

deltam

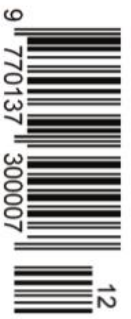
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \quad \pi=3,141592\dots$$

NR 12 (559) 2020

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%
PŁ ISSN 0137-2305 / NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

**Kwantowy
efekt Zenona
od kuchni**
str. 18



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 12 (559)

Odkryj wielołąk!


Jarosław Górnicki

Collect and Collapse: obszary zjonizowane a formowanie się gwiazd

Miguel Figueira

O liczbach autobiograficznych

Piotr Zarzycki, Ryszard Kubiak

 Zadania z matematyki

Nigdy Cię nie zobaczę?

Kamila Łyczek, Mariusz Skalba

 Zadania z fizyki

Co piszczy w... ciepłe?

Słów kilka o fononach

Anna Łapińska

Zjawiska SF

Marek W. Gutowski

 Trudne pytania

Magdalena Fikus

O Słońcu i gwiazdach „kwantowych”

Alex Schwarzenberg-Czerny

Kwantowy efekt Zenona od kuchni

Stanisław Sołtan

Klub 44

Prosto z nieba: Wszechświat na badaniu RTG. Czy pacjentowi coś dolega?

Niebo w grudniu

Aktualności

Nagroda Nobla z Fizyki

 Lemat o zwiększaniu wykładnika

p -adycznego

Bartłomiej Bzdęga

str. 1

str. 2

str. 4

str. 7

str. 8

str. 9

str. 10

str. 12

str. 15

str. 16

str. 18

str. 21

str. 22

str. 22

str. 24

str. 25

W kolejnym numerze: Zgaduj zgadula,
gdzie jest kwantowa kula?



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



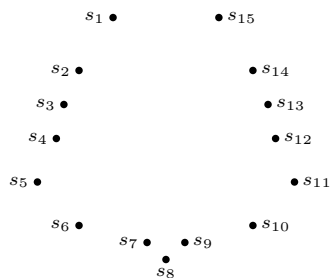
Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Odkryj wielokąt!

Jarosław GÓRNICKI*



Rys. 1

Punkty z rysunku 1, jako środki kolejnych boków wielokąta, kodują pewien obrazek. Czy potrafisz go odtworzyć? Spróbuj! Rozpatrzmy sytuację ogólną.

Problem. Czy (jak?, kiedy?) można odtworzyć wielokąt, gdy znamy środki jego kolejnych boków?

Rozpocniemy od prostego przypadku, gdy na płaszczyźnie dane są trzy różne punkty S_1, S_2, S_3 . Zbudujemy trójkąt $\triangle W_1W_2W_3$ taki, że punkty S_i są środkami jego boków. Pokażemy jednocześnie, że złożenie trzech (ogólnie nieparzystej liczby ≥ 3) symetrii środkowych jest symetrią środkową.

Gdy będzie to dla nas wygodne, na punkty płaszczyzny będziemy patrzeć jak na wektory zaczepione w początku układu współrzędnych (oznaczenia wektorów pomijamy).

Wybieramy na płaszczyźnie punkt \bar{W} różny od wszystkich punktów S_i . Symetryczne odbicie punktu \bar{W} względem punktu S_1 wyznacza punkt \bar{W}_1 , symetryczne odbicie punktu \bar{W}_1 względem S_2 daje punkt \bar{W}_2 , a symetryczne odbicie punktu \bar{W}_2 względem S_3 wyznacza punkt \bar{W}_3 (rys. 2). Takie przekształcenie płaszczyzny $\bar{W} \rightarrow \bar{W}_3$ jest symetrią środkową.

Istotnie, eliminując \bar{W}_1 i \bar{W}_2 z równań opisujących warunki symetrii

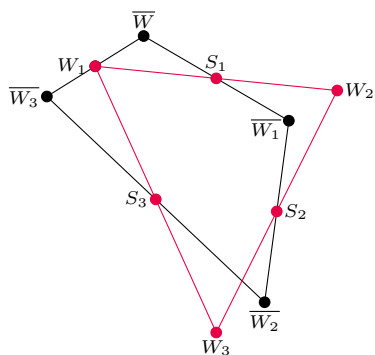
$$\bar{W}_1 = 2S_1 - \bar{W}, \quad \bar{W}_2 = 2S_2 - \bar{W}_1, \quad \bar{W}_3 = 2S_3 - \bar{W}_2,$$

otrzymujemy wzór $\bar{W}_3 = 2(S_1 - S_2 + S_3) - \bar{W}$, a stąd poszukiwany środek symetrii

$$\frac{\bar{W}_3 + \bar{W}}{2} = S_1 - S_2 + S_3.$$

Jako jedyny punkt stały przekształcenia $\bar{W} \rightarrow \bar{W}_3$, punkt $W_1 = \frac{1}{2}(\bar{W}_3 + \bar{W})$ jest jednym z wierzchołków trójkąta $\triangle W_1W_2W_3$, który łatwo wyznaczyć (rys. 2).

Rozumowanie to działa w przypadku każdej nieparzystej liczby różnych punktów $S_1, S_2, \dots, S_{2k+1}$ ($k \geq 1$) płaszczyzny, które są środkami kolejnych boków wielokąta. Proponujemy samodzielnie przeprowadzić tę konstrukcję dla punktów S_i z rysunku 1 – rozwiązanie (o świątecznym charakterze) na stronie 11.



Rys. 2

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy na płaszczyźnie dane są cztery różne punkty S_1, S_2, S_3, S_4 będące środkami kolejnych boków wielokąta. Pokażemy, że w tym przypadku złożenie symetrii środkowych jest translacją.

Wybieramy na płaszczyźnie punkt \bar{W} różny od każdego z punktów S_i . Symetryczne odbicie punktu \bar{W} względem punktu S_1 daje punkt \bar{W}_1 , symetryczne odbicie punktu \bar{W}_1 względem S_2 wyznacza punkt \bar{W}_2 , symetryczne odbicie punktu \bar{W}_2 względem S_3 daje \bar{W}_3 i wreszcie symetryczne odbicie punktu \bar{W}_3 względem S_4 wyznacza punkt \bar{W}_4 . Eliminując punkty $\bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{W}_3$ z warunków symetrii

$$\bar{W}_1 = 2S_1 - \bar{W}, \quad \bar{W}_2 = 2S_2 - \bar{W}_1, \quad \bar{W}_3 = 2S_3 - \bar{W}_2, \quad \bar{W}_4 = 2S_4 - \bar{W}_3,$$

otrzymujemy

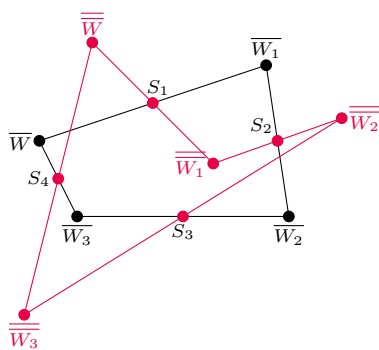
$$\bar{W}_4 = 2(S_4 - S_3 + S_2 - S_1) + \bar{W},$$

co oznacza, że przekształcenie płaszczyzny $\bar{W} \rightarrow \bar{W}_4$ jest translacją o wektor $2(S_4 - S_3 + S_2 - S_1)$. Gdy jest to translacja o wektor niezerowy, nie istnieje czworokąt, którego środki boków są zadanymi wcześniej punktami (gdyż jeden z wierzchołków tego czworokąta musiałby być punktem stałym wspomnianej translacji).

Równość $\bar{W} = \bar{W}_4$ (czyli istnienie czworokąta spełniającego warunki zadania) ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{S_2 + S_4}{2} = \frac{S_1 + S_3}{2},$$

czyli gdy środek odcinka łączącego punkty S_2 i S_4 pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego punkty S_1 i S_3 . Wówczas czworokątów spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele, punkt \bar{W} (lub \bar{W}), różny od każdego punktu S_i , możemy wybrać dowolnie (rys. 3).



Rys. 3



Rozumowanie to pozostaje prawdziwe dla dowolnej parzystej liczby różnych punktów płaszczyzny S_1, S_2, \dots, S_{2k} ($k \geq 2$) będących środkami kolejnych boków wielokąta. Odkryliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Edward Kasner, 1903). *Niech S_1, S_2, \dots, S_i ($i \geq 3$) będą różnymi punktami płaszczyzny, które są środkami kolejnych boków wielokąta.*

(a) *Jeżeli i jest liczbą nieparzystą ($i = 2k + 1$, $k \geq 1$), to istnieje dokładnie jeden wielokąt $W_1W_2 \dots W_i$ taki, że*

$$(*) \quad S_j = \frac{1}{2}(W_j + W_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad \text{gdzie } W_{i+1} = W_1.$$

(b) *Jeżeli i jest liczbą parzystą ($i = 2k$, $k \geq 2$), to wielokąt $W_1W_2 \dots W_i$ spełniający warunek (*) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $S_1 + S_3 + \dots + S_{2k-1} = S_2 + S_4 + \dots + S_{2k}$.*

Punkt (b) geometrycznie oznacza, że zbiory punktów S_j o indeksach nieparzystych oraz parzystych mają ten sam środek ciężkości. Wówczas takich wielokątów jest nieskończenie wiele i dowolny punkt płaszczyzny różny od punktów S_j może pełnić rolę wierzchołka W_1 .

Powyższe uwagi nie wyczerpują zagadnienia. Rozważania można prowadzić, rozpatrując dla $i \geq 4$ „wieloboki przestrzenne”.

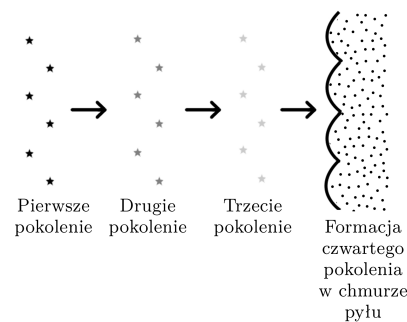
Opisana sytuacja to prosta ilustracja działania skończonych szeregów Fouriera, ogólniej – analizy harmonicznej, która z małego zbioru informacji stara się odtworzyć ogólniejsze zjawisko. Czasem można to zrobić bardzo precyzyjnie, innym razem tylko w ogólnym zarysie, a czasem jest to niemożliwe.

Collect and Collapse: obszary zjonizowane a formowanie się gwiazd

Miguel FIGUEIRA*

* Adiunkt, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Gwiazdy typu OB to gorące, masywne gwiazdy widmowe typu O (hiperolbrzymy o temperaturze powierzchni 25 000–50 000 K i masach $>16 M_\odot$) lub wczesnego typu B (jasne, masywne, 2,1–16 M_\odot , olbrzymy o temperaturze 10 000–30 000 K), które tworzą się w luźno zorganizowanych grupach zwanych stowarzyszeniami OB. Oba typy gwiazdowe są bardzo masywne i krótko żyjące, dlatego nie oddalają się zbyt od miejsca swojego powstania.



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie sekwencyjnego scenariusza tworzenia się gwiazd z uformowanymi trzema pokoleniami i czwartym pokoleniem gwiazd tworzącym się w chmurze pyłu. Strzałki wskazują, że do powstania drugiego i wyższych pokoleń gwiazd przyczyniła się bezpośrednio podgrupa wcześniej

Gwiazdy o masach większych niż $8 M_\odot$ nazywane są gwiazdami o dużej masie.

W połowie XX wieku astronomowie zaobserwowali kilka niezwiązanych ze sobą grawitacyjnie skupisk gwiazd wysokomasowych typu OB (tzw. asocjacji gwiazdowych OB). Okazało się, że każda z tych grup zawiera gwiazdy mniej więcej w tym samym wieku, co może sugerować, że formowanie się gwiazd w tych obszarach następowało w sposób sekwencyjny: pierwsza generacja spowodowała uformowanie drugiego pokolenia gwiazd o dużych masach, druga – trzeciego i tak dalej (rys. 1). Ten prosty, sekwencyjny scenariusz może wyjaśnić, w jaki sposób gwiazdy w każdej z zaobserwowanych podgrup znajdują się w tej samej lub bardzo zbliżonej fazie ewolucji.

Terminem H II astronomowie określają zjonizowany wodór atomowy (obszar H I to obłok neutralnego wodoru atomowego, a H_2 to wodór cząsteczkowy). W artykule „Gwiazdne przedszkola – obszary H II w galaktyce” (Δ_{20}^4), opisałem tworzenie się zjonizowanych (H II) regionów wokół gwiazd o dużych masach. Zasadniczo gwiazdy o dużej masie emitują fotony w zakresie ultrafioletowych (UV) długości fal elektromagnetycznych, które jonizują chmurę wodoru wokół nich. Kiedy liczba jonizacji jest równa liczbie rekombinacji, obszar H II osiąga swoją początkową wielkość nazywaną sferą Strömgrena. Po utworzeniu sfery Strömgrena ciśnienie jonizacji wewnątrz obszaru H II jest większe niż ciśnienie otaczającej go chmury. Ta różnica ciśnień powoduje rozpoczęcie fazy ekspansji. Naddźwiękowy front jonizacyjny (IF) tworzy front uderzeniowy (SF), który następnie ścieśnia chmurę (Δ_{20}^4). Poprzez rozszerzanie się coraz więcej materiału gromadzi się pomiędzy frontami. Stabilne ciśnienie utrzymywane pomiędzy frontami IF a SF sprawia, że chmura (w kształcie torusa) jest odporna na zapadanie grawitacyjne, aż do momentu osiągnięcia gęstości krytycznej, powyżej której utrzymywany pomiędzy frontami materiał rozpada się na kawałki. Powstałe w ten sposób fragmenty będą stanowiły siedlisko dla kolejnych pokoleń gwiazd. Mechanizm ten, w którym nowe pokolenie gwiazd jest konsekwencją gromadzenia się (*collect*)



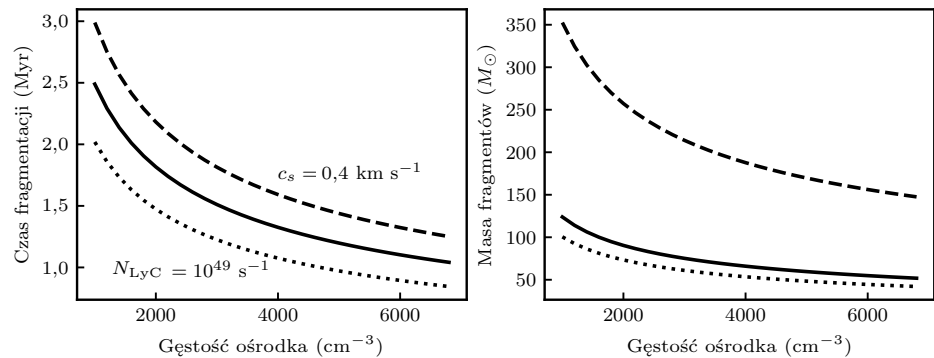
H_{α} to linia w widmie atomu wodoru o długości fali rzędu 656,28 nm.

materiału i zapadania się (*collapse*) otrzymanej chmury materiału, znany jest jako **Collect&Collapse** (C&C) i został odkryty przez Bruce'a Elmegreena i Charlesa Ladę w 1977 roku. Zauważyli oni, że warstwa ogrzana przez region H II sprzyja powstawaniu gwiazd o dużej masie, ponieważ masa otrzymanych fragmentów jest proporcjonalna do temperatury materiału w warstwie pomiędzy frontami. Ponadto niestabilność w obszarze H II, spowodowana wstrząsem z rozpadu warstwy po osiągnięciu temperatury krytycznej, prowadzi do powstawania większych, a co za tym idzie, masywniejszych fragmentów. Innymi słowy, gwiazdy wysokomasowe mogą wzbudzać powstawanie gwiazd wysokomasowych, które następnie same mogą indukować powstawanie nowych gwiazd wysokomasowych. Taka reakcja łańcuchowa może zachodzić do momentu wyczerpania zapasu gazu w chmurze.

W celu oszacowania właściwości fizycznych związanych z fragmentami warstw astronomowie posilkują się sformułowaniami analitycznymi. Poniżej przyjrzymy się dwóm z nich – czasowi potrzebnemu do rozdrobnienia (fragmentacji) warstwy oraz średniej masie powstałych kawałków:

$$t_{\text{frag}} \sim 1,56 \text{ Myr} \cdot c_s^{\frac{7}{11}} \cdot N_{\text{LyC}}^{-\frac{1}{11}} \cdot n_0^{-\frac{5}{11}}, \quad M_{\text{frag}} \sim 23 M_{\odot} \cdot c_s^{\frac{40}{11}} \cdot N_{\text{LyC}}^{-\frac{1}{11}} \cdot n_0^{-\frac{5}{11}},$$

gdzie c_s , N_{LyC} oraz n_0 oznaczają kolejno prędkość dźwięku, liczbę fotonów o energiach powyżej granicy Lymana emitowanych z masywnej gwiazdy oraz początkową gęstość chmury, a Myr oznacza miliony lat. W pierwszym przybliżeniu przyjmujemy, że $c_s \sim T^{\frac{1}{2}}$, gdzie T jest temperaturą chmury. Liczbę fotonów N_{LyC} możemy wyznaczyć z pomiaru linii H_{α} (cecha charakterystyczna zjonizowanego wodoru), **emisji swobodno-swobodnej** (*free-free emission*, promieniowanie pochodzące z rozpraszania swobodnych elektronów na jonach, obserwowane w radiowych długościach fal) lub z symulacji, o ile znany jest typ spektralny gwiazdy o wysokiej masie. Wartość n_0 jest trudna do oszacowania, ponieważ początkowy rozkład pyłu w chmurze nie jest znany. Generalnie zakładamy, że materiał neutralny zawarty w warstwie początkowo znajdował się wewnątrz obszaru H II.



Rys. 2. Czas potrzebny do rozdrobnienia warstwy, t_{frag} (lewy panel) oraz średnia masa fragmentów M_{frag} (prawy panel) w funkcji początkowej gęstości chmury n_0 . Ciągłe linie odpowiadają modelowi z typowymi wartościami c_s oraz N_{LyC} , linia przerywana otrzymana jest dla $c_s = 0,4 \text{ km s}^{-1}$, a kropkowana dla $N_{\text{LyC}} = 10^{49} \text{ s}^{-1}$.

Na rysunku 2 ciągłą linią przedstawiona jest zależność czasu potrzebnego do rozdrobnienia warstwy, t_{frag} , w funkcji parametru n_0 dla wartości $c_s = 0,3 \text{ km s}^{-1}$ ($T \sim 20 \text{ K}$) oraz $N_{\text{LyC}} = 10^{48} \text{ s}^{-1}$. Wraz ze wzrostem parametru n_0 krytyczna gęstość, powyżej której warstwa rozpada się, osiągana jest szybciej, a więc t_{frag} jest niższy. Również wzrost N_{LyC} (10^{49} s^{-1} , linia kropkowana) prowadzi do skrócenia czasu t_{frag} . Jeśli T wzrośnie o współczynnik 2 ($c_s \sim 0,4 \text{ km s}^{-1}$, przerywana linia), t_{frag} także wzrośnie, gdyż temperatura będzie przeciwdziałać zapaści grawitacyjnej. Na rysunku można zaobserwować, że masa fragmentów zależy głównie od czynnika c_s , czyli pośrednio od temperatury chmury, ale także od niestabilności w warstwie, a nie od N_{LyC} czy n_0 .

Występowanie masywnych fragmentów nie jest gwarancją, że gwiazdy o dużej masie będą się w nich skutecznie formować, ale zdecydowanie wspiera tezę, że gwiazdy o masach powyżej $8 M_{\odot}$ mają, poprzez mechanizm C&C, potencjał do tworzenia nowego pokolenia gwiazd o dużych masach.

Źródło: Katarzyna MAŁEK
i Anna DURKALEC

O liczbach autobiograficznych

Piotr ZARZYCKI*, Ryszard KUBIAK**

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański
**Biuro Informatyki Ubezpieczeniowej Pachocki i Ziajka S.C., Gdańsk

Rzadko się zdarza, by matematyka pojawiała się w gazetach codziennych, bardzo rzadko ludzie niezajmujący się zawodowo matematyką o niej rozmawiają (takie rozmowy zdarzają się najczęściej w okresie egzaminów kończących jakiś etap nauczania). Początek roku 2020 był pod tym względem wyjątkowy, kilkoro znajomych (niematematyków) pytało nas, czy wiemy, jaką szczególną cechę ma liczba 2020 – nie wiedzieliśmy. Sprawdziliśmy... Okazało się, że doniesienia o niezwykłości tej liczby pojawiły się w codziennej prasie. Na przykład w internetowym wydaniu Gazety Wyborczej z 1 stycznia bieżącego roku można znaleźć artykuł Piotra Cieślińskiego o tytule „2020”. Ten rok ma w sobie matematyczną zagadkę. Autor pisze tak: *Zauważmy, że jej pierwsza cyfra jest zarazem liczbą zer w jej zapisie dziesiętnym, druga – liczbą jedynek, trzecia – liczbą dwójek, czwarta – liczbą trójek. [...] Podobną własność ma liczba 3 211 000 [...] Liczby o takiej własności, których zapis „opowiada” o nich samych, nazywane są liczbami autobiograficznymi. Jest ich bardzo mało. Naprawdę bardzo mało. Liczbami autobiograficznymi są na przykład: 1210, 2020, 21 200, 3 211 000...* Wielokropek wskazuje tu, że ta lista jest niepełna. Czytelnik Dociekliwy z pewnością spróbuje uzupełnić ją samodzielnie.

Zacznijmy od **zalet dydaktycznych** liczb autobiograficznych. Na powyższej liście nie ma liczb jedno-, dwu- bądź trzycyfrowych. Znalezienie ich to ładne zadanie dla uczniów szkoły podstawowej, nawet w nauczaniu wczesnoszkolnym. Znalezienie liczb autobiograficznych o czterech lub pięciu cyfrach, jak też uzasadnienie nieistnienia liczby autobiograficznej sześciocyfrowej może być ciekawe dla uczniów szkół średnich. Problem znalezienia liczby autobiograficznej siedmiocyfrowej pojawił się w Scottish Mathematical Challenge Examination 1978–1979, a problem dotyczący liczby autobiograficznej dziesięciocyfrowej w Wisconsin Mathematics Science and Engineering Talent Search Examination 1987–1988.

Znalezienie liczb autobiograficznych cztero- i pięciocyfrowych wymaga rozpatrzenia stosunkowo niedużej liczby przypadków. Dla liczb o sześciu lub więcej cyfrach możliwości jest tak wiele, że warto do poszukiwań zaangażować komputer. Do żmudnej pracy szukania liczb autobiograficznych siedmio- i ośmiocyfrowych wykorzystajmy **program MATHEMATICA**. Najpierw przyjrzyjmy się następującej funkcji:

```
sprawdzenie[n_] :=  
If[RotateRight[DigitCount[n]] == PadRight[IntegerDigits[n], 10],  
Return[True], Return[False]]
```

Wynikiem polecenia `DigitCount[n]` jest lista dziesięciocyfrowa. Jej pierwszy element to liczba jedynek w zapisie liczby n , drugi to liczba dwójek, ..., dziesiąty to liczba zer. `RotateRight` przesuwa elementy listy o jedno miejsce w lewo, a pierwszy element na koniec listy. Komenda `IntegerDigits[n]` zapisuje liczbę w postaci listy kolejnych jej cyfr, natomiast `PadRight` dopisuje z prawej strony listy `IntegerDigits[n]` brakującą liczbę zer tak, by otrzymana lista miała 10 elementów. Program do szukania siedmiocyfrowych liczb autobiograficznych jest następujący:

```
auto7 := (L = {}; Do[If[sprawdzenie[n] == True, AppendTo[L, n], n = n + 1],  
{n, 1000000, 9999999}]; Return[L])
```

Startując od listy pustej i sprawdzając kolejne liczby siedmiocyfrowe, po czym ewentualnie dołączając (komenda `AppendTo`) do listy znalezione liczby autobiograficzne, otrzymujemy **po około 10 minutach** liczbę **3 211 000**. Niewielka modyfikacja programu `auto7` pozwala znaleźć liczbę autobiograficzną ośmiocyfrową, ale przeszukiwanie trwało **ponad godzinę**. Dla liczb ośmiocyfrowych warto zmniejszyć zakres przeszukiwań, od 10 000 000 do 59 999 999. Łatwo uzasadnić, że ośmiocyfrowa liczba autobiograficzna nie

Proponujemy jeszcze jeden przykład dydaktycznego wykorzystania zadania znalezienia liczb autobiograficznych. Polecamy nagranie Tanya Khovanova na YouTube *Can you solve the Leonardo da Vinci riddle?*



Są podane dwie liczby 1210 i 3 211 000. Aby wejść do pomieszczenia, należy podać trzecią, najdłuższą liczbę – szyfr otwierający drzwi.



Rozwiązanie zadania M 1658.

Każdego uczestnika turnieju potraktujemy jako wierzchołek, a każdy mecz jako krawędź pewnego grafu skierowanego T , skierowaną od zwycięzcy do przegranego. Usadzenie k zawodników przy okrągłym stole zgodnie z warunkami zadania jest równoważne istnieniu skierowanego cyklu długości k (krótko: k -cyklu).

Udowodnimy, że:

- w T istnieje 3-cykl;
- jeśli w T istnieje k -cykl, to istnieje też $(k+1)$ -cykl, dla $k = 3, \dots, n-2$.

Wyniknie stąd, że w T istnieje $(n-1)$ -cykl, czyli teza zadania.

Niech $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_1$ będzie wyjściowym n -cyklem oraz niech $i \geq 3$ będzie najmniejszym indeksem o tej własności, że $A_i \rightarrow A_1$ (zbiór takich indeksów jest niepusty, gdyż należy do niego n). Wówczas $A_1 \rightarrow A_{i-1} \rightarrow A_i \rightarrow A_1$, więc w T istnieje 3-cykl.

Niech $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow B_1$ będzie pewnym k -cyklem, gdzie $3 \leq k \leq n-2$, oraz niech X będzie dowolnym wierzchołkiem spoza tego cyklu. Jeśli istnieje takie i , że $B_i \rightarrow X \rightarrow B_{i+1}$, to uzyskujemy $(k+1)$ -cykl poprzez wstawienie X pomiędzy B_i oraz B_{i+1} (przyjmujemy $B_{k+1} = B_1$). W przeciwnym przypadku są dwie możliwości: $X \rightarrow B_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$ lub $B_i \rightarrow X$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$; niech \mathcal{X}_1 będzie zbiorem wierzchołków X pierwszego typu, a \mathcal{X}_2 – zbiorem wierzchołków X drugiego typu.

Gdyby $\mathcal{X}_1 = \emptyset$, to $B_i \rightarrow X$ dla każdego i oraz każdego $X \in \mathcal{X}_2$ – nie mógłby wtedy jednak istnieć n -cykl w T . Podobnie gdyby $\mathcal{X}_2 = \emptyset$, to w T nie mógłby istnieć n -cykl. Również gdyby $X_1 \rightarrow X_2$ dla każdej pary $X_1 \in \mathcal{X}_1, X_2 \in \mathcal{X}_2$, to w T nie mógłby istnieć n -cykl. Stąd wniosek, że istnieją wierzchołki $X_1 \in \mathcal{X}_1, X_2 \in \mathcal{X}_2$ o tej własności, że $X_2 \rightarrow X_1$. To oznacza, że istnieje $(k+1)$ -cykl

$X_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_{k-1} \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$.



Rozwiązanie zadania F 1014.

Szereg promieniotwórczy ^{238}U to kolejno następujące rozpady α i β^- . Szereg kilkakrotnie się rozgałęzia, ale „wszystkie drogi prowadzą” do końcowego, stabilnego izotopu ^{206}Pb . Na każdej drodze uwalnianych jest 8 cząstek α , a powstające w wyniku kolejnych rozpadów jądra mają czasy połowicznego rozpadu wiele rzędów wielkości krótsze niż ^{238}U – najdłuższy z nich to $2,45 \cdot 10^5$ lat dla ^{234}U . Z początkowej liczby n moli ^{238}U w czasie od powstania Ziemi do dziś rozpadnie się:

$$\Delta n = \left(1 - \exp\left(-\frac{tZ \ln(2)}{\tau}\right)\right) n,$$

a w wyniku tych rozpadów powstanie $8\Delta n$ moli ^4He . W warunkach normalnych (temperatura 0°C , ciśnienie $101\,325$ Pa) hel jest gazem o objętości molowej $V_m \approx 22,414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$. Dla danych zadania: $n = 1 \text{ kg} / 238 \text{ g} \approx 4,202$ mola, $8\Delta n \approx 16,988$ mola ^4He wypełniły objętość

$$V = 16,988 \cdot 22,414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \approx 0,381 \text{ m}^3.$$

może się zaczynać od cyfr 6, 7, 8 ani 9. Na dalsze próby, dla liczb dziewięciu i dziesięciocyfrowych nie zdecydowaliśmy się, bo czas oczekiwania byłby już nieznośnie długi.

Do poszukiwań liczb autobiograficznych wykorzystaliśmy też **język programowania Python**. Oto kod programu (wersja Pythona co najmniej 3.5):

```
from typing import List

def liczby_kandydatki(dlugosc: int):
    return range(10**(dlugosc-1), 10**dlugosc)

def cyfry_liczby(liczba: int) -> List[int]:
    return [ord(c) - ord('0') for c in str(liczba)]

def ile_razy_w_liscie(liczba: int, lista: List[int]) -> int:
    return len([k for k in lista if k == liczba])

def jest_autobiograficzna(liczba: int) -> bool:
    cyfry = cyfry_liczby(liczba)
    return sum(cyfry) == len(cyfry) and \
        all([ile_razy_w_liscie(n, cyfry) == cyfry[n]
             for n in range(len(cyfry))])

def liczby_autobiograficzne_dlugosci(dlugosc: int) -> List[int]:
    return [n for n in liczby_kandydatki(dlugosc)
            if jest_autobiograficzna(n)]

for ile_cyfr in range(4, 7):
    print('Liczby autobiograficzne długości ' + str(ile_cyfr) + ':')
    print(liczby_autobiograficzne_dlugosci(ile_cyfr))
```

Instrukcja `for ile_cyfr in range(4,7)` na końcu tego programu wyszuka liczby autobiograficzne o długości od 4 do 6. Trwa to kilka sekund. Czytelnik może sprawdzić działanie programu dla liczb o większej liczbie cyfr, zmieniając granice zakresu `range`. Warto tu zwrócić uwagę na warunek `sum(cyfry) == len(cyfry)` w funkcji `jest_autobiograficzna`. Odносimy się tu do ważnej, a zarazem łatwej do udowodnienia własności liczb autobiograficznych:

(1) Jeśli $a = a_0a_1 \dots a_n$ jest zapisem dziesiętnym liczby autobiograficznej a , to

$$\sum_{i=0}^n a_i = n + 1.$$

Badanie w programie warunku `sum(cyfry) == len(cyfry)` ma na celu przyspieszenie obliczeń. Chodzi o to, że jeśli ten warunek nie jest spełniony, to program nie bada drugiego członu koniunkcji. Ten drugi człon sprawdza spełnienie przez liczbę warunku autobiograficzności. Owo sprawdzenie, czy liczba spełnia definicję autobiograficzności, ma większą złożoność czasową niż porównanie, czy suma cyfr liczby zgadza się z liczbą tych cyfr. Schemat wyszukiwania liczb w przedstawionym powyżej programie pozwolił znaleźć liczby autobiograficzne co najwyżej siedmiocyfrowe w ciągu około minuty, liczbę ośmiocyfrową w ciągu około 5 minut, natomiast do znalezienia liczby dziewięciocyfrowej potrzeba było około 45 minut. Liczba autobiograficzna o dziesięciu cyfrach została znaleziona z użyciem zoptymalizowanego interpretera języka Python o nazwie *ppy*. Trwało to niecałe 2 godziny.

Tak długi czas obliczeń w powyższych programach wynika z użycia w nich „naiwnego” algorytmu. Dla danego n sprawdza on autobiograficzność wszystkich liczb długości n . Liczb takich jest w systemie dziesiętkowym $9 \cdot 10^{n-1}$. Z kolei liczba elementarnych operacji do sprawdzenia autobiograficzności zapisu konkretnej liczby długości n jest rzędu n^2 . Z tych obserwacji wynika, że złożoność „naiwnego” algorytmu jest rzędu $O(10^{n-1} \cdot n^2)$. Mamy zatem do czynienia ze złożonością wykładniczą.



Rozwiązanie zadania F 1013.

Siła oporu jest skierowana przeciwnie do prędkości ciała względem powietrza. Podczas ruchu bez wiatru rowerzysta, jadąc z prędkością \vec{v} , musi więc stale działać siłą (przeciwą do siły oporu powietrza):

$$\vec{F}_1 = Av^2 \frac{\vec{v}}{v},$$

gdzie A jest stałą zależną od kształtu i rozmiarów rowerzysty i roweru. Moc potrzebna do utrzymania stałej prędkości jest wówczas równa $P_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{v} = Av^3$. Gdy pojawia się poprzeczny wiatr o prędkości \vec{u} , utrzymanie stałej prędkości (względem drogi) wymaga działania siłą:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= A|\vec{v} - \vec{u}|^2 \frac{\vec{v} - \vec{u}}{|\vec{v} - \vec{u}|} = \\ &= A(v^2 + u^2) \frac{\vec{v} - \vec{u}}{|\vec{v} - \vec{u}|}. \end{aligned}$$

Dla uproszczenia przyjęliśmy, że stała A jest w obu przypadkach taka sama. Moc potrzebna do utrzymania stałej prędkości względem drogi będzie teraz równa:

$$P_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{v} = A \frac{v^2 + u^2}{|\vec{v} - \vec{u}|} v^2.$$

Skorzystaliśmy z faktu, że wektory prędkości \vec{v} i \vec{u} są prostopadłe. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{P_2}{P_1} = \sqrt{1 + \frac{u^2}{v^2}}.$$

Dla podanych w treści zadania prędkości $\frac{P_2}{P_1} = 1,25$.



Żeby skrócić czas obliczeń, użyjemy lepszego filtrowania, to znaczy ograniczymy zbiór liczb, które w ogóle warto sprawdzać. Kolejny filtr opiera się na następującym twierdzeniu:

(2) *Jeśli $a = a_0 a_1 \dots a_n$ jest zapisem dziesiętnym liczby autobiograficznej a , to dokładnie jeden element ciągu a_1, \dots, a_n jest równy 2, a pozostałe są zerami bądź jedynekami.*

Dowód twierdzenia jest prosty: niech r oznacza liczbę niezerowych elementów ciągu a_1, \dots, a_n . Oznaczmy te niezerowe elementy symbolami a_{i_1}, \dots, a_{i_r} . Ponieważ $a_0 > 0$ (a_0 jest pierwszą cyfrą dodatniej liczby całkowitej), więc z własności (1) wynika, że

$$a_{i_1} + \dots + a_{i_r} = n + 1 - a_0 = n + 1 - (n - r) = r + 1.$$

Zatem mamy r dodatnich liczb całkowitych, których suma wynosi $r + 1$, z czego oczywiście wynika teza twierdzenia.

Wersje programów używające lepszych filtrów

Ponieważ szukanie liczb autobiograficznych dziewięcio- i dziesięciocyfrowych okazało się bardzo czasochłonne, zajmijmy się uważniej tymi najdłuższymi liczbami. W obu przypadkach łatwo zauważyć, że pierwsza cyfra (liczba zer w jej zapisie dziesiętnym) liczby autobiograficznej nie może być równa 7, 8 ani 9. Skorzystamy z własności (2) i stworzymy dużo mniejszy zbiór do przeszukania:

- dla liczb dziewięciocyfrowych pierwsze cyfry mogą być równe 1, 2, 3, 4, 5 lub 6, a na ośmiu pozostałych miejscach mogą pojawić się jedynie cyfry 0, 1 lub 2; łącznie daje to $6 \cdot 3^8 = 39\,366$ przypadków;
- dla liczb dziesięciocyfrowych pierwsze cyfry mogą być równe 1, 2, 3, 4, 5 lub 6, a na dziewięciu pozostałych miejscach mogą pojawić się jedynie cyfry 0, 1 lub 2; łącznie daje to $6 \cdot 3^9 = 118\,098$ przypadków.

Oto kod programu do przeszukiwania napisany w języku MATHEMATICA:

```
czyauto[lista_]
:=If[RotateRight[DigitCount[FromDigits[PadRight[lista],10]]]
==PadRight[lista,10],Return[True],Return[False]]
```

Programik ten sprawdza, czy liczba r zapisana w postaci listy jej cyfr uzupełnionych ewentualnie zerami jest autobiograficzna. Wyposażeni w powyższe narzędzia możemy napisać kod do poszukiwania liczb autobiograficznych dziewięcio- i dziesięciocyfrowych.

```
auto9[j_] :=(L={};Do[If[czyauto[Prepend[Tuples[{0,1,2},8][[i]],j]]
==True,AppendTo[L,Prepend[Tuples[{0,1,2},8][[i]],j]],i++],
{i,1,3^8}];Return[L])
```

Wyjaśnienia wymaga tutaj komenda `Tuples[0,1,2,8][[i]]`, która tworzy z cyfr 0, 1 oraz 2 wszystkie ciągi ośmiocyfrowe, końcówka `[[i]]` oznacza wybranie z otrzymanej, złożonej z 3^8 elementów listy, jej i -tego elementu. Komenda `Prepend[lista,k]` dopisuje z przodu do listy element k .

Program `auto9` znalazł dziewięciocyfrową liczbę autobiograficzną po około 8 sekundach. Dla liczb dziesięciocyfrowych czas poszukiwań też był bardzo dobry; po upływie około 60 sekund pojawiła się ostatnia poszukiwana liczba.

Oto kluczowa funkcja `liczby_kandydatki` z programu w języku Python, w nowej wersji, która używa lepszych filtrów (pełny kod można znaleźć na www.deltami.edu.pl).

```
def liczby_kandydatki(dlugosc: int) -> List[int]:
    zbior_cyfr_początkowych = [str(c)
                                for c in range(1, dlugosc - 1) if c < 7]
    zbior_cyfr_dalszych = ['0', '1', '2']
    war = wariacje(zbior_cyfr_dalszych, dlugosc - 1)
    return [int(c + ''.join(w))
            for c in zbior_cyfr_początkowych for w in war]
```



```
def wariacje(zb: List[str], k: int) -> List[List[str]]:
    if k == 0:
        return []
    elif k == 1:
        return [[e] for e in zb]
    else:
        war = wariacje(zb, k - 1)
        return [[e] + w for e in zb for w in war]
```

Ta wersja funkcji nie bada już wszystkich liczb zadanej długości, lecz jedynie te, które istotnie warto sprawdzać na podstawie obserwacji matematycznych. Warto zwrócić uwagę na użycie rekursji w sposobie zaprogramowania funkcji `wariacje`. Program z nową wersją funkcji `liczby_kandydatki` znajduje wszystkie liczby autobiograficzne w ciągu zaledwie paru sekund. Oto, jak wspaniale wyniki przynosi współdziałanie matematyki i informatyki!

Uwagi końcowe

W podobny sposób można rozwiązać problem liczb autobiograficznych w innych niż dziesiętkowy systemach liczenia. Herb R. Bailey i Roger G. Lautzenheiser w artykule *A Curious Sequence* (Mathematics Magazine, vol. 66, nr 1, 1993) podają twierdzenie:

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 6$ liczba $a_0a_1 \dots a_n$ jest autobiograficzna wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 = n - 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n-3} = 1$ oraz $a_i = 0$ dla pozostałych i .

Twierdzenie to w pełni charakteryzuje „długie” liczby autobiograficzne.

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1657. Przy dwóch n -osobowych stołach usiadło $2n$ osób. Co minutę pewne dwie osoby, które nie siedzą przy tym samym stole, zamieniają się miejscami. Przypuśćmy, że *każda para* osób zamieniła się miejscami *dokładnie raz* (czyli upłynęło $n(2n - 1)$ minut).

- Udowodnić, że składy osób przy stołach są takie same jak na początku, tzn. jeśli na początku pewne dwie osoby siedziały przy tym samym stole, to po upływie $n(2n - 1)$ minut również siedzą przy tym samym stole.
- Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$, dla których taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie na str. 21

M 1658. W turnieju wzięło udział n osób ($n \geq 4$). *Każda para* osób rozegrała *dokładnie jeden mecz*, który zakończył się zwycięstwem jednej z nich. Po turnieju wszyscy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy wygrał z osobą siedzącą bezpośrednio po swojej prawej stronie. Wykazać, że można tak pewną osobę wyprosić, a pozostałe przesadzić, aby ta własność pozostała zachowana, tzn. każdy miał na prawo osobę, z którą wygrał.

Rozwiązanie na str. 5

M 1659. Dany jest basen w kształcie pierścienia kołowego, podzielony na $2n$ małych zbiorników poprzedzielanych zawieszonymi nad wodą obręczami ($n \geq 2$). W każdym małym zbiorniku (znajdującym się pomiędzy dwiema obręczami) pływa jeden delfin. Co jakiś czas dwa delfiny z sąsiednich zbiorników wykonują akrobację polegającą na jednoczesnym skoku przez obręcz (znajdującą się między zbiornikami) i w rezultacie – zamianie miejscami. Przypuśćmy, że po pewnym czasie *każde dwa* delfiny zamieniły się miejscami *dokładnie raz*. Wykazać, że pewna obręcz nie została użyta do wykonania żadnej akrobacji. Rozwiązanie na str. 21



Zadania

Nigdy Cię nie zobaczę?

Kamila ŁYCZEK*, Mariusz SKAŁBA*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Niniejszy tekst nawiązuje do artykułu *Widoczność w nieskończonym lesie*, Δ_{20}^4 .

- *Hop, hop, jest tam kto?* – krzyczy α otoczona tłumem.
- *Hop, hop, spójrz tutaj.* – odpowiada β , który co prawda słyszy α , ale zupełnie jej nie widzi.
- *Jakie „tutaj”? Przecież dookoła nie ma żywej duszy.* – α otoczona tłumem po raz kolejny usiłuje dostrzec β pośród otaczającej pustki.

Dookoła ludzi tłum, a jakby nikogo nie było... Przyjrzyjmy się światu, w którym α i β próbują się bezskutecznie dostrzec. Na zwykłej płaszczyźnie

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

w każdym jej punkcie o wymiernych współrzędnych (x, y) siedzi samotny człowiek i... wypatruje towarzysza, kierując tęsknie wzrok w losowo obranym kierunku. Ten losowy kierunek jest wyznaczony przez wybór punktu na ruletce o promieniu 1 – zadekretowane prawdopodobieństwo wylosowania półprostej wzroku przebijającej brzeg ruletki na łuku A wynosi $[A]/2\pi$ ($[A]$ oznacza długość łuku A). Oczywiście każdy ma swoją osobistą ruletkę i każdy *wykręca* kierunek swojego spojrzenia niezależnie.

Dla $\alpha \in \mathbb{Q}^2$ niech Z_α oznacza zdarzenie, że α kogoś widzi. Wykażemy, że $\mathbb{P}(Z_\alpha) = 0$, niestety... Zauważmy, że moc zbioru prostych $\alpha\beta$, gdzie $\beta \in \mathbb{Q}^2$, $\beta \neq \alpha$, jest nie większa niż moc zbioru punktów $\beta \in \mathbb{Q}^2$, $\beta \neq \alpha$. Oznacza to, że moc zbioru tych prostych jest przeliczalna – stąd teza.

Ale nie tylko α nikogo nie widzi. Ponieważ miara probabilistyczna jest przeliczalnie addytywna, więc również

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}^2} Z_\alpha\right) = 0.$$

Zatem zdarzenie przeciwne jest pewne

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\alpha \in \mathbb{Q}^2} Z'_\alpha\right) = 1,$$

czyli **prawie na pewno nikt nikogo nie widzi**. Zauważmy, że założenie o niezależności rozglądania się różnych osób jest w zasadzie zbędne.

No dobrze... Wiemy skądinąd, że zdarzenie niemożliwe może się zdarzyć. Wyobraźmy sobie, że jakimś *cudem* α spojrziała w przestrzeń tak, że zobaczyła swoją drugą połówkę, którą jest β (oczywiście $\beta \neq \alpha$). Mimo cudu nie zdołają się zobaczyć! Na drodze między α i β , dokładnie w połowie, stoi bowiem $\gamma = \alpha/2 + \beta/2$ (rzecz jasna $\gamma \in \mathbb{Q}^2$). Oznacza to, że α nie widzi β , ponieważ jest zasłonięty przez γ . Oczywiście z podobnych powodów α nie widzi γ . Idąc dalej tym tropem, dochodzimy do wniosku, że **na pewno (bez wyjątków i cudów) nikt nie widzi nikogo** (bez żadnego modelu probabilistycznego!).

Hmm... Coś jest nie tak w naszym świecie – po prostu ludzie siedzą za gęsto i to prowadzi do powyższych paradoksów interpretacyjnych. Zmieńmy ten świat na lepszy! Usadówmy ludzi wyłącznie w punktach kraty całkowitoliczbowej \mathbb{Z}^2 . Oczywiście wcześniejszy model probabilistyczny znowu jest użyteczny i daje pewien wgląd w beznadziejną sytuację ludzkości: **nikt nie dostrzeżę innych, prawie na pewno**.

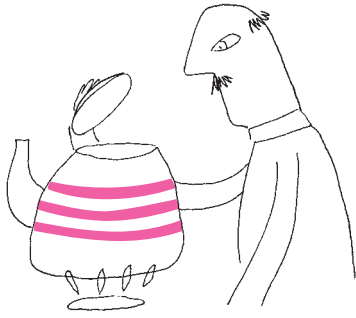
Pojawia się jednak naturalne pytanie o prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo sobie przeznaczeni $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ oraz $\beta \in \mathbb{Z}^2$ mogą się zobaczyć, jeśli spojrzą we właściwym kierunku. Niech zatem $\alpha = (a_1, a_2)$ oraz $\beta = (b_1, b_2)$. Łatwo, *nomen omen*, widzieć, że α i β mogą się zobaczyć wtedy i tylko wtedy, gdy nikt nie stoi im na drodze, czyli $\text{NWD}(b_2 - a_2, b_1 - a_1) = 1$. Dowodzi się w teorii liczb, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{(a, b) | a, b \in \{1, 2, \dots, N\}, \text{NWD}(a, b) = 1\}}{N^2} = \frac{6}{\pi^2} \approx 0,6079.$$

Oto szkic rozumowania prowadzącego do tego intrygującego wyniku. Niech $m > 1$ będzie dowolną, ale ustaloną liczbą naturalną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując spośród liczb naturalnych, otrzymamy taką, która będzie podzielna przez m ? Intuicja podpowiada, że $1/m$: jeśli losujemy tę liczbę ze zbioru

Cud to z definicji zjawisko, które zdarza się z prawdopodobieństwem 0.





$\{1, 2, 3, \dots, n\}$, i wylosowanie każdej liczby jest jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo P_n rozważanego zdarzenia wynosi dokładnie

$$P_n = \frac{\lfloor n/m \rfloor}{n} \quad \text{i oczywiście} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{m}.$$

Należy więc uznać (można to łatwo sformalizować), iż prawdopodobieństwo zdarzenia E_m , że dwie **niezależnie** wylosowane liczby całkowite a, b są obie podzielne przez m , wynosi $1/m^2$. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego E'_m wynosi zatem $1 - 1/m^2$. Niech teraz

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad \dots$$

będzie ciągiem rosnącym wszystkich liczb pierwszych. Zauważmy, że a i b są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy nie są podzielne równocześnie przez żadną liczbę pierwszą p_k , czyli gdy zajdzie zdarzenie $\bigcap_k E'_{p_k}$. Przyda się teraz obserwacja, że jeśli $\text{NWD}(m_1, m_2) = 1$, to zdarzenia E_{m_1} oraz E_{m_2} są niezależne – wynika to stąd, że liczba całkowita dzieli się jednocześnie przez m_1 oraz m_2 , gdy dzieli się przez $m_1 m_2$ oraz ze wzoru $1/(m_1 m_2) = 1/m_1 \cdot 1/m_2$. Uogólniając tę obserwację, widzimy, że zarówno (E_{p_k}) , jak i (E'_{p_k}) są ciągami zdarzeń niezależnych. W szczególności zachodzi

$$\mathbb{P}(\text{NWD}(a, b) = 1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_k E'_{p_k}\right) = \prod_k \mathbb{P}(E'_{p_k}) = \prod_k \left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right).$$

Już Leonhard Euler zauważył, że dla $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 1/p_k^s}.$$

Formalnie ta tożsamość wynika ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego

$$1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \dots = \frac{1}{1 - 1/p_k^s}$$

i twierdzenia o jednoznacznym rozkładzie każdej liczby naturalnej na iloczyn potęg liczb pierwszych. Wyżej występujące szeregi i iloczyny nieskończone są rzeczywiście zbieżne, ale mówi się, że Euler specjalnie tym się nie przejmował. Geniusz Eulera przejawiał się jednak szczególnie wtedy, gdy obwieścił światu, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

i przedstawił wyprowadzenie tego wyniku. Jak na dzisiejsze standardy ścisłości matematycznej jego uzasadnienie nie było do końca zadowalające, ale w zasadzie poprawne. To, że powyższy szereg, tylko niewinnie różniący się od szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots = 1,$$

ma tak intrygującą sumę, zakrawa na *cud!*

Naszkcicowaliśmy zatem dowód faktu, że przeznaczeni sobie mają więcej niż 3 szanse na 5, że nikt im nie stanie na przeszkodzie.

Przygotował Andrzej MAJHOFER



Zadania

F 1013. Rowerzysta jedzie z prędkością $v = 8$ m/s wzdłuż prostej, poziomej drogi. Las rosnący po obu stronach drogi osłania ją od wiatru. Poza lasem, prostopadle do drogi, wiatr wieje z prędkością $u = 6$ m/s. Ile razy większą mocą rowerzysta musi napędzać rower, jeśli chce utrzymać stałą prędkość jazdy po wyjechaniu spod osłony lasu.

Wskazówka: siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości poruszającego się względem niego ciała.

Rozwiązanie na str. 6

F 1014. Szereg promieniotwórczy rozpoczynający się izotopem ^{238}U , o czasie połowicznego rozpadu $\tau \approx 4,47 \cdot 10^9$ lat, kończy stabilny izotop ^{206}Pb . Jaką objętość V , w warunkach normalnych, wypełniłby dzisiaj hel, który powstał w wyniku rozpadu $m = 1$ kg ^{238}U obecnego w chwili powstania Ziemi? Wiek Ziemi oceniany jest na $t_Z \approx 4,54 \cdot 10^9$ lat.

Rozwiązanie na str. 5

Co piszczą w... ciepłe?

Słów kilka o fononach

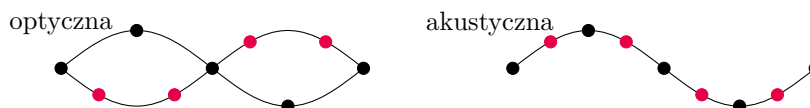
* Wydział Fizyki, Politechnika
Warszawska

Anna ŁAPIŃSKA*

O tym, że świerszcz piszczą w trawie wiedzą wszyscy. O tym, że zimno to brak ciepła, również. Ale czy wszyscy wiedzą, czym tak naprawdę jest ciepło? Co właściwie o nim wiemy? Wiemy, że wyrażamy je poprzez temperaturę, która może być podawana w różnych jednostkach: stopniach Celsjusza, Kelwinach bądź Fahrenheitach. Najniższą możliwą temperaturę nazywamy zerem bezwzględnym, wynoszącym $-273,15^{\circ}\text{C}$ lub $-459,67^{\circ}\text{F}$ albo 0 K . W tej temperaturze ciała osiągają energię minimalną i ustają drgania termiczne. Jednak w temperaturach wyższych od zera bezwzględnego w ciałach zachodzi wiele procesów, a więc pojawia się energia cieplna. Ciepło jako zjawisko rozpatrujemy dwojako. Z jednej strony, w niektórych sytuacjach jest ono pożądane, a dobre przewodniki ciepła znajdują zastosowanie w życiu codziennym – w żelazkach, garnkach, kaloryferach, ale także w bardziej zaawansowanej formie – jako radiatory chipów elektronicznych. Z drugiej strony, ciepło może być problematyczne, szczególnie w przypadku nowoczesnych urządzeń elektronicznych. Postępująca miniaturyzacja powoduje, że nie radzą sobie one z efektywnym odprowadzeniem ciepła, co w konsekwencji prowadzi do przegrzewania się podzespołów. Zjawisko to jest makroskopowe, ale by je zrozumieć, musimy przyjrzeć się temu, co dzieje się w dużo mniejszej skali – atomowej. W niej fizyka klasyczna ustępuje miejsca fizyce kwantowej.



Jeśli wyobrazimy sobie materiał, z którego budowane są elementy elektroniczne, np. krzem w skali nanometrowej (nano to 10^{-9}), to naszym oczom ukazuje się gęsto upakowana, powtarzająca się struktura zbudowana z atomów. W tej strukturze atomy połączone są wiązaniami, które dla ułatwienia można sobie wyobrazić jako sprężynki. Gdy dostarczamy energię do takiego układu, atomy połączone sprężynkami zaczynają drgać w ściśle określony sposób. Energia wibracyjna drgających atomów tworzy fonony – kwanty energii. Ważny jest fakt, że fonony powstają nie w sposób ciągły, a konkretnymi porcjami, i taka porcja energii nazywana jest kwantem. Zatem kwanty drgań cieplnych sieci krystalicznej (czyli periodycznej struktury złożonej z atomów) to fonony. W temperaturze powyżej zera bezwzględnego w materiale tworzy się ogromna liczba fononów, które przemieszczając się, zderzają się i tworzą fonony o innych częstotliwościach. Można jednak wyróżnić dwa podstawowe rodzaje fononów – optyczne oraz akustyczne. Jeśli wyobrazimy sobie łańcuch zbudowany z dwóch rodzajów atomów, o odmiennych ładunkach, tak jak na rysunku, to w sytuacji, gdy wszystkie atomy poruszają się zgodnie w jednym kierunku i tworzą falę na kształt klasycznej fali dźwiękowej, to takie fonony nazwiemy akustycznymi.



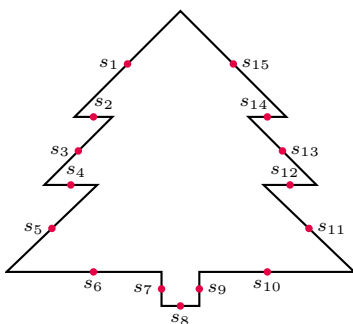
Fonony optyczne z kolei są wynikiem drgań atomów przeciwstawnych, a więc w momencie osiągnięcia przez atom jednego rodzaju maksymalnego wychylenia atom drugiego rodzaju znajduje się w położeniu najniższym. Fonony optyczne, by powstały, potrzebują więcej energii niż akustyczne, a do ich generacji potrzeba światła z zakresu podczerwieni lub widzialnego. Fonony akustyczne z kolei podróżują po materiale z prędkością dźwięku i odpowiadają również za rozchodzenie się dźwięku w ciele stałym. W sytuacji gdy komórka elementarna materiału, a więc najmniejsza możliwa regularnie powtarzająca się struktura, zbudowana jest z więcej niż dwóch atomów, będziemy obserwować coraz więcej fononów o różnych energiach, a relacje między nimi będą coraz bardziej złożone. Oprócz podstawowych rodzajów wyróżniać będzie można dodatkowo fonony akustyczne podłużne, drgające równoległe do płaszczyzny kryształu – LA (*longitudinal acoustic*) oraz poprzeczne, drgające prostopadle do płaszczyzny



kryształu – TA (*transverse acoustic*). Analogicznemu podziałowi podlegają fonony optyczne – podłużne LO oraz poprzeczne TO.

W zależności od rodzaju fonony można obserwować i badać różnymi technikami. Dla przykładu optyczne fonony badamy za pomocą takich technik, jak spektroskopia ramanowska oraz spektroskopia podczerwieni. W spektroskopii ramanowskiej wykorzystuje się wiązkę światła, która oświetla próbkę i jest rozpraszana przez materiał, powodując jednocześnie wzbudzenie drgań sieci i generację fononu. Jako rezultat otrzymuje się widmo – charakterystyczny wykres, na którym w odpowiednich miejscach pojawiają się piki, dzięki którym można zidentyfikować odpowiedni rodzaj fononu. W spektroskopii podczerwieni wykorzystuje się częstotliwości leżące w zakresie 300 GHz – 400 THz. W wyniku oświetlenia próbki wiązką promieniowania o odpowiedniej częstotliwości dostarczana energia zostaje pochłonięta przez sieć krystaliczną, co prowadzi do wzbudzenia drgań atomów i w efekcie do generacji fononów. Obie te techniki uzupełniają się, co oznacza tyle, że fonony, które obserwowane są w spektroskopii ramanowskiej, nie są najczęściej obserwowane w spektroskopii podczerwonej i na odwrót. Badania fononów akustycznych przeprowadza się przy użyciu wiązki neutronów (składnika jądra atomowego). W tym wypadku neutrony oddziałują z materią, która wywołuje zmiany energii padających neutronów. Pomiary wykonuje się przy reaktorze atomowym stanowiącym źródło neutronów. Warto zaznaczyć, że istnieją również inne metody wykorzystujące wiązkę neutronów do badania fononów, ale nie będziemy ich wszystkich tutaj omawiać.

Zajmijmy się teraz inną kwestią. Wiemy już, czym są fonony, znamy ich podstawowe rodzaje oraz wiemy, jak możemy je badać. Zastanówmy się teraz nad ich użytecznością. Ciepło, którego nośnikami są fonony, szczególnie we wspomnianych wcześniej urządzeniach elektronicznych, kojarzy się raczej z czymś niepożądanym, a nawet szkodliwym i ograniczającym funkcjonalność. Ale to samo ciepło można wykorzystać na przykład do przetwarzania informacji. Gałąź nauki, która zajmuje się badaniem i kontrolą fononów, zwie się fononiką. Jest to stosunkowo nowa i jeszcze niezbyt popularna dziedzina nauki. Problematyczne w kontekście kontrolowania fononów, ich przepływu oraz przetwarzania informacji jest to, iż nośniki ciepła nie mają ani masy, ani ładunku, czyli nie są *stricte* cząstką, tylko wiązką energii. Niemniej jednak od wielu lat naukowcy próbują je okiełznać, tworząc kolejne teorie, materiały czy urządzenia. Sztandarowym osiągnięciem tej gałęzi nauki jest dioda termiczna, której historia sięga lat 30. ubiegłego wieku. Dioda ta przewodzi ciepło tylko w jednym kierunku. Po raz pierwszy ukierunkowany, kontrolowany przepływ ciepła został zaobserwowany na powierzchni styku miedzi oraz tlenku miedzi. Praktycznym zastosowaniem tego typu urządzenia mogłoby być automatyczne kontrolowanie temperatury na przykład wewnątrz budynku, jeśli ten zostałby zbudowany chociaż częściowo z takich termicznych diod. Pozwoliłoby to na zastąpienie tradycyjnej klimatyzacji oraz zdecydowaną oszczędność energii. Innym przykładem urządzenia wykorzystującego fonony jest tranzystor termiczny, odpowiednik elektronicznego tranzystora. W 2018 roku uczeni z Uniwersytetu Stanforda opracowali urządzenie odprowadzające ciepło z elementów elektronicznych, wykorzystując do tego dwuwymiarowy dwusiarczek molibdenu, który wzbogacili jonami litu. W takiej postaci dwusiarczek molibdenu reagował na zmiany temperatury, powodując włączenie lub wyłączenie całego układu, chroniąc jednocześnie elektroniczne elementy przed przegrzaniem i zniszczeniem. Ciągłe trwają intensywne badania nad uzyskaniem układów logicznych pracujących w systemie ON i OFF (włączenia i wyłączenia), sterowanych jedynie temperaturą. Jednakże technologia wykorzystująca zmiany temperatury oraz kontrolę fononów w urządzeniach elektronicznych aktualnie jest na poziomie wiedzy, jaką posiadali uczeni w latach 70. ubiegłego wieku. . . Nie zmienia to faktu, iż naukowcy dokładają wszelkich starań, by stan ten szybko poprawić.



Rozwiązanie zadania z artykułu „Odkryj wielokąt!” (str. 1)

Zjawiska SF

Marek W. GUTOWSKI*

*Instytut Fizyki PAN

SF w tytule nie oznacza *Science Fiction*, jak można by podejrzewać. Chcemy mówić o zjawiskach niemających charakterystycznej dla siebie skali czy rozmiaru.

Zjawiska te noszą angielską nazwę *Scale Free* i stąd pochodzi akronim użyty w tytule. Rozczarowanych wypada przeprosić, ale i zaprosić do dalszej lektury, która będzie przedziwną mieszanką faktów z różnych dziedzin wiedzy, w tym także spoza nauk potocznie zwanych ścisłymi.

Vilfredo Pareto (1848–1923), włoski arystokrata i ekonomista, zauważył, co i tak było widoczne dla zwykłych ludzi, że dobrobyt i bogactwo wcale nie są równomiernie rozłożone wśród obywateli. Obiegowe powiedzenie mówiące, że 80% majątku znajduje się w rękach zaledwie 20% ludzi, przełożył on na następującą formułę matematyczną:

$$(1) \quad \log N = \log A + m \log x,$$

gdzie N oznacza liczbę osób, których dochód nie przekracza x jednostek, natomiast A i m są pewnymi stałymi charakterystycznymi dla kraju. Ponadto w swoim trzynomowym dziele *Cours d'économie politique* (1896–1897) Pareto twierdził, że prawo to obowiązywało zawsze i we wszystkich krajach. Badania empiryczne, prowadzone sporadycznie do dzisiaj, sugerują, że tak jest w rzeczywistości. Zauważmy, że formułę (1) można przedstawić w równoważnej formie jako

$$(2) \quad N = Ax^m,$$

czyli jako krzywą potęgową. Postać pierwsza, zwana *prawem Pareto*, ma jednakże tę zaletę, że we współrzędnych $(\log x, \log N)$ przedstawia linię prostą.

Zmieńmy temat. W latach trzydziestych ubiegłego stulecia profesor lingwistyki z uniwersytetu Harvarda, niejaki George Kingsley Zipf (1902–1950), spostrzegł inną zależność. Otóż jeśli weźmie się dostatecznie długi tekst, np. rocznik gazety codziennej *New York Times*, i wypisze z niego wszystkie spotkane tam wyrazy oraz zliczy, ile razy każdy z nich wystąpił, to z tego da się coś wykombinować. Tę gigantyczną pracę wykonały najlepsze osiągalne ówczesnie bioprocesory, czyli po prostu studenci Zipfa. Ci z Czytelników, którzy znają język angielski, nie będą zapewne zdziwieni, że absolutnym rekordzistą okazało się słówko *the*; pozostali natomiast przynajmniej rozumieją dlaczego G.K. Zipf był uważany za ekscentryka. Co robimy dalej z plonem całej tej pracy? Otóż każdemu słowu nadajemy *rangę*, czyli numer, tym niższy, im częściej dane słowo występuje w badanym tekście. Jak na zawodach sportowych: najlepszy zawodnik zajmuje na podium miejsce z numerem 1, a inni – miejsca z numerami wyższymi. Możemy teraz sporządzić wykres, a właściwie histogram: na osi x odkładamy rangi, natomiast rzędne to liczba wystąpień wszystkich słów o danej randze. Zipf zaobserwował tutaj odwrotną proporcjonalność,

tj. $y_n \sim \frac{1}{n}$ (y_n to liczba słów o randze n), czyli tak samo, jak stanowi prawo Pareto (2) w szczególnym przypadku, kiedy wykładnik potęgi $m = -1$.

Oczywiście wykładnik m wywiedziony ze zgromadzonych danych zwykle nie będzie dokładnie równy -1 , bo przecież bioprocesory Zipfa *musiały* zrobić co najmniej kilka błędów. Ale będzie bliski liczby -1 , cokolwiek słowo *bliski* oznacza dla profesora lingwistyki. W późniejszych latach Zipf wykonał jeszcze ranking dużych miast amerykańskich (odpowiednio do wielkości ich populacji) i, ku swemu zdziwieniu, znowu otrzymał z wykresu wykładnik m bliski -1 . Odtąd odwrotna proporcjonalność bywa nazywana *prawem Zipfa*. Sam autor wolał nazwać odkryte przez siebie prawo empiryczne *zasadą najmniejszego wysiłku*. Nazwa ta prawdopodobnie przysłała mu do głowy dlatego, że słowa o najniższych rangach są jednocześnie krótkie (przyimki i spójniki), natomiast te z wysoką rangą – długie. Ciekawe, że podobny wynik uzyskuje się w odniesieniu do całych fraz, np. *nazywam się, co to takiego* i podobnych. Znowu otrzymuje się prawo Zipfa, a frazy występują tym rzadziej, im są dłuższe.

Dygresja: ranking jest niezwykle sprytną sztuczką wymyśloną przez statystyków do obróbki danych niemających dobrych wartości liczbowych, takich jak np. kolory czy typy antropologiczne. Obiektom tego rodzaju trudno przypisać jakieś konkretne wartości liczbowe, ale można nadać im rangi. Oczywiście nadawanie rang nie jest procedurą, którą można wykonać w jeden, jedyny sposób – i dlatego zawsze musimy powiedzieć, *jak to zrobiliśmy*. Ściśle rzecz biorąc, prawo Zipfa, w odróżnieniu od prawa Pareto, dotyczy właśnie rang, o czym często się zapomina.

Podobne badania prowadzono wielokrotnie w różnych krajach. Na przykład w Japonii sporządzono ranking gruntów wystawionych na sprzedaż w ciągu kilku lat. Zarówno ich ceny, jak i wielkości powierzchni spełniały prawo Zipfa, podobnie jak dochody ludności – prawo Pareto. Zbadano także rozkład dochodów firm w różnych branżach – i stale wychodziło to samo: prawo Pareto–Zipfa. Zupełnie nieoczekiwanie okazało się, że na obszarach dawnego ZSRR oraz Chin rankingi miast wyraźnie nie podporządkowują się prawu Zipfa! Wiemy, że w tych krajach ruchy migracyjne były przez wiele lat regulowane administracyjnie, zakłócając tym samym naturalne zjawiska demograficzne. Dla równowagi informujemy, że w roku 2004 stwierdzono stosowność prawa Zipfa do zupełnie specyficznego języka, jakim jest zapis nutowy. Wydawać by się zatem mogło, że Zipf odkrył jakieś bardzo ogólne prawo natury. Tylko jakie?

Hmmm... Dobre pytanie. Okazało się bowiem, że tzw. małpi tekst, czyli wynik czysto przypadkowego klepania w klawiaturę, także spełnia prawo Zipfa! Jest to wynik zupełnie pewny, bo w tym przypadku można właściwy wykładnik precyzyjnie obliczyć, nie tylko zbadać empirycznie.

Nauki ścisłe nie są aż tak niefrasobliwe pod względem rachunków jak Pareto, który bez większych problemów

logarytmował liry, franki czy dolary. My umiemy logarytmować jedynie liczby. Ranga – to właśnie zwykła liczba i zapewne dlatego prawo Zipfa, choć ograniczone do ustalonej wartości wykładnika potęgi, zyskało na popularności jako lepiej osadzone w rzeczywistości matematycznej. Te problemy rozważał matematyk francuski Benoît Mandelbrot (1924–2010), ten od fraktali. Postanowił on jakoś „wyprowadzić” prawo Zipfa, lub przynajmniej podać jego najbardziej ogólną postać. Chciałoby się też, aby prawo – skoro wydaje się tak fundamentalne – opisywało także wielkości o charakterze ciągłym. Wynik Mandelbrota z 1977 roku to:

$$(3) \quad f(r) = A(B+r)^{-s},$$

gdzie $f(r)$ oznacza częstotliwość występowania obiektów (inaczej mówiąc: prawdopodobieństwo) o randze r . Jeśli $B = 0$ oraz dodatkowo $s = -m = 1$, to wzór ten opisuje prawo Zipfa. Rezygnacja ze sztywno ustalonej wartości wykładnika s prowadzi nas do prawa Pareto. Wciąż jednakże nie opisujemy zmiennych czy wielkości mianowanych typu ciągłego. Dla takich przypadków powinniśmy raczej pisać

$$(4) \quad f(x) = A \left(B + \frac{x}{\lambda} \right)^{-s},$$

gdzie λ oznaczałaby jakiś charakterystyczny rozmiar („skalę”) wielkości x , a dzięki jej wprowadzeniu uzyskalibyśmy wyrażenie poprawne pod względem matematycznym – ewentualne jednostki, np. sekundy, skracają się i podstawa potęgi pozostaje liczbą niemianowaną. Na przykład w problemach związanych z lotnictwem przyjęło się wyrażać przyspieszenia (przeciążenia) w jednostkach g , choć przyspieszenie ziemskie g wcale nie jest „okrągłą” liczbą. Chciałoby się też, aby wielkość λ miała jasną interpretację fizyczną. I tak bywa: ciepło właściwe w okolicy przejścia fazowego drugiego rodzaju dobrze opisuje się równaniem (4), jeśli x oznacza temperaturę, λ jest temperaturą przejścia T_c , a stała $B = -1$. Biegli w termodynamice nazywają stałą s *wykładnikiem krytycznym*.

Wreszcie dochodzimy do sedna rzeczy. W zjawiskach, które są dobrze opisywane potęgowym rozkładem prawdopodobieństwa, czyli $f(x) = Ax^{-s}$, takiej charakterystycznej skali λ nie daje się wprowadzić w sposób naturalny, w tym samym sensie, w jakim naturalną miarą kątów są radiany. *Jakieś* jednostki oczywiście można wprowadzić, ale gdyby ktoś na przykład chciał używać jednostek trzykrotnie większych niż nasze ulubione, to jego opis różniłby się od naszego tylko wartością stałej A , natomiast wykładnik s pozostałby taki sam. O zjawiskach tego rodzaju mówimy, że nie mają one charakterystycznej skali.

Zipf i jego naśladowcy zademonstrowali kilka przykładów zjawisk SF. Czy istnieją także inne? I czy znajomość prawa Pareto–Zipfa–Mandelbrota jest do czegośkolwiek przydatna w codziennej rzeczywistości?

W ostatnich latach obserwujemy dosłownie wybuch aktywności naukowej, której celem jest wykazanie, że kolejne zachowanie Przyrody jest typu SF.

W literaturze znajdujemy wiele różnych wykresów, które

pokazują, że rozkład potęgowy zdarzeń jest dobrym opisem rzeczywistości w szerokim zakresie, z reguły obejmującym kilka rzędów wielkości. Odchyłki od linii prostej (w skali logarytmicznej) najczęściej tłumaczy się skończoną wielkością próbki podlegającej badaniom.

Przedstawimy teraz niektóre z tych badań i ich wyniki.

Piłka nożna, strzelone gole – fizycy brazylijscy ustalili, że ranking piłkarzy z narodowych lig czterech krajów: Włoch, Wielkiej Brytanii, Hiszpanii i Brazylii opisuje się tym samym wykładnikiem, niezależnie od kraju pochodzenia piłkarzy (x to liczba goli, y – liczba piłkarzy, którzy w ciągu sezonu strzelili x bramek). Praca miała w zamierzeniu być spektakularną prezentacją nowego spojrzenia na termodynamikę, w szczególności na pojęcie entropii, które od 1988 roku niestrudzenie lansuje pomysłodawca, Constantino Tsallis.

Internet i komputery – w szczególności dostęp do popularnych stron. Ranking wykazuje, że anglojęzyczne strony Wikipedii są odwiedzane z wykładnikiem ok. 0,3, natomiast w jej polskiej wersji – z wykładnikiem około 0,5 (dane z lipca 2003 r.). Obszerne pakiety programów, np. kompletne systemy operacyjne, składają się z dużej liczby pojedynczych plików. Rozkład ich objętości (tym razem nie ranking!) jest dobrze opisywany prawem potęgowym.

Popularność filmów – zbadano popularność wszystkich filmów wyświetlanych w USA w latach 1997–2003. Zmierzono ją na trzy sposoby: liczba tygodni spędzonych przez nie na liście 60 najbardziej dochodowych projekcji w danym tygodniu, dochód przyniesiony w pierwszym tygodniu wyświetlania oraz łączny czas obecności w kinach. Wszystkie te rozkłady prawdopodobieństwa są słabo skupione, a ich ogony zanikają potęgowo, z wykładnikiem bliskim 1/2.

Podatki – okazało się, że ranking cyfr wpisywanych przez podatników w formularze PIT podlega prawu Zipfa, przy czym cyfra „1” ma rangę 1 (w USA). Fakt ten wykorzystano do sporządzenia programu komputerowego, który typuje ewentualnych oszustów podatkowych jedynie na podstawie ich własnych zeznań. Podobno robi to skutecznie, ale bliższych szczegółów nie opublikowano.

Trzęsienia ziemi – histogram przedstawiający logarytm liczby trzęsień ziemi w funkcji ich magnitudy, czyli logarytmu wyzwolonej energii, wykazuje, że jest to zjawisko typu SF. Geolodzy znają je pod nazwą prawa Gutenberga–Richtera (w Japonii jako prawo Omori). Wykładniki, otrzymywane przez różnych badaczy, różnią się w zależności od rejonu, w którym rejestruje się trzęsienia.

Zjawiska atmosferyczne – takie jak np. opady deszczu, zostały zbadane niezwykle starannie w Bostonie przez sieć czujników podłączoną do komputera. Zarówno ilość wody w czasie jednego deszczu (za deszcz uznano opad trwający dłużej niż jedną minutę), jak i odstępy czasu pomiędzy kolejnymi opadami opisują się prawem

potęgowym. To samo dotyczy opadów śniegu, ale i monsunów nad wybrzeżem Indii.

Imiona – ranking imion męskich (w USA) ma rozkład potęgowy z wykładnikiem 0,9885, natomiast imion żeńskich 0,9918. Jest to najlepszy przykład prawa Zipfa, tzn. z wykładnikiem najbliższym jedynki, jaki udało się autorowi wyszperać w Internecie.

Szumy $1/f$ – tzn. o amplitudach odwrotnie proporcjonalnych do częstotliwości f , od dawna były intrygującą zagadką. Obserwuje się je np. podczas przepływu prądu elektrycznego przez elektrolity. Ich widmo ma w rzeczywistości kształt $1/f^\alpha$ z $\alpha \approx 1$, ale rozciąga się poprzez kilkanaście dekad częstotliwości: od mikroherców do megaherców.

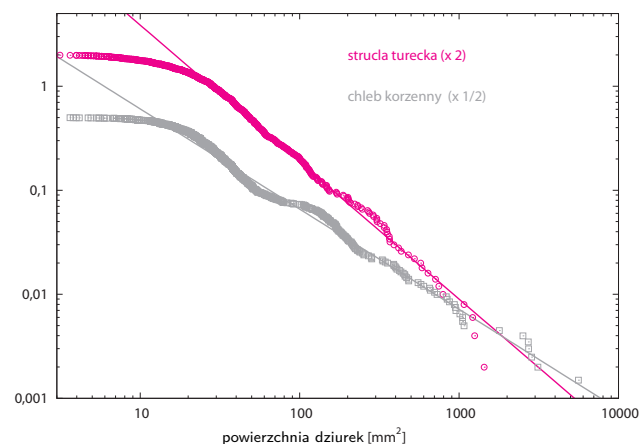
Kursy giełdowe akcji – w ustalonym dniu. To nie powinno nas zaskakiwać, bo jeśli dochody firm mają rozkład Pareto, to i ceny ich akcji powinny zachowywać się podobnie.

Zachowanie ludzkiego serca – w roku 2001 wykazano, że odstępy pomiędzy okresami małej zmienności aktywności serca pacjenta spełniają prawo Zipfa. Niestety wykładnik jest specyficzny dla każdego z nas oddzielnie i zależy m.in. od naszego trybu życia i nawyków. Proces chorobowy znacząco zmienia wartość wykładnika. Praktyczne zastosowanie tej informacji wymagałoby nieustannego monitoringu naszego cennego organu, na co jednakże nie zanoszą się w najbliższej przyszłości.

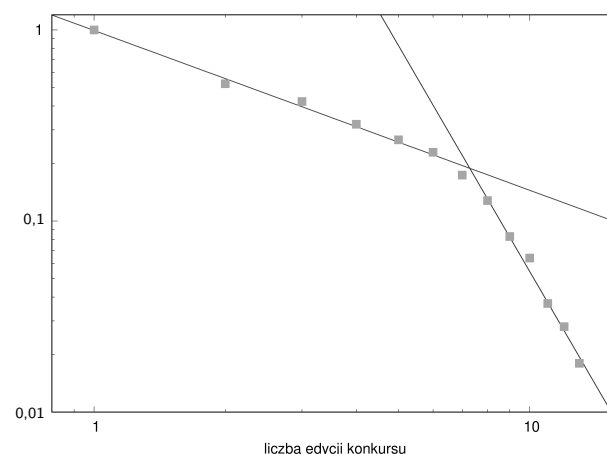
Cytowania prac naukowych – jeśli ustalimy sobie pewien zbiór prac naukowych, np. wybranego autora, a następnie przeprowadzimy ich ranking, ale tylko tych, które były cytowane przynajmniej raz, to znowu otrzymamy prawo Zipfa-Mandelbrota. Wykładnik okazuje się różny i zależy wyraźnie od wielkości próbki. Na przykład cytawalność 29 prac M. Gell-Manna daje się scharakteryzować wykładnikiem 8,892, natomiast 160 prac E. Wittena – wykładnikiem 2,491. Jeszcze liczniejszy zbiór prac 1120 najczęściej cytowanych fizyków wykazał się wartością wykładnika równą 0,395.

Podsumujmy. Po pierwsze nie każde zjawisko, którego przejawy mają potęgowy rozkład prawdopodobieństwa, zasługuje na miano zjawiska SF. Kiedy wykładnik potęgi przekracza 3, to rozkład jest na tyle skupiony, że istnieje jego wartość średnia, a wariancja jest skończona. Wykładnik o wartości pomiędzy 2 a 3 zapewnia istnienie jedynie wartości średniej, podczas gdy wariancja staje się nieograniczona – co oznacza, że prognozowanie zjawisk takiego rodzaju musi być bardzo niepewne. Wartość średnią (przeciętną) możemy wówczas mimo wszystko uznać za naturalną jednostkę czy skalę danego zjawiska. Wobec tego na nazwę zjawisk SF zasługują te charakteryzujące się wykładnikiem mniejszym od dwójki, ale większym od jedynki – przynajmniej gdy opisujemy je jako rozkłady prawdopodobieństwa, których „ogony” muszą być całkowalne (żeby całkowita energia szumów $1/f^s$ była skończona). Ograniczenie $s > 1$ nie dotyczy oczywiście sytuacji, kiedy zamiast wielkości fizycznych używamy

rang, albo badany rozkład prawdopodobieństwa jest różny od zera jedynie na skończonym odcinku. W szczególności rozkład równomierny można utożsamiać z rozkładem potęgowym z wykładnikiem $s = 0$. Pozostaje jednak problem dla $s \in (0, 2)$ w okolicy bliskich zera amplitud badanych zjawisk. Model Mandelbrota, dobry dla obiektów matematycznych zwanych fraktalami, musi się załamać przy opisie rzeczywistości fizycznej. Fraktale to obiekty geometryczne, których fragmenty po powiększeniu wyglądają tak samo jak oryginał (być może obrócony). Proste przykłady to: linia prosta, zbiór Cantora czy dywan Sierpińskiego. Tymczasem „każdy widzi”, że powiększenia materialnego dywanu Sierpińskiego nie da się prowadzić dowolnie długo. Taki proces musi się zakończyć, kiedy zaczną być widoczne pojedyncze cząsteczki chemiczne. Żartobliwie można powiedzieć, że Przyroda radzi sobie z matematycznymi nieskończonościami na dwa sposoby: od góry – dzięki skończonej prędkości światła i od dołu – poprzez zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Bardziej prozaicznie: wielkość dziurek na rysunku 1 jest ograniczona do rozmiarów kromki, z której one pochodzą. Natomiast naturę górnego ograniczenia nośnika rozkładu z rysunku 2 wypada pozostawić Czytelnikowi.



Rys. 1. Rozkład pól dziurek w wyrobach piekarniczych; mm^2 są umowne, bo powierzchnie dziurek były mierzone na mocno powiększonych zdjęciach. Dla lepszej czytelności obydwu rozkłady zostały przeskalowane. Wykładniki to: $-1,317$ (strucla turecka) oraz $-0,963$ (chleb korzenny)



Rys. 2. Prawdopodobieństwo pozostania jurorem/recenzentem w kolejnych edycjach pewnego corocznego konkursu. Widać, że po sześciu latach w składzie jury pozostaje mniej niż 20% jego oryginalnych członków. Wykładniki dla obu gałęzi to $-0,836$ i $-3,925$

Trudne pytania

Pewien pan – wykształcenie wyższe, politechniczne – słuchając podawanych w telewizji informacji o pandemii, wzrusza ramionami lekceważąco. Ma już diagnozę, jest zakażony... Nie widzi jednak konieczności uprzedzenia o tym odwiedzającego go kolegi. Macha ręką i komentuje: ja tam nie wiem, co to jest, bakteria, wirus, a może spisek koncernów...

Miałam nie pisać już o koronawirusie, ale co pewien czas to postanowienie we mnie gaśnie. Jak to tak? Bakteria, może wirus... pewnie Gates? Człowiek wykształcony, o bakteriach uczył się już w szkole podstawowej. Pandemia upewnia mnie, że kształcić siebie i innych należy stale. Ja też już nie wiem, co to są równania różniczkowe, a uczyłam się je rozwiązywać. Wiedza ucieka z nas jak z dziurawego wiadra. Bakteria czy wirus? (Gatesa nie bierzemy pod uwagę.) Nie wiem, czy Czytelnika *Delty* należy poinformować, jakie są różnice między bakteriami i wirusami – tak bardzo wydaje mi się to wiedzą podstawową. Ale zaryzykuję i zacznę od bakterii. Kto to wie – można zawsze przejść do ciekawszych tekstów matematycznych.

Bakterie w formie bliskiej do współczesnych były pierwszymi formami życia, jakie pojawiły się na Ziemi, a więc około 4 mld lat temu. Powstały prawdopodobnie z połączenia pierwszego komórkowego przodka LUCA z inną jednokomórkową istotą, która wtargnęła do tej pierwszej, zdomowała się i po wielu pokoleniach została włączona w jej skład. Produkt końcowy, żywy, odziedziczył elementy LUCA oraz mitochondria, małe struktury z tej drugiej komórki. Wszystkie funkcje komórki LUCA wymagały jednego uzupełnienia: systemu wytwarzania energii, który zapewniły właśnie mitochondria.

Od tego czasu bakterie ewoluowały. Ewolucja bakterii trwa tak samo długo jak ludzi – zaczynaliśmy od wspólnego przodka.

Dzisiejsze bakterie mają skomplikowane genomy (DNA) o różnej długości, co oznacza także różną liczbę genów. Najprostsze liczą ich około 300, najbardziej złożone około 10 tysięcy. To nie znaczy, że te pierwsze są „gorsze” – po prostu dały sobie radę w walce o przeżycie nawet tak skromnie wyposażone. Te z dużym genomem mają ważną cechę – tę samą funkcję mogą wykonywać na różne sposoby. Uszkodzenie jednego szlaku przemian nie oznacza śmierci osobnika i jego potomków. Szczęśliwy zbieg okoliczności i zdolności obserwacyjne uczonych XIX i XX wieku pozwoliły odnaleźć substancje, które hamują rozwój bakterii, eliminują je z życia – to antybiotyki, wytwarzane m.in. przez grzyby. Antybiotyki to przykład „walki o byt” w świecie mikroorganizmów. Oczyszczają przedpole do własnego trwania. Wiele z nich działa na całe grupy bakterii, znaleziono i zsyntetyzowano ich tysiące. Na pewien czas świat ludzi został wyratowany. Ale ewolucja trwała, bakterie zmieniały się tak, że stawały się odporne na antybiotyki. I były w tym szybsze niż chemicy projektujący kolejne odmiany leków. Antybiotyki zatrzymują żywotną dla bakterii reakcję – tworzenie błony i ściany komórkowej, syntezę białek itp. Obecnie istnieją, niestety, takie bakterie, które są odporne na wszystkie rodzaje znanych antybiotyków. Koszmar senny lekarza internisty.

Kiedy i jak powstały wirusy, tego nie wiemy.

Czy były to niezależne byty, które, jak właściciele mitochondriów, znalazły schronienie w bakteriach? Obecnie wirusy to krótkie genomy (kilka lub kilkanaście genów zapakowanych w błonę pożyczoną od bakterii, z którymi się zetknęły). Genetyczna przesyłka w poszukiwaniu gospodarza.

A może pewne kawałki genomów bakteryjnych wyodrębniły się w niezależne byty? We współczesnym genomie człowieka znajdują się fragmenty, niezakaźne, przypominające genomy wirusów.

Geny wirusów kodują kilka (kilkanaście) białek reprodukcji wirusa. Żeby się namnożyć, wirus korzysta z systemów gospodarza. Jeżeli zatrzymamy te reakcje, kierowane przez gospodarza, zabijemy i jego. Zazwyczaj wirusy mają enzym konieczny do powielania własnego genomu, a także białka dekorujące jego błonę zewnętrzną, potrzebne do przedostania się wirusa do wnętrza gospodarza. To jedyne możliwe cele działania potencjalnych leków i szczepionek. Znalezienie leków na razie okazało się za trudne. W zasadzie nie ma na świecie leków antywirusowych. Nawet bardzo groźna choroba AIDS 40 lat po odkryciu wirusa HIV nie doczekała się ani szczepionki, ani leku, który by z tej choroby wyleczył.

Rodzina koronawirusów jest bardzo duża. Wiemy, że wywodzą się z organizmów zwierzęcych. Kilka z nich, w wyniku pewnych mutacji, uzyskało zdolność atakowania organizmów ludzkich, wywołując choroby również wśród ludzi. Genom koronawirusa jest stosunkowo niewielki, szuka się czynników, które by inaktywowały ten genom lub jedno z białek powierzchniowych. Na razie bezskutecznie. Ponieważ wejście do komórki wirus realizuje poprzez połączenie się z białkiem obecnym na powierzchni prawie wszystkich naszych komórek, to szybko się w nich kryje i zaczyna destrukcję. Obecnie nic na to nie możemy poradzić. Niestety część zakażonych umiera.

Pisałam w stanie podgorączkowym, z katarą i bólem głowy. Myślę, że przeziębiona. Wnuka do domu nie wpuściłam.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

O Słońcu i gwiazdach „kwantowych”

Alex SCHWARZENBERG-CZERNY*

* Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

W XIX wieku – gdy tylko do światła Słońca i gwiazd zastosowano analizę widma płomieni, stało się jasne, że stanowią one kule gorącego gazu. Spróbujmy zatem opisać ich wnętrza, zakładając, że ciśnienie zmienia się z gęstością, jak w przemianie politropowej (opisanej w Δ_{20}^{10}):

$$(1) \quad K \left(\frac{M}{R^3} \right)^{1+1/n} \sim K \rho^{1+\frac{1}{n}} \approx P = kT \frac{\rho}{\mu_g} \sim \frac{kT}{\mu_g} \frac{M}{R^3} \sim \frac{GM^2}{R^2} \frac{1}{R^2},$$

gdzie kolorem wyróżniono równanie stanu gazu doskonałego; K i n to stałe, a μ_g oznacza masę jednej cząsteczki. Jeśli więc gęstość to stosunek masy M i objętości $V \propto R^3$, $\rho = M/V$, to ρ/μ_g jest proporcjonalne do liczby moli na jednostkę objętości, jak w tradycyjnej postaci tego równania. Dla kulistej gwiazdy w grubym przybliżeniu $\rho \sim M/R^3$, pomijając przy tym czynniki rzędu kilka (π i inne). W tej samej konwencji pole przekroju kuli $\propto R^2$, a w równowadze siła parcia jest rzędu siły grawitacji gwiazdy, GM^2/R^2 , skąd wynika wzór na ciśnienie. Porównując skrajne wyrażenia, mamy

$$(2a) \quad \frac{M^{n-1}}{R^{n-3}} \sim \left(\frac{K}{G} \right)^n \sim \text{const} \quad \text{oraz} \quad (2b) \quad \frac{kT}{\mu_g} \sim \frac{GM}{R}.$$

Zależność (2a) jest użyteczna i, co ważniejsze, weryfikowana w oparciu o obserwacje. Wynika z niej, że dla $n = 3$ gwiazda o danej masie zachowując równowagę mechaniczną (hydrostatyczną), może przyjmować różne promienie. Oznacza to, że jej równowaga jest obojętna. Można także pokazać, że dla $n < 3$ obiekty są w równowadze trwałe. Przykładem nie-gwiazdowym jest Ziemia o wnętrzu z ciekłych metali, gdzie gęstość praktycznie nie zmienia się z ciśnieniem ($n = 0$ w równaniu 1). Dla $n > 3$ gwiazda nie jest stabilna i albo ulega rozproszeniu, albo kurczy się, aż zmiana własności sprasowanego gazu spowoduje, że $n < 3$.

W praktyce w grupach podobnych gwiazd możemy spotkać dwie sytuacje:

(a) dla każdej gwiazdy z osobna równanie politropy (1) jest dobrym przybliżeniem dla pewnego ustalonego n , ale z różnymi wartościami K ; oraz (b) dla całej grupy n i K są ustalone. Przypadek (a) dotyczy gwiazd zbudowanych ze zwykłego gazu, w których transport ciepła na zewnątrz odbywa się dzięki konwekcji. Dla nas jest istotne, że elementy konwektywne poruszają się w czasie $\tau \sim \tau_d/\sqrt{\epsilon} \sim (\tau_d^2 \tau_t)^{1/3}$ – gdzie τ_d oznacza czas dynamiczny, a τ_t czas termiczny (szczegóły na marginesie), który jest znacznie krótszy niż czas termiczny τ_t – wymieniając z otoczeniem znikomą część ϵ zapasu energii, czyli w dobrym przybliżeniu uczestniczą w przemianie adiabatycznej (mówimy zatem o konwekcji quasi-adiabatycznej).

Przy temperaturach panujących w gwiazdach atomy są w pełni zjonizowane, tak że energia cieplna gazu pochodzi praktycznie wyłącznie z ruchu kinetycznego elektronów i jąder, a wtedy wykładnik adiabaty wynosi $\gamma \equiv 1 + 1/n = 5/3$, czyli $n = 3/2$. Takie modele politropowe dobrze opisują wnętrza gwiazd chemicznie jednorodnych, należących do tzw. ciągu głównego, jak np. Słońce o typie widmowym $Sp = G4$, ale chłodniejszych niż $Sp = K0$, i o mniejszej masie, takich jak czerwone karły, w których konwekcja obejmuje praktycznie całą gwiazdę. Ponieważ dla chłodnych gwiazd obserwowana zależność masa–promień to $R \sim M^{0,85}$, zatem z (2b) $T_c \sim M^{0,15}$, czyli dla coraz mniejszych mas temperatura w centrum spada. Dla masy $M < 0,08M_\odot$ temperatura jest za niska do zapłonu reakcji jądrowych – takie gwiazdy to brązowe karły, świecące kosztem zmagazynowanej energii termicznej (ich τ_t jest znacznie większe niż dla Słońca, zatem stygną bardzo długo). Podobną do nich politropową budowę mają licznie teraz odkrywane planety o masach większych od Jowisza. Natomiast podobnie do czerwonych olbrzymów, oprócz rozdętej politropowej otoczki konwektywnej, w samym centrum niczym pestka tkwi małe, ale bardzo gęste jądro (składające się z metalicznego wodoru w przypadku Jowiszów i zdegenerowanego helu – o czym później – w przypadku czerwonych olbrzymów).

Czytelnik Oburzony, że to wszystko oszustwo szyte zbyt grubymi nićmi, brakujące czynniki znajdzie w poprzednim artykule tej serii w Δ_{20}^{10} .

By przенosić ciepło, element konwektywny musi mieć temperaturę różniącą się od otoczenia o δT , a względnie o $\epsilon = \delta T/T$. Zanedbując siłę wyporu, element pokonuje drogę R pod działaniem przyspieszenia GM/R^2 w czasie dynamicznym τ_d , gdzie $R = (GM/R^2)\tau_d^2$, czyli $\tau_d \sim \sqrt{R^3/GM}$ (w przypadku Słońca $\tau_d \approx 1$ h). W praktyce wskutek częściowego równoważenia grawitacji przez siłę wyporu na element konwektywny działa przyspieszenie równe $\epsilon GM/R^2$, zatem czas będzie rzędu $\tau \sim \tau_d/\sqrt{\epsilon}$. Zakładając, że konwekcja dotyczy całej gwiazdy, pojemność cieplna wszystkich elementów jest porównywalna z jej energią grawitacyjną GM^2/R . W rzeczywistości transportowane jest ciepło związane z nadwyżką temperatury $\epsilon GM^2/R$, gdzie $\epsilon \ll 1$. Jasność gwiazdy to $L \sim \epsilon GM^2/(R\tau) \sim \epsilon^{3/2} GM^2/(R\tau_d)$, czyli $\epsilon = (\tau_d/\tau_t)^{2/3}$, gdzie $\tau_t \sim GM/(r^2 L) \approx 10^7$ lat jest czasem termicznym, potrzebnym do wyświecenia przez gwiazdę zapasu energii cieplnej. Oczywiście gwiazdy odnawiają ten zapas dzięki reakcjom termojądrowym, co sprawia, że żyją znacznie dłużej.

W znacznej części wnętrza Słońca do transportu energii zamiast konwekcji wystarcza promieniowanie, zatem zależność $P(\rho)$ może być słabsza niż dla adiabaty, $n > 3/2$. Budowę wnętrza Słońca możemy przybliżyć, zakładając jak Arthur Eddington, że stosunek ciśnienia gazu i ciśnienia promieniowania jest stały: $P_r = \beta P_g$, czyli $P_r = 4\sigma T^4/3c = \beta P_g = \beta \rho/\mu_g kT$. Stąd mamy $T \sim \rho^{1/3}$, zatem całkowite ciśnienie to $P = (1 + \beta)P_g \sim \rho^{4/3}$, co odpowiada politropie $n = 3$. Przybliżenie jest niedoskonałe, bo wtedy Słońce byłoby niestabilne (w równowadze obojętnej, jak wynika z 2a). W rzeczywistości dzięki rosnącej ze spadkiem T roli ciśnienia gazu średnie n jest bliskie, ale mniejsze niż 3, więc na szczęście nasza najbliższa gwiazda prowadzi się dobrze.

Gdy w podobnej do Słońca lub nieco bardziej masywnej gwiazdzie wyczerpie się w jądrze paliwo jądrowe (wodór) i zostanie hel, niezdatny do dalszej produkcji energii z powodu za niskiej temperatury, to parametr n opisujący jądro takiej gwiazdy rośnie od pierwotnej wartości $3/2$ do nieskończoności, wyrównując temperaturę poprzez odprowadzenie energii na zewnątrz. Co oczywiste, już po zbliżeniu się do $n = 3$ staje się ono niestabilne i pod naciskiem otoczki kurczy się, aż osiągnie $\rho_c \sim 10^6$ g/cm³, kiedy istotne stają się efekty kwantowe, o czym poniżej.

Spektakularną ilustracją przypadku (b) są białe karły, dla których K i n są z grubsza stałe. Postaramy się je wyznaczyć. Jak wiadomo, Syriusz A to najjaśniejsza gwiazda naszego nieba. Z precyzyjnych obserwacji jego pozycji wiadomo było, że wraz z towarzyszem – Syriuszem B – o podobnej masie, obiegają po orbitach wspólny środek ciężkości układu. Wobec małej jasności składnik B długo krył się w blasku składnika A. Gdy dzięki postępowi techniki udało się go zaobserwować, okazał się gorętszy (bardziej błękitny) niż Syriusz A, a zatem jego nikły blask można wyjaśnić tylko bardzo małym promieniem (nieco większym od Ziemi), co oznacza gęstość materii przekraczającą tonę/cm³.

Siłę można zapisać jako zmianę pędu p_x w czasie, $F_x = \delta p_x/\delta t$. Zatem ciśnienie P jako parcie F gazu na jednostkę powierzchni można zapisać jako strumień padającego/odbitego pędu (czynnik 2 pomijamy). Musimy jednak wziąć pod uwagę dwie możliwe prędkości elektronu, klasyczną $v_x \ll c$ i relatywistyczną $v_x = c$:

$$P \sim \frac{\rho}{\mu_e} p_x v_x \sim \frac{\rho}{\mu_e} p_x \begin{cases} \frac{p_x}{m_e} & \text{klasycznie} \\ c & \text{relatywistycznie,} \end{cases}$$

gdzie ρ/μ_e to liczba cząstek w jednostce objętości, a v_x i p_x to ich prędkość i pęd, co daje strumień pędu na jednostkę powierzchni. Rozróżniamy tu masę gazu przypadającą na elektron – μ_e , rzędu masy 2 protonów – od masy samego elektronu m_e , prawie 2000 razy mniejszej. Wraz ze wzorami z marginesu otrzymujemy

$$(2) \quad P \sim \begin{cases} \left[\frac{3^{2/3}}{20\pi^{2/3}} \right] \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} & x \ll 1 \\ \left[\frac{3^{1/3}}{8\pi^{1/3}} \right] hc \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} & x \gg 1, \end{cases}$$

gdzie $x \equiv p_x/m_e c \sim (h/m_e c)(\rho/\mu_e)^{1/3} \sim \lambda_C/\Delta x$ i $\lambda_C = h/m_e c$ jest nazywana Comptonowską długością fali elektronu. Nawiasy kwadratowe zawierają czynniki pominięte w wyprowadzeniu, których dopisanie daje wynik ścisły. Dla krytycznej wartości $x = 1$ dostajemy gęstość, przy której można uznać, że elektrony są relatywistyczne:

$$(3) \quad \rho_{rel} = \mu_e \left(\frac{m_e c}{h} \right)^3 \sim 10^6 \text{ g/cm}^3.$$

Z powyższego wynika, że przy nierelatywistycznej degeneracji $n = 3/2$, a więc białe karły winny spełniać zależność $M^{1/2} R^{3/2} = \text{const}$. Masy wyznaczamy jak dla Syriusza B, z układów podwójnych. Natomiast promień białego karła można wyznaczyć z efektu poczerwienienia grawitacyjnego. W granicach błędów białe karły o masach $M < 1 M_\odot$ faktycznie spełniają powyższą zależność $M(R)$. Pospolite białe karły mają $M \sim 0,6 M_\odot$, ale takie o $M > 1,2 M_\odot$ są spotykane.

Fascynujący rezultat dostajemy także dla relatywistycznej degeneracji, czyli $n = 3$. Wówczas $K \sim hc/\mu_e^{4/3}$, więc wzór (2a) zamienia się wprost we wzór na masę

Warto dodać, że otoczka takiej gwiazdy rozdyma się, a gwiazda – nazywana wtedy czerwonym olbrzymem – przypomina brzoskwinie o twardej pestce w środku miękkiej, delikatnej otoczki. W porównaniu do rozmiaru brzoskwinia pestka jest grubości włosa i, choć zawiera kilkadziesiąt procent masy gwiazdy, ma promień zaledwie trochę większy od Ziemi, a otoczka może mieć rozmiar orbity Merkurego lub nawet większy.

Jak zauważył Subrahmanyan Chandrasekhar, powyżej pewnej gęstości materia jest nie tylko całkowicie zjonizowana, ale także elektrony jako fermiony o spinie $1/2$ nie mogą zajmować tych samych stanów w przestrzeni położeń i pędów. Minimalna objętość takiego stanu wynika z zasady nieoznaczoności Heisenberga w trzech wymiarach:

$$\Delta x^3 \Delta p_x^3 \geq h^3,$$

gdzie h jest stałą Plancka. Średnia objętość wynosi $\Delta x^3 = \mu_e/\rho$, gdzie $\mu_e \sim 2m_H$ jest średnią masą gazu przypadającą na elektron, zwykle rzędu masy 2 nukleonów (protonu/neutronu). Zatem średnia wartość bezwzględna pędu w osi x to

$$p_x \sim \Delta p_x \sim h(\rho/\mu_e)^{1/3}.$$

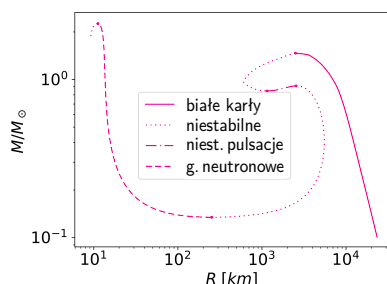
Przy gęstości białych karłów tak wielkiemu pędowi odpowiada tzw. energia Fermiego, łączna energia kinetyczna elektronu w 3 kierunkach $E_F(p)$, znacznie wyższa od energii termicznej kT cząstek w najgorętszych gwiazdach $E_F \gg kT$. Oznacza to, że prawie wszystkie stany energetyczne poniżej E_F są zajęte, bo liczne pustostany odpowiadałyby dostarczeniu gazowi dodatkowej energii, znacznie większej niż termiczna. O takim gazie mówimy, że jest zdegenerowany.

Jeśli z powierzchni gwiazdy emitowany jest foton w linii widmowej o częstotliwości ν_0 (energii $E = h\nu_0$), co na mocy relatywistycznego wzoru $E = mc^2$ odpowiada masie dynamicznej (w ruchu) $m = h\nu_0/c^2$, to ma on też energię potencjalną $-GMm/R$ i by osiągnąć $R = \infty$, musi wykonać pracę, tracąc energię $h\nu_0 - h\nu_\infty = GMh\nu_0/(Rc^2)$. Jeśli ν_0 znamy z laboratorium, a obserwujemy ν_∞ i znamy M , to możemy wyliczyć R .

białego karła, zwaną masą Chandrasekhara:

$$(4) \quad M_{Ch} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\left[\frac{3^{1/3}}{8\pi^{1/3}} \right] \frac{hc(n+1)}{\mu_e^{4/3} G} \right]^{n/2} \mu_1.$$

Na podstawie ścisłych wyprowadzeń w poprzednim artykule tej serii stałą proporcjonalności K/G uzupełniłem o różne pomijane do tej pory czynniki. Wstawiając $\mu_e = 2\mu_H$ odpowiadające masywnemu białemu karłowi o składzie zdominowanym przez tlen i węgiel, otrzymujemy $M_{Ch} = 1,44 M_{\odot}$. Masę całej gwiazdy można wyrazić przez stałe fizyczne, głównie atomowe! Nasz wynik oznacza, że biały karzeł nie może mieć masy większej niż M_{Ch} , bo osiągając relatywistyczną degenerację, staje się niestabilny mechanicznie. Szczególnie spektakularny jest rezultat dla białego karła w układzie podwójnym, w którym towarzysz „na siłę” dostarcza mu materii, aż ten pierwszy osiągnie M_{Ch} . Taki nieszczęśnik zapada się wtedy pod własnym ciężarem, a dzięki uwolnionej energii grawitacyjnej i reakcjom jądrowym spektakularnie wybuchu jako *supernowa typu Ia*: pod olbrzymim naciskiem jądra rozpadają się na nukleony, a pary proton-elektron łączą się w neutrony, które też są fermionami i podlegają zakazowi Pauliego.



Realistyczna zależność masa–promień $M(R)$ dla białych karłów i gwiazd neutronowych na podstawie rachunków warszawskiej grupy astrofizyki gwiazd neutronowych w CAMK (rysunek sporządzony przez Leszka Zdunika)

Gwiazdy dostatecznie gęste, by istotny stał się zakaz Pauliego w przypadku ciężkich fermionów, protonów i neutronów, to *gwiazdy neutronowe*. Są one kolejną, bardziej zwartą niż białe karły, rodziną gwiazd, co pokazuje rysunek na marginesie. Prosta zależność $M(R)$ dla białych karłów świadczy o dobrym przybliżeniu przez politropę $n = 1,5$. Jednak dla lekkich gwiazd neutronowych prawie płaski wykres świadczy o średnim n bliskim 3. W nich neutronizacja nie jest zupełna i wzrost gęstości prowadzi do zamiany dalszych atomów na neutrony, przy niewielkiej zmianie ciśnienia. Przypomina to kondensację pary w temperaturze 100°C , gdy ściskanie daje więcej cieczy, ale ciśnienie jest nadal ciśnieniem pary nasyconej. Z kolei dla mas ponad $0,5 M_{\odot}$ w centrum neutrony są tak ciasno upakowane, że zaczynają odpychać się siłami silnymi (jądrowymi), dominującymi nad ciśnieniem degeneracji, i n zbliża się do 1, a wykres staje się prawie pionowy. Maksymalna masa gwiazdy neutronowej wynosi, jak nam się obecnie wydaje, nieco powyżej $2 M_{\odot}$ i jest skutkiem efektów silnego pola grawitacyjnego, wynikających z relatywistycznych poprawek do teorii grawitacji. Przy tej masie w gwiazdzie neutronowej powoduje ono niezamierzalne zakrzywienie czasoprzestrzeni, zgodnie z ogólną teorią względności. To zakrzywienie jest tylko kilka razy mniejsze niż w przypadku czarnej dziury. Czy pomiędzy rodziną gwiazd neutronowych a czarnymi dziurami istnieje trzecia rodzina zwartych gwiazd? Poszukiwania tak egzotycznych obiektów trwają.

Kwantowy efekt Zenona od kuchni

Stanisław SOŁTAN*

* Doktorant, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Wyobraźmy sobie, że gotujemy wodę na gazie. Spieszy nam się, więc co chwila podnosimy przykrywkę garnka i sprawdzamy, czy woda się gotuje. Ale im częściej sprawdzamy, tym bardziej czas nam się dłuży. „A watched pot never boils” – pilnowany garnek nigdy nie wrze – mówią Anglicy. To jednak jest uczucie czysto subiektywne. Zjawiska fizyczne, jakie spotykamy na co dzień, podlegają identycznym procedurom niezależnie, czy je obserwujemy, czy nie. Teorie fizyczne, które stosujemy do opisu zjawisk, nie interesują się w ogóle takimi „formalnościami” jak pomiary i obserwacje.

Sprawy zmieniają się istotnie, gdy od zwykłych dla nas zjawisk makroświata przejdziemy do skali atomowej czy mniejszej. Teorią konieczną do opisu zjawisk w takiej skali jest mechanika kwantowa. Inaczej niż przywykliśmy, teoria ta obejmuje kwestie formalne, a opis pomiaru (w kategoriach bardzo ogólnych) jest jej istotną częścią. Zjawiska fizyczne przestają być obojętne na to, czy je



obserwujemy, czy nie. Żeby pokazać różnicę przynajmniej na poziomie zasad, zastąpię garnek z wodą zmyślnym garnkiem ze zmyśloną wodą, który udawać będzie system podległy mechanice kwantowej. Przełożenie tej teorii na praktykę omówimy pobieżnie później.

Wiadomo, że zanim woda się zagotuje, musi przejść przez stan pośredni, kiedy „bąbelkuje”. Zmyślna woda rządzić się będzie takim przewrotnym prawem: ilekroć podnosimy przykrywkę, nigdy nie widzimy, by „bąbelkowała”. Może nie wrzeć lub może wrzeć, póki trzymamy podniesioną przykrywkę, ale nic innego. Lecz nie może zacząć wrzeć, jeśli wcześniej nie zaczęła bąbelkować, a stąd wniosek, że nigdy nie zacznie wrzeć, gdy będziemy trzymać podniesioną przykrywkę.

Opuścimy zatem przykrywkę na czas τ , po czym ją podniesmy. Jak będzie zachowywać się woda udająca system kwantowy? Okazuje się, że probabilistycznie: dla danego czasu τ woda po odsłonięciu będzie wrzeć z prawdopodobieństwem q . Spróbujmy zatem zagotować wodę w czasie t , sprawdzając w tym czasie n razy co czas $\tau = \frac{t}{n}$, czy nam się udało (zakładamy, że podnosimy przykrywkę na zanedbywalnie krótki moment). Prawdopodobieństwo, że w czasie t **nie uda** nam się zagotować wody, wynosi

$$P = (1 - q)^n = \left(1 - \frac{q}{\tau} \cdot \tau\right)^n = \left(1 - \frac{q}{\tau} \cdot \frac{t}{n}\right)^n.$$

Zapisaaliśmy to tak, by przypominało definicję liczby Eulera e :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e = 2,718281828459\dots$$

Łatwo z tej definicji wykazać (zastępując n przez $\frac{n}{x}$, gdzie x jest stałe), że

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x.$$

Gdy n jest duże, fizycy na ogół nie przejmują się, że n nie jest nieskończone. Zatem zapiszmy prawdopodobieństwo niezagotowania wody jako zależność wykładniczą

$$P \simeq e^{-\frac{q}{\tau}t}.$$

Nasze szanse zagotowania wody zależą zatem od tego, jak q zależy od τ . Kolejną rzeczą, którą zwykli robić fizycy, jest rozwijanie funkcji w szereg potęgowy: $q = q_0 + q_1\tau + q_2\tau^2 + \dots$ i zanedbywanie wyższych potęg, jeśli τ jest małe (a takie jest, bo mamy zamiar często sprawdzać, czy woda już się zagotowała). Ponieważ powiedzieliśmy, że woda nie może zacząć wrzeć, póki nie zacznie „bąbelkować”, należy przyjąć, że $q = 0$, gdy $\tau = 0$. Musi zatem być $q_0 = 0$. Okazuje się też, że musi zachodzić $q_1 = 0$, by nasz garnek z wodą poprawnie udawał system kwantowy. Zatem najniższy nieznikający parametr w rozwinięciu q występuje przy drugiej potędze τ . Możemy więc przybliżyć:

$$P \simeq e^{-q_2 \cdot \tau \cdot t}.$$

Im częściej sprawdzamy wodę, tym mniejsze jest τ i tym mniejsza jest wartość absolutna wykładnika w powyższym wzorze. W konsekwencji P spada wolniej, czyli większe jest prawdopodobieństwo, że będziemy dłużej czekać na zagotowanie. Cały zaś proces zatrzymałby się zupełnie przy $\tau \rightarrow 0$ (w tej granicy uzyskujemy, jak widać, ten sam wynik, co w przypadku, gdy trzymamy pokrywkę cały czas podniesioną).

Podsumujmy. Zmyślny garnek udaje system kwantowy, stosując się do trzech regułek: (1) nigdy nie daje się zaobserwować w stanie pośrednim; (2) gdy jest obserwowany, zachowuje się probabilistycznie;

(3) dla krótkich czasów przebywania w stanie pośrednim prawdopodobieństwa są w przybliżeniu proporcjonalne do kwadratu tego czasu (zerowy i pierwszy wyraz rozwinięcia znika). Zwróćmy też uwagę na założenie *implicite*, że podnoszenie i opuszczanie przykrywki udaje procedurę pomiarową na systemie kwantowym. Skutkiem stosowania tych regułek jest to, że im częściej sprawdzamy, co się dzieje, tym z mniejszym prawdopodobieństwem zobaczymy jakąkolwiek zmianę. Zjawisko to jest rzeczywiste dla systemów mikroskopowych; z rzadka tylko nazywane jest efektem pilnowanego garnka („a watched pot effect”), a dużo szerzej znane jest pod mianem kwantowego efektu Zenona. Drugi tytuł zawdzięczamy skojarzeniu z poglądami starożytnego greckiego filozofa Zenona z Elei. Dowodził on niemożności ruchu (i w konsekwencji jakiegokolwiek zmiany) poprzez myślowe rozbieranie rzeczywistych ruchów na coraz drobniejsze fragmenty. Zgodnie z regułą, że jeśli rzeczywistość nie zgadza się z teorią, to tym gorzej dla rzeczywistości – Zenon twierdził, że zmysły nas mamią. Być może zgodziłby się on na kompromis, jaki wynika z powyższych rozważań: świat zmienia się, gdy przyzymamy na to oko.

Omówimy teraz, na ile zastosowane regułki symulują rzeczywistość.

(1) Zmyślony garnek symuluje nam „prosty” układ mikroskopowy. Może to być np. niestabilne jądro atomowe, atom z jednym elektronem na wyższym poziomie energetycznym lub atom uwięziony w pułapce optycznej, tzn. w potencjale wytworzonym przez przecinające się wiązki laserowe. Czytelnik słusznie zaprotestuje przeciw nazwaniu dowolnego z tych układów prostym. Prostota takiego układu ma polegać na tym, że może on znajdować się tylko w jednym z dwóch stanów. Stan 1: woda się nie gotuje, jądro się nie rozpadło, elektron wciąż znajduje się w stanie wzbudzonym, a atom wewnątrz pułapki. Stan 2: woda wrze, jądro się rozpadło, elektron opadł na niższy poziom, emitując foton, a atom uciekł z pułapki.

Nie obserwujemy jądra, które już-już zaczyna pękać. Elektron przechodząc od jednego poziomu do drugiego, oddaje energię w postaci dokładnie jednego fotonu – kwantu światła. Nie obserwujemy nigdy, by elektron stopniowo wypuszczał strużkę energii w trakcie zmieniania poziomu. Podobnie jednoznacznie zachowuje się też atom w pułapce optycznej – albo jest w pułapce, albo poza nią. Zaznaczmy, że do pomyślenia jest sytuacja, gdy układ przechodziłby przez jakieś obserwowalne stany pośrednie, np. jądro miało by jakiś dodatkowy stan wzbudzony, a elektron przed przejściem do najniższego poziomu energetycznego mógłby się znaleźć w jakimś pośrednim, emitując w sumie dwa fotony po drodze. Kwantowość jednak polega tu na nieciągłości: mamy konkretne stany, które da się zaobserwować, i nic pośredniego między nimi. Układ z większą liczbą stanów działać będzie na tej samej zasadzie co układ z dwoma.

(2) Kwintesencją kłopotów z pomiarami w mechanice kwantowej jest rozsławiona szeroko po świecie zasada nieoznaczoności Heisenberga. Wedle niej, gdy mierzymy położenie jakiejś swobodnie poruszającej się cząstki, to nigdy nie znamy jej pędu, i odwrotnie: gdy zmierzmy pęd, nie znamy położenia. Możemy próbować mierzyć i pęd, i położenie, ale otrzymany wynik jest zawsze obarczony niepewnością. Im jedno znamy dokładniej, tym drugie mniej, i to z fizycznej konieczności, a nie z powodu niedoskonałości naszych pomiarów. Oznacza to, że gdy nie mierzymy ani położenia, ani pędu, to cząstka znajduje się w stanie, dla którego nie jest określone ani konkretne położenie, ani konkretny pęd. Stan układu jest tak zwaną superpozycją stanów o różnych położeniach i różnych pędach. Skoro pomiary pędu i położenia mają wbudowaną niedokładność, to znaczy, że rządzi nimi prawo probabilistyczne; konkretne prawdopodobieństwa zmierzania takiego czy innego pędu lub położenia zadane są przez wewnętrzne parametry tej superpozycji (czyli, inaczej mówiąc, funkcję falową).

W podobnej (acz prostszej) sytuacji jest nasz „prosty” układ kwantowy – jeśli nie jest obserwowany, to jest w superpozycji stanu 1 i stanu 2. W moim zmyślonym modelu gotującej się wody rolę superpozycji pełniła woda „bąbelkująca”, czyli taka w stanie pośrednim. Jak widać może z poprzedniego akapitu, nazwanie

superpozycji jedynie stanem pośrednim między dwoma stanami możliwymi do zaobserwowania jest pewnym zubożeniem. Superpozycja aspiruje raczej do bycia jedynym właściwym opisem fizycznego stanu. My jednak chcieliśmy co chwila nasz system sprawdzać, sprowadzając superpozycję do stanu 1 lub 2, stąd takie porównanie. Superpozycji, dodam, nie można traktować jako zwykłego rozkładu prawdopodobieństwa różnych stanów, o czym z braku miejsca wspominam bez podania uzasadnienia.

(3) Dla długich czasów prawdopodobieństwo pozostania w stanie początkowym (przy braku pomiaru) w powyższych przykładach zanika wykładniczo. Jest to rezultat tzw. Złotej Reguły Fermiego. Można łatwo sprawdzić, że w takim przypadku (kiedy $1 - q$ zanika wykładniczo) ścisły wynik modelu z garnkiem nie przejawiałby zależności od τ ani nawet nie różniłby się od sytuacji bez pomiaru. Lecz dla krótkich czasów zachodzi odejście od zaniku wykładniczego. W szczególności dla dostatecznie krótkich czasów, jak wspomniałem, owo prawdopodobieństwo zanika kwadratowo. Jest to prawdą dla każdego systemu kwantowego. Dla różnych układów i częstotliwości pomiarów możemy mieć różne efekty; z reguły dla małej częstotliwości spodziewamy się obowiązywania Złotej Reguły, a dla dużej – kwantowego efektu Zenona. Zdarzają się jednak układy z zakresami częstotliwości, w których zachodzi efekt anty-Zenona: przyspieszenie zmian wskutek obserwacji. Jest to coś, na co Zenon z Elei za żadne skarby by się nie zgodził.

Zostało nam zatem do omówienia założenie o podnoszeniu przykrywki garnka i, jak to zwykle bywa z założeniami *implicite*, jest ono najbardziej kłopotliwe. Z podanych przykładów właściwie tylko w przypadku atomów uciekających z pułapki optycznej można zrealizować bez większych problemów (i zrealizowano) scenariusz przypominający nasze zmyślane gotowanie wody. Inne doświadczenia badające efekt Zenona zwykle wykorzystują silne pulsy laserowe przy pomiarach. Choć z punktu widzenia teorii przedstawiona analogia garnka jest wciąż akceptowalna, taki pomiar mało przypomina subtelne zagłądanie pod lekko podniesioną przykrywkę.

Zresztą, wzorem Zenona, zaskakujący rezultat braku zmian przy ciągłej obserwacji winien nas naprowadzić na trop, że coś jest nie tak. Inaczej niż Zenon podejrzewać winniśmy raczej teorię – opis pomiaru należy poprawić. Potrzebny jest opis kwantowy nie tylko mierzonego układu, ale też i aparatury pomiarowej, na szczęście traktowanej wciąż w bardzo uproszczony sposób. Lecz oddziaływanie jednego z drugim, nawet niebezpośrednie (np. detektor rejestrujący foton wyemitowany przez elektron zmieniający stan energetyczny) wciąż może wywoływać efekt Zenona lub anty-Zenona, przynajmniej w teorii. Nie może jednak zupełnie zatrzymać układu mierzonego, jak mogło się zdarzyć w stosowanym tu modelu. Czy Zenon z Elei by się na to zgodził? Być może twierdziłby, że mamia nas detektory, jeśli nie zmysły. . .

Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2021

Zadania z fizyki nr 708, 709

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*



708. Na poziomej szorstkiej powierzchni znajdują się dwie jednakowe cienkościennie, puste w środku walce, których osie są równoległe. Jeden walec spoczywa, drugi toczy się w jego kierunku bez poślizgu z prędkością v . Następuje zderzenie sprężyste (tarcie między walcami podczas zderzenia można zaniedbać). Współczynnik tarcia między walcami i powierzchnią wynosi μ . Jaka jest największa odległość między walcami po zderzeniu?

709. Statek kosmiczny oddala się radialnie od Ziemi z prędkością $v = 3c/5$ (c – prędkość światła w próżni). Ze statku nadawana jest audycja radiowa. Czas nadawania audycji w studio na statku $\tau = 30$ min. Jak długo trwa odbiór audycji na Ziemi?

Klub 44 M

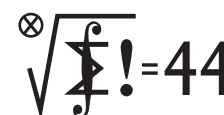
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 801 ($WT = 2,36$) i 802 ($WT = 2,36$) z numeru 5/2020

Zbigniew Skalik	Wrocław	44,41
Andrzej Kurach	Ryjewo	43,53
Marek Spychała	Warszawa	42,98
Jakub Węgrecki	Kraków	41,76
Marcin Małogrosz	Warszawa	41,65
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,33
Karol Matuszewski	Rawicz	40,67
Janusz Olszewski	Warszawa	39,41

Pan Zbigniew Skalik – po raz czwarty! Ależ zgęstka pod magiczną linią 44p.

Zadania z matematyki nr 811, 812

Redaguje *Marcin E. KUCZMA*



811. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma tę własność, że każda z funkcji $g(x) = xf(x)$ oraz $h(x) = 2f(2x) - f(x)$ ma granicę 0 przy $x \rightarrow 0$. Czy wynika stąd, że także funkcja f ma granicę 0 przy $x \rightarrow 0$?

812. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ iloczyn $\prod_{k=2}^n (2^k - 2)$ dzieli się przez $n!$.

Zadanie 812 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Rozwiązanie zadania M 1657.

(a) Każda osoba zmieniła stół, przy którym siedzi, $2n - 1$ razy, czyli nieparzystą liczbę razy. Stąd wniosek, że skład osób przy stołach po prostu się zamieniły.

(b) Udowodnimy indukcyjnie, że jest to możliwe dla każdego $n \geq 1$. Przypadek $n = 1$ jest łatwy do rozważenia. W przypadku $n \geq 2$ oznaczmy stoły przez A i B , osoby siedzące przy tych stołach odpowiednio przez a_1, a_2, \dots, a_n oraz b_1, b_2, \dots, b_n . Rozważmy następujący ciąg zamian. Najpierw a_n zamienia się miejscami kolejno z $b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_{n-1}, a_{n-1}, b_n$, w wyniku czego następuje pełna zamiana składów przy stołach. Następnie b_n zamienia się miejscami kolejno z $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$, w wyniku czego przy stole A siedzą osoby a_1, a_2, \dots, a_{n-1} oraz b_n , a przy stole B siedzą osoby b_1, b_2, \dots, b_{n-1} oraz a_n . Pozostaje zastosować założenie indukcyjne dla wszystkich osób poza a_n i b_n .



Rozwiązanie zadania M 1659.

Zauważmy, że każdy delfin wykonał dokładnie $2n - 1$ skoków, a zatem żaden z nich nie mógł opłynąć całego basenu. Dla każdego delfina rozważmy skierowany łuk basenu rozpoczynający się w początkowym zbiorniku delfina, a kończący w jego zbiorniku końcowym. Jeżeli delfin wykonał s skoków zgodnie z ruchem wskazówek zegara (patrząc na basen od góry), to wykonał $2n - 1 - s$ skoków w przeciwnym kierunku, a zatem jego łuk ma skierowaną długość $2s - 2n + 1$. Łączna długość wszystkich takich łuków jest równa zero, gdyż przy każdej akrobacji długość łuku jednego z uczestniczących w niej delfinów wzrasta o 1, a drugiego – maleje o 1.

Niech z będzie delfinem, który wykonał najwięcej skoków zgodnie z ruchem wskazówek zegara, czyli równoważnie – ma najdłuższy łuk. Zauważmy, że delfin z skakał wyłącznie zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Rzeczywiście, gdyby z skoczył w przeciwnym kierunku podczas wspólnej akrobacji z delfinem x , to oznaczałoby, że początkowo x znajdował się we (zegarowo) wcześniejszym

zbiorniku, a końcowo w późniejszym, gdyż była to ich jedyna zamiana. W konsekwencji łuk x byłby dłuższy niż łuk z , co jest sprzeczne z wyborem z .

Oznaczmy zbiorniki kolejno liczbami $1, 2, \dots, 2n$, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, przy czym 1 jest początkowym zbiornikiem delfina z . Skoro z wykonał dokładnie $2n - 1$ skoków i w każdym z nich numer zbiornika wzrastał o 1, to końcowym zbiornikiem z jest $2n$. Wykażemy, że obręcz między zbiornikami 1 oraz $2n$ nie została użyta do wykonania żadnej akrobacji.

Przypuśćmy przeciwnie – że w pewnym momencie delfin x znajdujący się w zbiorniku 1 zamienił się z delfinem y znajdującym się w zbiorniku $2n$. Ich położenie świadczy o tym, że x zamienił się już wcześniej z z , a y – jeszcze nie. Jednak po skoku przez obręcz między zbiornikami 1 i $2n$ zamiana delfinów y i z przestanie być możliwa, gdyż z skacze tylko zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.

Prosto z nieba: Wszechświat na badaniu RTG. Czy pacjentowi coś dolega?

Astronomia rentgenowska zajmuje się analizą fotonów obserwowanych w przedziale energetycznym od 0,1 do 500 keV (co odpowiada długości fali pomiędzy 12 a 2,5 pm).

Jeden pikometr stanowi jedną bilionową metra $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$.

Urządzenia pomiarowe obserwujące Wszechświat na tak krótkich długościach fali muszą być wyniesione na orbitę, ponieważ promieniowanie rentgenowskie jest całkowicie pochłaniane przez atmosferę ziemską. Obraz Wszechświata, jaki dzięki nim uzyskujemy, zupełnie różni się od tego, który znamy ze zdjęć wykonanych np. przez teleskop Hubble'a.

Dzięki obserwacjom w zakresie promieniowania rentgenowskiego możemy oglądać najbardziej energetyczne obiekty we Wszechświecie: otoczenia czarnych dziur, gwiazdy neutronowe, kwazary czy pozostałości po supernowych. Oznacza to, że patrząc na gwiazdę, która wydaje się zupełnie przeciętna w zakresie promieniowania widzialnego, możemy dodatkowo odkryć okrążającego ją białego karła widzialnego tylko w promieniowaniu rentgenowskim bądź też uchwycić moment, gdy gwiazda neutronowa „zjada” swego orbitalnego towarzysza.

Ostatni przegląd całego nieba w zakresie promieniowania rentgenowskiego został wykonany w latach 1990–1999 za pomocą satelity Röntgensatellit (ROSAT). Aż do roku 2020 nie udało się wykonać kolejnego takiego przeglądu. W końcu dwadzieścia lat po obserwacjach ROSATu, 19 czerwca 2020 roku, już po 182 dniach obserwacji eROSITA (*Extended Roentgen Survey with an Imaging Telescope Array*) udostępniła swoje pierwsze rentgenowskie zdjęcie Wszechświata.

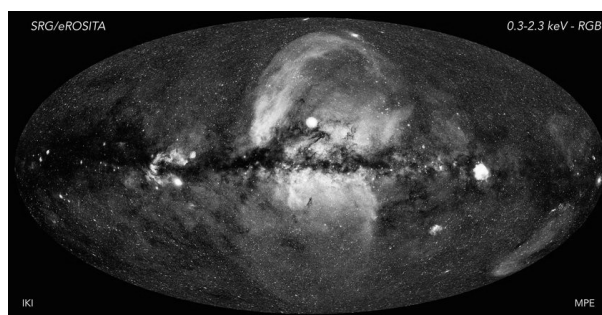
eROSITA jest głównym instrumentem na pokładzie rosyjsko-niemieckiej misji „Spectrum-Roentgen-Gamma” (SRG), która 13 lipca 2019 roku została wystrzelona z kosmodromu Bajkonur ulokowanym na terenie Kazachstanu. W grudniu 2019 roku instrument osiągnął swoją ostateczną pozycję w punkcie L2.

W ciągu półrocznych obserwacji eROSITA zarejestrowała ponad milion obiektów emitujących światło w spektrum promieniowania rentgenowskiego. Oznacza to, że w tak krótkim czasie eROSITA podwoiła

ilość znanych obiektów rentgenowskich wykrytych w sześćdziesięcioletniej historii astronomii rentgenowskiej. Około 80% wszystkich źródeł rentgenowskich przedstawionych na nowej mapie Wszechświata to gigantyczne czarne dziury, które znajdują się w centrach odległych galaktyk. Niektóre z tych supermasywnych czarnych dziur istniały, gdy Wszechświat był młodszy niż miliard lat. Ponadto skupiska galaktyk widoczne na nowej mapie będą wykorzystywane do śledzenia wzrostu struktur kosmicznych i dokładniejszego wyznaczenia parametrów kosmologicznych.

eROSITA bada również nasze własne podwórko: w obrębie Drogi Mlecznej rejestruje gwiazdy z gorącymi, aktywnymi magnetycznie koronami czy też resztki pozostałe po wybuchach supernowych i rozbłysków emitowanych przez gwiazdy rozerwane przez czarne dziury.

Jednak sama kartografia obiektów rentgenowskich nie jest głównym celem czteroletniej misji. Już dzięki pierwszym wynikom wiemy, że eROSITA zrewolucjonizowała astronomię rentgenowską i najprawdopodobniej doprowadzi do dalszego przełomu w naszym rozumieniu wpływu ciemnej materii na ekspansję Wszechświata.



Wszechświat widziany za pomocą teleskopu rentgenowskiego eROSITA. Zdjęcie można znaleźć na stronie projektu: www.mpe.mpg.de/eROSITA

Prześwietlanie Wszechświata trwa nadal, a na postawienie końcowej diagnozy przez eROSITę musimy poczekać jeszcze tylko 3,5 roku.

Katarzyna MAŁEK

Niebo w grudniu

Grudzień jest miesiącem z najdłuższymi nocami i najkrótszymi dniami. W drugiej połowie miesiąca, 21 grudnia, Słońce osiągnie najbardziej na południe wysunięty punkt ekliptyki, i tym samym na naszej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna zima. W dniu przesilenia zimowego (a także w dniu przesilenia letniego pół roku później) występują największe różnice w długości dnia i nocy między poszczególnymi szerokościami geograficznymi. W Polsce między Bieszczadami a wybrzeżem Bałtyku różnica ta przekracza godzinę. Ze względu na eliptyczność orbity Ziemi i fakt, że na początku stycznia Ziemia

znajduje się w perihelium swojej orbity, czyli najbliżej Słońca, i dlatego porusza się najszybciej w ciągu roku – najwcześniejszy zachód Słońca i jego najpóźniejszy wschód nie występują tego samego dnia, tylko w znacznej odległości czasowej. Najwcześniejszy zachód Słońca ma miejsce 12 grudnia, a najpóźniejszy wschód – 30.

Pod względem widoczności Księżycy grudzień jest podobny do listopada: na początku i końcu miesiąca noce rozświetli Księżyc w pełni, a środek miesiąca upłynie przy nowiu Srebrnego Globu, a zatem wtedy noce staną się najciemniejsze, i to najciemniejsze

w całym roku w związku ze Słońcem schowanym bardzo głęboko pod horyzontem. Księżyc przeszedł przez pełnię 30 listopada, zajmując wtedy pozycję między Plejadami a Hiadami w Byku. Ostatnia kwadra przypada w Lwie 8 grudnia, 14 grudnia – nów w Wężowniku, 22 grudnia – I kwadra w Wielorybie, zaś 30 grudnia – pełnia w Bliźniętach. W połowie miesiąca, 14 grudnia, podczas nowiu, Księżyc na chwilę zasłoni swoją tarczą tarczę słoneczną i dojdzie wtedy do całkowitego zaćmienia Słońca. Niestety żadnej z faz tego zjawiska nie da się dostrzec z Europy. Pas zaćmienia całkowitego przejdzie od południowego Pacyfiku, poprzez Chile i Argentynę, po południowy Atlantyk. Maksymalna długość trwania fazy całkowitej wyniesie ponad 2 minuty.

W grudniu widoczne są prawie wszystkie planety Układu Słonecznego, zabraknie tylko Merkurego, który w listopadzie osiągnął maksymalną elongację zachodnią, zaś 20 grudnia przejdzie przez koniunkcję górną ze Słońcem. Termin ten oznacza, że planeta z naszej perspektywy znajduje się za Słońcem, a w związku z tym najdalej od nas, i porusza się najwolniej. Z tego powodu przez cały miesiąc **Merkury** przebywa nie dalej niż kilka stopni od Słońca i pozostaje niewidoczny. Mimo tego to właśnie Merkury weźmie udział w jednym z ciekawszych zdarzeń astronomicznych miesiąca: 14 grudnia, a zatem podczas wspomnianego już nowiu, nastąpi zakrycie planety przez Księżyc. To zjawisko z kolei da się dostrzec z większej części Europy. Jednak należy ono do zjawisk ekstremalnych: dojdzie do niego zaledwie 3,5 stopnia od Słońca. Trzeba więc bardzo uważać, żeby podczas obserwacji nie uszkodzić sobie wzroku. Merkury zniknie za księżycową tarczą około godziny 10:55 i wyłoni się zza niej 25 minut później. Podczas zakrycia jasność planety wyniesie -1^m , i tak jasną planetę bez kłopotu dostrzegą osoby, które znajdują się w pasie całkowitego zaćmienia Słońca.

Ozdobą wieczornego nieba w grudniu nisko na południowym zachodzie są planety **Jowisz** i **Saturn**, tworzące przez cały miesiąc bardzo ciasną parę oraz planeta Mars, wędrująca po zmierniku po południowej stronie nieba w połowie odległości między widnokresem a zenitem. Planety Jowisz i Saturn dążą do styczniowego spotkania ze Słońcem i w grudniu przejdą z gwiazdozbioru Strzelca do gwiazdozbioru Koziorożca. Obie planety zachodzą jakieś dwie godziny po Słońcu i ich warunki obserwacyjne są słabe, a obrazy teleskopowe silnie zaburzone przez naszą atmosferę. W grudniu jasność Jowisza spadnie poniżej -2^m , a średnica jego tarczy – poniżej $34''$. Saturn świeci blaskiem $+0,6^m$, przy średnicy tarczy $16''$.

Jowisz zacznie miesiąc nieco ponad 2° na zachód od Saturna, ale każdego kolejnego dnia dystans między nimi zauważalnie się zmniejszy. Minimalną odległość zauważymy 21 grudnia, gdy obie planety przedzieli odległość zaledwie $6'$, czyli zmieszczą się one w polu widzenia teleskopów z całkiem dużym powiększeniem. Ostatniego dnia roku dystans między nimi urośnie do ponad 1° . Do koniunkcji Jowisza z Saturnem dochodzi regularnie prawie co 20 lat, co wynika z okresów obiegu Słońca przez obie planety. Tegoroczne zbliżenie

planet jest największym zbliżeniem od blisko 400 lat! I największym w XXI wieku. Dużo lepiej widoczne złączenie obu planet miało miejsce 40 lat temu, jednak wtedy dzielił je dystans co najmniej 9-krotnie większy. Jeszcze większe zbliżenie Jowisza z Saturnem zdarzy się w marcu 2080 r., też na tle Koziorożca, lecz na niebie porannym, a zatem dobrze widoczne na półkuli południowej. Grudniowe złączenie planet uświetni powracający po nowiu Księżyc, a 16 grudnia jego tarcza w fazie 11% pokaże się 6° na wschód od nich.

Planeta **Mars** wciąż jest widoczna bardzo dobrze, choć w trakcie miesiąca jej jasność spadnie z $-1,1^m$ do $-0,2^m$, zaś średnica tarczy zmniejszy się z 14 do $10''$. Czerwona Planeta w grudniu pokona 10° na tle gwiazdozbioru Ryb i góruje nadal po zapadnięciu nocy astronomicznej. Pod koniec miesiąca Mars zbliży się na mniej niż 10° do Urana, który kreśli swoją pętlę na tle gwiazdozbioru Barana i świeci blaskiem $+5,7^m$. Pod koniec miesiąca, 23 grudnia, Marsa odwiedzi Księżyc w fazie 66%, przechodząc 6° na południe od niego. Dobę później Srebrny Glob z tarczą oświetloną w 75% przejdzie o ponad stopień bliżej od Urana.

Wieczorem widoczna jest także planeta **Neptun**, jednak do jej dostrzeżenia potrzebna jest przynajmniej lornetka, a jeszcze lepiej teleskop. Neptun porusza się już ruchem prostym i do końca miesiąca oddali się od gwiazdy φ Aqr na ponad 1° , jednocześnie zbliży się na niewiele ponad $1,5^\circ$ do gwiazdy 96 Aqr. W grudniu jasność Neptuna wynosi $+7,9^m$. Księżyc odwiedzi planetę 20 grudnia, na dzień przed I kwadrą.

Poranne niebo już od kilku miesięcy ozdabia planeta **Venus**. W grudniu jej warunki obserwacyjne niestety się pogarszają: planeta dąży do koniunkcji górnej ze Słońcem, przez którą przejdzie 26 marca przyszłego roku, i do końca miesiąca jej elongacja zmniejszy się do 20° . Nachylenie ekliptyki do porannego widnokreśu jest o tej porze roku niekorzystne, stąd wysokość Venus nad widnokresem do końca miesiąca spadnie z 13° do 3° . W grudniu jasność planety utrzyma się na poziomie -4^m . Planeta zacznie miesiąc w Wadze: 4 grudnia Venus przejdzie nieco ponad 1° od gwiazdy Zuben Egenubi, 12 i 13 grudnia minie ją bardzo cienki sierp Księżyca tuż przed nowiem. 13 grudnia 1° na wschód od księżycowej tarczy pokaże się gwiazda Graffias, którą Venus minie w 1/3 tej odległości 5 dni później, a 24 grudnia planeta przejdzie 5° od Antaresa w Skorpionie.

W grudniu promieniuje coroczny rój meteorów **Geminidów**. Jest to najobfitszy rój meteorów w ciągu roku. W maksimum około 13 grudnia można liczyć nawet na 150 meteorów na godzinę. W Polsce Geminidy są widoczne bardzo dobrze: radiant roju, znajdujący się niecałe 2° od Kastora w Bliźniętach wschodzi o zmierniku i góruje przed godziną 2 na wysokości przekraczającej 70° . W tym roku warunki obserwacyjne Geminidów są bardzo dobre w związku z nowiem Księżyca.

Ariel MAJCHER

Nagroda Nobla z Fizyki

Połowę tegorocznej Nagrody Nobla z Fizyki otrzymał Roger Penrose za odkrycie, że formowanie się czarnych dziur jest ścisłym przewidywaniem Ogólnej Teorii Względności. Drugą połowę nagrody przyznano Reinhardowi Genzelowi i Andrei Ghez za odkrycie supermasywnego, zwartej obiektu w centrum naszej Galaktyki.

W latach sześćdziesiątych XX wieku odkryto tzw. kwazary, czyli bardzo silne i jednocześnie zwarte źródła promieniowania, które obserwowano w szerokim zakresie elektromagnetycznym. Niektóre z nich świecą nawet stokrotnie mocniej niż cała galaktyka. Sformułowano hipotezę, że źródłem tak olbrzymiej mocy może być akrecja materii na supermasywną czarną dziurę znajdującą się w jądrze galaktyki.

Hipoteza była śmiała i spowodowała wzrost zainteresowania tymi hipotetycznymi obiektami, które właśnie w latach sześćdziesiątych zaczęto nazywać *czarnymi dziurami*. Mimo że rozwiązanie równań Einsteina opisujące tego typu obiekty znalezione zostało przez Karla Schwarzschilda już w 1916 roku, to w istnieniu takich obiektów w przyrodzie wątpił nawet twórca OTW Albert Einstein. Rozwiązanie Schwarzschilda miało pewną paskudną cechę: było osobliwe. Osobliwość to taki punkt lub zbiór punktów, w którym czasoprzestrzeń w pewnym sensie urywa się. Częstka docierająca do osobliwości kończy w niej swoje istnienie. Nie może poruszać się dalej. Opis czasoprzestrzeni przez OTW załamuje się w osobliwości.

Rozwiązanie Schwarzschilda opisuje statyczną czarną dziurę, która istniała od zawsze. Naturalnym pytaniem było, w jaki sposób czarna dziura może powstać. W 1939 roku Oppenheimer i Snyder znaleźli rozwiązanie opisujące tworzenie się czarnej dziury w wyniku kolapsu kuli pyłu. W rozwiązaniu tym pył gęstnieje pod wpływem przyciągania grawitacyjnego i w skończonym czasie zapada się do punktu, w którym gęstość staje się nieskończona – powstaje osobliwość. Rozwiązanie to było jednak nadal bardzo szczególne, bo było sferycznie symetryczne. Od samego początku prędkości wszystkich cząstek pyłu wycelowane były w ten sam punkt. Wątpiący pytali, czy bez sferycznej symetrii, na którą w przyrodzie nie możemy liczyć, taka osobliwość również by powstała. Czy może kolaps niesymetrycznego obiektu skończyłby się zupełnie inaczej i osobliwość by nie powstała. Sferyczna symetria wyklucza na przykład emisję fal grawitacyjnych, które w przypadku niesymetrycznym mogą być emitowane.

Wątpliwości te zostały jednoznacznie rozwiane przez fizyka matematycznego Rogera Penrose'a w jego przełomowej pracy z 1965 roku. Sformułował on i udowodnił eleganckie matematyczne twierdzenie mówiące, że czasoprzestrzeń będąca rozwiązaniem równań Einsteina, spełniająca jednocześnie kilka konkretnych warunków, nie może istnieć. Kluczowe dwa z tych warunków to brak osobliwości i istnienie powierzchni złapanej (pozostałe są bardziej techniczne). Powierzchnia złapana to zwarta powierzchnia dwuwymiarowa (np. sfera) o tej własności, że wszystkie promienie światła wysłane prostopadle z tej powierzchni zbiegają się. W płaskiej czasoprzestrzeni promienie światła

wysłane do wewnątrz sfery zbiegają się, a te wysłane na zewnątrz rozbiegają się. Natomiast w czasoprzestrzeni Schwarzschilda sfera znajdująca się poniżej horyzontu zdarzeń (czyli w pewnym sensie wewnątrz czarnej dziury) jest powierzchnią złapaną. W praktyce twierdzenie Penrose'a oznacza, że jeżeli gęstość zapadającej się materii będzie wystarczająco duża, to w czasoprzestrzeni pojawi się powierzchnia złapana, która niezależnie od kształtu nieuchronnie doprowadzi do powstania osobliwości.

Na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych pojawiła się hipoteza, że supermasywne czarne dziury powinny znajdować się nie tylko w jądrach aktywnych galaktyk, ale w jądrach wszystkich galaktyk, włączając w to naszą Drogę Mleczną. Rozpoczęto więc poszukiwania. Naturalnym kandydatem stało się silne radiowe źródło zwane Sagittarius A* (w skrócie Sgr A*) znajdujące się w gwiazdozbiornie Strzelca.

Nasz Układ Słoneczny znajduje się na jednym z ramion spiralnych Galaktyki. Z naszego punktu widzenia centrum Galaktyki jest przesłonięte chmurami pyłu silnie rozpraszającego światło widzialne i ultrafiolet, co praktycznie uniemożliwia obserwacje w tych zakresach widma. Dlatego skoncentrowano się na obserwacjach w bliskiej podczerwieni.

Dwa zespoły badawcze, jeden prowadzony przez Reinharda Genzela w Instytucie Maxa Plancka Fizyki Pozaziemskiej (MPE), a drugi pod przewodnictwem Andrei Ghez na Uniwersytecie Kalifornijskim (UCLA), przez prawie trzy dekady monitorowały ruch gwiazd okrążających centrum Drogi Mlecznej. Aby rozróżnić pojedyncze gwiazdy w gęstwinie otaczającej centrum Galaktyki, potrzebne było wykonywanie zdjęć w niespotykanej wcześniej rozdzielczości. Najpoważniejszym problemem, jaki należało rozwiązać, było rozmywanie się obrazu gwiazd spowodowane ruchami termicznymi powietrza w atmosferze ziemskiej. Rozwinięto dwie innowacyjne metody umożliwiające poprawę rozdzielczości zdjęć: interferometrię plamkową (*speckle imaging*) i adaptywną optykę. Pierwsza technika polega na nakładaniu na siebie wielu krótko naświetlanych zdjęć odpowiednio przesuniętych, tak aby skompensować przesuwanie się obrazu. W drugiej modyfikuje się kształt zwierciadła teleskopu, tak aby w czasie rzeczywistym kompensować przesuwanie się obrazu.

Wieloletnie obserwacje pozwoliły wyznaczyć położenie i prędkości kilkudziesięciu gwiazd wokół centrum Galaktyki. Jedną z zaobserwowanych gwiazd, nazwaną S2, okrąża centrum Galaktyki w czasie zaledwie 16 lat, dzięki czemu udało się zaobserwować jej pełną eliptyczną orbitę. Wyznaczenie parametrów orbit gwiazd pozwoliło na oszacowanie masy obiektu, wokół którego one krążą, na około 4 miliony mas Słońca. Jednocześnie obiekt ten jest bardzo mały, co zgadza się z hipotezą, że jest to supermasywna czarna dziura. Dodatkowym potwierdzeniem tej hipotezy są obserwowane tzw. flary promieniowania rentgenowskiego i podczerwonego, których źródłem jest najprawdopodobniej materia opadająca na czarną dziurę.

Szymon CHARZYŃSKI

Lemat o zwiększaniu wykładnika p -adycznego

Bartłomiej BZDEGA



W poprzednim kąciku omówiłem wykładnik p -adyczny $\nu_p(n)$ i jego podstawowe własności – zachęcam Czytelnika, aby się z nimi zapoznał przed przystąpieniem do lektury.

Weźmy dwie liczby całkowite a i b . Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą oraz $p \nmid a, b$, ale $p \mid a - b$. Możemy wówczas zapisać $a = b + kp$ dla pewnego całkowitego k . Zachodzi równość

$$a^p - b^p = (b + kp)^p - b^p = \binom{p}{1} b^{p-1} kp + \binom{p}{2} b^{p-2} k^2 p^2 + \dots + \binom{p}{p} k^p p^p.$$

Zauważmy, że $\nu_p\left(\binom{p}{1} b^{p-1} kp\right) = \nu_p(kp) + 1 = \nu_p(a - b) + 1$, natomiast pozostałe składniki ostatniej sumy mają większe wykładniki p -adyczne. Na mocy własności (2') z poprzedniego kącika wynika z tego, że $\nu_p(a^p - b^p) = \nu_p(a - b) + 1$.

Niech teraz $p = 2$. Interesują nas liczby nieparzyste a i b . Zachodzi równość $\nu_2(a^2 + b^2) = \nu_2(a - b) + \nu_2(a + b)$, ale równość $\nu_2(a + b) = 1$ ma miejsce tylko wtedy, gdy $4 \mid a - b$.

Trzymając się wciąż powyższych założeń, wybierzmy liczbę naturalną m , która nie jest podzielna przez p . Wtedy

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1} \equiv ma^{m-1} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

więc w tym przypadku $\nu_p(a^m - b^m) = \nu_p(a - b)$.

Stosując indukcję oraz powyższe rozważania, wykazujemy tytułowy lemat.

Lemat o zwiększaniu wykładnika p -adycznego (wersja z odejmowaniem). Niech a i b będą całkowite, n – naturalne, $p > 2$ – pierwsze. Wówczas:

- (1) jeśli $p \nmid a, b$ oraz $p \mid a - b$, to $\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a - b) + \nu_p(n)$;
- (2) dla nieparzystych a i b :
 - (a) jeśli $4 \mid a - b$, to $\nu_2(a^n - b^n) = \nu_2(a - b) + \nu_2(n)$;
 - (b) $\nu_2(a^n - b^n) = \nu_2(a - b)$ dla n nieparzystych;
 - (c) $\nu_2(a^n - b^n) = \nu_2(a^2 - b^2) + \nu_2(n) - 1$ dla n parzystych.

Dla nieparzystego n zachodzi równość $a^n - b^n = a^n + (-b)^n$. Pisząc $-b$ zamiast b , otrzymamy analogiczny lemat dla dodawania.

Lemat o zwiększaniu wykładnika p -adycznego (wersja z dodawaniem). Niech a i b będą całkowite, n – naturalne nieparzyste, p – pierwsze. Jeśli $p \nmid a, b$ oraz $p \mid a + b$, to $\nu_p(a^n + b^n) = \nu_p(a + b) + \nu_p(n)$.

W zadaniach dość powszechnie jest stosowanie nierówności $\nu_p(n) \leq \log_p n$, która być może jest oczywista, ale warto tu o niej wspomnieć.

Zadania

1. W zależności od n wyznaczyć $\nu_3\left(\underbrace{111\dots 1}_n\right)$ i $\nu_{11}\left(\underbrace{111\dots 1}_n\right)$.
2. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których zachodzi podzielność:
 - (a) $2^n \mid 3^n - 1$, (b) $5^n \mid 3^n + 7^n$.
3. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których $3^p + 4^p$ jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku naturalnym większym niż 1.
4. Wyjaśnić, dlaczego nie istnieje lemat o zwiększaniu wykładnika p -adycznego w wersji z dodawaniem dla n parzystych.
5. Udowodnić, że dla naturalnych $n > 2$ liczba $n^{n-1} - 1$ jest podzielna przez kwadrat pewnej liczby pierwszej.
6. Liczby całkowite dodatnie a i b są różnej parzystości. Wykazać, że liczba $a^{a+b} + b^{a+b}$ jest podzielna przez kwadrat pewnej liczby pierwszej.
7. Niech a i b będą różnymi liczbami całkowitymi oraz niech $k > 1$ będzie liczbą naturalną. Wykazać, że liczba $\left(a + \frac{1}{k}\right)^n - \left(b + \frac{1}{k}\right)^n$ jest całkowita tylko dla skończonego wielu naturalnych n .
8. Ustalmy nieparzyste $a > 0$. Dla każdego naturalnego n liczba $\frac{a^n + 1}{2}$ jest sześcianem liczby naturalnej. Wykazać, że $a = 1$.
9. Liczby a i b są całkowite i względnie pierwsze, a liczby $m, n \geq 1$ są naturalne. Dowieść, że

$$\text{NWD}(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^{\text{NWD}(n,m)} - b^{\text{NWD}(n,m)},$$

bez korzystania z algorytmu Euklidesa.

Wskazówki do zadań

1. Dzieliki odpowiednim cechom podzielności dla $p = 3$ wystarczy rozważyć n podzielne przez 3, a dla $p = 11$ skorzystać z równości $10^n \equiv -1 \pmod{11}$, a dla $p = 11$ skorzystać z równości $1000^n \equiv -1 \pmod{11}$.
2. (a) Dla takich n zachodzi nierówność $\nu_2(3^n - 1) \geq n$. Wartość $\nu_2(3^n - 1)$ można wyznaczyć dokładniej, w zależności od parzystości n . Skorzystań z nierówności $\nu_2(n) \leq \log_2 n$, aby wykazać, że $n \leq 4$. Dla n parzystych $3^n + 7^n \equiv \pm 2 \pmod{5}$. Dla n nieparzystych skorzystań z lematu w wersji z dodawaniem i postępować podobnie jak w poprzednim kąciku (a).
3. Jeśli $p \neq 2, 7$, to $\nu_p(3^p + 4^p) = 1$. Niech $p \mid a + b$ i $p \nmid a, b$. W przypadku $p = 2$ mamy $\nu_2(a^2 + b^2) = 1$, natomiast dla $d > 2$ mamy $\nu_d(a^d + b^d) > 0$.
4. Można wziąć dowolny dzielnik pierwszego d i stwierdzić, że $1 < \nu_d(a^d - b^d) < d$.
5. Jeśli a i b mają wspólny dzielnik d , to $\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a - b) + \nu_p(n)$.
6. Niech d będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczb a i b . Jeśli liczba a i b podzielna jest jak a i b , to $\nu_p(a^n + b^n) = \nu_p(a + b) + \nu_p(n)$. W przeciwnym razie istnieje liczba $d \mid a + b$ i $d \nmid a, b$. Wystarczy skorzystać z lematu w wersji z odejmowaniem, rozważając podobnie jak a i b .
7. Niech d będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczb a i b . Jeśli a i b podzielna jest jak a i b , to $\nu_p(a^n + b^n) = \nu_p(a + b) + \nu_p(n)$. W przeciwnym razie istnieje liczba $d \mid a + b$ i $d \nmid a, b$. Wystarczy skorzystać z lematu w wersji z odejmowaniem, rozważając podobnie jak a i b .
8. Ustalmy n i skorzystajmy z nierówności $\nu_2(n) \leq \log_2 n$, aby wykazać, że $n \leq 4$. Dla n parzystych skorzystań z lematu w wersji z dodawaniem i postępować podobnie jak w poprzednim kąciku (a).
9. Działajmy jak w poprzednim kąciku (a).

Gwiazdki na Gwiazdkę i nie tylko

Jak wiadomo, „zadania z gwiazdką” są trudniejsze od ich bezgwiazdkowych towarzyszy, często wymagają niestandardowego pomysłu, a co za tym idzie – dają więcej satysfakcji po samodzielnym rozwiązaniu (jeśli ta sztuka się uda). Gwiazdki kojarzą się raczej z realiami studenckimi lub licealnymi, rzadziej z nauczaniem podstawowym. Również na tym etapie mogą jednak spełnić rolę „intelektualnej przynęty” dla ucznia, zachęcając swoją treścią i motywując do zwiększonego wysiłku umysłowego. Kluczowym jest jednak umiejętny dobór tych problemów, gdyż – zwłaszcza na tym poziomie – łatwo przesadzić z ich trudnością.

Wszystkim tym, którzy chcieliby zapewnić swoim młodym podopiecznym (z klasy 5 lub wyższej) dostosowane do nich matematyczne wyzwania, w sukurs przychodzi zbiór *Matematyczne Gwiazdki* Joanny i Jerzego Bednarczuków. Bazując na swym bogatym dydaktycznym doświadczeniu, autorzy zamieścili w nim ciekawe zadania, będące jednak w zasięgu możliwości ucznia. Stworzyli w ten sposób wartościowy pomost między matematyką szkolną a konkursową – w zbiorze można znaleźć zgrabnie połączone elementy obu tych dydaktycznych światów, przy czym zadania „szkolne” stanowią często umiejętnie przygotowanie do ich „gwiazdkowych” odpowiedników (poniżej zamieściliśmy próbkę tej drugiej kategorii). Rzecz jasna, w zbiorze znajdują się również rozwiązania i wskazówki do zadań; miłe jest także to, że w osobnym rozdziale zamieszczone są wyłącznie odpowiedzi, dzięki czemu można przekonać się o poprawności wyniku, nie zdradzając sobie sposobu jego otrzymania. Całość jest bogato i wdzięcznie ilustrowana, dlatego zbiór jest tym bardziej przyjazny dla młodego odbiorcy.

Starsi Czytelnicy, którzy zetkną się z tą pozycją przy okazji pomocy swoim młodym podopiecznym, powinni docenić pojawiające się w treściach niektórych zadań mrugnięcia autorskim okiem – moim ulubionym przykładem jest zadanie, którego fabuła toczy się w Ministerstwie Poważnych Kroków. Wyłapywanie tych smaczków daje wiele radości, trzeba tylko uważać, by nie podkraść (zbyt często) tej książki młodszej adeptce lub adeptowi matematyki, wszak to przede wszystkim oni mają z niej skorzystać. Parafrazując klasykę: przez gwiazdki do gwiazd!

Ł.R.

Zadanie. Sześciu braci ma w sumie 65 lat. Dwaj najmłodszy mają 3 lata i 6 lat. Ile lat w sumie mieli wszyscy bracia 5 lat temu?

Zadanie. Podaj największą liczbę 10-cyfrową zapisaną różnymi cyframi, która dzieli się przez 4.

Zadanie. Podaj przykład takiego wielościanu wypukłego, który ma dokładnie dwie przekątne.

