrycie było konsekwencją jej wprowadzenia.*

Co istotniejsze, praca zawiera wielomianowy niezmiennik, również nazywany dziś nazwiskiem Conwaya, a także pojęcie supła (*tangle*).

Wprowadzony przez Conwaya wielomian jest niezmiennikiem węzłów i splotów, czyli położenia krzywej (rozważamy tylko krzywe gładkie lub wielościenne) zwykłej zamkniętej lub kilku takich rozłącznych krzywych w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , a wylicza się go z diagramu. (Diagramem nazywamy tu taki rzut splotu na płaszczyznę, że wszystkie przecięcia łuków są transwersalne i nie ma punktów o większej krotności niż dwa; łuk dolny w każdym skrzyżowaniu zaznaczamy przerwą). Wielomian  $\Delta_L(t)$  splotu  $L$  definiuje się mianowicie następująco:

- Jeśli  $L$  jest niezawężloną krzywą zwykłą zamkniętą, to  $\Delta_L(t) = 1$ .
- Jeśli sploty  $L_+$ ,  $L_-$  i  $L_0$  różnią się tylko na jednym skrzyżowaniu, tak jak na rysunku,

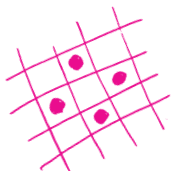
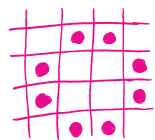


to zachodzi tak zwana relacja motkowa:

$$(*) \quad \Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})\Delta_{L_0}(t).$$

Warunki te jednoznacznie wyznaczają niezmiennik splotu.

Wielomian Conwaya jest wariantem wielomianu Alexandera umiejętnie znormalizowanym poprzez dobór  $\Delta_{L_+}$ ,  $\Delta_{L_-}$  i  $\Delta_{L_0}$ , co sprawia, że można go wyliczyć bezpośrednio z diagramu; Conway podkreśla w [2], że jego metoda jest dobra do obliczeń komputerowych. Zaznaczmy, że James W. Alexander w swej pracy wzmiankuje relację motkową, która jednak z wyłuszczonej wyżej powodów zależy u niego od wyboru wielomianów  $\Delta_{L_+}$ ,  $\Delta_{L_-}$  i  $\Delta_{L_0}$ , a to powoduje, że jej użyteczność nie jest widoczna. Dopiero Conway zauważył, że – dzięki omówionej wyżej normalizacji – rozszerzając pierścień o  $\sqrt{t}$ , zależność motkową można zapisać uniwersalnie, w postaci (\*), z warunkiem początkowym  $\Delta_{L_0} = 1$ .



W roku 1984 Vaughan Jones skonstruował wielomianowy niezmiennik splotów, który spełnia relację motkową podobną do (\*), ale który nie ma widocznych związków z grupą podstawową dopełnienia splotu. Za swój wielomian i jego ramifikację otrzymał w 1990 roku medal Fieldsa. Wkrótce potem ukazało się pięć prac, których autorami byli Hoste, Ocneanu, Lickorish i Millett, Freyd i Yetter oraz Przytycki i Traczyk; wprowadzono w nich ogólniejszą relację w przestrzeni wielomianów dwóch zmiennych, z warunkiem początkowym  $P_{T_1}(v, z) = 1$  dla  $T_1$  będącego trywialnym węzłem. Otrzymano w ten sposób tak zwany wielomian HOMFLYPT (akronim stworzony z pierwszych liter ww. nazwisk) i oznaczany  $P_L(v, z)$ , który także jest niezmiennikiem. Zazwyczaj powiązana z nim relacja motkowa zapisywana jest jako

$$v^{-1}P_{L_+}(v, z) - vP_{L_-}(v, z) = zP_{L_0}(v, z).$$

Innym ważnym odkryciem Conwaya z zakresu teorii węzłów jest algebraiczny obiekt nazywany przez niego wrakiem; wrak to magma, to znaczy zbiór z dwuargumentową operacją  $*$ , która jest odwracalna i spełnia warunek prawej samorozdzielności:

$$(a * b) * c = (a * c) * (b * c).$$

Aksjomaty wraka są algebraicznym odbiciem drugiego i trzeciego ruchu Reidemeistera:



Minęło wiele lat, nim pojęcie to doczekało się rozkwitu badań mu poświęconych. W szczególności wiąże się ono ściśle z równaniem Yanga–Baxtera, znanym w mechanice statystycznej [6].

Ostatnie znane twierdzenie J. H. Conwaya to „Free Will Theorem”, wynik z pogranicza fizyki. Siobhan Roberts [9] wyjaśnia je następująco. *Twierdzenie, które Conway i Simon B. Kochen udowodnili w 2004 roku, obrazuje zasadę (tak podejrzaną dla Einsteina), że nie ma ukrytych parametrów rządzących mechaniką kwantową: jeśli eksperymentator może dowolnie decydować, które wartości mierzyć w danym eksperymencie, to cząstki elementarne mogą „wybierać” swoje spiny tak, aby pomiar był zgodny z zasadami fizyki kwantowej. W skrócie – „Jeśli eksperymentator ma wolną wolę, to mają ją także cząstki elementarne”.*

Wkrótce po publikacji tego twierdzenia J. H. Conway przeszedł udar mózgu, po którym tylko częściowo wrócił do zdrowia.

### Nagrody i wyróżnienia

Dokonania Conwaya zyskały olbrzymie uznanie w świecie nauki. Był on wielokrotnie wyróżniany i nagradzany: otrzymał Berwick Prize (1971), został Fellow of the Royal Society (1981) i członkiem American Academy of Arts and Sciences (1992), otrzymał Pólya Prize (LMS) (1987), Nemmers Prize in Mathematics (1998) i przyznaną przez American Mathematical Society nagrodę Leroy P. Steele Prize for Mathematical Exposition (2000). W 2001 przyznano mu doktorat honorowy University of Liverpool, a w roku 2014 doktorat honorowy Alexandru Ioan Cuza University. W 2017 otrzymał też honorowe członkostwo British Mathematical Association.

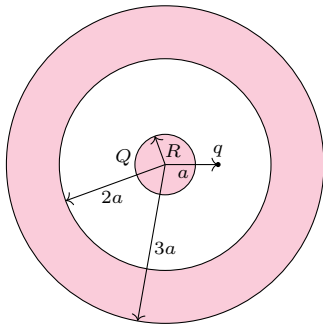
### Literatura

- [1] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. 30 (1928), 275–306.
- [2] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links*, Computational Problems in Abstract Algebra (ed. J. Leech), Pergamon Press, 1969, 329–358.
- [3] J. H. Conway, G. Wraith, Korespondencja między Conwayem i Wraithem, 1959, *Wrak spełnia dwa aksjomaty: odwracalność i prawą samo-rozdzielność*.
- [4] L. H. Kauffman, *Recalling John Conway*, ukaże się w Notices of the American Mathematical Society.
- [5] H. R. Morton, *Mutant knots*, In: New ideas in low dimensional topology, 379412, Ser. Knots Everything 56, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015.
- [6] J. H. Przytycki, *Knots and distributive homology: from arc colorings to Yang–Baxter homology*, Chapter in: New Ideas in Low Dimensional Topology, World Scientific 56 (2015), 413–488, e-print: arXiv:1409.7044 [math.GT].
- [7] J. H. Przytycki, P. Traczyk, *Invariants of links of Conway type*, Kobe J. Math. 4 (1987), 115–139.
- [8] J. H. Przytycki, P. Traczyk, *Conway algebras and skein equivalence of links*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), no. 4, 744–748.
- [9] S. Roberts, *Genius at Play, The Curious Mind of John Horton Conway*, Bloomsbury, 2015.
- [10] A. S. Sikora, *On Conway algebras and the Homflypt polynomial*, J. Knot Theory Ramifications 6 (1997), no. 6, 879–893.
- [11] P. Traczyk, *Conway polynomial and oriented rotant links*, Geom. Dedicata 110 (2005), 49–61.
- [12] Autorzy wykorzystali także materiały z Wikipedii.

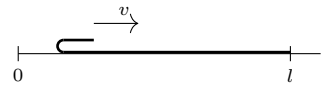
# Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2021



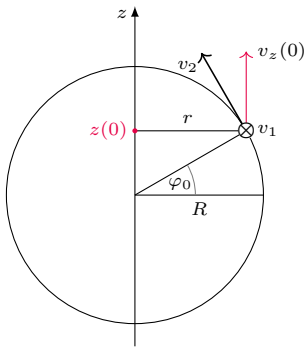
Rys. 1



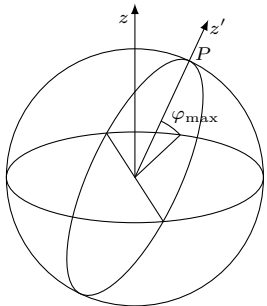
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

## Zadania z fizyki nr 720, 721

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**720.** Satelita Ziemi o masie  $m = 10$  kg porusza się po orbicie kołowej w wysokich warstwach atmosfery i działa na niego siła oporu  $F = 5 \cdot 10^{-4}$  N ze strony rozrzedzonego powietrza. O ile zmieni się prędkość satelity po wykonaniu jednego obrotu wokół Ziemi? Odległość satelity od Ziemi jest mała w porównaniu z promieniem Ziemi. Przyjmij, że promień Ziemi  $R = 6,4 \cdot 10^6$  m, przyspieszenie na powierzchni Ziemi  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

**721.** Metalowa kula o promieniu  $R$ , naładowana ładunkiem  $Q$  oraz ładunek punktowy  $q$  umieszczony w odległości  $a$  od środka kuli otoczone są współśrodkową z kulą metalową warstwą sferyczną o promieniach wewnętrznym  $2a$  i zewnętrznym  $3a$  (rys. 1), naładowaną ładunkiem  $2Q$ . Znaleźć potencjały kuli oraz otaczającej ją metalowej powłoki.

## Rozwiązania zadań z numeru 2/2021

Przypominamy treść zadań:

**712.** Długi, cienki i wiotki dywan o długości  $l$  i masie  $m$  leży na podłodze. Jeden z końców dywanu jest odgięty i ciągnięty do tyłu ze stałą prędkością  $v$  po części dywanu, która nadal leży na podłodze (rys. 2). Jaka siła działa na dywan w kierunku poziomym? Tarcia między częściami dywanu nie uwzględniamy, dolna część dywanu pozostaje nieruchoma.

**713.** Ze szczytu góry na szerokości geograficznej północnej  $\varphi_0 = 30^\circ$  wystrzelono pocisk wzdłuż południka, w kierunku północnego bieguna Ziemi i wprowadzono go na orbitę kołową wokół Ziemi. Oblicz maksymalną szerokość geograficzną, jaką osiągnie wystrzelony pocisk. Dane są: okres obrotu Ziemi wokół własnej osi  $T$ , promień Ziemi  $R$ , przyspieszenie grawitacyjne  $g$ . Zakładamy, że Ziemia jest jednorodną kulą i zaniedbujemy opory powietrza.

**712.** Niech  $x$  oznacza współrzędną ruchomego końca dywanu (rys. 3). Jego prędkość jest równa  $v = \Delta x / \Delta t$ .

Szukana siła  $F$  powoduje zmianę pędu tej części dywanu o masie  $\Delta m$ , która w czasie  $\Delta t$  podnosi się z podłogi

$$F = \Delta p / \Delta t = \Delta m v / \Delta t.$$

Z rysunku 3 widać, że  $\Delta m = \lambda \Delta x / 2$ , gdzie  $\lambda = m / l$ . Stąd  $F = m v^2 / 2l$ . Możemy też znaleźć położenie środka masy całego dywanu w funkcji współrzędnej  $x$  jego ruchomego końca  $x_S = (2l^2 + x^2) / 4l$ , jego prędkość  $v_S = x v / 2l$  oraz przyspieszenie  $a_S = v^2 / 2l$ . Szukana siła  $F = m a_S$ .

**713.** Pocisk porusza się po orbicie kołowej pod wpływem siły grawitacji, która pełni rolę siły dośrodkowej. Jego prędkość  $v = \sqrt{gR}$ . W chwili startu składowa tej prędkości w kierunku równoleżnika o promieniu  $r$  (rys. 4) wynosi

$$v_1 = 2\pi r / T = (2\pi R \cos \varphi_0) / T,$$

składowa wzdłuż południka

$$v_2 = \sqrt{v^2 - v_1^2} = \sqrt{gR - (2\pi R \cos \varphi_0)^2 / T^2}.$$

Narysujmy średnicę okręgu, po którym porusza się pocisk, przechodzącą przez punkt toru  $P$  na największej szerokości geograficznej  $\varphi_{\max}$  osiąganą przez pocisk (rys. 5). Niech oś  $z'$  przechodzi przez tę średnicę. Rzut ruchu pocisku na tę średnicę jest ruchem harmonicznym o częstości  $\omega = v / R$  i opisują go równania

$$z'(t) = R \sin(\omega t + \alpha), \quad v_{z'}(t) = R \omega \cos(\omega t + \alpha).$$

Rzutując go następnie na oś  $z$  przechodzącą przez biegun północny, otrzymujemy

$$z(t) = z'(t) \sin \varphi_{\max}, \quad v_z(t) = v_{z'}(t) \sin \varphi_{\max}.$$

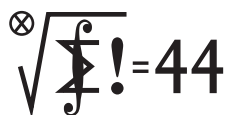
Przyjmując chwilę wystrzału za chwilę zerową i korzystając z rysunku 4, możemy napisać warunki początkowe

$$z(0) = R \sin \varphi_0 = R \sin \varphi_{\max} \sin \alpha, \quad v_z(0) = v_2 \cos \varphi_0 = R \omega \sin \varphi_{\max} \cos \alpha.$$

Podnosząc te równania do kwadratu i dodając stronami, pozbywamy się wyrazów zawierających fazy początkowe  $\alpha$ . Szukana maksymalna szerokość geograficzna spełnia równanie

$$\sin \varphi_{\max} = \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 R \cos^4 \varphi_0}{gT^2}}.$$

# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2021

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 809 ( $WT = 1,83$ ) i 810 ( $WT = 2,03$ ) z numeru 11/2020

Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Jerzy Cisło	Wrocław	39,07
Tomasz Czajka	Santa Clara	33,74
Marcin Kasperski	Warszawa	32,68
Mikołaj Pater	Opole	32,35
Kacper Morawski	Warszawa	30,53

**815.** Niech  $f, g, h$  będzie trójką funkcji spełniających podane równanie. Biorąc  $x = 0$ , dostajemy  $g(y) = h(0) - f(y^3)$ ; a po wstawieniu do wyjściowego równania:

$$(1) \quad f(x + y^3) + h(0) - f((x^3 + y^3)^3) = h(xy).$$

Podstawienie  $y = -x^3$  daje zależność

$$(2) \quad f(x - x^9) = h(-x^4) - h(0) + f(0).$$

Różnica  $x - x^9$  przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste oraz zmienia znak przy zamianie  $x$  na  $-x$ . Stąd wniosek, że  $f$  jest funkcją parzystą.

Ustalmy liczbę  $w < 0$ . Wykażemy, że  $h(w) = h(0)$ .

Wystarczy w tym celu znaleźć liczby  $x, y$  takie, że

$$(3) \quad (x^3 + y^3)^3 = -(x + y^3) \quad \text{oraz} \quad xy = w,$$

bowiem wówczas (wobec parzystości  $f$ ) lewa strona (1) przyjmuje wartość  $h(0)$ . Dla  $xy = w$  pierwsze równanie (3) pomnożone stronami przez  $x^3 (\neq 0)$  przybiera postać

$$(4) \quad (x^4 + w)^3 + x^4 + w^3 = 0.$$

Wielomian (zmiennej  $x$ ) po lewej stronie (4) ma dla  $x = 0$  wartość ujemną, a dla dużych  $|x|$  wartość dodatnią, więc dla pewnego  $x_0$  ma wartość 0. Biorąc  $y_0 = w/x_0$ , uzyskujemy spełnienie obu związków (3), wystarczających do uzasadnienia równości  $h(w) = h(0)$ .

Wobec dowolności wyboru liczby  $w < 0$  znaczy to, że funkcja  $h$  jest stała na przedziale  $(-\infty, 0]$ . Teraz równanie (2) pokazuje, że  $f(x - x^9) = f(0)$  dla

## Zadania z matematyki nr 823, 824

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**823.** Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych  $x, y, z$  spełniające układ równań

$$\frac{\sin x}{2} = \frac{\sin y}{3} = \frac{\sin z}{4} = -\sin(x + y + z).$$

**824.** Niech  $(p_1, p_2, p_3, \dots)$  będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych ( $p_1 = 2$ ). Dla  $n \geq 1$  niech  $q_n$  oznacza liczbę wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od  $n$  (w zwykle używanej notacji:  $q_n = \pi(n-1)$ ) i niech  $a_n = n + p_n$ ,  $b_n = n + q_n$ . Udowodnić, że każda liczba całkowita dodatnia jest wyrazem dokładnie jednego z ciągów  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ .

Zadanie 824 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

## Rozwiązania zadań z numeru 2/2021

Przypominamy treść zadań:

**815.** Wyznaczyć wszystkie trójki funkcji  $f, g, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , spełniające równanie

$$f(x + y^3) + g(x^3 + y) = h(xy) \quad \text{dla} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

**816.** Liczba naturalna  $n$  ma taki dzielnik dodatni  $d$ , że  $d^2 - 2$  dzieli się przez  $n - 1$ . Wykazać, że  $n$  jest podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

wszystkich  $x$ ; czyli  $f$  jest funkcją stałą na zbiorze liczb rzeczywistych. Zatem także funkcja  $g(y) = h(0) - f(y^3)$  jest stała oraz (dzięki równaniu wyjściowemu) funkcja  $h$  jest stała. Jasne, że każda trójka funkcji stałych  $f \equiv A$ ,  $g \equiv B$ ,  $h \equiv A + B$  spełnia zadane równanie.

**816.** Gdy  $d = 1$ , więc  $d^2 - 2 = -1$ , wówczas  $n = 2$ , co spełnia warunek tezy zadania. Dalej przyjmujemy  $d \geq 2$ . W myśl założenia, istnieją liczby całkowite  $k, m$  takie, że

$$(5) \quad n = kd, \quad d^2 - 2 = m(n - 1) = m(kd - 1).$$

Oczywiście  $k \geq 1$ ; a skoro  $d \geq 2$ , widać, że także  $m \geq 1$ . Drugi warunek w wierszu (5) mówi, że  $d$  jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego  $x^2 - mkx + (m - 2)$ . Niech  $c$  będzie drugim pierwiastkiem tego trójmianu. Tak więc

$$c + d = mk, \quad cd = m - 2.$$

Liczba  $c = mk - d$  też jest całkowita.

Jeśli  $m > 2$ , to  $c = (m - 2)/d > 0$ , czyli  $c \geq 1$ , i mamy ciąg zależności

$$\begin{aligned} 0 &\leq (c - 1)(d - 1) = cd - (c + d) + 1 = \\ &= (m - 2) - (mk) + 1 = m(1 - k) - 1 \leq -1, \end{aligned}$$

sprzeczność. Jeśli  $m = 1$ , wychodzi  $cd = -1$ , znów sprzeczność (bo  $d \geq 2$ ).

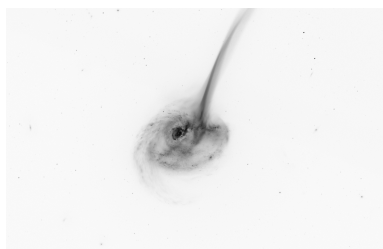
Pozostaje przypadek, gdy  $m = 2$ . Wtedy (wobec (5))  $d^2 - 2kd = 0$ , skąd  $d = 2k$ ; zatem liczba  $n = kd = 2k^2$  jest podwojonym kwadratem – a o to chodziło.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Prosto z nieba: Nagła śmierć we Wszechświecie



Artystyczna wizja ID2299. ESO/M. Kornmesser

Galaktyka ID2299 jest na tyle odległa (jej przesunięcie ku czerwieni wynosi 1,4), że jej światło potrzebuje około 9 miliardów lat, aby dotrzeć do Ziemi – jednak już kilka minut pracy interferometru ALMA pozwoliło na jej dokładną obserwację.

Ogony pływowe to wydłużone strumienie gwiazd i gazu rozciągające się w przestrzeni międzygwiazdowej. Powstają w wyniku zderzenia i połączenia się dwóch galaktyk.

Ponieważ aktywność gwiazdotwórcza w wielu olbrzymich galaktykach eliptycznych w zasadzie wygasa, dlatego galaktyki te zawierają głównie stare gwiazdy o niskiej masie i czerwonych barwach optycznych. Z tego właśnie powodu astronomowie określają te galaktyki jako czerwone i martwe (*red and dead*).

Galaktyki umierają, gdy przestają tworzyć nowe gwiazdy. Do tej pory sądziliśmy, że dominującym procesem odpowiedzialnym za wymieranie galaktyk była aktywność masywnych czarnych dziur, a w zasadzie akrecja materii na czarną dziurę: takiej akrecji towarzyszy emisja olbrzymiej ilości energii oraz pojawienie się potężnych wiatrów, zdolnych do całkowitego wymięcenia gazu z galaktyki. Gazu niezbędnego do produkcji nowych gwiazd. Jednak po niedawnym odkryciu, którego dokonał zespół doktor Annagrazii Puglisi z Uniwersytetu w Durham, wszystkie galaktyczne autopsje muszą zostać ponownie przeanalizowane. Praca opublikowana przez ten zespół na początku tego roku w „Nature Astronomy” sugeruje, że nie tylko czarne dziury, ale także zderzenia galaktyk mogą być odpowiedzialne za wyrzucanie w przestrzeń kosmiczną paliwa gwiazdotwórczego i w efekcie – śmierć galaktyki.

Korzystając z interferometru ALMA, o którym napiszemy w następnym numerze *Delty*, astronomowie wykonali zdjęcie galaktyki o wdzięcznej nazwie ID2299 w dość niefotogenicznym momencie, bo podczas jej agonii. Dane zebrane przez ALMA wskazują na to, że ID2299 traci 10 000 mas Słońca gazu rocznie, a tracąc gaz, jednocześnie gwałtownie traci paliwo potrzebne do tworzenia nowych gwiazd i umiera. Co ciekawe, galaktyka ta wciąż jest bardzo aktywna gwiazdotwórczo – tworzy gwiazdy 500 razy szybciej niż nasza Droga Mleczna – więc pozostały gaz zostanie szybko zużyty, w ciągu kolejnych kilkudziesięciu milionów lat, powodując niechybną szybką śmierć naszej bohaterki.

Analizując dane pochodzące z ALMA, naukowcy zauważyli ślad ogona pływowego w pobliżu ID2299. Zwykle ogony pływowe obserwuje się w Lokalnym Wszechświecie, czyli na naszym podwórku, gdyż są zbyt słabe, aby obserwować je na wyższych przesunięciach ku czerwieni. Niespodziewanie jednak ALMA zaobserwowała ten obiekt najprawdopodobniej tuż po jego uformowaniu, gdy był jeszcze wystarczająco jasny. Tak intensywny ogon pływowy mógł powstać w wyniku zderzenia dwóch masywnych galaktyk, które uformowały ID2299. Równocześnie fuzja dwóch galaktyk mogła spowodować, iż połowa zimnego gazu niezbędnego do tworzenia gwiazd została ściśnięta w środku nowej galaktyki – co tłumaczy jej wysoką aktywność gwiazdotwórczą. Hipotezę tę potwierdzają szczegółowe symulacje numeryczne zgodne z obserwacjami wyrzutu gazu. Łącząc obecność ogona pływowego, aktywność gwiazdotwórczą i kilka pomniejszych faktów dotyczących ID2299, zespół badawczy rzucił światło na prawdopodobnych przodków czerwonych i martwych galaktyk.

Na podstawie: Puglisi, A., et al. *A titanic interstellar medium ejection from a massive starburst galaxy at redshift 1.4*, „Nature Astronomy” (2021) oraz [www.eso.org](http://www.eso.org)

Katarzyna MAŁEK

## Niebo w czerwcu

Przez cały czerwiec Słońce przebywa na północ od równoleżnika  $+22^\circ$  deklinacji, stąd w tym miesiącu dni są najdłuższe, a noce najkrótsze. Astronomiczne lato rozpocznie się 21 czerwca rano naszego czasu i właśnie wtedy Słońce osiągnie najbardziej na północ wysunięty punkt ekliptyki. W czerwcu Słońce chowa się najpłycej pod horyzont i nawet w najciemniejszej części nocy północna część widnokregu jest rozjaśniona. Oczywiście im bliżej Bałtyku, tym efekt jest bardziej zauważalny, w górach jest on prawie niewidoczny. Równocześnie pojawia się możliwość obserwacji obłoków srebrzystych – najlepiej widocznych na północy kraju, na południu występujących sporadycznie. W związku z wysokim położeniem Słońca w tym miesiącu szansa

na dostrzeżenie łuku okołohoryzontalnego (więcej o nim na angielskiej stronie: [www.atoptics.co.uk/cha2.htm](http://www.atoptics.co.uk/cha2.htm)), czyli małej, lecz intensywnej tęczy kilkanaście stopni nad horyzontem w okolicach południa, jest bardzo duża.

W czerwcu ma miejsce najwcześniejszy wschód i najpóźniejszy zachód Słońca. Jednak w przeciwieństwie do grudnia, gdy najwcześniejszy zachód i najpóźniejszy wschód Słońca dzielą ponad 2 tygodnie, tutaj odstęp czasu między tymi zdarzeniami jest znacznie krótszy. Najwcześniejszy wschód Słońca przypada 17 czerwca, najpóźniejszy zachód zaś – 25 czerwca. Wynika to z tego, że w czerwcu Ziemia jest blisko aphelium swojej orbity, przez które przechodzi na początku lipca, stąd też porusza się po orbicie najwolniej w ciągu roku. Również



w tym miesiącu występuje największa różnica długości dnia i nocy między poszczególnymi szerokościami geograficznymi. W Polsce, rozciągającej się od południa do północy na prawie  $6^\circ$ , w górach dzień trwa o godzinę krócej niż nad morzem.

Ze Słońcem związane jest również jedno z ciekawszych zdarzeń astronomicznych miesiąca: podczas nowiu **Księżyc** zakryje na jakiś czas tarczę słoneczną. Tym razem Księżyc nie zdoła przysłonić całej tarczy Słońca i dojdzie do zaćmienia obrączkowego. Pas zaćmienia przejdzie od Zatoki Hudsona w Kanadzie przez północno-zachodnią Grenlandię i Biegun Północy do Czukotki w Rosji. Faza obrączkowa potrwa prawie 4 minuty. W Polsce dojdzie do zaćmienia częściowego o małej fazie. Zjawisko zacznie się o godzinie 11:38 w Szczecinie i na terenie całej Polski południowo-wschodniej będzie trwało do 13:40. Natomiast w Krośnie zacznie się o godzinie 13:40 i będzie trwało do 14:02. Faza maksymalna nastąpi około 12:50. Księżyc zakryje od 12% średnicy tarczy słonecznej w Bieszczadach do 26% nad morzem.

Przed zaćmieniem Księżyc pokaże się na niebie porannym. Pierwszego dnia czerwca Srebrny Glob znajdzie się  $8^\circ$  pod Jowiszem, kolejnej doby zaś przesunie się na pozycję  $9^\circ$  na wschód od niego, zmniejszając jednocześnie fazę do ostatniej kwadry. Potem Księżyc podąży ku Słońcu. Niestety w czerwcu nachylenie ekliptyki rano jest nadal słabe, a dodatkowo Księżyc wędruje wtedy kilka stopni pod nią i o świcie wznosi się na wysokość poniżej  $10^\circ$ .

Na niebie porannym towarzystwa Jowiszowi dotrzymuje planeta **Saturn**, kreśląca swoją pętlę około  $18^\circ$  na południowy zachód od niego. W czerwcu Saturn porusza się ruchem wstecznym niedaleko gwiazdy 4. wielkości  $\theta$  Cap. **Jowisz** zmieni kierunek swojego ruchu 21 czerwca, stąd porusza się bardzo powoli. W tym czasie jego pozycja zmieni się o mniej niż  $0,5^\circ$ . Jasność Jowisza zmieni się od  $-2,4^m$  na początku miesiąca do  $-2,6^m$  pod jego koniec, przy średnicy tarczy od  $41''$  do  $45''$ . Blask Saturna zwiększy się w tym czasie od  $+0,6^m$  do  $+0,4^m$ , a jego tarcza utrzyma średnicę  $18''$ .

O zmierzchu można obserwować dwie sąsiadki Ziemi: planety **Venus** i Mars. Niestety nachylenie ekliptyki do widnokregu o tej porze doby wyraźnie się pogarsza, stąd pierwsza z wymienionych planet godzinę po zachodzie Słońca zajmuje pozycję na wysokości zaledwie  $3^\circ$  nad horyzontem i zachodzi pół godziny później. W czerwcu Venus przemierzy cały gwiazdozbiór Bliźniąt, by pod koniec miesiąca wejść do gwiazdozbioru Raka i skończyć go  $3^\circ$  od znanej gromady otwartej gwiazd M44. Oczywiście M44 ze względu na jasne tło nieba jest u nas niewidoczna. Bliżej równika jest o wiele lepiej. Warto zatem pamiętać o Wenus podczas wakacyjnych wyjazdów. Już w basenie Morza Śródziemnego ekliptyka tworzy znacznie większy kąt z widnokregiem i tam warunki obserwacyjne Wenus są lepsze. Na początku lipca Venus przejdzie mniej niż  $0,5^\circ$  od M44. Przez cały czerwiec planeta świeci blaskiem  $-3,9^m$  przy średnicy tarczy  $10''$  i fazie ponad 90%.

Blask **Marsa** jest znacznie słabszy, poniżej  $+1,7^m$ , a średnica jego tarczy zmniejszyła się do  $4''$ . Czerwona Planeta zacznie miesiąc  $5^\circ$  na południe od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt, i jednocześnie  $25^\circ$  na wschód od Wenus. Jeszcze w pierwszej dekadzie miesiąca Mars przejdzie do gwiazdozbioru Raka, a 23 czerwca przetnie środek gromady gwiazd M44. Ostatniego dnia czerwca Wenus zbliży się do Marsa na niecałe  $8^\circ$ . Mars również wędruje bardzo nisko nad widnokregiem. Ze względu na mniejszą od Wenus jasność na dostrzeżenie Marsa trzeba poczekać dłużej – dwie godziny po zachodzie Słońca planeta zajmuje pozycję na wysokości  $8^\circ$  na początku miesiąca, a pod koniec czerwca jest już wtedy pod horyzontem.

Obie planety odwiedzi Księżyc niedługo po nowiu. Srebrny Glob minie Wenus w dniach 11 i 12 czerwca. Podczas pierwszego z tych dni tarcza Księżyca w fazie 2% dotrze na odległość  $5^\circ$  od Wenus, na godzinie 4 względem niej. Dobę później Księżyc zwiększy fazę do 5% i pokaże się w takiej samej odległości po drugiej stronie planety. Kolejną dobę później sierp Księżyca pogubi się do 10% i przejdzie  $2^\circ$  na północ od Marsa.

Naturalny satelita Ziemi powędruje dalej i 15 czerwca zbliży się na  $5^\circ$  do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Zaprezentuje wtedy sierp w fazie 26%. Dwa dni później Księżyc przejdzie przez I kwadrę, a za następne dwa dni, w fazie 69%, minie Spikę, najjaśniejszą gwiazdę Panny, przechodząc  $6^\circ$  na północ od niej. Księżyc odwiedzi gwiazdozbiór Skorpiona 22 dnia miesiąca, świecąc około  $2^\circ$  od gwiazd Graffias i Dschubba. Jednocześnie Srebrny Glob zbliży się na  $6^\circ$  do Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. Dwa dni później osiągnie pełnię w zachodniej części Strzelca.

Następnie Księżyc podąży ku ostatniej kwadrze 1 lipca. Lecz zanim to nastąpi, Srebrny Glob w dniach 27–29 czerwca spotka się ponownie z planetami Saturn i Jowisz: 27 czerwca naturalny satelita Ziemi w fazie 93% zbliży się na  $8^\circ$  do Saturna, kolejnej nocy Księżyc przejdzie mniej więcej w połowie drogi między Saturnem a Jowiszem, 29 czerwca zaś wieczorem zobaczymy oddalający się już od Jowisza Księżyc w odległości  $5^\circ$  od niego.

Jak co roku, pod koniec miesiąca promieniują **meteory z roju Bootydów**. Radiant roju znajduje się zaledwie kilka stopni od radiantu styczniowych Kwadrantydów, czyli mniej więcej  $10^\circ$  na wschód od dyszla Wielkiego Wozu i na północ od głównej figury Wolarza. Bootydy będą widoczne od 22 czerwca do 2 lipca, z maksimum aktywności 27 czerwca. O północy radiant roju wznosi się na wysokości ponad  $60^\circ$ . Niestety w tym roku w obserwacjach Bootydów przeszkodzi Księżyc w fazie tuż po pełni. Bootydy są najwolniejszymi meteorami. Ich prędkość zderzenia z atmosferą Ziemi wynosi zaledwie 18 km/s. W okolicach maksimum aktywności można spodziewać się nawet 100 zjawisk na godzinę.

*Ariel MAJCHER*

## Młyny nauki

Mój kot był na diecie. Zmusiło mnie to do stałego przypominania – ponad ciągłym tłem muzycznym głodnego pomiaukiwania – moim domownikom o pojęciu niepewności pomiarowej. Konkretnie zaś o tym, że jeśli poprzedniego dnia zmierzona waga kota wynosiła 5,3 kg, a obecne wskazania to 5,2 kg, nie oznacza to, że kocia dieta-cud działa, gdyż niepewność wskazań przyrządu wynosi 0,1 kg, toteż oba wyniki powinny być interpretowane jako nieróżniące się od siebie.

Pojęcie niepewności jest dla fizyka szczególnie ważne, gdy próbuje porównać „teorię” z „doświadczeniem”. Za pomocą „teorii” można uzyskać przewidywania, które następnie są weryfikowane w „doświadczeniu”. Jeżeli wyniki teoretyczne i doświadczalne się zgadzają – świetnie, przechodzimy do dalszych zadań lub idziemy na kawę. Jeśli nie – świetnie, trzeba zaproponować nową, lepszą teorię lub udoskonalić sposób przeprowadzenia eksperymentu bądź metody opracowywania danych.

Od dwóch dekad pouczającego przykładu na ten temat dostarcza badanie momentu magnetycznego mionów.

Miony są cząstkami o spinie  $\frac{1}{2}$ . Jedną z wielu własności odróżniających te cząstki od ciał makroskopowych jest ich oddziaływanie z polem magnetycznym, dwukrotnie większe od oddziaływania, które wynikałoby z interpretacji spinu jako obrotu. No, prawie dokładnie dwukrotnie. W 1947 roku Polykarp Kusch i Henry Foley zmierzili tę proporcję bardziej dokładnie i otrzymali 2,00232, co świetnie zgadzało się z przewidywaniami elektrodynamiki kwantowej wyznaczonymi przez Juliana Schwingera. Obliczenia Schwingera opierały się na tym, że poruszająca się w próżni cząstka elementarna nie jest „naga”, lecz otacza ją „rój” fluktuacji próżni, który nieznacznie, ale zauważalnie zmienia jej własności.

W miarę postępującego zrozumienia struktury Modelu Standardowego cząstek elementarnych interesującą nas liczbę można było wyznaczać coraz dokładniej, jednak obliczenia stawały się także coraz bardziej skomplikowane. Obecnie przeprowadza się je w dużych, międzynarodowych zespołach. Dzięki temu można było stwierdzić, że przewidywanie teoretyczne to 2,00233183620, przy czym ze względu na to, że obliczenia odwołują się do wyników pomiarów innych wielkości fizycznych i wykorzystują pewne przybliżenia, wynik ten obarczony jest niepewnością, która może mieć wpływ na wartości ostatnich dwóch cyfr znaczących.

Podstawowy pomysł na doświadczenie pozwalające zmierzyć, jak mion oddziałuje z polem magnetycznym, nie zmienił się od kilkudziesięciu lat. Szybkie miony są podawane do pierścienia, w którym znajduje się silne pole magnetyczne. Gdy mion obiega pierścień, oś obrotu cząstki (którą można wyobrażać sobie jako małą strzałkę) stopniowo się obraca wskutek oddziaływania z polem magnetycznym. Kilka milionowych części sekundy później, co odpowiada kilkuset obiegom wokół pierścienia, mion rozpada się, tworząc elektron, który wlatuje do jednego z otaczających go detektorów. Zmieniające się energie elektronów wylatujących z pierścienia pozwalają ustalić, jak szybko obracają się miony.

Powyższy opis nie oddaje zupełnie niesamowitego postępu technicznego, który pozwala mierzyć własności

mionów z coraz większą dokładnością. Ogłoszone w kwietniu wyniki doświadczeń przeprowadzonych w Fermilabie w USA podają interesującą nas wielkość jako 2,00233184122, z niepewnością analogiczną do tej dla wyniku teoretycznego. Wyniki te zgadzają się ze starszymi o 20 lat rezultatami uzyskanymi w Brookhaven National Laboratory w USA.

Wygląda zatem na to, że przez ostatnie dwie dekady mamy niezgodność między „teorią” a „doświadczeniem”. Ponieważ eksperymenty zostały przeprowadzone w różnych laboratoriach, przez różne zespoły badaczy, należałoby się spodziewać, że przyczyna niezgodności leży po stronie teoretycznej. Czy jest nią jakaś „nowa fizyka” modyfikująca obraz fluktuacji próżni i w ten sposób wpływająca na wynik dla mionu? A może zaprzęgnięcie do pracy jeszcze wydajniejszych superkomputerów, pozwalających coraz dokładniej modelować fluktuacje próżni, wskaże na błąd w obecnych obliczeniach?

Kiedys się dowiemy. Jednak w miarę rosnącej złożoności obliczeń naukowych i postępującej komplikacji eksperymentów coraz bardziej aktualna staje się parafraza znanego powiedzenia. Młyny nauki miały powoli.

*Krzysztof TURZYŃSKI*

- [1] T. Aoyama *et al.*, *The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model*, Physics Reports **887** (2020) 1
- [2] B. Abi *et al.*, *Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm*, Phys. Rev. Lett. **126** (2021) 141801



# Jednoznaczność rozkładu w $\mathbb{N}$ – część 1

Bartłomiej BZDEGA

Przed przystąpieniem do lektury zalecam zapoznanie się z kącikiem nr 23 (*Wykładowiki p-adyczne*,  $\Delta_{20}^{11}$ ) oraz nr 29 (*Algorytm Euklidesa*,  $\Delta_{21}^5$ ).

Rozkładem liczby naturalnej  $n > 1$  na czynniki pierwsze będziemy nazywali zapis

$$(1) \quad n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

w którym  $p_1, p_2, \dots, p_k$  są różnymi liczbami pierwszymi oraz liczby  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  są całkowite dodatnie.

**Twierdzenie o jednoznaczności rozkładu** mówi, że każda liczba naturalna  $n > 1$  ma dokładnie jeden taki rozkład z dokładnością do kolejności czynników.

*Dowód istnienia rozkładu.* Najpierw zauważmy, że każda liczba naturalna  $n > 1$  ma dzielnik pierwszy – wystarczy wziąć najmniejszy dzielnik  $n$  różny od 1 (gdyby nie był on liczbą pierwszą, to pewien jego dzielnik byłby jeszcze mniejszym dzielnikiem  $n$  różnym od 1).

Niech  $q_1$  będzie dzielnikiem pierwszym liczby  $n$ . Są dwie możliwości: albo  $n/q_1 = 1$ , albo  $n/q_1 > 1$  ma dzielnik pierwszy  $q_2$ . W drugim przypadku znów albo  $n/(q_1 q_2) = 1$ , albo  $n/(q_1 q_2) > 1$  ma dzielnik pierwszy  $q_3$  i tak dalej. W końcu dojdziemy do równości  $n/(q_1 q_2 \dots q_t) = 1$ , więc  $n = q_1 q_2 \dots q_t$  i wystarczy ewentualnie pogrupować czynniki i zamienić iloczyn na potęgę, by otrzymać rozkład taki jak w (1).

Do wykazania jedności rozkładu będziemy potrzebować następującego lematu.

*Lemat Euklidesa.* Niech  $p$  będzie dowolną liczbą pierwszą. Dla liczb naturalnych  $a$  i  $b$  zachodzi implikacja

$$(2) \quad p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b.$$

*Dowód lematu.* Są dwie możliwości:  $\text{NWD}(a, p) = p$  lub  $\text{NWD}(a, p) = 1$ . W pierwszym przypadku  $p \mid a$ , w drugim  $p \mid b$  na mocy własności (1) z kącika nr 29.

(Można, a nawet należy uogólnić: jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą dzielącą iloczyn  $t$  liczb naturalnych, to  $p$  dzieli co najmniej jeden czynnik. Dowód przez indukcję względem  $t$  pozostawiam Czytelnikowi.)

*Dowód jedności rozkładu.* Niech  $n$  będzie liczbą spełniającą równość (1) i  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ . Jeśli  $p \in P$ , to oczywiście  $p \mid n$ . W drugą stronę, jeśli liczba pierwsza  $p \mid n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , to  $p$  dzieli co najmniej jeden z czynników, co prowadzi do wniosku, że  $p \in P$ . Wobec tego zbiór  $P$  jest jednoznacznie wyznaczony – jest to zbiór wszystkich dzielników pierwszych liczby  $p$ .

Jest oczywiste, że  $p_1^{\alpha_1} \nmid n$ . Ponadto  $p_1^\alpha \nmid n$  dla  $\alpha > \alpha_1$ , gdyż w przeciwnym razie musiałaby zajść podzielność  $p_1 \mid p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , co jest niemożliwe, bo  $p_1$  nie dzieli żadnego z czynników. Z tego wynika, że  $\alpha_1 = \nu_{p_1}(n)$ , analogicznie  $\alpha_i = \nu_{p_i}(n)$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ . To dowodzi jednoznaczności wykładników.

Jednym z najprostszych zastosowań twierdzenia o jednoznaczności rozkładu w  $\mathbb{N}$  jest rozwiązywanie równań diofantycznych – czyli takich, których niewiadome są liczbami całkowitymi. Równanie sprowadzamy do postaci  $AB = n$ , w której znamy rozkład liczby  $n$  na czynniki pierwsze i na jego podstawie potrafimy powiedzieć coś na temat  $A$  i  $B$ .

## Zadania

1. Rozwiązać równanie  $\sqrt{6xy + 2x - 3y} = 19$  w liczbach całkowitych  $x$  i  $y$ .
2. Rozwiązać równanie  $m^2 = 2^n + 1$  w liczbach całkowitych dodatnich  $m, n$ .
3. Rozstrzygnąć, czy suma kilku (więcej niż jednej) kolejnych liczb całkowitych dodatnich może być potęgą dwójki o wykładniku naturalnym.
4. Wyznaczyć wszystkie pary liczb pierwszych  $(p, q)$ , dla których  $p \leq q$  oraz  $p^2 + pq + q^2$  jest kwadratem liczby naturalnej.
5. Udowodnić, że równanie  $(3x + 4y)(4x + 5y) = 7^z$  nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich  $x, y, z$ .
6. Wyznaczyć wszystkie trójki  $(x, y, n)$  liczb całkowitych dodatnich, spełniających równość  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 3^n$ .

Błędem jest dowodzenie implikacji (2) z użyciem twierdzenia o jednoznaczności rozkładu, ponieważ to jej potrzebujemy, aby udowodnić to twierdzenie. Kluczowe są tu wnioski z algorytmu Euklidesa, o których pisałem w kąciku nr 29.

Wskazówki do zadań

1. Równanie sprowadza się do postaci  $(2x - 1)(3y + 1) = 360$ . Liczbę przykładowo można nieco ograniczyć:  $2 \nmid 2x - 1$ , więc  $8 \mid 3y + 1$ , analogicznie można wykazać, że  $9 \mid 2x - 1$ . Należy pamiętać, że liczby  $2x - 1$  i  $3y + 1$  mogą być ujemne.
2. Mamy  $2^n = (m + 1)(m + 1)$ . Jeśli iloczyn dwóch liczb jest potęgą liczby pierwszej, to każdy z czynników jest potęgą tej liczby. Stąd  $m + 1 = 1 + 1$  to potęgi dwójki, które się różnią o 2.
3. Połowa sukcesu to zapisanie równania:  $2^n = a + (a + 1) + \dots + (a + k)$ . Prawa strona można zapisać jako iloczyn dwóch czynników, z których co najmniej jeden jest nieparzysty i większy od 1.
4. Rozwiązujemy równanie  $p^2 + pq + q^2 = n$ . Liczbę  $pq$  można tu opisać jako różnicę kwadratów –  $pq = \frac{1}{4}(2p + q)^2 - \frac{1}{4}q^2$ . Liczbę  $n$  można tu opisać jako różnicę kwadratów:  $n = \frac{1}{4}(2x + 1)^2 - \frac{1}{4}$ . Liczbę przykładowo można nieco ograniczyć:  $2 \nmid 2x - 1$ , więc  $8 \mid 3y + 1$ , analogicznie można wykazać, że  $9 \mid 2x - 1$ . Należy pamiętać, że liczby  $2x - 1$  i  $3y + 1$  mogą być ujemne.
2. Mamy  $2^n = (m + 1)(m + 1)$ . Jeśli iloczyn dwóch liczb jest potęgą liczby pierwszej, to każdy z czynników jest potęgą tej liczby. Stąd  $m + 1 = 1 + 1$  to potęgi dwójki, które się różnią o 2.
3. Połowa sukcesu to zapisanie równania:  $2^n = a + (a + 1) + \dots + (a + k)$ . Prawa strona można zapisać jako iloczyn dwóch czynników, z których co najmniej jeden jest nieparzysty i większy od 1.
4. Rozwiązujemy równanie  $p^2 + pq + q^2 = n$ . Liczbę  $pq$  można tu opisać jako różnicę kwadratów –  $pq = \frac{1}{4}(2p + q)^2 - \frac{1}{4}q^2$ . Liczbę  $n$  można tu opisać jako różnicę kwadratów:  $n = \frac{1}{4}(2x + 1)^2 - \frac{1}{4}$ . Liczbę przykładowo można nieco ograniczyć:  $2 \nmid 2x - 1$ , więc  $8 \mid 3y + 1$ , analogicznie można wykazać, że  $9 \mid 2x - 1$ . Należy pamiętać, że liczby  $2x - 1$  i  $3y + 1$  mogą być ujemne.



# KONKURS PTM im. WITOLDA WILKOSZA

na najlepszą studencką pracę  
popularyzującą matematykę

Na Konkurs można nadsyłać prace  
mające na celu  
popularyzację matematyki.

Termin zgłoszeń: 30 września 2021 r.

<http://ok-ptm.im.uj.edu.pl/wilkosz.php>

Organizator Konkursu  
Oddział Krakowski PTM

