

deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $E=h \cdot \nu$ $\pi=3,141592\dots$

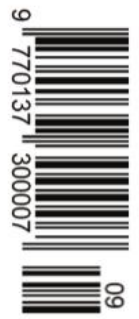
NR 9 (556) 2020

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK




www.deltami.edu.pl

**Prywatność
w morzu
danych**
str. 1



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 9 (556)

Prywatność w morzu danych <i>Wojciech Czerwiński</i>	str. 1
Pół szklanki mocnego kodu. Koniec świata <i>Piotr Krzyżanowski</i>	str. 3
Masa relatywistyczna <i>Bartłomiej Kamiński</i>	str. 6
Elementarne wyprowadzenie równoważności masy i energii <i>Albert Einstein</i>	str. 8
O uogólnieniach i uszczególnieniach problemów matematycznych <i>Karol Gryzka</i>	str. 9
 Zadania	str. 11
O liczbie układów podwójnych czarnych dziur i gwiazd neutronowych <i>Michał Bejger</i>	str. 12
Paradoks jednorodności <i>Marcin Makowski</i>	str. 14
 Skąd się bierze miód <i>Magdalena Fikus</i>	str. 16
Leibniz i <i>Calculus</i> <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 17
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: Jak powstały pierwsze galaktyki i jak przeistoczyły się w obiekty podobne do Drogi Mlecznej?	str. 22
Niebo we wrześniu	str. 22
Aktualności Półpanegiryk	str. 24
 Jego Wysokości, część 1 <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

Astrologowie mają rację: położenie planet ma kluczowy wpływ na nasze życie!



W następnym numerze czytaj „Cykle Milankovića”.

Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji: Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Prywatność w morzu danych

Wojciech CZERWIŃSKI



Jak dobrze wiemy, żyjemy w wyjątkowym okresie w dziejach, w którym dostęp do informacji jest niesłychanie łatwy, i w zasadzie z roku na rok ułatwienia w tym zakresie zwiększają się. Z pewnością tym bardziej zwiększą się one w bieżącym roku – 2020. Podobnie jest z ilością danych, zbieramy ich coraz więcej. Gromadzimy olbrzymie ilości zdjęć, muzyki, filmów, ale również i innych danych, takich jak teksty, wszelkiego rodzaju informacje o ruchu w sieci itd. Przykładowo w ciągu każdej minuty na serwis YouTube wrzucanych jest około 500 godzin filmów. Powstała nawet dziedzina badań zajmująca się analizą dużych danych, zwana z angielska *Big Data*. To właśnie zwiększająca się dostępność do dużych danych oraz zwiększająca się moc obliczeniowa procesorów pozwoliły na fantastyczny rozwój sztucznej inteligencji w ostatnich latach. Dzięki danym jesteśmy świadkami rewolucji w podejściu do wielu problemów. Na przykład dawniej próbowano dokonywać automatycznego tłumaczenia tekstów, bazując na gramatycznej dekompozycji zdań. Teraz Google Translate robi to zupełnie inaczej. Korzysta z dużej bazy tekstów, które są już przetłumaczone na różne języki. Dysponując wieloma tekstami, które zna zarówno w polskiej, jak i angielskiej wersji, używa metod sztucznej inteligencji, żeby określić, które frazy odpowiadają którym frazom w drugim języku.

Dostępność dużych danych w połączeniu z metodami ich analizy, m.in. statystyką oraz sztuczną inteligencją, mogą bardzo przydać się ludzkości. Nietrudno sobie wyobrazić, że można w ten sposób uzyskać choćby postępy w medycynie, na przykład usprawniając metody analizy obrazów, lub zrozumieć lepiej sposób, w jaki my ludzie funkcjonujemy w świecie i komunikujemy się między sobą. Problem w tym, że takie dane dotyczą konkretnych osób i czasem są to dane wrażliwe. Zapewne nie byłibyśmy zadowoleni, gdyby precyzyjne informacje o naszych chorobach i tym, z kim i o czym dokładnie ostatnio rozmawialiśmy, stały się nagle publicznie dostępne. Powstaje więc pytanie: jak korzystać z danych prywatnych osób, aby ta prywatność nie została narażona na szwank?

Problem ten składa się w zasadzie z dwóch pytań: 1) jak przechowywać dane, by nie zostały one odczytane lub skradzione przez niepowołane osoby? oraz 2) jakie analizy przeprowadzać na danych, żeby opublikowanie nawet jedynie wyników tych analiz nie ujawniło prywatnych informacji? Nie będziemy się tu zajmować pytaniem 1, odpowiedzi w tym obszarze dostarcza klasyczna kryptografia. Zajmiemy się natomiast pytaniem 2 i zobaczymy, że odpowiedź na nie jest dalece nieoczywista.

Warto przyjrzeć się jakiemuś przykładowi, żebyśmy dobrze zrozumieli, na czym polega problem. Rozważmy przykład wzięty z rzeczywistości: firma Google zbiera dane na temat korków samochodowych powstających w dużych miastach. W tym celu śledzi m.in., gdzie i jak ja jeżdżę, w szczególności, o której danego dnia jechałem do pracy, o której z tej pracy wyszedłem, dokąd pojechałem itd. Możemy sobie wyobrazić, że firma Google nie tylko chce zbierać proste informacje o tym, że gdzieś często są korki, a gdzieś ich nie ma, ale może chciałaby też wiedzieć:

- Ile czasu średnio dziennie spędzają w korkach kobiety przed trzydziestką, a ile mężczyźni po sześćdziesiątce?
- Czy te same samochody stoją w korkach w różne dni tygodnia, czy może jest jakaś różnica pomiędzy początkiem tygodnia a końcem?
- Czy osoby mieszkające w danej okolicy radzą sobie lepiej w korkach powstających w tej okolicy i jeśli tak, to jak bardzo?

A dodatkowo Google z pewnością chce odpowiedzi na te pytania móc upublicznić. Nietrudno zgadnąć, że zbyt szczegółowe pytania tego rodzaju mogłyby ujawnić czyjąś prywatność. Przykładowo opublikowanie odpowiedzi



Rozwiązanie zadania F 1008.
Strumień ciepła I potrzebny do tego, żeby między powierzchniami płyty utrzymywała się stała różnica temperatur ΔT , jest proporcjonalny do ΔT i odwrotnie proporcjonalny do grubości płyty d :

$$I = \lambda \frac{\Delta T}{d}.$$

Przy zadanej wartości $I = 121 \text{ Wm}^{-2}$ różnica temperatur wynosi więc:
 $\Delta T = Id/\lambda \approx 0,03 \text{ K}$.

Promieniowanie ciepłe przenosiło taki sam strumień ciepła między powierzchniami ciał szarych (patrz rozwiązanie zadania F 1007 na str. 21), gdy różnica ich temperatur wynosiła $\Delta T = 320 \text{ K} - 295 \text{ K} = 25 \text{ K}$. Przy tej samej różnicy temperatur wydajność wymiany ciepła poprzez promieniowanie bardzo szybko rośnie ze wzrostem temperatury – proporcjonalnie do T^3 .

na pytanie: Ile czasu w korkach w okolicy Mokotowa spędzają informatycy pracujący w Redakcji *Delty*? z pewnością narusza prywatność. A być może z wielu pytań o korki: w okolicy Wydziału MIM, w dzielnicy Mokotów, przed spotkaniem kolegium *Delty* itd., można by wywnioskować prawdopodobną odpowiedź na poprzednie pytanie. A zatem przy publikacji informacji musimy być rzeczywiście uważni.

Część Czytelników może pomyśleć w sposób, który jest dość powszechny: to żaden problem, wystarczy po prostu usunąć informacje, o kim są te dane. Niestety, nie jest tak prosto, już powyższy przykład co nieco o tym mówi. Nie wystarczy usunąć informacji, które jednoznacznie identyfikują daną osobę, takich jak powiedzmy imię, nazwisko, pesel, numer dowodu itd. Wiele innych danych przekazuje sporo informacji o nas, takich jak na przykład kod pocztowy, data urodzenia czy nawet tylko rok urodzenia. Okazuje się, że bardzo wiele osób można jednoznacznie zidentyfikować za pomocą trzech informacji: właśnie daty urodzenia, kodu pocztowego i płci. Żeby więc zanonimizować dane, trzeba by usunąć którąś z tych danych. Niestety podobnych zestawów informacji może być więcej, więc należałoby pousuwać więcej danych. A wtedy mogłoby się okazać, że to, co nam zostało, nie wystarcza do przeprowadzenia analizy, którą zaplanowaliśmy. W skrócie: nie tędy droga, a przynajmniej nie tędy wiedzie optymalna droga.

Zastanawiamy się już długo, jak by tu zachować prywatność poszczególnych osób, ale nie ustaliliśmy precyzyjnie, co w zasadzie oznacza, że raport z pewnej analizy zachowuje naszą prywatność. Zaproponujemy definicję, która wydaje się dobrze działać. Jej znalezienie okaże się dalece nieoczywiste. Pierwsza próba może być taka: (1) raport zachowuje moją prywatność, gdy czytający nie dowie się o mnie niczego. Wydaje się to jednak zbyt szeroka definicja. Ufoludek dowiadujący się, że średnia liczba rąk wśród ludzi zamieszkujących Ziemię wynosi 1,9999, dowie się, że ja najprawdopodobniej mam dwie ręce. Intuicyjnie rzecz biorąc, moja prywatność nie została jednak ujawniona w ten sposób, bo prywatne wydają się raczej te informacje, które odróżniają mnie od innych osób, a nie te, które są prawdziwe dla wszystkich ludzi. Może więc powinniśmy raczej powiedzieć, że: (2) raport zachowuje prywatność, jeśli odpowiedź na dowolne pytanie będzie dokładnie taka sama, gdy ja zostanę w nim uwzględniony i gdy zostanę pominięty. Dość łatwo jednak zauważyć, że każdy taki raport jest zupełnie bezwartościowy. Jeśli pominięcie jednej osoby nigdy niczego nie zmienia, to pominięcie wszystkich osób biorących udział w badaniach też nigdy niczego nie zmienia. Czyli takie wymaganie jest zbyt mocne. Żeby proponowane pojęcie miało sens, musimy wymaganie co do prywatności nieco osłabić. Być może wystarczy, jeżeli powiemy, że: (3) raport zachowuje prywatność, jeśli odpowiedź na dowolne pytanie zmieni się jedynie bardzo niewiele w zależności od tego, czy ja będę uwzględniony. Ta definicja wydaje się w porządku, ale zaraz zobaczymy, że zadając odpowiednio pytania, można ujawnić czyjeś prywatne

dane. Powiedzmy, że została przeprowadzona ankieta wśród 1000 osób, w której każda z tych osób podała swoje miesięczne dochody. Następnie podane zostały dwie liczby: średnia dochodów wszystkich osób biorących udział w ankiecie X oraz średnia dochodów wszystkich osób oprócz autora tego artykułu Y . Jeśli ja w ogóle nie brałem udziału w ankiecie, to oczywiście $X = Y$. Jeśli jednak brałem udział w ankiecie, to wpływ moich dochodów na liczbę X jest niewielki, a na liczbę Y w ogóle żaden. Jednakże (o ile brałem udział w ankiecie) można łatwo odtworzyć moje dochody, które są równe $1000X - 999Y$. Widać więc, że ujawnianie dokładnych wyników jest niebezpieczne, nawet jeśli mój wpływ na nie jest bardzo mały, bo zadając kilka pytań, można odtworzyć prywatne dane. Musimy jakoś uniknąć tego przykrego efektu, w którym dwie ankiety, pozornie ujawniające niewiele informacji o nas, sumarycznie ujawniają ich bardzo dużo. Odpowiedzią jest więc podawanie danych przybliżonych – użyjemy do tego celu losowości. A zatem ostateczna propozycja to: (4) raport zachowuje prywatność, jeśli odpowiedź na każde pytanie TAK / NIE będzie z dużym prawdopodobieństwem taka sama, jeśli ja wezmę udział w badaniu i jeśli nie wezmę w nim udziału. Okazuje się, że jest to właściwe sformułowanie. A może nie tyle właściwe – bo jak właściwie możemy o tym rozstrzygać – co takie, które ma eleganckie własności teoretyczne i dobrze sprawdza się w praktyce.

Propozycja ta została wysunięta w artykule Dwork, McSherry'ego, Nissima i Smitha: *Calibrating Noise to Sensitivity in Private Data Analysis* opublikowanym w 2006 roku. Za pracę tę i wprowadzone w niej pojęcie *prywatności różnicowej* (*differential privacy*) autorzy otrzymali w 2017 roku Nagrodę Gödla, najbardziej prestiżową nagrodę przyznawaną w informatyce teoretycznej. Powyżej starałem się przekazać pewne intuicje, które mogły doprowadzić do takiej właśnie definicji. Teraz przyjrzyjmy się samemu pojęciu. Niech $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ będzie dodatnią liczbą rzeczywistą, a \mathcal{A} algorytmem randomizowanym (tj. używającym losowości), który dla bazy danych D zwraca odpowiedź $\mathcal{A}(D)$, należącą do zbioru wszystkich możliwych raportów S . Powiemy, że algorytm \mathcal{A} jest ε -różnicowo-prywatny, jeśli dla dowolnych dwóch baz danych D_1 oraz D_2 , które różnią się jednym elementem (np. danymi jednej osoby), oraz dla dowolnego zbioru możliwych wyników $T \subseteq S$ zachodzi

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}(D_1) \in T] \leq e^\varepsilon \cdot \mathbb{P}[\mathcal{A}(D_2) \in T],$$

gdzie przez $\mathbb{P}[X]$ oznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia X . Przypomnijmy, że dla małych $\varepsilon > 0$ wartość e^ε jest bardzo bliska $1 + \varepsilon$. Zauważmy też, że ta sama nierówność zachodzi, gdy zamienimy D_1 i D_2 miejscami, więc intuicyjnie możemy myśleć, że liczby $\mathbb{P}[\mathcal{A}(D_1) \in T]$ oraz $\mathbb{P}[\mathcal{A}(D_2) \in T]$ są równe z dokładnością do czynnika $1 + \varepsilon$.

Dobrze, ale dlaczego pojęcie ε -prywatności różnicowej zostało aż tak bardzo docenione? Jest to bardzo dobra miara ilości ujawnionej prywatności,

w domyśle właśnie ε . Zauważmy, że spełnia ono nasze wymaganie (4). Istotnie, baza danych D bez moich danych oraz baza danych D' , która powstała przez dodanie do bazy danych D moich danych, różnią się jedynie jednym elementem. Dowolne pytanie na temat bazy danych D , na które odpowiedź jest TAK lub NIE, musi tak naprawdę być postaci: czy nasz raport $\mathcal{A}(D)$ należy do wyróżnionego zbioru raportów $T \subseteq S$. A więc, istotnie, dla każdego pytania prawdopodobieństwo odpowiedzi TAK tylko nieznacznie się zmieni (maksymalnie o około ε) w zależności od tego, czy ja będę uczestniczył w badaniu, czy też nie. Pojęcie prywatności różnicowej unika przykrych własności, którą miała definicja z punktu (3). Mianowicie jeśli zrobimy kilka badań dobrze zachowujących prywatność, to sumarycznie ujawnią one również niewiele prywatności. Łatwo udowodnić, co polecamy Czytelnikowi, że jeśli stworzymy n badań, o prywatności różnicowej odpowiednio $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, to sumarycznie to badanie będzie miało prywatność różnicową nie większą niż $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. Czyli intuicja mówiąca o tym, że algorytm ε -różnicowo-prywatny „ujawnia ε prywatności”, jest dobra – ta miara się sumuje. Oprócz innych zalet tego pojęcia być może najważniejszą jest to, że można stosunkowo łatwo zaprojektować system, który je realizuje. Idea jest bardzo naturalna, po prostu do wyniku zapytania na prawdziwej bazie danych dodaje się losowy szum i dopiero ten zaszumiony wynik się

publikuje. Jest wiele różnych mechanizmów realizacji tego pomysłu, bo np. warto inaczej traktować zapytania $\mathcal{A}(D)$ zwracające liczby rzeczywiste, a inaczej takie, które przyjmują tylko skończenie wiele możliwych wartości. Najbardziej znany mechanizm nazywa się mechanizmem Laplace'a i dobrze zachowuje się w sytuacji, gdy $\mathcal{A}(D)$ przyjmuje wartości rzeczywiste z pewnym rozkładem ciągłym. Do wyniku dodaje się w nim zmienną o rozkładzie Laplace'a $\text{Lap}(\lambda)$: jeśli $X \sim \text{Lap}(\lambda)$, to gęstość zmiennej X wyraża się wzorem $g_X(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$. Zainteresowanego Czytelnika zachęcam do zgłębiania szczegółów. Mimo że pojęcie prywatności różnicowej jest stosunkowo nowe, to w Internecie można o nim znaleźć wiele wartościowych informacji.

Na koniec warto powiedzieć, że pojęcie prywatności różnicowej bardzo szybko zdobywa popularność. Już teraz wielkie firmy technologiczne, takie jak Google, Apple, Microsoft czy Facebook, zaczynają go używać w swoich zastosowaniach. Przykładowo Google stosuje prywatność różnicową przy analizie złośliwego oprogramowania w przeglądarce Chrome i korków w dużych miastach w aplikacji Maps, a Apple przy analizie użycia emotikonów w różnych kontekstach oraz słów niewystępujących w słowniku. Wiele uniwersytetów dodaje do swoich kursów materiały na ten temat. Całkiem prawdopodobne, że jesteśmy w przededniu dużego sukcesu tego pojęcia.

Pół szklanki mocnego kodu

Koniec świata

Piotr KRZYŻANOWSKI*

W czasach niepewności, wielkich zmian, kryzysów ludzie więcej myślą o sprawach ostatecznych. *Czy to nie zbliża się koniec cywilizacji, a może nawet całego świata?* W dawnych czasach dobrym wzorem ładu i uporządkowania był Kosmos w dostatecznie dużej skali. No bo przecież nie Ziemia, ze swoją przyziemną nieprzewidywalnością – ale już jej wspólna podróż z Księżycem wokół Słońca, od „zawsze” taka sama, mogłaby stanowić jakiś punkt odniesienia. Albo jeszcze lepiej: popatrzmy na cały Układ Słoneczny! Czy jego leniwie przemierzające przestrzeń planety są oazą spokoju, przewidywalności i stabilności – jeśli nie na *wieczność*, to może przynajmniej na miliony, lub lepiej miliardy, lat? Jak trudno rozstrzygnąć to pytanie na gruncie matematyki, przekonał się sam wielki Henri Poincaré. Ale od czego są komputery. . . zwłaszcza że praktycznie sprawa jest bardzo prosta: należy zbadać trajektorie ruchu planet w interesującym nas okresie. Skoro planety poruszają się w próżni, na ich ruch ma wpływ jedynie siła grawitacji ze strony pozostałych ciał: przede wszystkim Słońca, którego masa jest około **750** razy większa od łącznej masy wszystkich planet.

W najprostszej sytuacji – gdy jest tylko Słońce, o masie m_1 , i jedna planeta, o masie m_2 , – przyciągają się one z siłą grawitacji o wartości

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

działającą wzdłuż łączącego je promienia długości r . W ogólnym przypadku, gdy mamy do czynienia z **zagadnieniem N ciał**, jest analogicznie: wypadkowa siła działająca na i -te ciało będzie sumą sił przyciągania go przez pozostałe.

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Pod koniec XIX wieku król Szwecji i Norwegii ogłosił z okazji urodzin konkurs na rozwiązanie zagadnienia ruchu planet. Konkurs wygrał 35-letni Henri Poincaré. Jednak w jego pracy, którą w międzyczasie opublikowano, tkwił poważny błąd. Gdy się zorientował, wykupił cały jej nakład – co kosztowało go więcej niż królewska nagroda. Za to poprawiona wersja artykułu położyła podwaliny teorii chaosu.

Errata.
W wydrukowanej wersji artykułu omyłkowo zamiast 750 podaliśmy liczbę milion, za co przepraszamy! Redakcja).

W naszym przypadku $N = 10$: Słońce plus osiem planet (w tym Ziemia) i, z sentymentu, Pluton.

Ponieważ, jak pamiętamy z lekcji fizyki, przyspieszenie jest proporcjonalne do siły, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, a przecież przyspieszenie $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ i podobnie $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$, to mnożąc te równości przez Δt dostajemy układ równań

$$\begin{cases} \Delta \vec{x}_i = \Delta t \cdot \vec{v}_i, \\ \Delta \vec{v}_i = \Delta t \cdot \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} / m_i, \end{cases} \quad \text{dla } i = 1, \dots, N.$$

Ponieważ $\Delta \vec{x} = \vec{x}^{\text{nowe}} - \vec{x}^{\text{stare}}$ i podobnie $\Delta \vec{v} = \vec{v}^{\text{nowe}} - \vec{v}^{\text{stare}}$, a siła przyciągania \vec{F}_{ij} pomiędzy ciałem i -tym a j -tym zależy właśnie od \vec{x}_i i \vec{x}_j , to powyższe jest zamkniętym układem $2N$ równań (wektorowych w przestrzeni trójwymiarowej), które wystarczy rozwiązać, na przykład takim oto algorytmem:

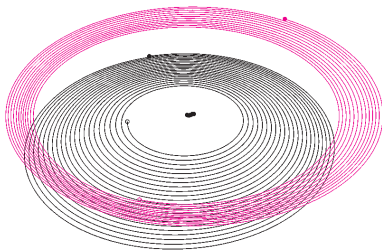
$$\begin{cases} \vec{x}_i^{\text{nowe}} = \vec{x}_i^{\text{stare}} + \Delta t \cdot \vec{v}_i^{\text{stare}}, \\ \vec{v}_i^{\text{nowe}} = \vec{v}_i^{\text{stare}} + \Delta t \cdot \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{\text{stare}} / m_i. \end{cases}$$

Rzeczywiście, znając *stare* wartości prędkości i położenia wszystkich ciał, możemy na ich podstawie wyznaczyć z powyższego wartości *nowe*, tzn. po czasie Δt . Okazuje się, że wyprowadzona przez nas metoda to nic innego, jak znany i popularny schemat Eulera. O tym, że wspaniale radzi sobie np. w modelowaniu chorób zakaźnych, można było przeczytać w *Delcie* 5/2018.

Naszym celem będzie teraz zbadanie, czy Układ Słoneczny nie rozpadnie się przez, powiedzmy, najbliższe 10 tysięcy lat – w ludzkiej skali to dostatecznie długi czas. Masy oraz dzisiejsze początkowe położenia i prędkości wszystkich obiektów pobierzemy ze strony internetowej NASA, dotyczącej projektu Horizons. Przy tak długim czasie symulacji użyjemy niesamowicie krótkiego kroku czasowego, $\Delta t = 2$ godz., i bardzo szybkiego komputera. Fani rubryki o *mocnym* kodzie wybaczą mi, że jedynie w *pseudokodzie* naszkicuję sedno powyższego algorytmu (prawdziwą implementację, z której pochodzą obrazki, zrobiłem w MATLAB-ie):

Schemat Eulera:

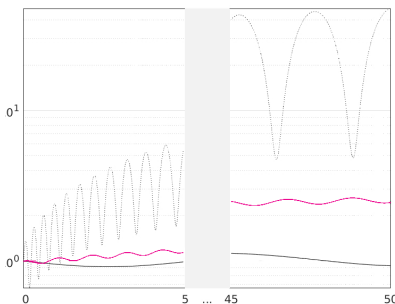
```
t = 0; T = 500 lat; dt = 2 godziny;
x = (*.położenia początkowe.*); v = (*.prędkości początkowe.*);
while t < T
    F = siła_wypadkowa(x);
    x = x + dt*v;
    v = v + dt*F;
    t = t + dt;
end
```



Orbity Ziemi (pomarańczowa) i Merkurego przez najbliższe 15 lat. Obie planety oddalają się od Słońca, a na koniec Merkury jest nawet dalej niż Ziemia!

Co wynika z przeprowadzonych symulacji? **Więści są nad wyraz niepokojące.** Z wykresu obok wynika, że jeszcze w obecnym stuleciu Merkury zostanie wytracony ze swojej orbity!

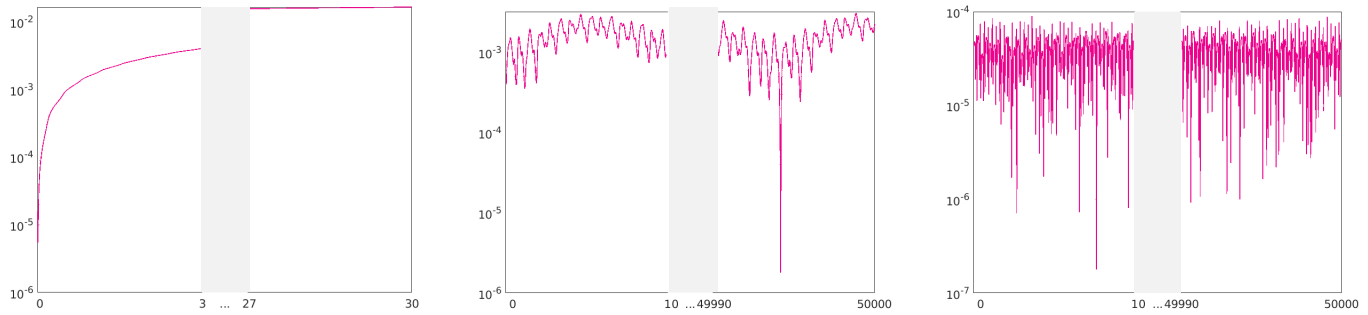
Co gorsza, symulacja przewiduje, że podobny los czeka Wenus i Ziemię: zaledwie za 30 lat promień naszej orbity wzrośnie dwa razy – co spowoduje, że będzie do nas docierać 8 razy mniej energii ze Słońca. Nic nie pomoże, nawet globalne ocieplenie: nasza planeta zacznie zamarzać. Za mniej niż 500 lat Ziemia znajdzie się 10 razy dalej od Słońca, a to już oznacza całkowity i nieodwołalny koniec... Tylko odległe planety – olbrzymy: Jowisz, Saturn, Uran i Neptun przetrwają ten kataklizm.



Wycinek zmian odległości od Słońca względem odległości początkowej przez najbliższe 50 lat: Merkury – linia kropkowana, Ziemia – pomarańczowa, Jowisz – czarna. Tylko Jowisz nie opuszcza orbity

Czy to prawda? Czy rzeczywiście jeszcze za naszego życia czekają nas tak dramatyczne wydarzenia? Dlaczego tak musi się stać? Przyjrzyjmy się otrzymanym rozwiązaniom raz jeszcze, ale z innej strony – i zastanówmy się, czy czasem nie **zostaliśmy oszukani**. Na wykresach na następnej stronie możemy zobaczyć, jak bardzo wraz z upływem czasu całkowita energia układu odchyła się od wartości początkowej.

Okazuje się, że schemat Eulera, który przecież tak dobrze sprawdza się w wielu innych sytuacjach, tutaj napotyka poważny problem: w sposób sztuczny *pompuje do układu energię*, której już po kilkudziesięciu latach przybywa kilka procent! Jasne więc, że wiele ciał tego nie wytrzyma i urywa się z orbit – tyle, że



Względna zmiana energii całkowitej układu w czasie. Od lewej: schemat Eulera (1% już po 50 latach), symplektyczny schemat Eulera (10^{-3} przez 50 tysięcy lat), schemat Verleta (10^{-4} przez 50 tysięcy lat)

jest to wyłącznie artefakt symulacji: w końcu prawdziwe planety zasada zachowania energii przecież obowiązuje. Problem nierespektowania fizycznych zasad zachowania dotyczy nie tylko schematu Eulera, ale też wielu innych popularnych metod numerycznych wyznaczania trajektorii układów dynamicznych. Na przykład znana i lubiana metoda RK4, dużo dokładniejsza od Eulera, też cierpi na podobną chorobę: w niej z kolei energia powoli, ale nieubłaganie... znika.

Z drugiej strony, zgodnie z teorią zbieżności schematu Eulera, wystarczy *dostatecznie* zmniejszyć Δt , by z *dowolną* zadaną dokładnością uzyskać rozwiązanie. Jednak w moim przypadku zmniejszenie Δt do minut lub – być może – sekund nie wchodzi w grę z prozaicznych powodów: nie mam *aż tak* szybkiego komputera!

Jest jednak promyk nadziei: można **ulepszyć** schemat Eulera **jednym** subtelnym ruchem ręki – i nie jest to gest sięgania po kartę kredytową w celu kupna nowego komputera. Wystarczy po prostu *zmienić kolejność dwóch instrukcji* w pętli, o tak:

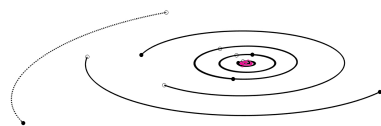
Ten schemat odkryła Abby Aspel. Sprawdzając, czy nie pomyliła się w programowaniu metody Eulera, zmieniła kolejność instrukcji w pętli!

Symplektyczny schemat Eulera:

```
t = 0; T = 500 lat; dt = 2 godziny;
x = (*.położenia początkowe.*); v = (*.prędkości początkowe.*);
while t < T
  F = siła_wypadkowa(x);
  v = v + dt*F;
  x = x + dt*v;
  t = t + dt;
end
```

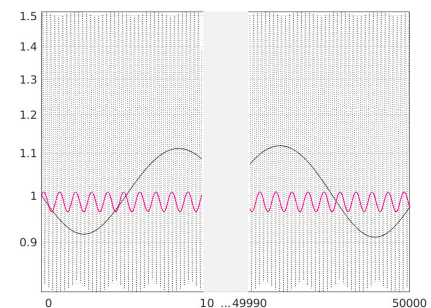
Jak widać na środkowym wykresie na górze strony, tym razem energia nie jest co prawda idealnie zachowana, ale przynajmniej oscyluje wokół pierwotnej wartości. Orbity uzyskane w ten sposób przez tysiące lat trzymają fason i nie rozwijają się w dramatyczne spirale. Jeszcze lepsza – i jednocześnie dokładniejsza – jest metoda *leap-frog*, zwana też schematem Verleta.

Wykres obok pokazuje, że w jej przypadku odchylenie nie przekroczyło jednej dziesięciotysięcznej na przestrzeni 50 tysięcy lat!



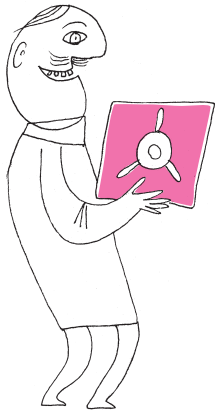
Trajektorie wszystkich planet przez końcowe 70 lat z symulacji schematem Verleta obejmującej 50 tysięcy lat. Kropkowaną linią zaznaczono orbitę Plutona (która i teraz jest aż tak ekscentryczna). Pomarańczowa kropka w środku to orbita Ziemi

I tym sposobem, po zmianie schematu na symplektyczny schemat Eulera (a tym bardziej na metodę *leap-frog*), **Świat został uratowany**: przez kolejne dziesiątki tysięcy lat – jak na rysunku obok – ruch planet jest uspokajająco cykliczny, jak w zegarku. Układ Słoneczny trzyma się stabilnie!



Wycinek zmian odległości od Słońca względem odległości początkowej przez najbliższe 50 tysięcy lat, obliczony schematem Verleta z $\Delta t = 10$ dni. Merkury – linia kropkowana, Ziemia – pomarańczowa, Jowisz – czarna. Tym razem wszystko przebiega cyklicznie, jak w zegarku

Może więc nie będzie tak źle?



Masa relatywistyczna

Bartłomiej KAMIŃSKI

Jedną z konsekwencji teorii względności Einsteina jest wzrost bezwładności ciał w ruchu. W skrócie, im szybciej porusza się ciało, tym trudniej jest zmienić jego prędkość. Ponieważ wielkością będącą miarą bezwładności w fizyce jest masa, kuszącym pomysłem jest, aby tłumaczyć ten efekt wzrostem masy właśnie. Wiele materiałów dotyczących Szczególnej Teorii Względności wprowadza wobec tego podział na „masę spoczynkową”, czyli masę, którą ciało ma w bezruchu, i „masę relatywistyczną”, czyli masę ciała w ruchu, większą od spoczynkowej. Tradycyjnie masę spoczynkową oznacza się wtedy m_0 , a masa relatywistyczna m wyraża się wzorem:

$$m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wprowadzenie tych pojęć ma pewne przyjemne konsekwencje dla estetyki równań teorii względności. Na przykład energia wyraża się wtedy słynnym wzorem Einsteina $E = mc^2$ niezależnie od prędkości ciała, a pęd dany jest przez znane z fizyki klasycznej $\vec{p} = m\vec{v}$. Wydaje się więc, że mogą one być całkiem użyteczne.

Wśród fizyków kwestia użyteczności masy relatywistycznej okazuje się jednak co najmniej dyskusyjna. Istnieje ku temu kilka powodów, z których przedstawię trzy.

Wzrost bezwładności

Jak już wspomniałem, zgodnie z teorią względności bezwładność ciał rośnie wraz ze wzrostem ich prędkości. Okazuje się jednak, że opis tego zjawiska jako wzrost masy powoduje trochę niewidocznych na pierwszy rzut oka trudności. W czym problem?

Zacznijmy od szybkiego przypomnienia fizyki przedrelatywistycznej. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, jeśli na ciało działa siła F , to ciało porusza się z przyspieszeniem a proporcjonalnym do tej siły, a współczynnik proporcjonalności to właśnie masa. Konkretnie, $a = \frac{F}{m}$.

Co więcej, ciało zawsze przyspiesza w tym kierunku, w którym działa siła (co może wydawać się oczywiste..., ale nie uprzedzamy faktów). Można wobec tego związek powyżej zapisać wektorowo: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Co w tym opisie zmienia teoria względności?

Jeśli zostaniemy przy podziale na masę spoczynkową i relatywistyczną, powiemy, że ciało w spoczynku ma masę m_0 , a w ruchu masę $m = m_0 \gamma$. Na intuicję, chciałoby się napisać, że w takim razie w przypadku relatywistycznym przyspieszenie będzie wyrażać się wzorem $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}}{m_0 \gamma}$... Ale czy tak jest rzeczywiście?

Cóż..., prawie. Ten wzór ma zastosowanie, ale pod jednym warunkiem – że siła \vec{F} jest *prostopadła* do prędkości \vec{v} ciała. Gdy siła i prędkość są równoległe, okazuje się, że przyspieszenie wynosi $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0 \gamma^3}$.

Jedną z ciekawych konsekwencji tego stanu rzeczy jest coś, co zasugerowałem już wcześniej – otóż siła nie musi być zawsze równoległa do przyspieszenia. Wobec tego nie istnieje wielkość skalarna, którą moglibyśmy zastosować w miejscu masy w II zasadzie dynamiki. Jeśli chcemy zachować wzór Newtona, masa w tym wzorze musi być tensorem drugiego rzędu (który można zapisać jako macierz). Samo wprowadzenie masy relatywistycznej nie rozwiązuje więc problemu rosnącej bezwładności.

Zderzenia

Jednym ze sposobów porównywania mas ciał może być zderzanie ich ze sobą. Jeśli masywniejsze ciało A uderza w spoczywające, mniej masywne ciało B, to ciało A lekko zwalnia, a ciało B jest odbijane ze sporą prędkością. I odwrotnie – jeśli to mniej masywne ciało C uderza w masywniejsze ciało D, to ciało C się odbija, a ciało D uzyskuje tylko niewielką prędkość.

II zasadę dynamiki można zapisać w formie:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

co przy założeniu, że prędkość jest skierowana wzdłuż osi x , można rozpisać jako:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\gamma^3 & 0 & 0 \\ 0 & m\gamma & 0 \\ 0 & 0 & m\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}.$$



Rozwiązanie zadania M 1648.
Odpowiedź: Tak.

Przypuśćmy, że na tablicy zapisano liczby $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Wówczas najmniejsza z liczb zapisanych na karteczkach to $a + b$, druga najmniejsza (być może równa) – $a + c$; największa to $d + e$, a druga największa – $c + e$. Ponadto sumując liczby ze wszystkich karteczek, uzyskujemy $4(a + b + c + d + e)$, a zatem znamy również wartość $a + b + c + d + e$. Ta wiedza wystarczy kolejno do znalezienia wartości

$$c = (a + b + c + d + e) - (a + b) - (d + e),$$

$$a = (a + c) - c,$$

$$e = (c + e) - c,$$

$$b = (a + b) - a,$$

$$d = (d + e) - e.$$

W szczególnym przypadku, kiedy ciała zderzające się mają równe masy, to pierwsze ciało się zatrzyma, a drugie zacznie poruszać się z taką prędkością, jaką miało pierwsze ciało przed zderzeniem (przynajmniej w przypadku zderzenia idealnie sprężystego). Jedną z bardziej znanych ilustracji tego zjawiska jest tzw. kołyska Newtona.

Pytanie jest wobec tego takie – jak zachowują się ciała, które mają identyczną masę spoczynkową, ale różną relatywistyczną? Na przykład, co jeśli kulka o masie spoczynkowej 1 grama, rozpędzona do $\gamma = 100$ (czyli jej masa relatywistyczna to 100 gramów) uderzy w drugą identyczną, spoczywającą?

Odpowiedź można znaleźć na podstawie zasad zachowania energii i pędu. Tu nie będziemy tego robić – szczegółowe obliczenia pozostawię Czytelnikowi. Podam jedynie wynik.

Otóż okazuje się, że kulki w tej sytuacji zachowują się jak ciała o *równych* masach. To znaczy – kulka poruszająca się po uderzeniu zatrzyma się, a kulka spoczywająca ruszy z taką samą prędkością, jaką miała pierwsza przed uderzeniem. Masa relatywistyczna okazuje się nie mieć tu żadnego znaczenia. Poprawną odpowiedź daje rozważenie wyłącznie mas spoczynkowych.

Duplikowanie pojęć

Ten powód jest mniej fizyczny, a bardziej techniczno-estetyczny, ale również ma pewną wagę.

Fizycy lubią upraszczać sobie życie. Jednym ze środków do osiągnięcia tego celu jest eliminowanie stałych przyrody z równań. Już wyjaśniam.

Weźmy za przykład prędkość światła w próżni. W tablicach fizycznych odczytujemy, że wynosi ona 299 792 458 m/s. Niezbyt ładna liczba, ale nie mamy wpływu na to, jak natura dobrała sobie prędkość fal elektromagnetycznych... Czy może mamy?

Ta konkretna liczba wynika tylko z doboru jednostek. Gdybyśmy chcieli wyrazić prędkość światła np. w stopach na tydzień, liczba byłaby inna. Gdybyśmy mierzyli w lokciach na rok – jeszcze inna. Przez odpowiedni dobór jednostek można sprawić, że wartość liczbową prędkości światła może być całkowicie dowolna. W szczególności, można wybrać jednostki, w których prędkość światła wynosi... po prostu 1.

Fizycy bardzo lubią korzystać z tej możliwości. Przykładowe jednostki, które dają taką wartość c , to sekunda i sekunda świetlna. Inne to rok i rok świetlny. Albo jakakolwiek jednostka czasu i odległość, jaką światło przebywa w ciągu tej jednostki. Dowolny taki wybór sprawia, że $c = 1$, i jak za dotknięciem magicznej różdżki, c znika ze wszystkich równań, bo czy mnożymy przez 1, czy dzielimy – nic się w równaniu nie zmienia.

(Fizycy lubią iść jeszcze dalej i pozbywać się kolejnych stałych. Często spotykanym wyborem są jednostki, w których $c = G = \hbar = 1$. Te jednostki są zwane jednostkami naturalnymi albo jednostkami Plancka – podstawowymi jednostkami w tym układzie są długość Plancka, czas Plancka i masa Plancka.)

Jakie to wszystko ma znaczenie? Zobaczmy, co w tym kontekście dzieje się ze słynnym wzorem Einsteina na energię:

$$E = mc^2 = m_0 \gamma c^2.$$

Gdy wprowadzimy jednostki takie, że $c = 1$, dostajemy:

$$E = m = m_0 \gamma.$$

W takich jednostkach masa relatywistyczna jest po prostu równa energii! Wobec tego jest de facto duplikatem pojęcia energii. Wszędzie tam, gdzie korzystalibyśmy z masy relatywistycznej, można wstawić energię (lub $\frac{E}{c^2}$, jeśli $c \neq 1$) i równania będą poprawne bez dokładania nowego pojęcia.

Podsumowanie

Jak widać, pozorna użyteczność masy relatywistycznej mocno maleje przy bliższym spojrzeniu na sprawę. Pojęcie to nie sprawdza się jako miara bezwładności, nie pomaga w rozważaniu zderzeń oraz może być zastąpione energią. Z tych powodów fizycy raczej już tego pojęcia nie stosują – kiedy fizyk mówi o masie, praktycznie zawsze ma na myśli masę spoczynkową.



Rozwiązanie zadania M 1650.

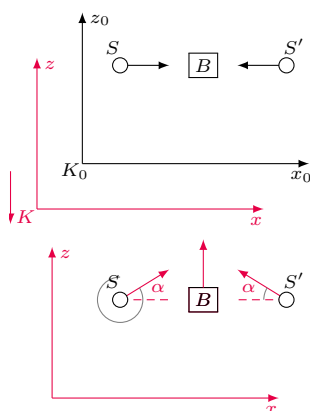
Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n = 3$ niech $x < y < z$ będą elementami zbioru X . Wówczas na jednym stosie kładziemy karteczkę z liczbą $z - x$, a na drugim – karteczki z liczbami $z - y$ oraz $y - x$.

Przypuśćmy, że żądaną własność mają wszystkie liczby nieparzyste nie większe od $2k - 1$, i rozważmy dowolny zbiór $2k + 1$ liczb $x_1 < \dots < x_{2k+1}$ oraz związane z nimi karteczki. Z założenia indukcyjnego wszystkie karteczki pochodzące wyłącznie od liczb x_2, x_3, \dots, x_{2k} można podzielić na stosy o równych sumach. Pozostałe karteczki najpierw podzielmy na następujące $2k$ grup: $2k - 1$ grup po dwie karteczki, z liczbami $x_{2k+1} - x_i$ oraz $x_i - x_1$ dla $i = 2, 3, \dots, 2k$, oraz jedna grupa składająca się z pozostałej karteczki z liczbą $x_{2k+1} - x_1$. Zauważmy, że w każdej grupie suma liczb z karteczek jest równa $x_{2k+1} - x_1$. Wobec tego wystarczy karteczki z dowolnych k grup dołączyć do jednego stosu, a karteczki z pozostałych k grup – do drugiego stosu. To kończy dowód indukcyjny.

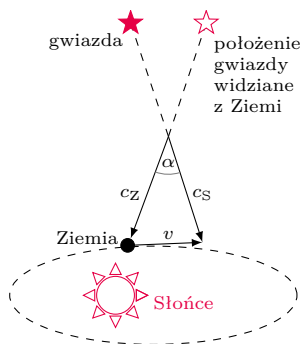
Elementarne wyprowadzenie równoważności masy i energii

Albert EINSTEIN

Albert Einstein (1879–1955) był nie tylko uczonym, ale też popularyzatorem fizyki, a w pewnym sensie także publicystą naukowym. Jego artykuł popularny *Elementary Derivation of the Equivalence of Mass and Energy* jest nieznanym szerokim kręgom, zapewne dlatego, że Einstein opublikował go w mało znanym fizykom piśmie izraelskim *Technical Journal* (Haifa), 1946, V, 16–17. Polski tekst artykułu jest tłumaczeniem z rosyjskiego przekładu artykułu [Albert Einstein, *Sobranie nauchnyh trudov*, tom 2, 650–652, Izd. Nauka, Moskwa 1966]. Przedruki tego tekstu znajdują się w Δ_{79}^{12} , Δ_{05}^6 oraz Δ_{20}^9 .



Aberracja światła, odkryta w 1726 r. przez astronoma angielskiego J. Bradleya, to zmiana położenia gwiazdy widzianej z Ziemi na skutek ruchu samej Ziemi. Aberracja roczna, uwarunkowana ruchem orbitalnym Ziemi wokół Słońca, widoczna jest jako ruch gwiazdy po maleńkiej (jak to widać z Ziemi) orbicie eliptycznej. Aberrację można poglądowo wyjaśnić jako wynik (wektorowego) sumowania się prędkości światła gwiazdy i prędkości obserwatora (wraz z Ziemią).



Wobec tego, że $v \ll c$, gdzie c – wartość prędkości światła, więc $c_z \approx c_s - v$ i kąt aberracji $\alpha = \frac{v}{c}$ (prawo Bradleya). Ten przybliżony wzór bardzo dobrze zgadza się z wynikami pomiarów, co oznacza, że w tym przypadku ($v \ll c$) wystarczającą dokładność obliczeń zapewnia klasyczna reguła składania prędkości Galileusza. Ponieważ dla $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ transformacja Lorentza przechodzi w klasyczną transformację Galileusza, więc i wyrażenie na pęd ciała ma dla małych prędkości postać klasyczną. Związek $E = pc$, spełniony dla świetlnej paczki falowej, może być udowodniony za pomocą transformacji Lorentza i zasady względności bez uciekania się do równań Maxwella. Dowód jest elementarny, choć dosyć długi.

Przedstawione tu wyprowadzenie prawa równoważności, dotychczas nigdzie nie publikowane, ma dwie zalety. Chociaż wykorzystuje się w nim szczególną zasadę względności, nie wymaga to jednak stosowania formalnego aparatu teorii; dowód opiera się jedynie na trzech znanych wcześniej prawach:

- (1) zasadzie zachowania pędu,
- (2) wyrażeniu na pęd promieniowania, czyli – pęd pakietu falowego poruszającego się w danym kierunku,
- (3) znanym wyrażeniu dla aberracji światła (wpływu ruchu Ziemi na widziane z Ziemi położenie nieruchomych gwiazd, czyli – na prawie Bradleya).

Rozpatrzmy teraz następujący układ. Niech ciało B spoczywa swobodnie w przestrzeni względem układu odniesienia K_0 . Dwa pakiety falowe S i S' , o energii $E/2$ każdy, poruszają się odpowiednio w dodatnim i ujemnym kierunku osi x_0 , padają na ciało i są przez nie pochłonięte. W wyniku tego procesu energia ciała zwiększa się o E . Ciało B pozostaje przy tym w spoczynku względem układu K_0 , a wynika to z symetrii zagadnienia. Rozważmy teraz ten sam proces z układu odniesienia K poruszającego się względem układu K_0 ze stałą prędkością o wartości v w ujemnym kierunku osi z_0 . W układzie K rozważany proces opisuje się następująco: ciało B porusza się w dodatnim kierunku osi z z prędkością o wartości v . Kierunki dwóch pakietów falowych w układzie K tworzą z osią x kąt α . Zgodnie z prawem aberracji, w pierwszym przybliżeniu zachodzi związek: $\alpha = v/c$, gdzie c – prędkość światła. Z rozważań dotyczących przebiegu procesu w układzie K_0 wiemy, że prędkość ciała B po pochłonięciu pakietów falowych S i S' nie ulegnie zmianie. Zastosujemy teraz do naszego układu prawo zachowania pędu dla składowych w kierunku z w układzie K .

I. Niech M oznacza masę ciała B do chwili pochłonięcia pakietów falowych; w takim razie Mv jest pędem ciała B (zgodnie z mechaniką klasyczną). Każdy pakiet falowy ma energię $E/2$, a więc – zgodnie ze znanym wnioskiem z teorii Maxwella – jego pęd ma wartość $E/2c$. Ściśle rzecz biorąc, tyle jest równy pęd pakietu falowego S względem układu odniesienia K_0 . Kiedy jednak prędkość v jest mała w porównaniu z c , wówczas pęd w układzie K ma taką samą wartość – z dokładnością do wielkości małej drugiego rzędu (v^2/c^2 w porównaniu z 1). Wartość składowej tego pędu wzdłuż osi z jest równa $\frac{E}{2c} \sin \alpha$, albo – z wystarczającą dokładnością (jeśli pominąć wielkości małe wyższych rzędów) – $\frac{E}{2c} \alpha$ lub $\frac{E}{2} \frac{v}{c^2}$. Zatem składowe pędów pakietów falowych S i S' wzdłuż osi z są w sumie równe $E \frac{v}{c^2}$. Tak więc pęd całkowity układu przed aktem pochłonięcia jest równy

$$Mv + \frac{E}{c^2}v.$$

II. Niech M' oznacza masę ciała B po akcie pochłonięcia. Z góry bierzemy tu pod uwagę możliwość zwiększenia masy po pochłonięciu energii E (jest to konieczne, aby ostateczny wynik naszych obliczeń był niesprzeczny). Wobec tego pęd układu po akcie pochłonięcia będzie równy

$$M'v.$$

Skorzystamy wreszcie z zasady zachowania pędu dla składowych wzdłuż osi z . Daje to związek

$$Mv + \frac{E}{c^2}v = M'v$$

lub

$$M' - M = \frac{E}{c^2}.$$

Związek ten wyraża prawo równoważności energii i masy. Zwiększenie energii o E wiąże się ze wzrostem masy o $\frac{E}{c^2}$. A wobec tego, że energię określa się zazwyczaj z dokładnością do stałej addytywnej, więc tę ostatnią możemy wybrać tak, aby zachodził związek:

$$E = Mc^2.$$

O uogólnieniach i uszczególnieniach problemów matematycznych

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Karol GRYSZKA *

W trakcie lektury artykułu Piotra Chrzastowskiego-Wachtela o uogólnieniach (Δ_{20}^2) przypomniałem sobie o kilku innych problemach matematycznych, które podlegają opisanej tam zasadzie. Przypomnę – problem postawiony w pewnym szczególnym przypadku może okazać się trudniejszy do udowodnienia niż problem ogólny. Z drugiej strony wiem, że czasami rozwiązanie przypadku szczególnego daje gotowe rozwiązanie przypadku ogólnego. Chciałbym przybliżyć Czytelnikowi kilka innych przykładów takiego postępowania, które poznałem w trakcie studiów oraz podczas wędrowki po ciekawych problemach matematycznych.

Do pierwszego problemu niezbędne jest krótkie wprowadzenie terminologiczne. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ nazywamy **iniekcją** (funkcją różnowartościową), jeśli z warunku $x_1 \neq x_2$ wynika, że $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funkcję f nazywamy **surjekcją** (funkcją na), gdy dla dowolnego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = y$. Funkcja, która jest jednocześnie iniekcją i surjekcją, to **bijekcja**.

Zbiór X jest skończony, gdy istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ oraz bijekcja między zbiorami X oraz $\{1, \dots, n\}$. Piszemy wtedy również $|X| = n$.

Problem 1: Niech X będzie zbiorem skończonym. Udowodnić, że dowolna iniekcja $f : X \rightarrow X$ jest bijekcją.

Rozwiązanie: Uogólnijmy problem: udowodnimy, że jeżeli X oraz Y są zbiorami skończonymi o tej samej liczbie elementów oraz $f : X \rightarrow Y$ jest iniekcją, to f jest bijekcją. Rozwiązanie przebiega indukcyjnie ze względu na liczbę $n = |X|$ elementów zbioru X . Oczywiście przypadek $n = 1$ jest spełniony, przechodzimy zatem do kroku indukcyjnego. Niech $|X| = n + 1$. Niech $y \in Y$ będzie takie, że $f(x) = y$ dla pewnego $x \in X$. Takie x jest jedyne na mocy iniektywności, zatem można rozważyć funkcję $g : X \setminus \{x\} \rightarrow Y \setminus \{y\}$ daną wzorem $g(a) = f(a)$ dla $a \in X \setminus \{x\}$. Wtedy $|X \setminus \{x\}| = n$ oraz g jest iniekcją. Istotnie, jeżeli $x_1, x_2 \in X \setminus \{x\}$ i $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zauważmy teraz, że $f(x_1) \neq y \neq f(x_2)$ (ponownie korzystamy z iniektywności), zatem również $g(x_1) \neq g(x_2)$. Tym samym g jest iniekcją, a więc z założenia indukcyjnego jest ona bijekcją. Stąd już łatwo wynika, że f jest bijekcją (dorzucamy po różnym od pozostałych punkcie do dziedziny i przeciwdziedziny).

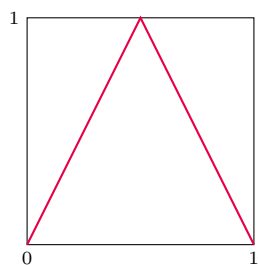
Rozwiązanie problemu wyjściowego polega teraz na zastosowaniu udowodnionego przed chwilą ogólniejszego faktu dla $Y = X$.

Dlaczego tego samego rozumowania nie można poprowadzić w przypadku funkcji $f : X \rightarrow X$? Usunięcie jednego elementu z dziedziny i przeciwdziedziny nie gwarantuje, że dziedzina i przeciwdziedzina g będą tym samym zbiorem, a tylko wtedy moglibyśmy skorzystać z założenia indukcyjnego!

Problem 2: Niech $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie dane wzorem $f(x) = 1 - 2|1/2 - x|$. Niech ponadto A oraz B będą dowolnymi niepustymi przedziałami (otwartymi lub domkniętymi jedno- lub obustronnie), których końce są liczbami niewymiernymi. Uzasadnić, że istnieje takie n , że $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$, gdzie f^n oznacza n -krotne złożenie funkcji f .

Zbiór pusty jest traktowany jako przedział, wobec tego założenie niepustego przedziału ma sens.

Wykres funkcji $f(x) = 1 - 2|1/2 - x|$



Rozwiązanie: Postawmy ogólniejszy problem. Uzasadnimy, że **dowolny** niepusty przedział otwarty (a, b) ma tę własność, że $f^n((a, b)) = [0, 1]$ dla pewnego $n > 0$. Niech $J = (a, b)$ i $|J|$ będzie długością tego przedziału. Zauważmy, że jeżeli $\frac{1}{2} \notin J$, to $|f(J)|$ jest przedziałem dwukrotnie dłuższym niż $|J|$. Tym samym kolejne przekształcenia J przez f są przedziałami długości $|J|, 2|J|, 2^2|J|, 2^3|J|$ i tak dalej, o ile do żadnego z wymienionych zbiorów nie należy $\frac{1}{2}$. Wobec powyższego istnieje takie $k \geq 0$, że $\frac{1}{2} \in f^k(J)$. Ale $f(1/2) = 1$ i $f(1) = 0$, czyli $0 \in f^{k+2}(J)$ i wobec tego $f^{k+2}(J)$ jest przedziałem postaci $K = [0, c]$ dla pewnego $c > 0$. Teraz f ponownie podwaja długość przedziału K , wobec tego dla pewnego $\ell \geq 0$ zachodzi $\frac{1}{2} \in f^\ell(K)$. Tym samym $[0, 1/2] \subset f^\ell(K)$ i wystarczy jeszcze

zauważyć, że

$$[0, 1] = f([0, 1/2]) \subset f^{\ell+1}(K) = f^{\ell+1}(f^{k+2}(J)) = f^{k+\ell+3}(J).$$

Rozwiązanie pierwotnego problemu polega teraz na zauważeniu, że dowolny przedział A postulowany w treści zadania zawiera w sobie przedział otwarty oraz jeśli $f^n(A) = [0, 1]$ z przypadku ogólnego, to tym bardziej $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Zauważmy, że w ogólniejszym problemie rozważamy wyłącznie jeden przedział, drugi zaś przestał mieć znaczenie (nie użyliśmy także niewymierności końców przedziałów). Tymczasem gdybyśmy próbowali kontrolować oba przedziały jednocześnie, moglibyśmy mieć znacznie więcej problemów z ustaleniem istnienia odpowiedniego n .

Problem 3: Koło o promieniu 15 przecina się z kołem o promieniu 20 pod kątem prostym. Wyznaczyć różnicę pól tych części kół, które nie są wspólne dla obu.

Rozwiązanie: Rozważmy dwie dowolne figury, których część wspólna jest jakimś innym kształtem. Niech pola dwóch kształtów będą odpowiednio równe A oraz B (można założyć, że $A > B$) oraz pole części wspólnej jest równe $X \geq 0$. Wtedy szukane pole jest równe

$$(A - X) - (B - X) = A - B.$$

Zatem pole z problemu jest równe

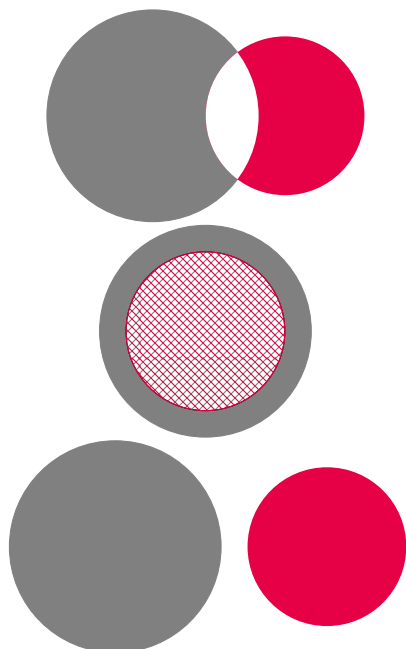
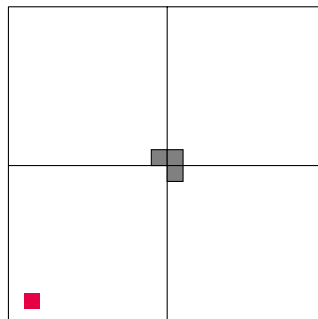
$$(20^2 - 15^2)\pi = 175\pi.$$

Zapewne niejedyn mistrz rachunków i geometrii zacząłby to zadanie od wyznaczenia pola części wspólnej. Wszak kąt prosty przecięcia brzmi tak kusząco... Tymczasem wystarczy rozważyć problem ogólny, gdyż kształty figur oraz pole części wspólnej nie odgrywa żadnej roli. Jednocześnie pozbywamy się uciążliwych rachunków i otrzymujemy rozwiązanie problemu z kołami.

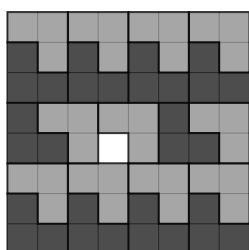
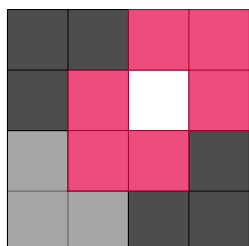
Problem 4: Udowodnić, że dla dowolnej kwadratowej siatki $2^n \times 2^n$ istnieje takie pokrycie płytkami w kształcie litery L , złożonymi z trzech kwadratów, które pozostawia jeden z czterech centralnych kwadratów odkryty (przypadek $n = 2$ oraz $n = 3$ na marginesie).

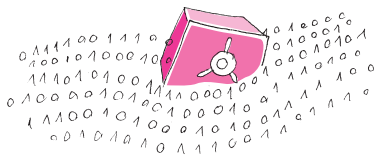
Rozwiązanie: Rysunek dla przypadku $n = 3$ sugeruje pewną metodę wypełniania, ale Czytelnik szybko przekona się, że metody tej nie da się powtórzyć dla $n = 4$. My zaś rozwiązaliśmy problem, dowodząc, że można znaleźć takie pokrycie, dla którego **dowolnie** z góry wybrany kwadrat pozostanie odkryty. Z tego oczywiście natychmiast wynika pozytywne rozwiązanie problemu. Rozumowanie przebiega oczywiście indukcyjnie względem n i przypadek $n = 1$ jest oczywisty.

W kroku indukcyjnym ustalmy dowolne $n > 1$ i kwadrat $2^n \times 2^n$ podzielmy na cztery mniejsze kwadraty, jak na rysunku poniżej. Pomarańczowy kwadrat to nasze dowolnie wybrane, ale ustalone pole, którego nie możemy przykryć. W trzech kwadratach z podziału, które nie zawierają wyróżnionego pomarańczowego pola, zaznaczamy te płytki, które są narożnymi polami centralnego bloku 2×2 . Korzystamy teraz z indukcji i wypełniamy wszystkie cztery kwadraty płytkami tak, aby nie nakryć pól pomarańczowego i szarych. Następnie szare pola nakrywamy pojedynczą płytką. Dowód jest zakończony.

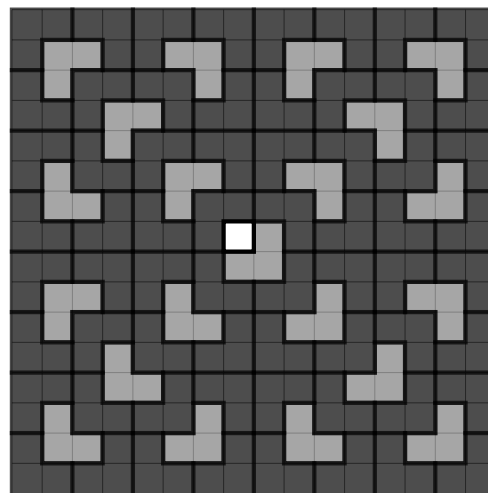
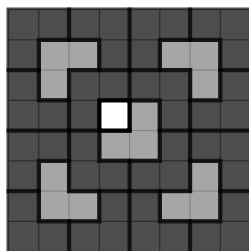


Różnica pola szarego i pomarańczowego zbioru we wszystkich powyższych przypadkach jest taka sama!





Rysunki poniżej prezentują odpowiednie wypełnienie metodą indukcji dla przypadków $n = 3$ oraz $n = 4$. Każda szara płytką odpowiada tej wykorzystanej w dowodzie indukcyjnym.



Przedstawione powyżej rozumowanie jest w swojej naturze zbliżone do tego z Problemu 1: bez problemu radzimy sobie z indukcją w sytuacji ogólnej, natomiast przypadek szczególny (niezakryte pole w centrum kwadratu) nas przerasta. Oczywiście moglibyśmy konstruować odpowiednie wypełnienia, jak to zrobiliśmy w przypadkach $n = 2$ oraz $n = 3$, ale jak się przekonaliśmy powyżej, konstrukcja w jednym przypadku nie przenosi się na kolejne.



Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1648. Na tablicy zapisanych jest 5 (niekoniecznie różnych) liczb rzeczywistych. Dla każdej pary liczb z tablicy na osobnej karteczce zapisano ich sumę. Karteczki pomieszano, a tablicę starto. Czy na podstawie liczb z karteczek można odtworzyć liczby z tablicy?
Rozwiązanie na str. 7

M 1649. Na tablicy zapisanych jest 5 różnych liczb rzeczywistych. Dla każdej pary x, y liczb z tablicy na osobnej karteczce zapisano liczbę $|x - y|$. Czy może się zdarzyć, że na karteczkach zapisano liczby całkowite od 1 do 10?
Rozwiązanie na str. 13

M 1650. Na tablicy zapisanych jest $n \geq 3$ różnych liczb rzeczywistych, przy czym n jest liczbą nieparzystą. Dla każdej pary x, y liczb z tablicy na osobnej karteczce zapisano liczbę $|x - y|$. Wykazać, że wszystkie karteczki można podzielić na dwa stosy o równych sumach zapisanych liczb.
Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1007. Ciałem szarym nazywane jest nieprzezroczyste ciało, które w całym zakresie widma fal elektromagnetycznych absorbuje ten sam ułamek a energii promieniowania termicznego padającego na jego powierzchnię. Zgodnie z prawem Kirchhoffa takie ciało emituje ułamek a energii promieniowanej przez ciało doskonale czarne o równej mu temperaturze. Współczynnik a nazywany jest w związku z tym względną zdolnością emisyjną. Płaskie, równoległe powierzchnie dwóch ciał znajdują się w niewielkiej odległości od siebie. Powierzchnia A, o zdolności emisyjnej $a_1 = 0,8$, utrzymywana jest w temperaturze $T_1 = 320$ K, a powierzchnia B, o $a_2 = 0,9$, w temperaturze $T_2 = 295$ K. Ile wynosi wypadkowy strumień I energii promieniowania termicznego przepływającej między tymi powierzchniami? Stała Stefana–Boltzmann $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$. Odległość między powierzchniami jest mała w porównaniu z ich rozmiarami i efekty brzegowe można zaniedbać.
Rozwiązanie na str. 21

F 1008. Zmierzono, że utrzymanie stałej różnicy temperatur między powierzchniami płaskiej płyty miedzianej o grubości $d = 10$ cm wymaga dostarczania strumienia energii (ciepła) w ilości $I = 121 \text{ Wm}^{-2}$. Ile wynosi utrzymywana różnica temperatur ΔT ? Współczynnik przewodnictwa cieplnego miedzi $\lambda = 401 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$. Straty ciepła przez krawędzie boczne płyty pomijamy.
Rozwiązanie na str. 1

O liczbie układów podwójnych czarnych dziur i gwiazd neutronowych

Michał BEJGER

Z obserwacji zespołów LIGO i Virgo, przez uchylone dopiero co okno „falowo-grawitacyjne” – w odróżnieniu od tradycyjnej astronomii korzystającej, z informacji pochodzących z okna elektromagnetycznego – wyłania się coraz wyraźniejszy obraz Wszechświata wypełnionego niewidzialnymi do tej pory układami podwójnymi czarnych dziur o różnych masach, układami podwójnymi gwiazd neutronowych, a także różnymi konfiguracjami układów mieszanych czarnej dziury i gwiazdy neutronowej.

I tak, okazuje się, że detektory sieci LIGO–Virgo najczęściej „słyszą” drgania czasoprzestrzeni pochodzące z masywnych układów podwójnych czarnych dziur (już kilkadziesiąt takich przypadków), a tylko od czasu do czasu te wytwarzane przez układy podwójne gwiazd neutronowych (do tej pory opublikowano wyniki dotyczące dwóch takich przypadków, sygnałów GW170817 i GW190425). Stosunek liczby detekcji układów podwójnych czarnych dziur (CD) do układów gwiazd neutronowych (GN) to $\mathcal{D}_{CD}/\mathcal{D}_{GN} \simeq 10$.

Jednocześnie szacowana z teorii ewolucji gwiazd częstość występowania bardzo ciasnych układów czarnych dziur i gwiazd neutronowych prowadzących do emisji fal grawitacyjnych rejestrowanych przez LIGO i Virgo wynosi około $10\text{--}100 \text{ Gpc}^{-3}/\text{rok}$ dla układów podwójnych czarnych dziur oraz $\simeq 1000 \text{ Gpc}^{-3}/\text{rok}$ dla układów podwójnych gwiazd neutronowych. Jak to więc możliwe, że na jednostkę czasu rejestruje się więcej układów podwójnych czarnych dziur, ale częstość występowania ich zderzeń w standardowej objętości jest dużo mniejsza?

Załóżmy dla uproszczenia, że układy podwójne powstają podczas ewolucji zwykłych gwiazd (żargonowo „w polu gwiazdowym”); możliwe jest również dynamiczne tworzenie się układów podwójnych, gdy jeden obiekt znajdzie się tak blisko drugiego, że zostaną grawitacyjnie związane, jednak tego typu procesy są uważane za dużo mniej wydajne. Gwiazdy „pola” powstają w obszarach gwiazdotwórczych z pierwotnego gazu od razu w parach, po czym wspólnie ewoluują. Z obserwacji wynika, że większość gwiazd znajduje się w układach podwójnych lub wielokrotnych, a tempo ewolucji gwiazdy zależy od jej początkowej masy: im większa masa, tym szybsza ewolucja. Jednocześnie mało masywnych gwiazd jest dużo więcej niż bardzo masywnych. Liczba gwiazd o masie M w przedziale mas dM jest opisywana gęstością rozkładu prawdopodobieństwa. Dla kolejnego uproszczenia przyjmijmy pierwszą z brzegu (w istocie, historycznie pierwszą) funkcję rozkładu mas początkowych gwiazd $\xi(M)$, zaproponowaną w 1955 roku przez Edwina Salpetera:

$$(1) \quad \xi(M)dM = \xi_0 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2,35} dM,$$

gdzie ξ_0 jest stałą związaną z lokalną gęstością gwiazd. Tempo powstawania gwiazd $\mathcal{N}(M)$ w danym przedziale mas w przeciętnej Galaktyce (na przykład takiej jak nasza) jest związane z funkcją rozkładu mas gwiazd,

$$(2) \quad \frac{d\mathcal{N}}{dMdt} = \xi(M)/\text{rok}, \quad \text{dla mas w przedziale } 0,1M_\odot < M < 120M_\odot.$$

Gwiazdy na początku swej ewolucji na ciągu głównym (to znaczy wtedy, gdy „spalają” w jądrze wodór, produkując hel), których masa początkowa jest większa niż pewna krytyczna wartość (około $10M_\odot$), wybuchają w końcu jako supernowe, pozostawiając po sobie zwarte jądro: gwiazdę neutronową lub czarną dziurę. Na potrzeby dyskusji załóżmy, że gwiazdy o masach od 10 do $60M_\odot$ produkują gwiazdy neutronowe, a powyżej $60M_\odot$ wyłącznie czarne dziury. W rzeczywistości sytuacja jest bardziej skomplikowana, ponieważ tempo i efekty ewolucji zależą nie tylko od masy, ale również od początkowego

Ponieważ nie możemy wpływać na zachowanie ciał niebieskich i obserwować tego, na co aktualnie mamy ochotę, astronomowie zadowolają się każdym, nawet niewielkim strzępkim informacji. Astronomia jest więc sztuką rzetelnej i przede wszystkim cierplivej obserwacji, która rozwija wyobraźnię podczas wyciągania statystycznie wiarygodnych wniosków na podstawie minimalnej informacji. Obserwator musi w szczególności mieć zaufanie do instrumentu, który ma do dyspozycji: znać jego czułość i słabe punkty. Na podstawie tego, co można zaobserwować, czasu i sposobu obserwacji oraz liczby zaobserwowanych zjawisk można wtedy wnioskować o cechach całej, nieobserwowalnej populacji zjawisk (oczywiście przy założeniu, że zaobserwowane zjawiska są próbkami z populacji, którą da się opisać funkcją rozkładu prawdopodobieństwa).

Od czasu E. Salpetera badacze ewolucji gwiazd poczynili duże postępy w tej dziedzinie, i obecnie funkcja mas jest przedstawiana przez sumę funkcji potęgowych dla różnych przedziałów mas.



Rozwiązanie zadania M 1649.
Odpowiedź: Nie.

Z kolejnego zadania wynika, że karteczki można podzielić na dwa stopy o równych sumach zapisanych liczb. Wobec tego gdyby na karteczkach znajdowały się liczby od 1 do 10, to istniałby podział na stopy, każdy o sumie

$$\frac{1 + 2 + \dots + 10}{2} = 27,5;$$

nie jest to możliwe, gdyż liczby na wszystkich karteczkach są całkowite.

Ciasne układy podwójne tuż przed połączeniem się składników opisywane są bardzo dobrze znanym z teorii wzorcem sygnału, tak zwanym „ćwierkiem” (zob. artykuł w Δ_{17}^3). Fala jest w danym momencie t rejestrowana przez detektor z amplitudą $h(t)$ i częstotliwością $f(t)$, $h(t) \propto \mathcal{M}^{5/3} f^{2/3}(t)/r$, gdzie $\mathcal{M} = (M_1 M_2)^{3/5} / (M_1 + M_2)^{1/5}$ oznacza masę ćwierku (ćwierkową).

Manipulując wzorami z Δ_{17}^3 , można otrzymać zależność pomiędzy f i t :

$$\pi \mathcal{M} f(t) = \left(\frac{5 \mathcal{M}}{256(t_* - t)} \right)^{3/8},$$

gdzie t_* jest momentem zderzenia się składników.

Stosunek sygnał–szum jest proporcjonalny do amplitudy sygnału zgodnie z następującą definicją:

$$\rho^2 = \langle h, h \rangle \equiv 4 \int_0^\infty \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df,$$

gdzie $\tilde{h}(f)$ oznacza transformatę Fouriera $h(t)$. Precyzyjniej, ρ reprezentuje zsumowaną moc sygnału ważoną widmową (spektralną) gęstością mocy danych $S_n(f)$.

składu gwiazdy (zawartości pierwiastków cięższych od helu, czyli żargonowo „metaliczności”), tempa rotacji gwiazdy, wpływu towarzysza w układzie podwójnym i innych czynników. Niemniej jednak, porównując liczbę gwiazd produkujących czarne dziury i gwiazdy neutronowe,

$$(3) \quad \frac{\mathcal{N}(M > 60M_\odot)}{\mathcal{N}(M \in (10M_\odot, 60M_\odot))} \approx \frac{\mathcal{N}(M > 60M_\odot)}{\mathcal{N}(M > 10M_\odot)} = \left(\frac{60M_\odot}{10M_\odot} \right)^{-1,35} \approx 0,1,$$

dostajemy to, czego się spodziewaliśmy, to znaczy dużo mniejszą liczbę czarnych dziur w stosunku do liczby gwiazd neutronowych. Pomimo wielu różnic i złożoności procesu ewolucji stosunek częstości występowania układów podwójnych czarnych dziur \mathcal{R}_{CD} i układów podwójnych gwiazd neutronowych \mathcal{R}_{GN} , które emitują fale grawitacyjne wykrywane przez LIGO i Virgo, w pierwszym przybliżeniu wynosi tyle samo, co stosunek liczb układów podwójnych czarnych dziur i gwiazd neutronowych:

$$(4) \quad \frac{\mathcal{R}_{CD}}{\mathcal{R}_{GN}} = \left(\frac{60M_\odot}{10M_\odot} \right)^{-1,35} \approx 0,1.$$

Oczywiście szacowanie jest niedokładne, m.in. dlatego, że część układów może składać się z czarnej dziury i gwiazdy neutronowej, ale na nasze potrzeby „co do rzędu wielkości” jest wystarczające.

Do tej pory określaliśmy w przybliżeniu parametry całej populacji układów podwójnych, a teraz wykorzystamy je do porównania liczby rzeczywistych detekcji \mathcal{D}_{CD} i \mathcal{D}_{GN} . Niezbędnym elementem układanki jest określenie, jakie czynniki wpływają na „głośność” sygnału fal grawitacyjnych, a więc możliwość detekcji.

Amplituda fali $h(t)$ rejestrowana w momencie t w detektorze jest praktycznie zawsze mniejsza od amplitudy szumu danych (sygnały są „schowane” w szumie detektora), więc by dokonać detekcji, sygnał jest zbierany przez N cykli fali. W praktyce korzysta się z metody *filtru dopasowanego*, to znaczy koreluje się dane z bankiem filtrów (modeli) sygnału, po czym wybiera najlepiej dopasowany, to znaczy taki z najwyższym *stosunkiem sygnał–szum* ρ . Innymi słowy, detektor gromadzi w czasie N cykli moc sygnału ewoluującego w częstotliwości f , z odpowiednią fazą opisaną modelem sygnału. Liczba cykli $N \simeq f^2 / (df/dt)$, czyli wymiarowo $N \simeq ft$. Na potrzeby naszego przybliżenia zdefiniujemy charakterystyczną amplitudę h_c proporcjonalną do stosunku sygnał–szum ρ : energia to kwadrat amplitudy, czyli $h_c^2 \sim Nh^2$, zatem $\rho \propto h_c \sim \sqrt{N}h$. Z zależności $h(t)$ i $f(t)$ (patrz margines) wynika, że $t \propto f^{-8/3} \mathcal{M}^{-5/3}$, co oznacza

$$(5) \quad \rho \propto \sqrt{N} \cdot h \propto \sqrt{ft} \cdot h \propto \sqrt{f \cdot f^{-8/3} \mathcal{M}^{-5/3}} \cdot f^{2/3} \mathcal{M}^{5/3} \propto f^{-1/6} \mathcal{M}^{5/6},$$

z czego istotna jest dla nas zależność $\rho \propto \mathcal{M}^{5/6}$. Stosunek sygnał–szum jest, tak jak amplituda sygnału, odwrotnie proporcjonalny do odległości do źródła. Zakładając minimalny ρ , przy którym da się stwierdzić detekcję, definiujemy w ten sposób maksymalną odległość r , czyli maksymalną objętość r^3 (zaniedbując efekty kosmologiczne i zakładając, że w dobrym przybliżeniu źródła są rozłożone równomiernie w przestrzeni). Ostatecznie do porównania liczby detekcji wchodzi $\rho^3 \propto \mathcal{M}^{5/2}$. Stosunek liczby detekcji układów podwójnych czarnych dziur i układów gwiazd neutronowych – przyjmując, że przeciętna masa czarnej dziury to $10M_\odot$, a gwiazdy neutronowej to $1,5M_\odot$ – jest więc następujący:

$$(6) \quad \frac{\mathcal{D}_{CD}}{\mathcal{D}_{GN}} = \frac{\mathcal{R}_{CD}}{\mathcal{R}_{GN}} \left(\frac{\mathcal{M}_{CD}}{\mathcal{M}_{GN}} \right)^{5/2} = \left(\frac{60M_\odot}{10M_\odot} \right)^{-1,35} \left(\frac{10M_\odot}{1,5M_\odot} \right)^{5/2} \simeq 11.$$

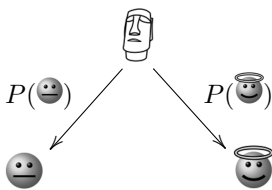
Mimo że układów podwójnych czarnych dziur jest we Wszechświecie mniej, sygnały przez nie emitowane są silniejsze niż układów podwójnych gwiazd neutronowych (z powodu dużo większej masy ćwierku \mathcal{M}), a zatem są „słyszalne” z dużo większej objętości i dlatego dominują w katalogach detekcji LIGO i Virgo.

Paradoks jednomyślności

Marcin MAKOWSKI*

Zgodnie ze starożytnym żydowskim prawem, jeśli oskarżony w wyniku procesu przed Sanhedrynem został jednogłośnie uznany za winnego zarzucanych mu czynów, to odstępuje się od wymierzenia kary! Taka zasada dla wielu Czytelników jest zapewne szokująca. Jednak ówczesni twórcy prawa uznawali, że jednomyślność sędziów często wskazuje na niedopatrzenie przy ocenie dowodów winy. To mogło wypaczyć wynik procesu. Intuicyjnie rozumiano, że jeśli coś wydaje się zbyt idealne, by mogło być prawdziwe, to najprawdopodobniej popełniono błąd, nawet jeśli jego natury nie dało się jednoznacznie ustalić. Podobny motyw często występuje w literaturze lub filmie, gdy nabieramy wątpliwości wraz z licznie pojawiającymi się dowodami, zbyt jednoznacznie wskazującymi na winę jednego z bohaterów (może ktoś celowo wplątuje go w popełnione przestępstwo?).

Spróbujmy skonstruować prosty probabilistyczny model, w którym da się zaobserwować paradoksalny efekt jednomyślności. To pozwoli nam lepiej zrozumieć, jakie są jego przyczyny. Posłużymy się pomysłem zaczerpniętym z pracy „Too good to be true: when overwhelming evidence fails to convince” [*].



Rys. 1

Rozważmy oskarżonego (☹) podejrzanego o popełnienie pewnego przestępstwa. Możemy go scharakteryzować jedną z dwóch wzajemnie wykluczających się cech: ☹ – winny, 😊 – niewinny. Każda z nich występuje odpowiednio z prawdopodobieństwem $P(☹) \neq 0$, $P(😊) \neq 0$, przy czym $P(☹) + P(😊) = 1$ (rys. 1).

Załóżmy, że o winie bądź niewinności oskarżonego decyduje 23 sędziów. Właśnie tylu członków liczył każdy z 5 okręgowych Sanhedrynow w starożytnej Judei. Chcemy obliczyć warunkowe prawdopodobieństwo $P(☹|k)$ tego, że oskarżony jest winny, gdy k sędziów ($k = 1, \dots, 23$) uzgodniło taki werdykt. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $P(k|☹)$ – prawdopodobieństwo warunkowe, że k sędziów uznało oskarżonego za winnego, jeśli był on winny,
- $P(k|😊)$ – prawdopodobieństwo warunkowe, że k sędziów uznało oskarżonego za winnego, jeśli był on niewinny,
- $P(k)$ – prawdopodobieństwo uznania przez k sędziów winy oskarżonego.

Przypomnijmy tutaj, że jeśli A i B są pewnymi zdarzeniami o dodatnim prawdopodobieństwie, to prawdopodobieństwo A pod warunkiem zajścia B obliczamy według wzoru

$$P(A|B) = \frac{P(A \& B)}{P(B)},$$

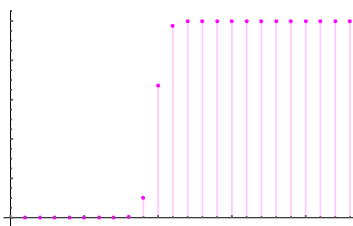
gdzie przez $A \& B$ oznaczamy jednoczesne wystąpienie zdarzeń A i B .

Otrzymujemy wówczas

$$P(k) = P(k|☹) \cdot P(☹) + P(k|😊) \cdot P(😊) \quad (\text{prawdopodobieństwo całkowite}),$$

$$P(☹|k) = P(k|☹) \cdot \frac{P(☹)}{P(k)} \quad (\text{twierdzenie Bayesa}).$$

Rozkład dwumianowy opisuje liczbę sukcesów przy zadanej liczbie niezależnych doświadczeń, z których każde ma tę samą szansę na powodzenie.



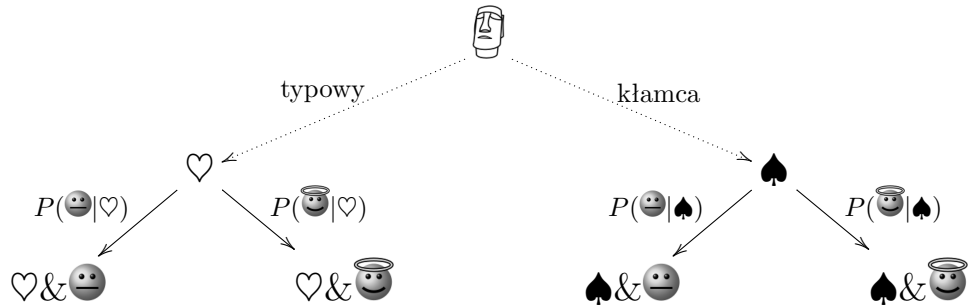
Rys. 2. $n = 23$, $P(W|😊) = 0,14$, $P(W|☹) = 0,75$, $P(☹) = P(😊)$

Zakładając, że każdy sędzia podejmuje decyzję niezależnie i z jednakowym prawdopodobieństwem rozstrzyga o winie oskarżonego, możemy przyjąć *rozkład dwumianowy* jako model prawdopodobieństwa. Niech W oznacza zdarzenie, że dowolnie ustalony sędzia uznał naszego oskarżonego za winnego. Niech $s = P(W|😊)$ i $r = P(W|☹)$. Mamy

$$P(k|☹) = \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k}, \quad P(k|😊) = \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k},$$

gdzie n oznacza liczbę wszystkich sędziów. Rysunek 2 pokazuje, jak wartość $P(☹|k)$ zależy od k (dla pewnych ustalonych wartości interesujących nas prawdopodobieństw). Wyniki są zgodne z naszą intuicją. Gdy ponad połowa z 23 sędziów uznaje oskarżonego za winnego, to prawdopodobieństwo, że jest winny, jest bliskie 1.

Skomplikujmy nieco sytuację. Co, jeśli populacja potencjalnych oskarżonych nie jest tak homogeniczna? Być może sędziowie doskonale sobie radzą w typowych sytuacjach, gdy oskarżeni zachowują się zgodnie ze znanym im i dobrze zbadanym schematem. Wprowadźmy do naszego modelu pewne urozmaicenie. Załóżmy, że populacja potencjalnych oskarżonych składa się z osób typowych (oznaczanych przez ♡) i pewnej domieszki nietypowych, których nazwiemy *kłamcami* (oznaczanych przez ♠), którzy mają większą od typowego obywatela szansę na przekonanie sędziów do swojej niewinności (faktycznej lub nie). Każdy z nich może być winny albo niewinny, a sędziowie nie wiedzą, z kim mają do czynienia – rysunek 3.



Rys. 3. Rozbicie populacji oskarżonych na dwa rozłączne podzbiory: typowych i kłamców. Prawdopodobieństwo wystąpienia każdego z nich to odpowiednio $P(♡)$ oraz $P(♠)$

W tym przypadku prawdopodobieństwo, że oskarżony jest winny, gdy k sędziów uznało go za winnego, przedstawia poniższa formuła:

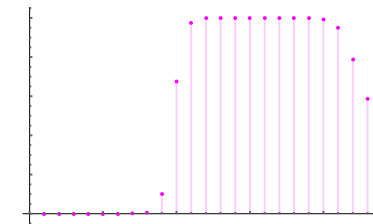
$$P(😊|k) = \frac{P(k|😊\&♡) \cdot P(😊|♡) \cdot P(♡) + P(k|😊\&♠) \cdot P(😊|♠) \cdot P(♠)}{P(k)},$$

gdzie

$$P(k) = P(k|😊\&♡) \cdot P(😊|♡) \cdot P(♡) + P(k|😊\&♠) \cdot P(😊|♠) \cdot P(♠) + P(k|😞\&♡) \cdot P(😞|♡) \cdot P(♡) + P(k|😞\&♠) \cdot P(😞|♠) \cdot P(♠).$$

Na rysunku 4 możemy zaobserwować, jak interesujące nas prawdopodobieństwo zależy od wartości k . Okazuje się, że gdy ilość sędziów uznających winę oskarżonego jest bliska 23, to prawdopodobieństwo $P(😊|k)$ spada! Dla jednomyślnej decyzji ($k = 23$) wynosi około 0,58. To dość zaskakujący efekt. Prawdopodobieństwo tego, że oskarżony jest winny, gdy sędziowie byli jednomyślni, nie odbiega zbyt wiele od prawdopodobieństwa wyrzucenia orła w rzucie symetryczną monetą. Przyzwyczajeni jesteśmy raczej do sytuacji, gdy decyzje podejmowane są wolą większości, a im więcej osób się na nią zgodziło, tym lepiej. Nasz przykład pokazuje, że od pewnego momentu im bardziej jednomyślny jest rezultat procesu, tym jego wynik jest mniej wiarygodny. Ma to związek z niepewnością, jaką wprowadziliśmy do modelu, dodając do analizy nietypowego oskarżonego – *kłamcę*. Niepewność skutkuje nieregularnościami wyników. Wyobraźmy sobie grę w *Monopol*. Gdyby naszemu przeciwnikowi w każdym rzucie kośćmi wypadały dwie szóstki, to uznalibyśmy, że coś jest nie tak. Nasz przykład z kłamcami to nieco bardziej skomplikowany przejaw tego samego zjawiska.

Oczywiście niemądrze byłoby sugerować, że każda jednomyślna decyzja powinna budzić wątpliwości. Na przykład, gdy poprosimy kilkanaście osób, aby ze zdjęć trzech zwierząt: kota, psa i papugi wskazały fotografię przedstawiającą kota, to najpewniej wszyscy wskażą to samo zdjęcie. Ten wybór jest jednomyślny, bo właściwie nie miały na niego wpływu czynniki losowe (nie biorąc pod uwagę tych kilku osób, które zapewne postanowiłyby zrobić sobie z nas żarty). Jednak tak klarowne sytuacje to rzadkość. Zwykle nasze decyzje obciążone są pewnym ryzykiem wynikającym z braku pełnej informacji, fizycznego zmęczenia, doświadczeń życiowych, wywieranej presji i wielu innych czynników. Żyjemy w tak złożonym środowisku i sami jesteśmy na tyle skomplikowani, że gdy w ramach pewnej grupy nasze wybory staną się jednakowe, to warto się zatrzymać i zastanowić, czy nie wpadliśmy w pułapkę jednomyślności.



Rys. 4. $n = 23$, $P(♠) = 10^{-2}$,
 $P(W|😊\&♡) = 0,14$, $P(W|😞\&♡) = 0,75$,
 $P(W|😊\&♠) = P(W|😞\&♠) = 0,05$,
 $P(😊|♡) = P(😊|♠) = P(😞|♡) = P(😞|♠)$

[*] L. J. Gunn, F. Chapeau-Blondeau, M. McDonnell, B. Davis, A. Allison oraz D. Abbott, „Too good to be true: when overwhelming evidence fails to convince”, Proceedings of the Royal Society A vol. 472 (2016).



Podbieranie miodu z barci, rysunek naskalny w jaskini, liczący 8 tys. lat, Hiszpania

Odrębnym, niezwykle ważnym zagadnieniem jest rodzaj chemicznych środków używanych współcześnie do ochrony zbiorów przed „szkodliwymi” owadami. Bardzo często są one zabójcze dla zapylaczy, w tym pszczoł.

Skąd się bierze miód

... Bez zachodu nie będzie miodu / kraina mlekiem i miodem płynąca / lać miód na serce / tyżka dziegiu w beczce miodu / miód w gębie / Kazimierz Wielki pijał miód u Esterki / kto ma pszczoły ten ma miód / i ja tam byłem, miód i wino pitem / miód lipcowy to lek zdrowy. . .

W trakcie śniadania moja trzyletnia wnuczka zapytała, skąd mamy miód, a ja prawie ugryzłam się w język, żeby nie odpowiedzieć: ze sklepu! (choć, jak byłam w jej wieku, to wysysałam kwiatki akacji). A potem zaczęłam w myśli cofać się od sklepu do producenta (znajoma pasieka na Suwalszczyźnie) i zauważyłam, że wydarzeń na drodze od kwiatka do pasieki opisać rzetelnie nie umiem. Czas zatem uzupełnić, nie tylko jak mniemam moją, wiedzę.

Miód zbierano od tysięcy lat, w starożytnym Babilonie, Syrii, Persji, Indiach, Egipcie, Grecji, Rzymie. W Biblii mówi się o krainie mlekiem i miodem płynącej. Słowianie z miodu robili (i robią) napoje alkoholowe.

Pszczoły, o których myślimy, patrząc na słoik miodu, nie tylko zbierają kwiatny nektar, ale także bogaty w białko pyłek. Oba produkty potrzebne im są w hodowaniu kolejnych pokoleń, larw dojrzewających w „domu” (ulu, barci), a także by przeczekać zimę. My im te produkty podkradamy. Zbierając pyłek i nektar, owady zapylają rośliny wabiące je kolorowymi i wonnymi kwiatami. W trakcie koewolucji rośliny i owady przystosowały się do siebie – są nawet takie gatunki roślin, które przyjmują tylko jeden gatunek owada. Rozmnażanie 90% gatunków dziko rosnących roślin, a także ponad 75% gatunków roślin spożywczych zależy od zapylania. Bez pszczoł nie będą owocowały m. in. grejpfruty, kawa, arbuzy, słoneczniki, truskawki, kiwi i migdały. W przypadku mango, wiśni czy marchewki dużą rolę odgrywają muchówki i nawet mrówki. Różnorodność świata roślinnego, a także nasze – nie zawaham się powiedzieć – przetrwanie, zależy do współdziałania roślin z zapylaczami. Nie chodzi tylko o udomowione pszczoły. Zapylają także pszczoły dzikie, nie zawsze budujące duże gniazda, także trzmielce (używane w szklarniach do zapylania pomidorów). Zapylają niektóre gatunki much, chrząszczy, osy, motyle dzienne i nocne, mrówki, nawet komary (tylko samce).

Pszczoła zbiera z kwiatów nektar do miodowego wola. Jednorazowo zebrać może 40–50 mg nektaru, sama ważąc 110 mg. Taka praca ma swoje konsekwencje dla pszczoły robotnicy, która w sezonie letnim żyje nie dłużej niż 6 tygodni.

W wolu rozpoczyna się obróbka nektaru przez obecne tam enzymy i kwasy organiczne. Pszczoła dolatuje do ula i przekazuje zawartość wola kolejnej pszczole; nim materiał trafi do komórki plastra, przekazywanie może się odbyć kilkakrotnie. Wnoszony do ula nektar zawiera 60–80% wody, po trzech dniach nie więcej niż 18%. Dzieje się tak dzięki wachlowaniu skrzydełkami, co służy także utrzymaniu w ulu stałej temperatury. Jednocześnie wzrasta stężenie cukru, a to od pewnej granicy uniemożliwia fermentację dzięki obecnym w pszczelich wydzielinach drożdżach. Zagęszczony produkt składany jest do komórek plastra, gdzie nadal trwają procesy dojrzewania, polegające głównie na enzymatycznym rozkładzie cukrów złożonych na proste. Zasklepienie woskiem komórek z miodem zabezpiecza go przed psuciem, dlatego może być wykorzystywany nawet po wielu miesiącach. Aby powstał 1 kg miodu, pszczoły musiały zebrać nektar z kilku milionów kwiatów.

Zebrany przez pszczoły pyłek jest jedynym źródłem białka, które przyswajają larwy – bez niego rój ginie. Pyłek pszczoła pakuje, dodając do niego „koktajl” enzymów, do specjalnych koszyczków, a w ulu do oddzielnych komórek. Czasami przed zasklepieniem takiej komórki pszczoły składają na powierzchni pyłku trochę miodu. Pszczelarze nazywają go pszczelim chlebem.

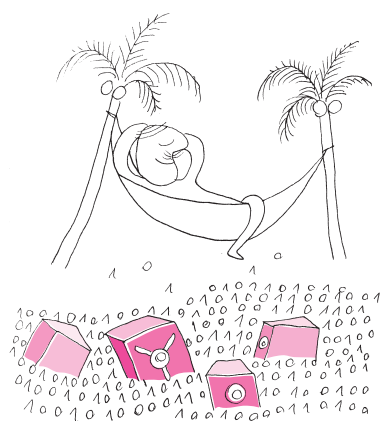
O pszczołach, społecznych owadach, powstały tysiące prac naukowych, setki książek bardziej i mniej popularnych. A jednak wciąż odkrywamy nowe fakty z ich życia, biologii, ewolucji. Warto więc wiedzieć także, jak powstaje miód.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Leibniz i Calculus

Jarosław GÓRNICKI*

* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska



W marcu 1672 roku do Paryża przybył z misją dyplomatyczną od elektora mogunckiego młody prawnik, filozof i erudyta Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Spotkanie z Christiaanem Huygensem (jesienią 1672 r.) przekonało Leibniza, że w matematyce jest nowicjuszem. Huygens, chcąc zbadać matematyczną przenikliwość Leibniza, rzucił mu takie oto wyzwanie: wyznaczyć sumę szeregu $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$. Leibniz zadanie wykonał (a Ty? rozwiązanie na końcu artykułu). Sukces rozpałił jego zainteresowanie matematyką. Szczęśliwym trafem od stycznia do marca 1673 roku Leibniz przebywał w Londynie (drugi raz był tam w 1676 r.). Podczas tego pobytu nauczył się wiele o szeregach nieskończonych, studiował *Lectiones geometricae* Isaaca Barrowa z 1670 r., a za pośrednictwem Johna Collinsa zapoznał się z manuskryptem *De analysi per equationes numero terminorum infinites* Isaaca Newtona z 1669 r. Rozmawiał z Robertem Hooke’iem, Robertem Boylem, Johnem Pellem, a w *Royal Society* zademonstrował swoją maszynę rachunkową (lepszą od stworzonej przez Blaise Pascala). Po powrocie do Paryża, za namową Huygensa, Leibniz studiował prace Bonaventury Cavalieriego, Jamesa Gregory’ego, René Descartesa i Blaise Pascala. Tak wspominał odkrywanie swoich matematycznych możliwości: „byłem gotów radzić sobie bez jakiegokolwiek pomocy, ponieważ dzieła matematyczne czytałem prawie tak, jak inni czytają romanse”. W Paryżu zainteresował się problemem zmienności: jak szybko zmienia się określona wielkość, i odwrotnie, jak na podstawie tempa zmiany pewnej wielkości określić jej wartość. Jesienią 1675 roku Leibniz znalazł już „nową metodę” – to co dzisiaj nazywamy rachunkiem różniczkowym i całkowym. Dostrzegł, że wyznaczenie stycznej do krzywej zależy od stosunku różnic rzędnych i odciętych, gdy te stają się nieskończenie małe.

Niech f będzie funkcją rzeczywistą, patrz rysunek 1. Każdej wartości x , w której funkcja f ma styczną, odpowiada wartość $\operatorname{tg} \varphi$, gdzie φ jest kątem nachylenia tej stycznej do kierunku osi OX . Tak określoną nową funkcję nazywamy *pochodną* funkcji f . Oznaczmy ją symbolem $\frac{df}{dx}$ lub df . Działanie polegające na obliczeniu pochodnej nazywamy *różniczkowaniem*. Załóżmy, że krzywa f posiada w ustalonym punkcie $P(x, f(x))$ styczną (rys. 1). Niech punkt $Q(x+h, f(x+h))$ będzie punktem zmiennym. Wówczas

$$\frac{QR}{PR} = \frac{NQ - MP}{MN} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow \operatorname{tg} \varphi, \text{ gdy } h \rightarrow 0.$$

Dla przykładu, ponieważ

$$(x+h)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}h + \dots + h^n - x^n = nx^{n-1}h + \dots,$$

gdzie dalsze wyrazy zawierają wyższe potęgi przyrostu h , więc

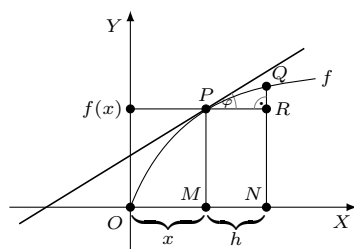
$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \rightarrow nx^{n-1}, \text{ gdy } h \rightarrow 0.$$

Pochodną funkcji x^n jest więc funkcja $dx^n = nx^{n-1}$, która przedstawia chwilowe tempo zmian wielkości x^n . Do obliczania pochodnych bardziej skomplikowanych funkcji Leibniz zaproponował postępowanie algorytmiczne oparte na wykorzystaniu wzorów (f i g to funkcje rzeczywiste, A to liczba rzeczywista):

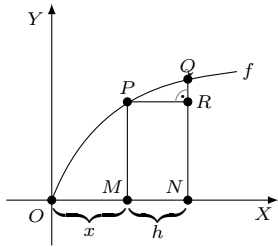
$$d(A \cdot f) = A \cdot df, \quad d(f \pm g) = df \pm dg, \quad d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g \cdot g}, \quad d(f(g)) = (df) \cdot (dg).$$

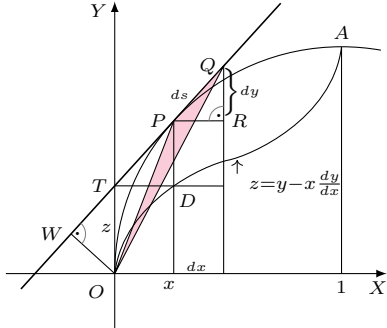
Operacją w pewnym sensie odwrotną do różniczkowania jest znajdowanie dla danej funkcji f takiej funkcji Φ , aby $d\Phi = f$. Na przykład dla funkcji $f(x) = x^n$ możemy odgadnąć, że $\Phi(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, bo $d\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) = x^n$. Procedurę znajdowania takich funkcji Φ nazywamy *całkowaniem* i zapisujemy $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ (c jest dowolną stałą).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Kluczowe w rozumowaniu Leibniza (i Newtona) było odkrycie zależności między pochodną funkcji pola a krzywą, która to pole ogranicza (rys. 2). Niech f będzie funkcją ciągłą. Oznaczmy pole figury krzywoliniowej $OPMO$ przez $\Phi(x)$, a pole figury krzywoliniowej $OPQNM$ przez $\Phi(x+h)$. Wówczas

$$\begin{aligned} \Phi(x+h) - \Phi(x) &= (\text{pole } MPQNM) = \\ &= (\text{pole } MPRNM) + (\text{pole } PQRP) = h \cdot f(x) + h \cdot \lambda(h), \end{aligned}$$

gdzie $\lambda(h)$ oznacza odległość pewnego punktu z łuku PQ od prostej PR .

Ponieważ f jest funkcją ciągłą, więc jeśli $h \rightarrow 0$, to $\lambda(h) \rightarrow 0$. Zatem

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \rightarrow f(x), \text{ gdy } h \rightarrow 0.$$

Oznacza to, że rzędna krzywej jest pochodną funkcji pola pod tą krzywą.

Aby obliczyć pole $OPMO$ pod krzywą f , wystarczy wskazać taką funkcję Φ , aby $d\Phi(x) = f(x)$, oczywiście przy założeniu, że $\Phi(0) = 0$. Symboliczny zapis tej procedury Leibniz podał 11 listopada 1675 roku w postaci:

$$(\text{pole } OPMO) = \int_0^x f(t) dt.$$

Jednym z pierwszych rezultatów „nowej metody” Leibniza jest niezwykła kwadratura koła. Uwagę Leibniza zwrócił rysunek Pascala nieskończenie małego trójkąta o bokach dx , dy , ds . Pascal wyznaczył pole pod nieskończenie małym łukiem, zastępując łuk odcinkiem ds stycznej (rys. 3).

Leibniz zaproponował takie rozwiązanie: na okręgu $(x-1)^2 + y^2 = 1$, czyli $x^2 + y^2 = 2x$, rozważmy punkt $P(x, y)$ i leżący na stycznej (nieskończenie blisko) punkt $Q(x+dx, y+dy)$. Trójkąt $\triangle PQR$ jest podobny do trójkąta $\triangle TPD$ i do $\triangle TOW$, więc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{PD}{TD} = \frac{y-z}{x}, \text{ skąd } z = y - x \frac{dy}{dx}.$$

Ponieważ $\frac{z}{h} = \frac{ds}{dx}$, więc $hds = zdx$ i (pole $\triangle OPQ$) = $\frac{1}{2} \cdot hds = \frac{1}{2} \cdot zdx$ jest równe połowie pola nieskończenie wąskiego prostokąta o bokach z i dx (i wierzchołku D) leżącego pod krzywą $z = y - x \frac{dy}{dx}$.

Zatem pole odcinka koła $OPAO$, jako suma pól nieskończenie wąskich trójkątów, jest równe połowie pola pod krzywą $z = y - x \frac{dy}{dx}$: (pole odcinka $OPAO$) = $= \frac{1}{2} \int_0^1 z dx$. W tej sytuacji pole czwartej części koła jednostkowego jest równe

$$\frac{\pi}{4} = (\text{pole } \triangle OA1) + (\text{pole odcinka } OPAO) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 z dx,$$

gdzie $z = y - x \frac{dy}{dx}$. Różniczkując równanie okręgu, Leibniz otrzymał $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 2$, skąd $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$. Wówczas $z = y - x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, ale wtedy $z^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{2x-x^2} = \frac{x}{2-x}$, skąd $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$. Korzystając z oczywistej zależności, przedstawionej na rysunku 4, mamy

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 z dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^1 x dz \right) = 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2} dz.$$

Rozwijając ułamek $\frac{z^2}{1+z^2}$ w szereg nieskończony za pomocą działań algebraicznych, tak jak robił to Mercator, Leibniz uzyskał szereg

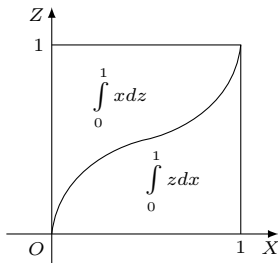
$$\frac{z^2}{1+z^2} = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \dots,$$

a całkując go wyraz po wyrazie, otrzymał

$$\begin{aligned} 1 - \int_0^1 \frac{z^2}{1+z^2} dz &= 1 - \int_0^1 (z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \dots) dz = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{9} z^9 + \dots \right)_{z=1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \end{aligned}$$

Dodatkowo Leibniz wiedział, że otrzymany szereg jest zbieżny. Istotnie,

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right),$$



Rys. 4

Obecnie wykazanie tożsamości Leibniza jest standardową umiejętnością,

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Ostatnia całka dąży do zera, gdy $|x| \leq 1$, gdyż

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{1}{2n+3} |x|^{2n+3} \rightarrow 0,$$

gdy $n \rightarrow \infty$. Zatem dla $|x| \leq 1$ funkcja $\arctg x$ ma rozwinięcie w postaci szeregu $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ i dla $x = 1$, mamy $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

W tych czasach szyfrowanie wiadomości nie było niczym niezwykłym. Jeszcze Carl Gauss w swoim *Dzienniku* pod datą 10 lipca 1796 roku napisał

$$\text{EYPHKA. num} = \triangle + \triangle + \triangle.$$

Mając wtedy 19 lat, odkrył dowód wyjątkowego rezultatu: *każda dodatnia liczba całkowita jest sumą trzech liczb trójkątnych* $\{0, 1, 3, 6, 10, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots\}$.

Anagram Newtona „*6acc...12vx*” oznacza *Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa* (list był pisany po łacinie), czyli „według danego równania, zawierającego ilekolwiek fluent, znaleźć fluksje i na odwrót”.

W pracy *Nova methodus...*, pierwszej publikacji z rachunku różniczkowego, jest warunek $dv = 0$ dla maksimum lub minimum $d dv = 0$ dla punktu przegięcia.

Leibnizowi zawdzięczamy (obok d -notacji: $\frac{df}{dx}$, $\int f(x)dx$) również nazwy *calculus differentialis* i *calculus integralis*, użycie symbolu „=” na równość, kropki dla mnożenia, terminy *funkcja* oraz *współrzędne*.

Rozwiązanie zadania z początku artykułu: dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} &= \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \\ &= 2 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right] = \\ &= 2 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

zatem rozważany szereg jest zbieżny, a jego suma to 2.

więc $S_2 < S_4 < S_6 < \dots$ i

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \dots - \left(\frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-3}\right) - \frac{1}{2n-1} < 1,$$

zatem $S_{2n} \rightarrow s$, gdy $n \rightarrow \infty$. Wtedy również $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow s$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Ostatecznie Leibniz otrzymał równość:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

O swoim odkryciu Leibniz powiadomił Huygensa, szczegółowo opisał swoją metodę w liście z 27 sierpnia 1676 roku przesłanym Newtonowi za pośrednictwem H. Oldenburga (sekretarza *Royal Society*). W odpowiedzi, w liście do Oldenburga z 24 października 1676 roku, Newton pisał: „metoda Leibniza otrzymania szeregu zbieżnego [do $\frac{\pi}{4}$] jest z pewnością bardzo elegancka i wystarczająco ujawnia geniusz jej autora, nawet jeśli nie napisze on nic więcej”. Jednak na prośbę Leibniza o ujawnienie swoich metod Newton pisał: „Podstawy tych operacji są w istocie dość oczywiste, ale ponieważ nie mogę kontynuować wyjaśnienia tego teraz, wołałem to ukryć:

6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx.

Na tym fundamencie próbowałem również uprościć teorie, które dotyczą kwadratury krzywych i doszedłem do pewnych ogólnych twierdzeń”.

Po powrocie z Paryża, w październiku 1676 roku, Leibniz pozostał w służbie księcia Hanoweru. Zajmował się biblioteką, genealogią, prawodawstwem, techniką, dyplomacją, ale przede wszystkim był filozofem. Był inicjatorem utworzenia Akademii Nauk w Berlinie (11 lipca 1700 r.) i jej pierwszym przewodniczącym. W swoich działaniach dążył do pogodzenia wiary i rozumu, religii i nauki, idealizmu z materializmem. Prowadził ożywioną korespondencję z ponad 600 osobami. Zachowało się około 15 tysięcy jego listów, w istocie esejów.

Po *Elementach* Euklidesa rachunek różniczkowy i całkowy pozostaje największym osiągnięciem matematyki. To dzięki niemu wiemy, że świat funkcjonuje zgodnie z pewnymi zasadami matematyki i fizyki, które umożliwiają przewidywanie wyników określonych działań. Newton pierwszy odkrył rachunek różniczkowy i całkowy, w latach 1664–1666, podchodząc do problemu kinematycznie, ale z ogłoszeniem swoich wyników zwlekał. Leibniz, niezależnie od Newtona, odkrył rachunek różniczkowy i całkowy później, w latach 1672–1676, na drodze rozważań algebraiczno-geometrycznych. Leibniz (pomijając korespondencję, gdzie uczynił to jeszcze wcześniej) pierwszy ogłosił pracę o rachunku różniczkowym *Nova methodus pro maximis et minimis...* w „Acta Eruditorum” 3 (1684), 467–472, oraz pierwszą pracę o rachunku całkowym *De geometria recondita et analysi...* w „Acta Eruditorum” 5 (1686), 292–300. Newton zrobił to dopiero w traktacie *De quadratura curvarum* z 1704 r., a praca Newtona *The Method of Fluxions* (1736) ukazała się niemal dziesięć lat po jego śmierci. Dodatkowo metoda Leibniza była bez porównania lepiej opracowana (trafnie dobrana symbolika, nazewnictwo) i do dziś jest używana.

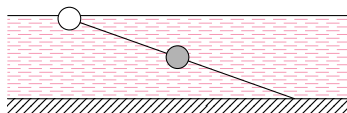
Spór o pierwszeństwo (wywołany przez przesadnie patriotycznych przyjaciół Newtona) na całe stulecia zatruł relacje między matematykami z wysp i z kontynentu. Drogą wytyczoną przez Leibniza poszli uczeni tej miary co Jacob Bernoulli (ur. 1654 r.), Johann Bernoulli (ur. 1667 r.), markiz de L'Hôpital (autor pierwszego podręcznika rachunku różniczkowego i całkowego *Analyse des infiniment petits...* (Paryż, 1696), napisanego na podstawie wykładów Johanna Bernoulliego). Ich następcy na kontynencie, Leonhard Euler, Joseph Lagrange, Pierre de Laplace, wytyczali dalsze kierunki badań.

Wielkim przegrany okazał się Leibniz, odszedł niezauważony i zapomniany. W luteranśkim Neustädter Kirche w Hanowerze znajduje się jego skromne epitafium OSSA LEIBNITII (prochy Leibniza).

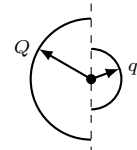
Klub 44 F



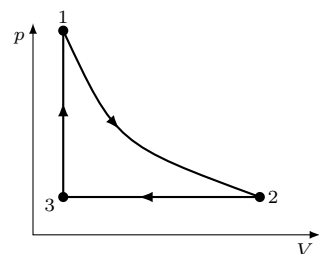
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2020



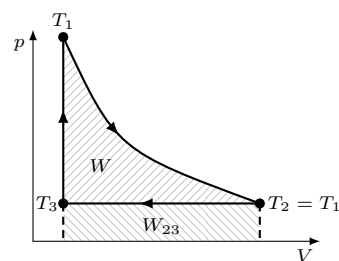
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 5

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
688 (WT = 3,77), 689 (WT = 2,76)
690 (WT = 2,33), 691 (WT = 1,97)
z numerów 12/2019 i 1/2020

Paweł Perkowski	Ożarów	43,99
Michał Koźlik	Gliwice	42,37
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Krzysztof Magiera	Łosiów	34,59
Jacek Konieczny	Poznań	31,13
Ryszard Woźniak	Kraków	31,10
Aleksander Surma	Myszków	27,75
Mateusz Kapusta	Wrocław	25,37
Sławomir Buć	Myszków	23,63
Tomasz Wietecha	Tarnów	20,90
Jan Zambrzycki	Białystok	19,49

Zadania z fizyki nr 702, 703

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

702. Ciężką kulkę przymocowano do środka cienkiego pręta, a kulkę lekką o takim samym promieniu przymocowano do jednego z końców pręta. Układ zanurzono w niezbyt głębokiej wodzie (rys. 1). Pręt jest pochylony, jego swobodny koniec opiera się o dno, z wody wystaje część lekkiej kulki, przy czym stosunek objętości części wynurzonej do objętości całej kulki wynosi n . Czy w głębokiej wodzie układ będzie pływał, czy utonie? Należy przyjąć, że masy pręta i lekkiej kulki są zaniedbywalne.

703. Gdy do ciężarka o masie m zawieszono na sprężystej nici przykładamy siłę działającą pionowo w dół, której wartość rośnie stopniowo od zera, nic ulegnie zerwaniu, gdy przyłożona siła osiągnie wartość F . Jaką stałą minimalną siłą należy działać, aby nic uległa zerwaniu?

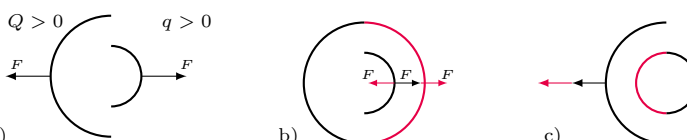
Rozwiązania zadań z numeru 5/2020

Przypominamy treść zadań:

698. Znaleźć siły oddziaływania dwóch nieprzewodzących półsfery o promieniach R i r , naładowanych odpowiednio ładunkami Q i q , rozłożonymi równomiernie na powierzchniach półsfery. Środki półsfery oraz płaszczyzny ich maksymalnych przekrojów pokrywają się (rys. 2).

699. Cykl termodynamiczny składa się z izotermy, izobary oraz izochory (rys. 3). Gaz poddawany przemianom jest doskonały, jednoatomowy. Na izotermie gaz pobiera ciepło Q_{12} , na izobarze wykonana zostaje nad nim praca W_{23} . Oblicz sprawność cyklu.

698. Na rysunku 4a pokazane są wektory sił oddziaływania sfer w przypadku jednoimiennych ładunków Q i q , co nie zmniejsza ogólności rozwiązania.



Rys. 4

Jeżeli do układu dodamy drugą dużą półsferę, jak na rysunku 4b, również naładowaną ładunkiem Q , to siła działająca na półsferę o promieniu r będzie równa zero, bo wewnątrz naładowanej sfery nie ma pola elektrycznego. Zatem półsfery o promieniach R działają na małą półsferę siłami, które się równoważą.

Jeżeli małą półsferę uzupełnimy drugą, naładowaną ładunkiem q , jak na rysunku 4c, to na półsferę o promieniu R będzie działała siła $2F$.

Natężenie pola elektrycznego na zewnątrz sfery o promieniu r naładowanej ładunkiem $2q$ w odległości R od jej środka ma wartość $E = 2q / (4\pi\epsilon_0 R^2)$, gdzie ϵ_0 jest przenikalnością elektryczną próżni. Ciśnienie na dużą półsferę wynosi $p = E\sigma$, gdzie $\sigma = Q / (2\pi R^2)$ jest gęstością powierzchniową ładunku. Zatem siła działająca na dużą półsferę ze strony małej sfery dana jest wzorem $2F = \pi R^2 p$.

Szukana siła oddziaływania między półsferami ma wartość

$$F = qQ / (8\pi\epsilon_0 R^2).$$

699. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki wartość bezwzględna pracy, jaką gaz wykonuje podczas przemiany izotermicznej, równa jest ciepłu pobranemu w tej przemianie: $|W_{12}| = Q_{12}$. Praca uzyskana w cyklu

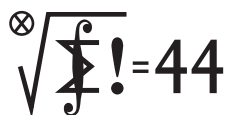
$$W = |W_{12}| - W_{23} = Q_{12} - W_{23} \quad (\text{rys. 5}).$$

Ciepło pobrane w cyklu $Q_1 = Q_{12} + Q_{31}$, gdzie $Q_{31} = n c_V (T_1 - T_3)$ jest ciepłem pobranym na izochorze, n oznacza liczbę moli, $c_V = 3R/2$ jest molowym ciepłem właściwym przy stałej objętości dla gazu jednoatomowego. Z równania Clapeyrona $nR(T_1 - T_3) = p(V_2 - V_1)$, gdzie p jest ciśnieniem na izobarze, V_2 i V_1 to objętości odpowiednio na początku i końcu tej przemiany. Stąd $Q_{31} = 3W_{23}/2$.

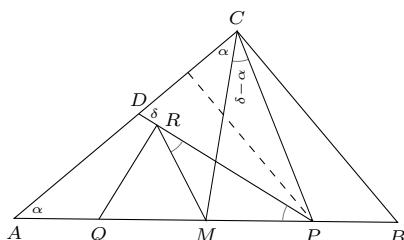
Sprawność cyklu dana jest wzorem

$$\eta = W / Q_1 = (Q_{12} - W_{23}) / (Q_{12} + 3W_{23}/2).$$

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2020



Zadania z matematyki nr 805, 806

Redaguje Marcin E. KUCZMA

805. Wewnątrz wypukłego n -kąta $A_1A_2 \dots A_n$ leży taki punkt P , że każdy z trójkątów PA_iA_{i+1} jest równoramienny (przyjmujemy $A_{n+1} = A_1$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P ?

806. Nieskończony ciąg liczb naturalnych (a_n) jest określony wzorami $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$ dla $n \geq 1$. Niech $f(x) = x^2 - x$. Udowodnić, że dla każdego $n \geq 1$ liczba $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

Zadanie 806 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2020

Przypominamy treść zadań:

801. Na przyprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC został dowolnie wybrany punkt D . Symetralna odcinka CD przecina przeciwprostokątną AB w punkcie P . Punkt Q jest symetryczny do P względem środka M odcinka AB . Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu Q na prostą DP . Udowodnić, że M leży na dwusiecznej kąta PCR .

802. Niech x_1, x_2, x_3, \dots będzie rosnącym ciągiem wszystkich dodatnich liczb x spełniających równanie $\tan x = x$. Niech $y_n = (n + \frac{1}{2})\pi - x_n$. Obliczyć granicę ciągu (ny_n) przy $n \rightarrow \infty$ (lub wykazać, że granica nie istnieje).

801. Trójkąty AMC i CPD są równoramienne. Przyjmijmy oznaczenia: $|\sphericalangle CAM| = |\sphericalangle ACM| = \alpha$, $|\sphericalangle CDP| = |\sphericalangle DCP| = \delta$; zatem $|\sphericalangle CPD| = 180^\circ - 2\delta$. Środek odcinka CD leży bliżej punktu C niż punktu A , wobec czego punkt P leży między M i B ; w takim razie $|\sphericalangle MCP| = \delta - \alpha$. Rachunek kątów w trójkącie ACP pokazuje, że $|\sphericalangle APR| = \delta - \alpha$.

Ponieważ $QR \perp PR$, trójkąt PMR jest równoramienny, więc $|\sphericalangle MRP| = |\sphericalangle MPR| = \delta - \alpha$. Uzyskujemy równość $|\sphericalangle MCP| = |\sphericalangle MRP|$, z której wynika, że czworokąt $MPCR$ ma okrąg opisany. Skoro $|MP| = |MR|$, punkt M jest środkiem łuku PR tego okręgu; a to znaczy, że półprosta CM połowi kąt PCR . To teza zadania.

802. Dla $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ zachodzi nierówność $\tan x > x$, więc w tym przedziale nie leży żaden wyraz ciągu (x_n) . W każdym dalszym przedziale dodatniości funkcji tangens leży jeden wyraz. Tak więc $n\pi < x_n < (n + \frac{1}{2})\pi$. Wobec określenia $y_n = (n + \frac{1}{2})\pi - x_n$ wynika stąd, że $y_n \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ oraz

$$\tan y_n = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - x_n\right) = \frac{1}{\tan x_n} = \frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

W takim razie $y_n \rightarrow 0$. A skoro $x_n/n \rightarrow \pi$ (oraz $\tan z/z \rightarrow 1$ gdy $z \rightarrow 0$), zatem

$$ny_n = \frac{y_n}{\tan y_n} \cdot n \tan y_n = \frac{y_n}{\tan y_n} \cdot \frac{n}{x_n} \rightarrow \frac{1}{\pi}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 795 ($WT = 1,59$) i 796 ($WT = 2,34$) z numeru 2/2020

Lukasz Merta	Kraków	44,07
Janusz Fiett	Warszawa	43,82
Błażej Żmija	Kraków	43,66
Michał Adamaszek	Kopenhaga	42,95
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,63
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Marek Spychała	Warszawa	40,62
Jakub Węgrecki	Kraków	39,40
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,30
Karol Matuszewski	Rawicz	34,08

W matematycznym **Klubie 44** nowa postać: pan Lukasz Merta. Witamy!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymujemy nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Rozwiązanie zadania F 1007. Jeżeli nieprzezroczyste ciało absorbuje część a energii padającej na jego powierzchnię, to z zasady zachowania energii wynika, że pozostały ułamek $r = 1 - a$ energii jest przez tę powierzchnię odbijany i rozpraszany do otoczenia. Przyjrzyjmy się energii docierającej od ciała A do B. Emitowany przez powierzchnię A strumień energii, równy $\sigma a_1 T_1^4$, w całości dociera do B. Tam jego część a_2 jest przez B absorbowana, a część $r_2 = 1 - a_2$ jest rozpraszana (odbijana)

i w całości wraca do A (obie powierzchnie traktujemy jak nieskończone płaszczyzny – zaniedbujemy efekty brzegowe), gdzie jej część a_1 jest absorbowana, a część $r_1 = 1 - a_1$ odbijana itd. Od A do B, w wyniku nieskończonej liczby odbić, dociera więc strumień energii:

$$I_{AB} = \sigma a_1 a_2 T_1^4 \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n r_2^n = \sigma a_1 a_2 T_1^4 \frac{1}{1 - r_1 r_2}$$

Analogiczne wyrażenie otrzymamy dla strumienia I_{BA} docierającego od B do A, ale

z T_2 w miejscu T_1 . Ostatecznie, poszukiwany strumień I energii netto przepływającej między ciałami wynosi

$$I = I_{AB} - I_{BA} = \frac{\sigma a_1 a_2 (T_1^4 - T_2^4)}{1 - r_1 r_2} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - 1}$$

Do uzyskania ostatniego wyrażenia skorzystaliśmy z definicji współczynników r_1, r_2 . Po podstawieniu danych liczbowych: $I = 121 \text{ Wm}^{-2}$.

Prosto z nieba: Jak powstały pierwsze galaktyki i jak przeistoczyły się w obiekty podobne do Drogi Mlecznej?

Najprostsza i najbardziej szczerą odpowiedź na to pytanie brzmi: nie wiemy, ale bardzo chcielibyśmy się tego dowiedzieć. Dlatego powstało wiele misji satelitarnych i dedykowanych przeglądów nieba. Każda z tych inicjatyw dostarczyła nowych informacji, ale niestety daleko nam do uzyskania pełnego obrazu – w szczególności brakuje nam informacji o tym, jak powstały i ewoluowały pierwsze galaktyki. Astronomowie mają nadzieję, że dzięki nowym obserwacjom w ramach przeglądu nieba ALMA-ALPINE (*ALMA Large Program to INvestigate [CII] at Early times*) uda się wreszcie przełamać ten impas.

ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array) to zespół 66 anten rejestrujących niewidzialne dla oka promieniowanie w zakresie milimetrycznym i krótszym niż milimetr długości fal. Sieć ALMA to 54 dwunastometrowe i 12 siedmiometrowych teleskopów radiowych, pracujących jako jeden, bardzo wydajny, instrument.

Przegląd ALPINE to program obserwacyjny, którego celem jest zbadanie zawartości gazu i pyłu w młodych galaktykach, w czasie gdy Wszechświat liczył sobie niecały miliard lat (wartość przesunięcia ku czerwieni, tzw. redshiftu, dla obserwowanych galaktyk wynosi pomiędzy 4 a 6, więcej na temat redshiftu pisaliśmy w numerze Δ_{19}^4). Zadanie to nie jest łatwe i jak dotąd istnieje bardzo niewiele tego typu obserwacji. Wcześniej dla tak wysokich przesunięć ku czerwieni skupiano się głównie na bardzo jasnych i masywnych galaktykach (emitujących głównie promieniowanie UV), gdyż po prostu łatwiej je zobaczyć. W ramach przeglądu ALPINE zaobserwowano jednak aż 122 przeciętne galaktyki (znajdujące się w tzw. ciągu głównym) istniejące około 12 miliardów lat temu. Było to możliwe dzięki wykorzystaniu interferometru ALMA – zaobserwowano linie pojedynczo zjonizowanych atomów węgla [CII] występujących na długościach fal 158 μm , a także widma energetyczne w dalekiej podczerwieni.

Połączenie tych nowatorskich obserwacji z pomiarami zebranymi wcześniej przez inne przeglądy nieba w krótszych zakresach długości fal (zakres optyczny, bliska i średnia podczerwień) umożliwiło bardzo dokładną analizę galaktyk typowych dla młodego Wszechświata. Okazało się bowiem, że pomiary linii [CII] to bardzo obiecujące narzędzie do wyznaczenia szybkości tworzenia się gwiazd w galaktykach na tak

wysokich przesunięciach ku czerwieni. Precyzyjny pomiar tej linii pozwala na oszacowanie gęstości obszarów tworzących gwiazdy, a co za tym idzie, mechanizmów odpowiedzialnych za przybieranie na wadze i rozszerzanie się galaktyk.

Główne pytania, na jakie chce odpowiedzieć zespół ALPINE, to: Jakie mechanizmy napędzały wzrost galaktyk? Jakie właściwości miał gaz i pył w młodych galaktykach? Jak zmieniał się ośrodek międzygwiazdowy galaktyk od początków ich istnienia do osiągnięcia „dorosłości”?

Zespół ALPINE opublikował już pierwsze wyniki swoich prac. Wykazano, że w młodych galaktykach obłoki gazu są gęstsze niż obserwujemy współcześnie, przez co efektywniej tworzą gwiazdy. Typowe młode galaktyki były jednak zdecydowanie mniejsze niż typowe galaktyki istniejące obecnie. Dlatego bardzo ciekawe są wyniki ALPINE, które pokazują, że młode galaktyki przez około dwa miliardy lat tworzyły gwiazdy w niezmiennie szybkim tempie – ilość gwiazd powstałych w danej jednostce objętości (*star formation rate density*) nie zmienia się dla przesunięć ku czerwieni pomiędzy 4 a 2, czyli pomiędzy 12–13 miliardów lat temu. Wynik ten jest o tyle zaskakujący, że wcześniejsze obserwacje sugerowały, że szybkość tworzenia gwiazd w takiej samej jednostce objętości powyżej redshiftu 2 systematycznie spada wraz z wiekiem Wszechświata. Przegląd ALPINE pokazał również, jak ważną rolę odgrywają interakcje pomiędzy galaktykami w procesie tworzenia gwiazd. Zaobserwowano, że im bliżej początków Wszechświata, tym więcej galaktyk oddziałuje ze sobą (często większe galaktyki pochłaniają mniejsze), co wpływa na szybkość tworzenia się gwiazd oraz wzrost galaktyk.

Dane zebrane z interferometru ALMA są nadal opracowywane, czekamy więc z niecierpliwością na dalsze wyniki. Może właśnie ALPINE będzie w stanie przełamać impas i przedstawić pełen scenariusz wzrostu galaktyk?

Katarzyna MAŁEK

Le Fèvre, O., et al. (2019), *The ALPINE-ALMA [CII] Survey: Survey strategy, observations and sample properties of 118 star-forming galaxies at $4 < z < 6$* , arXiv e-prints, arXiv:1910.09517.

Niebo we wrześniu

Dziewiąty miesiąc roku jest miesiącem, w którym na północnej półkuli Ziemi kończy się lato i zaczyna astronomiczna jesień. Dzień w dalszym ciągu się mocno skraca. W trakcie miesiąca wysokość górowania Słońca zmniejsza się o kolejne 11°, a co za tym idzie, czas jego przebywania na nieboskłonie zmniejsza się o kolejne dwie godziny. Astronomiczna jesień rozpocznie się 22 września o 15:31 naszego czasu, w momencie gdy Słońce przetnie równik niebieski w drodze na południe. Jednak ze względu na zjawisko refrakcji atmosferycznej obiekty blisko linii horyzontu wydają się wznosić wyżej

niż w rzeczywistości, stąd faktyczne zrównanie dnia z nocą nastąpi kilka dni później. Słońce zacznie wrzesień w gwiazdozbiornie Lwa, by 16 dnia miesiąca przejść do gwiazdozbiornu Panny, w którym pozostanie do końca października.

Planety **Jowisz** i **Saturn** we wrześniu są już dwa miesiące po opozycji i widać to w pogarszaniu się ich warunków obserwacyjnych. Obie planety nadal tworzą parę o rozwartości około 7°, w połowie miesiąca zaczynają znikać z nieboskłonu przed północą, choć wciąż jeszcze przechodzą przez południk lokalny sporo

po zmiernych. Jednak ich położenie w gwiazdozbiorze Strzelca powoduje, że nie wzniosą się na naszym niebie wyżej niż 15° . Jowisz zmieni kierunek swojego ruchu z wstecznego na prosty 12 września, zaś Saturn uczyni to samo 17 dni później, co również pokazuje, że okres najlepszej widoczności w tym sezonie obserwacyjnym obie planety mają już za sobą. W związku ze zmianą kierunku ruchu obie planety we wrześniu przesuną się niewiele względem gwiazd tła, zmieniając pozycję o nieco ponad 30 minut kątowych, czyli tyle, ile wynosi średnica tarczy Słońca czy Księżycy. We wrześniu jasność Jowisza spadnie do $-2,4^m$, a jego tarcza zmniejszy rozmiar do $41''$. Planeta Saturn osłabnie do $+0,5^m$, jej tarcza zaś zmniejszy średnicę do $17''$.

Trzy pozostałe planety zewnętrzne szykują się do swoich opozycji, przez co i ich warunki obserwacyjne poprawiają się. Najwcześniej przez opozycję przejdzie planeta **Neptun** (11 września). W tym sezonie obserwacyjnym planeta kreśli swoją pętlę na północny wschód od gwiazdy 4. wielkości φ Aquarii. Za dalsze wskazówki przy szukaniu planety mogą służyć świecąca z jasnością $5,5^m$ gwiazda 96 Aqr oraz słabsza o $0,7^m$ gwiazda HIP115257. Na początku października Neptun przejdzie pomiędzy tymi gwiazdami, w odległości około $25'$ od każdej z nich. W związku z opozycją Neptun przesuwa się teraz ze swoją maksymalną prędkością kątową, pokonując w ciągu miesiąca prawie $50'$ i zbliżając się jednocześnie do φ Aqr na $1,5^\circ$. Maksymalna jest również jasność planety, wynosząca $+7,8^m$. Oczywiście to powoduje, że do jej dostrzeżenia jest potrzebna przynajmniej lornetka.

Jako druga przez opozycję przejdzie planeta **Mars**, ale zrobi to dopiero w połowie października. We wrześniu, dokładnie 9 dnia miesiąca, planeta zmieni kierunek ruchu, ale – w przeciwieństwie do pary Jowisz-Saturn – z prostego na wsteczny, czyli zacznie przesuwać się na zachód, rozpoczynając tym samym okres swojej najlepszej widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Stąd we wrześniu Mars przesunie się o niewiele ponad $3'$ w południowo-wschodniej części gwiazdozbioru Ryb. W tym miesiącu Mars znacznie zbliży się do Ziemi, zmniejszając dystans o ponad 11 milionów km. Stąd jego i tak już duża jasność i średnica kątowa jeszcze mocno urosną: jasność z $-1,8^m$ na początku miesiąca do $-2,5$ pod jego koniec, wyprzedzając pod tym względem Jowisza, a średnica kątowa – z 19 do $22''$. Planeta góruje na wysokości mniej więcej 45° , a zatem ponad 30° wyżej, niż to miało miejsce dwa lata temu, podczas poprzedniej opozycji. Stąd obecnie obraz teleskopowy planety jest znacznie wyraźniejszy.

Planeta **Uran** przejdzie przez opozycję ostatniego dnia października, kreśląc pętlę mniej więcej 10° na południowy wschód od Hamala, najjaśniejszej gwiazdy Barana, i jednocześnie 15° na północny wschód od Marsa. Uran również porusza się ruchem wstecznym, a najbliższą jego dość jasną gwiazdą jest gwiazda 6. wielkości 29 Ari. We wrześniu dystans między tymi ciałami niebieskimi urośnie od $0,5$ do 1° , a sama planeta

jest o $0,3^m$ jaśniejsza. Uran góruje po godzinie 2, na wysokości dochodzącej do 55° .

Nad ranem, jako jutrzienka, świeci planeta **Venus**, która zacznie wrzesień na pograniczu gwiazdozbiorów Bliźniąt i Raka, 9° na południe od Polluksa. Przez miesiąc planeta przemierzy gwiazdozbiór Raka, by na jego koniec zameldować się w gwiazdozbiorze Lwa, 3° na zachód od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji. Przez cały ten czas Venus na godzinę przed wschodem Słońca zdąży się wzniesć na wysokość 25° . Do końca września jasność Venus spadnie do -4^m , średnica tarczy – do $16''$, natomiast faza przekroczy 70% .

Bezksiężycowe noce wystąpią w połowie września, gdyż Srebrny Glob zacznie miesiąc od pełni i spotkania z Neptunem 2 i 3 września. Trzy noce później, przy fazie zmniejszonej do 86% , **Księżyc** spotka się z planetą Mars, zbliżając się do niej o świcie na odległość 1° , zaś 7 września przejdzie 4° na południe od Urana. Trzy dni później naturalny satelita Ziemi przejdzie przez ostatnią kwadrę, wędrując wtedy 5° na północny zachód od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka.

W kolejnych dniach Księżyc podaży ku nowiu, a dzięki dużemu nachyleniu ekliptyki do porannego widnokrzęgu można obserwować go prawie do samego spotkania ze Słońcem – 17 września. Przez ten czas bardzo ładnie widoczne będzie tzw. światło popielate, czyli nocna część Księżycyca oświetlona światłem słonecznym odbitym od Ziemi. Trzy dni przed nowiem, prezentując tarczę w postaci cienkiego sierpa (15%), Srebrny Glob przejdzie nieco ponad $1,5^\circ$ na północ od jasnej gromady otwartej gwiazd M44 i jednocześnie 4° na północ od planety Venus. Około godziny 6, niestety na jasnym już niebie, dojdzie do zakrycia przez Księżyc gwiazd Asellus Borealis, stanowiącej północno-wschodni róg trapezu gwiazd otaczającego M44. 16 września rano, 32 godziny przed nowiem, Srebrny Glob w fazie zaledwie 2% pokaże się 7° od Regulusa, na wysokości 5° .

Po nowiu, w trzeciej dekadzie miesiąca, Księżyc pokaże się nisko nad widnokrzęgiem. Przejdzie przez I kwadrę 24 września i zbliży się do Jowisza na 7° , natomiast dobie później minie Saturna w odległości niecałych 4° . Ostatnie noce września ponownie rozświetli bardzo jasna tarcza Księżycyca bliska pełni.

W październiku maksimum swojej jasności osiągną dwie jasne **mirydy**: o Cet oraz R Leo. Obie mogą przekroczyć próg widoczności gołym okiem, a już we wrześniu powinno dać się je dostrzec przez lornetkę. Obie gwiazdy widoczne są w drugiej połowie nocy. Mira po północy przechodzi przez południk centralny, zaś R Leo wschodzi niewiele przed świtem. Pod koniec miesiąca, 29 września, 2° od drugiej z gwiazd przejdzie planeta Venus. Mira w listopadzie zeszłego roku osiągnęła jasność $+2,5^m$, zaś R Leo w grudniu – prawie $+5^m$. Jeśli tym razem gwiazdy również pojaśnią aż tak bardzo, na pewno staną się wdzięcznym celem obserwacji. Zwłaszcza Mira, łatwo widoczna wtedy gołym okiem nawet z obszarów miejskich.

Ariel MAJCHER

Półpanegiryk

Kiedy internetowy tabloid krzyczy o dziesięciu największych w dziejach świata awariach garderoby osób znanych, nie ma na ogół wątpliwości, że to niepoważna zabawa. Co jednak sądzić, gdy na ponumerowanej skali ustawia się instytucje naukowe prowadzące badania w określonej dyscyplinie? Kilka miesięcy temu podano, że Uniwersytet Warszawski znalazł się wśród najlepszych ośrodków badawczych w dyscyplinie fizyka w tzw. rankingu szanghajskim, plasując się w przedziale miejsc od 51. do 75., najwyżej ze wszystkich polskich instytucji reprezentujących wszystkie możliwe dyscypliny. Czy to dobrze, czy może bardzo dobrze? I co to w ogóle znaczy?

Wynik liczbowy w rankingu oblicza się ze wzoru:

$$100 Q1 + 100 CNCI + 20 IC + 100 Top + 100 Award,$$

gdzie poszczególne wskaźniki mieszczą się w przedziale od 0 do 1 i są związane z następującymi aspektami działalności naukowej. **Q1** mierzy liczbę artykułów opublikowanych w latach 2014–2018 w 25% czasopism o najwyższych współczynnikach wpływu, związanych ze średnią liczbą cytowań publikowanych tam prac.

CNCI to średnia cytowań artykułów opublikowanych w latach 2014–2018 z afiliacją instytucji do średniej liczby cytowań obliczonej dla wszystkich instytucji – pokazuje zatem, jak ważne są dla innych badaczy prace naukowe prowadzone w danej instytucji. Współpraca międzynarodowa to wskaźnik **IC** będący stosunkiem liczby artykułów z lat 2014–2018 z afiliacją instytucji oraz afiliacją instytucji z innego kraju do liczby artykułów z afiliacją instytucji. Liczbę artykułów z czasopism stanowiących naukową ekstraklasę wyraża współczynnik **Top**, przy czym w przypadku fizyki oznacza to publikację w *Physical Review Letters*. Wreszcie miara **Award** związana jest z liczbą Nagród Nobla z fizyki przyznanych pracownikom danej instytucji w latach 1981–2018, z wagami zmniejszającymi się wraz ze wzrostem wieku nagrody.

Wszystkie wskaźniki są obliczone jako pierwiastek kwadratowy wyniku jednostki do wyniku osiągniętego przez jednostkę najlepszą w danej kategorii. Wyjątkiem jest CNCI, w przypadku którego normalizuje się do podwojonej średniej wszystkich instytucji i wyniki przekraczające 100% obcina się do 100%.

Miejsce Uniwersytetu Warszawskiego w poszczególnych kategoriach w fizyce to:

Q1: miejsce 101. (podium: Sorbonne U, Harvard U, U of Tokyo).

Ten wskaźnik premiuje dużych – im większa jednostka, tym więcej prac naukowych; jeśli są dobrze publikowane, przekłada się to od razu na wynik w tej kategorii.

CNCI: miejsce 107.

Ciekawie jest przyjrzeć się przykładowym instytucjom legitymującym się maksymalnymi wartościami wskaźnika cytowań. Są to m.in.: Radboud U Nijmegen, U of Perugia, U of Adelaide, U of Mississippi, U of Sussex, Vrije U, Cardiff U, U of Cantabria, U of Oviedo, U of Siena, U of Urbino, Cag U, Manhattan College,

U Antonio Narino, U Mohammed I, U of Rennes 1, U of Salerno, Montana State U – Bozeman, U of Camerino, U of Balearic Islands, West Virginia U, U of Szeged, U of Texas Rio Grande Valley, Uniwersytet Zielonogórski. Pokazuje to od razu, że kilka wybitnie wysoko cytowanych prac powstałych w niewielkiej instytucji jest w stanie „zrobić” cały wskaźnik. Nie zawsze tak jednak jest – instytucją o najwyższej wartości CNCI jest też Kyoto U.

IC: miejsce 261. (podium: Cag U, Kyoto U, Manhattan College, Nagasaki Institute of Applied Science).

Wydaje się, że taki wskaźnik może premiować jednostki, które nie prowadzą własnych unikalnych badań, a wyniki naukowe osiągają we współpracy z silniejszymi naukowo partnerami.

Top: miejsce 95. (podium: U of Paris-Saclay, MIT, Sorbonne U).

Nagród Nobla nie mamy.

Jeżeli uznamy, że Nagrody Nobla są, na przykład ze względów historyczno-ekonomicznych, niesprawiedliwe, i do tego premiują instytucje amerykańskie, możemy uszeregować fizykę bez uwzględniania składnika Award. Pierwsza dziesiątka będzie wtedy wyglądać następująco:

1. Sorbonne University
2. MIT
3. University of Paris-Saclay
4. University of Chicago
5. University of California, Berkeley
6. Harvard University
7. The University of Tokyo
8. University of Cambridge
9. Stanford University
10. California Institute of Technology (Caltech)

Przy takim uszeregowaniu UW ma miejsce 60., podczas gdy z włączonym wskaźnikiem Award jest to miejsce 74. W tym pierwszym podejściu piątka instytucji bezpośrednio przed UW to:

U of British Columbia,
Autonomous U of Madrid,
Aix-Marseille U,
U of Zurich,
Moscow State U,

a piątka instytucji bezpośrednio za UW to:

U of Naples Federico II,
Kyoto U,
Weizmann Institute of Science,
U of Southampton,
Seoul National U.

Warto zauważyć, że pozycja UW w całym rankingu jest wyższa od którejkolwiek z pozycji w rankingach kryteriów cząstkowych, co oznacza, że w udany sposób łączy on wskaźniki różnych rodzajów.

Krzysztof TURZYŃSKI

Nazwy jednostek naukowych zostały podane w wersji angielskiej, zgodnej z rankingiem. Cały ranking jest dostępny na stronie shanghai ranking.com.



Jego Wysokości, część 1

Bartłomiej BZDEGA

Czwórkę punktów nazywamy *układem ortocentrycznym*, gdy każde dwa z nich wyznaczają prostą prostopadłą do prostej wyznaczonej przez pozostałe dwa.

Powyższa definicja jest konsekwencją pewnego rodzaju równouprawnienia: jeśli punkt H jest ortocentrum nieprostokątnego trójkąta ABC , to każdy z punktów A, B, C, H jest ortocentrum trójkąta wyznaczonego przez trzy pozostałe. Gdy zachodzą dwie z prostopadłości, o których mowa w definicji, to trzecia również – wynika to z tego, że każdy trójkąt ma ortocentrum.

Układy ortocentryczne pojawiają się zatem w naturalny sposób w wielu konfiguracjach geometrycznych. W zadaniu 1 poznamy kilka własności układów ortocentrycznych, a w zadaniach 2 i 3 uczymy się je rozpoznawać.

Ze względu na wspomniane wcześniej równouprawnienie, spodki wysokości trójkąta ABC możemy nazwać po prostu *spodkami* układu ortocentrycznego A, B, C, H . Są to spodki wysokości każdego z trójkątów: ABC, ABH, AHC, HBC . Punkty A, B, C, H wyznaczają sześć odcinków, które będziemy nazywać *odcinkami* układu ortocentrycznego. Każdy z nich jest średnicą okręgu przechodzącego przez pewne dwa *spodki*, co wynika z odpowiednich prostopadłości. Korzystamy z tego w zadaniach 1(e) oraz 4–6.

Należy jeszcze wspomnieć o *zdegenerowanym układzie ortocentrycznym*.

W przypadku trójkąta ABC z kątem prostym przy wierzchołku C mamy $H = C$. Jest oczywiste, że $AH \perp BC$ i $BH \perp AC$, trudno natomiast mówić o prostej CH . Można jednak z całą pewnością stwierdzić, że istnieje prosta prostopadła do AB , na której leżą punkty C i H .

Zadania

- Udowodnić, że jeśli punkty P, Q, R, S tworzą układ ortocentryczny, to:
 - punkt symetryczny do S względem prostej PQ leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR ;
 - okręgi opisane na trójkątach PQR, PQS, PRS i QRS mają równe promienie;
 - punkt symetryczny do S względem środka odcinka PQ leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR ;
 - $|PQ|^2 + |RS|^2 = |PR|^2 + |QS|^2 = |PS|^2 + |QR|^2$;
 - punkt S jest środkiem okręgu wpisanego lub dopisanego do trójkąta utworzonego przez spodki układu.
- Udowodnić, że punkty A, B, C, H tworzą układ ortocentryczny, jeśli:
 - czworokąty $AZHY, BXHZ$ i $CYHX$ są rombami (kolejność wierzchołków niekoniecznie podana antyzegarowo);
 - przez punkt H przechodzą trzy okręgi o jednakowych promieniach, a punkty A, B i C są różnymi od H punktami przecięć tych okręgów;
 - punkt H jest środkiem okręgu wpisanego w pewien trójkąt, a punkty A, B i C – środkami okręgów dopisanych do niego.
- Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkty D, E i F są symetryczne do punktu O względem prostych odpowiednio BC, CA i AB . Dowieść, że punkt O jest ortocentrum trójkąta DEF .
- Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q są ortocentrami trójkątów odpowiednio ABC i ABD . Udowodnić, że $|CD| = |PQ|$.
- Skonstruować za pomocą cyrkla i liniału ortocentrum danego trójkąta nieprostokątnego, wykonując tylko sześć ruchów elementarnych (ruch elementarny polega na wykreśleniu odcinka lub łuku).
- Odcinki AP i BQ są wysokościami trójkąta nieprostokątnego ABC . Punkty R i S są rzutami prostokątnymi punktów odpowiednio A i B na prostą PQ . Udowodnić, że $|PS| = |QR|$.

Wskazówki do zadań
 1. (a) Przeprowadzając odpowiednie rachunek na kątach, wykażąc, że $|\angle PSQ| = |\angle PRQ|$ lub $|\angle PSQ| = |\angle PRQ| + 180^\circ$, w zależności od umiejscowienia punktu S względem pozostałych.
 (b) Jeśli punkty S i S' są symetryczne względem prostej PQ , to okręgi opisane na trójkątach PQS i PQS' również. Wystarczy skorzystać z poprzedniego podpunktu.
 (c) Okręgi wspomniane w poprzednim podpunkcie są również środkowosymetryczne względem środka odcinka PQ .
 (d) Najpierw wyznaczamy środek odcinka AB . Okrąg o średnicy AB przecina proste AC i BC w punktach, które są spodkami wysokości trójkąta ABC .
 (e) Rozważyć dwa przypadki – punkt S wewnątrz i na zewnątrz trójkąta PQR . Do rachunków na kątach wykorzystaj wewnątrz i na zewnątrz trójkąta $ABXY$ jest równoległobokiem. Mamy więc $AB \parallel XY$, ale też $XY \perp CH$.
 (b) Skorzystać z poprzedniego podpunktu.
 (c) Dwusieczna kąta zewnętrzznego trójkąta jest prostopadła do dwusiecznej kąta wewnętrznego przy tym samym wierzchołku.
 3. Skorzystać z zadania 2(b).
 4. Skorzystać z własności 1(a) i z tego, że każdy trapez wpisany w okrąg jest równoległobokiem.
 5. Najpierw wyznaczamy środek odcinka AB . Okrąg o średnicy AB przecina proste AC i BC w punktach, które są spodkami wysokości trójkąta ABC .
 6. Jeśli zrzutujemy prostopadłe średnicę okręgu na prostą zawierającą jego cięciwę, to środek rzutu średnicy wypadnie w środku cięciwy.

Zwycięzcy Konkursu Unii Europejskiej dla Młodych Naukowców wyłonieni!

Matematyka, ochrona środowiska, biologia, fizyka, chemia z medycznymi zastosowaniami oraz inżynieria to dziedziny reprezentowane przez laureatów tegorocznej polskiej edycji EUCYS. Wśród zwycięzców znaleźli się medaliści XLI Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego oraz Stypendyści Programu Pomocy Wybitnie Zdolnym Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci. Warto zapamiętać ich nazwiska, bo są przyszłością polskiej nauki.

Pierwsza nagroda (6000 zł), ex aequo:

1. **Adam Barański** z Warszawy, uczeń XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
[O podzielności rozwiązań równania Pella](#)
2. **Jarosław Brodecki** z Łodzi, uczeń Publicznego Liceum Ogólnokształcącego Politechniki Łódzkiej
[Ocena zanieczyszczenia miejskich rzek mikroorganizmami i ich przenikania do sieci troficznych na przykładzie systemu rzecznej aglomeracji łódzkiej](#)
3. **Aleksander Łysomirski** z Michałowic, uczeń II LO im. S. Batorego w Warszawie
[Fisetyna to naturalny senolityk, który obniża aktywność metaboliczną komórek raka jelita grubego i ma potencjalny wpływ na proces autofagii w komórkach HCT166](#)
4. **Sebastian Machera** z Załęża, absolwent V LO w Krakowie, a obecnie student WUM,
[Elektrochemiczny immunosensor do wykrywania ludzkiej sercowej troponiny T oparty o bakteriofagi M13 wyselekcjonowane metodą phage display](#)

Druaga nagroda (4000 zł), ex aequo:

1. **Piotr Fil** z Giżycka oraz **Władysław Sowul** z Przerośla, uczniowie odpowiednio: I LO im. W. Kętrzyńskiego w Giżycku oraz I LO im. M. Konopnickiej w Suwałkach
[Samolot dwustronny](#)
2. **Kosma Kasprzak** ze Skórzewa, uczeń XXXVIII LO im. J. Nowaka-Jeziorańskiego w Poznaniu
[Uwagi na temat pewnych granic występujących w teorii funkcji prawie okresowych](#)
3. **Julia Kosińska** z Działdowa, **Mateusz Malikowski** z Działdowa oraz **Kalina Wiśniewska** z Gdańska, uczniowie Uniwersyteckiego Liceum Ogólnokształcącego w Toruniu
[Nowe nanostrukturalne fotokatalizatory w walce z zanieczyszczeniem środowiska](#)

Trzecia nagroda (2000 zł), ex aequo:

1. **Ewa Klejman** z Warszawy oraz **Karol Kuryłek** z Koczarg Nowych, uczniowie odpowiednio: The British School of Warsaw oraz XVIII LO im. J. Zamoyskiego w Warszawie
[Ciecze ferromagnetyczne rozpraszające energię dynamiczną – synteza, badanie właściwości zastosowanie w życiu codziennym](#)
2. **Karolina Piasecka** z Warszawy, uczennica XL LO im. S. Żeromskiego w Warszawie
[Wpływ pestycydów na parametry populacyjne i aktywność enzymu acetylocholinoesterazy pszczoły murarki \(*Osmia bicornis* L.\)](#)
3. **Jakub Pietrzak** z Pruszkowa oraz **Kacper Waluk** z Warszawy, uczniowie XVIII LO im. J. Zamoyskiego w Warszawie
[Weryfikacja dozymetryczna planu leczenia pacjenta onkologicznego z użyciem fantomu antropomorficznego wydrukowanego techniką 3D](#)

eucys.pl
fundusz.org

sponsor
główny:



patronat
honorowy:



wsparcie
prawno
patentowe:



patroni
medialni:



wiedza i życie