



DELTA

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34}$ $\pi=3,141592...$

NR 7 (554) 2020
CENA 5,5 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0167-3005 | NR. IND. 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

UNIwersytet
WARSZAWSKI



9 770137 300007 07

Nakład: 3500 egz.

**Czułość
funkcji
logicznych**
str. 1




SPIS TREŚCI NUMERU 7 (554)


Czułość funkcji logicznych, cz. 1
Mariusz Zajac

 Zadania

Zliczamy podciąg
Tomasz Idziaszek

 O dowodzeniu racji
Bartłomiej Żak

Podróże w \mathbb{R}^d
Wojciech Czerwiński

 SARS-CoV-2 krąży po świecie
Magdalena Fikus

Elementarnie o twierdzeniu Brouera
Jarosław Górnicki

Stara Delta

Uniwersalny szyfr

Czy przez telefon można grać w karty?

Problem Parzystkowa i jego uogólnienia
Karol Gryszka

Matematyczny kącik muzyczny I:
Pitagorejczycy i matematyczne początki
muzyki
Konstanty Kostrzewski


Klub 44

Prosto z nieba: Fale grawitacyjne na
Marsie

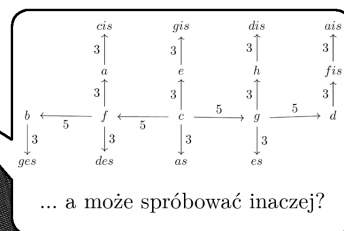
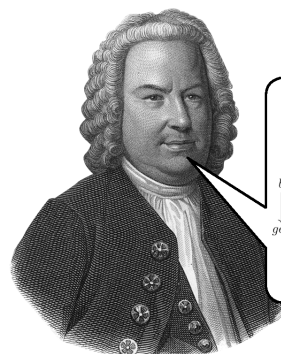
Niebo w lipcu

Aktualności

Na tropie ciemnych barionów

 U(nie)jednorodnianie nierówności
Bartłomiej Bzdęga

W następnym numerze uczymy,
jak nastroić klawesyn oraz tłumaczymy,
dlaczego nie jest to łatwe



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej,
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel,
dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący,
prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski,
dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz,
dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk,
dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin,
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący,
dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński,
prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz,
dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak,
dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki,
prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol,
Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec,
Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac.,
Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik,
Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.


Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł

 Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Czułość funkcji logicznych, cz. 1

Mariusz ZAJĄC*

* Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

!Nie. Na wierzchołkach pewnej ściany będą trzy mrówki, a wtedy któraś z nich musi mieć dwie sąsiadki!

Tak. W żądany sposób można roznieść nawet sześć mrówek, jeśli tylko pozostawimy wolne oba końce jednej przekątnej sześciąnu.

Zacznijmy od dwóch powiązanych pytań:

Czy pięć mrówek może zająć pięć różnych wierzchołków sześciąnu w taki sposób, by każda miała **najwyżej jedną** sąsiadkę (powiemy, że mrówki sąsiadują, gdy siedzą na końcach pewnej krawędzi sześciąnu)?

Czy pięć mrówek może zająć pięć różnych wierzchołków sześciąnu w taki sposób, by każda miała **najwyżej dwie** sąsiadki?

Czytelnik, który bez trudu rozprawił się z tymi zagadkami, zdziwi się zapewne, że rozwiązanie tego problemu (co prawda nie tylko dla zwykłej trójwymiarowej kostki, ale w dowolnie wielu wymiarach, o czym później), przedstawione przez Hao Huanga w lipcu 2019 roku, zostało przez społeczność informatyków-teoretyków przyjęte z niemalym entuzjazmem jako rozstrzygnięcie ważnej hipotezy, postawionej prawie 30 lat wcześniej.

Najpierw jednak spróbujmy wyjaśnić, dlaczego poważni specjaliści chcieli w ogóle rozważać tak (pozornie) niepoważne zagadnienie.

Funkcje boolowskie

W klasycznej logice rozważa się zdania, którym przypisuje się wartości logiczne „prawda” lub „fałsz”, oraz operatory logiczne, z których najczęściej używane widnieją obok. Zauważmy, że używanie liczb zamiast wartości logicznych (najczęstsze jest utożsamianie prawdy z jednością, a fałszu z zerem) może znacznie uprościć zapis. Zamiast mówić: *koniunkcja* $p \wedge q$ (czytaj „p i q”) to zdanie, które jest prawdziwe, gdy oba jego człony są prawdziwe, fałszywe zaś w każdym innym przypadku, wystarczy napisać „ $p \wedge q = pq$ ”.

Ogólnie mówiąc, **n-argumentową funkcją boolowską** (lub logiczną) będziemy nazywali każdą funkcję $f : \{\text{prawda, fałsz}\}^n \rightarrow \{\text{prawda, fałsz}\}$. Mówiąc *nie wiem, czy zdążę dziś pójść na (p)ocztę, do (s)klepu i naprawić (r)ower, ale chcę zrobić chociaż dwie z tych rzeczy*, możemy zapisać funkcję logiczną opisującą, czy ten plan został wykonany:

$$w_1(p, r, s) = (p \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge r \wedge s).$$

Analogiczny zapis możemy zastosować do każdej funkcji boolowskiej – po prostu spośród wszystkich 2^n układów wartości logicznych argumentów wybieramy te, dla których nasze zdanie złożone jest prawdziwe. Czasami jednak funkcję można zapisać krócej, np. tak:

$$w_2(p, r, s) = (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (r \wedge s),$$

uwzględniając, że zbiór $\{p, r, s\}$ ma trzy dwuelementowe podzbiory, lub tak:

$$w_3(p, r, s) = (p \vee s) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge s)),$$

co nawet można dość zrozumiale wypowiedzieć: *zajrzę na pocztę lub do sklepu, ale jeśli nie naprawię roweru, to pójdę i tu, i tu*. (Czy dla Czytelnika jest oczywiste, że to sformułowanie jest równoważne poprzedniemu? Dla autora nie całkiem, za każdym razem musi się na chwilę zastanowić.)

Skąd jednak wiadomo, że to rzeczywiście ciągle ta sama funkcja logiczna, czyli że formuły w_1 , w_2 i w_3 są faktycznie równoważne? Z pewnością można podstawić po kolei wszystkie $2^3 = 8$ układów wartości zmiennych p, r, s należących do $\{0, 1\}$ i sprawdzić, czy dla każdej z formuł dostajemy jednakowe wyniki. Inny sposób wykorzystuje przedstawione wyżej na marginesie algebraiczne definicje operatorów logicznych. Na przykład

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) = 1 - (1 - q) + (1 - q)(1 - p) = 1 - p + pq = (p \Rightarrow q),$$

a zatem zdania $(p \Rightarrow q)$ i $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ są równoważne. Podobnie wyznaczmy

$$(p \Rightarrow (q \wedge r)) = 1 - p + pqr,$$

$$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) = (1 - p + pq)(1 - p + pr) = 1 + p(q + r - 2) + p^2(1 - q - r + qr).$$

Gdy prawda = 1, fałsz = 0, to

$(\neg p) = 1 - p$	zaprzeczenie;
$(p \vee q) = p + q - pq$	alternatywa;
$(p \wedge q) = pq$	koniunkcja;
$(p \Rightarrow q) = 1 - p + pq$	implikacja;
$(p \Leftrightarrow q) = 1 - p - q + 2pq$	równoważność.

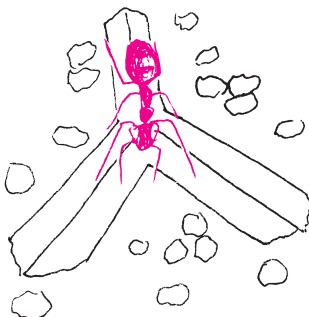
Wartościom logicznym można przypisać także inne liczby, na przykład fałsz można oznaczać liczbą -1 , a nie zerem, pozostawiając 1 dla prawdy. Ponieważ przyporządkowanie $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ zamienia $\{-1, 1\}$ na $\{0, 1\}$, to np. koniunkcja, którą w systemie $\{0, 1\}$ wyraża funkcja $(p \wedge q) = pq$, uzyskuje w notacji ± 1 postać

$$\frac{(x \wedge y) + 1}{2} = \frac{x + 1}{2} \cdot \frac{y + 1}{2},$$

czyli $(x \wedge y) = \frac{1}{2}(x + 1)(y + 1) - 1$. Czytelnik być może zechce zweryfikować poniższe zestawienie standardowych operatorów logicznych

Gdy prawda = 1, fałsz = -1, to

$(\neg x) = -x,$
$(x \vee y) = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy),$
$(x \wedge y) = \frac{1}{2}(-1 + x + y + xy),$
$(x \Rightarrow y) = \frac{1}{2}(1 - x + y + xy),$
$(x \Leftrightarrow y) = xy.$



Tym razem wydaje się, że mamy różne wyniki. Zauważmy jednak, że dla $p \in \{0, 1\}$ zachodzi $p^2 = p$, czyli $1 + p(q + r - 2) + p^2(1 - q - r + qr) = 1 + p(q + r - 2) + p(1 - q - r + qr) = 1 - p + pqr$. Zatem i tym razem mamy do czynienia z równoważnością

$$(p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)).$$

Cierpliwy Czytelnik lub odpowiednio zaprogramowany komputer może wyznaczyć wielomiany odpowiadające wyrażeniom w_1, w_2 i w_3 i stwierdzić, że wszystkie one są równe $w(p, r, s) = pr + ps + rs - 2prs$, a to dowodzi równoważności tych wyrażeń.

Gdy prawda = 1, fałsz = -1, to wyrażenie $w(p, r, s) = pr + ps + rs - 2prs$ zmienia się w

$$\frac{v(x, y, z) + 1}{2} = \frac{x+1}{2} \cdot \frac{y+1}{2} + \frac{x+1}{2} \cdot \frac{z+1}{2} + \frac{y+1}{2} \cdot \frac{z+1}{2} - 2 \cdot \frac{x+1}{2} \cdot \frac{y+1}{2} \cdot \frac{z+1}{2},$$

czyli

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2}(x + y + z - xyz).$$

Czytelnik bez trudu sprawdzi, że jest to poprawny wynik – jeśli co najmniej dwie z liczb x, y i z są równe 1, to $v(x, y, z) = 1$, a jeśli dwie lub trzy z nich są równe -1, to $v(x, y, z) = -1$, dokładnie tak, jak $pr + ps + rs - 2prs = 1$, np. dla $p = r = 1$ i $pr + ps + rs - 2prs = 0$ dla $p = r = 0$. Widzimy, że taka liniowa zamiana zmiennych nie wpływa na stopień wielomianu.

Dzięki redukcjom typu $p^2 = p$ każda n -argumentowa funkcja boolowska może być zapisana w postaci wielomianu n zmiennych, w którym nie występują wykładniki większe od 1. Różne wielomiany nie mogą definiować tej samej funkcji boolowskiej – wynika to z ogólnych własności wielomianów. Przez **stopień funkcji boolowskiej**, oznaczany przez $\deg(f)$, będziemy rozumieć stopień jej wielomianu, na przykład $\deg(p \wedge q) = 2$, $\deg(p \vee q \vee r) = 3$, $\deg(w(p, r, s)) = 3$.

Czułość funkcji boolowskich

Starając się o kredyt, pan Kowalski rzetelnie wypełnił kwestionariusz z setką pytań. Otrzymał decyzję odmowną – bankowy analityk wyjaśnił swojemu przełożonemu, że odpowiedzi na pytania 14, 58 i 83 wskazują na skłonność klienta do nadmiernych wydatków. Pan Kowalski nigdy się jednak nie dowie, że dostałby kredyt, wystarczyłoby tylko, odpowiadając na jedno z tych trzech pytań, skłamać.

Decyzja podejmowana na podstawie kwestionariusza to pewna funkcja boolowska. W rzeczywistości nie na każde pytanie można odpowiedzieć *tak* lub *nie*, ale nie jest to silne ograniczenie, bo na przykład pytanie z tysiącem dopuszczalnych odpowiedzi można w zasadzie zastąpić dziesięcioma pytaniami binarnymi. To, że zmiana pojedynczego argumentu może zmienić wartość funkcji, jest przejawem zjawiska zwanego **czułością**.

Niech więc f będzie n -argumentową funkcją boolowską, a $x = (x_1, \dots, x_n)$ dowolnym elementem jej dziedziny. **Czułością** $s(f, x)$ funkcji f w punkcie x nazwiemy liczbę takich y , że y różni się od x tylko na jednej współrzędnej, ale $f(y) \neq f(x)$. **Czułością** $s(f)$ funkcji f nazwiemy największą możliwą wartość czułości $s(f, x)$.

Przykład 1. Aby zdać egzamin, należy poprawnie odpowiedzieć na siedem z dziesięciu pytań.

- Alicja odpowiedziała poprawnie na 9 pytań i zdała. Czulość Alicji* wynosi 0, gdyż zmiana jednej odpowiedzi nie może spowodować, że Alicja nie zda.
- Bartek odpowiedział dobrze na 7 pytań i zdał z trudem. Gdyby udzielił innej odpowiedzi na którekolwiek z tych pytań, nie zdałby. Jego czulość to 7.
- Czarek odpowiedział dobrze na 6 pytań i nie zdał, choć niewiele brakowało. Gdyby zaliczył choćby jedno z pozostałych 4 pytań, zdałby. Czulość Czarka to 4.
- Dagmara odpowiedziała dobrze na 5 pytań i nie zdała. Zmiana jednej odpowiedzi nic nie daje – poprawnych odpowiedzi będzie najwyżej 6, co nie wystarcza do pozytywnego wyniku. Czulość Dagmary wynosi 0.

Czulość całej funkcji to 7 i nietrudno zobaczyć, że wpływają na nią jedynie przypadki graniczne. Ogólnie, dla egzaminu z n pytaniami i progiem zdania na poziomie $m > 0$ (oraz $m \leq n$, bo trudno żądać, by ktoś odpowiedział na ponad 100% pytań) czulość to większa z liczb m i $n - m + 1$.

Przykład 2. Emil zaprosił na urodziny $n = m^2$ gości pochodzących z m krajów (z każdego kraju dokładnie m osób). Imprezę uzna za udaną, jeśli z każdego kraju przyjdzie co najmniej jeden gość (funkcją boolowską f jest tu więc koniunkcja m alternatyw po m zmiennych w każdej, czyli funkcja stopnia $m \cdot m = n$). Rozważmy graniczne przypadki.

- „Prawie nieudana” udana impreza ma miejsce wtedy, gdy z każdego kraju ktoś jest, ale z niektórych krajów tylko pojedyncze osoby, które mogą wyjść,

*Formalnie powinno być „czulość funkcji zdania egzaminu dla ciągu odpowiedzi Alicji”, ale czy „czulość Alicji” nie brzmi lepiej?



psując urodziny. Tych pojedynczych osób jest nie więcej niż krajów, więc czułość nie przekracza m .

- „Prawie udana” nieudana impreza jest zaś wtedy, gdy z jakiegoś (ale tylko jednego) kraju nikt nie przyszedł. Wtedy czekamy, aż ktoś z m zaproszonych z tego kraju gości jednak się pojawi – tu czułość wynosi m .

Ostatecznie czułość całej funkcji to $s(f) = m = \sqrt{n} = \sqrt{\deg f}$.

Po wprowadzeniu powyższych pojęć możemy już powiedzieć, że problem rozstrzygnięty przez Huanga pierwotnie wcale nie dotyczył mrówek na kostce:

Hipoteza o czułości (obecnie **twierdzenie Huanga**):

Dla każdej funkcji boolowskiej f zachodzi nierówność $s(f) \geq \sqrt{\deg(f)}$.

Związek funkcji boolowskich z kostkami jest dość prosty: podobnie jak zwykły sześcián możemy umieścić tak, by jego wierzchołkami były punkty $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ i $(1, 1, 1)$, i powiedzieć, że jest to dziedzi-na trójargumentowej funkcji boolowskiej, tak możemy uważać złożone z zer i jedynek ciągi długości n za współrzędne wierzchołków n -wymiarowej kostki.

Wracając na razie do geometrii, możemy sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Huang): Jeśli ponad połowę z 2^n wierzchołków n -wymiarowej kostki (czyli co najmniej $2^{n-1} + 1$ wierzchołków) zajmują mrówki, to co najmniej jedna z nich ma co najmniej \sqrt{n} sąsiadek.

Dowód tego twierdzenia, wymagający jedynie znajomości podstaw algebry liniowej, w tym mnożenia macierzy, omówimy w kolejnej części artykułu, w następnym numerze. Powiemy wówczas również, jak z powyższego faktu wydedukować twierdzenie Huanga o czułości.

Hao Huang, *Induced subgraphs of hypercubes and a proof of the Sensitivity Conjecture*, arxiv.org/abs/1907.00847.



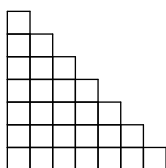
Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1642. Chcemy zaplanować turniej badmintonu dla czterech osób, w którym każde dwie rozegrają dokładnie jeden mecz. Mamy do dyspozycji dwa korty i trzy rundy (w każdej rundzie odbywają się dwa mecze). Czy można zaplanować rozgrywki w taki sposób, aby nikt nie grał dwa razy na tej samej połowce? Rozwiązanie na str. 8

M 1643. Chcemy zaplanować turniej badmintonu dla sześciu osób, w którym każde dwie rozegrają dokładnie jeden mecz. Mamy do dyspozycji trzy korty i pięć rund (w każdej rundzie odbywają się trzy mecze). Czy można zaplanować rozgrywki w taki sposób, aby nikt nie grał dwa razy na tej samej połowce? Rozwiązanie na str. 8

M 1644. *Schodkowy trójkąt* o wysokości n to figura złożona z $1 + 2 + \dots + n$ pól jednostkowych (patrz rysunek). Ile jest prostokątów złożonych z całych pól takiego trójkąta? Rozwiązanie na str. 9



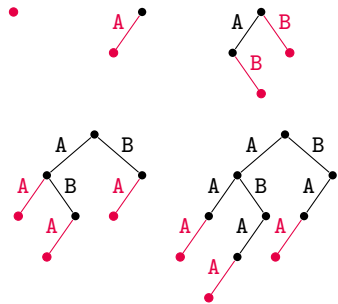
Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1003. Podczas rzeczywistych zderzeń ciał sprężystych część energii kinetycznej jest tracona na ciepło i trwałe odkształcenia zderzających się ciał. W badaniach zderzeń Newton uwzględnił ten efekt poprzez wprowadzenie współczynnika restytucji $k = v/u$, gdzie u oznacza prędkość względną ciał przed zderzeniem, a v – prędkość po zderzeniu. Ile, według takiego modelu, trwa ruch stalowej kulki upuszczonej na poziomą, żelazną płytę z wysokości $h_0 = 1$ m od chwili jej upuszczenia do ustania „podskoków”? Współczynnik restytucji $k = 0,7$, przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s². Rozwiązanie na str. 4

F 1004. Po jakim czasie grubość lodu na powierzchni stawu wzrośnie od 5 cm do 10 cm, jeżeli temperatura powietrza pozostaje stała i wynosi -10°C ? Gęstość lodu wynosi $\rho = 917$ kg/m³, ciepło topnienia $L = 334$ kJ/kg, współczynnik przewodnictwa cieplnego lodu wynosi $k = 2,2$ W/(K · m). Rozwiązanie na str. 10

* Informatyk, prowadzi stronę internetową algonotes.com

Zacniemy od takiego zadania: dla danego n -literowego słowa s chcemy znaleźć liczbę jego różnych podciągow. Innymi słowy, chcemy odpowiedzieć na pytanie, ile różnych słów możemy uzyskać poprzez wykreślanie niektórych liter ze słowa s . Dla przykładu rozważmy słowo ABAA. Ma ono dokładnie 10 różnych podciągow: słowo puste, A, B, AA, AB, BA, AAA, ABA, BAA oraz ABAA. Dla uproszczenia będziemy rozważać słowa złożone z liter A i B, ale nasze rozwiązania będą działać dla dowolnego A -literowego alfabetu.



Rys. 1. Konstrukcja drzewa trie dla kolejnych prefiksów słowa ABAA. Krawędzie dodawane w kolejnych krokach zaznaczono kolorem; wynikowe drzewo ma $w = 10$ węzłów

Zacniemy od algorytmu, który będzie konstruował możliwe do uzyskania podciągi dla kolejnych prefiksów słowa s (rys. 1). Wygodnie jest trzymać te podciągi na drzewie, w którym krawędzie są etykietowane literami, a każda ścieżka od korzenia do dowolnego węzła odpowiada jednemu podciągowi (czyli na tzw. drzewie trie). Tak więc liczba węzłów w tego drzewa będzie oznaczała liczbę różnych podciągow (włączając korzeń drzewa odpowiadający podciągowi pustemu).

Przypuśćmy, że skonstruowaliśmy drzewo dla prefiksu $p = s_1s_2 \dots s_{i-1}$ i chcemy dodać kolejną literę $c = s_i$, aby uzyskać drzewo dla prefiksu $pc = s_1s_2 \dots s_{i-1}s_i$. Wszystkie podciągi z pc będą albo podciągami występującymi już w p , albo tymi samymi podciągami rozszerzonymi o literę c . Tak więc, gdy w drzewie dla p do każdego węzła dodamy krawędź o etykiecie c , uzyskamy drzewo dla pc . Może się zdarzyć, że w niektórych węzłach taka krawędź już istniała – oznacza to, że odpowiadający podciąg już występował w p , zatem nie należy go dodawać ponownie.

Taki algorytm, choć poprawny, ma złożoność wykładniczą względem n . Istotnie, słowo złożone z n różnych liter ma 2^n podciągow. Ale dla dwuliterowego alfabetu nie jest dużo lepiej: słowo $(AB)^{n/2}$ (AB powtórzone $\frac{n}{2}$ razy) ma więcej niż $2^{n/2}$ podciągow (w szczególności zawiera wszystkie możliwe $\frac{n}{2}$ -literowe słowa jako podciągi).

Okazuje się, że aby znaleźć liczbę podciągow, nie musimy trzymać w pamięci całego drzewa. Niech w_c oznacza liczbę węzłów drzewa, z których wychodzi krawędź z literą c (jest to też po prostu liczba krawędzi z etykietą c). Gdy dodajemy literę c , dodajemy nową krawędź do dokładnie $w - w_c$ węzłów, a zatem zwiększamy sumaryczną liczbę węzłów (tym samym liczbę podciągow) z w na $2w - w_c$. Ponadto zwiększamy liczbę krawędzi z etykietą c z w_c do $w_c + (w - w_c) = w$.

Wystarczy więc, że będziemy trzymali w pamięci wektor (w, w_A, w_B) , początkowo równy $(1, 0, 0)$. Gdy dodajemy nową literę A, to zastępujemy ten wektor przez $(2w - w_A, w, w_B)$, a dla litery B przez wektor $(2w - w_B, w_A, w)$. Ponieważ zawsze zmieniamy tylko dwie współrzędne wektora, to dostajemy rozwiązanie o złożoności czasowej $O(n + A)$.

W konkursach programistycznych panuje moda na utrudnianie zadań z ciągami przez rozważanie wielu zapytań o fragmenty słowa. Spróbujmy zmierzyć się z taką wersją zadania. Dostajemy zatem q zapytań, każde postaci (l, r) , o liczbę różnych podciągow dla fragmentu $s_l s_{l+1} \dots s_r$. Przy czym q jest duże, więc nie możemy sobie pozwolić na uruchomienie algorytmu liniowego dla każdego zapytania oddzielnie.

W algorytmie dla jednego zapytania utrzymujemy wektor (w, w_A, w_B) . Ponieważ współczynniki nowego wektora (po dodaniu litery) są kombinacjami liniowymi współczynników oryginalnego wektora, więc możemy zamianę wektora zastąpić mnożeniem go z prawej strony przez jedną z poniższych macierzy:

$$M_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nadużywając nieco notacji, oznaczymy przez M_i macierz odpowiadającą i -tej literze słowa s , czyli $M_i = M_{s_i}$. Zaczynając od wektora $(1, 0, 0)$, mnożymy go przez kolejne wartości M_i , uzyskując na końcu wektor (w, w_A, w_B) dla całego słowa. Pomnożywszy go skalarnie przez $(1, 0, 0)$, dostajemy wartość w , czyli szukaną



Rozwiązanie zadania F 1003.

Spadek z wysokości h_0 trwa

$$t_0 = \sqrt{2h_0/g}, \text{ po czym następuje odbicie}$$

z prędkością $v_1 = k\sqrt{2gh_0}$, a następnie ruch w górę do wysokości $h_1 = k^2 h_0$ (po odbiciu energia kinetyczna wynosi k^2 energii przed odbiciem) i ponowne spadanie. Całkowity czas pomiędzy pierwszym i drugim odbiciem wynosi więc

$$t_1 = 2\sqrt{2h_1/g} = 2k\sqrt{2h_0/g}.$$

Analogicznie czas pomiędzy odbiciem n i $n + 1$ wynosi:

$$t_n = kt_{n-1} = 2k^n \sqrt{2h_0/g}.$$

Całkowity czas t , jaki upłynie do wytlumienia podskoków, równy jest:

$$t = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sqrt{2h_0/g} \left(1 + \frac{2k}{1-k} \right).$$

W obliczeniach skorzystaliśmy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $t \approx 2,6$ s. Model Newtona jest nieco uproszczony i nie uwzględnia wzrastania współczynnika restytucji od 0,7 do 1 wraz ze zmniejszaniem prędkości zderzających się ciał.

liczbę podciągów. Ponieważ macierze są rozmiarów $(A + 1) \times (A + 1)$ i umiemy pomnożyć dwie takie macierze w czasie $O(A^3)$, to cały algorytm, sprowadzający się do obliczenia wzoru

$$(1, 0, 0) M_1 M_2 \cdots M_{n-1} M_n (1, 0, 0)^T,$$

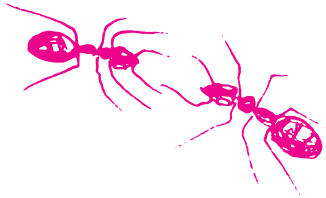
działała w czasie $O(nA^3)$. Jest to istotnie gorsza złożoność, niż mieliśmy wcześniej, ale przedstawienie obliczeń w postaci macierzowej daje nam większą elastyczność. Obliczenie odpowiedzi dla fragmentu $s_l s_{l+1} \dots s_r$ wymaga bowiem przemnożenia macierzy $(1, 0, 0) M_l M_{l+1} \cdots M_{r-1} M_r (1, 0, 0)^T$. Ponieważ mnożenie macierzy jest operacją łączną, więc w tym celu możemy użyć struktury danych zwanej drzewem przedziałowym. W liściach drzewa będziemy trzymać macierze M_1, M_2, \dots, M_n , a w węzłach wewnętrznych przemnożone macierze z dzieci. Dzięki temu będziemy mogli odpytywać o iloczyn macierzy dla dowolnego fragmentu w czasie $O(A^3 \log n)$, gdyż dzielimy go na $O(\log n)$ przedziałów bazowych, których macierze mnożymy w czasie $O(A^3)$. Z kolei sama konstrukcja drzewa zajmie czas $O(nA^3)$, więc algorytm będzie działał w sumarycznej złożoności czasowej $O(nA^3 + qA^3 \log n)$.

Można ją jeszcze trochę przyspieszyć, korzystając ze standardowej sztuczki dla zapytań o iloczyny macierzy. Tak naprawdę nie pytamy się o całą macierz, a o jeden z jej elementów (dlatego mnożymy obustronnie przez wektor). Ponieważ mnożenie macierzy przez wektor działa w czasie $O(A^2)$, jest więc szybsze niż mnożenie macierzy przez macierz (i daje w wyniku wektor), możemy zatem macierze dla przedziałów bazowych od razu domnażać do jednego z tych wektorów. Tym sposobem algorytm będzie działał w czasie $O(nA^3 + qA^2 \log n)$.

Własność mnożenia macierzy, którą wykorzystujemy w drzewie przedziałowym, to łączność. Gdyby dodatkowo nasze macierze M_A i M_B były odwracalne, to zamiast drzewa przedziałowego moglibyśmy wykorzystać zwykłe sumy (a właściwie iloczyny) prefiksowe. Jeśli przyjmiemy oznaczenie $P_i = M_1 M_2 \cdots M_{i-1} M_i$ oraz $Q_i = P_i^{-1}$, to wtedy $Q_i = M_i^{-1} M_{i-1}^{-1} \cdots M_2^{-1} M_1^{-1}$ oraz

$$(1, 0, 0) M_l M_{l+1} \cdots M_{r-1} M_r (1, 0, 0)^T = (1, 0, 0) Q_{l-1} \cdot P_r (1, 0, 0)^T.$$

Konstrukcję drzewa przedziałowego przechowującego macierze opisywaliśmy m.in. w informatycznym kąciaku olimpijskim w Δ_{10} .



Macierz M jest odwracalna, jeśli istnieje taka macierz M^{-1} , że iloczyn $M \cdot M^{-1}$ oraz $M^{-1} \cdot M$ są równe macierzy identycznościowej. Dla odwracalnych macierzy M_1 i M_2 mamy $(M_1 \cdot M_2)^{-1} = M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}$.

Niestety, nie wszystkie macierze są odwracalne. Ale popatrzmy na macierz M_A jako przekształcającą wektor $v = (w, w_A, w_B)$ na wektor $v' = (w', w'_A, w'_B)$, gdzie $w' = 2w - w_A$, $w'_A = w$ i $w'_B = w_B$. Gdybyśmy dostali wektor v' , to czy umielibyśmy na jego podstawie odtworzyć wektor v ? Odpowiedź jest twierdząca – proste przekształcenia prowadzą do wzoru $w = w'_A$, $w_A = 2w'_A - w'$ i $w_B = w'_B$. Są to również przekształcenia liniowe, więc możemy je zapisać w formie macierzy, która musi być zatem macierzą odwrotną do M_A (tak samo odwracamy macierz M_B):

$$M_A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Możemy więc w czasie $O(nA^3)$ wyznaczyć wszystkie P_i , biorąc $P_i = P_{i-1} M_i$. Macierz odwrotną $Q_i = P_i^{-1}$ możemy również obliczyć w czasie $O(A^3)$, ale jest to bardziej kłopotliwe niż mnożenie. Aby tego uniknąć, wyznaczmy Q_i , korzystając ze wzoru

$$Q_i = (P_{i-1} M_i)^{-1} = M_i^{-1} P_{i-1}^{-1} = M_i^{-1} Q_{i-1}.$$

Teraz jedno zapytanie będzie działać w czasie $O(A^3)$ lub nawet w czasie $O(A^2)$, bo dla wyniku potrzebujemy wykonać mnożenie $(1, 0, 0) Q_{l-1}$ oraz mnożenie $P_r (1, 0, 0)^T$, a następnie pomnożyć skalarnie uzyskane wektory. Ale jeśli przyjrzymy się temu wzorowi bliżej, to tak naprawdę mnożymy w nim pierwszy wiersz macierzy Q_{l-1} przez pierwszą kolumnę macierzy P_r , zatem możemy to bezpośrednio zrobić w czasie $O(A)$.

Dostajemy zatem algorytm o złożoności czasowej $O(nA^3 + qA)$.

Przypomnijmy, że zaczęliśmy od rekurencji liniowej, którą zapisaliśmy w postaci macierzy, aby skorzystać z ich własności (łączności dla drzewa przedziałowego i istnienia odwrotności dla iloczynów prefiksowych). Zauważmy, że o ile w drzewie przedziałowym potrzebowaliśmy umieć mnożyć dowolne macierze, to w algorytmie sum prefiksowych wystarczy nam domnażanie przez macierze M_i oraz M_i^{-1} , więc znowu możemy skorzystać z faktu, są one szczególnej postaci. Domnażanie macierzy P przez M_i modyfikuje jedynie dwie kolumny macierzy P (przykładowo dla M_A na drugą kolumnę kopiujemy pierwszą, a pierwszą mnożymy przez 2 i odejmujemy drugą). Zatem możemy skopiować macierz P_{i-1} do macierzy P_i w czasie $O(A^2)$, a następnie zrobić uaktualnienie dwóch kolumn w czasie $O(A)$. (Analogicznie dla macierzy Q .) Tak więc fazę obliczeń wstępnych możemy zrealizować w czasie $O(nA^2)$, co da nam algorytm o złożoności $O(nA^2 + qA)$.

Czas na ostatnią obserwację: wcale nie musimy pracować kopiować całych macierzy. Ponieważ z macierzy Q_i potrzebujemy jedynie pierwszego wiersza, a z macierzy P_i jedynie pierwszej kolumny, zatem wystarczy te macierze modyfikować w miejscu (czyli nadpisując nieaktualne wartości nowymi w tym samym miejscu), a kopiować jedynie potrzebne wiersze i kolumny, co zajmie czas $O(A)$. Zatem ostatecznie dostajemy rozwiązanie o złożoności czasowej $O(nA + qA)$.



mała delta

O dowodzeniu racji

Mała Basia podeszła do taty z naburmuszoną miną. Nie czekając na jego pytanie, zaczęła się żalić:

– Tato, Kasia oszukuje, źle rzuca monetą, żeby rzadziej wynosić śmieci!
– Spokojnie Basiu, powiedz mi dokładnie, o czym mówisz – poprosił tata, choć już się domyślał, o czym będzie rozmowa. Kilka miesięcy temu, siostry kłóciły się o to, kto powinien tego dnia wynieść śmieci. Żeby rozstrzygnąć spór, tata zaproponował, że osoba wykonująca obowiązek będzie wybierana poprzez rzut monetą. Tym systemem udało się pogodzić siostry; jak widać, nie na długo. Basia wzięła wdech i zaczęła mówić:

– Niedawno zauważyłam, że jak Kasia rzuca monetą, to o wiele częściej wypada reszka, więc stwierdziłam, że chyba nauczyła się tak rzucać, by częściej tak wypadało. Dlatego zaczęłam liczyć i w ciągu ostatnich dwóch tygodni orzeł wypadł 5 razy, a reszka 9! To jest prawie dwa razy częściej! Kasia oszukuje!

Tata się uśmiechnął i zapytał:

– A wiesz, jakie jest prawdopodobieństwo, że w 14 rzutach orzeł wypadnie 5 razy?

– Nie wiem.

– Jak rzucamy monetą 14 razy, to możemy otrzymać 2^{14} możliwości. A wyrzucić 5 orłów i 9 reszek możemy na $\binom{14}{5}$ sposobów. A $\frac{\binom{14}{5}}{2^{14}}$ to około 12%.

– To bardzo mało!

– To mało, jednak chyba nie na tyle, żeby zarzucać siostrze nieuczciwość.

Zwłaszcza że tak naprawdę powinniśmy odpowiedzieć sobie na pytanie, jaka jest szansa na to, że otrzymamy **co najwyżej** 5 reszek, gdyż każdy z takich wyników wzbudziłby Twoje wątpliwości. Można policzyć, że to prawdopodobieństwo jest równe około 21%. To więcej, niż szansa na wyrzucenie 6 oczek przy jednokrotnym rzucie kostką, a chyba nie podejrzewałybyś Kasi o oszukiwanie w takiej sytuacji?

W tym momencie Basia zrobiła smutną minę. Owszem, podejrzewałyby swoją siostrę nawet w takiej sytuacji, ale wiedziała już, że nic nie wskóra. Chcąc poprawić jej humor, tata zaproponował:

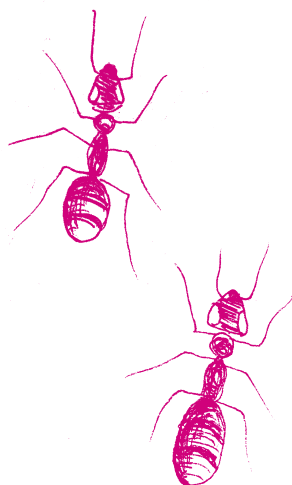
– Może chcesz sprawdzić statystycznie, czy masz rację? Mogę Ci pokazać, jak to zrobić. Statystyki można używać, żeby udowodniać innym swoje racje. Jednak, co jest równie ważne, statystyka pomaga nam się także dowiedzieć, czy sami mamy rację. To jak, chcesz spróbować?

Dziewczynka kiwnęła głową.

– W statystyce mówimy o hipotezie zerowej, może o niej słyszałaś. Otóż, gdy wykonujemy test statystyczny, mamy dwie hipotezy. Pierwsza z nich jest czymś, w co wierzy większość ludzi, czymś uznawanym przez większość osób za prawdę lub czymś, do czego po prostu jesteśmy przyzwyczajeni i nie chcielibyśmy się z tym przeświadczeniem rozstawać, nie mając ku temu solidnych podstaw. Druga jest naszym przypuszczeniem. To, co ważne, to pytanie, jakie sobie zadajemy. Wiesz jakie, Basiu?

– Która z hipotez jest bardziej prawdopodobna?

– Właśnie nie. Wyłumaczę Ci to na przykładzie. Niektórzy ludzie wierzą, że jeśli wyjdą z domu bez parasola, to jest większe prawdopodobieństwo, że spadnie deszcz, że los robi im na złość. Wyobraź sobie, że jest taki człowiek i liczy dni, patrząc, czy wziął parasol i czy spadł deszcz.



Konkurs im. Witolda Wilkosza – edycja 2020

Oddział Krakowski Polskiego Towarzystwa Matematycznego ogłasza drugą edycję Konkursu im. Witolda Wilkosza na najlepszą studencką pracę popularyzującą matematykę.

Konkurs nosi imię Witolda Wilkosza (1891–1941), profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego, autora książek i pogadanek radiowych popularyzujących matematykę, kuratora Kółka Matematyczno-Fizycznego Uczniów UJ, redaktora serii wydawniczej „Biblioteczka Kółka Mat.-Fiz. U.U.J.”, znanego też z matematycznych dyskusji ze swoim szkolnym kolegą, Stefanem Banachem.

Do konkursu można zgłaszać zarówno prace już opublikowane, zgłoszone do druku, jak i prace przygotowane specjalnie na Konkurs. Termin nadsyłania zgłoszeń: 30 października 2020 roku. Konkurs przeznaczony jest dla studentów (dowolnego kierunku studiów). Udział w konkursie osób posiadających tytuł magistra matematyki dozwolony jest w przypadku zgłaszania do konkursu pracy opublikowanej w 2019 lub 2020 roku, jeśli autor w momencie zgłoszenia pracy do druku nie posiadał jeszcze tego tytułu. Prace powinny zostać przygotowane w formie opracowania pisemnego. Poza tym zastrzeżeniem, charakter prac oraz zakres popularyzowanej matematyki nie jest w żaden sposób ograniczony.

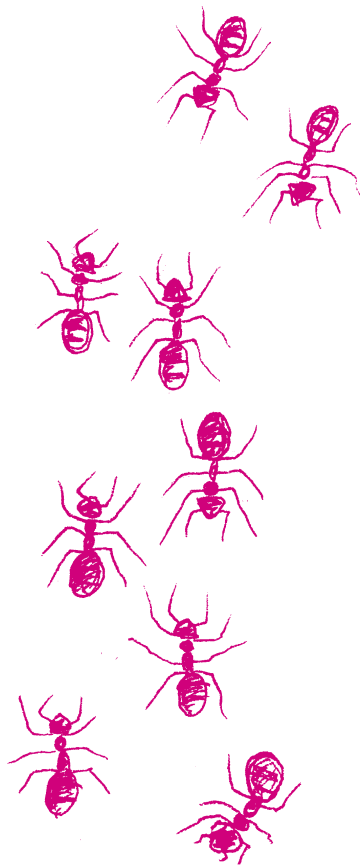
Więcej na temat konkursu:

www2.im.uj.edu.pl/ptm/#wilkosz

Regulamin Konkursu:

www2.im.uj.edu.pl/ptm/files

[/Wilkosz-2020.pdf](#)



Otrzymujemy takie dane:

	Wziąłem parasol. . .	Zostawiłem parasol. . .
. . . i spadł deszcz.	3	5
. . . i nie było deszczu.	7	5

Te dane wyglądają sugestywnie, aż chce się stwierdzić, że świat faktycznie robi nam na złość. Wydaje się, że według danych jest to bardziej prawdopodobne, ale mimo wszystko prawdopodobieństwo, że deszcz i parasol nie mają związku, a taki wynik otrzymaliśmy przypadkiem, może być duże. Żeby je wyliczyć, możemy użyć pewnej procedury statystycznej, zwanej *testem Chi-Kwadrat*. Jesteś jeszcze za młoda, by poznać szczegóły, wystarczy jednak wiedzieć, że procedura ta pozwala w przybliżony sposób obliczać prawdopodobieństwa określonych odstępstw od oczekiwanych wyników. Gdy ją zastosujemy, to okaże się, że jeżeli deszcz i parasol są niezależne, to prawdopodobieństwo tak „sugestywnych” wyników, jakie uzyskaliśmy, jest równe około 36%. Nie jest to mało, zatem wnioskowanie, że deszcz i parasol wpływają na siebie, wypada uznać za bezpodstawne. Dlatego w przypadku takich problemów należy zadawać następujące pytanie:

Jeżeli istnieje ogólnie przyjęta hipoteza „bazowa”,
... a ja mam własną hipotezę, która lepiej oddaje rzeczywistość,
... jakie jest prawdopodobieństwo, że mimo wszystko hipoteza bazowa jest poprawna?

Basia spojrzała na tatę z niezrozumieniem, dlatego ten kontynuował:

– W 14 rzutach otrzymałyście 5 orłów. To ci powiedziało, że „Kasia rzuca monetą w podejrzany sposób”. Jednak jak się okazuje, jeżeli Kasia jest niewinna, to prawdopodobieństwo, że orły będą wypadać tak rzadko lub rzadziej, jest mniej więcej 21%. To nie tak mało. A to, że orłów jest prawie dwa razy mniej niż reszek, nie ma wielkiego znaczenia, bo rzuciłyście bardzo mało razy.

Tata na chwilę zamilkł, pomyślał i powiedział:

– Proponuję ci, Basiu, byś teraz liczyła, jak często wypadają orzeł i reszka przez trzy miesiące. Jak będziesz miała dużo danych, to zrobimy statystyczny test, który nam powie, czy masz rację, czy nie. Dobrze?

Basia zgodziła się na propozycję taty. Po 90 dniach wróciła z wynikiem:

- Policzylam. W ciągu ostatnich 90 dni reszka wypadła 54 razy, a orzeł 36 razy.
- A widzisz, teraz reszek nie jest dwa razy więcej niż orłów.
- Ale wciąż jest ich dużo, stosunek reszek do orłów jest jak 3 do 2.
- Takie rzeczy mogą się zdarzyć, to przecież rzut monetą.
- Ale tato, zróbmy ten test!

W tym momencie tata przypomniał sobie o danej obietnicy i się zreflektował:

- Oczywiście, zrobimy tak, naszą hipotezą zerową jest to, że orły i reszki są tak samo częste. Twoją hipotezę, Basiu, jest to, że orły są rzadsze. Faktycznie tak to wygląda z twoich wyliczeń. To teraz zadajmy sobie pytanie: jak bardzo możliwe jest to, że orły są tak samo częste, a wypadło ich nie więcej niż 36 w 90 rzutach?

Tata spojrział na Basię i dodał:

- Jest jeszcze jedna rzecz, którą powinnaś wiedzieć: statystycy wyliczają to prawdopodobieństwo

i nazywają je *p-wartością*. W naszej sytuacji możemy przyjąć, że *p-wartość* mniejsza od 5% da nam istotne podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o uczciwości Kasi. Rozumiesz mnie, Basiu?

Dziewczynka zaczęła powoli mówić:

- Kasia wyrzuciła dużo reszek. To sprawia, że moja. . . hipoteza brzmi lepiej, a ja czuję się oszukana. Jednak Kasia może jest uczciwa i będzie jej smutno, kiedy ją oskarżę. Dlatego sprawdzimy, jakie jest prawdopodobieństwo, że Kasia nic nie zrobiła, a mi się tylko wydaje, że kłamie. Jeżeli będzie odpowiednio duże, to stwierdzimy, że to los. Prawda?

Tata się rozpromienił i kiwnął głową. Po chwili zaczął wpisywać odpowiednie wyliczenia w komputer.

- To teraz sprawdzimy, jakie jest prawdopodobieństwo takiego zdarzenia. Otóż jest ono równe... 3,6%. Zamilkł na chwilę, a Basia spojrzawszy na niego tryumfalnie, zapytała:

– Czyli prawdopodobieństwo, że Kasia jest uczciwa, jest małe, prawda? Czyli pójdziemy z nią porozmawiać, tato?

- Tak Basiu, pójdziemy.

Bartłomiej ŻAK

Rozważmy następujący problem. Mamy danych wiele d -wymiarowych wektorów: $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$, takich że sumują się one do wektora zerowego, czyli $\sum_{i=1}^n u_i = \vec{0}$. Podkreślmy, że liczba wektorów n może być dużo większa niż d . Założymy dodatkowo, że długości wszystkich wektorów u_i są nie większe niż 1. Dla danego ciągu wektorów u_1, \dots, u_n rozważmy podróż tym ciągiem w przestrzeni \mathbb{R}^d , w której startujemy z zera $\vec{0}$, a potem kolejno przesuwamy się o u_1 , o u_2 , o u_3 itd., a na końcu o u_n . Oczywiście na koniec całej podróży wrócimy do zera, ale w międzyczasie możemy od tego zera odsunąć się bardzo daleko. Pytanie brzmi, czy dla dowolnych wektorów u_1, \dots, u_n istnieje takie ich poprzestawianie, inaczej permutacja u'_1, \dots, u'_n , żeby podróż tym ciągiem wektorów nigdy nie oddalała się znacząco od zera. Mówiąc bardziej precyzyjnie, czy dla dowolnego wymiaru d istnieje taka stała C_d , że dla dowolnego ciągu wektorów $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ nie dłuższych niż 1 i sumujących się do $\vec{0}$ istnieje ich permutacja u'_1, \dots, u'_n taka, że dla dowolnego $k \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi $|\sum_{i=1}^k u'_i| \leq C_d$. Nim przejdziemy do rozwiązania, zachęcam Ambitnego Czytelnika do samodzielnej próby odpowiedzenia na to pytanie albo przynajmniej postawienia hipotezy i obstawienia ewentualnej wartości C_d .



Rozwiązanie zadania M 1642.

Odpowiedź: Nie.

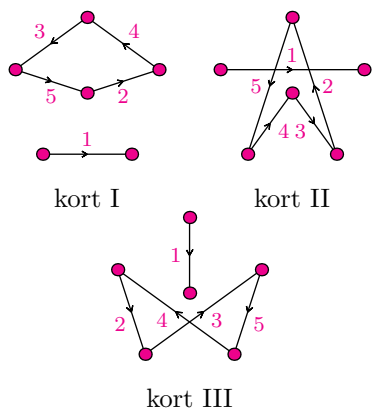
Przypuśćmy, że się udało, i rozważmy sytuację po rozegraniu pierwszej rundy. Nie jest możliwe, że obydwie osoby, które zagrały na ustalonym korcie, na nim zostaną, bo wtedy w drugiej rundzie musiałyby zagrać ze sobą jeszcze raz. Nie jest również możliwe, że obydwaj zawodnicy zmienią kort, bo wówczas w drugiej rundzie znów zagrałyby przeciwko sobie (tyle że na innym korcie). Wobec tego na każdym korcie po pierwszej rundzie jeden gracz zostaje (i zmienia połówkę), a jeden zmienia kort. Stąd wniosek, że po drugiej rundzie istnieje zawodnik A , który dotąd grał tylko na pierwszym korcie, i zawodnik B , który dotąd grał tylko na drugim korcie. Ci zawodnicy nie grali jeszcze ze sobą, więc powinni zagrać w trzeciej rundzie – ale nie mają gdzie (gdyby zagraли na pierwszym korcie, A powtórzyłby połówkę, a gdyby na drugim – B powtórzyłby połówkę). Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie jest możliwy taki układ rozgrywek.



Rozwiązanie zadania M 1643.

Odpowiedź: Tak.

Poniższe obrazki ilustrują przykładowy układ rozgrywek spełniających warunki zadania. Punkty oznaczają zawodników, strzałki – mecze (kierunek strzałki odróżnia na każdym korcie połówkę „wskazującą” od „wskazywanej”), a liczby przy strzałkach to numery rund (od 1 do 5), w których rozgrywane są odpowiednie mecze.



Dla wymiaru $d = 1$ stosunkowo łatwo jest wykazać, że $C_d = 1$ wystarczy. Konstruujemy ciąg wektorów u'_i tak, żeby wartość bezwzględna $\sum_{i=1}^k u'_i$ nigdy nie przekroczyła 1. Postępujemy w następujący sposób. Zaczynamy od ciągu pustego. Powiedzmy, że skonstruowaliśmy już ciąg u'_1, \dots, u'_k , który spełnia nasze warunki dla początkowych wyrazów. Założmy bez straty ogólności, że $\sum_{i=1}^k u'_i \geq 0$. Skoro suma wszystkich wektorów u_i wynosi 0, a suma wektorów już wybranych do ciągu jest nieujemna, to suma wektorów niewybranych jest niedodatnia. A więc istnieje tam jakiś wektor niedodatni, tego właśnie wybieramy jako u'_{k+1} . Postępując w ten sposób do końca, otrzymamy ciąg o wymaganych własnościach. Łatwo też zauważyć, że C_1 jest wybrana optymalnie, ciąg $u_1 = 1, u_2 = -1$ nie da się ułożyć lepiej.

Dla wyższych wymiarów sprawa nie jest tak oczywista i mimo bardzo prostego sformułowania ma za sobą długą historię badań. Już w roku 1914 niemiecki matematyk Ernst Steinitz (znany m.in. z twierdzenia o dopełnianiu zbioru liniowo niezależnych wektorów do bazy) udowodnił, że dla dowolnego $d \in \mathbb{N}$ stała $C_d = 2d$ spełnia zadane warunki. Dlatego wspomniany fakt zwany jest lematem Steinitza. Sytuacja staje się jednak ciekawsza, gdy rozważymy inne, nieco dziwniejsze sposoby mierzenia wielkości wektora. Takie funkcje, przyporządkowujące wektorowi z \mathbb{R}^d liczbę mierzącą w pewien rozsądny sposób jego wielkość, zwane są *normami*. Popularne przykłady norm to: długość wektora (zwana normą euklidesową), suma wartości bezwzględnych jego współrzędnych czy też maksymalna wartość bezwzględna jego współrzędnych (zwana normą maksimum), ale istnieją też inne, bardziej wymyślne normy. W ogólności norma to funkcja przyporządkowująca wektorowi $u \in \mathbb{R}^d$ wartość $\|u\| \in \mathbb{R}$, spełniająca trzy proste warunki: 1) $\|u\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy u to wektor zerowy, 2) norma skaluje się liniowo, czyli $\|au\| = |a| \cdot \|u\|$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ oraz $u \in \mathbb{R}^d$, 3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}^d$.

Z faktu, że dla normy euklidesowej $C_d = 2d$ wystarcza, wynika łatwo, że dla dowolnej normy taka stała C_d istnieje, nie wynika jednak w żaden sposób, jak duża jest ta stała. W roku 1931 Borgström wykazał, że dla dowolnej normy optymalna stała C_d jest nie większa niż $\sqrt{(4^d - 1)/3}$. Az do roku 1978 najlepsza znana stała C_d wciąż była wykładnicza względem d . Dopiero wtedy, w 1978 roku, Sergey Sevastianov opublikował w rosyjskim czasopiśmie w Nowosybirsku dowód uzasadniający, że dla dowolnej normy $C_d = d$ wystarczy. Praca miała dwie strony, przy czym dowód głównego wyniku zajmował w zasadzie jedną stronę, co jest oczywiście nadzwyczajnie w wypadku rozwiązania znanego problemu tak długo otwartego. Przetłumaczoną na angielski wersję można znaleźć, wpisując w wyszukiwarce Google frazę „Value of the Steinitz constant”. Mniej więcej rok lub dwa lata temu artykuł ten wpadł mi



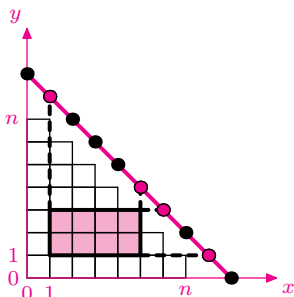
Rozwiązanie zadania M 1644.

Umieścimy schodkowy trójkąt w układzie współrzędnych w taki sposób, aby środki jego pól były w punktach $(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ dla wszystkich par liczb całkowitych nieujemnych x, y takich, że $x + y \leq n - 1$.

Zauważmy, że przedłużenia boków dowolnego prostokąta złożonego z całych pól schodkowego trójkąta przecinają prostą $y = n + 2 - x$ w czterech różnych punktach spośród $n + 3$ następujących:

- $(0, n + 2), (1, n + 1), (2, n), \dots, (n + 2, 0).$

Odwrotnie, każde cztery różne punkty spośród powyższych wyznaczają dokładnie jeden prostokąt – dwa niższe punkty są zawarte w przedłużeniach poziomych boków prostokąta, a dwa wyższe – w przedłużeniach boków pionowych.



Zbudowana wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między szukanymi prostokątami a czwórkami spośród $n + 3$ ustalonych punktów świadczy o tym, że odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie to

$$\binom{n+3}{4}.$$

w ręce, ponieważ wynik jest związany z moimi zainteresowaniami naukowymi. Uważam, że dowód jest wyjątkowy. Pál Erdős, jeden z najwybitniejszych matematyków XX wieku często odwoływał się do Księgi, w której Bóg trzyma wszystkie najelegantsze dowody twierdzeń matematycznych. Zainspirowani tym powiedzeniem dwaj matematycy, Eigner i Ziegler, wydali znakomitą książkę „Dowody z Księgi”, którą szczerze polecam każdemu Czytelnikowi. Dowód, o którym mówię, być może również mógłby trafić do takiej Księgi. Mimo że ja i moi koledzy rozumiemy każdy krok tego dowodu z osobna, to nie wiemy, skąd bierze się taki sposób rozumowania, niespotykany nigdzie indziej w naszej dziedzinie. Wydaje się, że za tym rozumowaniem stoi pewna intuicja geometryczna, ale nie wiemy, jaka to jest intuicja. Wierzę, że dogłębne zrozumienie idei ukrytych w tym dowodzie może przyczynić się do kolejnych ciekawych wyników. Kto wie, może ktoś z Czytelników pomoże?

Przedstawiam dowód z oryginalnej pracy Sevastianova nieco przeze mnie zmodyfikowany. Poniżej ustalamy dowolnie wybraną normę wektora $u \in \mathbb{R}^d$, którą oznaczamy $\|u\|$. Przypomnijmy, że naszym celem jest udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Jeśli $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$, dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi $\|u_i\| \leq 1$ oraz $\sum_{i=1}^n u_i = \vec{0}$, to istnieje permutacja u'_1, \dots, u'_n ciągu u_1, \dots, u_n taka, że dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$ mamy $\|\sum_{i=1}^k u'_i\| \leq d$.*

Założmy, że $d \leq n$, inaczej wniosek jest trywialny. Udowodnimy następujący lemat.

Lemat 1. *Istnieją zbiory $A_d \subseteq A_{d+1} \subseteq \dots \subseteq A_n = \{1, \dots, n\}$ oraz wagi $\lambda_k^i \in [0, 1]$ dla $k \in \{d, \dots, n\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ takie, że dla dowolnego k mamy $|A_k| = k$, $\sum_{i \in A_k} \lambda_k^i = d$ oraz $\sum_{i \in A_k} \lambda_k^i u_i = \sum_{i \in A_k} u_i$.*

Zobaczmy najpierw, jak z lematu wynika twierdzenie 1. Dla dowolnego $d \leq i \leq n - 1$ zbiór $A_{i+1} \setminus A_i$ ma dokładnie jeden element, nazywamy go u'_{i+1} . Pozostałych d elementów ciągu u_1, \dots, u_n dowolnie przypisujemy na u'_1, \dots, u'_d . Dla $k \leq d$ nierówność z twierdzenia jest oczywista, założmy $k > d$. Mamy

$$\left\| \sum_{i=1}^k u'_i \right\| = \left\| \sum_{i \in A_k} u_i \right\| = \left\| \sum_{i \in A_k} \lambda_k^i u_i \right\| \leq \sum_{i \in A_k} \lambda_k^i \|u_i\| \leq \sum_{i \in A_k} \lambda_k^i = d,$$

gdzie druga i ostatnia równość wynikają wprost z lematu. Wystarczy więc udowodnić lemat.

Pokażemy istnienie zbiorów A_i oraz wag λ_k^i spełniających warunki lematu przez indukcję po k . Zaczniemy od bazy indukcji dla $k = n$. Wówczas ustalamy $A_n = \{1, \dots, n\}$ oraz $\lambda_n^i = \frac{d}{n}$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$, które, jak łatwo sprawdzić, spełniają warunki. Aby wykonać krok indukcyjny z $k + 1$ do k , założmy, że mamy zdefiniowany zbiór A_{k+1} oraz wagi λ_{k+1}^i , a chcemy zdefiniować zbiór A_k oraz wagi λ_k^i . Niech $A_{k+1} = \{v_1, \dots, v_{k+1}\} \subseteq \{u_1, \dots, u_n\}$.

Rozważmy następujący układ równań i nierówności z $k + 1$ zmiennymi $\mu_1, \dots, \mu_{k+1} \in \mathbb{R}$: $0 \leq \mu_i \leq 1$ dla dowolnego i , $\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i = d + 1$ oraz $\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{k+1} v_i$. Zbiór rozwiązań S tego układu jest niepusty, gdyż, jak nietrudno sprawdzić, rozwiązaniem jest $\mu_i = \lambda_{k+1}^i + (1 - \lambda_{k+1}^i) \cdot \frac{1}{k+1-d}$. W ogólności dla każdego układu m_r równań i m_n nierówności liniowych w \mathbb{R}^d zbiór rozwiązań jest wielościanem, o ile jest ograniczony. Co więcej, okazuje się, że w każdym wierzchołku tego wielościanu dokładnie $d - m_r$ nierówności staje się równościami. Nietrudno w to uwierzyć, bo skoro mamy do czynienia z wierzchołkiem, to liczba równości powinna być równa wymiarowi przestrzeni, a m_r równości mamy już gotowe z równań. Zachęcamy Czytelników do precyzyjnego wykazania tego faktu. Wybierzmy więc dowolny wierzchołek wielościanu S zawierającego rozwiązania naszego układu równań. W układzie mamy $d + 1$ równości (równość $\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{k+1} v_i$ jest w istocie równością na każdej z d współrzędnych) oraz $2(k + 1)$ nierówności. A zatem w wierzchołku S spełnionych jest $k - d$ dodatkowych równości spośród nierówności $0 \leq \mu_i \leq 1$. Chcemy wykazać, że istnieje j takie, że $\mu_j = 1$. Jedyny przypadek, w którym nie



Rozwiązanie zadania F 1004.

Proces zamrażania jest powolny, a więc możemy przyjąć, że górna powierzchnia lodu ma temperaturę powietrza -10°C , natomiast dolna, stykająca się z wodą ma temperaturę 0°C , równą temperaturze zamrażającej wody. Ciepło przepływa od cieplejszej wody pod powierzchnią lodu do zimniejszego powietrza nad jego powierzchnią i podczas całego procesu różnica temperatur $\Delta T = -10\text{ K}$ pozostaje stała, ale rośnie grubość lodu. Powstanie warstwy lodu o grubości dx i polu powierzchni S wymaga odebrania ciepła $dQ = L\rho S \cdot dx$. Szybkość przepływu ciepła jest proporcjonalna do powierzchni, różnicy temperatur ΔT i odwrotnie proporcjonalna do grubości lodu x (tzn. jest proporcjonalna do szybkości zmian temperatury z grubością) i wynosi:

$$\frac{dQ}{dt} = -kS \frac{\Delta T}{x}.$$

Otrzymujemy więc:

$$L\rho S x \frac{dx}{dt} = -kS \Delta T.$$

Oznacza to stałą szybkość zmiany kwadratu grubości warstwy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} \right) = x \frac{dx}{dt}.$$

Ostatecznie otrzymujemy dla początkowej grubości $x_p = 5\text{ cm}$ i końcowej $x_k = 10\text{ cm}$:

$$\frac{1}{2} (x_k^2 - x_p^2) = \frac{-k\Delta T}{L\rho} t$$

i

$$t = \frac{-(x_k^2 - x_p^2) L\rho}{2k\Delta T}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych $t \approx 5,22 \cdot 10^4\text{ s} \approx 14,5\text{ godziny}$.

jest to natychmiastowe, to gdy każda ze wspomnianych $k - d$ równości jest postaci $\mu_i = 0$. Wiemy jednak, że wówczas suma pozostałych $(k + 1) - (k - d) = d + 1$ zmiennych μ_i jest równa $d + 1$, więc każda z nich musi być równa jeden. A więc tak czy inaczej istnieje j takie, że $\mu_j = 1$. Definiujemy więc $A_k = A_{k+1} \setminus v_j$ oraz $\lambda_k^i = \mu_i$. Nietrudno sprawdzić, że istotnie wszystkie warunki są spełnione, co kończy dowód lematu.

Czy oprócz ładnego dowodu i ciekawej historii oszacowanie na stałą w lemacie Steinitza przydaje się do czegoś? Tak, zdecydowanie, przykładem może być ta praca <https://arxiv.org/abs/1707.00481> opublikowana na konferencji SODA w 2018 roku, jednej z najlepszych światowych konferencji informatycznych. Gwoli ścisłości należy przyznać, że użyta jest tam konkretna norma: *norma maksimum* oznaczana $\|u\|_\infty$, przypomnijmy, że przypisuje ona wektorowi $u \in \mathbb{R}^d$ maksimum z wartości bezwzględnych jego współrzędnych. A więc do tego konkretnego zastosowania wystarczyłby już oryginalny wynik Steinitza z 1914 roku. Faktycznie, z tego, że dla $u \in \mathbb{R}^d$ zachodzi $\|u\|_\infty \leq |u| \leq \sqrt{d}\|u\|_\infty$ ($|u|$ oznacza długość euklidesową wektora u), oraz tego, że $C_d = 2d$ wystarcza dla normy euklidesowej, wynika, że $C_d = 2d\sqrt{d}$ wystarcza dla normy maksimum. Ja przedstawię pokrótce inne zastosowanie, które wydaje mi się również interesujące, a może być też bardzo użyteczne.

Tunelem pomiędzy punktem $x \in \mathbb{R}^d$ a $y \in \mathbb{R}^d$ o promieniu $s \in \mathbb{R}^+$ nazwijmy zbiór, który zawiera odcinek pomiędzy x a y oraz punkty, które są oddalone od tego odcinka o co najwyżej s , gdzie odległość mierzymy normą maksimum. Precyzyjnie rzecz biorąc, taki tunel to zbiór

$$T = \{z \in \mathbb{R}^d : \exists 0 \leq \alpha \leq 1 \|z - \alpha \cdot x - (1 - \alpha) \cdot y\|_\infty \leq s\}.$$

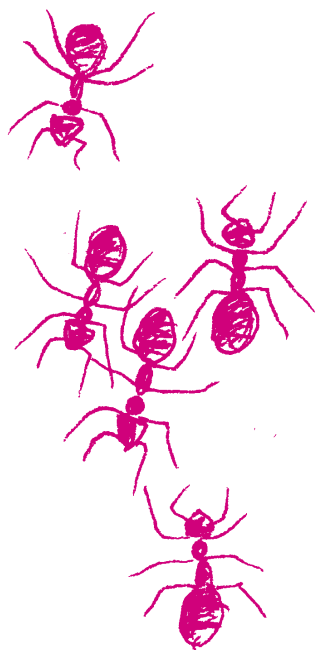
Po pierwsze zauważmy, że z twierdzenia 1 prosto wynika następujący wniosek.

Wniosek 1. *Jeśli $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ oraz dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ zachodzi $\|u_i\|_\infty \leq N$, to istnieje permutacja u'_1, \dots, u'_n ciągu u_1, \dots, u_n taka, że podróż z punktu $x \in \mathbb{R}^d$ do punktu $y = x + \sum_{i=1}^n u_i$ ciągiem u'_1, \dots, u'_n odbywa się wewnątrz tunelu pomiędzy x a y o promieniu $2dN$.*

Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego wykazania wniosku, dowód jest nietrudny. Jesteśmy już gotowi do sformułowania twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Rozważmy układ n równań liniowych $Mx = y$, gdzie M jest macierzą o współczynnikach całkowitych $n \times d$, a y wektorem z \mathbb{Z}^d . Niech N będzie maksimum z wartości bezwzględnych liczb występujących w macierzy M i wektorze y . Wówczas jeśli istnieje pewne rozwiązanie tego układu w liczbach naturalnych, to istnieje również rozwiązanie $x \in \mathbb{N}^n$ takie, że $\|x\|_\infty \leq (5dN + 1)^d$.*

Zauważmy, że ograniczenie na normę rozwiązania nie zależy od liczby równań n , a jedynie od liczby zmiennych d i wielkości liczb N , i to jest właśnie główna siła twierdzenia 2. Aby udowodnić twierdzenie 2, oznaczmy kolumny macierzy M jako wektory u_1, \dots, u_d oraz $x = (x_1, \dots, x_d)$. Wówczas równanie $Mx = y$ przyjmuje postać $\sum_{i=1}^d u_i x_i = y$. Rozważmy pewne rozwiązanie tego układu, które istnieje zgodnie z założeniem twierdzenia 2. Zawiera ono x_1 wektorów u_1 , x_2 wektorów u_2 itd., aż w końcu x_n wektorów u_n . Zgodnie z wnioskiem istnieje taka permutacja x'_1, \dots, x'_m tych $m = x_1 + \dots + x_n$ wektorów, że cała podróż z punktu 0 do punktu y ciągiem x'_1, \dots, x'_m odbywa się wewnątrz tunelu z 0 do y o promieniu $2dN$. Taki tunel zawiera się cały w d -wymiarowej kostce o boku $4dN + N \leq 5dN$, na potrzeby dowodu twierdzenia 2 wystarczy nam takie zgrubne oszacowanie. Zauważmy, że jeśli w trakcie naszej podróży odwiedzimy dwa razy ten sam punkt, to możemy tę podróż skrócić, pomijając pętlę wychodzącą i wracającą do tego samego punktu, nie zmienia to oczywiście celu podróży. Postępując w ten sposób, możemy skrócić podróż ciągiem x'_1, \dots, x'_m do takiej podróży, która każdy punkt w kostce o boku $5dN$ odwiedza co najwyżej jeden raz. Punktów o współczynnikach całkowitych w kostce jest nie więcej niż $(5dN + 1)^d$, a więc nasza podróż będzie miała co najwyżej tyle kroków. Nietrudno zauważyć, że dowolna taka podróż natychmiast daje rozwiązanie równania $\sum_{i=1}^d u_i x_i = y$, gdzie $\sum_{i=1}^n x_i \leq (5dN + 1)^d$, co kończy dowód twierdzenia 2.

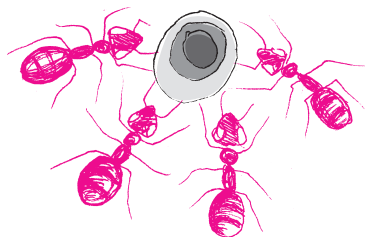


SARS-CoV-2 krąży po świecie

Zapewne pierwszy chory pojawił się na przełomie listopada i grudnia 2019 roku. W poprzednim felietonie pisałam, że na świecie odnotowano prawie 1,5 mln zakażonych, a zmarłych 87 tys. Najgorsza sytuacja była w USA: zakażonych 418 tys., zmarłych 14,2 tys. (stan w dniu 8 kwietnia). Miesiąc później na świecie było już 3,8 mln zakażonych (z tego 1,2 mln w USA), a zmarłych 271 tys. W maju najszybciej liczby te przyrastają w Rosji. Niezależnie od wiarygodności podawanych danych sytuacja – to każdy widzi – nie jest opanowana.

Za dwa miesiące najnowsze (wprawiające mnie w podziw) doświadczenia w walce z pandemią będą już rutynowe... lub przestarzałe. Nie mogę się jednak oprzeć opowiedzeniu o nich. Badania te są niezwykle i szybkie. Wszystkie wybrane przeze mnie doświadczenia jeszcze niedawno wymagały wielu lat pracy licznych zespołów.

Pierwszy wynik sekwencjonowania wirusowego RNA został opublikowany w styczniu (uniwersytety w Chinach), a w maju takich sekwencji w światowych bankach danych jest ponad tysiąc. Po wnikięciu do komórki cała nić produkuje długą poliproteinę. Aby podzielić ją na mniejsze, funkcjonalne białka, wirusowy RNA produkuje najpierw proteazę, która dokonuje cięć reszty poliproteiny na około 10 małych białek. Sugeruje to możliwość zaprojektowania leku, który hamowałby proteazę. Innym lekiem mógłby być inhibitor oddziaływania białek wypustek (korony) z komórkowym białkiem znajdującym się w błonie komórek większości ludzkich narządów, ACE2, „wpuszczającym” wirusa do komórki. W Uniwersytecie w Lubece oznaczono i opublikowano w maju dwie krystaliczne struktury proteazy wirusa, swobodnej i związanej w centrum aktywnym z inhibitorem.



Komórki eukariotyczne mają genom zamknięty w kulistej strukturze zwanej jądrem. Drożdże od wielu lat stosowane są jako modele metabolizmu eukariotycznego, a także jako modele np. niektórych ludzkich chorób.

Redakcja *Nature* stwierdza, że praca nie przeszła jeszcze przez normalny ciąg redakcyjny, ale dotyczy tak ważnej sprawy, że ją w sieci publikuje, zachęca do dyskusji i cytowania.

Jeszcze 20–30 lat temu genetycy, szukając metod namnażania dużych fragmentów obcego DNA w komórkach, rozpoczynali od prób z posłuszną i znaną na wylot bakterią *Escherichia coli*. Dołączali obcy DNA do plazmidów bakteryjnych (wektory), kolistych cząsteczek DNA odrębnych od podstawowego genomu, około 1000 razy od niego mniejszych. Takie modyfikowane plazmidy mnożyły się w komórkach bakteryjnych razem z obcym DNA. Są jednak granice zwiększania długości plazmidu: zbudowano zatem większe wektory dla eukariotycznych komórek drożdży *Saccharomyces cerevisiae*, ich DNA jest w formie 16 chromosomów. Klonowany gigant wielkością przypominał własne chromosomy drożdżowe i nazwano go YAC (*Yeast Artificial Chromosome*). Wracamy do pandemii.

W maju 2020 roku w czasopiśmie *Nature* opisano konstrukcję koronawirusa z użyciem YAC (28 autorów, głównie z Uniwersytetu w Bernie). Do komórek drożdży wprowadzono 14 fragmentów DNA wirusa SARS-CoV-2, składających się na cały jego genom (trzeba było takie fragmenty skopiować z wirusowego RNA albo wręcz syntetyzować *in vitro*). Drożdże wykonały „same” kolejny krok – połączyły te fragmenty ze sobą i z YAC, czyniąc go nosicielem genomu wirusa. Na bazie YAC komórka drożdży syntetyzowała RNA, zakaźny dla komórek ssaków. Całość manipulacji zajęła badaczom jeden tydzień.

Na zakończenie możemy pokusić się o pewne przewidywania. Jeżeli tak łatwo i szybko można skonstruować w laboratorium wirusa, to możliwe są też dowolne modyfikacje podawanego drożdżom DNA i obserwacje zmian w cechach wirusa. Ułatwi to różne techniki testowania, poszukiwania leków i szczepionek. Umysły podejrzliwe skupią się na niekoniecznie pożytecznych zastosowaniach opisanego doświadczenia. Ponieważ wszystko, co można zrobić – ludzie zrobią, prędzej czy później. Tacy już jesteśmy.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Elementarnie o twierdzeniu Brouwera

Jarosław GÓRNICKI*

*Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Tytułowe twierdzenie sformułujemy dla trójkąta (z brzegiem) na płaszczyźnie euklidesowej \mathbb{R}^2 . Jest to najsłynniejsze i najważniejsze twierdzenie w topologicznej teorii punktów stałych o rozlicznych zastosowaniach (w równaniach różniczkowych, topologii, ekonomii, teorii gier, analizie funkcjonalnej). Jego odkrycie miało ogromny wpływ na rozwój wielu gałęzi matematyki, szczególnie topologii algebraicznej.

Twierdzenie (Luitzen Brouwer, 1912 r.). *Niech Δ będzie trójkątem i $f : \Delta \rightarrow \Delta$ przekształceniem ciągłym. Wtedy istnieje taki punkt $x \in \Delta$, że $f(x) = x$.*

Punktem wyjścia będzie następująca kombinatoryczna obserwacja.

Lemat 1 (Emanuel Sperner, 1928 r.). *Niech Δ będzie trójkątem o bokach I, J, K , który jest podzielony siecią trójkątów tak, że dwa trójkąty sieci mogą stykać się wspólnym bokiem lub wspólnym wierzchołkiem. Wierzchołki sieci malujemy kolorem czerwonym, niebieskim lub zielonym (c, n, z) tak, aby każdy wierzchołek leżący w I był czerwony lub niebieski, każdy wierzchołek w J był niebieski lub zielony, a każdy wierzchołek w K był zielony lub czerwony. Wtedy wśród trójkątów sieci istnieje taki, którego wierzchołki są różnych kolorów.*

Określmy wartość „oczka” sieci, wędrując w nim przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i sumując wartości przyporządkowane krawędziom zgodnie z podaną na marginesie tabelką. Dla trójkąta sieci, którego wierzchołki są różnych kolorów, ta wartość jest równa 3 lub -3 . W każdym innym przypadku ta wartość jest równa 0.

krawędź skierowana	wartość
cc, nn, zz	0
cn, nz, zc	1
cz, nc, zn	-1

Obliczmy sumę wartości wszystkich oczek sieci. Zauważmy, że wkład każdej krawędzi wewnętrznej sieci do całej sumy jest równy 0 (bo krawędź wewnętrzna należy do dwóch trójkątów i wędrujemy po niej w przeciwnych kierunkach), a wkład każdego boku trójkąta Δ jest równy 1. Zatem suma wartości wszystkich krawędzi sieci trójkąta Δ jest równa 3. Oznacza to, że nie wszystkie oczka sieci mają wartość 0. Istnieje więc w sieci trójkąt, którego wierzchołki są różnych kolorów.

Topologiczną konsekwencją lematu Spenera jest następująca obserwacja.

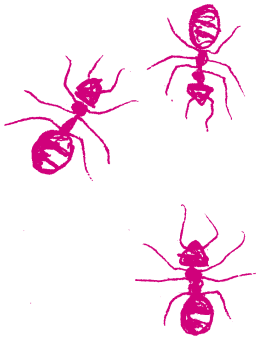
Lemat 2. *Niech Δ będzie trójkątem o bokach I, J, K . Niech A, B, C będą zbiorami domkniętymi takimi, że $I \subset A, J \subset B, K \subset C$ i $\Delta \subset A \cup B \cup C$. Wtedy $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.*

Jeżeli trójkąt Δ zawiera się w sumie dwóch zbiorów z rodziny $\{A, B, C\}$, to teza jest spełniona. Załóżmy, że trójkąt Δ nie zawiera się w sumie dwóch zbiorów z rodziny $\{A, B, C\}$. Dla każdego $i \geq 2$ dzielimy boki trójkąta Δ na i równych części, a łącząc je liniami równoległymi do boków trójkąta, otrzymujemy sieć i -tego rzędu. Każdy wierzchołek x w i -tej sieci malujemy na dowolny dopuszczalny kolor, który określa przynależność punktu x do zbiorów z rodziny $\{A, B, C\}$. Możemy to uczynić w taki sposób, aby wszystkie wierzchołki sieci w I były czerwone lub niebieskie, w J były niebieskie lub zielone, w K były zielone lub czerwone. W każdej takiej sieci (lemat 1) istnieje trójkąt o wierzchołkach w różnych kolorach: c_i, n_i, z_i . Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa zapewnia istnienie podciągu zbieżnego $c_{i_j} \rightarrow \xi$. Ponieważ średnice trójkątów kolejnych sieci dążą do 0, więc $n_{i_j} \rightarrow \xi$ i $z_{i_j} \rightarrow \xi$. Skoro $c_{i_j} \in A, n_{i_j} \in B, z_{i_j} \in C$ oraz A, B, C są zbiorami domkniętymi, więc $\xi \in A \cap B \cap C$.

Lemat 3. *Dla trójkąta Δ o bokach I, J, K nie istnieje takie przekształcenie ciągłe $f : \Delta \rightarrow \partial\Delta = I \cup J \cup K$, że $f(I) \subset I$ i $f(J) \subset J$ i $f(K) \subset K$.*

Założmy, że $f : \Delta \rightarrow \partial\Delta$ jest takim przekształceniem ciągłym, że $f(I) \subset I$ i $f(J) \subset J$ i $f(K) \subset K$. Niech $A = f^{-1}(I), B = f^{-1}(J), C = f^{-1}(K)$. Ponieważ I, J, K są zbiorami domkniętymi, f jest przekształceniem ciągłym, więc zbiory A, B, C są domknięte. Oczywiście $I \subset A, J \subset B, K \subset C$. Dla każdego $x \in \Delta$,

O różnych konsekwencjach twierdzenia Brouwera można przeczytać w Δ_{18}^{10} , a o konsekwencjach lematu Spenera w Δ_{20}^3 .



Zbiór F jest domknięty, jeśli dla dowolnego zbieżnego ciągu elementów F granica tego ciągu również należy do F .

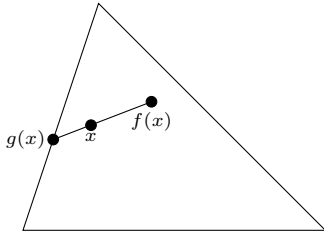
Symbol ∂ oznacza brzeg, czyli $\partial\Delta$ oznacza brzeg trójkąta Δ złożony z trzech odcinków $I \cup J \cup K$.

$f(x) \in \partial\Delta = I \cup J \cup K$, więc $A \cup B \cup C = \Delta$. Jednocześnie $I \cap J \cap K = \emptyset$, więc $A \cap B \cap C = \emptyset$. Sprzeczność z lematem 2.

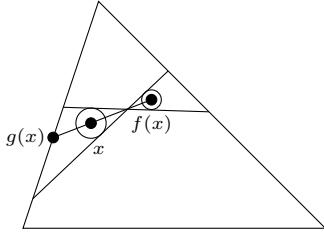
Lemat 4. Dla trójkąta Δ o bokach I, J, K nie istnieje takie przekształcenie ciągłe $f : \Delta \rightarrow \partial\Delta$, że $f(x) = x$, dla $x \in \partial\Delta$.

Załóżmy, że $f : \Delta \rightarrow \partial\Delta$ jest takim przekształceniem ciągłym, że $f(x) = x$ dla $x \in \partial\Delta$. Wtedy $f(I) \subset I$ i $f(J) \subset J$ i $f(K) \subset K$. Sprzeczność z lematem 3.

Dowód twierdzenia. Załóżmy, że $f : \Delta \rightarrow \Delta$ jest przekształceniem ciągłym i $f(x) \neq x$ dla każdego $x \in \Delta$. Dla każdego $x \in \Delta$ niech $g(x) \in \partial\Delta$ będzie punktem, w którym półprosta wychodząca z punktu $f(x)$ i przechodząca przez punkt x przecina brzeg trójkąta (rys. 1).



Rys. 1



Rys. 2

Półprosta jest określona jednoznacznie, bo $f(x) \neq x$. Tak określone przekształcenie $g : \Delta \rightarrow \partial\Delta$ jest ciągłe. Niech $\varepsilon > 0$, określamy otoczenie punktu $g(x)$ na brzegu $\partial\Delta$ o długości ε . Na tym otoczeniu budujemy stożek o wierzchołku na odcinku łączącym punkt x z $f(x)$ (rys. 2). Wybieramy $\eta > 0$ takie, że kula otwarta $B(f(x), \eta)$ zawiera się w stożku. Z ciągłości przekształcenia f istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \eta)$ i $B(x, \delta)$ zawiera się w stożku. Wtedy $g(B(x, \delta)) \subset B(g(x), \varepsilon)$. Zatem $g : \Delta \rightarrow \partial\Delta$ jest przekształceniem ciągłym takim, że $g(x) = x$ dla $x \in \partial\Delta$. Sprzeczność z lematem 4.

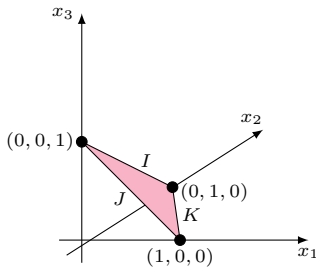
W 1974 roku Mark Yoseloff zauważył, że z twierdzenia Brouwera wynika lemat Spernera (punkt stały przekształcenia f musi należeć do trójkąta sieci, którego wierzchołki są różnych kolorów). Oznacza to, że wszystkie wyżej podane lematy są równoważnikami twierdzenia Brouwera.

Twierdzenie Brouwera można wykazać bezpośrednio z lematu 1.

Drugi dowód twierdzenia. Niech

$$\Delta = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geq 0 \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 1\}, \quad (\text{rys. 3}).$$

Załóżmy, że $f : \Delta \rightarrow \Delta$ jest przekształceniem ciągłym takim, że $f(x) \neq x$ dla każdego $x \in \Delta$. Ponieważ dla nieujemnych wartości x_k oraz $f(x_k)$, $\sum_k x_k = 1$ i $\sum_k f(x_k) = 1$, więc z warunku $f(x) \neq x$ wynika, że przynajmniej jedna z współrzędnych $f(x_k) - x_k$, $k = 1, 2, 3$, punktu $f(x) - x$ musi być ujemna i przynajmniej jedna musi być dodatnia.



Rys. 3

Dla każdego $i \geq 2$ dzielimy boki trójkąta Δ na i równych części, a łącząc je liniami równoległymi do boków trójkąta, otrzymujemy sieć i -tego rzędu. Poszczególnym wierzchołkom sieci przypiszemy kolor zielony (= 1), czerwony (= 2), niebieski (= 3) według następującej reguły: kolor wierzchołka u określa najmniejszy indeks k , dla którego k -ta współrzędna punktu $f(u) - u$ jest ujemna.

Oznaczmy boki trójkąta Δ jak na rysunku 3. Jeśli wierzchołek sieci u leży na boku I , to $u_1 = 0$, więc pierwsza współrzędna punktu $f(u) - u$ nie może być liczbą ujemną, czyli taki punkt u nie otrzyma koloru zielonego (1). Analogicznie wierzchołki sieci z boku J nie otrzymają koloru czerwonego (2), a wierzchołki sieci z boku K nie otrzymają koloru niebieskiego (3). W szczególności wierzchołek $(1, 0, 0)$ otrzyma kolor zielony, wierzchołek $(0, 1, 0)$ kolor czerwony, wierzchołek $(0, 0, 1)$ kolor niebieski. Takie kolorowanie wierzchołków sieci jest zgodne z podanym w lemacie 1. Zatem na podstawie lematu 1 w każdej sieci i -tego rzędu istnieje trójkąt, którego wierzchołki są różnych kolorów: c_i, n_i, z_i . Na podstawie twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje podciąg zbieżny $c_{i_j} \rightarrow \xi$. Ponieważ średnice trójkątów kolejnych sieci dążą do 0, więc również $n_{i_j} \rightarrow \xi$ i $z_{i_j} \rightarrow \xi$.

Wówczas z ciągłości przekształcenia f , $f(\xi_1) \leq \xi_1$, $f(\xi_2) \leq \xi_2$ i $f(\xi_3) \leq \xi_3$. Oznacza to, że żadna ze współrzędnych punktu $f(\xi) - \xi$ nie jest liczbą dodatnią, a to jest sprzeczne z warunkiem $f(x) \neq x$.

Twierdzenie Brouwera pozostaje prawdziwe w przestrzeniach euklidesowych \mathbb{R}^n (najczęściej jest ono formułowane dla kul):

Niech $B^n \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętą kulą i $f : B^n \rightarrow B^n$ przekształceniem ciągłym. Wtedy istnieje $x \in B^n$ takie, że $f(x) = x$.

Rezultat ten nie przenosi się do przestrzeni o nieskończonym wymiarze. W przestrzeni c_0 ciągów rzeczywistych zbieżnych do zera z normą $\|x = (x_1, x_2, \dots)\| = \sup_{i \geq 1} |x_i|$ dla kuli domkniętej $B = \{x \in c_0 : \|x\| \leq 1\}$ i przekształcenia ciągłego $f : B \rightarrow B$ danego wzorem $f(x_1, x_2, \dots) = (1, x_1, x_2, \dots)$ jedynym punktem stałym jest $(x_1, x_2, \dots) = (1, 1, \dots)$, ale $(1, 1, \dots) \notin c_0$.

Twierdzenie Brouwera rozszerzył (na nieskończenie wymiarowe przestrzenie Banacha) Juliusz Schauder w 1930 roku, ale to całkiem inna historia. . .

Stara Delta

W ramach cyklu *Stara Delta* prezentujemy przedruki archiwalnych artykułów z naszego miesięcznika, skupiając się na latach 70., 80. i 90. XX wieku, choć artykuły młodsze też się mogą pojawić. Wybór jest subiektywny, a kryteria jego dokonania naprawdę różnorodne.

Wspólnym mianownikiem tego cyklu jest to, że zawsze pytamy współczesnych naukowców o komentarz do proponowanego tekstu. Tu też nic redakcja nie narzuca. Chętnie usłyszymy zarówno polemikę, uwagi merytoryczne, jak i czysto emocjonalne impresje.

Dziś prezentujemy: *Uniwersalny szyfr* (autor trudny do ustalenia) (Δ_{80}^1) oraz *Czy przez telefon można grać w karty?* autorstwa Jerzego Rylla (Δ_{84}^{12}).

Komentarz współczesny

Kilka lat temu zapytałem Mordechaję „Motiego” Yunga (obecnie pracuje jako badacz naukowy w Google) o to, na ile zmienił się obraz badań naukowych z dziedziny kryptologii od czasów, gdy zaczynał, a więc od lat 80. W swej odpowiedzi (wyrażonej dość komunikatywną polszczyzną!) jako największą różnicę wskazał liczbę publikowanych prac. Stwierdził, że w początkach swojej kariery był w stanie, bez większego wysiłku, śledzić na bieżąco WSZYSTKIE artykuły dotyczące kryptologii, które ukazywały się na świecie. Dziś natomiast ciężko byłoby młodemu badaczowi przebrnąć w ciągu roku choćby przez połowę publikacji prezentowanych na jednej dużej konferencji kryptologicznej, których organizuje się przecież co najmniej kilka w roku.

Powyzsza opinia Motiego dobrze koresponduje z obecnością kryptologii w *Delcie*. Do końca lat 80. (a więc przez 190 numerów) w *Delcie* ukazały się tylko dwa krótkie teksty dotyczące zagadnień kryptologicznych

– oba prezentujemy w tym numerze. Wówczas była to dziedzina dostarczająca przede wszystkim eleganckich (często zaskakujących) wyników-ciekawostek, kojarzonych głównie ze sztuczkami z teorii liczb. W takim też duchu utrzymane są oba dziś prezentowane wyimki ze *Starej Delt*.

Oczywiście wraz z rozwojem komputerów i sieci komputerowych znaczenie kryptologii wzrosło niebotycznie. Dziś jest to ogromna gałąź informatyki teoretycznej. Również w *Delcie* artykułów z tej dziedziny w późniejszym okresie było znacznie więcej. Ostatnio prezentowaliśmy nawet niemal roczny cykl *A jednak się da* (od Δ_{18}^{10} do Δ_{19}^8), poświęcony w całości kryptologii. Co ciekawe: oba zagadnienia z lat 80. były obecne w tym cyklu (choć autorzy wybierali tematy zupełnie niezależnie), a artykuł otwierający cykl dotyczył dokładnie tego samego tematu, co pierwszy artykuł kryptologiczny w *Delcie* z roku 1980!

Tomasz KAZANA

Uniwersalny szyfr

W naszych czasach coraz więcej rzeczy staje się tajnych. To dlatego, że nasze życie jest coraz bardziej uzależnione od setek i tysięcy drobiazgów, a kontrolę nad nimi każdy chce zachować dla siebie. Przyjdzie może czas, kiedy na posiadanie tablic logarytmicznych wymagane będzie zezwolenie. Żarty? Mam nadzieję. Na razie grozi nam utajnienie tablic rozkładów liczb na czynniki pierwsze. A oto dlaczego. Każdy szyfr ma jedną zasadniczą wadę: jeżeli znamy sposób szyfrowania, to i deszyfrowania. Dlatego im więcej osób może przesyłać nam zaszyfrowane wiadomości, tym łatwiej policja rozpracuje naszą siatkę. Nawet, gdy używamy tak doskonałego szyfru, jak ten opisany w przygodach dzielnego wojaka Szejka (tom III, „Przesławne lanie”). Każdy z nas bez wahania założyłby się, że znajomość sposobu szyfrowania umożliwia odczytanie każdej zaszyfrowanej wiadomości. A tymczasem rzecz ma się trochę inaczej. Oto jak grupa osób może ustalić system szyfrów tak, by

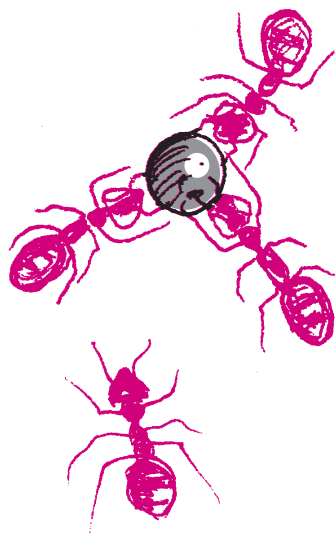
1) każda z osób mogła ogłosić publicznie (na przykład w gazecie): adresowane do mnie wiadomości proszę szyfrować tak a tak. Szyfrowaną wiadomość (adresowana do jednej z osób tej grupy) może wysłać dowolna, niekoniecznie wtajemniczona osoba. Dowolna osoba może ogłosić: przystępuję do spółki; proszę przeznaczone dla mnie wiadomości szyfrować tak a tak,

2) oraz by zaszyfrowanego komunikatu nie mógł odczytać nikt poza adresatem.

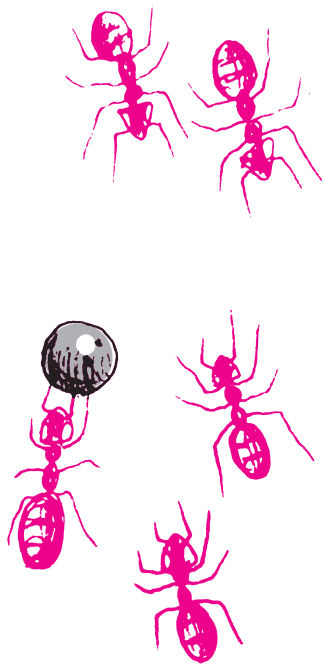
Do zbudowania takiego szyfru posłużono się teorią liczb. Oto nieskomplikowane twierdzenie: *Jeżeli liczba naturalna N jest iloczynem dwu liczb pierwszych p, q , to dla $M = (p - 1)(q - 1) + 1$ i dla każdego $n < N$ zachodzi*

$$n^M \equiv n \pmod{N};$$

tj. n^M oraz n dają z dzielenia przez N tę samą resztę.



Stara Delta



Każda z osób, chcących mieć własny szyfr, wybiera sobie dwie dość duże liczby pierwsze (co najmniej kilkudziesięciocyfrowe) p, q , oblicza ich iloczyn N , oraz liczbę $M = (p - 1)(q - 1) + 1$. Do wiadomości ogólnej podaje N i pewien dzielnik liczby M , oznaczmy go przez K . Dla siebie zachowuje rozkład N na p i q oraz liczbę M . Gdy nadawca NAD chce wysłać wiadomość do odbiorcy ODB, postępuje tak. Zamienia tekst słowny na ciąg cyfr w jakiś standardowy, ustalony i jawny sposób, np. $A = 1, B = 2$ itd. Otrzymaną tak dużą liczbę (komunikat nie może być długi) podnosi do potęgi K_{ODB} i bierze resztę z dzielenia przez N_{ODB} . Potrzebna jest do tego maszyna matematyczna, ale nie ponadto. Tak zakodowaną wiadomość (będącą teraz liczbą mniejszą niż N_{ODB}) wysyła się do odbiorcy lub publikuje w gazecie. Odbiorca winien podnieść tę liczbę do potęgi $\frac{M_{\text{ODB}}}{K_{\text{ODB}}}$ – otrzyma wtedy ciąg liczb wysłany przez nadawcę. Przetworzenie go na tekst słowny odbywa się we wspomniany jawny i standardowy sposób. Co w tym takiego rewelacyjnego? – zapytacie. A to, że podniesienie nawet bardzo dużej liczby do bardzo dużej potęgi M jest dla maszyny matematycznej mało pracochłonne, zwłaszcza że wszystkie obliczenia robi się i tak modulo N . Wynik dostaje się w ułamku sekundy. Osoba postronna nie zna jednak liczby M ; mogłaby ją obliczyć, znając p i q . Ale zna tylko N , równe pq . Gdy p i q mają po kilkadziesiąt cyfr, N ma sto kilkadziesiąt. Znalezienie rozkładu takiej liczby na czynniki nawet najszybciej działającej maszynie zajęłoby (przy obecnym stanie techniki, informatyki i organizacji maszyn cyfrowych) wiele, wiele lat pracy. Szyfr ten nie daje się złamać najgroźniejszą bronią: analizą statystyczną, rozpracowującą szybko wszystkie szyfry polegające na stałym przyporządkowaniu litera-liczba. Autorzy tego szyfru napisali (w *Scientific American*), że są niezbitnie pewni, iż nikt nie potrafi odczytać zaszyfrowanej przez nich do samych siebie wiadomości.

Czy przez telefon można grać w karty?

Na podstawie artykułu *Poker bez kart* z książki „The Mathematical Gardner” (A. Shamir, R. Rivest, L. Adelman).

O telefonicznej czy korespondencyjnej grze w szachy słyszał każdy. Ale jak grać w ten sposób w brydża lub w pokera? Problemem jest oczywiście rozdawanie kart. Przypuśćmy, że grają dwie osoby i mają rozdać po pięć kart. Rozdać to znaczy:

Każdy ma wiedzieć, jakie pięć kart dostał.

Karty otrzymane przez graczy są różne.

Żaden z graczy nie ma dodatkowej informacji o kartach partnera, ale po grze może sprawdzić, czy partner nie oszukiwał, czy grał swoimi kartami.

Każdy rozkład kart jest jednakowo prawdopodobny.

Wszystko to należy wykonać porozumiewając się wyłącznie przez telefon i bez pomocy osób trzecich. Oto sposób umożliwiający w praktyce rozdawanie kart (liczb naturalnych $1, \dots, 52$) przez telefon. Gracze wybierają najpierw dwie rodziny funkcji o argumentach i wartościach naturalnych: $\mathcal{K} = \{K_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ – funkcje kodujące i $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ – funkcje dekodujące (zbiór Ω nazywamy zbiorem kodów – powinien on mieć dużo elementów). Rodziny \mathcal{K} i \mathcal{D} muszą mieć następujące własności:

Dziedzina każdej funkcji K_α zawiera zbiór $\{1, \dots, 52\}$.

Dla dowolnego kodu α funkcja \mathcal{D}_α jest odwrotna do funkcji K_α (rozszyfrowuje ona sygnał zakodowany za pomocą funkcji K_α), tzn. $D_\alpha(K_\alpha(n)) = n$ dla liczb naturalnych z dziedziny funkcji K_α .

Dla dowolnych kodów α i β funkcje K_α i K_β są przemienne, tzn. $K_\alpha(K_\beta(n)) = K_\beta(K_\alpha(n))$.

Różne funkcje kodujące mają rozłączne zbiory wartości.

Znajomość liczb naturalnych n i $K_\alpha(n)$ nie daje *praktycznie* możliwości znalezienia kodu α .

Rozdawanie kart jest już proste. Gracze wybierają (w tajemnicy przed sobą) kody, np. A – kod α , B – kod β . Gracz A koduje liczby $1, \dots, 52$ i przesyła je (w dowolnej kolejności) graczowi B . Ten wybiera w pierw pięć kart dla A : $K_\alpha(a_1), \dots, K_\alpha(a_5)$ i odsyła mu je – A musi je rozszyfrować funkcją D_α . Następnie wybiera pięć kart dla siebie: $K_\alpha(b_1), \dots, K_\alpha(b_5)$, szyfruje je funkcją K_β i wysyła do A . Gracz A rozszyfrowuje je funkcją D_α i odsyła do gracza B (tzn. przesyła $D_\alpha(K_\beta(K_\alpha(b_1))) = D_\alpha K_\alpha K_\beta(b_1) = K_\beta(b_1)$). Gracz B musi jeszcze rozszyfrować je funkcją D_β i ... karty zostały rozdane.

Po grze partnerzy ujawniają swoje kody. Z drugiej i czwartej własności rodzin \mathcal{K} i \mathcal{D} wynika, że jeśli $K_{\alpha_1}(m_1) = K_{\alpha_2}(m_2)$, to $\alpha_1 = \alpha_2$ i $m_1 = m_2$. Tak więc gracze nie mogą oszukiwać i podawać innego układu kart i innego kodu.

Powyższy opis umożliwia w *praktyce* rozdawanie kart. *Teoretycznie* bowiem jest to niemożliwe.

Jerzy RYLL

Problem Parzystkowa i jego uogólnienia

Karol GRYSZKA*

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W mieście Parzystkowo zacy burmistrz postanowił w nietypowy sposób zaktywizować społeczeństwo. Zarządził utworzenie stowarzyszeń, które wykonywać będą powierzone im zadania. W trakcie zebrania z Radą Miasta uchwalono następujące zasady:

1. każde stowarzyszenie wyznaczone jest jednoznacznie przez swój skład (innymi słowy nie ma dwóch stowarzyszeń o takim samym składzie osobowym),
2. każde stowarzyszenie ma parzystą liczbę uczestników,
3. część wspólna każdych dwóch stowarzyszeń tworzy ugrupowanie złożone z parzystej liczby uczestników.

Warunek 1, 2 oraz 3 dopuszczają istnienie pustego stowarzyszenia!

Rada rada, burmistrz zadowolony... A mieszkańcy? Bardzo chętni do dzielenia się na stowarzyszenia. Okazało się jednak, że to, co łatwe w teorii, w praktyce może być trudne. Powstał bowiem niemały chaos – tym większy, im więcej stowarzyszeń już zostało powołanych. Wszystko dlatego, że mieszkańcy chcieli utworzyć ich jak najwięcej. Zbadajmy tę sprawę.

Opisany powyżej problem zwany *problemem Parzystkowa* (*Eventown problem*) można sformułować następująco. Niech P będzie zbiorem n -elementowym oraz niech S_1, \dots, S_m będą jego podzbiórami. Żądamy od tych podzbiorów, żeby:

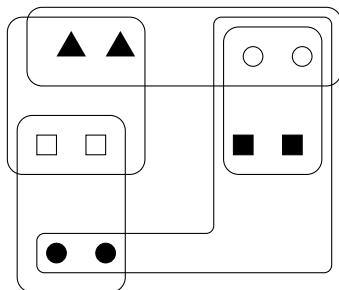
1. $S_i \neq S_j$ dla $i \neq j$,
2. $2 \mid |S_i|$ dla dowolnego i ,
3. $2 \mid |S_i \cap S_j|$ dla $i \neq j$,

gdzie $|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X . Zachodzi następujące oszacowanie na liczbę ugrupowań.

Twierdzenie 1. *Maksymalna liczba stowarzyszeń w Parzystkowie liczącym n mieszkańców wynosi co najmniej $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Dowód jest prosty i konstruktywny.

Dowód. Załóżmy na początek, że $n = 2k$ dla pewnego k . Dzielimy zbiór $2k$ -elementowy na k różnych podzbiorów 2-elementowych. Każde stowarzyszenie budujemy teraz z tych par (rysunek obok). Jak widać, takie stowarzyszenia spełniają wszystkie postulowane warunki.



Ponieważ par jest k , wszystkich podzbiorów jest 2^k . Znaleźliśmy zatem $2^k = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ stowarzyszeń, co kończy dowód w przypadku $n = 2k$. Jeśli teraz $n = 2k + 1$, to odsuwamy na bok jednego mieszkańca i rozważamy problem dla parzystej liczby mieszkańców, otrzymując $2^k = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ stowarzyszeń. \square

Zauważamy, że próba manipulowania parami nie prowadzi do utworzenia nowego stowarzyszenia ponad te zdefiniowane przez podzbiory par. Okazuje się ponadto, że jest to najlepszy możliwy podział – nierówność w twierdzeniu 1 można zastąpić równością.

Twierdzenie 2. *Maksymalna liczba stowarzyszeń w Parzystkowie liczącym n mieszkańców wynosi dokładnie $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Niełatwy dowód tego twierdzenia pomijamy. Oryginalny problem Parzystkowa można oczywiście modyfikować. Niech $m(n, \ell)$ oznacza maksymalną liczbę stowarzyszeń w mieście o n mieszkańcach, przy następujących zasadach:

1. $S_i \neq S_j$ dla $i \neq j$,
2. $\ell \mid |S_i \cap S_j|$ dla $i \neq j$.

Zauważmy, że można podzielić mieszkańców na zbiory złożone z $\lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor$ osób i rozważyć stowarzyszenia jako podzbiory tych grup (tak jak w Parzystkowie). Wynika z tego następujące oszacowanie.

Twierdzenie 3. $m(n, \ell) \geq 2^{\lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor}$.

Powyższe szacowanie jest elementarne, jednak nie jest znane ogólne, dokładne rozwiązanie.

Problem Nieparzystkowa

Pokażemy teraz, że w pewnych sytuacjach potrafimy podać dokładną odpowiedź. Rozważmy problem miasta Nieparzystkowo:

1. $S_i \neq S_j$ dla $i \neq j$,
2. $2 \nmid |S_i|$ dla dowolnego i ,
3. $2 \mid |S_i \cap S_j|$ dla $i \neq j$.

Ciało to struktura algebraiczna, w której możliwe jest wykonywanie dwóch operacji umownie zwanych dodawaniem oraz mnożeniem. Możemy również zdefiniować operację dzielenia przez liczbę różną od zera oraz zachodzą prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania. Znanym każdemu przykładem ciała jest zbiór liczb rzeczywistych (jeśli liczba jest niezerowa, to możemy przez nią dzielić). Przykładem ciała skończonego jest \mathbb{Z}_p – zbiór liczb od 0 do $p-1$ z działaniami dodawania i mnożenia liczb całkowitych modulo p .

Ponownie pytamy o maksymalną liczbę stowarzyszeń. Zaczniemy tym razem od podania górnego szacowania. Niech \mathbb{F}_q będzie ciałem o q -elementach. Zbiór \mathbb{F}_q^n to zbiór wektorów (a_1, \dots, a_n) , gdzie każde $a_i \in \mathbb{F}_q$. W tym zbiorze naturalnym działaniem jest dodawanie wektorów po współrzędnych. Możemy również rozważyć działanie mnożenia liczby przez wektor. To znaczy jeśli $\alpha \in \mathbb{F}_q$, to

$$\alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\alpha \cdot a_1, \dots, \alpha \cdot a_n).$$

Powiemy, że wektory v_1, \dots, v_k są **liniowo niezależne** w \mathbb{F}_q^n , jeśli układ równań

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = (0, \dots, 0)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. W \mathbb{F}_q^n możemy również rozważyć **iloczyn skalarny** dwóch wektorów $a = (a_1, \dots, a_n)$ oraz $b = (b_1, \dots, b_n)$, to jest liczbę

$$a \cdot b = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Zauważmy, że jeżeli wśród wektorów v_1, \dots, v_k są dwa wektory równe lub jeden z wektorów jest złożony z samych zer, to wektory te nie są liniowo niezależne.

Lemat. *Jeżeli $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{F}_q^n$ oraz wektory te są liniowo niezależne, to $k \leq n$.*

Dowód. Zauważmy, że każdy wektor $a \in \mathbb{F}_q^n$ można zapisać jednoznacznie jako $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, gdzie w wektorze e_j na j -tym miejscu stoi 1, na pozostałych zaś 0. W szczególności wektory e_1, \dots, e_n są liniowo niezależne. Pokażemy teraz, że żaden inny układ wektorów liniowo niezależnych nie może być liczniejszy niż n .

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

Jeśli $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}_q$, to dla $a \in \mathbb{Z}_q$ napis $\frac{1}{a}$ należy rozumieć jako mnożenie $1 \cdot a^{-1}$. To ostatnie zaś to liczba odwrotna do a , czyli taka liczba, dla której $a \cdot a^{-1} = 1$. Dla przykładu jeśli $q = 7$, to $6^{-1} = 6$, gdyż $6 \cdot 6 = 1 \pmod{7}$; podobnie $2^{-1} = 4$, gdyż $2 \cdot 4 = 1 \pmod{7}$.

Załóżmy, że $k > n$. Z uczynionej przed chwilą uwagi każdy z v_i można zapisać jako sumę $v_i = \alpha_{i,1} e_1 + \dots + \alpha_{i,n} e_n$, wiemy w szczególności, że v_1 także można. Załóżmy teraz bez straty ogólności, że $\alpha_{1,1} \neq 0$ (gdyby tak nie było, to wystarczy przenumerać wektory e_1, \dots, e_n do otrzymania żądanej cechy). Wtedy również

$$e_1 = \frac{1}{\alpha_{1,1}} v_1 - \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1}} e_2 + \dots - \frac{\alpha_{1,n}}{\alpha_{1,1}} e_n,$$

zatem każdy wektor, który można zapisać jako kombinację wektorów e_1, \dots, e_n , można również zapisać jako kombinację wektorów v_1, e_2, \dots, e_n . W szczególności v_2 można tak zapisać. Zauważmy, że przynajmniej jeden ze współczynników stojących przy e_2, \dots, e_n w zapisie $v_2 = \alpha_{2,1} v_1 + \alpha_{2,2} e_2 + \dots + \alpha_{2,n} e_n$ jest niezerowy; w przeciwnym przypadku v_2 byłby liniowo zależny od v_1 . Podobnie jak poprzednio, można założyć, że $\alpha_{2,2} \neq 0$, oraz uzasadnić, że każdy wektor, który jest kombinacją wektorów v_1, e_2, \dots, e_n , jest też kombinacją wektorów $v_1, v_2, e_3, \dots, e_n$.

Postępując analogicznie jak powyżej dla v_i ($i = 3, 4, 5$) dochodzimy do momentu, w którym wszystkie wektory e_1, \dots, e_n zastąpiliśmy przez v_1, \dots, v_n . Ponieważ założyliśmy, że $k > n$, zatem wektor v_{n+1} , który potrafimy zapisać za pomocą wektorów e_1, \dots, e_n , potrafimy również zapisać za pomocą wektorów v_1, \dots, v_n . Jest to jednak sprzeczne z liniową niezależnością wektorów.

Otrzymana powyżej sprzeczność oznacza, że warunek $k > n$ jest niemożliwy do spełnienia. \square

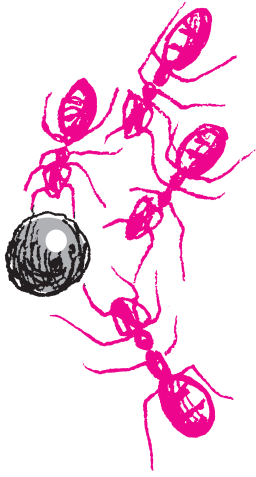
Twierdzenie 4. *W Nieparzystkowie o n mieszkańcach można utworzyć co najwyżej n stowarzyszeń.*

Dowód. Rozważmy zbiór \mathbb{F}_2^n . Każde stowarzyszenie S reprezentujemy przez jego wektor charakterystyczny 1_S w \mathbb{F}_2^n , to jest taki wektor, w którym jeśli $P = \{1, \dots, n\}$, to i -ta współrzędna wektora 1_S jest równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $i \in S$. W przeciwnym przypadku i -ta współrzędna jest równa 0. Powiedzmy, że tych wektorów jest k .

Modelem \mathbb{F}_2 jest \mathbb{Z}_2 , w którym działania dodawania i mnożenia definiują tabelki poniżej.

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Jeśli $n = 6$ oraz $S = \{1, 4, 6\}$, to $1_S = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$.



Wektory postaci 1_S są liniowo niezależne. Aby to uzasadnić, załóżmy, że

$$z = \alpha_1 1_{S_1} + \dots + \alpha_k 1_{S_k} = 0,$$

i rozważmy iloczyn skalarny $1_{S_\ell} \cdot z$ dla pewnego S_ℓ (dowolnego; $\ell \in \{1, \dots, k\}$). Zauważmy, że:

- $1_{S_i} \cdot 1_{S_i} = 1$ (liczba członków stowarzyszenia jest nieparzysta) – iloczyn skalarny obliczamy modulo 2 (patrz tabele na marginesie),
- $1_{S_i} \cdot 1_{S_j} = 0$ dla $i \neq j$ (część wspólna stowarzyszeń jest parzysta).

Wynika z tego, że

$$0 = z \cdot 1_{S_\ell} = \alpha_1 1_{S_1} 1_{S_\ell} + \dots + \alpha_k 1_{S_k} 1_{S_\ell} = \alpha_\ell.$$

Rozważając kolejne $\ell = 1, \dots, k$, otrzymujemy $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, a więc wektory $1_{S_1}, \dots, 1_{S_k}$ są liniowo niezależne. Z lematu wynika teraz, że $k \leq n$.

Ostatni krok to pokazanie, że można utworzyć dokładnie n stowarzyszeń. W tym celu wystarczy, aby każde stowarzyszenie złożone było z jednego mieszkańca. □

Na zakończenie

Wróćmy do ogólnego problemu. Jak już wspomnieliśmy, nie istnieje ogólny wzór na $m(n, \ell)$. W twierdzeniu 3 wskazane zostało dolne oszacowanie. Ciekawe natomiast jest także znalezienie szacowania górnego. Wskazujemy je w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 5. Zachodzą nierówności:

- $m(n, \ell) \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \Omega(\ell)n$, gdzie $\Omega(\ell)$ jest krotnością czynników pierwszych w rozkładzie liczby ℓ .
- $m(n, \ell) \leq 2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2\ell} \rfloor} \binom{n}{i} + \Omega(\ell)n$,
- dla $\ell \leq 166$ zachodzi $m(n, \ell) \geq (8\ell)^{\lfloor \frac{n}{4\ell} \rfloor}$,
- dla $\ell \geq 167$ zachodzi $m(n, \ell) \geq 2^{8 \lfloor \frac{n}{4\ell} \rfloor}$.

Ciekawostką jest fakt, że w dowodzie trzeciego z powyższych oszacowań wykorzystuje się tak zwane macierze Hadamarda (macierze kwadratowe o wymiarze $4\ell \times 4\ell$ o tej własności, że ich wyrazami są tylko 1 oraz -1 i iloczyny skalarne wszystkich możliwych par wierszy są równe 0). Wiadomo, że takie macierze istnieją dla wszystkich $\ell \leq 166$ oraz dla wszystkich liczb postaci 2^k , gdzie k jest dodatnią liczbą naturalną.

Twierdzenie 5. pochodzi z pracy P. Frankl, A.M. Odlyzko, *On Subsets with Cardinalities of Intersections Divisible by a Fixed Integer*, European Journal of Combinatorics, 4 (1983), 215–220.

$$24 = 2^3 \cdot 3 \implies \Omega(24) = 3 + 1 = 4$$

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \implies \Omega(600) = 3 + 1 + 2 = 6$$

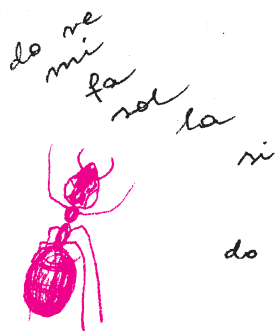
Matematyczny kącik muzyczny I: Pitagorejczycy i matematyczne początki muzyki

*Student matematyki, MIM UW

Konstanty KOSTRZEWSKI*

Wiele jest wersji tej historii – najpopularniejsza mówi, że przechodząc obok warsztatu kowalskiego, Pitagoras usłyszał harmonijne współbrzmienia, jakie wydawały kowadła, co miało rzekomo wynikać z różnicy w ciężarze młotów. To oczywiście nieprawda – wysokość dźwięku zależy od budowy kowadła, a nie młota. Inną wersją jest historia z przywiązywaniem różnych ciężarków do strun, również fałszywa – częstotliwości tonów harmonicznie drgającej struny wyrażają się dość skomplikowanym wzorem, a nie tak prostymi stosunkami liczb naturalnych, jak twierdzili Pitagorejczycy. Prawdopodobnie zjawisko to odkrył Pitagoras za pomocą monochordu, czyli instrumentu o jednej strunie.

Jak przekazują nam starożytni, zaczęło się od przypadkowego odkrycia przypisywanego Pitagorasowi – otóż miał on spostrzec, że jeśli stosunek długości dwóch strun jest równy stosunkowi dwóch małych liczb naturalnych, to współbrzmia one harmonijnie. Jeżeli jedna ze strun będzie dwa razy krótsza od drugiej (stosunek 2 : 1), to będzie brzmiała oktawę wyżej (według obecnej nomenklatury interwałów). Gdy stosunek długości wynosi 3 : 2, otrzymamy interwał kwinty czystej, a 4 : 3 – kwarty czystej. Co więcej, budując od pewnego dźwięku w pierw kwintę w górę, a od otrzymanego kwartę w górę, otrzymujemy dźwięk brzmiący oktawę wyżej od bazowego (o czym nietrudno się przekonać, mnożąc proporcje kwinty i kwarty). Jeśli natomiast wychodząc od pewnego dźwięku, zagramy dwa dźwięki odpowiednio kwartę i kwintę wyżej, to różnica pomiędzy nimi będzie całym tonem o proporcji 9 : 8. Półton zaś rozumiano jako pozostałość po odjęciu od kwarty dwóch całych tonów ($\frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9}$) – daje to proporcję 256 : 243. Już starożytni byli jednak świadomi, że nie jest to dokładnie połowa całego tonu.

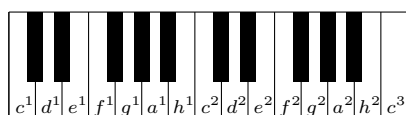


Powiązanie muzyki z liczbami – poznanie dźwięków za pomocą liczb – skłoniło Pitagorasa do odważnego twierdzenia, że wszystko jest liczbą (liczba jako ἀρχή – zasada wszystkich rzeczy). Odtąd Pitagoras widział liczby we wszystkim – nie tylko w obiektach fizycznych, ale i pojęciach takich, jak sprawiedliwość czy właściwa pora. Skoro zaś pryncypia matematyki były przez Pitagorejczyków uważane za pryncypia wszystkich rzeczy, miało to istotny wpływ na rozwój tej dziedziny nauki, wspierany później przez Platona i Arystotelesa w, odpowiednio, *Akademii* i *Lykejonie*.

Proste interwały występują w przyrodzie

Dźwięk drgającej struny rozkłada się na szereg tzw. *tonów prostych* – struna drga zarówno w całej swej długości, jak i na każdej z połów, części trzecich itd. Stąd oprócz dźwięku podstawowego słyszalne są tzw. *aliquoty*, czyli dźwięki pozostające w stosunkach do bazowego kolejno 2 : 1, 3 : 1, 4 : 1 itd. Widać od razu, że kolejne aliquoty tworzą wspomniane wcześniej interwały.

Komat pitagorejski



Ściągawka pianistyczna. Interwał między c^i oraz c^{i+1} odpowiada oktawie, między c^i oraz g^i kwincie, między c^i oraz f^i kwarcie, a między c^i oraz e^i tercji wielkiej.
Dodanie końcówki *-is* oznacza kolejny klawisz na klawiaturze, czarny lub biały. Czyli na przykład c^{is1} to pierwszy od lewej czarny klawisz na powyższym rysunku.

Wnikliwy Czytelnik zapewne zauważy, że wychodząc od pewnego dźwięku bazowego i budując od niego szereg oktaw i szereg kwint, żaden z nowo utworzonych dźwięków nie wystąpi jednocześnie w obu tych szeregach. Wynika to z prostego faktu, że nie istnieją liczby całkowite k, l takie, że $2^k = \left(\frac{3}{2}\right)^l$. Przyglądając się jednak klawiaturze współczesnego fortepianu, dostrzeżemy, że pierwsze takie zejście następuje po 7 oktawach (12 kwintach), gdyż „pianistyczna” oktawa to odległości między 12 kolejnymi klawiszami (wliczając klawisze czarne), a „pianistyczna” kwinta to odległość między 7 klawiszami. I faktycznie, w naszych ciągach pitagorejskich interwałów w tym miejscu występuje niewielka różnica – stosunek $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 \approx 1,01364$ (zwany *komatem pitagorejskim*) stanowi niecałą $\frac{1}{4}$ (w sensie „pierwiastek 4. stopnia”) „pianistycznego” półtonu. Jest więc to różnica słyszalna. Gdybyśmy w fortepianie nastroili struny $c^1, g^1, d^1, a^1, e^1, h^1, fis^1, cis^1, gis^1, dis^1, ais^1, eis^1, his^1$ tak, by interwał między dwoma kolejnymi dźwiękami był kwintą czystą (z ewentualnym sprowadzeniem do oktawy pomiędzy c^1 i c^2), to okazałoby się, że dźwięk his^1 jest wyższy niż dźwięk c^2 .

Pierwszą wzmiankę o komacie pitagorejskim znajdujemy u Euklidesa w dziele „Podział kanonu” (kanon to inna nazwa na monochord). Zauważył on mianowicie, że $262144 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^6 = 531441$ oraz że $262144 \cdot \frac{2}{1} = 524288$, czyli interwał oktawy jest mniejszy od złożenia sześciu całych tonów (z których każdy jest złożeniem dwóch kwint pomniejszonym o oktawę).

Myśląc o greckich interwałach, powinniśmy tak naprawdę zarzucić myślenie współczesną klawiaturą fortepianu, którego dźwięki stroi się inaczej – temu problemowi poświęcimy następny artykuł. Trudno powiedzieć, czy Pitagorejczycy rozważali problem instrumentu o stałym stroju, jakimi są instrumenty klawiszowe. Ówczesne instrumenty były przede wszystkim strunowe (jak np. kithara, lira czy harfa) lub dęte (najpopularniejszy był aulos, który można luźno kojarzyć z parą obojów), toteż wszelkie „niedoskonałości” wynikające ze stałego umiejscowienia otworów w piszczałce lub naciągu strun można było niwelować, nie przesłaniając do końca otworu lub palcem skracając strunę.

Nam, przesiąkniętym obecną muzyką i sposobem strojenia instrumentów z pewnością trudno byłoby przekonać się do zupełnie innego myślenia muzycznego Greków – ich muzyka wydawałaby się nam po prostu fałszywa i niezrozumiała.

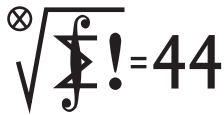
W ogóle Grecy mieli inne podejście do interwałów niż my współcześnie. Rozważali i stosowali takie interwały, jak $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ czy nawet $\frac{3}{8}$ całego tonu, tworząc na ich podstawie różne rodzaje tetrachordów – sekwencji czterech dźwięków; z tetrachordów budowano następnie skale i systemy. Różnica w wielkości interwałów miała wpływ na barwę skali, przez co i charakter utworu, który był na niej oparty. Z czasem jednak niektóre z nich zanikały, lecz sama koncepcja mikrointerwałów trwała jeszcze w VII w. n.e. w monodii chorałowej, choć też powoli zanikała. Odrodziła się w muzyce na początku XX wieku.

Na koniec pokażmy jeszcze różnicę między tercją wielką wynikającą z szeregu harmonicznego (5 : 4) a otrzymaną ze złożenia dwóch całych tonów $\left(\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{5}\right)$. Jest ona równa $81 : 80 = 1,0125$, czyli nieznacznie mniejsza od komatu pitagorejskiego. Ten tzw. *komat syntoniczny* okazuje się być istotnym problemem, gdy w Europie rozpoczyna się operowanie trójdzwiękiem i harmonią modalną. O tym, dlaczego sprawia to kłopot i jak sobie z tym fantem radzono, opowiemy w następnym artykule.

Klub 44 M

Redaguje Marcin E. KUCZMA

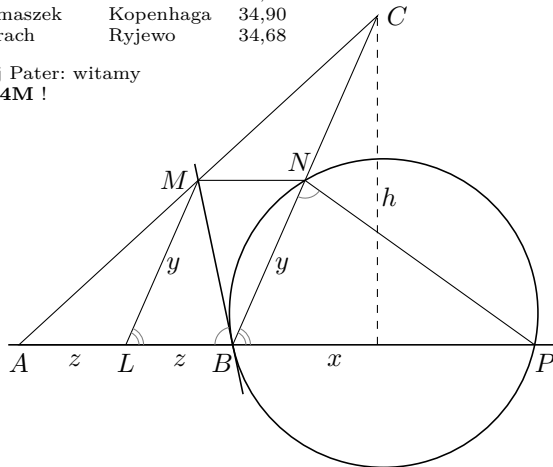
Rozwiązania zadań z numeru 3/2020



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 791 ($WT = 1,75$) i 792 ($WT = 1,73$) z numeru 12/2019

Mikołaj Pater	Opole	46,59
Janusz Fiett	Warszawa	43,82
Franciszek S.Sikorski	Warszawa	41,28
Paweł Burdzy	Warszawa	38,82
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,54
Łukasz Merta	Kraków	36,02
Błażej Żmija	Kraków	35,77
Jakub Węgrecki	Kraków	35,44
Marek Spychała	Warszawa	35,07
Michał Adamaszek	Kopenhaga	34,90
Andrzej Kurach	Ryjewo	34,68

Pan Mikołaj Pater: witamy w **Klubie 44M!**



797. Niech L będzie środkiem boku AB . W okręgu (PBN) kąt wpisany oparty na cięciwie BP przystaje do kąta między tą cięciwą a styczną w punkcie B : $\sphericalangle BNP = \sphericalangle LBM$. W połączeniu z oczywistą równością $\sphericalangle PBN = \sphericalangle MLB$ daje to podobieństwo trójkątów PBN i MLB , więc i proporcję $|PB| : |BN| = |ML| : |LB|$. Przy oznaczeniach $x = |BP|$, $y = |BN| = |LM|$, $z = |AL| = |LB|$ uzyskana proporcja pokazuje, że $x = y^2/z$. Oznaczając dalej $\sphericalangle ABC = \beta$, dostajemy ciąg zależności

$$\frac{|AP|}{h} = \frac{2z + x}{h} = \frac{2z + (y^2/z)}{2y \sin \beta} \geq \frac{2\sqrt{2}y}{2y \sin \beta} \geq \sqrt{2}.$$

W tym szacowaniu równość zostaje osiągnięta, gdy $y/z = \sqrt{2}$ oraz $\beta = 90^\circ$. Nierówność $|AP| \geq \lambda h$ zachodzi więc dla wartości $\lambda = \sqrt{2}$, której powiększyć już nie można.

798. W każdym wierszu środkowy wyraz jest liczbą nieparzystą (oczywista indukcja); wraz ze skrajnymi jedynekami daje to już trzy liczby nieparzyste w wierszu. Dla kontroli parzystości pozostałych elementów użyjemy modelu algebraicznego. Traktujemy wyrazy n -tego wiersza jako kolejne współczynniki wielomianu stopnia $2n$. Mnożąc ów wielomian przez trójmian $1 + x + x^2$, otrzymujemy wielomian stopnia $2n+2$, którego kolejnymi współczynnikami są wyrazy następnego wiersza tabeli – bo taka jest zasada generowania kolejnych wierszy. Stąd wniosek, że wyrazy n -tego wiersza to kolejne współczynniki wielomianu $F_n(x) = (1 + x + x^2)^n$, zapisanego w postaci rozwiniętej.

Przypominamy treść zadań:

797. W trójkącie ABC wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość h . Punkty M i N to (odpowiednio) środki boków AC i BC . Okrąg przechodzący przez punkty B i N , styczny do prostej BM , przecina prostą AB ponownie w punkcie P . Wyznaczyć największą liczbę λ , dla której (przy każdej takiej konfiguracji) odcinek AP ma długość nie mniejszą niż λh .

798. W nieograniczonym trójkątnym diagramie

$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ & & & & & & & & \end{matrix}$$

w górnym wierszu jest pojedyncza jedynka; a dalej każdy element jest sumą trzech liczb znajdujących się nad nim w poprzednim wierszu ($\swarrow, \downarrow, \searrow$). Wiersze są numerowane od zera; zatem w n -tym wierszu jest $2n + 1$ liczb dodatnich.

- (a) Wykazać, że w każdym wierszu, poza zerowym i pierwszym, jest jakaś liczba parzysta.
- (b) Wyznaczyć numery tych wierszy, w których są dokładnie trzy liczby nieparzyste.

Zauważmy, że jeśli $n = 2^k$, to wyrazy n -tego wiersza, poza wspomnianymi trzema, są liczbami parzystymi. Uzasadnienie indukcyjne: tak jest dla $k = 0$; i jeśli tak jest dla k , to podnosząc wielomian F_{2^k} do kwadratu dostajemy wielomian $F_{2^{k+1}}$, utworzony przez kwadraty składników wielomianu F_{2^k} (ich współczynniki nie zmieniają parzystości) plus liczne podwójone iloczyny, dające współczynniki parzyste.

Ustalmy teraz liczby całkowite $k \geq 1$ oraz m , przy czym $0 < m < 2^k$. Wykażemy, że w wierszu o numerze $2^k + m$ na pozycji m znajduje się liczba nieparzysta, zaś na pozycji $2^{k-1} + m$ liczba parzysta.

Zapiszmy wielomiany w postaci rozwiniętej:

$$F_m(x) = a_0 + \dots + a_{2m}x^{2m},$$

$$F_{2^k}(x) = b_0 + \dots + b_{2^{k+1}}x^{2^{k+1}},$$

$$F_{2^k+m}(x) = c_0 + \dots + c_mx^m + \dots + c_{2(2^k+m)}x^{2(2^k+m)}.$$

Współczynnik c_m wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} c_m &= \sum_{i+j=m} a_i b_j = \\ &= (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_{m-1} b_1) + a_m b_0. \end{aligned}$$

Wszystkie liczby b_j w nawiasie są parzyste (jako współczynniki wielomianu F_{2^k} z pozycji nie skrajnych ani nie środkowej); liczba a_m jest nieparzysta (środkowy wyraz F_{2^k}). Zatem liczba c_m jest nieparzysta.

Na pozycji $2^{k-1} + m$ widzimy w wielomianie F_{2^k+m} współczynnik

$$c_{2^{k-1}+m} = \sum_{i+j=2^{k-1}+m} a_i b_j;$$

tutaj nieparzyste czynniki b_j mamy tylko dla $j = 0$ oraz $j = 2^k$ (środkowy wyraz w F_{2^k}); towarzyszą im czynniki $a_{2^{k-1}+m}$ oraz $a_{m-2^{k-1}}$. Te dwie liczby są położone w wierszu m symetrycznie względem wyrazu środkowego a_m , więc są równe.

Z wykazanych własności wynika zarówno teza (a) (którą zresztą można uzyskać wieloma innymi metodami), jak i odpowiedź na pytanie (b): dokładnie trzy liczby nieparzyste są tylko w wierszach o numerach $n = 2^k$, $k \geq 0$ (bowiem gdy n nie jest potęgą dwójki, $n = 2^k + m$, $0 < m < 2^k$, znaleziona liczba nieparzysta c_m leży w wierszu n na pozycji m , więc nie na skraju ani nie na środku).



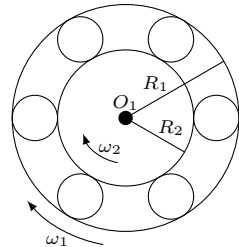
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2020

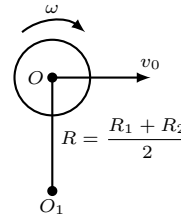
Przypominamy treść zadań:

694. Statek napędzany jest za pomocą silnika – „miotacza wody”, który wyrzuca z rufy strumień wody z prędkością u . Masa wody pobieranej z rzeki i wyrzucanej w jednostce czasu wynosi μ . Przy jakiej prędkości statku sprawność silnika jest maksymalna? Siłę tarcia i opór wody należy zaniedbać.

695. Rysunek 1 przedstawia przekrój łożyska kulkowego. Promienie pierścieni zewnętrznego i wewnętrznego wynoszą odpowiednio R_1 i R_2 , a ich prędkości kątowe ω_1 i ω_2 . Opisać ruch jednej z kulek, jeżeli nie występuje poślizg między pierścieniami i kulkami.



Rys. 1



Rys. 2

694. Całkowita praca W wykonana przez silnik w małym przedziale czasu Δt , równa jest energii kinetycznej wody wyrzucanej w tym czasie z rufy statku:

$$W = (\mu\Delta t) u^2 / 2.$$

Praca użyteczna wykonana w tym samym czasie równa jest zmianie energii kinetycznej statku:

$$W_1 = M(v + \Delta v)^2 / 2 - Mv^2 / 2,$$

gdzie M jest masą statku, a v wartością jego prędkości. Zaniedbując kwadrat małego przyrostu prędkości $(\Delta v)^2$, otrzymujemy: $W_1 = Mv\Delta v$. Ponieważ siły tarcia i oporu wody są zaniedbywalne, możemy skorzystać z zasady zachowania pędu: $M(v + \Delta v) - Mv = \mu\Delta t(u - v)$. Stąd

$$W_1 = Mv\Delta v = \mu\Delta t(u - v)v.$$

Sprawność silnika dana jest wzorem

$$\eta = \frac{W_1}{W} = \frac{2(u - v)v}{u^2}.$$

Wyrażenie to osiąga maksimum dla prędkości $v = u/2$.

695. Ruch dowolnej kulki można przedstawić jako złożenie ruchu postępowego z prędkością v_O po okręgu o środku w O_1 (przy czym promień okręgu, po którym porusza się środek kulki O , wynosi $R = (R_1 + R_2) / 2$) oraz obrotu wokół własnego środka z prędkością kątową ω (rys. 2). Dlatego prędkość punktu styczności kulki z pierścieniem zewnętrznym wynosi $v_1 = v_O + \omega r$, a z wewnętrznym $v_2 = v_O - \omega r$, gdzie $r = (R_1 - R_2) / 2$ jest promieniem kulki.

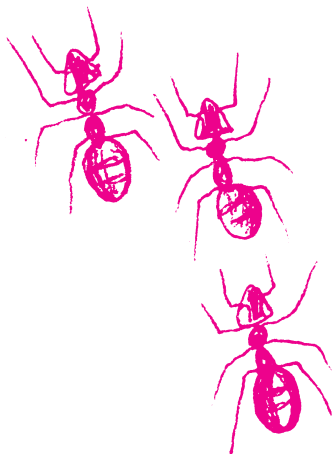
W wypisanych związkach znaki są zgodne z przyjętymi na rysunku 2 kierunkami prędkości v_O i ω .

Nie występuje poślizg, zatem $v_1 = \omega_1 R_1$ oraz $v_2 = \omega_2 R_2$. Stąd

$$v_O = (\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2) / 2, \quad \omega = (\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2) / (2r).$$

Środek kulki obraca się wokół środka łożyska z prędkością kątową

$$\omega_O = \frac{v_O}{R} = \frac{\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2}{R_1 + R_2}.$$



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Fale grawitacyjne na Marsie

W tym odcinku przenieśmy się w wyobraźni na wulkaniczną równinę Elysium Planitia na Marsie, gdzie prawie dwa lata temu (26 listopada 2018 r.) wylądował automatyczny łazik NASA Mars InSight (*Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transport*). Został on wysłany, aby badać marsjańską glebę i atmosferę. Jest to pierwsza misja, której celem jest badanie warstw podpowierzchniowych Marsa. InSight jest urządzeniem całkiem pokaźnych rozmiarów, waży 358 kg, a po rozłożeniu paneli słonecznych jego wymiary to $6,0 \times 1,56 \times 1,0$ m.

Zadaniem InSight jest umieszczenie na powierzchni Marsa sejsmometru oznaczonego akronimem SEIS (*Seismic Experiment for Interior Structure*), dokonanie pomiaru aktywności sejsmicznej i dostarczenie niezbędnych danych do opracowania trójwymiarowych modeli wnętrza planety. Ponadto zaplanowano podziemny pomiar transportu ciepła za pomocą sondy cieplnej o nazwie HP³ (*Heat Flow and Physical Properties Package*) – gdzie celem jest poznanie wczesnej ewolucji geologicznej planety. HP³ ma wbić na głębokość 5 metrów penetrator nazwany „kretem”, stworzony przez polskie Centrum Badań Kosmicznych PAN i firmę Astronika. Uderzenia „młotka” popychającego „kreta” do wnętrza planety wytworzą przy okazji wstrząsy sejsmiczne do pomiarów SEIS. Pierwsze próby wbicia „kreta” dowiodły jednak, że warstwa marsjańskiego regolitu (pyłu) znajdująca się na powierzchni planety jest grubsza, niż przypuszczano; mimo że „kret” działa bez awarii, to znajduje za mało oparcia w regolicie, którego niewielki współczynnik tarcia uniemożliwia głębszą penetrację. Próby alternatywnych rozwiązań tego nieprzewidzianego problemu trwają.

Pomimo problemów z „kretem” od grudnia 2018 roku InSight zebrał wiele interesujących danych. Łazik jest wyposażony m.in. w magnetometr do pomiaru pola magnetycznego planety, którym rejestruje niewyjaśnione jeszcze impulsy i oscylacje magnetyczne. Okazuje się, że marsjańskie pole magnetyczne w miejscu lądowania jest około 10 razy silniejsze, niż wcześniej sądzono, i szybko się zmienia. SEIS oraz zestaw czujników APSS (*Auxiliary Payload Sensor Suite*) rejestrują także dźwięki wiatrów marsjańskich (niskie wibracje na granicy zasięgu ludzkiego słuchu). Bardzo ważnym pomiarem czujnika SEIS jest zarejestrowanie naturalnej aktywności sejsmicznej Marsa, który okazuje się mniej aktywny od Ziemi, ale bardziej od Księżyca.

Naukowcy zauważyli także zmieniające się codziennie wiatry wywołwane przez sezonowe zamrażanie i rozmrażanie dwutlenku węgla w czapach polarnych Marsa. Planeta doświadcza silnych dziennych wahań ciśnienia i temperatury (o wiele silniejszych niż na Ziemi), ponieważ atmosfera jest tak cienka, że może się nagrzewać i ochładzać znacznie szybciej niż na Ziemi. Zespół meteorologiczny InSight regularnie rejestruje tornada pyłowe przechodzące w okolicy próbnika oraz „fale grawitacyjne” – nie te związane z drganiem czasoprzestrzeni i teorią względności Einsteina, ale będące oscylacjami wypornościowymi w ośrodku, w którym jest obecna siła wyporności i grawitacyjna. Rejestracja takich fal jest bardzo pomocna w dalszym szczegółowym poznawaniu dynamiki atmosfery Marsa w celu przygotowania planety do misji marsjańskich, a w przyszłości – być może – dla pierwszych ludzkich osadników.

Michał BEJGER

W.B. Banerdt, S.E. Smrekar, D. Banfield, et al. Initial results from the InSight mission on Mars. *Nat. Geosci.* (2020).

Niebo w lipcu

Zaczęła się druga połowa 2020 roku i przez jej większość dzień skraca się aż do przesilenia zimowego na początku trzeciej dekady grudnia. Początkowo ubytek dnia nie jest duży, ale 23 lipca Słońce przecina równoleżnik 20° deklinacji w drodze na południe i od tego momentu długość dnia szybko się zmienia. Wraz z upływem miesiąca kończy się sezon na obłoki srebrzyste i łuk okołohoryzontalny (więcej o nim na angielskiej stronie: www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm), przy czym

obłoki srebrzyste najwcześniej zanikają na południu naszego kraju, a najpóźniej na północy, natomiast szansa na dostrzeżenie łuku okołohoryzontalnego najszybciej mija nad Bałtykiem, najpóźniej zaś w górach.

Początek lipca rozświetli silny blask **Księżyca**, którego pełnia przypada na 5. dzień miesiąca, na godzinę 6:44 naszego czasu, w gwiazdozbiornie Strzelca. Dnia 12 lipca

o godzinie 1:30 Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę w Wielorybie, a 20 lipca o 19:33 czeka Księżyc spotkanie ze Słońcem na pograniczu gwiazdozbiorów Bliźniąt i Raka. Tydzień później, 27 lipca wczesnym popołudniem naszego czasu, Księżyc pokaże tarczę oświetloną w połowie, przechodząc przez I kwadrę na pograniczu gwiazdozbiorów Panny i Wagi.

W tym miesiącu pełnia zostanie okraszona zaćmieniem. Niestety to zaćmienie jest półcieniowe, i to o płytkiej fazie, zaledwie 35% – stąd też zjawisko będzie krótkotrwałe, jedynie 2 godziny i 45 minut. Do zaćmienia dojdzie za dnia polskiego czasu, już po zniknięciu Srebrnego Globu z nieboskłonu. Zjawisko w całości zobaczą mieszkańcy Ameryki Południowej, południowo-wschodniej części Ameryki Północnej oraz zachodnich krańców Afryki. Jednak ze względu na małą fazę efekt należy do tych trudno obserwowalnych, nawet tam gdzie Księżyc w trakcie zaćmienia znajdzie się w okolicach zenitu. Może się zdarzyć tak, że dostrzeżenie delikatnego pociemnienia księżycowej tarczy umożliwi dopiero sfotografowanie zjawiska, ponieważ nasze oczy zbyt szybko przyzwyczajają się do zmiany oświetlenia.

Lipiec odznacza się niezbyt dobrym nachyleniem ekliptyki do widnokregu pod względem obserwacyjnym: na niebie wieczornym ką, jaki tworzy droga Słońca po niebie z linią horyzontu, zaczyna się szybko zmniejszać, a na niebie porannym nie zdąży jeszcze za bardzo urosnąć. Dlatego Księżyc zarówno przed nowiem, jak i po nim jest widoczny raczej słabo, tak samo jak planeta **Mercury**. Pierwsza planeta od Słońca zacznie miesiąc od koniunktacji dolnej, czyli przejścia blisko naszej planety, i przeniesie się na niebo poranne, dążąc do maksymalnej elongacji zachodniej 20 lipca. Planeta oddali się wtedy od Słońca na niecałe 20°. Niezbyt jeszcze duże nachylenie ekliptyki do widnokregu spowoduje, że tego ranka Merkury na godzinę przed wschodem Słońca wzniesie się na wysokość zaledwie około 2°. Trochę lepsze warunki widoczności planety wystąpią pod koniec miesiąca, gdyż przy poprawiającym się nachyleniu ekliptyki planeta wzniesie się o stopień wyżej, mimo mniejszej odległości kątowej od Słońca. Dodatkowo jasność planety urośnie od +0,7^m w dniu maksymalnej elongacji do -0,7^m ostatniego dnia miesiąca. W tym czasie tarcza Merkurego zmniejszy średnicę z 8 do 6 sekund kątowych, zaś faza tarczy urośnie z 30 do 66%.

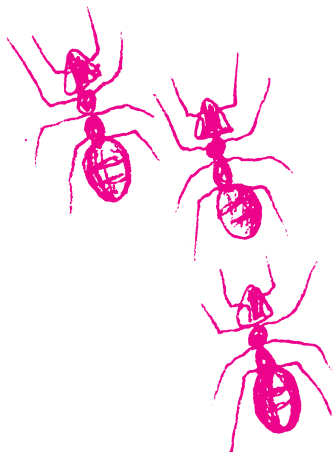
Znacznie lepiej widoczna na niebie porannym jest planeta **Venus**, która w lipcu oddali się od Słońca na ponad 40°, choć w maksymalnej elongacji znajdzie się dopiero w połowie sierpnia. Dzięki temu Venus zostanie ozdobą porannego nieba, mimo słabego nachylenia ekliptyki. Planeta początkowo nie pokaże się zbyt wysoko: na godzinę przed wschodem Słońca wzniesie się na około 5° ponad wschodni widnokrąg, zajmując pozycję tuż na północny zachód od Hiad w Byku. Jednak z upływem czasu jej wysokość na nieboskłonie szybko urośnie: w połowie miesiąca do 12°, pod koniec zaś – o kolejne 7°. W tym czasie Venus przejdzie przez Hiady, zbliżając się na niecały stopień do Aldebarana

12 lipca, a zakończy miesiąc 2,5° od gwiazdy ζ Tauri, czyli południowego rogu Byka. Jasność planety wyniesie około -4,5^m, jednocześnie tarcza planety skurczy się z 43 do 28'', natomiast faza urośnie z 19 do 42%.

Obie planety na początku drugiej dekady lipca minie dążący do nowiu Księżyc. Najpierw 17 dnia miesiąca mając tarczę oświetloną w 14%, utworzy trójkąt prawie równoboczny z Wenus i Aldebaranem. Wszystkie trzy ciała Układu Słonecznego przedzieli wtedy odległość około 3°. Dwa dni później sierp Księżycza w fazie zaledwie 3% przejdzie tylko 3° nad Merkurym. Niestety to ostatnie złączenie zdarzy się bardzo nisko nad widnokregiem.

Dwie największe planety Układu Słonecznego w lipcu przejdą przez opozycję względem Słońca. **Jowisz** zrobi to 14 lipca, zaś **Saturn** – 6 dni później. Obie planety przez cały miesiąc utworzą dość ciasną parę, o rozpiętości mniej więcej 7°. Saturn zacznie miesiąc w gwiazdozbiorze Koziorożca, ale już 3 lipca przeniesie się do gwiazdozbioru Strzelca, w którym prawie cały sezon obserwacyjny spędza Jowisz. Niestety przebywanie w tym rejonie nieba oznacza, że obie planety nie wzniosą się zbyt wysoko ponad widnokrąg. Do końca okresu widoczności planety będą przecinać południk lokalny na wysokości nie przekraczającej 20°. W związku z opozycjami w lipcu rozmiary i jasności obu planet osiągną maksymalne wielkości w tym roku. Jowisz świeci blaskiem -2,7^m, mając tarczę o średnicy 48'', natomiast Saturn pojaśnieje do +0,1^m, zaś średnica jego tarczy osiągnie 18''. Księżyc spotka się z Jowiszem i Saturnem na początku miesiąca, gdy w nocy z 5 na 6 lipca, mając tarczę oświetloną w całości, przejdzie mniej niż 3° na południe od Jowisza. Już lornetka albo niewielki teleskop wystarczy, by obserwować najjaśniejsze księżycy obu tych planet. Dotyczy to zwłaszcza Jowisza, którego cztery najjaśniejsze tzw. księżycy galileuszowe, czyli Io, Europa, Ganimedes i Kallisto, osiągają jasność między +4,5 a +6^m, i gdyby nie bliskość bardzo jasnej planety, dałoby się je dostrzec gołym okiem. Najłatwiej dostrzec Kallisto, która oddala się od swojej planety macierzystej na ponad 10', czyli ponad 13 średnic tarczy Jowisza. Ganimedes oddala się maksymalnie na ponad 7 średnic kątowych Jowisza, Europa – na prawie 5 średnic, zaś Io tylko na 3 średnice Jowisza i ją dostrzec najtrudniej. W przypadku Saturna jego największy i najjaśniejszy księżyc Tytan świeci blaskiem około +8,5^m, a zatem nieco słabiej od **Neptuna** i maksymalnie oddala się od Saturna na ponad 3', co przekłada się na 10 średnic kątowych jego planety macierzystej. Do jego dostrzeżenia wystarczy większa lornetka. Trzy kolejne co do jasności księżycy Saturna, czyli Rea, Tetyda i Dione, mają jasność około +10^m i krążą znacznie bliżej Saturna, w odległości do 3–5 jego średnic. Dlatego aby je dostrzec, potrzebny już jest raczej teleskop albo naprawdę duża lorneta, o średnicy obiektywów przynajmniej kilkanaście centymetrów.

Ariel MAJCHER



Na tropie ciemnych barionów

Nie wiemy, z czego składa się Wszechświat. W powszechnie przyjmowanym modelu kosmologicznym prawie 70% gęstości energii Wszechświata przypisywane jest ciemnej energii, o której można powiedzieć w zasadzie tylko tyle, że ma ujemne ciśnienie powodujące przyspieszone rozszerzanie się Wszechświata. Praktycznie cała reszta energii Wszechświata związana jest z istnieniem materii: „zwykłej” materii barionowej, z której zbudowane są atomy, a więc świat, jaki znamy, oraz ciemnej materii, której grawitacyjne przyciąganie wpływa na ruchy gwiazd w galaktykach, ruchy galaktyk w gromadach galaktyk, formowanie się galaktyk oraz oscylacje materii przed rekombinacją, dziś widoczne jako niejednorodności w mikrofalowym promieniowaniu tła.

Gęstość materii barionowej można by w zasadzie oszacować, sumując gęstości energii wszystkich elementów Wszechświata zbudowanych z tej materii. Jest to jednak zadanie niełatwe – choć materię świecącą, taką jak gwiazdy i galaktyki, po prostu widać, materia barionowa może również istnieć w postaci nieświecącej, takiej jak czarne dziury, planety i bardzo rozrzedzony gaz w przestrzeni międzygwiazdnej. Wiadomo, że zsumowanie wkładów od materii świecącej daje między 50 a 70% wyniku uzyskiwanego z badania mikrofalowego promieniowania tła. Fakt ten odnotowuje się w literaturze naukowej jako *problem brakujących barionów*. Warto podkreślić, że zagadnienie odnalezienia barionów, które nie świecą, bo są za zimne, by emitować promieniowanie elektromagnetyczne, oraz zbyt rozrzedzone, by je w dostrzegalny sposób pochłaniać, jest czymś zupełnie innym niż poszukiwanie ciemnej materii, która z promieniowaniem elektromagnetycznym nie oddziałuje.

Na szczęście istnieją metody obserwacyjne pozwalające dojrzeć nieświecące składniki materii barionowej. Rozrzedzony gaz lub pył staje się możliwy do zaobserwowania, jeśli podświetlić go „od tyłu” światłem gwiazd. Badając widmo promieniowania takich gwiazd, można wnioskować o masie między gwiazdą a ziemskim obserwatorem. Zwarte i gęste obiekty można wykryć za pomocą mikrosoczewkowania grawitacyjnego. Jeśli planeta lub inny ciemny obiekt porusza się między obserwatorem a odległym źródłem światła, obraz źródła jest zniekształcony w sposób zależny od masy tego ciemnego obiektu.

Od dawna postulowano, że niewidoczne bariony mogą stanowić pasma materii między parami galaktyk. Materia jest w nich bardzo rozproszona, a ponieważ nie są wystarczająco gorące, aby emitować promieniowanie rentgenowskie, są trudne do wykrycia. Można je wszakże zobaczyć za pomocą efektu Sunyaeva–Zel’dovicha, polegającego na tym, że światło z kosmicznego mikrofalowego promieniowania tła powinno się rozpraszać na takiej materii, tracąc nieco energii, co powinno przekładać się na ciemniejsze plamy w mikrofalowym promieniowaniu tła. Nie daje się ich zobaczyć bezpośrednio, ale dopiero po skorelowaniu ze znanymi z obserwacji rozkładami galaktyk. Pomiaru takie wykonuje się od 2017 roku, a wyniki wskazują na to, że w pasmach materii między parami galaktyk może być ukryte do 30% materii barionowej [1,2,3]. Wyniki te są jednak obciążone dużymi błędami, a samą metodę można zastosować tylko do niewielkich wycinków objętości widzialnego Wszechświata.

Niedawno pojawiła się praca [4], w której opisano nowy sposób zastosowania standardowej metody badania gęstości materii w naszej Galaktyce za pomocą pulsarów radiowych. Tym razem badacze skupili swoją uwagę nie na pulsarach, ale na błyskach radiowych w odległych galaktykach (*Fast Radio Bursts*) i zmierzli dyspersję tych błysków związaną z gęstością elektronów na drodze tych fal radiowych. Ponieważ elektronów jest we Wszechświecie tyle samo co protonów, pozwoliło to na niezależne oszacowanie gęstości materii barionowej, i to w sposób obciążony znacznie mniejszym stopniem niepewności niż w przypadku stosowanych wcześniej metod. Uzyskany wynik zgadza się bardzo dobrze z pomiarami mikrofalowego promieniowania tła w ramach standardowego modelu kosmologicznego. Wydaje się zatem, że jedna z kosmicznych zagadek zostanie niebawem rozwiązana.

Krzysztof TURZYŃSKI

- [1] H. Tanimura, G. Hinshaw, I. G. McCarthy, L. Van Waerbeke; Y.-Z. Ma, A. Mead, A. Hojjati, T. Tröster (2017). “A Search for Warm/Hot Gas Filaments Between Pairs of SDSS Luminous Red Galaxies”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 483: 223–234.
- [2] A. de Graaff; Y.-Ch. Cai, C. Heymans, J. A. Peacock, (2019). “Missing baryons in the cosmic web revealed by the Sunyaev–Zel’dovich effect”. *Astronomy & Astrophysics*. A48: 624.
- [3] F. Nicastro, J. Kaastra, Y. Krongold, S. Borgani, E. Branchini, R. Cen, M. Dadina, C. W. Danforth, M. Elvis (2018). “Observations of the missing baryons in the warm—hot intergalactic medium”. *Nature*. 558 (2018).
- [4] J.-P. Macquart, J. X. Prochaska, M. McQuinn, K. W. Bannister, S. Bhandari, C. K. Day, A. T. Deller, R. D. Ekers, C. W. James, L. Marnoch, S. Osłowski, C. Phillips, S. D. Ryder, D. R. Scott, R. M. Shannon & N. Tejos (2020), “A census of baryons in the Universe from localized fast radio bursts”, *Nature* 581, 391–395 (2020).



U(nie)jednorodnianie nierówności

Bartłomiej BZDEGA

W całym artykule stosujemy oznaczenia $X = (x_1, \dots, x_n)$ oraz $aX = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$. Będziemy pisać $F(X)$ dla oznaczenia wyrażenia, w którym występują zmienne x_1, x_2, \dots, x_n . Zbiór \mathbb{R}_+^n stanowią te X , w których $x_1, \dots, x_n > 0$.

Stopniem jednomianu $J(X) = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ nazywamy liczbę $d = k_1 + \dots + k_n$. Równość $J(aX) = a^d J(X)$ jest podstawą do uogólnienia pojęcia stopnia: jeśli istnieje takie d , że dla każdego $a > 0$ zachodzi równość $F(aX) = a^d F(X)$, to wyrażenie F nazywamy *jednorodnym*, a liczbę d – jego *stopniem*. Zauważmy, że dla każdego d możemy powiedzieć, że wyrażenie zerowe ma stopień d .

Nierówność $\mathcal{N}(X)$, w której występują zmienne x_1, \dots, x_n , nazywamy *jednorodną*, jeśli obie jej strony są wyrażeniami jednorodnymi tego samego stopnia.

Załóżmy, że nierówność $\mathcal{N}(X)$ jest pod pewnym warunkiem \mathcal{W} równoważna jednorodnej nierówności $\mathcal{N}^*(X)$, przy czym warunek \mathcal{W} ma postać $F_1(X) = F_2(X)$, w której F_1 i F_2 są jednorodnymi wyrażeniami różnych stopni, które przyjmują wyłącznie dodatnie wartości. Jest wówczas jasne, że jeśli $\mathcal{N}^*(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$, to $\mathcal{N}(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$ spełniających warunek \mathcal{W} .

Takie postępowanie spotykamy dość często – za pomocą danego warunku \mathcal{W} ujednorodniamy nierówność po to, by ją wykazać w postaci jednorodnej. Dzięki powyższemu twierdzeniu ten ostatni krok można wykonać już bez korzystania z warunku \mathcal{W} . Taką metodą rozwiązujemy zadania 1–4, a także zadanie 5 z kącika nr 5.

Mniej oczywiste i dość zaskakujące jest to, że ta implikacja działa również w drugą stronę: jeśli $\mathcal{N}(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$ spełniających warunek \mathcal{W} , to $\mathcal{N}^*(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$.

Dla dowodu ustalmy dowolne $X \in \mathbb{R}_+^n$ oraz połóżmy $r = F_1(X)/F_2(X)$ i $a = r^{1/(d_2-d_1)}$ (d_1 i d_2 są stopniami odpowiednio F_1 i F_2). Otrzymujemy wtedy równość

$$F_1(aX) = a^{d_1} F_1(X) = a^{d_1} r F_2(X) = a^{d_1} r a^{-d_2} F_2(aX) = F_2(aX),$$

czyli zachodzi warunek \mathcal{W} . Z tego wynika, że nierówności $\mathcal{N}(aX)$, $\mathcal{N}^*(aX)$ i $\mathcal{N}^*(X)$ są równoważne, co kończy dowód wobec dowolności X .

Konsekwencją tego faktu jest to, że przy dowodzeniu nierówności jednorodnej dodatnich zmiennych możemy dodatkowo przyjąć dowolny warunek \mathcal{W} mający wyżej opisaną postać. Można to poćwiczyć na zadaniach 5–7.

Zadania

1. Wykazać, że jeśli liczby $a, b, c > 0$ spełniają warunek $abc = a + b + c$, to $ab + bc + ca \geq 9$.

2. Liczby dodatnie a, b i c spełniają równość $ab + bc + ca = abc$. Dowieść, że
$$\frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)} + \frac{b^2 + c^2}{bc(b+c)} + \frac{c^2 + a^2}{ca(c+a)} \geq 1.$$

3. Liczby dodatnie a, b i c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Dowieść, że
$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2.$$

4. Udowodnić, że jeśli iloczyn liczb dodatnich a, b, c jest równy 1, to $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$.

5. Wykazać, że dla $a, b, c > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{\frac{a}{a+2b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{2a+b+2c}} + \sqrt{\frac{c}{2a+2b+c}} \geq 1.$$

6. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b i c oraz liczby całkowitej $n > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1}.$$

7. Dowieść, że dla liczb dodatnich a, b i c oraz liczby całkowitej $n > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \right) \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}}.$$

Wskazówki do zadań
 1. Po ujednorodnieniu otrzymamy $(ab+bc+ca)(a+b+c) \geq 9abc$, co się sprawdza do nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną.
 2. W celu ujednorodnienia lewej strony nierówności pomnożyć przez abc , a przenieść $ab+bc+ca$. Następnie skorzystać z nierówności $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{x+y}{2}$.
 3. Zapisać $a+b+c = a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)$ wraz z dwiema analogicznymi równościami. Wykorzystać nierówność $\sqrt{\frac{x}{y}} \geq \frac{x}{x+y}$.
 4. Po ujednorodnieniu mamy wykazanie nierówności $a^2 + b^2 + c^2 \leq \sqrt{abc}(a+b+c)$. Można to zrobić, dodając stronami nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ oraz dwie nierówności analogiczne.
 5. Przyjąć $a+b+c = 2a$ dla $0 < a < \frac{2}{3}$ oraz analogicznie dla b i c .
 6. Przyjmując warunek $a+b+c = 1$. Wtedy $\frac{a}{b+c} = \frac{1-a}{1-a} = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a} + \frac{a}{1-a^2} + \dots$. Korzystając dla $k \geq n \geq 1$ z nierówności $\sqrt[k]{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{a}{a+b+c}$, otrzymamy $a^k + b^k + c^k \leq \frac{a^k}{a+b+c} + \frac{b^k}{a+b+c} + \frac{c^k}{a+b+c}$.
 7. Znowu przyjmując, że $a+b+c = 1$.
 Postępując się nierównościami między średnimi potęgowymi, wykazać dla $k \geq n \geq 1$ że $(\frac{a}{b+c})^k \geq \frac{a^k}{a+b+c}$.



POLSKA FUNDACJA
FANTASTYKI NAUKOWEJ

POLISH
SCIENCE FICTION FOUNDATION

PIERWSZA EDYCJA KONKURSU LITERACKIEGO POLSKIEJ FUNDACJI FANTASTYKI NAUKOWEJ

Polska Fundacja Fantastyki Naukowej ogłasza nabór opowiadań na konkurs, którego celem jest wyłonienie najlepszych tekstów utrzymanych w konwencji fantastyki naukowej, napisanych przez debiutantów.

W konkursie PFFN może wziąć udział każdy autor, który ukończył 16 lat i nie opublikował jeszcze żadnej książki lub wydał co najwyżej jedną książkę drogą self-publishingu.

Oryginalne opowiadanie, nigdzie dotąd niepublikowane, musi być w znaczącym stopniu oparte na fundamencie obowiązujących praw, teorii albo prognoz naukowych bądź na ich logicznym rozwinięciu, zgodnym ze współczesną wiedzą naukową.

Prace konkursowe, liczące od 15 000 do 50 000 znaków (ze spacjami), należy wysłać drogą elektroniczną na adres mailowy:

konkurs@pffn.org.pl.

Termin nadsyłania: **od 30 czerwca do 31 sierpnia 2020** roku.

Pełny regulamin oraz niezbędne formularze znaleźć można na stronie **pffn.org.pl.**

Ogłoszenie wyników nastąpi do **15 stycznia 2021** roku.

Najlepsze utwory – od jednego do pięciu – zostaną opublikowane w antologii Fundacji. Zwycięzcy, oprócz egzemplarza wydanego zbioru, otrzymają nagrody rzeczowe oraz pamiątkowe dyplomy.

W pierwszej edycji konkursu teksty oceni jury w składzie:

- dr Michał Cholewa (informatyk, laureat nagrody im. Janusza Zajdła),
- dr Weronika Śliwa (astronom, kierownik planetarium Centrum Nauki Kopernik),
- dr Sebastian Szymański (filozof i etyk, pracownik laboratorium Techno-Humanistyki UW),
- Michał Cetnarowski (krytyk literacki, redaktor „Nowej Fantastyki”),
- Kamil Muzyka (specjalista prawa kosmicznego).

O Polskiej Fundacji Fantastyki Naukowej:

Powstała z inicjatywy miłośników polskiej fantastyki naukowej, ma na celu jej popularyzację zarówno w kraju, jak i za granicą. Jednocześnie Fundacja chce promować polskich twórców (pisarzy, grafików, muzyków, autorów gier komputerowych, fabularnych i planszowych) oraz organizować spotkania z pisarzami i ekspertami, aby przybliżyć zagadnienia poruszane w fantastyce naukowej, a tym samym propagować gatunek i samą naukę. Jednym z przejawów tej aktywności będzie coroczny konkurs literacki dla debiutantów mający na celu „wyłowienie” nowych talentów.



Autorem załączonej pracy jest Michał Karcz, artysta koncepcyjny tworzący w konwencji science fiction