

deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu \cdot c \quad \pi=3,141592\dots$$

NR 4 (563) 2021

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Jak wyglądałyby
grawitacja na
płaskiej Ziemi?
str. 4



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 4 (563)

Problem podziału liczby naturalnej
a własności statystyczne chłodnego gazu
Krzysztof Pawłowski



Zadania

Jak wyglądałaby grawitacja
na płaskiej Ziemi?
Andrij Rovenchak

O pewnej metodzie rozwiązywania
równań „nierozwiązywalnych”
Karol Gryszka

Jak nie wylać herbaty w pociągu?
Maciej Ogrodnik

Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy
wiedzieć?
Michał Skrzypczak

Przez firankę, czyli jak odkryto pulsary
Aleksander Schwarzenberg-Czerny



Wiriom

Magdalena Fikus

Klub 44

Prosto z nieba: Wyjątkowy Układ
Słoneczny?

Niebo w kwietniu

Aktualności
Anomalie umierają po cichu



Kongruencje na szachownicy
Bartłomiej Bzdęga

W następnym numerze „Grafen i spółka”
...i co ma do tego ten kwiat?



- Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.
- str. 1
- str. 3 **Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.
- str. 4
- str. 8 **Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.
- str. 10 **Adres do korespondencji:** Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl
- str. 12 **Prenumerata:**
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl
- str. 15 **Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.
- str. 19
- str. 20
- str. 22
- str. 22
- str. 24
- str. 25



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Problem podziału liczby naturalnej a własności statystyczne chłodnego gazu

Krzysztof PAWŁOWSKI*

* Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

Multizbiór to uogólnienie pojęcia zbioru. W odróżnieniu od klasycznych zbiorów w multizbiorze jeden element może występować wiele razy. Kolejność elementów nie ma znaczenia.

A właściwie czemu Bernoulliego, a nie Bernoullego? Okazuje się, że zadziałały tu „punkty za pochodzenie”. Otóż nazwiska niemieckiego pochodzenia zakończone na „i”, w odróżnieniu od nazwisk pochodzenia włoskiego, to „i” w odmianie zachowują.

Na ile sposobów liczbę naturalną E można zapisać jako sumę n liczb naturalnych? Jaki jest związek tego klasycznego problemu matematyki z fazą kwantową gazu przewidzianą przez Alberta Einsteina? Podziałem liczby naturalnej E będziemy tutaj nazywali taki multizbiór liczb naturalnych, którego elementy sumują się do E . Liczba $E = 4$ ma cztery podziały – są nimi $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{2, 1, 1\}$, $\{2, 2\}$, $\{3, 1\}$. A ile podziałów ma dowolna liczba E ?

Pytanie pojawia się w wielu okolicznościach i trudno wskazać autora tego problemu. Bez wątpienia takie pytanie zadał w roku 1674 Gottfried Leibniz w liście do Johanna Bernoulliego. Problem badał intensywnie Leonhard Euler. Dobre przybliżenia formuły na liczbę podziałów wyprowadzili niemal jednocześnie Srinivasa Ramanujan i Godfrey Hardy.

Problem liczby podziałów jest ciągle badany – tak samo jak interesujący nas problem stowarzyszony: Na ile sposobów można zapisać liczbę E w postaci sumy dokładnie n liczb naturalnych?

Oznaczmy tę liczbę przez $p_n(E)$. Dla przykładu $p_2(4) = 2$, $p_3(6) = 3$.

Problem, podobnie jak i ten wyjściowy, doczekał się rozwiązań asymptotycznych – zgrabnych przybliżeń skutecznych dla dużych E . Kolejne wartości $p_n(E)$ można też obliczyć, używając rekurencji:

$$p_n(E) = p_n(E - n) + p_{n-1}(E - 1).$$

Pierwszy składnik z tej rekurencji, $p_n(E - n)$, to liczba tych podziałów, w których nie występuje 1. W istocie, jeśli od każdego składnika takiego podziału odejmiemy 1, to ciągle niezerowych liczb naturalnych pozostanie n , tyle tylko, że ich suma wyniesie $E - n$. Mamy bijekcję ze wszystkimi podziałami liczby $E - n$ na n składników, których jest właśnie $p_n(E - n)$. Z kolei dla każdego podziału liczby E , w którym występuje liczba 1, można jedno 1 zabrać. Taki nowy zbiór będzie zawierał $n - 1$ niezerowych elementów, sumujących się do $E - 1$. Tego typu podziałów jest $p_{n-1}(E - 1)$.

Świetnie – problem stary jak świat, a jaki ma związek z fizyką? Na powyższe przykłady można spojrzeć jak na rozważania dotyczące... statystycznych właściwości cząstek w pułapce opisanej jednowymiarowym potencjałem harmonicznym. Poniżej wyjaśnimy te pojęcia w ekspresowym kursie kwantowej fizyki statystycznej.

Zacznijmy od „potencjału harmonicznego”. Mówimy, że cząstka jest w potencjale harmonicznym, gdy działa na nią siła F , która jest proporcjonalna do wychylenia Δx z położenia równowagi, czyli $F = -\alpha \Delta x$. W tym wzorze α to współczynnik proporcjonalności, a znak minus gwarantuje, że siła ściąga cząstki do położenia równowagi. Potencjał harmoniczny występuje powszechnie. Taka siła działa na ciężarek na sprężynie, w przybliżeniu na wahadło zegara, na cząstkę uwięzioną w wiązce laserowej, właściwie jako pierwsze przybliżenie dla dowolnego typowego układu sił, w którym występuje położenie równowagi.

Kolejny istotny punkt dotyczy fizyki statystycznej. To dział fizyki, w którym szuka się związków między właściwościami termodynamicznymi, takimi jak ciśnienie, temperatura, entropia, ilość wykonanej pracy przez silnik etc., a wielkościami mikroskopowymi – położeniami cząstek, z których materia się składa, ich prędkościami, oddziaływaniami pomiędzy cząstkami i ich zderzeniami ze ściankami naczynia. Każda z mikroskopowych konfiguracji cząstek, np. określenie ich położenia i prędkości, nazywana jest *mikrostanem*. Każdy mikrostan ma swoją energię. Z mechaniki kwantowej wynika, że te energie muszą być *skwantowane*, tzn. mogą przybierać tylko pewne, dyskretne wartości, określane mianem *spektrum*. W szczególności spektrum cząstki o masie m więzionej



Rozwiązanie zadania F 1021. Obrótowi walca towarzyszy obrót nawiniętej nań części linki o długości $l - x$. Moment bezwładności I takiego układu wynosi:

$$I = \frac{MR^2}{2} + m \frac{l-x}{l} R^2.$$

Niech F oznacza działającą „w dół” siłę, z jaką zwisający koniec linki „ciągnie” walec, powodując jego obrót, a ε oznacza przyspieszenie kątowe tego obrotu. Wówczas:

$$(1) \quad I\varepsilon = RF.$$

Na zwisający odcinek linki o masie $m \frac{x}{l}$ walec działa siłą $-F$ (tj. w kierunku przeciwnym do siły ciężkości – III zasada dynamiki):

$$(2) \quad m \frac{x}{l} a = m \frac{x}{l} g - F,$$

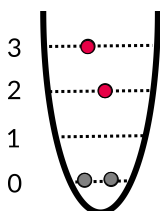
gdzie a oznacza przyspieszenie, z jakim opada koniec linki. Oczywiście mamy: $a = \varepsilon \cdot R$. Rozwiązaniem układu równań (1)–(2) jest:

$$a = \frac{2mgx}{(M + 2m)l}.$$

w potencjale harmonicznym jest wyjątkowo proste. Dozwolone w tym przypadku energie wyrażone są wzorem:

$$\epsilon_k = k \left(\hbar \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \right),$$

gdzie k to dowolna liczba naturalna lub 0, a \hbar to stała Plancka. Innymi słowy – cząstka w potencjale harmonicznym może mieć wyłącznie energię będącą całkowitą liczbą nieujemną, licząc w pewnych jednostkach fizycznych. Jeśli cząstek w potencjale harmonicznym jest N i jeśli pominiemy zderzenia pomiędzy nimi, to dozwolone wartości energii całkowitej mikrostanu wynoszą: $E = \sum_{i=1}^N \epsilon_{k_i}$, gdzie ϵ_{k_i} oznacza energię i -tej cząstki. Konfiguracje cząstek można przedstawiać graficznie jak na rysunku obok, na którym zaznaczono, że cząstki są uwięzione w potencjale będącym parabolą (wtedy siła jest proporcjonalna do wychylenia), a poziome kreski określają kolejne poziomy energii. Przedstawiona konfiguracja dotyczy $N = 4$ cząstek, o energiach $\{3, 2, 0, 0\}$. Energia całkowita tego układu wynosi 5.



Od 20 maja 2019 roku stała Plancka wynosi dokładnie $\hbar = 6,62607015 \cdot 10^{-34}$ J/s. Na taką wartość świat się umówił i odtąd stała Plancka służy do definiowania kilograma. (Patrz: *Aktualności* w Δ_{19}^1)

Schematyczne przedstawienie mikrostanu 4 cząstek w potencjale harmonicznym, o energiach 0, 0, 2 oraz 3

W typowej sytuacji parametr α potencjału harmonicznego jest znany. Można też szacować liczbę cząstek, mierzyć temperaturę gazu, a stąd szacować jego energię. Natomiast praktycznie nigdy nie ma możliwości zmierzenia położenia i prędkości każdej z cząstek gazu osobno. Znamy wielkości makroskopowe, ale nie mamy dostępu do mikrostanów. W poszukiwaniu relacji między statystyką mikrostanów a wielkościami makroskopowymi przydatne jest założenie poczynione przez Boltzmann. Zakłada się, co wydaje się trochę szalone, że wszystkie mikrostanu są tak samo prawdopodobne. Układ, w którym $N - 1$ cząstek jest nieruchomych, a jedna cząstka niesie całą energię, jest tak samo prawdopodobny, jak to, że każda cząstka ma dokładnie taką samą energię. Gdy już znamy makroskopowe wielkości, to zakładamy, że mikrostan jest losowy. Na przykład układ czterech cząstek o energii całkowitej $E = 5$ to, w duchu fizyki statystycznej, zespół 6 mikrostanów. Są to konfiguracje $\{5, 0, 0, 0\}$, $\{4, 1, 0, 0\}$, $\{3, 2, 0, 0\}$, $\{3, 1, 1, 0\}$, $\{2, 2, 1, 0\}$ oraz $\{2, 1, 1, 1\}$, każdy wchodzący z tym samym prawdopodobieństwem (tą samą wagą) $1/6$. W typowych sytuacjach liczba cząstek jest gigantyczna (w „pustej” szklance „fruwa” ok. 10^{22} atomów) i nie sposób wypisać wszystkich mikrostanów.

W fizyce statystycznej wyróżnia się trzy typy zespołów. Przedstawiony w artykule opis odnosi się do zespołu *mikrokanonicznego*, stosowanego do układów izolowanych. Do układu wymieniającego energię z termostatem użylibyśmy zespołu *kanonicznego*, w którym mikrostanu wchodzi z różnymi wagami (prawdopodobieństwami), zależnymi od ich energii i temperatury termostatu. Trzeci zespół, *wielki kanoniczny*, pojawia się, gdy liczba cząstek układu nie jest ustalona.

Dla dowolnego potencjału wiążącego atomy liczba wszystkich mikrostanów o tych samych właściwościach makroskopowych (ustalone N i E) to bardzo ważna wielkość fizyczna, której logarytm (z dokładnością do jednostek) to entropia, oznaczona jako S . W rozważanym tutaj przypadku, cząstek w jednowymiarowym potencjale, entropia jest więc związana z liczbą podziałów szacowaną przez Hardy’ego i Ramanujana! Ściśle rzecz ujmując, gdy $N \geq E$, entropia dana jest wzorem

$$S(N, E) = k_B \log p(E),$$

Stała Boltzmana też ma teraz ustaloną wartość $k_B = 1,380\,649 \cdot 10^{-23}$ J/K.

gdzie k_B to stała Boltzmana, a $p(E)$ to liczba podziałów liczby E . (Przypadek $N < E$ wymaga pewnej modyfikacji i nie wyraża się aż tak prostym wzorem, ponieważ nie zlicza się wtedy wszystkich podziałów liczby E , a jedynie te, w których jest nie więcej niż N składników.)

Pytanie „Czym jest temperatura?” przez lata było zmartwieniem studentów fizyki teoretycznej Uniwersytetu Warszawskiego. Przytoczony wzór bez stosownych komentarzy spowodowałby oblanie egzaminu.

Zakładając, że w przyrodzie układ ma takie właściwości, jakie dominują wśród mikrostanów, można wyprowadzać wzory na ciśnienie, temperaturę etc. Na przykład rozważania fizyczne prowadzą do oszacowania temperatury T wzorem:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(N, E)}{\partial E}.$$

Powyższe rozważania to nie jest problem czysto akademicki. Atomy można ścisnąć do jednego wymiaru, ograniczając ich ruch w pozostałych dwóch, a następnie umieścić w pułapce opisywanej potencjałem harmonicznym i badać termodynamikę. Nietrywialnym pytaniem jest liczba i fluktuacja liczby atomów na najniższym poziomie energetycznym. Jeśli ta liczba jest duża nawet dla stosunkowo wysokich temperatur, to mówimy o zajściu zjawiska kondensacji Bosego–Einsteina.

Jak oszacować średnią liczbę „skondensowanych” atomów \bar{N}_0 , tzn. tych (prawie) nieporuszających się, o energii równej 0? Odwołując się do założenia Boltzmanna, otrzymujemy wzór

$$(*) \quad N_0(\bar{N}, E) = \frac{1}{\Gamma(N, E)} \sum_{n=1}^N (N - n) p_n(E),$$

gdzie z kolei pojawia się symbol $p_n(E)$, czyli wspomniana na początku liczba podziałów E na sumę dokładnie n liczb! Indeks n w powyższym wzorze ma interpretację liczby cząstek niebędących na poziomie $E = 0$, natomiast $\Gamma(N, E) = \sum_{n=1}^N p_n(E)$ to liczba wszystkich mikrostanów N cząstek o energii całkowitej E . Zatem ułamek $p_n(E)/\Gamma(N, E)$ to liczba tych mikrostanów, dla których na poziomie 0 jest $N - n$ atomów. Dla przykładu powyżej z $N = 4$ i $E = 5$ mamy $\bar{N}_0 = \frac{3}{2}$.

Posługując się wzorem (*), można numerycznie zbadać przypadek jednowymiarowy i stwierdzić, że w jednym wymiarze nie ma przejścia fazowego, od fazy „prawie wszystkie cząstki są ruchome” do tzw. kondensatu Bosego–Einsteina, kiedy „prawie wszystkie cząstki są nieruchome”.

A jak jest w trzech wymiarach, gdy atomy są utrzymywane w pułapce opisywanej potencjałem

o kształcie paraboloidy będącej wykresem funkcji $\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$? To bardziej typowy przypadek w doświadczeniach nad statystyką gazów niż przypadek jednowymiarowy. Okazuje się, że spektrum nie zmienia się w tym przypadku, ale pojawiają się *degeneracje*, tzn. cząstka może mieć energię ϵ_n na więcej niż jeden sposób. Dla przykładu pojedyncza cząstka energię n może osiągnąć, będąc w stanie n w kierunku X i 0 w pozostałych lub np. będąc na poziomach 1, 1 w kierunkach X i Y i na poziomie $n - 2$ w kierunku Z .

W przypadku układu $N = 2$ cząstek o energii całkowitej $E = 2$ mamy 15 mikrostanów.

W przypadku potencjału harmonicznego stopień degeneracji n -tej energii wynosi $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$. Pozostałe wzory, na entropię, temperaturę i średnie obsadzenie poziomu $E = 0$, pozostają bez zmian.

Obliczenie statystyki liczby nieruchomych cząstek w trzech wymiarach okazuje się trudne. Najlepsze algorytmy radzą sobie do maksymalnie $N = 100\,000$ cząstek (na klastrach obliczeniowych, po wielomiesięcznych obliczeniach), ale jest to zbyt mało, aby porównać się z doświadczeniami poświęconymi tej tematyce, a analitycznych szacowań brak. Ten otwarty problem fizyczno-matematyczny pozostawiamy więc Czytelnikom.



Zadania

$$e \approx \sqrt{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{(4!!)^{1+4}}{(4!!)^!}\right)^{(4!!)^!}}}}$$

$$\pi \approx \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4!!}} - [-\sqrt{4!}]}}}}}}}}}}^{4!}}$$

$$\gamma \approx \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4!}} - [-\sqrt{4!}]}}}}}}}}^{4!} - \frac{\sqrt{4}}{4}}$$

Przygotował Jarosław GÓRNICKI

Problem czterech czwórek pojawił się 30 grudnia 1881 roku w londyńskim tygodniku *Knowledge* (zadanie 1669). Cztery czwórki są dobre na wszystko (margines). Liczba π też chce zabłysnąć (zadanie 1670). Oczywiście im mniej symboli π , tym lepiej, np. zapis $2 = -[-\sqrt{\pi}]$ jest lepszy niż $2 = [\sqrt{\pi}] + [\sqrt{\pi}]$. Mniej czwórek też daje radę (zadanie 1671). Rywalizacja trwa.

M 1669. Każdą liczbę naturalną od 1 do 20 zapisać za pomocą czterech czwórek, korzystając z operacji $+$, $-$, \cdot , $/$, $\sqrt{\cdot}$.

Rozwiązanie na str. 11

M 1670. Każdą liczbę naturalną od 1 do 20 zapisać jedynie za pomocą nie więcej niż trzech liczb π , korzystając z operacji $+$, $-$, \cdot , $/$, $\sqrt{\cdot}$, $[\cdot]$, $!$, $!!$.

Rozwiązanie na str. 13

M 1671. Każdą liczbę naturalną od 1 do 20 zapisać jedynie za pomocą nie więcej niż dwóch czwórek, korzystając z operacji $+$, $-$, \cdot , $/$, $\sqrt{\cdot}$, $[\cdot]$, $!$, $!!$.

Rozwiązanie na str. 18

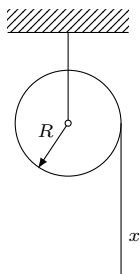
Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1021. Na jednorodny, poziomy wałek o promieniu R i masie M nawinięto pojedynczą warstwę jednorodnej, cienkiej linki o całkowitej długości l i masie m . Wałek może obracać się bez tarcia wokół swojej osi symetrii. Odcinek linki o długości x zwisa (rysunek) w polu grawitacyjnym, powodując obrót walca. Ile wynosi przyspieszenie, z jakim opada koniec linki, w zależności od długości odcinka x ? Moment bezwładności jednorodnego walca o masie M i promieniu R dla obrotu wokół jego osi symetrii wynosi $MR^2/2$. Przyspieszenie ziemskie wynosi g . Linka nie ślizga się po powierzchni walca.

Rozwiązanie na str. 1

F 1022. W warunkach normalnych ($p = 101325$ Pa, $T = 273,15$ K) gęstość mieszaniny azotu i helu wynosi $\rho = 0,6$ g/l. Ile moli helu zawarte jest w 1 litrze tej mieszaniny? Masa atomowa azotu $\mu_N \approx 14$ g/mol, a helu $\mu_{He} \approx 4$ g/mol. Stała gazowa $R \approx 8,314$ J/(mol·K).

Rozwiązanie na str. 9



Jak wyglądałaby grawitacja na płaskiej Ziemi?

* Katedra Fizyki Teoretycznej, Lwowski Uniwersytet Narodowy imienia Iwana Franki, Lwów, Ukraina

Andrij ROVENCHAK*

Ludzie zauważyli zakrzywienie powierzchni Ziemi wieki temu. Wystarczy wspomnieć klasyczny przykład chowania się statku za horyzontem dużo wcześniej, niż przestałby być widoczny z powodu oddalenia.



Rys. 1. Mem internetowy

Już w roku 350 p.n.e Arystoteles pisał o kulistym kształcie Ziemi w swoim traktacie *O niebie* (po grecku: *Περί οὐρανοῦ*, po łacinie: *De Caelo*) [1], a według Strabo i Diogenesa Laertiosa takie stwierdzenia były wygłaszane przez Parmenidesa, przedsokratejskiego filozofa VI–V wieku p.n.e. [2].

W rzeczywistości powierzchnia Ziemi nie jest idealną sferą, nie jest nawet elipsoidą, jest raczej skomplikowaną powierzchnią zwaną geoidą, porównywaną czasami do kształtu ziemniaka.

Mimo tych wszystkich dobrze znanych faktów dotyczących kształtu Ziemi wciąż jest wielu ludzi przekonanych, że nasza planeta ma kształt płaskiego dysku. Loty w kosmos, obserwacje astronomiczne, w tym zaćmienia, nie są w stanie przekonać „płaskoziemców” do zmiany poglądu. Znany mem internetowy (rys. 1) mówi, że gdyby Ziemia faktycznie była płaska, to koty już dawno wszystko zepchnęłyby z krawędzi. Lecz, jak zobaczymy dalej, cała sprawa nie jest aż tak prosta. W tym artykule spróbujemy więc zbadać dokładniej, jakie konsekwencje ma przyjęcie płaskiego modelu Ziemi. Przeanalizujemy, jakie właściwości miałyby pole grawitacyjne pochodzące od jednorodnego płaskiego dysku, i przekonamy się, że grawitacja na płaskiej Ziemi byłaby zupełnie inna od tego, co obserwujemy. Prezentowane wyniki zaczerpnięte są z artykułu O. Kuzii i A. Rovenchaka z roku 2019 [3].

Punktowa masa M znajdująca się w początku układu współrzędnych wytwarza w punkcie \mathbf{r} potencjał grawitacyjny

$$(3) \quad \varphi(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{|\mathbf{r}|},$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Odpowiadające temu potencjałowi natężenie pola grawitacyjnego $\mathbf{\Gamma}$ jest dane wzorem

$$(4) \quad \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

stąd siła, z jaką masa M przyciąga masę m znajdującą się w punkcie \mathbf{r} , wynosi

$$(5) \quad \mathbf{F} = \mathbf{\Gamma}m = -G \frac{Mm}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

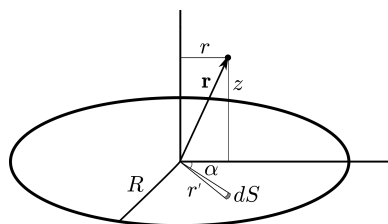
co stanowi treść prawa powszechnego ciężenia Newtona. Potencjał od układu mas M_i znajdujących się w punktach \mathbf{r}_i jest dany wzorem

$$(6) \quad \varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \varphi_i = \sum_i \left(-G \frac{M_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right).$$

Rozciągając masy punktowe, aby zajmowały pewne małe objętości ΔV_i , tak aby $M_i = \rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i$, gdzie $\rho(\mathbf{r})$ jest gęstością, dochodzimy do sformułowania dla ciągłego rozkładu masy:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -G \sum_i \frac{\rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta V_i \rightarrow 0} -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$



Rys. 2. Układ współrzędnych walcowych i jego orientacja względem dysku

Potencjał grawitacyjny

Potencjał grawitacyjny wytwarzany przez masę rozłożoną na pewnej powierzchni S dany jest wzorem

$$(7) \quad \varphi(\mathbf{r}) = -G \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

gdzie $\sigma(\mathbf{r}')$ jest gęstością powierzchniową. O takim rozkładzie możemy myśleć jako o masywnej warstwie z zaniedbywalną grubością.

Jako model płaskiej Ziemi przyjmijmy dysk o promieniu R i stałej gęstości powierzchniowej $\sigma = \text{const}$. Problem ten wygodnie opisuje się w zmiennych walcowych. Obserwator znajduje się w punkcie $(r, 0, z)$, a element powierzchni $dS = r' dr' d\alpha$ ma współrzędne $(r', \alpha, 0)$, jak na rysunku 2. Odległość $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ wygodniej jest obliczyć we współrzędnych kartezjańskich, gdzie $\mathbf{r} = (r, 0, z)$ i $\mathbf{r}' = (r' \cos \alpha, r' \sin \alpha, 0)$, czyli

$$(8) \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(r - r' \cos \alpha)^2 + (0 - r' \sin \alpha)^2 + (z - 0)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - 2r'r \cos \alpha + r'^2 + z^2}.$$

Zatem potencjał grawitacyjny jest dany przez

$$(9) \quad \varphi(r, z) = -G\sigma \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 - 2r'r \cos \alpha}}.$$

Obliczanie potencjału i natężenia pola grawitacyjnego

Obliczenie całek (9) okazuje się nieoczekiwanie trudnym zadaniem: wynik nie wyraża się przez funkcje elementarne. Nawet obliczenie potencjału od cienkiego pierścienia (co mogłoby się wydawać łatwiejsze od przypadku dysku) prowadzi do tak zwanych *całek eliptycznych*. Aby uniknąć zmagania się z tak trudnymi obliczeniami, posłużymy się pewnym przybliżeniem, a mianowicie rozwinięciem w szereg. Taki zabieg pozwoli nam otrzymać w nietrudny sposób pewne ciekawe wnioski.

Najpierw rozważmy wewnętrzną całkę po r' z równania (9):

$$(10) \quad \mathcal{I}(r, z; \alpha) = \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 - 2r'r \cos \alpha}}$$

$$= \sqrt{z^2 + r^2 + R^2 - 2Rr \cos \alpha} - \sqrt{z^2 + r^2}$$

$$+ r \cos \alpha \left[\ln \left(R - r \cos \alpha + \sqrt{z^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} \right) \right. \\ \left. - \ln \left(\sqrt{z^2 + r^2} - r \cos \alpha \right) \right].$$

Zewnętrzna całka α nie daje się wyrazić przez funkcje elementarne. Rozwiemy więc funkcję podcałkową w szereg względem r/R i scałkujemy to rozwinięcie wyraz po wyrazie:

$$(11) \quad \varphi(r, z) = -G\sigma \int_0^{2\pi} \mathcal{I}_{\text{szereg}}(r, z; \alpha)$$

$$= -G\sigma \left[2\pi \left(z - \sqrt{z^2 + R^2} \right) + \frac{\pi R^4}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{3\pi R^6 (R^2 - 4z^2)}{32(z^2 + R^2)^{7/2}} \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^6 \right) \right]$$

$$= \varphi_0(z) + \varphi_2(z) \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \varphi_4(z) \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \dots$$

Ponieważ w wyrażeniu (11) nie ma zależności od kąta, natężenie pola ma postać:

$$(12) \quad \mathbf{\Gamma} = -\text{grad} \varphi(r, z) = \Gamma_r \mathbf{e}_r + \Gamma_z \mathbf{e}_z,$$

gdzie

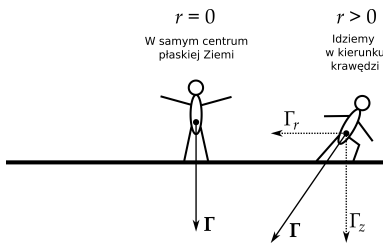
$$(13) \quad \Gamma_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \Gamma_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Składowe natężenia pola są dane przez:

$$(14) \quad \Gamma_r = -G\sigma \left[\frac{\pi R^3}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \left(\frac{r}{R} \right) + \frac{3\pi R^5 (R^2 - 4z^2)}{8(z^2 + R^2)^{7/2}} \left(\frac{r}{R} \right)^3 + \dots \right],$$

$$(15) \quad \Gamma_z = -G\sigma \left[2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) - \frac{3\pi z R^4}{2(z^2 + R^2)^{5/2}} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \dots \right].$$

Z analizy tych wyrażeń możemy wyciągnąć pewien jakościowy wniosek na temat własności pola grawitacyjnego na płaskiej Ziemi. Ilustruje go rysunek 3.



Rys. 3. Kierunek siły grawitacji na płaskiej Ziemi pochyla się coraz bardziej w miarę oddalania od środka dysku

Składowa radialna pola grawitacyjnego (równoległa do powierzchni Ziemi) rośnie w miarę oddalania się od środka dysku i zbliżania się do krawędzi. Jak się przekonamy, powoduje to zmianę wartości siły grawitacji i jej kierunku od prostopadłego w środku do prawie poziomego na krawędzi. Oznacza to, że osoba poruszająca się w stronę krawędzi płaskiej Ziemi będzie musiała coraz bardziej się pochylać [4, 5]. Będzie więc miała wrażenie, jakby szła coraz bardziej „pod górkę”.

Wyniki obliczeń numerycznych dla pola grawitacyjnego

Aby otrzymać pewne wyniki numeryczne, ustalamy jeden z parametrów opisujących problem – gęstość powierzchniową σ . Zakładając, że natężenie pola na powierzchni (w granicy $z \rightarrow 0^+$), dokładnie w jej środku ($r = 0$), jest równe przyspieszeniu ziemskiemu $\mathbf{g} = 9,8 \text{ N/kg}$ skierowanemu prostopadle do dysku, otrzymujemy:

$$(16) \quad \mathbf{\Gamma}(0, 0) = \Gamma_z(0, 0) \mathbf{e}_z; \quad \Gamma_z(0, 0) = -9,8 \text{ N/kg}.$$

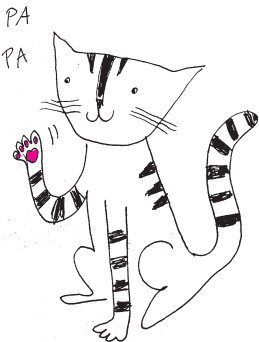
Z równań (14)–(15) wynika, że

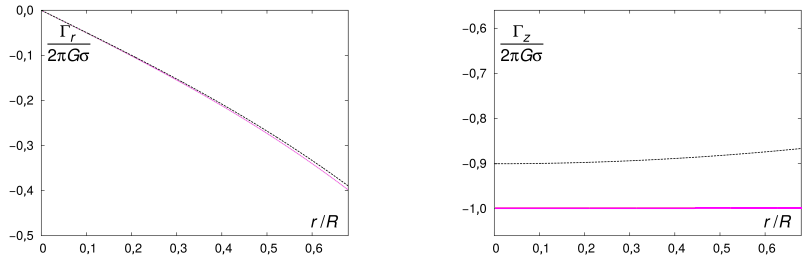
$$(17) \quad \Gamma_z(0, 0) = -2\pi G\sigma,$$

zatem

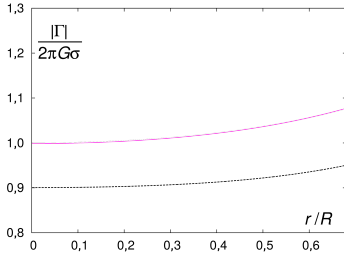
$$(18) \quad 2\pi G\sigma = g = 9,8 \text{ N/kg}.$$

Kolejny parametr – promień płaskiej Ziemi R – może zostać wybrany jako jednostka długości.

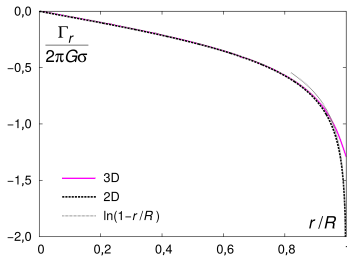




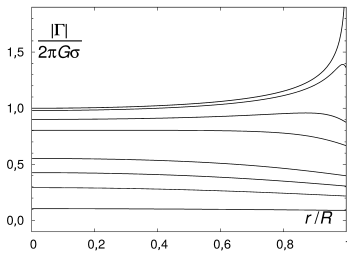
Rys. 4. Składowe pola grawitacyjnego na powierzchni (zielona ciągła linia) i na wysokości $z = 0,1R$ (czarna linia przerywana) obliczone z rozwinięć (14)–(15)



Rys. 5. Natężenie pola grawitacyjnego na powierzchni (zielona ciągła linia) i na wysokości $z = 0,1R$ (czarna linia przerywana) obliczone z rozwinięć (14)–(15)



Rys. 6. Składowe pola grawitacyjnego Γ_r na powierzchni. Zielona linia ciągła (3D) odpowiada ścisłym obliczeniom dla grubego dysku (o grubości $H = 0,1R$), czarna przerywana linia (2D) opisuje ściśle rozwiązanie cienkiego dysku (o zerowej grubości), a trzecia linia (oznaczona $\ln(1-r/R)$) opisuje zachowanie asymptotyczne opisane równaniem (24)



Rys. 7. Natężenie pola grawitacyjnego na różnych wysokościach nad powierzchnią. Linie (od góry do dołu odpowiadają wysokościami $h = 0; 0,02R; 0,05R; 0,1R; 0,2R; 0,3R; 0,5R; 0,7R; 1,0R; 1,5R; 2,0R$)

Wyniki obliczeń przy użyciu rozwinięcia w szereg (14)–(15) przedstawione są na rysunkach 4 i 5. Widać na nich, że składowa pionowa pola grawitacyjnego Γ_z nie zmienia się znacząco w dużym obszarze wokół centrum płaskiej Ziemi. Składowa radialna Γ_r rośnie znacznie szybciej z odległością od centrum, ale nie zmienia się istotnie z wysokością nad powierzchnią.

Na krawędzi świata

Rozwinięcie w szereg zaprezentowane wcześniej jest dobrym przybliżeniem tylko dla $r \lesssim R/2$. Gdy zbliżamy się do krawędzi dysku, czyli $r \lesssim R/2$, natężenie pola grawitacyjnego gwałtownie rośnie. Potwierdza to poniższy rachunek:

$$(19) \quad \varphi_{\text{dysk}}(r, z) = -G\sigma \int_0^R dr' \int_0^{2\pi} \frac{r' d\alpha}{\sqrt{r^2 + z^2 + r'^2 - 2r'r \cos \alpha}}$$

$$= -4G\sigma \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{(r' + r)^2 + z^2}} K\left(\frac{4r'r}{(r' + r)^2 + z^2}\right),$$

gdzie K jest całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju:

$$(20) \quad K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - m \sin^2 \theta}.$$

Osobliwość potencjału grawitacyjnego bierze się z zachowania $K(m)$ dla $m \rightarrow 1$. Kiedy argument dąży do jedności, to mamy następujące przybliżenie:

$$(21) \quad K(m) \Big|_{m \rightarrow 1} \sim -\frac{1}{2} \ln(1 - m),$$

czyli w pobliżu powierzchni ($z \rightarrow 0$) dla $r' \rightarrow r$ otrzymujemy

$$(22) \quad K\left(\frac{4r'r}{(r' + r)^2}\right) \sim -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{4r'r}{(r' + r)^2}\right) = -\ln|r' - r| + \ln(r' + r).$$

Dla potencjału otrzymujemy przybliżenie postaci

$$(23) \quad \varphi_{\text{dysk}}(r, 0) \Big|_{r \rightarrow R} \sim 4G\sigma \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{(r' + r)^2}} \ln|r' - r| \simeq 2G\sigma \int_0^R dr' \ln|r' - r|.$$

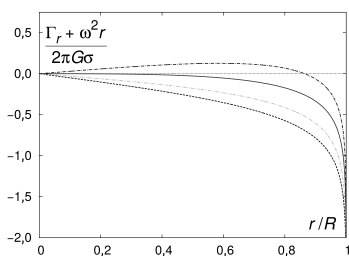
Natomiast dla natężenia pola otrzymujemy

$$(24) \quad \Gamma_r = -\frac{\partial \varphi_{\text{dysk}}}{\partial r} \sim 2G\sigma \ln\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Wyniki obliczeń dla składowej Γ_r są przedstawione na rysunku 6. Warto zauważyć, że skończona (niezerowa) grubość spowodowałaby wygładzenie osobliwości w pobliżu powierzchni. Natężenie pola na różnych wysokościach jest pokazane na rysunku 7. Jak widać, pole jest rozbieżne tylko na powierzchni i staje się prawie jednorodne dla wysokości $h \sim R$.

Płaskoziemcy kontratakują?

Rozważmy teraz sytuację, kiedy ziemski dysk obraca się w swojej płaszczyźnie. Z równania (14) można wywnioskować, że dla małych r radialna składowa pola grawitacyjnego Γ_r jest proporcjonalna do r , tak samo jak siła odśrodkowa $m\omega^2 r$, gdzie ω jest prędkością kątową. Czyli w pobliżu środka składowa radialna pola

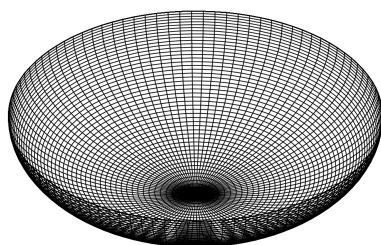


Rys. 8. Składowa radialna natężenia pola grawitacyjnego równoważona przez siłę odśrodkową. Krzywe od dołu do góry to odpowiednio:

- składowa Γ_r (dla $\omega = 0$),
- przypadek $\omega < \omega_0$,
- przypadek $\omega = \omega_0$,
- przypadek $\omega > \omega_0$



Rys. 9. Zaćmienie Księżyca widoczne z płaskiej Ziemi



Rys. 10. Schematyczny obraz płaskiej Ziemi postrzegany na podstawie wysiłku potrzebnego do przemieszczenia się od środka w kierunku krawędzi

grawitacyjnego może zostać częściowo skompensowana, jeżeli

$$(25) \quad \pi G \sigma \frac{r}{R} = \omega_0^2 r.$$

Biorąc pod uwagę równanie (18) i wybierając $R = 6400$ km, czyli przybliżoną wartość promienia naszej Ziemi, otrzymujemy

$$(26) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\pi G \sigma}{R}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} \simeq 0,0009 \text{ s}^{-1},$$

co tłumaczy się na okres obrotu $2\pi/\omega_0 \simeq 2$ godziny. Byłaby to dosyć duża prędkość obrotu w porównaniu do 24 godzin. Zauważmy, że dla mniejszych wartości ω składowa Γ_r byłaby kompensowana tylko częściowo, natomiast dla $\omega > \omega_0$ kierunek pola zmieniałby się w pewnej odległości od centrum. Rozważania te ilustruje rysunek 8.

Drugim sposobem, żeby ratować model płaskiej Ziemi, jest wprowadzenie niejednorodności w rozkładzie gęstości, a najprostszym podejściem jest wprowadzenie zależności gęstości od współrzędnej radialnej, $\sigma = \sigma(r')$. Taka zależność dawałaby skutki podobne do siły odśrodkowej, a żeby tak było, to gęstość $\sigma(r')$ powinna rosnać w miarę zbliżania się do krawędzi płaskiej Ziemi. Można sprawdzić, że rozkład

$$(27) \quad \sigma(r') = \frac{A}{\sqrt{R^2 - r'^2}}, \quad \text{gdzie } A = \text{const},$$

daje $\varphi(r, 0) = \text{const}$, co oznacza, że na powierzchni płaskiej Ziemi składowa radialna $\Gamma_r = 0$. Rozwiązanie tego problemu jest dosyć skomplikowane i nie będziemy go tu przedstawiać. Należy jednak zauważyć, że tak znaczne niejednorodności gęstości byłyby z pewnością zauważone przez płaskoziemców. Nieskończona wartość gęstości na krawędzi, czyli dla $r' \rightarrow R$, jest dodatkową wadą takiego niejednorodnego modelu. Co więcej, rozkład masy (27) nie zapewnia znikania składowej radialnej Γ_r powyżej powierzchni, czyli dla $z > 0$, a jedynie na samej powierzchni dysku.

Ustawienie słońca pod powierzchnią płaskiej Ziemi mogłoby być przybliżeniem takiego rozkładu masy, ale Wielki A'Tuin zepsułby cały pomysł, będąc dodatkowym źródłem pionowej składowej pola grawitacyjnego.

Wnioski

Z przedstawionych obliczeń wynika, że mieszkańcy płaskiego jednorodnego dysku mieliby wrażenie, że ich świat jest trochę jak wnętrze miednicy (rys. 10), ponieważ idąc w stronę krawędzi dysku, musieliby coraz bardziej się pochylać i mieliby wrażenie wchodzenia pod coraz bardziej stromą górę.

Ogromny wysiłek wymagany do osiągnięcia krawędzi dysku powoduje w szczególności, że najbezpieczniejszą metodą dostania się na antypody jest wydrążenie dziury przez płaską Ziemię [6], najlepiej w jej środku. Grawitacja na płaskiej Ziemi ocali również świat przed memowymi kotami, uniemożliwiając im zrzucenie wszystkiego z krawędzi dysku.

Mamy nadzieję, że przedyskutowany tu temat okaże się interesujący z kilku powodów. Przede wszystkim pokazaliśmy, jak obliczyć pole grawitacyjne do dwuwymiarowej konfiguracji mas. Po drugie, pokazaliśmy zarówno ściśle, jak i przybliżone obliczenia. Po trzecie, mamy nadzieję, że rubaszny ton artykułu ułatwia w niektórych miejscach przyswojenie prezentowanego materiału.

Literatura

- [1] S. Leggatt. *On the Heavens I and II* (Warminster: Aris & Phillips, 1995).
- [2] S. Weinberg. *To Explain the World: The Discovery of Modern Science* (London: Penguin Books, 2016).
- [3] O. Kuzii and A. Rovenchak. What the gravitation of a flat Earth would look like and why thus the Earth is not actually flat. *European Journal of Physics* **40**(3): 035008 (2019). *Journal of the Korean Physical Society* **71**(1): 37–41 (2017).
- [4] How A Flat Earth Would Effect Gravity—Interesting Animation. youtu.be/dqNPeMIPHaM.
- [5] Is Earth Actually Flat? youtu.be/VNqNnUJcVs
- [6] A. C. Tort. An exercise on Gauss's law for gravitation: the flat Earth model. *Physics Education* **49**(6): 629–631 (2014).

O pewnej metodzie rozwiązywania równań „nierozwiązywalnych”

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych,
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Karol GRYSZKA *

Matematyka pełna jest niezwykłych równości. Wśród nich są takie, w których występują ulubione stałe matematyczne, jak choćby

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots, \quad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

czy miłe dla oka:

$$3 + \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{3}{2}, \quad 12^2 = 144 \text{ oraz } 441 = 21^2, \quad 2^5 \cdot 9^2 = 2592.$$

My jednak przyjrzyjmy się bliżej równości $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$. Jest ona szczególnym przypadkiem równania

$$(1) \quad x^x = y^y.$$

Jak znaleźć rozwiązania $x^x = y^y$? Czy takie równanie ma więcej rozwiązań niż $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}$? Można szukać metodą prób i błędów, ale to najprawdopodobniej doprowadzi donikąd. Możemy zdradzić, że

$$x = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

jest kolejnym rozwiązaniem równania (1). Spróbujmy znaleźć więcej rozwiązań. A priori nie wiadomo, czy to równanie ma więcej niż dwa rozwiązania... Jak się jednak zaraz przekonamy, jeśli

Podstawiając $y = tx$ w (1), otrzymujemy

$$(x^x)^{\frac{1}{x}} = ((tx)^{tx})^{\frac{1}{tx}},$$

co można uprościć do $x = t^{1-t}$. Z relacji $y = tx$ otrzymujemy wzór na y :

$$y = tx = tt^{1-t} = t^{1+t-t} = t^{1-t}.$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = t^{\frac{t}{1-t}}, \\ y = t^{\frac{1}{1-t}}, \end{cases}$$

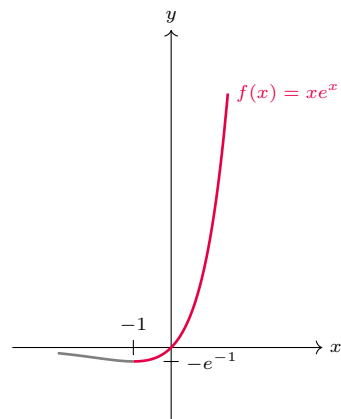
gdzie $t > 0$, to para (x, y) jest rozwiązaniem (1). Zauważmy, że jeśli przyjmiemy $t = 2$, otrzymamy pierwsze, a dla $t = 3$ drugie z powyższych rozwiązań.

Rozwiązanie (2) można uzyskać przez podstawienie $y = tx$ w (1) (patrz margines).

Z takiej postaci rozwiązania wynika ciekawa własność, otóż

$$y = tx \quad \implies \quad \frac{y}{t} = x = y^t,$$

czyli $y = ty^t$. Ta równość ma pewien związek z funkcją $f(x) = xe^x$, która jest określona na zbiorze liczb rzeczywistych. Nas jednak będzie interesować ta część dziedziny funkcji f , na której jest ona odwracalna. Weźmy przedział $[-1, +\infty)$, a zbiorem wartości jest wtedy $[-1/e, +\infty)$. Wykres tej funkcji przedstawiony jest na marginesie.



Wykres funkcji f . Na szaro zaznaczony jest fragment, który usuwamy z dziedziny funkcji tak, aby pozostała (kolorowa) część była odwracalna

Funkcją odwrotną do f jest... no właśnie, co to takiego? Rozważając równość

$$y = xe^x$$

i traktując x jak niewiadomą, powinniśmy wyznaczyć funkcję odwrotną do f . Jednak próby wykonania tego zadania „na piechotę” spełzną na niczym. Z drugiej strony ograniczenie dziedziny **gwarantuje** istnienie funkcji odwrotnej – nazywamy ją funkcją W Lamberta i oznaczamy również przez W . Definiujemy ją po prostu jako funkcję odwrotną do $f(x) = xe^x$. I zgodnie z tą definicją zachodzi $W(x) = y \iff x = ye^y$. Ponieważ W oraz f są funkcjami odwrotnymi, to zachodzi

$$W(f(x)) = x, \quad f(W(x)) = x,$$

czyli

$$(3) \quad W(xe^x) = x, \quad W(x)e^{W(x)} = x.$$

O funkcji W Lamberta można przeczytać na przykład w Δ_{14}^6 .

Oczywiście jest to prawda wszędzie tam, gdzie te funkcje zostały poprawnie określone – dla f na zbiorze $[-1, +\infty)$ oraz dla W na zbiorze $[-1/e, +\infty)$.

Funkcja W w równaniu (1). Logarytmując obie strony równania (1), otrzymujemy $x \ln x = y \ln y$. Korzystając z (3), dostajemy:

$$\begin{aligned} x \ln x &= \ln y \cdot e^{\ln y}, \\ W(x \ln x) &= W(\ln y \cdot e^{\ln y}), \\ \ln y &= W(x \ln x), \\ (4) \quad y &= e^{W(x \ln x)}. \end{aligned}$$

Wynika z tego, że jeśli dane jest x , to y musi być postaci (4). Rozwiązanie jest bardzo eleganckie i zgrabne, ale... chwila uwagi i spostrzeżemy, że powyższe do niczego nie prowadzi. Spójrzmy na proste przekształcenie (zgodne ze wzorem (3)):

$$W(x \ln x) = W(\ln x \cdot e^{\ln x}) = \ln x,$$

czyli otrzymaliśmy $y = e^{\ln x} = x$. Czy więc wzór (4) pozbawiony jest sensu?

Zwróćmy uwagę na to, że otrzymana przed chwilą równość ma miejsce wtedy, gdy $x \ln x \geq -1$, czyli $x \geq e^{-1}$ (zgodnie z podanymi dziedzinami funkcji W oraz f). Wykonajmy zatem mały eksperyment – skorzystajmy z programu **WolframAlpha** i obliczmy $e^{W(0,1 \ln 0,1)}$. Innymi słowy, podstawiamy $x = 0,1$. Wynikiem jest $y = 0,729241\dots$, a nie $y = 0,1!$ Cóż tutaj się stało? Zauważmy, że $x < \frac{1}{e}$, a więc $\ln x$ jest poza wyróżnioną dziedziną funkcji f ! Niemniej liczba $f(x) = x \ln x$ jest już większa od $-\frac{1}{e}$, a zatem trafia w wyróżnioną dziedzinę funkcji W . Złożenie $W(f(x))$ prowadzi nas wtedy do przedziału $(-1, \infty)$, wobec tego z konieczności wynikiem nie może być $\ln x$.

Pożytek z funkcji W . Za pomocą funkcji W możemy rozwiązać wiele ciekawych równań, które na pierwszy rzut oka są nie do rozwiązania. Wadą takich rozwiązań będzie jednak brak ich elementarności, to znaczy nie zostanie podana jawna formuła – będzie w nią „wplątana” funkcja W Lamberta. Rozważmy równanie

$$x^x = 2,$$

które można przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x \ln x &= \ln 2, \\ \ln x e^{\ln x} &= \ln 2, \\ \ln x &= W(\ln 2), \\ x &= e^{W(\ln 2)} = 1,55961\dots \end{aligned}$$

Rozwiązanie zgrabne, ale niestety (jak ostrzegaliśmy) nie mamy jawnej formuły. Zachęcamy Czytelnika do zmierzenia się z poniższymi wyzwaniem (wystarczy podać jedno rozwiązanie).

- $x^2 e^x = 2$,
- $x + e^x = 2$,
- $x = a + b e^{cx}$,
- $\ln x = a + \frac{b}{x}$ (wystarczy podać jedno rozwiązanie).

Rozwiązania można znaleźć w tym numerze *Delty*.

Inne zastosowanie. W Δ_{20}^4 Autor niniejszego artykułu zaprezentował nieskończone wieże potęgowe. Okazuje się, że dzięki funkcji W można uzasadnić opisane tam równości (potęgi ciągną się w nieskończoność):

$$\sqrt[e]{e^{\sqrt[e]{e^{\sqrt[e]{\dots}}}}} = e, \quad \left(\frac{1}{e^e}\right)^{\left(\frac{1}{e^e}\right)^{\dots}} = \frac{1}{e}.$$

Czytelnika, który poznał już nieco matematyki wyższej, zachęcamy do lektury na stronie cs.uwaterloo.ca/research/tr/1993/03/W.pdf. Zamieszczono tam dużo ciekawych przykładów zastosowania funkcji W .

W celu obliczenia $e^{W(0,1 \ln 0,1)}$ na stronie www.wolframalpha.com wpisujemy `exp(ProductLog(0.1 ln0.1))`



Rozwiązanie zadania F 1022. W temperaturze $T_0 = 273,15$ K hel i azot z dużą dokładnością spełniają równanie gazu doskonałego. Należy jednak pamiętać, że azot tworzy molekule dwuatomowe, a hel jest gazem szlachetnym o molekułach jednoatomowych. Zgodnie z prawem Daltona ciśnienie mieszaniny gazów doskonałych jest sumą ciśnień składników. Mamy więc:

$$\begin{aligned} p &= p_{He} + p_{Ne} = (n_{He} + n_N) \frac{RT}{V}, \\ p &= \frac{n_{He} \mu_{He} + 2n_N \mu_N}{V}, \end{aligned}$$

gdzie p , n i μ oznaczają, odpowiednio, ciśnienie, liczbę moli i masę atomową, a indeksy He i N oznaczają wartości tych wielkości dla odpowiedniego składnika mieszaniny. Rozwiązaniem tego układu równań jest:

$$\frac{n_{He}}{V} = \frac{\frac{p}{RT_0} - \frac{\rho}{2\mu_N}}{1 - \frac{\mu_{He}}{2\mu_N}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych $n_{He}/V \approx 2,7 \cdot 10^{-2}$ mol/l.

Jak nie wylać herbaty w pociągu?

Maciej OGRODNIK

Wsiadamy do pociągu. Zamawiamy gorącą herbatę i zajmujemy miejsce. Jeszcze zanim pociąg ruszy, pojawia się pytanie: czy herbata nie wyleje się z kubka? Żeby na nie odpowiedzieć, zastanówmy się, jakie siły będą na nas działać. Pociąg rusza z peronu. Dopóki tory nie skręcają, sprawa jest prosta. Możemy w przybliżeniu założyć, że siła jest stała i mamy dobrze nam znany ruch jednostajnie przyspieszony. Po rozpędzeniu, gdy maszynista osiągnie założoną prędkość, pociąg porusza się ruchem jednostajnym. Silnik lokomotywy pracuje tak, żeby zrównoważyć siły oporu (głównie powietrza, ale też tarcia kół). Siedząc w wagonie, nie powinniśmy odczuwać żadnych sił oprócz drobnych trzęsień spowodowanych lekkimi nierównościami szyn.

Do tej pory jedziemy cały czas po prostej. W ten sposób niekoniecznie dojedziemy do naszego celu. Kiedyś pociąg musi skręcić. Jaka wtedy będzie na nas działać siła? Załóżmy, że jedziemy po łuku – wycinku okręgu. Jeśli jedziemy ze stałą szybkością, to sytuacja jest znajoma. Poruszamy się tymczasowo ruchem jednostajnym po okręgu.

Wartość przyspieszenia dośrodkowego to $a_d = \frac{\|v\|^2}{r}$, gdzie $\|v\|$ to szybkość liniowa (nasza i naszego wagonu). Będąc w pociągu, poczujemy siłę odśrodkową proporcjonalną do kwadratu szybkości i proporcjonalną do odwrotności promienia łuku, czyli do krzywizny.

Jeżeli prędkość jest mała, a promień duży, to siła, którą odczuwamy, będzie niewielka. Jednak chcemy, żeby pociąg jechał szybko, a nie zawsze można położyć tory tak, żeby robić duże łuki. Jeśli tory przechodziłyby z prostych od razu w ciasny łuk, to pasażerów zaskoczyłaby nagle, duża siła odśrodkowa. To znaczy, że nie mamy czasu, żeby uratować herbatę przed rozlaniem. Dla zwiększenia komfortu podróżnych trzeba tę zmianę wprowadzać stopniowo. Jak to zrobić? Możemy połączyć kilka kawałków coraz mniejszych okręgów aż dojdziemy do docelowego, najciaśniejszego wycinka okręgu. W ten sposób siła odśrodkowa zwiększa się stopniowo ze skokiem przy każdym przejściu na mniejszy okrąg, a pasażerowie mają czas zareagować i przechylić się wraz z kubkiem. Czy możemy wejść w zakręt gładziej? Tak. Tutaj z pomocą przychodzi nam na przykład krzywa zwana *klotoidą*. Możemy ją przedstawić parametrycznie wzorem

$$p(t) = \left(\int_0^t \cos(u^2) du, \int_0^t \sin(u^2) du \right).$$

Niech $p(t)$ będzie położeniem wagonu w czasie t w pewnym układzie współrzędnych. Przyspieszenie w czasie t jest równe

$$p''(t) = \frac{d}{dt}(\cos(t^2), \sin(t^2)) = 2t(-\sin(t^2), \cos(t^2)),$$

czyli rośnie liniowo w czasie. Zatem działająca na nas siła zmienia się w sposób ciągły.

W celu dalszego zwiększenia komfortu podróżnych projektanci linii kolejowych wprowadzają dodatkowo przechylenie torów. W najlepszej sytuacji tory są ustawione tak, że siła wypadkowa (suma ciężaru i siły odśrodkowej) jest ustawiona prostopadle do podłogi przechylonego wagonu. Ten optymalny kąt zależy od wartości siły odśrodkowej, a stąd od szybkości, z którą jedziemy. Jeśli pociąg zawsze jedzie przez zakręt z tą samą prędkością, to moglibyśmy tak przechylić tory, żeby pasażerowie odczuwali jedynie siłę działającą w dół. Jednak po tych samych torach mogą poruszać się pociągi osobowe, pociągi ekspresowe oraz towarowe, które jeżdżą z różnymi prędkościami. W takim wypadku trzeba pójść na kompromis. Musimy pogodzić się z tym, że czasem pojawi się składowa poprzeczna siła odśrodkowej.

Klotoida jest przykładem stosowanej w inżynierii kolejowej krzywej przejściowej. Ta krzywa w płynny sposób łączy proste kawałki torów z łukami będącymi

Odpowiednio dobierając układ współrzędnych, możemy nasz ruch opisać parametrycznie przez równanie:

$$p(t) = r(\cos(\omega t), \sin(\omega t)),$$

gdzie r to promień okręgu, a ω to prędkość kątowna. Prędkość liniową opisuje pochodna

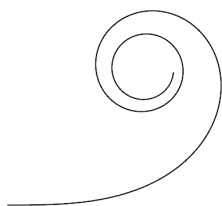
$$p'(t) = r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)),$$

a przyspieszenie druga pochodna

$$p''(t) = -r\omega^2(\cos(\omega t), \sin(\omega t)).$$

Przez $\|w\|$ oznaczamy tutaj długość wektora w ; dla wektora w z dwuwymiarowej przestrzeni, jak w naszym przypadku, mamy

$$\|w\| = \|(w_1, w_2)\| := \sqrt{w_1^2 + w_2^2}.$$



Fragment klotoidy. Przy projektowaniu torów wykorzystalibyśmy krótszy kawałek i połączyli go z łukiem okręgu, żeby ograniczyć odczuwalną dla pasażerów siłę odśrodkową





Rozwiązanie zadania M 1669.

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{44}{44}, \\
2 &= \frac{4}{4} + \frac{4}{4}, \\
3 &= \frac{4+4+4}{4}, \\
4 &= 4 \cdot (4-4) + 4, \\
5 &= \frac{4 \cdot 4 + 4}{4}, \\
6 &= 4 + \frac{4+4}{4}, \\
7 &= \frac{44}{4} - 4, \\
8 &= 4 + 4 + 4 - 4, \\
9 &= 4 + 4 + \frac{4}{4}, \\
10 &= \frac{44-4}{4}, \\
11 &= \frac{44}{\sqrt{4} + \sqrt{4}}, \\
12 &= \frac{44+4}{4}, \\
13 &= \frac{44}{4} + \sqrt{4}, \\
14 &= 4 + 4 + 4 + \sqrt{4}, \\
15 &= \frac{44}{4} + 4, \\
16 &= 4 + 4 + 4 + 4, \\
17 &= 4 \cdot 4 + \frac{4}{4}, \\
18 &= 4 \cdot 4 + 4 - \sqrt{4}, \\
19 &= ?, \\
19 &= 4! - 4 - \frac{4}{4}, \text{ gdy użyjemy !,} \\
20 &= 4 \cdot 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4}.
\end{aligned}$$

Więcej o średniej krzywiznie i bańkach mydlanych można przeczytać w artykule *Bańka jaka jest, każdy widzi* (Δ_{19}^7).

Więcej można przeczytać w:
Grawitacja i geometria – szybki przegląd,
 Marcin Domagała (Δ_{09}^5)
Czy Einstein miał rację?,
 Michał Bejger (Δ_{15}^{12})
Geometria różniczkowa,
 Jerzy Konarski (Δ_{19}^4)

wycinkami okręgów. W praktyce stosowane są też inne krzywe przejściowe. Mogą to być przybliżenia klotoidy, które z pewnych względów łatwiej jest wyznaczyć niż krzywą zadaną parametrycznie przez funkcje nieelementarne. Używane są też krzywe, dla których tempo przyrostu przyspieszenia nie jest stałe (jak dla klotoidy).

Optymalny kąt przechylenia torów jest w przybliżeniu proporcjonalny do krzywizny krzywej. Przy klotoidzie krzywizna rośnie liniowo, więc przechyłka jest wprowadzana liniowo na tej krzywej przejściowej. To znaczy, że przyspieszenie kątowe, związane z przechyłką torów, pojawia się nagle. Jest to problem analogiczny do tego z wprowadzaniem krzywizny do samej trasy pociągu. Aby temu zaradzić, potrzeba, żeby pochodna tempa zmiany przechyłki była ciągła. Przy standardowych prędkościach to nie jest aż tak istotny efekt. Jednak dla linii dużych prędkości dla zwiększenia komfortu krzywe przejściowe są dobierane tak, żeby trzecia pochodna była ciągła. W takim przypadku pochodna przyspieszenia liniowego i przyspieszenie kątowe wprowadzone przez przechylenie torów są ciągłe. To zwiększenie płynności przejścia w zakręt odbywa się jednak kosztem wydłużenia krzywej przejściowej.

Wiemy już, po jakiej krzywej chcemy, żeby poruszał się pociąg dla zwiększenia komfortu pasażerów. Ale zazwyczaj pociągi jadą po torach złożonych z dwóch szyn. Jak te szyny powinny być względem siebie ustawione? Koła pociągu są umieszczone na osiach o pewnej ustalonej szerokości R . Rozstawy torów R mogą być różne w różnych krajach, ale powiedzmy, że w naszej podróży nie musimy się tym przejmować. Szyny powinny być od siebie równo oddalone, żeby koła nie zsunęły się ani do środka ani na zewnątrz.

Dopóki nie skręcamy, to mamy dwie równoległe proste. Na łuku okręgu będą to części okręgów o wspólnym środku i różnicy promieni równej R . Dla krzywych przejściowych potrzebujemy ogólniejszego przepisu na szukanie krzywej równoległej do pewnej krzywej γ :

1. wybierzmy kilka punktów na krzywej γ ,
2. wokół każdego z tych punktów narysujmy okrąg o promieniu R ,
3. narysujmy krzywą styczną do każdego z tych okręgów.

W przybliżeniu dostaniemy krzywą odległą od γ o R . Żeby znaleźć krzywą, która naprawdę jest oddalona od γ o R , musimy znaleźć krzywą, która jest styczna do każdego z okręgów o promieniu R i środku w pewnym punkcie krzywej γ .

Gdy się tak zastanawialiśmy nad ruchem pociągu, pojawiły nam się dwa pojęcia z geometrii. Pierwsze to krzywizna (płaskiej) krzywej. W przypadku pociągu jadącego ze stałą prędkością krzywizna toru jest proporcjonalna do przyspieszenia dośrodkowego potrzebnego do utrzymania pociągu w szynach. W matematycznym ujęciu powiemy, że krzywizna krzywej $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sparametryzowanej tak, że $\|\gamma'(t)\| = 1$, wynosi

$$\kappa := \|\gamma''(t)\|.$$

Krzywiznę w pewnym punkcie krzywej możemy zdefiniować też jako

$$\kappa := \frac{1}{r},$$

gdzie r to promień „najlepiej” dopasowanego okręgu do krzywej w danym punkcie. Jest to jedno z podstawowych pojęć geometrii różniczkowej. Jego uogólnienia także mają zastosowania w fizyce. Na przykład *średnia krzywizna* powierzchni ma związek z kształtem bańek mydlanych. Z kolei *tensor krzywizny* przestrzeni pozwala sformułować współczesne rozumienie grawitacji w ogólnej teorii względności.

Drugie pojęcie z geometrii to *obwiednia* rodziny krzywych. Jest to krzywa styczna do każdej z krzywych w danej rodzinie. W ten sposób doszliśmy do tego, jak poprowadzić dwie równoległe, zakrzywione szyny.

Za wygodą i bezpieczeństwem pasażerów w pociągu stoi wiele rozwiązań inżynierskich, korzystających między innymi z geometrii. Warto się im przyjrzeć, żeby docenić, jak matematyka i fizyka ułatwiają nam codzienne życie.

Musimy wiedzieć. Ale czy będziemy wiedzieć?

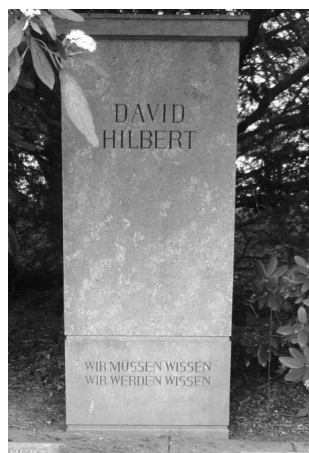
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LXI Szkole Matematyki Poglądowej pt. *Matematyczne zmiany*, Wola Ducka, luty 2020. Artykuł jest przedrukiem z czasopisma *Matematyka Poglądowa* (7), 2020.

Tytuł artykułu podejmuje polemikę z wypowiedzią Davida Hilberta wygłoszoną w Królewcu w 1930 roku:

*Wir müssen wissen.
Wir werden wissen!*

której tekst umieszczono później na grobie Hilberta.



Hilbert konsekwentnie głosił możliwość udzielenia przez matematykę odpowiedzi na każde pytanie. Wstęp do swoich 23 problemów (Paryż, 1900) zakończył:

In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.

Redakcja

Jedynkę można zdefiniować jako element neutralny mnożenia.

Michał SKRZYPCZAK*

Był pewien starożytny grecki geodeta, którego zadaniem było odmierzać prostokątne pastwiska na zboczach Olimpu. Zauważył on, że ilekroć pastwisko ma wymiary a na b , to długość jego przekątnej c spełnia zależność $c^2 = a^2 + b^2$. Jakkolwiek prawidłowość ta zawsze okazywała się prawdą, ów geodeta był przecież człowiekiem sumiennym i czuł się w obowiązku za każdym razem zmierzyć ową przekątną, zanim wpisał jej długość do Formularza Charakterystyki Gruntu (druk P572). Wszak nie ma żadnego powodu, by zależność prawdziwa w przypadku tysiąca innych pastwisk sprawdziła się w jakimś zupełnie nowym przypadku – byłyby to bezzasadna wiara w prawo serii!

Czy w takim razie geodetów należy dzielić na dwie kategorie: sumiennych, którzy sprawdzają wszystkie spostrzeżone zależności we wszystkich poszczególnych przypadkach, oraz lekkomyślnych, którzy bezpodstawnie wierzą w prawo serii? Otóż okazuje się, że jest też możliwość pośrednia, dostrzeżona przez Euklidesa. Można bowiem sformułować pewne minimalne wymagania (zwane *aksjomatami*), które winno spełniać pastwisko. Aksjomaty te to powinny być prawdy proste i oczywiste – a najlepiej jeszcze takie, których prawdziwość w przypadku nowo obmierzanego pastwiska łatwo sprawdzić. Na bazie tych aksjomatów można następnie, metodą rozumowania matematycznego, wydedukować rozmaite konsekwencje, w tym powyższą zależność $c^2 = a^2 + b^2$. I tak, przystępując do pomiarów w nowym miejscu, sprawdzisz wprawdzie, że spełnia ono aksjomaty, niejako za darmo dostajemy gwarancję, że spełnia ono też wszystkie zależności z tych aksjomatów wyprowadzone.

Powyższa przenośnia ma obrazować metodę postępowania, na jakiej bazuje cała współczesna matematyka. Bo jakkolwiek jej celem jest często badanie konkretnych obiektów (pastwisk), to jednak nie jest to badanie empiryczne, w którym pieczołowicie sprawdzamy nasze zależności – zwykle zresztą jest to niemożliwe, bo większość prawidłowości wymagałaby sprawdzenia nieskończenie wielu przypadków. Zamiast tego formułujemy zbiory aksjomatów opisujących badany obiekt. W zależności od sytuacji aksjomaty te przyjmujemy „na wiarę” lub dowodzimy w oparciu o jakąś szerszą teorię. Wtedy reszta pracy matematycznej staje się działaniem ścisłym i formalnym: szukamy dowodu, że interesująca nas prawidłowość jest konsekwencją przyjętych aksjomatów. Pytanie tylko, czy taki dowód zawsze istnieje, nawet jeśli prawidłowość jest w jakimś sensie *prawdą*?

Zanim pójdziemy dalej w tych rozważaniach, musimy wprowadzić trochę oznaczeń. Konkretnie obiekty matematyczne (pastwiska) będziemy nazywali *modelami* i oznaczali symbolami \mathcal{M} , \mathcal{M}' . Przykładami takich modeli są liczby rzeczywiste \mathbb{R} z operacjami dodawania i mnożenia, oznaczane $\langle \mathbb{R}, (+), (\cdot) \rangle$, czy liczby naturalne \mathbb{N} z tymi samymi operacjami $\langle \mathbb{N}, (+), (\cdot) \rangle$. Pojedyncze prawidłowości matematyczne wyrażające pewne własności modeli (jak na przykład warunek $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$) będziemy nazywali *formułami* i oznaczali φ , ψ . I tak przemienność dodawania wyraża formuła $\varphi \equiv (\forall x, y. x+y = y+x)$ mówiąca, że dla każdej pary liczb x i y ich suma jest przemienna. *Aksjomatyka* lub *teoria* to nic innego jak pewien zbiór formuł $\Gamma = \{\varphi_1, \dots\}$.

Rozważmy konkretny model \mathcal{M} i formułę φ . Jeżeli φ jest *prawdziwa* w modelu \mathcal{M} , to oznaczamy ten fakt $\mathcal{M} \models \varphi$ (mówimy też, że \mathcal{M} *spełnia* φ). W przeciwnym przypadku formuła ta jest *falszywa*, co oznacza, że \mathcal{M} spełnia jej negację: $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ (symbol \neg to symbol negacji logicznej). I tak w każdym modelu, w którym umiemy dodawać i mnożyć, albo istnieje liczba, której kwadrat jest równy $1+1$, albo taka liczba nie istnieje. Czyli zawsze albo $\mathcal{M} \models \varphi$, albo $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. Powyższą notację możemy rozszerzyć na zbiory formuł: $\mathcal{M} \models \Gamma$, jeśli $\mathcal{M} \models \varphi$ dla każdej formuły φ z Γ . Relację \models nazywamy relacją *semantyczną*, bo opisuje ona faktyczne światy matematyczne – modele.

Opisany powyżej sposób pracy matematyka dzieli się zatem na dwa etapy: w pierwszym formułujemy aksjomatykę Γ i przekonujemy się, że $\mathcal{M} \models \Gamma$; w drugim próbujemy wywnioskować interesującą nas formułę φ z Γ . Wnioskowanie takie



Rozwiązanie zadania M 1670.

- 1 = $[\sqrt{\pi}]$,
- 2 = $-[-\sqrt{\pi}]$,
- 3 = $[\pi]$,
- 4 = $-[-\pi]$,
- 5 = $\left[\sqrt{\sqrt{([\pi]!)!}} \right]$,
- 6 = $[\pi]!$,
- 7 = $-[-\sqrt{([\pi]!)!}]$,
- 8 = $-([-\pi] + [-\pi])$,
- 9 = $[\pi \cdot \pi]$,
- 10 = $\left[\sqrt{\sqrt{\sqrt{([\pi]!)!}}} \right]$,
- 11 = $- \left[-\sqrt{\sqrt{\sqrt{([\pi]!)!}}} \right]$,
- 12 = $[-\pi \cdot [-\pi]]$,
- 13 = $[-\pi \cdot [-\pi]]$,
- 14 = $[-(\pi + \pi) \cdot [-\sqrt{\pi}]]$,
- 15 = $[\pi \cdot \sqrt{\pi}] \cdot [\pi]$,
- 16 = $[-\pi] \cdot [-\pi]$,
- 17 = $[\pi \cdot \pi \cdot \sqrt{\pi}]$,
- 18 = $[\pi + \pi] \cdot [\pi]$,
- 19 = $[(\pi + \pi) \cdot \pi]$,
- 20 = $-[-(\pi + \pi) \cdot \pi]$.

Dowód twierdzenia 1:

Załóżmy, że istnieje pewien skończony dowód P formuły φ oparty na aksjomatach z Γ . Weźmy dowolny model \mathcal{M} i załóżmy, że $\mathcal{M} \models \Gamma$. Przez indukcję po strukturze dowodu P wykazujemy, że wszystkie pośrednie występujące w nim formuły również są prawdziwe w \mathcal{M} . W takim razie $\mathcal{M} \models \varphi$.

Schemat konstrukcji z twierdzenia 2:

Rozumujemy przez sprzeczność, zakładając, że $\Gamma \not\models \varphi$. Najpierw rozszerzamy naszą aksjomatykę do większego zbioru $\Gamma' \supseteq \Gamma$. Robimy to, dorzucając do Γ kolejne formuły, dbając, by na każdym etapie wciąż zachodziło $\Gamma' \not\models \varphi$. Następnie tworzymy tzw. *model syntaktyczny* \mathcal{M}_0 , który ma tę własność, że dla każdej formuły ψ zachodzi $\mathcal{M}_0 \models \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma' \vdash \psi$. Oznacza to w szczególności, że $\mathcal{M}_0 \models \Gamma' \supseteq \Gamma$ oraz $\mathcal{M}_0 \not\models \varphi$. Czyli $\Gamma \not\models \varphi$ i mamy poszukiwaną sprzeczność.

Aksjomat wyboru mówi, że w każdej rodzinie zbiorów niepustych można wybrać po jednym elemencie z każdego zbioru. Pomimo swego niegroźnego sformułowania, jego założenie implikuje istnienie różnych „dziwnych” obiektów, jak np. zbiorów niemierzalnych.

to podanie ścisłego matematycznego dowodu: pewnego skończonego obiektu matematycznego, który na podstawie przyjętych reguł wnioskowania i założenia z Γ wykazuje φ . Gdy taki dowód istnieje, to piszemy $\Gamma \vdash \varphi$. Zauważmy, że ta relacja \vdash nie odwołuje się do żadnego modelu \mathcal{M} – nazywamy ją *konsekwencją syntaktyczną*, gdyż zarówno formuły z Γ , formuła φ , jak i sam dowód to w ostateczności skończone napisy.

Matematyka nie jest jednak przecież tylko systemem formalnym, sprowadzającym się do przeszukiwania wszystkich możliwych dowodów. Pracując nad interesującym nas twierdzeniem, opieramy się na intuicjach dotyczących faktycznych modeli. Oznacza to, że tak naprawdę interesuje nas relacja *konsekwencji semantycznej*: powiemy, że φ jest *konsekwencją semantyczną* aksjomatów Γ (ozn. $\Gamma \models \varphi$), jeśli każdy model \mathcal{M} , który spełnia wszystkie aksjomaty z Γ , spełnia też φ .

Jak zauważyliśmy powyżej, każdy konkretny model \mathcal{M} musi albo spełniać daną formułę ($\mathcal{M} \models \varphi$), albo jej nie spełniać, co oznacza, że $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. Własność ta przestaje być prawdą dla powyższej relacji semantycznej konsekwencji: może być tak, że pewna aksjomatyka Γ ma dwa istotnie różne modele \mathcal{M}_1 i \mathcal{M}_2 , takie że $\mathcal{M}_1 \models \Gamma$ oraz $\mathcal{M}_2 \models \Gamma$. Może wtedy istnieć pewna formuła φ , która zachodzi w modelu \mathcal{M}_1 , natomiast jest fałszywa w modelu \mathcal{M}_2 . Wtedy zarówno $\Gamma \not\models \varphi$, ale też $\Gamma \not\models \neg\varphi$, co oznacza, że formuła φ jest *niezależna* od Γ . Przykładem takiej sytuacji jest przypadek, gdy Γ to standardowy zbiór pięciu aksjomatów Euklidesa, zaś φ to tzw. aksjomat Pascha, sformułowany przez Moritza Pascha w 1882 roku. Fakt, że sytuacja taka ma czasami miejsce, nie jest może szokujący, bo nietrudno wyobrazić sobie, że ktoś zapomni o jakimś dość istotnym aksjomacie, powodując, że teoria Γ pewnych własności modeli po prostu nie określa. Jak się później przekonamy, sytuacja jest dużo bardziej poważna, i nie chodzi tu tylko o nieuwagę przy doborze Γ .

Naszym celem jest teraz zrozumienie zależności pomiędzy dwiema relacjami konsekwencji: semantycznej \models oraz syntaktycznej \vdash . Po pierwsze, reguły, jakich używa się w konstrukcji dowodów matematycznych, są same w sobie poprawne, co daje nam następujące twierdzenie o poprawności.

Twierdzenie 1 (o poprawności). *Jeśli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Gamma \models \varphi$.*

Po drugie okazuje się, że zachodzi też twierdzenie odwrotne, wykazane przez Kurta Gödela w 1929 roku.

Twierdzenie 2 (o pełności). *Jeśli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$.*

Mówi ono, że jeśli pewna własność φ jest prawdziwa we wszystkich modelach danej aksjomatyki, to musi mieć pewien skończony dowód.

Powyższe twierdzenie daje nam dużą dozę optymizmu: o ile tylko teza φ , którą chcemy udowodnić, faktycznie wynika z przyjętych założeń Γ , to musi o tym zaświadczać pewien skończony dowód, który prędzej czy później znajdziemy. Optymizm ten jednak jest zwodniczy, o czym może świadczyć historia Geoga Cantora. Jednym z głównych obiektów jego badań była sformułowana przez niego w 1878 roku Hipoteza Continuum (ozn. φ_{CH}). Hipoteza ta mówi, że każdy podzbiór X liczb rzeczywistych jest albo przeliczalny (jego elementy daje się ponumerować liczbami naturalnymi), albo równoliczny ze wszystkimi liczbami rzeczywistymi (istnieje bijekcja pomiędzy X a \mathbb{R}). Cantor włożył ogromny wysiłek w próby wykazania lub obalenia tej hipotezy. Niestety nie udało mu się osiągnąć żadnego z tych celów, co podobno doprowadziło go do szaleństwa.

Z obecnej perspektywy badania Cantora można interpretować jako próby sprawdzenia, czy formuła φ_{CH} jest konsekwencją semantyczną przyjętej aksjomatyki teorii mnogości ZFC, czyli aksjomatyki Zermelo–Fraenkla wraz z aksjomatem wyboru (ozn. Γ_{ZFC}). Jak się okazało, porażka Cantora nie wynikała z braku jego pomysłowości. Najpierw, w 1940 roku, Kurt Gödel stworzył model \mathcal{M}_1 spełniający aksjomaty Γ_{ZFC} , w którym φ_{CH} zachodzi. Oznacza to, że $\Gamma_{ZFC} \not\models \neg\varphi_{CH}$, co tłumaczy, dlaczego Cantorowi nie udało się obalić Hipotezy Continuum. Problem ten zamknął Paul Cohen w 1963 roku, konstruując przy użyciu stworzonej przez siebie metody forcingu inny model, \mathcal{M}_2 , spełniający aksjomaty Γ_{ZFC} . W modelu tym Hipoteza Continuum jest fałszywa, co pokazuje,

Rozwiązania zadań z artykułu *O pewnej metodzie rozwiązywania równań „nierozwiązywalnych”*.

Zadanie 1.

$$xe^{\frac{x}{2}} = \sqrt{2},$$

$$\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x = 2W(1/\sqrt{2}).$$

Zadanie 2. Niech $y = 2 - x$. Wtedy $ye^y = e^2$ i stąd $y = W(e^2)$, czyli $x = 2 - W(e^2)$.

Podobnie rozwiązujemy **zadanie 3**, które jest ogólniejszą wersją zadania 2.

Zadanie 4. Postać równoważna równania

$$\ln x = a + \frac{b}{x}$$

to

$$\ln \frac{x}{e^a} = \frac{b}{e^a} : \frac{x}{e^a}.$$

Dalej dokonujemy przekształceń:

$$\ln \frac{x}{e^a} e^{\ln \frac{x}{e^a}} = \frac{b}{e^a},$$

$$\ln \frac{x}{e^a} = W(b/e^a),$$

$$x = e^{a+W(b/e^a)}.$$

*Nawet jeśli tych aksjomatów jest nieskończenie wiele! Słowo „konstruktywnie” należy tu rozumieć przez opis jakąś wspólną formułą lub – bardziej ściśle – przez możliwość ich enumerowania przez program komputerowy.

że $\Gamma_{ZFC} \not\models \varphi_{CH}$, czyli że aksjomaty ZFC nie są dość silne, by wykazać prawdziwość Hipotezy Continuum. Czyli hipoteza ta jest od nich niezależna!

Naturalną reakcją na przedstawiony powyżej obraz sytuacji jest stwierdzenie, że podobnie jak pięć aksjomatów Euklidesa było „za słabych”, pozwalając, by aksjomat Pascha był od nich niezależny, może również aksjomaty ZFC są po prostu „zbyt słabe”. Prowadzi to do pojęcia teorii *zupelnej*, czyli takiego zbioru formuł Γ , że dla każdej formuły φ zachodzi albo $\Gamma \models \varphi$, albo $\Gamma \models \neg\varphi$. Przykładem takiej teorii może być Γ' użyta w dowodzie twierdzenia 2, mogą być aksjomaty niepustego gęstego porządku liniowego bez elementu minimalnego ani maksymalnego (opisujące $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$) czy też aksjomaty ciała rzeczywiście domkniętego (opisujące $\langle \mathbb{R}, (+), (\cdot) \rangle$). Warto może dodać, że ostatni z wymienionych wyników był uzyskany przez Alfreda Tarskiego w 1931 roku.

Chcąc uniknąć problemów, na jakie natrafił Cantor, można by postulować, aby zamiast teorii ZFC przyjąć za podstawy matematyki jakąś silniejszą teorię, o której wiedzielibyśmy, że jest *zupelna*. Okazuje się, że wtedy moglibyśmy wręcz zautomatyzować proces sprawdzania prawdziwości formuł. Przecież skoro $\Gamma \models \varphi$ albo $\Gamma \models \neg\varphi$, to na mocy twierdzenia o pełności również $\Gamma \vdash \varphi$ albo $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Wystarczy więc generować kolejne napisy przypominające kształtem dowody i sprawdzać, czy przypadkiem dany napis nie jest dowodem, że φ lub że $\neg\varphi$. Wówczas po skończeniu wielu krokach musimy natknąć się na dowód jednego z tych dwóch faktów i wtedy wiemy, czy φ zachodzi!

Podstawowym ryzykiem wzmacniania rozważanych teorii jest to, że mogą stać się wewnętrznie sprzeczne: teoria Γ jest *sprzeczna*, jeśli daje się w niej udowodnić fałsz (ozn. \perp). Twierdzenia o poprawności i pełności pozwalają scharakteryzować teorie sprzeczne: $\Gamma \vdash \perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy Γ nie ma żadnego modelu (bo w każdym modelu \mathcal{M} zachodzi $\mathcal{M} \not\models \perp$). Oczywiście nie chcielibyśmy pracować w takiej teorii, gdyż nie opisuje ona żadnego modelu. W historii matematyki zdarzało się już, że proponowano sprzeczne rozszerzenia pewnych teorii: na przykład istnienie liczby kardynalnej Reinhardta (zaproponowane przez Williama Reinhardta w 1967 roku) okazało się sprzeczne z teorią ZFC; wykazał to Herbert Kunen w 1971 roku. Pokazuje to, że potrzebna jest spora ostrożność w szukaniu takich wzmocnień.

Niestety sytuacja nie jest tak prosta, jak moglibyśmy liczyć, i niezależnie od naszej ostrożności nie mamy szans na znalezienie *zupelnej* teorii stanowiącej podstawy matematyki. Wyjaśnia to drugie twierdzenie Kurta Gödla z 1931 roku.

Twierdzenie 3 (o niezupelności). *Jeśli teoria Γ jest dostatecznie silna, by zdefiniować w niej arytmetykę $\langle \mathbb{N}, (+), (\cdot) \rangle$, wszystkie aksjomaty Γ daje się konstruktywnie wyliczyć* oraz Γ jest niesprzeczna, to istnieje formuła ψ niezależna od Γ (czyli $\Gamma \not\models \psi$ oraz $\Gamma \not\models \neg\psi$).*

Dowód tego twierdzenia bazuje mocno na teorii obliczalności i możliwości zakodowania w rozważanej teorii paradoksu kłamcy – paradoksu, w którym pewien człowiek wypowiada zdanie: *mówiąc to zdanie, kłamie*. I, podobnie jak w przypadku tego paradoksu, tak skonstruowane zdanie nie może być ani prawdą, ani kłamstwem (fałszem). By powyższe kodowanie było wykonalne, konieczna jest możliwość mówienia w obrębie samej teorii o tym, czy potrafi ona czegoś dowieść. W szczególności można napisać formułę $\varphi_{CON(\Gamma)}$ wyrażającą fakt, że Γ jest niesprzeczna (czyli $\Gamma \not\models \perp$) – formuła ta mówi, że nie istnieje obiekt arytmetyczny, który koduje w sobie skończony dowód fałszu z aksjomatów w Γ . Jak się okazuje, za formułę ψ ze sformułowania twierdzenia 3 można przyjąć właśnie $\varphi_{CON(\Gamma)}$ – **oznacza to, że żadna dostatecznie silna teoria nie jest w stanie udowodnić ani obalić swojej własnej niesprzeczności!**

Warto może zauważyć, że twierdzenie 3 nie stoi w sprzeczności z faktem, że teoria ciał rzeczywiście domkniętych (opisująca model liczb rzeczywistych z dodawaniem i mnożeniem $\langle \mathbb{R}, (+), (\cdot) \rangle$) jest *zupelna* – teoria ta jest zbyt słaba, by wyróżnić spośród wszystkich liczb rzeczywistych liczby naturalne \mathbb{N} , więc nie spełnia pierwszego z założeń na temat Γ .

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na bogactwo słownictwa w języku polskim: dzięki rozróżnieniu słów *pełność* i *zupelność* dwa twierdzenia Gödla nazywają



się twierdzeniami o *pełności* i *niezupełności*. Sytuacja ma się inaczej w języku angielskim, gdzie twierdzenia te nazywają się *Gödel's completeness theorem* oraz *Gödel's incompleteness theorem*, sugerując, że Gödel zwiariował i raz udowodnił *completeness*, a kolejnym razem *incompleteness*.

Podsumowując, o ile w konkretnym modelu zachodzi albo $\mathcal{M} \models \varphi$, albo $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, to w przypadku teorii może się zdarzyć, że $\Gamma \not\models \varphi$ oraz $\Gamma \not\models \neg\varphi$. Co gorsze, wszystkie dostatecznie silne teorie mają takie zdania niezależne – pochodzą one od pomysłowego kodowania w danej teorii paradoksu kłamcy i wykorzystania narzędzi z teorii obliczeń. Oznacza to, że zawsze musimy się liczyć z tym, iż rozważana formuła może leżeć na tej „ziemi niczyjej”: nie da się jej ani udowodnić, ani obalić. Z drugiej strony, nasza sytuacja jest tak dobra, jak tylko w tych warunkach może być: jeśli tylko dana formuła φ jest konsekwencją Γ we wszystkich modelach, to prędzej czy później znajdziemy na to dowód.

Przez firankę, czyli jak odkryto pulsary

Aleksander SCHWARZENBERG-CZERNY*

* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika w Warszawie

Być może to właśnie z powodu braku jasnych światła Izaak Newton pisząc swe dzieło o optyce, opisał światło jako strumień cząsteczek. Interferencję można bowiem wytłumaczyć tylko opierając się na falowej naturze światła.

Gdy zapada zmrok i za oknem zapalają się światła, warto spojrzeć na odległą latarnię przez gęstą firankę lub półprzezroczystą zasłonę, rozpostartą oburącz prostopadle do kierunku widzenia. Obraz latarni rozpadnie się na konstelację światełek rozłożonych w kratkę, zorientowaną równoległe do nitki materiału. A teraz przysuwając jedną z rąk nieco bliżej twarzy ustawmy materiał skosem do kierunku patrzenia: światełka zaczynają się rozsuwać. Zaraz, zaraz, przecież (pionowe) nitki widziane pod kątem są ułożone bliżej, więc skąd rozsunięcie?

Dyfrakcja światła ze źródeł punktowych. Sinusoidalną falę światła, a dokładniej wektor pola elektrycznego E o amplitudzie E_0 , wygodnie jest przedstawić za de Moivre'em jako $E = E_0 e^{i\Phi} \equiv E_0(\cos \Phi + i \sin \Phi)$, gdzie faza fali Φ zależna od czasu t i położenia l w kierunku rozchodzenia się fali to $\Phi(t, l) = 2\pi(t/T - l/\lambda) \equiv \omega t - kl$. Stałe T i λ to okres i długość fali, $\omega = 2\pi/T$ i $k = 2\pi/\lambda$ to częstość kołowa i liczba falowa, a prędkość fali $c = \lambda/T = \omega/k$. Przez i oznaczamy urojoną jedność $i^2 = -1$ i tylko część rzeczywistą rozwiązania (niezawierającą i) traktujemy jako prawdziwą falę. Rozpatrzmy teraz N identycznych źródeł fali rozłożonych wzdłuż linii prostej w odstępach a . Jeśli oscylują one w fazie, ale patrzymy na nie z oddali pod kątem θ względem prostopadłej, to różnica drogi do obserwatora pomiędzy sąsiednimi źródłami będzie $l = a \sin \theta$, a odpowiednia różnica fazy to

$$(1) \quad \Phi_{n+1} - \Phi_n \equiv \phi = ka \sin \theta.$$

Zatem obserwowana suma pól elektrycznych to

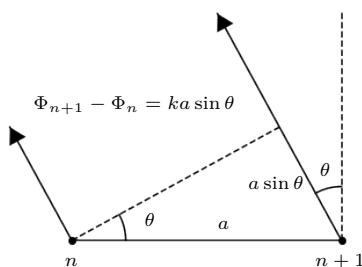
$$(2) \quad E = E_0 e^{i\Phi_1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi} = E_0 e^{i\Phi_1} \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}} = E_0 e^{i(\Phi_1 + N\phi/2 - \phi/2)} \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)},$$

gdzie Φ_1 to obserwowana faza pierwszego źródła. Obliczając sumę, skorzystaliśmy ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego. Łatwo go również wykazać indukcyjnie, bowiem po dodaniu kolejnego wyrazu i sprowadzeniu do wspólnego mianownika dostaniemy wyrażenie dla $N + 1$ źródeł. Przyjmując za jednostkę natężenie pola dla $\theta = \phi = 0$, otrzymujemy

$$(3) \quad I_1(\theta) = \frac{\sin^2(N\phi/2)}{N^2 \sin^2(\phi/2)} \xrightarrow[N a \equiv D = \text{const}]{N \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\Delta\Phi/2)}{(\Delta\Phi/2)^2} \equiv I_2(\theta).$$

Funkcja I_1 opisuje natężenie światła w obrazie dyfrakcyjnym od N spójnych (zgodnych w fazie) źródeł, na przykład za układem wąskich szczelin oświetlonych światłem lasera lub odległej lampy. Dla $\phi \approx 0$ sinusy można zastąpić ich argumentami i widać, że natężenie osiąga maksimum główne $I_1(0) = 1$. Graniczny rozkład I_2 po prawej stronie odpowiada dążącej do nieskończoności liczby źródeł $N \rightarrow \infty$ umieszczonych w przedziale o ustalonej szerokości $\text{const} = D \equiv Na$, czyli przy a i θ dążących do 0. Sinus w mianowniku można wtedy zastąpić jego argumentem: oznaczając różnicę skrajnych faz $\Delta\Phi \equiv N\phi = Nka \sin \theta = kD \sin \theta$,

O użyteczności wzoru de Moivre'a świadczy m.in. poniższa regułka, pozwalająca zapamiętać wzory trygonometryczne dla sumy kątów: $\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = e^{i\alpha + i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)$. Porównanie osobno części rzeczywistej i urojonej daje wspomniane wzory.



Z wzoru de Moivre'a wynika też $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin \alpha$. Obserwator nie rejestruje jednak pola elektrycznego E , a natężenie promieniowania proporcjonalne do uśrednionego po czasie kwadratu rzeczywistej części pola $I \sim \langle (\text{Re } E)^2 \rangle$. Skoro po czasie $T/4$ rzeczywista i urojona część Φ zamieniają się rolami, to $\langle (\text{Re } E)^2 \rangle = \langle (\text{Im } E)^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |E|^2 \rangle = \text{const}$, gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że moduł jedynego czynnika zmiennego w czasie to $|e^{i\omega t}|^2 = 1 = \text{const}$ z jedynki trygonometrycznej.

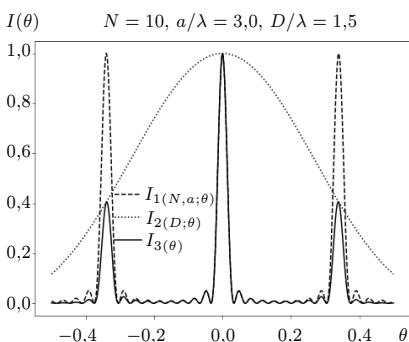
otrzymujemy wynik dla I_2 . Przykładem może być granica dla N stykających się szczelin, czyli otwór o szerokości D . Z I_2 i $\Delta\Phi = 0$ wynika maksimum główne o wysokości 1 i szereg *maksimów pobocznych* o szybko malejącej wysokości.

Wzór (3) dla skończonego N pokazuje też, że wartości I_1 powtarzają się z okresem 2π , zatem kolejne maksima główne, odpowiadające na ekranie jasnym prążkom dyfrakcyjnym, pojawiają się dla faz $\phi_m \equiv ka \sin \theta = m2\pi$, $|m| = 0, 1, 2, \dots$, gdzie m jest nazywane *rzędem maksimum*. Jeśli $ka/(2\pi) = a/\lambda \gg 1$, to dla $|m| \ll a/\lambda$ prążki dyfrakcyjne pojawiają się dla tak małych θ , że $\sin \theta \approx \theta$, a ich położenia odpowiadające kątom $\theta_m \approx \phi_m/(ka) = 2\pi m/(ka) = m\lambda/a$ są rozmieszczone prawie w równych odstępach $\Sigma = \lambda/a$. Pomiędzy nimi jest $N - 1$ małych *maksimów pobocznych (wtórnych)* rozdzielonych kolejnymi zerami licznika, o natężeniu szybko malejącym w miarę oddalania się od maksimum głównego. Szerokość maksimów głównych określona odległością sąsiednich zer licznika wynosi $\sigma = 2\lambda/(Na) = 2\lambda/D$. Dla $m \gtrsim a/(3\lambda)$ zmiany $\sin \theta$ są mniejsze od zmiany kąta, i układ prążków zaczyna się wyraźnie rozciągać. Analogiczne rozważania stosują się do pojedynczego otworu o szerokości D , w szczególności szerokość maksimum głównego jest też $\sigma = 2\lambda/D$.

W praktyce nie ma idealnych źródeł punktowych, jeśli jednak rozmiar d źródła jest dość mały, $d \ll a/m$, to różnica faz promieniowania z jego różnych punktów jest znacznie mniejsza niż 2π , a ich wkłady dodają się prawie w tej samej fazie. Ponadto, o ile takimi źródłami mogą być dosyć wąskie szczeliny, to by zapewnić zgodność fazy, trzeba je oświetlić prawie płaską falą padającą z dokładnie prostopadłego kierunku, np. spójnym światłem lasera. Jeśli jednak układ szczelin o szerokości $D = Na$ oświetla lampa o rozmiarze L umieszczona w odległości R , to różnica skrajnych kątów padania jest około $\alpha \approx (L + D)/R$. Światło lampy jest praktycznie spójne, o ile w stożku o kącie rozgarcia α fala kulista różni się od płaskiej o mniej niż $\lambda/2$, czyli

$$\lambda/2 > R - R \cos(\alpha/2) = R(1 - (1 - \alpha^2/8 + \dots)),$$

korzystając z rozwinięcia cosinusa dla małych kątów, skąd dalej $R > (L + D)^2/(4\lambda)$. Jeśli lampa jest większa lub znajduje się bliżej, czyli ostatnia nierówność nie jest spełniona, to światło pochodzące od różnych szczelin nie będzie w fazie, co spowoduje dodatkowe równomierne oświetlenie ekranu, a w skrajnym wypadku całkowicie zakłóci prążki interferencyjne.



Przykład rozkładu prążków na ekranie

Zgubiony czynnik 2π w nieoznaczoności $\Delta x \Delta p_x = h/2$ u nas wynika z innej niż u Heisenberga definicji niepewności: tu jej miarą jest łatwiejsza do wyznaczenia maksymalna szerokość prążka (100% natężenia w nim), a u Heisenberga rozrzut 1σ jest mniejszy, bo obejmuje tylko 68% natężenia wokół centrum prążka.

A co się stanie, jeśli prawie płaska fala od lampy pada pod kątem β na płaszczyznę szczelin? Wtedy wystarczy we wzorze (1) zastąpić $\sin \theta$ przez $\sin \theta - \sin \beta$, wskutek czego obraz prążków na ekranie przesunie się tak, by zerowej różnicy faz odpowiadał kąt $\theta = \beta$. Natomiast zmieni się odstęp między prążkami, bowiem teraz ze zmianą $\delta\theta$ sinus zmienia się wolniej z kątem, co formalnie można zapisać, różniczkując $|\sin' \beta \delta\theta| = \cos \beta |\delta\theta| < |\delta\theta|$. Prościej jednak zauważyć, że identyczne przesunięcie faz uzyskamy, ustawiając szczeliny w płaszczyźnie prostopadłej do oświetlenia przez lampę i gęściej, w odległości $a \cos \beta$, tj. takiej jak ich pozycje rzutowane na płaszczyznę prostopadłą do wiązki światła lampy. Odpowiada to powiększonej separacji obrazów interferencyjnych $\Sigma(\beta) = \lambda/(a \cos \beta) > \Sigma(0)$, co wyjaśnia obserwacje zza ustawionej skośnie firanki. Trzeba tylko zauważyć, że zamiast śledzenia prążków wzdłuż ekranu nieruchome oko obserwatora widzi prążki od kolejnych układów nitek widzianych pod rosnącym kątem θ . Takie ewolucje prążków można objaśnić, jedynie odwołując się do dyfrakcji i interferencji fal.

Dyfrakcja na otworach i zasada nieoznaczoności. Jak wiadomo, światło wykazuje naturę zarówno falową, jak i cząsteczkową. Planck zauważył, że widmo promieniowania w równowadze termicznej da się wyjaśnić, przyjmując, że światło transportuje energię w porcjach $E = h\nu = hc/\lambda$, gdzie h to stała Plancka. Potwierdził to Einstein, wskazując, że w zjawisku fotoelektrycznym pojedyncze elektrony są wybijane z oświetlonej fotokatody, ale tylko gdy energia porcji światła (zwana fotonem lub kwantem) przekracza energię wiązania elektronu W w materiale, czyli dla $h\nu > W$. Jak jednak fala może być cząstką? Nieporozumienie bierze się z wyobrażenia światła jako fali płaskiej $E_0 e^{i\Phi}$. Taka fala jest nieskończona, a zatem nierealistyczna: przy stałym natężeniu niesłaby nieskończoną ilość energii. Rzeczywiste źródła światła mają skończoną energię – w przypadku światła to mogą być pojedyncze atomy. Wysyłają one zatem porcję światła w skończonym czasie, $\tau \sim 10^{-8}$ s, i o skończonej energii. Analogicznie po wrzuceniu do stawu kamienia do odległej trzcinki dociera paczka kilku/kilkudziesięciu grzbietów i potem fala zanika. Podobnie proszę sobie wyobrazić kwant światła. Jaki jest zatem związek z cząstkami? Mechanika kwantowa poucza, że nie można *równocześnie* wyznaczyć z dowolną dokładnością położenia x i odpowiedniej składowej pędu cząstki p_x , bowiem ich niepewności spełniają warunek $\Delta x \Delta p_x \geq h/(4\pi)$. Położenie fali/fotonu przechodzącego przez układ szczelin jest określone z dokładnością $\Delta x = \pm D/2$. A co wiadomo o jego pędzie? Energia cząstki to w ogólnym przypadku $E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$. Foton jest cząstką bezmasową (masa spoczynkowa $m = 0$), zatem $E = pc$, czyli $p = E/c = h/\lambda$. Jednocześnie kierunek fali za szczelinami ma rozrzut kątowy $\sigma/2 = \pm \lambda/D$. Odpowiada to niepewności kierunku wektora p wynikającego z rozrzutu jego poprzecznej składowej $\Delta p_x = p\sigma/2 = (h/\lambda)(\lambda/D) = h/D$. Mamy zatem $\Delta x \Delta p_x = (D/2)(h/D) = h/2$.

A co się stanie, jeśli w przypadku (3) szczeliny są szerokie? Wtedy natężenie prążków I_1 będzie dodatkowo modulowane natężeniem każdej ze szczelin w tym

kierunku:

$$(4) \quad I_3(\theta) = I_2(\theta)I_1(\theta) = \frac{\sin^2(\Delta\Phi/2)}{(\Delta\Phi/2)^2} \frac{\sin^2(N\phi/2)}{N^2 \sin^2(\phi/2)}.$$

Kontrolą poprawności może być rozpatrzenie pustego otworu: układu szerokich szczelin o odstępach równym ich szerokości, czyli dla $\Delta\Phi = \phi$. Wzór (4) przekształca się na wzór (3) dla I_2 , ale – jak należało oczekiwać – dla różnicy faz $\Delta\Phi = N\phi$ odpowiadającej szerokości D całego otworu. W przypadku układu prostopadłych szczelin, takiego jaki tworzą nitki, musimy wprowadzić dwa kąty w prostopadłych kierunkach, θ i η , i uwzględnić modulację w obu kierunkach: $I_4(\theta, \eta) = I_3(\theta)I_3(\eta)$.

W szczególnym wypadku dużego kwadratowego otworu o boku d równoległa wiązka znacznie się rozbiega pod kątem $\sigma = 4\pi/(kd) = 2\lambda/d$, co determinuje rozdzielczość kątową obrazu tworzonego przez optykę za taką przesłoną. Jeśli, jak w teleskopach i kamerach, otwór jest okrągły, o średnicy d , kąt rozbieżności będzie większy, bo nie cała szerokość daje pełny wkład do obrazu interferencyjnego. Obraz interferencyjny to centralne koło i otaczające je pierścienie, opisywane odpowiednią funkcją Bessela, a rozdzielczość obrazu to $\sigma \approx 2,44\lambda/d$ rad.

Wzór (2) można też zapisać jako

$$(5) \quad E(\mathbf{k}) = E_0 e^{i\Phi_0} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\Phi_n - \Phi_0)} = E_0 \sum_{\mathbf{r}} \Theta(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

gdzie $\Phi_n = \mathbf{k}\mathbf{r}_n - \omega t$, \mathbf{r}_n to wektor położenia n -tego źródła, a \mathbf{k} jest wektorem falowym o długości $k = 2\pi/\lambda$ i kierunku ku obserwatorowi pod kątem θ do prostopadłej do płaszczyzny źródeł. Korzystając z takiej definicji, można za pomocą komputera obliczyć wartość sumy dla dużej liczby źródeł rozmieszczonych w jednym lub dwóch wymiarach. Jeśli są one rozmieszczone gęściej niż w odległości λ , to w przybliżeniu pokażą obraz interferencji światła równomiernie oświetlającego jeden lub kilka otworów skończonej wielkości. W drugiej równości (5) funkcja Θ przyjmuje wartości 0 lub 1, gdy wektor \mathbf{r} wskazuje, odpowiednio, przesłonę lub otwór/źródło. W tym drugim przypadku sumując, zakładamy, że \mathbf{r} przebiega gęsto rozłożone wartości w całej płaszczyźnie szczelin czy otworów, przybliżając całkę po tej płaszczyźnie.

Sposoby wykorzystania dyfrakcji i interferencji światła. Przy stałym kierunku oświetlenia zmiana długości fali λ również spowoduje przesunięcie kierunku maksimum interferencyjnego. Właśnie tak działają siatki dyfrakcyjne rozszczepiające światło na barwy, podobnie jak pryzmaty. Zaletą siatek jest bardziej równomierne rozszczepienie (rozdzielczość) w różnych barwach. By uzyskać wysoką rozdzielczość (małą szerokość maksimumów), astronomowie używają siatek o rozmiarach sięgających 30 cm \times 80 cm, pracując w wysokich rzędach m dochodzących do kilkudziesięciu (gdzie m jest rzędem maksimum). Wtedy jednak widma sąsiednich m o podobnych długościach fal nakładają się na siebie. By tego uniknąć, stosuje się drugi element nieco rozszczepiający wiązkę światła poprzecznie do siatki, co powoduje ułożenie widm dla kolejnych m jak wiersze w książce. Taki kształt widma odpowiada współczesnym detektorom elektronicznym i np. w części optycznej umożliwia pokrycie dużego zakresu, od 0,4 nm (kolor niebieski) do 0,8 nm (bliska podczerwień) przez widmo obejmujące około 40 rzędów, przy detektorze o boku 4000 pikseli, rozciągające się na 160 000 pikseli.

Typowa kamera telefonu ma otwór o średnicy rzędu 1 mm. W świetle widzialnym o $\lambda = 0,55 \cdot 10^{-6}$ m jej rozdzielczość dyfrakcyjna to $\sigma \approx 0,0013$ rad ≈ 4 minuty kątowe. W przypadku typowego telefonu matryca o boku 4000 pikseli i polu widzenia kamery rzędu 30 stopni daje rozmiar kątowny piksela 0,45', zatem dyfrakcja istotnie ogranicza jakość obrazu. W przypadku teleskopu Hubble'a o średnicy 2,5 m, obserwującego w analogicznej długości fal, odpowiada to 0,1'', podczas gdy atmosfera zwykle ogranicza rozdzielczość nawet największych teleskopów ziemskich do 1'', co odpowiada rozszczepieniu wiązki światła wskutek obecności konwekcyjnych wirów na niespójne wiązki światła o średnicy rzędu 25 cm. Astronomowie (oraz wojskowi podglądający satelity z Ziemi) poprawiają więc obrazy za pomocą aktywnej optyki. Analogiczne wzory stosują się dla fal biegnących w odwrotnym kierunku, wystarczy tylko w nich

Jak interferencja działa w dwóch wymiarach, można obejrzyć na obrazkach, uruchamiając program w Pythonie do pobrania z users.camk.edu.pl/alex/papers/siatka.tgz.

Druga równość w (5) sugeruje zatem, że w dalszej odległości za szczelinami pole elektryczne można wyrazić przez 2-wymiarową transformatę Fouriera funkcji położenia Θ , a odpowiednie natężenie światła, czyli kwadrat jej wartości bazwzględnej, to widmo mocy w 2 wymiarach.

Ruchy powietrza zniekształcają obraz gwiazd (również ich widma spektroskopowe). Aby poradzić sobie z tym problemem, astronomowie w czasie obserwacji dużymi teleskopami wykorzystują tzw. „optykę adaptatywną” – dostosowują kształt lustera teleskopu do obserwowanych zniekształceń, korygując (wyostrzając) w ten sposób obraz obserwowanej gwiazdy. Odpowiednie zniekształcenie lustera oblicza się, obserwując wiązkę lasera wyrzuczoną specjalnie w tym celu w niebo. Tworzy ona na niebie sztuczną gwiazdę, którą obserwujemy za pomocą teleskopu. Doskonale wiemy, jak taka „laserowa gwiazda” powinna wyglądać. Dlatego astronomowie są w stanie wskazać zniekształcenia spowodowane przez drgania powietrza i na tej podstawie odpowiednio dostosować zwierciadło teleskopu, aby im przeciwdziałać.



Rozwiązanie zadania M 1671.

$$1 = \left[\sqrt{\sqrt{4}} \right],$$

$$2 = \sqrt{4},$$

$$3 = -[-\sqrt{4!!}],$$

$$4 = 4,$$

$$5 = -[-\sqrt{4!}],$$

$$6 = - \left[- \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(4!)!}}}}} \right],$$

$$7 = 4!! - \left[\sqrt{\sqrt{4}} \right],$$

$$8 = 4!!,$$

$$9 = 4!! + \left[\sqrt{\sqrt{4}} \right],$$

$$10 = \left[\sqrt{(-[-\sqrt{4!}])!} \right],$$

$$11 = - \left[- \sqrt{(-[-\sqrt{4!}])!} \right],$$

$$12 = \frac{4!}{\sqrt{4}},$$

$$13 = 4!! - [-\sqrt{4!}],$$

$$14 = \left[\sqrt{\sqrt{(4!!)!}} \right],$$

$$15 = - \left[- \sqrt{\sqrt{(4!!)!}} \right],$$

$$16 = 4 \cdot 4,$$

$$17 = - \left[- \sqrt{\sqrt{\sqrt{4!}} \cdot (-[-\sqrt{4!}])!} \right],$$

$$18 = \left[\sqrt{((-[-\sqrt{4!}])!) \cdot (-[-\sqrt{4!}])!} \right],$$

$$19 = \left[\sqrt{(4!!)!} \right],$$

$$20 = - \left[- \sqrt{(4!!)!} \right].$$

Czy wystarczy jedna czwórka?

Zmieniając elektronicznie opóźnienie fazowe od anten, można zmieniać kierunek antenowych listków, nie oglądając się na obrót Ziemi. Tak właśnie działają nadawcze i odbiorcze anteny radarów z przełączaniem fazy. W odróżnieniu od dawnych czas są one płaskie. Największe nieruchome anteny do śledzenia pocisków balistycznych miały 150 m wysokości i 700 m szerokości.

zmienić znak czasu. Taka rozdzielczość to jednak wciąż za mało, by zmierzyć średnice kątowe gwiazd. W obserwatoriach Paranal w Chile i Mauna Kea na Hawajach sumuje się zatem światło z wielu teleskopów odległych od siebie o $D \sim 100$ m i rejestruje powstały obraz interferencyjny. Taki obraz odpowiada interferencji światła przechodzącego przez szczeliny w odległości D , zatem pozwala poprawić dyfrakcyjną rozdzielczość kątową największych teleskopów o czynnik co najmniej 10. Podobnie jak poprzednio, z powodu niestabilności atmosfery procedurę trzeba powtarzać wielokrotnie w każdej sekundzie i dopiero uśrednienie wielu takich obrazów daje rozdzielczość wynikającą z dyfrakcji/interferencji. W ten sposób zmierzono średnice kilkudziesięciu gwiazd.

Z uwagi na obrót Ziemi przesunięcie fazowe między teleskopami ulega zmianie, zatem kumulując wyniki otrzymane w ciągu kilku godzin, dostajemy obrazy dyfrakcyjne z kilkudziesięciu różnych pozycji teleskopów, tak jakbyśmy obserwowali przez dwuwymiarową przesłonę z kilkudziesięcioma otworami. W ten sposób dla największych gwiazd (np. Betelgezy, α Ori) poprzez komputerowe „odkręcenie” obrazu dyfrakcyjnego można także uzyskać obraz oświetlającego źródła (odpowiedni algorytm to odwrotna transformata Fouriera w dwóch wymiarach). Taki sposób obserwacji nazywa się syntezą apertury. Teleskopy biorące udział w obserwacjach nie zbierają więcej światła, ale uzyskana pełniejsza informacja o przesunięciach fazowych daje rozdzielczość obrazu taką jak dla lustra o rozmiarze porównywalnym z D . Jakość ostatecznego obrazu zależy od stopnia wypełnienia obszaru powierzchni prostopadłej do kierunku źródła przez rzuty kolejnych położań teleskopów na tę powierzchnię.

Interferencja fal radiowych. Gdy jednak obserwator jest daleko od franki, widzi tylko to promieniowanie, które pada na ekran w wąskim zakresie θ , czyli albo maksimum, albo prawie nic, w zależności od jego położenia względem prążków interferencyjnych. Nawet niewielkie przesunięcie źródła oświetlającego szczeliny o kąt σ spowoduje, że jego jasny obraz w maksimum zniknie. Jeśli oświetlenie pochodzi od kosmicznego źródła radiowego, to szczeliny można zastąpić dipolowymi antenami odbiorczymi, a interferencję uzyskać w układzie elektrycznym sumującym odbierane oscylacje napięcia. Ponieważ przewody od anten będą różnej długości, należy je połączyć poprzez elektroniczne układy opóźniające, tak by sumować sygnały w zgodnej fazie. Właśnie tak został zaprojektowany radioteleskop IPS, zbudowany w 1967 roku w Cambridge jako dwuwymiarowa siatka 4096 dipoli czułych w długości fali 3,5 m, rozmieszczonych na polu o powierzchni 1,6 ha. Gdy radioteleskop ten obracał się wraz z Ziemią, kierunki odpowiadające kilkunastu kolejnym maksimum interferencji (tzw. listki antenowe) omiały większość nieba, rejestrując kolejne kosmiczne źródła. Jego aparatura przeznaczona do rejestracji szybkiej scyntylacji plazmy międzygwiazdowej zarejestrowała pierwszy pulsar radiowy (CP 1919, teraz oznaczony PSR B1919+21), z okresem impulsu 1,337 sekundy i szerokością impulsu 0,04 sekundy. Odkryte później pulsary mają okresy nawet kilkaset razy krótsze. Jeśli za regularny sygnał odpowiada rotacja, to każda „normalna” gwiazda, nawet tak niewielka jak biały karzeł (promień ~ 5000 km), zostałaby rozerwana przez siłę odśrodkową, zatem detekcja pulsarów była w istocie odkryciem gwiazd neutronowych o masie nieco większej od Słońca, ale promieniu zaledwie ~ 10 km.

Drgania fali światła są tak szybkie, że żadna elektronika za nimi nie nadąży, zatem syntezę apertury trzeba przeprowadzać, sumując interferujące wiązki światła w czasie rzeczywistym. Fale radiowe oscylują natomiast znacznie wolniej, zatem można po prostu wielokrotnie w każdym cyklu rejestrować natężenie zmiennego pola elektrycznego w antenie, o ile dysponujemy zegarem o stabilności lepszej niż okres fali w całym czasie obserwacji. Stosując zegary atomowe, można takie obserwacje prowadzić przez kilka tygodni za pomocą radioteleskopów na różnych kontynentach. Dopiero w dedykowanych komputerach, tzw. korelatorach, dodaje się zarejestrowane oscylacje pola elektrycznego i aplikuje transformatę Fouriera, co dla $D \sim 10\,000$ km i $\lambda \sim 10$ cm pozwala na sporządzenie obrazów radiowego nieba z rozdzielczością $\sigma \approx 0,005''$. Niedawno opublikowany pierwszy w historii obraz czarnej dziury M87* został sporządzony właśnie w ten sposób, dla mikrofal radiowych $\lambda = 1,3$ mm.

Wiriom

Wirusologia jest integracją wielu nauk, zadziwiającą dla wiedzących i przerażającą dla niepoinformowanych.

Zacznijmy zatem od definicji wirusa. Wirusami nazywamy wewnątrzkomórkowe pasożyty zawierające materiał genetyczny DNA lub RNA, otoczony płaszczem białkowym, czasem błoną. Wirusom brak umiejętności syntezy białek i błon. Bytujące w żywych organizmach tworzą ich wiriom. Wiemy o wirusach coraz więcej, czemu sprzyja współczesna pandemia. Są wszędzie, we wszystkich gatunkach, w ogromnych ilościach: w 1 litrze przybrzeżnej wody morskiej znajduje się więcej wirusów bakteryjnych niż ludzi na planecie. Uważa się, że całe życie ziemskie jest uwarunkowane trwaniem wirusów, ponieważ są wiodącą siłą w cyklach geochemicznych i biologicznych. Nie wiemy, „jak się zaczęły”, to dziwne twory – żywe, gdy w komórkach, martwe poza nimi. Hipoteza „świata RNA”, pierwotnych nośników informacji genetycznej, dopuszcza powstawanie wirusów na bardzo wczesnych etapach narodzin życia. Znamy od wielu lat pojęcie *mikrobiom*, w szczególności ludzki. To zespół mikroorganizmów mieszkających w naszym ciele. Długo nie zauważanych, potem utożsamianych z zagrożeniem. To miliardy bakterii, drożdży, głównie w przewodzie pokarmowym lub na skórze. Część z nich jest nawet niezbędna dla zachowania zdrowia. Nie tak dawno, wraz z rozwojem i przyspieszeniem badań genomów, dowiedzieliśmy się, że ludzkie ciało dopuszcza do koegzystencji, nie zawsze wrogiej, także wirusy.

Wirusy wolne lub kolonizujące nasze bakterie (bakteriofagi) to nasz wiriom. Na człowieka przypada blisko 380 bilionów wirusów, czyli 10 razy więcej niż bakterii. Wiele wirusów przechodzi przez nas (np. wirusy roślinne w pożywieniu), część nazwałabym „stacjonarnymi”, istniejącymi, ale bez naruszania naszego zdrowia. Strukturalnie kompetentne wirusy nosimy w jamie ustnej, jelitach, na skórze, w układzie oddechowym, w moczu i krwi, także w płynie mózgowodzeniowym, w płynie stawowym, w mleku. Niemowlęta zaczynają „gromadzić” swój wiriom zaraz po narodzinach, z wiekiem jego skład stabilizuje się. Najczęściej mamy świadomość istnienia wirusów chorobotwórczych. Nic dziwnego: na wirusowe choroby dolnego układu oddechowego (2017 rok, przed pandemią) umierało rocznie na świecie ponad 2 mln ludzi, na AIDS 0,9 mln, na wirusowe zapalenie wątroby typu B – 126 tysięcy. Według aktualnych danych (23 lutego) dotyczących koronawirusa na świecie zakażonych zostało około 112 mln osób, zmarło około 2,5 mln, nieco ponad 2%.

Wirusy są bardzo różnorodne pod względem rozmiarów, kształtów, składu molekularnego, gospodarzy i cykli życiowych. Ten, który staje się składnikiem naszego wiriomu, pozostanie w nim na zawsze: nie można się wyleczyć z choroby wirusowej (co powszechnie wiadomo np. w przypadku opryszczki). Wirusy replikują materiał genetyczny według jednego z siedmiu wzorców. Wszystkie cykle replikacji muszą osiągnąć etap mRNA, wykorzystywanego dalej dzięki **komórkowemu** mechanizmowi syntezy białka. Tu je mamy!

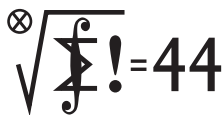
Ta intymna relacja komórek i wirusów skutkowałą w przeszłości łączeniem się obu genomów, czego ślady znajdujemy i obserwujemy do dziś. Są współczesne wirusy (np. HIV), które w cyklu życiowym przechodzą etap włączenia swojego DNA do DNA komórki ludzkiej. DNA wirusowy może trwać i replikować razem z genomowym. W określonych warunkach DNA

wirusa zostaje wycięty i rozpoczyna się cykl infekcyjny. Może dojść do pomyłek i np. fragment genomu wirusa pozostanie trwale w genomie gospodarza albo też wirus „przenosząc” się do nowej komórki, zabiera ze sobą fragment genomu gospodarza. Łatwo to było wykazać na przykładzie bakteriofagów, kiedy fag przenosi do nowej bakterii gen nadający jej odporność na antybiotyki. Transfery fragmentów genomów wpłynęły w ciągu milionów lat na ewolucję genomów i gatunków. Obecnie genom ludzki niesie w sobie około 8% sekwencji DNA, dziś nieaktywnego, kiedyś należącego do wymarłych już wirusów. Do integracji zapewne dochodziło przed uformowaniem się gatunku *Homo sapiens*.

Wiriony różnych części ciała tego samego człowieka różnią się składem, za to około 25% podobieństwa znajduje się u osób niespokrewnionych, ale razem mieszkających (wspólne miejsca kontaktów, łazienki, kuchnie). Istotnie – choć nie wiadomo jeszcze dlaczego – różnią się wiriony mężczyzn i kobiet. Układ immunologiczny zdrowego człowieka ogranicza i kontroluje liczbę wirusów; u pacjentów przyjmujących leki immunosupresyjne liczebność wirusów wzrasta. Może to prowadzić do współistnienia zakażeń bakteryjnych i wirusowych. Widzimy to w obecnej pandemii, z często towarzyszącym bakteryjnym zapaleniem płuc, zdarza się też jednoczesne wystąpienie grypy (wirus). Czy można by wykorzystać wirusy dla naszego pożytku? Dziś na ten temat wiemy niewiele. Nadzieje terapeutyczne budzą bakteriofagi towarzyszące ludzkim bakteryjnym patogenom (zamiast terapii antybiotykami). Ostrożni badacze głoszą, że gdybyśmy nauczyli się panować nad szkodliwymi dla człowieka wirusami, to być może moglibyśmy odkryć nowe terapeutyczne układy kilkuskładnikowe... Tymczasem, w obliczu wirusowej pandemii, taki cel wydaje się odległy i na pewno nie najpilniejszy do realizacji.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2021

Zadania z matematyki nr 819, 820

Redaguje Marcin E. KUCZMA

819. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkątów o boku 1. Rozważamy ciągi kolejno przyległych trójkątów, z których żaden nie powtarza się (trójkąty przyległe mają wspólny bok).

(a) Wyznaczyć największą możliwą liczbę trójkątów w takim ciągu.

(b) Czy i jak zmieni się wynik, jeśli dodatkowo zażądamy, by ostatni trójkąt przylegał do pierwszego?

820. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich a, b, c :

$$\frac{a^2}{b^2 + bc} + \frac{b^2}{c^2 + ca} + \frac{c^2}{a^2 + ab} \geq \frac{3}{2}.$$

Zadanie 820 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2020

Przypominamy treść zadań:

811. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma tę własność, że każda z funkcji $g(x) = xf(x)$ oraz $h(x) = 2f(2x) - f(x)$ ma granicę 0 przy $x \rightarrow 0$. Czy stąd wynika, że także funkcja f ma granicę 0 przy $x \rightarrow 0$?

812. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ iloczyn $\prod_{k=2}^n (2^k - 2)$ dzieli się przez $n!$.

811. Odpowiedź: tak. *Dowód:* dla $x \neq 0$ niech $H(x)$ oznacza kres górny wartości $|h(t)|$, gdy $0 < |t| \leq |x|$. Skoro $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, zatem także $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 0$. Z określenia funkcji g i h wynika związek $g(2t) - g(t) = th(t)$. Dlatego

$$g(x) = \sum_{k=1}^n \left(g\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - g\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) + g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{x}{2^k} h\left(\frac{x}{2^k}\right) + g\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

dla każdej liczby naturalnej n . Jasne, że $|h(x/2^k)| \leq H(x)$ dla $k \geq 1$. Tak więc

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |x| \cdot H(x) + \left| g\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq |x| \cdot H(x) + \left| g\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|$$

dla $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Przy ustalonym $x \neq 0$ przechodzimy z n do nieskończoności i otrzymujemy oszacowanie $|g(x)| \leq |x| \cdot H(x)$, słuszne dla wszystkich $x \neq 0$. Podzielenie przez $|x|$ daje nierówność $|f(x)| \leq |H(x)|$. Stąd teza.

812. Niech $v_p(N)$ oznacza wykładnik potęgi, w jakiej liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu liczby naturalnej N . Dany w treści zadania iloczyn oznaczmy W_n . Do uzyskania tezy zadania wystarczy pokazać, że $v_p(W_n) \geq v_p(n!)$ dla każdej liczby pierwszej p .

Ustalmy liczbę pierwszą p . Jeżeli $p \geq 3$, to na mocy małego twierdzenia Fermata dzieli ona różnicę $2^{p-1} - 1$. Jest zatem (dla $j = 1, 2, 3, \dots$) dzielnikiem liczby $(2^{p-1})^j - 1$, więc także i jej dwukrotności, czyli liczby $2^{pj-j+1} - 2$. Liczby tej ostatniej postaci są czynnikami iloczynu definiującego W_n , gdy $pj - j + 1 \leq n$, czyli dla $j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{p-1} \rfloor$. Wobec tego

$$(1) \quad v_p(W_n) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor$$

dla każdej liczby pierwszej $p \geq 3$. Jest to również prawda dla $p = 2$, bowiem wówczas prawa strona (1) to $n - 1$, zaś W_n jest iloczynem $n - 1$ liczb parzystych.

Niech m będzie największym wykładnikiem, dla którego $p^m \leq n$. Oszacowanie wartości $v_p(n!)$ uzyskamy przez sekwencję zależności (w której początkowa równość to *wzór Legendre'a* – dobrze znany, a przy tym nietrudny do wykazania):

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^m \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^m \frac{n}{p^i} = \frac{n}{p} \cdot \frac{1-p^{-m}}{1-p^{-1}} = \frac{n-np^{-m}}{p-1} \leq \frac{n-1}{p-1}.$$

Stąd wniosek, że

$$(2) \quad v_p(n!) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor.$$

Nierówności (1) i (2) składają się na dowodzoną tezę $v_p(W_n) \geq v_p(n!)$. To kończy rozwiązanie zadania.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 805 ($WT = 1,61$) i 806 ($WT = 1,80$) z numeru 9/2020

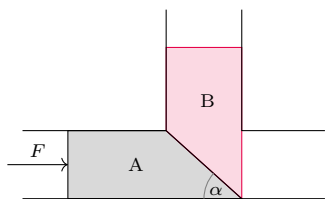
Janusz Olszewski	Warszawa	46,84
Marek Spychała	Warszawa	46,39
Tomasz Wietecha	Tarnów	45,86
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Jerzy Cisło	Wrocław	33,45

Nowicjuszem nie jest (!) żaden z trzech Panów: Janusz Olszewski (po raz 21), Marek Spychała (po raz 3), Tomasz Wietecha (po raz 13). Pięknie! Tak dalej! Serdecznie gratulujemy!

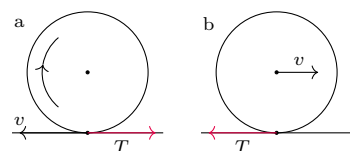
Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2021



Rys. 1



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 702 ($WT = 2,1$), 703 ($WT = 2,53$), 704 ($WT = 2,1$) i 705 ($WT = 2,53$) z numeru 9/2020 i 10/2020

Krzysztof Magiera (Łosiów)	4 – 44,73
Michał Koźlik (Gliwice)	4 – 42,82
Tomasz Rudny (Poznań)	41,38
Jan Zambrzycki (Białystok)	2 – 39,65
Tomasz Wietecha (Tarnów)	14 – 37,15
Ryszard Woźniak (Kraków)	31,46
Jacek Konieczny (Poznań)	31,33
Konrad Kapcia (Częstochowa)	1 – 27,95
Aleksander Surma (Myszków)	4 – 27,75
Sławomir Buć (Myszków)	26,74
Piotr Adamczyk (Warszawa)	25,98
Mateusz Kapusta (Wrocław)	25,37
Paweł Perkowski (Ożarów)	23,98

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Zadania z fizyki nr 716, 717

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

716. Sztabka A może poruszać się w przewodnicy poziomej, a sztabka B w przewodnicy pionowej (rys. 1). Ścianki przewodnic są idealnie gładkie. Płaszczyzna styku sztabek nachylona jest do poziomu pod kątem α , a współczynnik tarcia między sztabkami wynosi μ . Jaka pozioma siła należy przyłożyć do sztabki A, aby wprowadzić ją w ruch? Masa sztabki B jest równa m .

717. Do ogrzewania budynku wykorzystywane jest ciepło oddawane przez pracujący silnik cieplny. Silnik ten napędza chłodziarkę, która pobiera ciepło od wód gruntowych i również ogrzewa wodę w kaloryferach. Jaka jest maksymalna sprawność takiego cyklu ogrzewczego, jeżeli temperatura w kotle silnika cieplnego wynosi $t_1 = 210^\circ\text{C}$, temperatura wody w kaloryferach równa jest $t_2 = 60^\circ\text{C}$, a wody gruntowe mają temperaturę $t_3 = 10^\circ\text{C}$?

Rozwiązania zadań z numeru 12/2020

Przypominamy treść zadań:

708. Na poziomej szorstkiej powierzchni znajdują się dwa jednakowe cienkościennie, puste w środku walce, których osie są równoległe. Jeden walec spoczywa, drugi toczy się w jego kierunku bez poślizgu z prędkością v . Następuje zderzenie sprężyste (tarcie między walcami podczas zderzenia można zaniedbać). Współczynnik tarcia między walcami i powierzchnią wynosi μ . Jaka jest największa odległość między walcami po zderzeniu?

709. Statek kosmiczny oddala się radialnie od Ziemi z prędkością $v = 3c/5$ (c – prędkość światła w próżni). Ze statku nadawana jest audycja radiowa. Czas nadawania audycji w studio na statku $\tau = 30$ min. Jak długo trwa odbiór audycji na Ziemi?

708. Natychmiast po zderzeniu toczący się walec straci prędkość ruchu postępowego, zachowując prędkość kątową ruchu obrotowego (rys. 2a), a spoczywający walec uzyska prędkość ruchu postępowego v (rys. 2b). Na oba walce zacznie działać siła tarcia $T = \mu mg$ (m jest masą walca). Walce zaczną poruszać się z poślizgiem. Ich równania ruchu postępowego i obrotowego są jednakowe: $ma = \mu mg$, $mR^2\epsilon = \mu mgR$, gdzie R jest promieniem walca. Prędkość ruchu postępowego walca lewego rośnie, a jego prędkość ruchu obrotowego maleje: $v_1 = at = \mu gt$, $\omega_1 = \omega - \epsilon t = v/R - \mu gt/R$. Zacznie on toczyć się bez poślizgu po czasie t_0 , gdy spełniony będzie warunek $v_1 = \omega_1 R$, stąd $t_0 = v/2\mu g$, $v_1(t_0) = v/2$. W czasie t_0 lewy walec przebędzie drogę $s_1 = v^2/8\mu g$. Do czasu rozpoczęcia ruchu bez poślizgu prędkość ruchu postępowego walca prawego maleje, a jego prędkość kątowa rośnie. Rozumując analogicznie jak poprzednio, otrzymujemy, że po takim samym czasie t_0 walec prawy rozpocznie ruch bez poślizgu z taką samą prędkością $v/2$ i przebędzie drogę $s_2 = 3v^2/8\mu g$. Maksymalna odległość między walcami wynosi

$$s_2 - s_1 = v^2/4\mu g.$$

709. Przyjmijmy, że w chwili startu obserwatorzy na Ziemi i kosmonauci zsynchronizowali swoje zegarki, uznając tę chwilę za zerową. Oznaczmy przez t'_1 i t'_2 czasy rozpoczęcia i zakończenia nadawania audycji według kosmonautów. Wtedy $\tau = \Delta t' = t'_2 - t'_1$. Jest to czas własny tego procesu, bo na statku wszystko dzieje się w jednym miejscu. Czas nadawania audycji według obserwatora na Ziemi jest dłuższy:

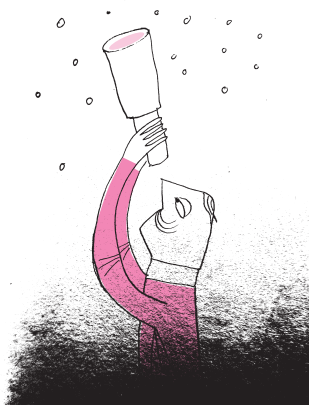
$$(*) \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \Delta t' / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Z punktu widzenia obserwatora na Ziemi audycję rozpoczęto nadawać w chwili t_1 , gdy statek znajdował się w odległości $x_1 = vt_1$ od Ziemi. Sygnał początkowy dotarł do Ziemi z opóźnieniem vt_1/c , sygnał końcowy z opóźnieniem vt_2/c . Czas odbioru audycji na Ziemi wynosi więc

$$\tau_x = \Delta t + vt_2/c - vt_1/c = \Delta t (1 + v/c).$$

Po podstawieniu (*) otrzymujemy

$$\tau_x = \tau (1 + v/c) / \sqrt{1 - v^2/c^2} = \tau \sqrt{(c+v)/(c-v)} = 60 \text{ min.}$$



Prosto z nieba: Wyjątkowy Układ Słoneczny?

Układ Słoneczny z ośmioma planetami (i Plutonom – pamiętamy!) oraz stabilną gwiazdą centralną jest z pewnością wyjątkowy z naszego subiektywnego punktu widzenia – jest w końcu naszym domem i najlepiej poznanym miejscem we Wszechświecie. Jak jednak różni się od innych układów planetarnych, odkrywanych obecnie praktycznie regularnie przez teleskopy satelitarne i naziemne (obecna liczba potwierdzonych egzoplanet to około 5000)? Jeśli w Drodze Mlecznej znajduje się około 100 miliardów gwiazd, to z oszacowań wynika, że istnieje w niej około miliarda układów planetarnych, czyli mniej więcej tyle samo planet w ekosferze („strefie zamieszkiwalnej”, umożliwiającej istnienie wody w stanie ciekłym). Oczywiście jest ogromna różnica pomiędzy umiejscowieniem danej planety w ekosferze a istnieniem na niej cywilizacji z rozwiniętą technologią.

Z badań naukowców z Instytutu Nielsa Bohra w Kopenhadze wynika, że nasz Układ na tle 1000 innych odkrytych do tej pory jest nieczęsto spotykaną konfiguracją, ale jednocześnie ma wiele zwyczajnych i często obserwowanych cech. Okazuje się między innymi, że istnieje korelacja pomiędzy liczbą planet w układzie a mimośrodem ich orbit. Planety powstają jako niewielkie (rozmiaru przeciętnego księżycy) zagęszczenia w chmurze protoplanetarnego gazu i pyłu poruszające się po orbitach kołowych. W nieco dłuższej skali czasowej poprzez oddziaływanie grawitacyjne zyskują coraz bardziej ekscentryczne orbity. Oznacza to również, że dochodzi do zderzeń, a planety zwiększają swoje masy. Jeżeli w wyniku zderzeń powstanie jedna lub niewiele planet, to pozostają one na orbitach eliptycznych. Jeżeli jednak powstanie dostatecznie wiele planet, grawitacyjne przyciąganie pomiędzy nimi spowoduje, że ich orbity stopniowo stracą mimośród.

Osiem planet w Układzie Słonecznym, poruszających się po niemal kołowych orbitach, to dość rzadki przypadek – tylko 1% wszystkich zbadanych układów słonecznych ma taką samą lub większą liczbę planet. W naszym Układzie jest również stosunkowo dużo ciężkich planet gazowych (Jowisz, Saturn, Uran i Neptun). Wydaje się, że obecność gazowych olbrzymów może być związana z warunkami sprzyjającymi życiu na mniejszych planetach „wewnętrznych”. Rozważania na temat warunków życia w ekosferze wiążą się z pytaniem, czy i jak efektywnie duże planety przekierowywały wodonośne komety na Ziemię we wczesnych etapach rozwoju Układu Słonecznego, umożliwiając następnie powstawanie życia. Z drugiej strony wiadomo, że Jowisz stanowi całkiem efektywną tarczę antykometarną, ściągając w swoje pole grawitacyjne obiekty przybywające z rubieży układu. Mimo wielu wątpliwości stwierdzone podobieństwa do innych układów planetarnych (1% z miliarda to jednak nie tak mało...) pozostawiają nas w nadziei, że być może nie jesteśmy sami.

Michał BEJGER

N. Bach-Møller et al., „Orbital eccentricity–multiplicity correlation for planetary systems and comparison to the Solar system”, MNRAS 500, 1, 1313–1322 (2021).

Niebo w kwietniu

W czwartym miesiącu roku **Słońce** kontynuuje szybką wędrówkę na północ i w trakcie miesiąca zwiększa wysokość górowania o kolejne 10°. W końcu kwietnia Słońce przebywa nad horyzontem już przez 15 godzin. Wraz z czasem trwania zmierzchu i świtu oznacza to, że na obserwacje innych ciał niebieskich pozostaje jakieś 6 godzin, w tym niewiele ponad 4 godziny nocy astronomicznej. W kwietniu Słońce pokonuje wzdłuż ekliptyki ponad 28°, przechodząc od środka zodiakalnej części Ryb do środka zodiakalnej części Barana.

Księżyc rozświetli swoją luną przede wszystkim koniec miesiąca, w jego drugiej dekadzie zaś przejdzie przez now. Co prawda Srebrny Glob zacznie kwiecień

w sporej fazie 84%, ale znajdzie się wtedy na pograniczu gwiazdozbiorów Wagi i Skorpiona, a potem odwiedzi najbardziej na południe wysuniętą część swojej orbity. Dodatkowo przejdzie wtedy na południe od ekliptyki, co jeszcze bardziej obniży jego wysokość nad widnokregiem, a w następstwie – czas przebywania na nieboskłonie. W rezultacie jeszcze przed ostatnią kwadrą, którą Księżyc osiągnie 4 kwietnia w południe naszego czasu, Srebrny Glob zacznie pojawiać się na niebie grubo po północy, wznosząc się do świtu na wysokość co najwyżej trochę ponad 10°. W tym początkowym okresie warto zwrócić uwagę na trzy zjawiska: przejście Księżyca (w fazie 76%) 4° od Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy

Skorpiona (to zjawisko można podziwiać 2 kwietnia), zbliżenie się Księżyca w fazie 53% na 1° do Nunki, jednej z jaśniejszych gwiazd Strzelca (4 kwietnia) oraz przejście naturalnego satelity Ziemi w fazie cienkiego sierpa (odpowiednio 32% oraz 22%) 6° na południe od planet Saturn i Jowisz (6 i 7 kwietnia). W przypadku spotkania z Nunki później dojdzie do jej zakrycia przez Księżyc, niestety w trakcie dnia. Natomiast spotkania z dwiema największymi planetami Układu Słonecznego są o tyle trudne do obserwacji, że obie planety oraz Księżyc pojawiają się na niebie niedługo przed wschodem Słońca: o świcie Księżyc pokaże się na wysokości zaledwie 5° przy spotkaniu z Saturnem i 2° przy spotkaniu z Jowiszem. A zatem do ich obserwacji potrzebny jest odsłonięty widnokrąg i przejrzyste powietrze.

Same planety **Saturn** i **Jowisz** wędrują w tym roku przez gwiazdozbiory Koziorożca i Wodnika, gdzie tworzą parę o rozpiętości około 13° . W przeciwieństwie do zeszłego roku tym razem to Jowisz jest na wschód od Saturna. Stąd na wiosnę największy wpływ na ich warunki obserwacyjne ma wciąż niekorzystne nachylenie ekliptyki do porannego widnokręgu. I mimo tego, że Słońce oddaliło się już na około 70° od Jowisza i ponad 80° od Saturna, to obie planety nie pokażą się wyżej niż 10° nad horyzontem, wschodząc tuż przed świtem. W kwietniu Jowisz zwiększy jasność do $-2,2^m$ oraz średnicę swojej tarczy do $37''$. Natomiast Saturn świeci blaskiem $+0,7^m$, a jego tarcza ma średnicę $17''$.

Zupełnie inaczej jest po nowiu. Księżyc spotka się ze Słońcem 12 kwietnia o świcie i już półtorej doby później, wieczorem 13 kwietnia, można próbować go dostrzec nisko nad zachodnim widnokręgiem. Wieczorem ekliptyka nadal tworzy duży kąt z linią horyzontu i Księżyc szybko rozgości się po zmierzchu, już kilka dni po nowiu wznosząc się na sporą wysokość. 13 kwietnia godzinę po zachodzie Słońca Srebrny Glob zajmie pozycję na wysokości 2° , prezentując tarczę w fazie 2%. Odrobinę na lewo od niej, w odległości 3° , znajdzie się planeta Uran, ale ze względu na jasne tło nieba pozostanie ona niewidoczna aż do następującego zachodu. Po spotkaniu ze Słońcem ostatniego dnia miesiąca **Uran** przejdzie na niebo poranne, ale tam (ze względu na niekorzystne nachylenie ekliptyki i skracającą się noc) wyłoni się z zorzy porannej dopiero w lipcu, gdy oddali się na ponad 40° od Słońca.

W połowie miesiąca, 15 kwietnia, sierp Księżyca w fazie 12% przejdzie między Plejadami a Hiadami, natomiast 17 kwietnia tarcza Księżyca w fazie 26% zajdzie 4° od planety **Mars**. Wcześniej Srebrny Glob zakryje Czerwoną Planetę, lecz szczęście do możliwości obserwacji zjawiska uśmiechnie się jedynie do mieszkańców Indochin oraz Indonezji. Natomiast w trzeciej dekadzie kwietnia Mars przejdzie do gwiazdozbioru Bliźniąt i skończy miesiąc $2,5^\circ$ na północ od pary gwiazd 3. wielkości Tejat Prior (η Gem) i Tejat Posterior (μ Gem). Bardzo blisko wspomnianej pary gwiazd Słońce przebywa w okolicach przesilenia letniego.

Do końca miesiąca jasność Marsa spadnie do $+1,6^m$, a jego tarcza skurczy się poniżej $5''$. Jak widać, nie jest on atrakcyjnym celem dla posiadaczy nawet sporych teleskopów.

Księżyc powędruje dalej i 20 kwietnia przejdzie przez I kwadrę, odwiedzając wtedy gwiazdozbiór Raka i przechodząc $2,5^\circ$ na północ od jasnej gromady gwiazd M44. Dwa dni później, mając tarczę oświetloną w 76%, Księżyc przejdzie w połowie drogi między Regulusem, najjaśniejszą gwiazdą Lwa, a planetoidą (4) Westa. Ta ostatnia w marcu przeszła przez opozycję, natomiast w kwietniu zmieni kierunek ruchu na prosty, zakreślając pętlę $34'$ od świecącej z jasnością $+5,5^m$ gwiazdy 51 Leonis. Sama planetoida świeci blaskiem około $+7^m$, czyli wyraźnie jaśniej od niewidocznego teraz **Neptuna**. To oznacza jednak, że do jej odszukania potrzebna jest lornetka albo teleskop. Oczywiście bliskość bardzo jasnego Księżyca uniemożliwi obserwacje planetoidy i należy je wykonywać, gdy jest on daleko od niej.

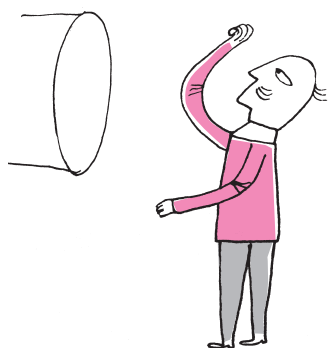
Rankiem 27 kwietnia Srebrny Glob przejdzie przez pełnię na pograniczu gwiazdozbiorów Panny i Wagi, jakieś 11° na wschód od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. Natomiast 29 kwietnia znowu czeka Księżyc spotkanie z jasnymi gwiazdami Skorpiona. Jednak jego faza 95% znacznie utrudni ich obserwacje.

Bardzo jasna w kwietniu jest długookresowa gwiazda zmienna R Hydrae, która według Amerykańskiego Towarzystwa Obserwatorów Gwiazd Zmiennych (AAVSO) 18 kwietnia osiągnie maksimum swojego blasku. Jest to gwiazda z klasy miryd, która zmienia blask od $+3,5^m$ do $+10,9^m$ z okresem 380 dni. Jeśli gwiazda zbliży się do swojej maksymalnej jasności, będzie dobrze widoczna gołym okiem. R Hya odszukać o tyle łatwo, że znajduje się 12° prawie dokładnie na południe od jasnej Spiki. Dodatkowo zaledwie $2,5^\circ$ na zachód od niej znajduje się gwiazda 3. wielkości γ Hya, z którą w okresie maksimum aktywności można porównywać jej jasność i która może służyć jako wskazówka do szukania swojej zmiennej sąsiadki.

Co roku w kwietniu maksimum swojej aktywności osiągają meteory z roju **Lirydów**. Ów rój jest aktywny w drugiej połowie miesiąca z maksimum w okolicach 22 kwietnia. Są to średnio szybkie meteory, zderzają się z naszą atmosferą z prędkością 49 km/s, a w maksimum można spodziewać się mniej więcej 20 zjawisk na godzinę. Zdarzają się jednak lata, gdy jest ich ponad 90. Radiant roju znajduje się około 8° na południowy zachód od Wagi, najjaśniejszej gwiazdy Lutni, i na początku nocy astronomicznej dopiero się wznosi, lecz na jej koniec (po godzinie 2) zajmuje pozycję na wysokości prawie 70° . Niestety w tym roku maksimum przewiduje się na popołudnie naszego czasu, a dodatkowo w obserwacjach Lirydów przeszkodzi Księżyc po I kwadrze, który wędruje wtedy przez gwiazdozbiór Lwa, zachodząc tuż przed świtem.

Ariel MAJCHER

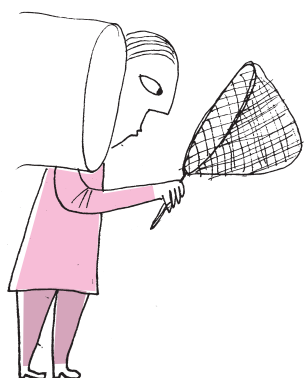
Anomalie umierają po cichu



Przed czterema laty pisałem w *Delcie* (Δ_{17}^3) o niewyjaśnionym zjawisku nadmiernej produkcji pewnego rodzaju par elektron-pozyton w rozpadach wzbudzonych jąder berylu w węgierskim laboratorium Atomki. Zdaniem autorów eksperymentu ich wynik był przekonującym argumentem na rzecz istnienia nowych cząstek. Okazało się jednak [1], że wystarczyło w przewidywaniach teoretycznych uwzględnić poprawki wyższego rzędu elektrodynamiki kwantowej, aby usunąć powody do wzbudzania fizyków kibicujących odkrywaniu nowych, fundamentalnych cząstek tłumaczących anomalie niskoenergetycznych eksperymentów.

W ciągu ostatniego roku pożegnaliśmy się też z liczącą sobie ponad dwie dekady anomalią zaobserwowaną w akceleratorze LEP w CERN (poprzedniku obecnie działającego akceleratora LHC, który zderzał elektrony i pozytony). Głosiła ona, że prawdopodobieństwo rozpadu bozonu W na mion i neutrino mionowe jest ze sporym prawdopodobieństwem mniejsze niż prawdopodobieństwo rozpadu na taon i neutrino taonowe, mimo że model standardowy przewiduje, iż prawdopodobieństwa te są równe. Najnowsze wyniki z akceleratora LHC wskazują jednak, że ta anomalia była najprawdopodobniej wynikiem fluktuacji statystycznej, na podobieństwo wyrzucenia dziesięciu orłów w dziesięciu rzutach symetryczną monetą.

Czasem pewne nieoczekiwane obserwacje doświadczalne nie są po prostu „zabijane” jednym sztychem – nowym, lepszym eksperymentem lub wyjaśnieniem teoretycznym – ale powoli przykrywa je warstwa nowych faktów, i po pewnym czasie odchodzą w zapomnienie, stając się co najwyżej ciekawostkami z historii nauki. Wydaje się, że stało się to już z anomalią zaobserwowaną na początku stulecia przez zespół eksperymentu LSND, polegającą na wykryciu antyneutrino elektronowych w wiązce antyneutrino mionowych w laboratorium w Los Alamos. Przy energiach badanych cząstek rzędu gigaelektronowolta i odległości między źródłem cząstek a detektorem rzędu kilometra taki wynik był niezgodny z modelem standardowym cząstek elementarnych i sugerował istnienie czwartego – poza elektronowym, mionowym i taonowym – rodzaju neutrino. Pozwalałoby to interpretować wynik LSND jako podwójną oscylację, czyli przemianę antyneutrino mionowego w czwarte hipotetyczne antyneutrino, które z kolei zmieniałoby się w antyneutrino elektronowe. Aby zweryfikować te rezultaty, w Fermilabie skonstruowano układ doświadczalny MiniBooNE, w którym badane są neutrino zamiast antyneutrino. Znowu zaobserwowano nadmiar, tym razem neutrino elektronowych.



Tylko że nikt już nie wierzy w istnienie czwartego rodzaju neutrino. Przeprowadzony w CERN i Gran Sasso eksperyment OPERA wykluczył w 2013 roku większość wartości parametrów opisujących owe hipotetyczne nowe neutrino. Ponadto obserwowane przez LSND i MiniBooNE (anty)neutrino elektronowe nie mogą powstawać z niczego: na każde pojawiające się (anty)neutrino elektronowe jedno (anty)neutrino mionowe musi zniknąć. Znikanie to zostało bardzo dokładnie zbadane przez zespoły eksperymentów MINOS i IceCube, co w rezultacie praktycznie wykluczyło omawianą interpretację wyników MiniBooNE. Co więcej, takie nowe neutrino mogłoby być produkowane w rozpadach β trytu – badanych w eksperymencie KARMEN w Karlsruhe. Jednak uzyskane przez zespół tego eksperymentu wyniki w zasadzie wykluczają taką możliwość.

Można zaryzykować twierdzenie, że obecnie większość badaczy uważa, że wyniki LSND i MiniBooNE są efektem jakiegoś błędu doświadczalnego. Jakiego?

Tego, być może, nie dowiemy się nigdy, gdyż powtórzenie takiego eksperymentu jest bardzo poważnym przedsięwzięciem finansowym i organizacyjnym, które zapewne nie miałyby szans na sfinansowanie przez agencje grantowe.

Błądzić jest rzeczą ludzką. A każda omyłka w odkrywaniu praw przyrody, popełniona wskutek niedoskonałości doświadczeń lub okrutnych żartów praw statystyki, staje się – dzięki zasadom metody naukowej – źródłem nowych badań i dyskusji pozwalających lepiej zrozumieć te prawa.

Krzysztof TURZYŃSKI

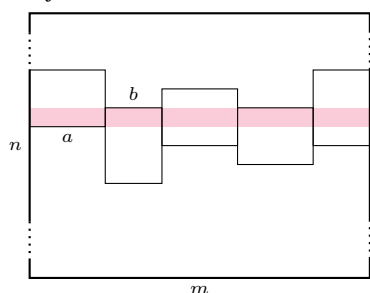
- [1] A. Alekseevs, S. Barkanova, Yu. G. Kolomensky, B. Sheff, *A Standard Model Explanation for the "ATOMKI Anomaly"*, arXiv:2102.01127.
- [2] ATLAS Collaboration, *Test of the universality of τ and μ lepton couplings in W -boson decays from $t\bar{t}$ events with the ATLAS detector*, arXiv:2007.14040.
- [3] MiniBooNE Collaboration, *Significant Excess of ElectronLike Events in the MiniBooNE Short-Baseline Neutrino Experiment*, Phys. Rev. Lett. **121**, 221801 (2018).



Zachęcam Czytelnika do zapoznania się z artykułem *Kolorowe szachownice* autorstwa Anny Hoduń, który ukazał się w gazetce *Kwadrat*, nr 13 (gazetka znajduje się na stronie internetowej OMJ). Są w nim opisane standardowe metody rozwiązywania zadań dotyczących podziału pewnych figur na inne. Niniejszy odcinek *kacika* inspirowany jest pracą *Nie tylko kolorowe szachownice*, którą dwa lata temu napisała moja uczennica, Klaudia Tarabasz. W tej pracy pokazane są inne metody rozwiązywania takich zadań, a jedną z nich jest stosowanie kongruencji.

Dla przypomnienia: zapis $a \equiv b \pmod{n}$ oznacza, że a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez n . Opiszę tu dwa motywy związane z podziałami i kongruencjami.

Motyw 2



Motyw 1. Figurę mającą N pól chcemy podzielić na figury mające a i b pól. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $N = ax + by$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych x i y , które są liczbami wykorzystanych figur pierwszego i drugiego rodzaju. Warunkiem koniecznym rozwiązalności takiego równania jest podzielność $\text{NWD}(a, b) \mid N$. Z tego równania wynikają kongruencje $ax \equiv N \pmod{b}$ oraz $by \equiv N \pmod{a}$, dzięki którym dowiemy się czegoś o x i y . Analogicznie można postąpić, jeżeli jest więcej rodzajów figur.

Motyw 2. Przypuśćmy, że szachownicę $m \times n$ można podzielić na prostokąty o wymiarach $a \times b$. Niech $a \geq b$. Prostokąty, które mają wysokość b i szerokość a , nazwijmy poziomymi, a pozostałe – pionowymi. Ponumerujmy wiersze szachownicy liczbami od 1 do n , z góry na dół. Niech x_i oznacza liczbę tych poziomych prostokątów, których najwyżej położone pola znajdują się w i -tym wierszu. W k -tym wierszu znajduje się po a pól każdego z prostokątów poziomych, mających górne pola w wierszach o numerach $k, k-1, \dots, k-b+1$, oraz po b pól prostokątów pionowych, przez które ten wiersz przechodzi (rysunek). Wobec tego dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ zachodzi kongruencja

$$a(x_k + x_{k-1} + \dots + x_{k-b+1}) \equiv m \pmod{b},$$

przy czym $x_i = 0$ dla $i \leq 0$ oraz dla $i > n - b + 1$.

Warto zauważyć tu okresowość $x_{k+b} \equiv x_k \pmod{b}$ dla $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, którą otrzymamy, odjawszy dwie kolejne kongruencje stronami.

Jeżeli w podziale są figury innego rodzaju, to przez z_i oznaczmy liczbę pól i -tego wiersza zajętych przez te dodatkowe figury. Kongruencja dla k -tego wiersza wygląda wtedy następująco:

$$a(x_k + x_{k-1} + \dots + x_{k-b+1}) \equiv m - z_k \pmod{b}.$$

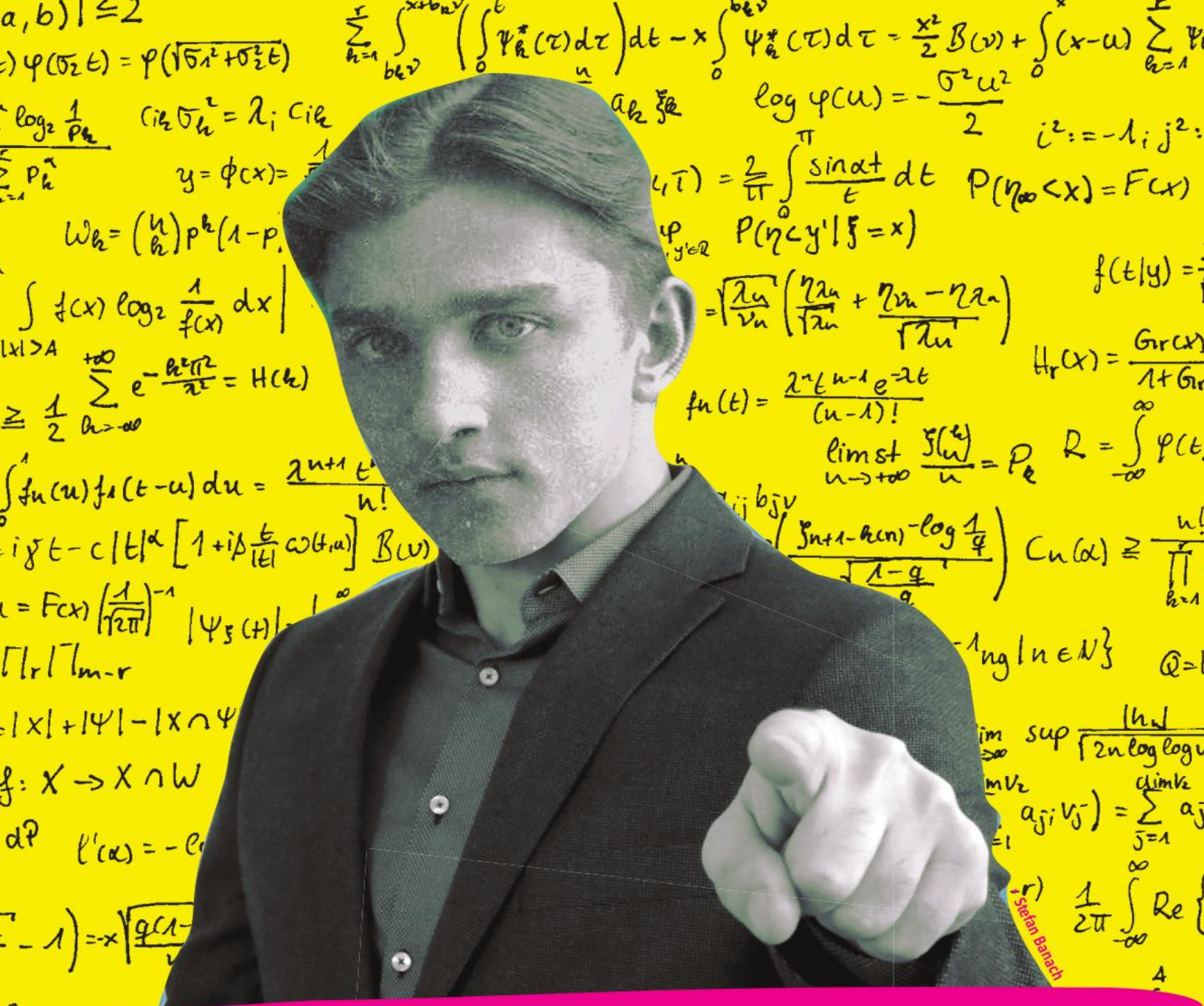
Można utworzyć cztery układy kongruencji tego typu – dla wierszy lub kolumn, rozpatrując prostokąty pionowe lub poziome. Dają one pewne informacje o liczbach figur w poszczególnych wierszach i kolumnach. Niektóre z tych układów prowadzą do sprzeczności – w tej sytuacji mamy dowód niemożliwości dokonania danego podziału.

Zadania

1. Kwadratową szachownicę podzielono na prostokąty 2×1 . Udowodnić, że liczba prostokątów zorientowanych pionowo jest parzysta.
2. Udowodnić, że szachownicy 10×10 nie można rozciąć na prostokąty 1×4 .
3. Uogólnić poprzednie zadanie – dowiedzieć, że jeśli prostokąt $n \times m$ można podzielić na prostokąty $a \times b$, przy czym $\text{NWD}(a, b) = 1$, to co najmniej jedna z liczb m, n dzieli się przez a i co najmniej jedna z liczb m, n dzieli się przez b .
4. Czy prostopadłościan $8 \times 9 \times 10$ można podzielić na prostopadłościany $2 \times 3 \times 3$?
5. Szachownicę 2018×2018 pokryto za pomocą jednej płytki kwadratowej 2×2 oraz pewnej liczby płytek prostokątnych 1×5 . Dowiedzieć, że płytka kwadratowa nie dotyka brzegu szachownicy.
6. Szachownicę 8×8 podzielono na prostokąty 1×3 i jeden kwadrat 1×1 . Na którym polu może znajdować się ten kwadrat?
7. Szachownicę 15×15 podzielono na kwadraty 2×2 i 3×3 . Wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę kwadratów 3×3 w tym podziale.

Wskazówki do zadań

1. Wstarczy zastosować jeden z układów kongruencji z motywu 2.
2. Postąpić podobnie jak w poprzednim zadaniu – wykażać, że liczby pionowych i poziomych prostokątów są parzyste.
3. Zastosować motyw 2. Potrzebne będą dwa układy kongruencji – dla prostokątów pionowych i pionowych.
4. Co się dzieje na ścianie 8×10 ?
5. Przypuśćmy, że to możliwe, i obróćmy szachownicę tak, by kwadrat 2×2 dotykał jej górnego boku. Układ kongruencji modulo 5 (motyw 2) jest sprzeczny.
6. Przypuśćmy, że kwadrat znajduje się w k -tym wierszu. W układzie kongruencji modulo 3 (motyw 2) zmieni się tylko k -ta kongruencja. Zauważać, że $xs \equiv k \pmod{3}$, więc $3 \mid k$, gdyż $xs = 0$. Analogicznie jest dla kolumn, więc ostatecznie możliwe są 4 pola. Łatwo sprawdzić, że odpowiednie podziały istnieją.
7. Niech x i y oznaczać, odpowiednio, liczbę kwadratów 2×2 i 3×3 . Z równości $4x + 9y = 225$ otrzymamy $y \equiv 1 \pmod{4}$, więc $y \in \{1, 5, 9, \dots\}$ (motyw 1). Stosując układ kongruencji modulo 2 dla kwadratów 3×3 w wierszach i kolumnach (motyw 2), dowodowo sprawdzimy, że jeśli $y \leq 5$, to $y = 5$ oraz każdy wiersz i każda kolumna przechodzi przez dokładnie jeden kwadrat 3×3 . Jednak wtedy jest problem z wypełnieniem pozostałego miejsca kwadratami 2×2 . Przykład dla $y = 9$ skonstruować łatwo.



WE WANT YOU!



WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

zaprasza na kierunki:

- Matematyka
- Informatyka
- Bioinformatyka i biologia systemów
- Międzykierunkowe Studia Ekonomiczno-Matematyczne
- Jednoczesne Studia Informatyczno-Matematyczne

www.mimuw.edu.pl/rekrutacja

