

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $E=h \cdot \nu$ $\pi=3,141592\dots$

NR 6 (553) 2020

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

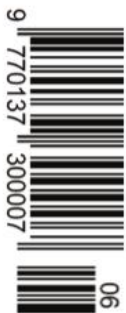
www.deltami.edu.pl

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Prosimy
nie zbliżać się
do krawędzi
peronu!

str. 10

UNIWERSYTET
WARSZAWSKI



Nakład: 3500 egz.



ISSN 1643-9019 (pł.)
ISSN 1643-9027 (e)

SPIS TREŚCI NUMERU 6 (553)

Wirusowy pamiętnik

Piotr Krzyżanowski

Czego jeszcze nie wiedzieliśmy o bryłach platońskich?

Karol Gryszka

O istotności pyłu w obserwacjach galaktyk

Katarzyna Małek

Ziemiołubne liczby i ulotne reszty

Mariusz Skalba



Zadania

Epidemie w liczbach

Magdalena Fikus

Prosimy nie zbliżać się do krawędzi peronu!

Agnieszka Chudek

GW190425 – nieoczekiwanie masywny układ gwiazd neutronowych?

Michał Bejger

Informatyczny kącik olimpijski (138):

Yet Another Substring Reverse

Stochastyczne i deterministyczne modele epidemii

Marta Zalewska, Wojciech Niemirowicz

Fibonacci spotyka Banacha

Jarosław Górnicki

Masa efektywna

Paweł Perkowski

Klub 44

Prosto z nieba:

Fast and furious – uciekająca gwiazda

Niebo w czerwcu

Aktualności

Neutrino i hiperbole




Równoległobok

Bartłomiej Bzdęga

Od ponad 30 lat zadawano sobie pytanie, jak czułe są funkcje logiczne. Teraz już wiemy!
O tym w kolejnym numerze.



O nowym
wymiarze
czułości

str. 1	Miesięcznik <i>Delta</i> – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.
str. 2	Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący,
str. 4	prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz,
str. 6	dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin,
str. 8	prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński,
str. 9	prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak,
str. 10	dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.
str. 11	Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.
str. 13	Adres do korespondencji: Redakcja <i>Delty</i> , ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402. Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
str. 14	Skład systemem T _E X wykonała Redakcja. Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl
str. 16	Prenumerata: Garmond Press: www.garmondpress.pl Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje) RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl
str. 18	
str. 20	Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.
str. 22	
str. 22	Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł
str. 24	 Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl
str. 25	Można nas też znaleźć na facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Wirusowy pamiętnik Piotr KRZYŻANOWSKI*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Prognozy z Δ_{19}^{12}

Przepowiednia 1. Następny sezon grypy... już się zaczął: w połowie sierpnia!

Przepowiednia 2. Od października do końca grudnia raportowana liczba zachorowań nie przekroczy... 140 tysięcy w tygodniu!

Przepowiednia 3. Szczyt zachorowań przypadnie... w drugim tygodniu lutego. Będzie wtedy zgłaszanych aż 400 tysięcy zachorowań tygodniowo!

Przepowiednia 4. Przebieg zachorowalności w I kwartale 2020 roku... będę na żywo monitorować i prognozować na swojej stronie internetowej już od teraz, co tydzień uwzględniając nowe dane!

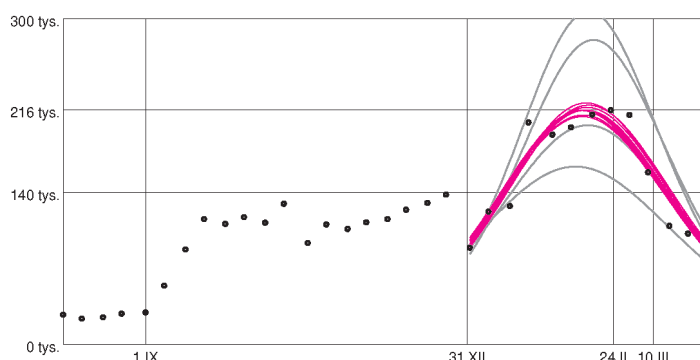
O modelu Kermacka–McKendricka pisaliśmy w *Delcie* (Δ_{16}^4 i Δ_{19}^{12} oraz w tym numerze na str. 14–16).

Strona WWW autora:
www.mimuw.edu.pl/~przykry/flu

Ocenia się, że w „spokojnym” roku z powodu grypy umiera na całym świecie około 400 tysięcy ludzi.

W *Delcie* 12/2019 trochę bawiliśmy się razem z Czytelnikami prościutkim modelem epidemii. Aby *zabawa* trwała dłużej, w przypływie chęci podjęcia ryzyka, postawiłem kilka prognoz (zob. obok), które obiecałem potem sprawdzić. Popatrzmy, co z tego wynikło (pomijając, z oczywistych względów, **Przepowiednię 1**).

Poniższy obrazek przedstawia przebieg grypy w sezonie 2019/2020, łącznie z serią prognoz, jakie od stycznia co tydzień produkowałem na podstawie raportów publikowanych przez NIZP-PZH.



1 IX 2019 Jedną z wielu rzeczy, jakich się dowiedziałem w trakcie naszej zabawy, jest to, że zapadalność na gripę maluchów w wieku 0–4 lata jest około dwukrotnie większa niż w przedziale wiekowym 5–14 lat. Dorosli zaś są jeszcze mniej podatni niż młodzież. Dlatego początek roku szkolnego to tradycyjny sygnał do rozpoczęcia wzrostu liczby zgłaszanych zachorowań na gripę (oznaczone na wykresie kropkami) do poziomu, który stabilizuje się w październiku, aż do grudnia.

31 XII 2019 Jestem zaskoczony, że **Przepowiednia 2** sprawdziła się i maksymalna raportowana liczba zachorowań w „tygodniu” wyniosła 138 tysięcy. To oczywiście głównie zasługa przypadku.

31 I 2020 Z drugiej strony, wcale mnie nie dziwi, że pierwsze tegoroczne prognozy przebiegu epidemii – oparte na dopasowaniu parametrów (b, I_0) prościutkiego modelu Kermacka–McKendricka do danych dostępnych w kolejnych tygodniach stycznia (cztery *szare krzywe* na wykresie) – okazały się całkowicie chybione. Danych było wtedy po prostu za mało.

24 II 2020 Cieszę się, że groźnie brzmiąca **Przepowiednia 3** nie sprawdziła się. Szczyt zachorowań przypadł znacznie później i na szczęście był niemal dwukrotnie niższy od prognozy – znów opartej na (tutaj wyraźnie nieadekwatnej) regresji liniowej. Zresztą zima była ekstremalnie łagodna, a to nie sprzyja grypie.

10 III 2020 Ci, którzy śledzili moją stronę WWW, wiedzą, że **Przepowiednia 4** została z grubsza spełniona. Mimo wielkiej prostoty modelu, kolejne prognozy, jakie produkowałem co tydzień od lutego aż do połowy marca na podstawie nadchodzących nowych raportów, były zdumiewająco przyzwoite (czerwone krzywe na wykresie – jest ich dziewięć, ale mocno się pokrywają). A 10 marca zamknięto Uniwersytet i zaraz potem w całej Polsce zaczął się unikalny eksperyment – m.in. zamknięcie wszystkich szkół – który pozwolił nam obserwować na żywo jego wpływ na przyspieszone zwijanie się zasięgu grypy (i przy okazji spowodował załamanie jakości prognoz w późniejszym terminie). Może kiedyś, wykorzystując dane, niedostępne wcześniej w historii, któraś z Czytelniczek *Delty* napisze pracę naukową?

Jednak od początku roku 2020 świadomością, a nawet życiem nas wszystkich zaważadną inny wirus: SARS-Cov-2. Brak pewności co do tego, jak działać w obliczu pandemii i, z drugiej strony, niepełna informacja na temat charakteru samego wirusa, unaocznily nam, jak dobrze jest dysponować elastycznym (i zawczasu zweryfikowanym na danych historycznych) modelem matematycznym choroby, a także właściwymi narzędziami obliczeniowymi do prowadzenia symulacji.

Ale grypa też może być groźna. Szybko mutuje. I na pewno do nas powróci.

Czego jeszcze nie wiedzieliśmy o bryłach platońskich?

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Karol GRYSZKA*

„Bryły platońskie” to inna nazwa wielościanów foremnych. W przestrzeni trójwymiarowej jest ich dokładnie 5 i są to: czworościan, sześciątka, ośmiościan, dwunastościan oraz dwudziestościan foremny. Ich historia sięga czasów starożytnych i wydawałoby się, że po ponad dwóch tysiącach lat wiemy o nich już absolutnie wszystko.

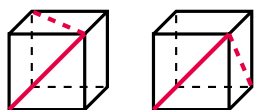
W tym artykule opiszemy problem, który dotyczy tych właśnie brył, a został rozwiązany dopiero w lutym 2018 roku. Jego rozwiązanie opublikowano na łamach czasopisma „American Mathematical Monthly”.

Jayadev S. Athreya, D. Auricino,
A Trajectory from a Vertex to Itself on the Dodecahedron. arXiv:1802.00811, The American Mathematical Monthly, 126:2, 161–162 (2019).

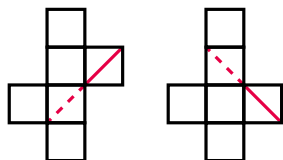
Wyobraźmy sobie planetę będącą wielościanem foremnym. Na jednym z jej wierzchołków mieszka mysz, a w pozostałych wierzchołkach znajdują się pułapki na tę nieszczęsną mysz. Mysz chciałaby odbyć wędrowkę po tej planecie i bezpiecznie wrócić do domu. Ponieważ nie jest zbyt sprawna i nie potrafi zakrecać, może poruszać się wyłącznie prosto. Problem polega na stwierdzeniu, czy taka wędrowka bez natknięcia się na żadną z pułapek jest w ogóle możliwa na danym wielościanie.

Opiszemy bardziej formalnie wędrowkę myszy. Na zadanym wielościanie foremnym szukamy ścieżki, która spełnia następujące warunki:

Dlaczego unikamy wierzchołków? Okazuje się, że opis w trzecim punkcie nie określa jednoznacznie przedłużania ścieżki przechodzącej przez wierzchołek.

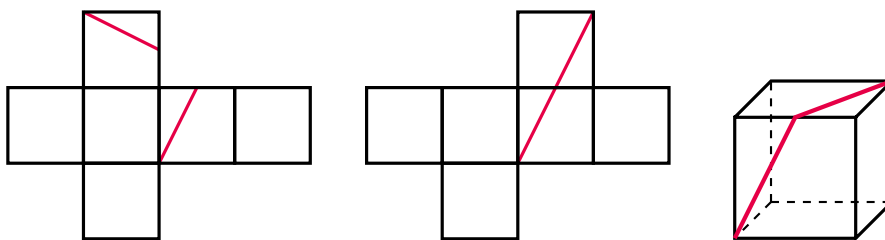


W obu pokazanych wyżej przypadkach kawałki ścieżek leżą na pewnej prostej.

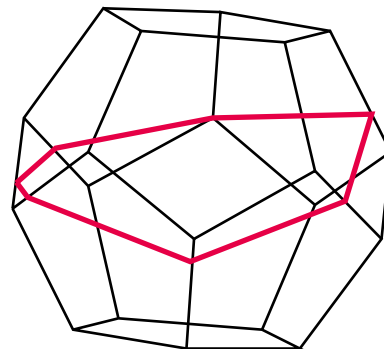
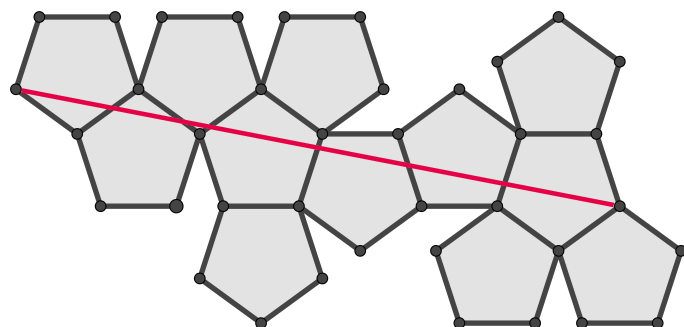


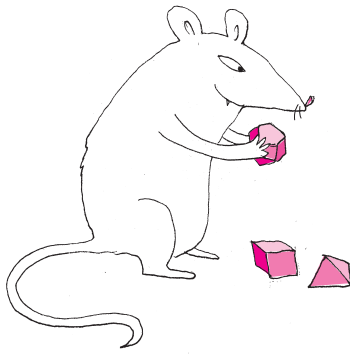
- rozpoczyna się oraz kończy w ustalonym wierzchołku i nie przechodzi przez pozostałe wierzchołki;
- składa się z odcinków znajdujących się na ścianach wielościanu; w szczególności odcinki mogą się ze sobą przecinać;
- jeśli ścieżka przecina krawędź wielościanu („zmienia” ścianę na sąsiadującą), to odcinki wychodzący i wchodzący w tę krawędź leżą na wspólnej prostej, którą można narysować na pewnej siatce wielościanu.

Ostatni punkt wyjaśnimy dokładnie na przykładzie sześciątka. Na rysunku poniżej z lewej strony **czzerwony** odcinek spełnia wymagania stawiane w trzecim punkcie, gdyż na innej siatce tego samego sześciątka – środkowej na poniższym rysunku – oba odcinki leżą na jednej prostej.

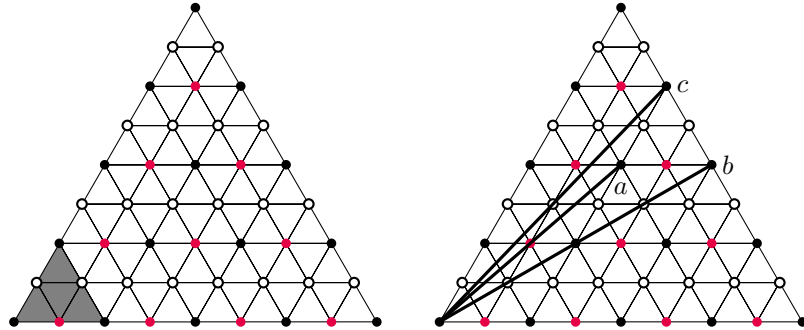


Od dawna wiadomo, że taka ścieżka (trasa myszy) **nie istnieje** na czworościanie, sześciątce, ośmiościanie i dwudziestościanie. Problem jej istnienia pozostawał jednak otwarty dla dwunastościanu i rozwiązany został dopiero dwa lata temu. Rozwiązanie wygląda zdumiewająco prosto. Aż dziw bierze, że nikt wcześniej tego nie zauważył!

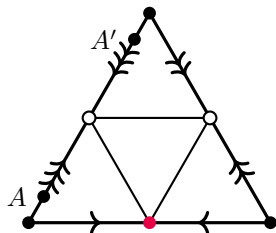




W dalszej części artykułu wrócimy do tego, co było wiadome już wcześniej – do nieistnienia ścieżki na innych bryłach. Wykażemy, że taka ścieżka nie istnieje na czworościanie. Rozumowanie będzie opierać się na *sieci siatek* połączonych ze sobą w uporządkowany sposób, jak na rysunku poniżej z lewej strony. Pojedyncza siatka wyznaczona jest przez trzy czarne wierzchołki (patrz wyróżniony trójkąt). Ponadto wyróżnione zostały pozostałe wierzchołki na czerwono lub biało, zgodnie ze schematem kolorowania na rysunku poniżej.



Wyjaśnimy teraz, jak należy rozumieć sieć siatek. Opiszemy, w jaki sposób „zwinąć” sieć siatek w zwykłą siatkę czworościanu (tę zaznaczoną na szaro), a następnie w czworościan. Zaletą korzystania z sieci siatek jest to, że wszystkie proste ścieżki na takiej sieci spełniają automatycznie warunek trzeci. Najpierw pokażemy, że faktycznie tak jest. Oznaczać to będzie, że zamiast poszukiwać ścieżki na czworościanie, możemy szukać prostego odcinka na sieci siatek, pomiędzy dwoma czarnymi wierzchołkami, który nie przechodzi przez żaden inny wierzchołek (ścieżki pokazane powyżej z prawej strony nie spełniają tego warunku).

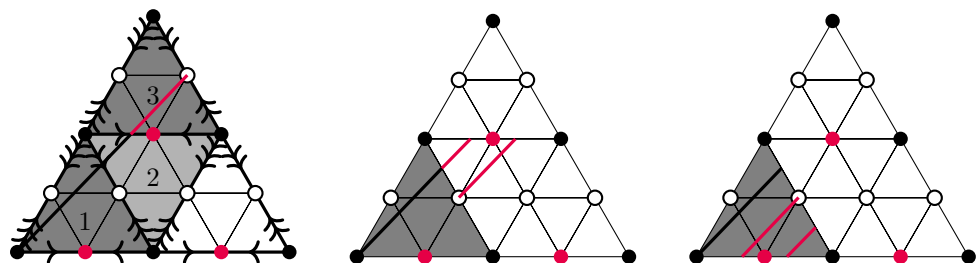


Zanim jednak zaczniemy zwinąć, spójrzmy jeszcze na rysunek na marginesie. Przedstawia on siatkę czworościanu, na której wyróżnione zostały krawędzie, które zostaną ze sobą sklejone przy składaniu siatki (mają tyle samo strzałek). Sklejenie oznacza m.in., że punkt A zostanie połączony z punktem A' .

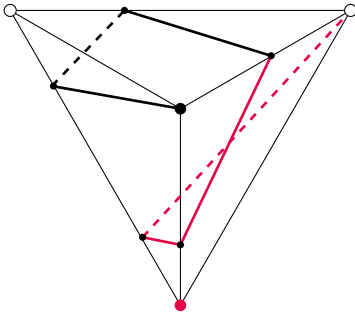
Wracamy teraz do zwinania sieci siatek na przykładzie konkretnej ścieżki (patrz rysunek poniżej z lewej strony). Ścieżka znajduje się między czarnym a białym punktem i przecina trzy wyróżnione siatki, oznaczone kolejno numerami 1, 2, 3.

Siatki składamy tak, aby dopasować do siebie kolorami wierzchołki oraz strzałki. Aby dopasować strzałki trzeciego i drugiego trójkąta, ten pierwszy należy obrócić dookoła różowego punktu z jego podstawy o 180 stopni. Podobnie dopasowujemy drugą do pierwszej. Dlaczego właśnie tak to robimy? Zauważmy, że siatkę drugiego trójkąta możemy narysować tak, że jego prawy górny trójkąt znajdzie się w miejscu lewego dolnego trójkąta trzeciej siatki (otrzymamy wtedy inną i poprawną siatkę – patrz rysunki siatek sześcianu). Tym samym reguła ta podpowiada nam, które trójkąty w siatkach 2 i 3 są identyczne oraz jak należy rozmieścić strzałki.

Na pierwszym rysunku czerwonym kolorem został zaznaczony fragment ścieżki, który przenosimy zgodnie z opisanymi wcześniej regułami na drugi trójkąt (środkowy rysunek). Następnie dwa czerwone odcinki (dłuższy z poprzedniego kroku i krótszy) z drugiego trójkąta (środkowy rysunek) przenosimy do szarego, otrzymując ścieżkę zawartą wyłącznie w szarym trójkącie (trzeci rysunek).



Okazuje się, że boki z taką samą liczbą strzałek są równoległe. Ta uwaga pozwala błyskawicznie nanieść wszystkie strzałki na całą sieć.



Na stronie www.geogebra.org/m/j7pnmvxv można zobaczyć powyższą ścieżkę w trzech wymiarach.

Rysunek na marginesie przedstawia tę samą ścieżkę narysowaną na czworościanie (widok z góry).

Wróćmy jeszcze na chwilę do trzech wyróżnionych wcześniej ścieżek na dużej sieci siatek. Dzięki opisanej tu metodzie zwijania łatwo możemy się przekonać, że ścieżka oznaczona literą c to w istocie dwie kopie tej samej ścieżki, którą szczegółowo omawialiśmy powyżej. Tym samym nie ma potrzeby rozważania całej ścieżki – wystarczy jej fragment do pierwszego różowego lub białego wierzchołka.

Wykażemy teraz, że na czworościanie nie da się narysować ścieżki o żądanych własnościach. Ustalmy, że ścieżka rozpoczyna się w górnym wierzchołku czworościanu, który na siatce reprezentowany jest przez czarny punkt w lewym dolnym rogu (a na sieci przez... wszystkie czarne punkty!).

Wiemy już, że prosta ścieżka na siatce siatek to trasa myszy, która spełnia nasze wymagania. Wiemy także, jak jednoznacznie składać siatkę siatek. Oznacza to, że każda ścieżka na siatce siatek ma jednoznaczny trasę na czworościanie. Zauważmy jednak, że rysując ścieżkę na siatce siatek łączącą czarne wierzchołki, zawsze przetniemy różowy lub biały wierzchołek (por. rysunek z trzema ścieżkami wyróżnionymi literami a , b , c , str. 3)! Dowiedliśmy tym samym, że każda ścieżka rozpoczynająca się i kończąca w czarnym wierzchołku musi przeciąć inny wierzchołek czworościanu.

Przypadek czworościanu jest najprostszy ze wszystkich wielościanów foremnych. Pozostałe bryły również rozważa się przy użyciu sieci siatek, jednak te są znacznie bardziej skomplikowane. Niemniej wiemy już, że dwunastościan jest wyjątkowy wśród wszystkich brył platońskich.



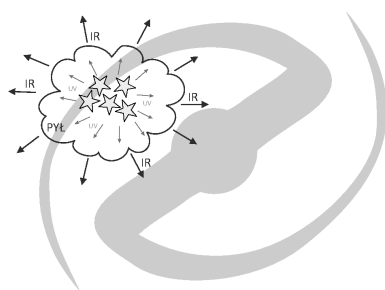
O istotności pyłu w obserwacjach galaktyk

Katarzyna MAŁEK

Bez względu na to, czy obserwujemy Drogę Mleczną, jej pobliskie sąsiadki, czy bardzo odległe galaktyki, wiemy, że są to podobne obiekty znajdujące się na różnych etapach ewolucji. Astrofizycy klasyfikują je w grupy galaktyk o zbliżonych własnościach fizycznych, a następnie wykorzystują je do bardziej wyrafinowanych analiz naukowych.

Podstawowymi wielkościami fizycznymi używanymi do grupowania galaktyk są: masa gwiazdowa (M_*), tempo powstawania nowych gwiazd (*star formation rate*, SFR) i przesunięcie ku czerwieni (*redshift*, związany z odległością; szerzej o przesunięciu ku czerwieni można przeczytać w Δ_{19}^4). Zarówno masę gwiazdową, jak i tempo powstawania gwiazd można oszacować, zliczając pojedyncze gwiazdy. Jest to jednak niemożliwe do wykonania nawet w przypadku naszej Galaktyki, nie mówiąc o podobnych zliczeniach w galaktykach od nas odległych. Musimy więc polegać na analizie światła gwiazd. Na podstawie promieniowania emitowanego przez galaktykę chcemy oszacować, ile starych i nowych gwiazd się w niej znajduje. Teoretycznie zadanie to nie jest trudne, gdyż wraz z wiekiem gwiazdy zmienia się rodzaj emitowanego przez nią światła. W dużym uproszczeniu młode, masywne gwiazdy świecą bardzo intensywnie w ultrafiolecie, natomiast starsze osobniki w zakresie widma widzialnego i bliskiej podczerwieni (0,8–2,5 μm). Dzięki obserwacjom w tych zakresach długości fal elektromagnetycznych możemy stwierdzić, ile w galaktyce jest gwiazd wyewoluowanych i czy nadal tworzy ona nowe gwiazdy, a jeżeli tak, to jak szybko.

Umownie za młode gwiazdy uważamy te, których wiek nie przekracza 10^7 lat.



Schematyczne przedstawienie chmury narodzin gwiazd w galaktyce.

Cała procedura wydaje się dość łatwa. Dysponujemy przecież ogromnymi teleskopami zaopatrzonymi w filtry pozwalające na obserwacje w dokładnie zdefiniowanym przedziale widma elektromagnetycznego. Niestety obserwatorzy napotykają pewne problemy. Po pierwsze, obserwacje galaktyk zawsze obarczone są błędami (np. związanymi z warunkami pogodowymi). Po drugie, przeciwnikiem jest znajdujący się w galaktykach pył – ten sam pył, z którego rodzą się nowe gwiazdy. Pochłania on część światła w zakresie ultrafioletowym (UV, długość fali pomiędzy 0,1 nm a 0,4 μm) pochodzącego z młodych, masywnych gwiazd. Energia zaabsorbowana przez pył zostaje wyemitowana w zakresach podczerwonych długości fal (IR, pomiędzy 8 a 1000 μm). I tutaj cała sytuacja się komplikuje – okazuje się bowiem, że obserwacje tylko w zakresach optycznym i ultrafioletowym nie odzwierciedlają całego promieniowania elektromagnetycznego pochodzącego od gwiazd. Dodatkowo, same obserwacje w zakresie długości fal podczerwonych zawierają zarówno energię wyemitowaną przez pył, jak i nadwyżkę pochodzącą od młodych gwiazd. Kluczowe staje się więc udzielenie odpowiedzi na następujące pytania: Jaki procent energii wyemitowanej przez młode, masywne gwiazdy jest pochłonięty przez pył? Jaka część widma energetycznego pyłu znajdującego się w galaktyce pochodzi od gwiazd?

Aby rozwiązać ten problem, musimy poczynić pewne założenia. Najważniejsze z nich jest takie, że bilans energetyczny w galaktyce jest stały – oznacza to, że galaktyka nie może „zgubić” energii, a jedynie zmienić jej lokalizację w zakresie długości fal. Cała energia pochłonięta przez pył musi być więc wyemitowana w zakresie długości fal podczerwonych.

Spróbujmy teraz odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób i w zależności od czego energia emitowana z gwiazd jest pochłaniana przez pył międzygalaktyczny. Aby poprawnie rozwiązać ten problem, należy rozwiązać równania transportu energetycznego w galaktykach (*radiative transfer model*, RT). Takie równanie powinno zostać rozwiązane dla każdej z galaktyk osobno, ponieważ zależy ono od geometrii układu, ilości pyłu itp. Jest to bardzo skomplikowane zadanie, które od czasu do czasu udaje się rozwiązać numerycznie (zazwyczaj dla pojedynczych, „specjalnych” galaktyk). Jednak w epoce wielkich przeglądów nieba, dostarczających miliony nowych obserwacji (a już niedługo *Large Synoptic Survey Telescope*, LSST, będzie dostarczał nawet 15 terabajtów danych w ciągu nocy), musimy znaleźć coś szybszego i prostszego: narzędzie, które pomoże w wyznaczeniu w skończonym czasie M_* i SFR dla wszystkich zaobserwowanych galaktyk. Zostało więc opracowane tzw. prawo atenuacji.

W astronomii galaktycznej znamy pojęcie ekstynkcji, czyli pochłaniania i rozpraszania energii pochodzącej z punkowego obiektu i przechodzącej przez „ścianę” pyłu w kierunku obserwatora. Atenuacja jest znacznie bardziej skomplikowanym pojęciem. W przypadku atenuacji mamy do czynienia z wieloma punktowymi źródłami światła zanurzonymi w otaczającym je pyłe. Mogą się one znajdować przed, za lub pomiędzy drobinami pyłu a obserwatorem. Tę skomplikowaną relację astronomowie zwykli opisywać... pojedynczą funkcją potęgową $A(\lambda)$. Tak, to nie jest chochlik drukarski. Najbardziej zaawansowane (i najbardziej fizyczne) prawa atenuacji pyłu w galaktykach składają się aż z... dwóch funkcji potęgowych – jednej dla

obszarów chmur narodzin (*birth cloude*, BC), gdzie pył i gwiazdy są znacznie bardziej skupione, a drugiej dla obszarów międzygalaktycznych (*interstellar medium*, ISM).

$$A(\lambda) = \begin{cases} A_\lambda(\text{BC}) + A_\lambda(\text{ISM}), & \text{dla gwiazd poniżej } <10^7 \text{ lat,} \\ A_\lambda(\text{ISM}), & \text{dla gwiazd powyżej } 10^7 \text{ lat,} \end{cases}$$

gdzie wartość atenuacji A_λ dla długości fali λ jest zdefiniowana jako $A_V \cdot (\lambda/550 \mu\text{m})^\delta$. Wartość wykładnika δ jest różna dla chmury narodzin i dla obszaru międzygalaktycznego, a A_V jest atenuacją zmierzoną w paśmie fotometrycznym V wokół długości fali $\sim 550 \mu\text{m}$.

Atenuacja pyłu jest ściśle związana z długością fali elektromagnetycznej i jest silniejsza dla ultrafioletu oraz mniej zauważalna w bliskiej podczerwieni. Zaskakujące jest to, że porównania ilościowe atenuacji pyłu, pochodzące z rozwiązywania równań transportu energetycznego, i te otrzymane za pomocą modelu złożonego z dwóch funkcji potęgowych są bardzo zbliżone. W ramach błędów obserwacyjnych – pochodzących z teleskopów oraz niepewności dopasowania modeli – obie metody dają zwykle zgodne wyniki.

To właśnie atenuacja pyłu pozwala na modelowanie galaktyk z zachowaniem bilansu energetycznego. Dzięki niej wiemy, ile tak naprawdę jest młodych i starych gwiazd w galaktykach. Wiemy również, jaką korektę zastosować do danych obserwacyjnych, aby oszacować ilość wszystkich gwiazd (masę gwiazdową), zawartość młodych, masywnych gwiazd (SFR) w celu bardziej zaawansowanych analiz ewolucji galaktyk.

Oczywiście nie jest to jedyne zastosowanie analizy jasności pyłu i obserwacji podczerwonych w astrofizyce. O innych zaletach i wadach pyłu oraz o tym, że w odległości 10 miliardów lat świetlnych od Drogi Mlecznej pył uniemożliwia obserwację około 80% znajdujących się tam galaktyk, będziemy jeszcze pisali na łamach *Delty*.

Ziemiolubne liczby i ulotne reszty

Mariusz SKAŁBA*

Człowiek twardo stąpa po ziemi, a z nim pojęcia, które stworzył. Na przykład liczby są tylko tym, do czego człowiekowi służą: porządkowe, kardynalne i inne. W skończonych zastosowaniach są to liczby naturalne $1, 2, 3, \dots$ i ich uogólnienia: liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste i zespolone. Słowo *skończone* w poprzednim zdaniu odnosi się wyłącznie do opisywanego atrybutu *liczonego* obiektu: a to jego rangi, a to mocy, a to fizycznych rozmiarów. W matematyce teoretycznej liczb praktycznie zawsze potrzebujemy nieskończenie wiele!

Wróćmy zatem na ubitą przez tysiąclecia glebę teorii liczb. Jak udowodnić najprościej, że równanie

$$x^2 - 20xy + y^2 = 100000000003$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y ? Można na przykład zauważyć, że odpowiednia kongruencja mod 4 nie ma rozwiązań. Wynika to stąd, że kwadrat liczby całkowitej zawsze przystaje do 0 lub 1 modulo 4, a zatem lewa jej strona przystaje do 0, 1, 2 modulo 4, a prawa do 3.

Nie zawsze jest tak łatwo i o tym właśnie jest ten artykuł. Rozważmy mianowicie równanie

$$(1) \quad x^4 - 2y^4 = 7z^2$$

i zapytajmy o jego rozwiązania w liczbach całkowitych nieujemnych x, y, z . Jeśli x, y, z jest takim rozwiązaniem oraz $x = 0$, to $-2y^4 = 7z^2$, a więc również $y = z = 0$. Załóżmy teraz nie wprost, że istnieje rozwiązanie, w którym $x > 0$, i rozważajmy dalej jedno z rozwiązań, w którym x przyjmuje wartość dodatnią najmniejszą z możliwych. Udowodnimy przede wszystkim, że wówczas

$$(2) \quad (x, y) = (x, z) = (y, z) = 1.$$

((a, b) oznacza największy wspólny dzielnik liczb całkowitych a, b .) Niech $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \dots\}$ oznacza dalej zbiór wszystkich liczb pierwszych. Załóżmy, że istnieje takie $q \in \mathbb{P}$, że $x = qx_1, y = qy_1$ dla pewnych $x_1, y_1 \in \mathbb{N}_0$, przy czym $x_1 > 0$. Po podstawieniu tych wartości do równania (1) otrzymujemy

$$q^4(x_1^4 - 2y_1^4) = 7z^2$$

i stąd dostajemy, że $z = q^2z_1$, gdzie $z_1 \in \mathbb{N}_0$ (również dla $q = 7$). Liczby x_1, y_1, z_1 spełniają zatem równanie (1), przy czym $0 < x_1 = x/q < x$, sprzeczność z wyborem x . Udowodniliśmy więc, że $(x, y) = 1$. Analogicznie wykazujemy, że $(x, z) = (y, z) = 1$. Z (1) i (2) wynika, że wszystkie liczby x, y, z są nieparzyste. Rzeczywiście, gdyby x była parzysta, to z (1) wynika, że również z byłaby parzysta, skąd $(x, z) \geq 2$, sprzeczność z (2). Podobnie z jest nieparzysta. Gdyby y była parzysta to mielibyśmy kongruencję

$$x^4 \equiv 7z^2 \pmod{8},$$

ale to nie jest możliwe, gdyż kwadrat liczby nieparzystej przystaje do 1 mod 8:

$$(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 = 8m + 1, \quad \text{gdzie } m \in \mathbb{N}_0.$$

Zatem y jest również nieparzysta. Wykażemy teraz, że

$$(3) \quad z \equiv \pm 1 \pmod{8}.$$

Jeśli $z = 1$, to (3) oczywiście zachodzi. Gdy $z > 1$, rozpatrujemy dowolny dzielnik pierwszy p liczby z . Mamy $p \neq 2$ oraz z równania (1) wynika kongruencja

$$x^4 - 2y^4 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ponieważ $z \equiv 0 \pmod{p}$, więc $y \not\equiv 0 \pmod{p}$ na mocy (2). Niech t będzie takie, że $yt \equiv 1 \pmod{p}$. Wówczas

$$(xt)^4 \equiv 2(yt)^4 \equiv 2 \pmod{p},$$

czyli kongruencja $r^2 \equiv 2 \pmod{p}$ ma rozwiązanie, np. $r = (xt)^2$. Teraz trzeba przywołać słynne twierdzenie z teorii reszt kwadratowych. Jako pierwszy udowodnił je Gauss:

Jeśli $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$, to kongruencja $r^2 \equiv 2 \pmod{p}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.



Rozwiązanie zadania F 1002.

Gdyby do Ziemi nie docierał strumień energii ze Słońca, to temperatura jej powierzchni miałaby wartość, przy której strumień energii dopływającej z wnętrza Ziemi byłby równy strumieniowi energii wypromieniowanej.

Wartość strumienia ciepła dostarczanego w procesie przewodnictwa cieplnego wynosi

$$q_p = \lambda \frac{dT}{dx},$$

gdzie x oznacza głębokość. Strumień energii wypromieniowanej z powierzchni:

$$q_w = \sigma T^4.$$

Drugie równanie opisuje promieniowanie ciała doskonale czarnego i w przypadku powierzchni ciał „rzeczywistych” jego prawą stronę należy pomnożyć przez zdolność emisyjną powierzchni α . Dla powierzchni Ziemi α jest bliska 1, a dla materiałów tworzących skały powierzchniowe mieści się w granicach $1 > \alpha > 0,2$.

Przyjmijmy $\alpha = 1$ oraz $dT/dx = 30 \text{ K/km}$. Równość obu strumieni energii prowadzi do oszacowania:

$$T = \left(\frac{q_p}{\sigma}\right)^{1/4} \approx 32 \text{ K}.$$

Uwzględnienie zdolności emisyjnej powierzchni wprowadziłoby dodatkowy czynnik równy co najwyżej $5^{1/4} \approx 1,5$, a więc prowadzi do co najwyżej $T \approx 48 \text{ K}$.

Dominującym źródłem energii we wnętrzu Ziemi są najprawdopodobniej rozpady jąder ^{232}Th o czasie połowicznego rozpadu $\tau \approx 14 \cdot 10^9$ lat, ^{238}U , $\tau \approx 4,47 \cdot 10^9$ lat oraz ^{40}K , $\tau \approx 1,25 \cdot 10^9$ lat.



Podsumujmy: liczba z jest iloczynem swoich czynników pierwszych p , a zatem (3) zachodzi. Skoro $z = 8k \pm 1$, więc $z^2 = 16(4k^2 \pm k) + 1$, czyli $z^2 \equiv 1 \pmod{16}$. Z podobnych powodów $x^4 \equiv 1 \equiv y^4 \pmod{16}$. Zatem lewa L i prawa P strona równania (1) spełniają następujące kongruencje:

$$L \equiv 1 - 2 \cdot 1 \equiv 15 \pmod{16}, \quad P \equiv 7 \cdot 1 \equiv 7 \pmod{16},$$

co daje upragnioną sprzeczność.

Jedynym rozwiązaniem równania (1) w liczbach całkowitych jest więc trójka $x = y = z = 0$. W finale dowodu rozstrzygającą rolę odegrały rozważania modulo 16. Nie jest jednak prawdą, że kongruencja

$$x^4 - 2y^4 \equiv 7z^2 \pmod{16}$$

nie ma rozwiązań w liczbach nieparzystych. Wystarczy wziąć $x = 1, y = 1, z = 3$.

Nie jest to przypadek. W pozostałej części artykułu pokażemy, że dla każdej liczby $m > 1$ istnieją liczby całkowite x, z spełniające kongruencję

$$(4) \quad x^4 - 2 \equiv 7z^2 \pmod{m}.$$

Oznacza to, że strategia dowodu, że równanie (1) nie ma całkowitych rozwiązań poza $x = y = z = 0$, polegająca na szukaniu liczby m , dla której kongruencja

$$x^4 - 2y^4 \equiv 7z^2 \pmod{m}$$

nie ma rozwiązań x, y, z spełniających $(x, y, z, m) = 1$, nie może się powieść.

Z twierdzenia chińskiego o resztach wynika, że można się ograniczyć do przypadku, gdy $m = p^k$, gdzie $p \in \mathbb{P}$. Najpierw rozpatrzmy przypadek $p = 2$ i położmy $x = 1$. Wykażemy, że dla każdego $k \geq 1$ istnieje z_k spełniające kongruencję

$$(5) \quad 7z_k^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2^k}.$$

Dla $k \leq 3$ bierzemy $z_k = 1$. Załóżmy teraz, że dla pewnego $k \geq 3$ istnieją takie z_k, t_k , że $7z_k^2 + 1 = t_k \cdot 2^k$. Wykażemy, że istnieją takie z_{k+1}, t_{k+1} , że $7z_{k+1}^2 + 1 = t_{k+1} \cdot 2^{k+1}$. Niech $z_{k+1} = z_k + u_k 2^{k-1}$, gdzie u_k dobierzemy za chwilę. Modulo 2^{k+1} mamy

$$\begin{aligned} 7z_{k+1}^2 + 1 &= 7(z_k + u_k 2^{k-1})^2 + 1 \equiv \\ &\equiv 7z_k^2 + 1 + u_k \cdot 7z_k 2^k = 2^k(t_k + u_k \cdot 7z_k). \end{aligned}$$

Liczbę u_k dobieramy tak, aby prawa strona powyższego wzoru była podzielna przez 2^{k+1} :

$$u_k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t_k \equiv 0 \pmod{2}, \\ 1 & \text{gdy } t_k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

To działa, gdyż $7z_k$ jest nieparzyste.

Zajmiemy się teraz kongruencją (4) dla $m = p^k$, gdzie $p \in \mathbb{P} \setminus \{2, 7\}$. Dla $x = 0, 1, 2$ otrzymujemy odpowiednio kongruencje

$$7z^2 \equiv -2 \pmod{p^k}, \quad 7z^2 \equiv -1 \pmod{p^k}, \quad 7z^2 \equiv 14 \pmod{p^k}.$$

Niech t spełnia warunek $7t \equiv 1 \pmod{p^k}$. Powyższe kongruencje są równoważne następującym:

$$(6) \quad z^2 \equiv -2t \pmod{p^k}, \quad z^2 \equiv -t \pmod{p^k}, \quad z^2 \equiv 2 \pmod{p^k}.$$

Ponieważ zredukowana grupa reszt modulo p^k jest cykliczna oraz

$$(-2t)(-t) \cdot 2 = (2t)^2,$$

więc przynajmniej jedna z kongruencji (6) ma rozwiązanie z (jedna lub wszystkie). W istocie chodzi tu o to, że iloczyn niereszt kwadratowych jest resztą kwadratową itd. Czytelnikowi pozostawiamy przypadek $m = 7^k$.

Podobną własność jak równanie (1) mają równania

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0 \quad [\text{E. Selmer, 1951}],$$

$$x^4 - 17y^4 = 2z^2 \quad [\text{H. Reichardt, 1942}].$$

Były to w zasadzie pierwsze przykłady nietrywialnych równań diofantycznych, które nie spełniają *zasady lokalno-globalnej*, czyli nie mają nietrywialnych rozwiązań wymiernych, mimo że odpowiednie kongruencje mod m mają nietrywialne rozwiązania dla każdej liczby $m > 1$. Nie ma takich równań



Rozwiązanie zadania F 1001.

Temperatura powierzchni planety ustala się, gdy wartość strumienia energii docierającej do jej powierzchni równa się wartości energii wypromieniowanej. Ilość energii docierającej do Ziemi od Słońca w jednostce czasu to:

$$q_S = \pi(1 - A_Z)R^2 S,$$

gdzie R oznacza promień Ziemi. Przyjmując, że Ziemia promieniuje jak ciało doskonale czarne o temperaturze T_Z , jej powierzchnia wypromieniowuje w jednostce czasu energię równą:

$$q_w = 4\pi R^2 \sigma T_Z^4.$$

Równość obu strumieni prowadzi do wniosku, że:

$$T_Z = \left(\frac{(1 - A_Z)S}{4\sigma} \right)^{1/4} \approx 254 \text{ K.}$$

Dla Marsa, poza inną wartością albedo, należy uwzględnić większą odległość od Słońca:

$$T_M = \left(\frac{(1 - A_M)S a_z^2}{4\sigma a_M^2} \right)^{1/4} \approx 208 \text{ K.}$$

Mierzone średnie temperatury powierzchni wynoszą odpowiednio $T_Z = 288 \text{ K}$ i $T_M = 210 \text{ K}$. Duża różnica obliczonej i mierzonej temperatury dla Ziemi jest wynikiem istnienia atmosfery (ciśnienie „atmosferyczne” na Marsie wynosi 0,006 atm) i związanego z nią efektu cieplarnianego.

stopnia ≤ 2 dowolnej liczby zmiennych, gdyż zachodzi następujące słynne twierdzenie Hassego–Minkowskiego:

Niech $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j$ będzie formą kwadratową nieokreśloną o współczynnikach całkowitych. Jeśli dla każdego $m > 1$ kongruencja $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{m}$ ma rozwiązanie x_1, x_2, \dots, x_n spełniające $(x_1, x_2, \dots, x_n, m) = 1$, to istnieją $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$, że $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ oraz $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Nierozwiązalność kongruencji $F \equiv 0 \pmod{m}$ dla liczby m odpowiednio dobranej do badanego równania diofantycznego $F = 0$ jest ewidentną przeszkodą dla jego rozwiązalności w liczbach całkowitych. Przykłady takie, jak Selmera, Reichardta, równanie (1) i wiele, wiele innych dotyczą trudnej rzeczywistości: czasem przeszkody na drodze do rozwiązalności są bardziej subtelne i głębiej ukryte. I tak np. równania reprodukowane w tym tekście dają nietrywialne elementy grupy Szafarewicza–Tate’a odpowiednich krzywych eliptycznych. Kryje się za tym wszystkim matematyka nowoczesna i abstrakcyjna, ale jednocześnie bardzo, bardzo konkretna – nasz przykład równania (1) ilustruje oczywiście tylko ten drugi aspekt. Ma to być jednak wystarczającą zachętą dla Czytelnika Zainteresowanego teorią liczb, aby pogłębić swoje studia tego fascynującego działu matematyki :)



Zadania

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1639. Znajdź wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ nierówność

$$f(x + y) + y \leq f(f(f(x))).$$

Rozwiązanie na str. 17

M 1640. Wśród dowolnych trzech uczestników pewnego kółka matematycznego można wskazać dwóch, którzy wzajemnie się lubią, a wśród dowolnych czterech uczestników są dwaj tacy, którzy się wzajemnie nie lubią. Zakładając, że każdym dwóm uczestnikom darzy się wzajemną sympatią lub antypatią, znajdź największą możliwą liczbę uczestników kółka.

Rozwiązanie na str. 12

M 1641. Udowodnij, że liczba składająca się w zapisie dziesiętnym z 2^n jedynek ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.

Rozwiązanie na str. 18

Przygotował Andrzej MAJHOFER

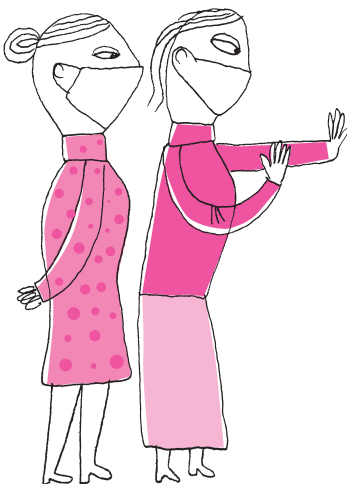
F 1001. Oszacuj temperatury powierzchni Ziemi i Marsa, jakie ustaliłyby się, gdyby jedynym źródłem energii było promieniowanie słoneczne. Uwzględnij odbicie części promieniowania od powierzchni planety. Dla Ziemi uśredniony względem czasu ułamek odbijanej energii słonecznej (albedo) wynosi $A_Z = 0,306$, dla Marsa $A_M = 0,25$. Strumień energii słonecznej docierającej do Ziemi (stała słoneczna) $S \approx 1,36 \text{ kW/m}^2$, stała Stefana–Boltzmana $\sigma \approx 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$. Duża półoś orbity Marsa $a_M \approx 1,55 \text{ au}$ ($\text{au} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ oznacza tzw. jednostkę astronomiczną równą dużej półosi orbity Ziemi a_Z).

Rozwiązanie na str. 7

F 1002. Temperatura skał tworzących płaszcz Ziemi rośnie wraz z głębokością. Szybkość obserwowanej zmiany zależy od miejsca na powierzchni Ziemi. Ocenia się, że z dala od granic płyt tektonicznych wynosi od 25 K/km do 30 K/km .

Oszacuj, jaka byłaby średnia temperatura powierzchni Ziemi, gdyby nie ogrzewało jej Słońce. Dla skał przyjmij średni współczynnik przewodnictwa cieplnego $\lambda \approx 2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Stała Stefana–Boltzmana $\sigma \approx 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$.

Rozwiązanie na str. 6



Epidemie w liczbach

W dniu, w którym piszę ten tekst (8 kwietnia), na świecie odnotowano prawie 1,5 mln zakażonych COVID-19, zmarłych z powodu choroby wywołanej koronawirusem – 87 tysięcy. Najgorsza sytuacja jest w USA: zakażonych 418 tys., zmarłych 14,2 tysięcy.

Zamknięci w mieszkaniach, na kwarantannach i w szpitalach, zasypani informacjami o charakterze pandemii, która dotknęła świat, zastanawiamy się, jak długo jeszcze i jak to się skończy? Starsi (którym pozwolono robić zakupy przed południem) liczą na to, że przeżyją. I przypominają, że nie jest to jedyna znana w historii świata epidemia; w zbiorowej pamięci trwa jeszcze tragiczny bilans grypy „hiszpanki” (1918–1920), zachorowało wtedy 500 mln (1/3 ludzi na planecie), a zmarło 20–100 mln.

Epidemie to zachorowania wielkich populacji wywołane przez mikroorganizmy lub wirusy; jeżeli rozpowszechnią się na całym świecie, to przypisujemy im nazwę pandemii. Towarzyszyły ludziom od zawsze, tak jak towarzyszą im drobnoustroje. Pierwsze historyczne świadectwo dał Tukidydes, opisując zarazę występującą w trakcie II wojny peloponeskiej, między Spartą a Atenami (431 r. p.n.e.), z takimi objawami, jak: wysoka gorączka, ból głowy, kaszel, wymioty, biegunka i w końcowej fazie ropiejąca wysypka. Nie wiemy, czy była to ospa, dżuma, czy tyfus. Ateny straciły połowę mieszkańców, zmarł też dowódca wojsk ateńskich, Perykles. Prawdopodobnie Ateńczycy przenieśli tę chorobę na Sycylię (Syrakuzy), co przyczyniło się do klęski Kartagińczyków atakujących Syrakuzy w 396 r. p.n.e. Na przełomie tysiącleci do Kampanii, w południowym rejonie Półwyspu Apenińskiego, prawdopodobnie z Afryki wraz z handlarzami warzyw, przywędrowały komary... A z nimi malaria. Przez kilka kolejnych stuleci malaria wyludniała południowe Włochy, doprowadzając mieszkańców także do ekonomicznej klęski. Często towarzyszyła wojnom i podbojom. Do dziś nie mamy przeciw malarii efektywnej szczepionki i nadal może to być choroba śmiertelna.

Do upadku Cesarstwa Rzymskiego przyczyniła się epidemia ospy przywieziona z Syrii przez legiony w 166 r. W szczycie epidemii umierało wówczas dziennie ponad 2 tysiące Rzymian. Ocenia się, że w latach 165–180 w wyniku tej epidemii zmarło w Cesarstwie Rzymskim co najmniej 5 mln ludzi, w tej liczbie Marek Aureliusz.

Pierwszą epidemią opisaną w średniowiecznej Europie była epidemia dżumy (541–542), przywieziona z Chin. W jej szczycie w Konstantynopolu umierało dziennie 10 tys. osób, a populacja tamtego regionu zmalała o 40%. Dżuma zabiła 100 mln ludzi, 1/3 mieszkańców Ziemi.

Prawdziwe żniwo zebrała także pandemia dżumy w latach 1347–1351; rozpoczęła się w Chinach i zabiła połowę ludności Chin (60 mln), po czym dotarła do Europy zachodniej, zabiła 1/3 populacji, w niektórych rejonach Włoch i Francji zmarło nawet 80% ludności (nie wiadomo dlaczego ta epidemia ominęła ziemię Królestwa Polskiego).

Dżuma pozostała w dużych miastach: w 1466 r. w Paryżu zmarło 40 tys. osób, w 1665 r. 1/3 mieszkańców Londynu. W Wenecji od XIV do XVI wieku dżuma wybuchała 22 razy, w 1656 r. w Neapolu zmarło 150 tys. osób (połowa ludności), w XVII wieku – 1,25 mln Hiszpanów. Prawdopodobnie właśnie dżumę sprowadzili na ziemię polskie Szwedzi (setki tysięcy ofiar).

W XVI wieku rozszalała się w Europie kiła, śmiertelna choroba, obejmując 1/3 ludności.

Przyczyny epidemii w starożytności i średniowieczu nie były znane, choć przypisywano je działaniom szatana, ułomnościom i grzechom ludzkim, miazmatom bagien i miast. Nie zwrócono uwagi na brud, odpadki, zatrutą fekaliami wodę, pchły, wszy... .

Już przedstawione tu w sposób wrywkowy dane wskazują na dynamikę rozwoju nieleczonych epidemii; nie znamy przyczyn ich „spontanicznego” wygasania.

Obecna pandemia koronawirusa przypomina te wcześniejsze – z powodu braku wiedzy o patogenie w momencie startu oraz braku leku. Kwarantanny i mycie rąk epidemii nie kończą – wirus zostaje z nami, a ci, którzy nie zachorowali i nie umarli, muszą obawiać się kolejnego wybuchu epidemii i liczyć na znalezienie leków i szczepionek. Wyjątkowo wyraźnie ujawniła się konieczność zwiększenia finansowania badań, a może także utworzenia nowej ich struktury. Uprzednio w praktyce wykorzystywano istniejące odkrycia podstawowe (fizyka, genetyka). Tym razem społeczeństwa proszą naukę o pomoc, a naukowcy są gotowi do natychmiastowego dzielenia się informacją z całym światem. Chwilowo zapominano o patentach i ślimaczych procesach weryfikujących ważne publikacje.

Czy gdy zaraza przycichnie, świat będzie lepszy?

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Wiele informacji zaczerpnęłam z książki Krzysztofa Dołowego „WBREW BOGOM, czyli od magii i religii do metody naukowej i z powrotem” Wyd. CeDeWu, 2020.



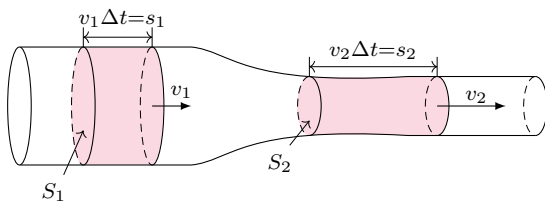
mała delta

Prosimy nie zbliżać się do krawędzi peronu!

Ding Dong! Uwaga, nadjeżdża pociąg, prosimy nie zbliżać się do krawędzi peronu!

Na pewno każdy nie raz słyszał ten komunikat i zastanawiał się, czy pędzący pociąg faktycznie może zrobić komuś krzywdę. W końcu wydawałoby się, że jedyne zagrożenie może wynikać z odepchnięcia śmiałka, lekceważącego ów zakaz, przez pęd powietrza wywołany przez pociąg. Otóż jest zupełnie odwrotnie! I tu uwaga – jest to jedno z niewielu praw, których nie radzę sprawdzać doświadczalnie. Przynajmniej nie dosłownie. Ponieważ jednak z natury jesteśmy dociekliwi i nie lubimy brać czegoś na tak zwaną wiarę, przeprowadźmy małą symulację tego zjawiska. Będzie w pełni bezpieczna i można ją wykonać samodzielnie w domu. Weźmy dwie kartki papieru i suszarkę do włosów, a następnie skierujmy strumień powietrza pomiędzy kartki. (Przed przeprowadzeniem doświadczenia dobrze jest się z kimś założyć o to, co się stanie z kartkami!) Niemożliwe! Kartki zamiast polecieć w dwie różne strony przyciągnęły się! Teraz już widać, że podobnie może się stać z człowiekiem stojącym zbyt blisko nadjeżdżającego pociągu.

Skoro już wiemy, co się dzieje, spróbujmy, Drogi Czytelniku, wyjaśnić, dlaczego tak jest. Wyobraź sobie rurę, przez którą płynie woda i w pewnym momencie napotyka zwężenie (rysunek). Jak Ci się wydaje, czy woda będzie płynąć przez nie szybciej, czy wolniej? A co dzieje się z ciśnieniem w tym przewężeniu? W celu znalezienia odpowiedzi na to pytanie zastanówmy się, co w tym przypadku nie ulegnie zmianie. Na pewno pamiętasz wielkość, która w przyrodzie jest zachowana. Tak, chodzi o energię. To właśnie od zasady zachowania energii zaczniemy nasze rozważania dotyczące wody w rurze. Spójrz teraz na rysunek poniżej.



Widzimy na nim cieciz w ruchu o zmiennym przekroju. Kolorem zaznaczona jest pewna ilość cieciz o tej samej masie, która jest iloczynem gęstości i objętości danego „fragmentu”:

$$m = \rho \cdot V,$$

gdzie ρ jest gęstością cieciz, a V jej objętością.

Woda płynąc, porusza się z jakąś prędkością, zatem ma energię kinetyczną, którą można wyrazić wzorem:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho V v^2}{2}.$$

Jeżeli nasza cieciz znajduje się na jakiejś wysokości, ma też energię potencjalną grawitacji:

$$E_p = mgh = \rho V gh.$$

Nie możemy też zapomnieć o ruchu cząsteczek wewnątrz cieciz. Im również odpowiada pewien rodzaj energii, który nazwiemy roboczo energią chaotyczną, ponieważ taki właśnie jest ruch tych cząsteczek. Poruszając się, cząsteczki wywierają ciśnienie na krawędzi naszego fragmentu cieciz. Działają więc pewną siłą F na powierzchnię S . Aby taki fragment okiełznać, a więc pozbawić go omawianej energii, należałoby go ścisnąć do nieskończenia małych rozmiarów, czyli przeciwdziałać sile F na drodze s . Z tego wynika, że energię chaotyczną możemy zapisać wzorem:

$$E_{ch} = Fs = pSs = pV.$$

Mamy już wszystkie energie i możemy je sprowadzić do jednej postaci, uwzględniając fakt, że musi ona pozostać stała:

$$E = E_k + E_p + E_{ch},$$

$$E = \frac{\rho V v^2}{2} + \rho V gh + pV,$$

$$E = V \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p \right) = \text{const.}$$

Ponieważ objętość naszego fragmentu cieciz się nie zmienia, czynnik w nawiasie również musi pozostać stały. Mamy więc ostatecznie sformułowane prawo:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const.}$$

Jest to prawo Bernoulliego, które jest spełnione nie tylko dla wody, ale również dla innych płynów, w tym omawianego na początku powietrza! (Tak, w języku fizyki płyn to nie tylko cieciz, ale również gaz.) Na mocy tego prawa możemy zauważyć, że przy zaniedbywalnie małej różnicy wysokości w momencie, w którym prędkość płynu rośnie, maleje jego ciśnienie. Możemy

więc spokojnie wrócić do omawianego na początku przykładu z pociągami i kartkami. Teraz jest już jasne, że w momencie, gdy pociąg wjeżdża na stację, powietrze, które znajduje się pomiędzy pociągami a człowiekiem stojącym blisko niego, porusza się szybciej, a więc ma niższe ciśnienie. Wiesz też, że ruch powietrza odbywa się w kierunku od wysokiego do niskiego ciśnienia. Oczywiście zatem staje się, że obiekty znajdujące się w bliskiej odległości od pociągu będą pod niego wessane. Ciekawe, że prawo to na skutek błędnego wyobrażenia zostało również nazwane paradoksem hydrostatycznym. Faktycznie, jak sami się pewnie przekonaliście, rozumowanie to nie jest całkowicie intuicyjne. Jednak w życiu codziennym zjawisko to występuje częściej. Weźmy na przykład drzewa trzaskające podczas przeciągu, silne poddmuchy wiatru między budynkami lub na schodach w podziemnym przejściu.

Podobnie nurt w rzece – zawsze wciąga obiekty na środek, a najsilniejszy występuje między wysepkami. Zjawisko to może stwarzać niebezpieczeństwo w żegludze, gdy dwa statki płyną równolegle, woda między nimi płynie szybciej i statki mogą się zderzyć. Jak widać, zjawisk tych jest bardzo dużo i potrafimy je wyjaśnić w stosunkowo nieskomplikowany sposób. Ciebie, Drogi Czytelniku, zachęcam do obserwowania otaczającego Cię świata i znajdowania kolejnych przykładów.

A na koniec zagadka. Potrzebne jest pudełko, suszarka i zapalona świeca. Ustaw świecę za rogiem pudełka i skieruj strumień powietrza z suszarki wzdłuż niego. W którą stronę przesunie się płomień świecy? Zostanie wypchnięty czy wciągnięty przez poruszające się powietrze?

Agnieszka CHUDEK

GW190425 – nieoczekiwane masywny układ gwiazd neutronowych?

Michał BEJGER

Na początku roku zespoły LIGO i Virgo ogłosiły pierwszą „wyjątkową” (to znaczy nadającą się do osobnej publikacji) detekcję z trzeciego cyklu obserwacji (O3) detektorów Advanced LIGO i Advanced Virgo. Sygnał GW190425 został zarejestrowany 25 kwietnia 2019 roku. Był obserwowany przez około 128 sekund, a zmierzona wtedy masa ćwierku $M_c = (m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5} \simeq 1,44_{-0,02}^{+0,02} M_\odot$ wskazuje, że powstał on w wyniku połączenia się dwóch lekkich obiektów zwartych, najprawdopodobniej gwiazd neutronowych. Masa ćwierku GW190425 jest wyraźnie większa od tej zmierzonej w pierwszym tego typu sygnale, GW170817. Oznacza to, że łączna masa łączących się obiektów była niezwykle wysoka, jak na znane dotychczas układy podwójne gwiazd neutronowych, ponieważ wyniosła aż $3,4 M_\odot$, a składniki miały masy w zakresie od $1,5$ do $1,9 M_\odot$.

Przed odkryciem GW190425 LIGO i Virgo obserwowały wiele sygnałów emitowanych przez układy podwójne czarnych dziur (o masach między 6 a $50 M_\odot$), i jeden wywołany zderzeniem się gwiazd neutronowych (wspomniany wcześniej GW178017). Za typową masę gwiazdy neutronowej przez wiele lat uważano $1,4 M_\odot$, dzięki pomiarom mas w relatywistycznych układach podwójnych z pulsarem radiowym, np. w układzie podwójnym Hulse’a–Taylora. Gwiazdy neutronowe mogą mieć jednak bardzo różne masy, od około $1,17$ do $2,1 M_\odot$. Wartości mas (a zwłaszcza maksymalna możliwa wartość masy) są istotne, ponieważ gwiazdy neutronowe są obiektami zbudowanymi z materii dużo gęstszej od materii jądrowej: masa kilku słońc jest zamknięta w przestrzeni o promieniu „zaledwie” 11 – 13 km. Odkrycie, z czego się składają, jest jednym z najgorętszych problemów współczesnej astrofizyki.

Fale grawitacyjne oferują nowe metody badania wnętrza gwiazd. W czasie ostatnich kilku obrotów układu podwójnego gwiazdy są tak blisko siebie, że istotne staje się uwzględnienie ich rozciąglej i materialnej struktury (założenie, że są masami punktowymi staje się niewystarczające). Wpływa to na charakter modelowanej fali grawitacyjnej. Efekt zależy od wartości mas składników i – co bardzo ważne – od równania stanu gęstej materii gwiazd neutronowych. Układ będący źródłem GW190425 był znacząco cięższy od GW170817 i zapewne z tego powodu nie udało się, w sposób statystycznie wiarygodny, stwierdzić obecności efektów pływowych (wzajemnej deformacji pływowej składników). Jest to związane z faktem, że im cięższa gwiazda neutronowa,

Masa ćwierku GW170817 jest równa $1,186_{-0,001}^{+0,001} M_\odot$. Łączna masa gwiazd wynosiła ponad $2,7 M_\odot$, a masy składników oszacowano na od $1,16$ do $1,6 M_\odot$.

Pulsar w układzie Hulse’a–Taylora ma masę $1,4398 M_\odot$, a masa towarzysza, najprawdopodobniej również gwiazdy neutronowej, to $1,3886 M_\odot$.

Równanie stanu (opisujące zależność między ciśnieniem a gęstością) zawiera informacje o mikroskopowych właściwościach zimnej, gęstej materii. Przepis ten stanowi dane wejściowe dla równań hydrodynamicznych gwiazdy, czyli jest powiązany z masą i rozmiarem gwiazdy, a także z jej podatnością na deformację pływową w polu grawitacyjnym drugiego składnika.

Interpretacja GW190425 jako układu zawierającego co najmniej jedną czarną dziurę oznaczałaby istnienie zupełnie nowej, nieznaną do tej pory populacji czarnych dziur, a jak wiadomo, „nadzwyczajne twierdzenia wymagają nadzwyczajnych dowodów” (Carl Sagan).



Rozwiązanie zadania M 1640. Niech n będzie liczbą uczestników pewnego kółka, spełniającego opisane w zadaniu warunki. Udowodnimy, że $n \leq 8$. Przydatny okaże się następujący lemat, którego dowód można znaleźć na przykład w Wikipedii pod hasłem *twierdzenie Ramseya*:

Wśród dowolnych 6 uczestników kółka można znaleźć trzech, którzy się wzajemnie lubią lub trzech, którzy się wzajemnie nie lubią.

Wybermy pewnego uczestnika A . Przypuśćmy, że lubi on pewnych 6 uczestników. Zgodnie z założeniem zadania oraz powyższym lematem wśród nich znajduje się 3, którzy wzajemnie się lubią, i razem z A tworzą oni czwórkę, która przeczy założeniom zadania. Przypuśćmy teraz, że A nie lubi pewnych 4 uczestników. Wśród nich znajduje się dwóch, którzy się nie lubią, i razem z A tworzą oni trójkę sprzeczną z założeniami. Wynika stąd, że $n \leq 9$. Gdyby jednak $n = 9$, to każdy uczestnik musiałby lubić dokładnie 5 uczestników. Jest to sprzeczność, gdyż suma liczb sympatii poszczególnych uczestników wyniosłaby 45, a musi to być liczba parzysta ze względu na wzajemność uczuć. W tej sytuacji $n \leq 8$.

Jeśli ponumerujemy 8 uczniów liczbami od 1 do 8 i okaże się, że uczniowie o numerach k i l lubią się tylko wtedy, gdy $|(k - l) \bmod 8| \leq 2$, to ta grupka będzie spełniać warunki zadania, co kończy rozwiązanie.

tym bardziej jest zwarta i bardziej ściśnięta przez ekstremalną grawitację, a przez to mniej podatna na odkształcenie (ale oczywiście zależy to też od konkretnego, realizowanego w Naturze, nieznanego obecnie równania stanu). Sytuację dodatkowo komplikuje fakt, że nie zaobserwowaliśmy, jak w przypadku GW170817, emisji promieniowania elektromagnetycznego (w tym krótkiego błysku γ), czyli nie mamy bezpośrednich dowodów na rozzerwanie pływowe gwiazd i rozrzucone radioaktywnej materii wokół miejsca zderzenia, co zdarzyło się podczas obserwacji GW170817. Niemniej jednak obserwacje takie jak GW190425 zapewniają inny niż dotychczas wgląd w bardzo gęstą materię, a także w możliwe scenariusze powstawania układów podwójnych gwiazd neutronowych.

Podstawowa hipoteza o GW190425 zakłada, że było to połączenie dwóch gwiazd neutronowych, jednej o „typowej” masie około $1,4 M_{\odot}$, a drugiej dużo masywniejszej, około $2 M_{\odot}$. Radioastronomowie zaobserwowali do tej pory w Galaktyce kilkanaście układów podwójnych z gwiazdami neutronowymi. Masy składników są mniej więcej podobne do tych zmierzonych w GW170817 (zakres mas od $1,17$ do $1,65 M_{\odot}$), a masy całkowite układów znajdują się w przedziale od $2,5$ do $2,9 M_{\odot}$. Układ GW190425 odsta je więc znacząco od populacji galaktycznej. Alternatywna, egzotyczniejsza, hipoteza jest natomiast taka, że sygnał został wyemitowany podczas zderzenia „zwykłej” gwiazdy neutronowej z lekką czarną dziurą. Jednak do tej pory nie ma mocnych dowodów obserwacyjnych na istnienie czarnych dziur o masach mniejszych od około $4 M_{\odot}$.

Można zatem przypuszczać, że GW190425 jest skutkiem połączenia się dwóch gwiazd neutronowych, ale jednocześnie bardzo ciekawe jest zrozumienie, jak układ ten mógł w ogóle powstać, czy jest wyjątkowy i czy sposób jego powstania różni się od historii innych układów podwójnych w Galaktyce.

Standardowym sposobem powstawania układów podwójnych gwiazd neutronowych jest izolowana ewolucja „w polu” układu podwójnego dwóch zwykłych, masywnych gwiazd. Układy te nie wchodzi w interakcje z innymi gwiazdami aż do końca życia, gdy oba składniki wybuchają kolejno jako supernowe, pozostawiając po sobie gwiazdy neutronowe. By doszło do emisji fal grawitacyjnych rejestrowanych przez LIGO i Virgo, układ podwójny musi przetrwać dwie eksplozje, a separacja między gwiazdami musi być odpowiednia, aby układ podwójny mógł zacieśnić orbitę w czasie życia Wszechświata. Jedną z hipotez tłumaczących niezwykle wysoką masę GW190425 i brak podobnych układów w Galaktyce jest to, że takie przypadki łatwo przeoczyć, ponieważ ich czas życia jest w skali astronomicznej niezwykle krótki. Gwiazdy znajdują się od razu na bardzo ciasnej orbicie, o okresie obrotu mniejszym niż godzina (dla porównania, najciaśniejszy układ galaktyczny ma okres orbitalny 2 godziny).

Niektórzy astronomowie spekulują, że układ powstał w wyniku oddziaływań dynamicznych w gęstych obszarach gwiazdowych, takich jak gromady kuliste. Częstsze niż „w polu galaktycznym” oddziaływania grawitacyjne między gwiazdami mogą bowiem prowadzić do powstania układu podwójnego. Wiadomo też, że niektóre masywne gwiazdy neutronowe znajdują się w takich gromadach. Problemem w tym wytłumaczeniu jest niewielka obserwowana liczba kandydatów na takie układy: w Galaktyce tylko 1 na 10 znanych układów podwójnych gwiazd neutronowych znajduje się w gromadach kulistych, nie jest więc łatwo wytłumaczyć teoretycznie szacowaną na podstawie tej jednej obserwacji GW190425 częstość występowania powstających w tym modelu układów.

W naszej Galaktyce bardzo rzadko dochodzi do zderzeń gwiazd neutronowych (mniej więcej raz na sto tysięcy lat). Detektory takie jak Advanced LIGO i Advanced Virgo są dostatecznie czułe, by rejestrować zjawiska w odległości setek milionów lat świetlnych, gdy zatem osiągną pełną czułość (w kampanii obserwacyjnej O4 i później), umożliwi to obserwacje sygnałów typu GW190425 i GW170817 co najmniej kilka razy w roku. Kto wie, co zarejestrujemy następnym razem?

Informatyczny kącik olimpijski (138): Yet Another Substring Reverse

Tym razem omówimy zadanie *Yet Another Substring Reverse*, które pojawiło się na portalu www.codeforces.com.

Zadanie: Dane jest słowo $s = s_1s_2 \dots s_n$ o długości n , zawierające wystąpienia części liter alfabetu angielskiego A . W słowie s należy odwrócić jedno pod słowo, tzn. zastąpić je zapisem od prawej do lewej, aby otrzymać możliwie najdłuższe różnorodne pod słowo, czyli takie, które nie zawiera powtórzeń liter. Jaka jest długość najdłuższego różnorodnego pod słowa, które można uzyskać? Przykładowo dla $s = „bbaacc”$ wynikiem jest 3. Po odwróceniu fragmentu od trzeciej do szóstej litery otrzymujemy „bbacca”, którego najdłuższy różnorodny fragment to „bac”.

Niech $s_{l:p}$ oznacza pod słowo $s_l s_{l+1} \dots s_p$.

Na samym początku zauważmy, że długość różnorodnego pod słowa nie przekroczy $|A|$.

Najdłuższe różnorodne pod słowo $O(n|A|)$

Załóżmy przez chwilę, że nie wykonujemy odwrócenia i chcemy znaleźć długość najdłuższego różnorodnego pod słowa. Dla każdej pozycji początkowej wyznaczmy najdłuższe różnorodne pod słowo, które się w niej zaczyna. Formalnie dla ustalonego $1 \leq i \leq n$ znajdziemy takie największe k_i , że $s_{i:k_i}$ jest różnorodne. Zaczniemy od jednoliterowego pod słowa s_i i rozszerzamy je o kolejne litery, dopóki nie nastąpi powtórzenie.

Do sprawdzania, czy jakaś litera wystąpiła wcześniej, można wykorzystać tablicę zliczającą, którą po każdym rozszerzeniu aktualizujemy. Opisane rozwiązanie działa w czasie $O(n|A|)$, gdyż od każdej pozycji początkowej wykonamy co najwyżej $|A|$ rozszerzeń w prawo.

Najdłuższe różnorodne pod słowo $O(n + |A|)$

W tym rozwiązaniu, podobnie jak wcześniej, dla każdej pozycji $1 \leq i \leq n$ chcemy wyznaczyć takie największe k_i , że $s_{i:k_i}$ jest różnorodne. Skorzystajmy z metody gąsienicy. Otóż, tym razem nie będziemy dla każdej pozycji początkowej rozpoczynali przeszukiwania od słów jednoliterowych. Zauważmy, że jeśli $s_{i-1:k_{i-1}}$ jest różnorodne, to również $s_{i:k_{i-1}}$ jest różnorodne. Zatem nie ma potrzeby sprawdzania słów, które kończą się wcześniej niż k_{i-1} . Do sprawdzania powtórzeń wykorzystujemy tablicę zliczającą. Przy rozszerzaniu słowa z prawej strony dodajemy literę, a przy przejściu do kolejnej pozycji początkowej usuwamy literę z tablicy zliczającej. Rozwiązanie działa w czasie $O(n + |A|)$, gdyż każda litera zostanie dokładnie raz dodana i raz usunięta z tablicy zliczającej.

Rozwiązanie $O(n^2(n + |A|))$

Opisaliśmy metody znajdowania najdłuższego różnorodnego pod słowa, zatem możemy przejść do pierwszego rozwiązania zadania. Rozważmy odwrócenie każdego z $\frac{n(1+n)}{2}$ pod słów. Dla każdego przypadku znajdziemy najdłuższe różnorodne pod słowo za pomocą jednej z wyżej opisanych metod i wybierzmy najlepszy wynik. W zależności od wykorzystanej metody otrzymamy rozwiązanie $O(n^3|A|)$ lub $O(n^2(n + |A|))$.

Rozwiązanie $O(n^2|A|^3)$

Zauważmy, że możemy zredukować zadanie do znalezienia dwóch różnorodnych pod słów, które mają rozłączne zbiory liter oraz największą sumaryczną długość. Formalny dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi, a teraz pokażemy, jak dwa pod słowa,

$s_{l_1:p_1}$ oraz $s_{l_2:p_2}$, niemające wspólnych liter umieścić obok siebie za pomocą jednego odwrócenia. Załóżmy bez straty ogólności, że $s_{l_1:p_1}$ występuje na lewo od $s_{l_2:p_2}$, wówczas należy odwrócić $s_{p_1+1:p_2}$. Teraz $s_{l_1:p_1+p_2-l_2+1}$ jest różnorodne.

Znajdźmy wszystkie różnorodne pod słowa, których jest $O(n|A|)$. Następnie rozważmy każdą z $O(n^2|A|^2)$ par takich pod słów. Jeśli pod słowa mają rozłączne zbiory liter, wtedy razem tworzą różnorodne pod słowo. Sprawdzenie, czy zbiory liter są rozłączne, możemy wykonać metodą zliczenia w czasie $O(|A|)$. Spośród par tworzących różnorodne pod słowa wybieramy tę, której sumaryczna długość fragmentów jest największa. Otrzymaliśmy rozwiązanie o złożoności czasowej $O(n^2|A|^3)$.

Rozwiązanie $O(|A|(n|A| + 2^{|A|}))$

Zauważmy, że kolejność liter w pod słowie nie ma znaczenia, zatem każde różnorodne pod słowo możemy rozważać jako zbiór liter. Spośród wszystkich pod słów o długości co najwyżej $|A|$ znajdziemy te, które są różnorodne, i zbiory ich liter oznaczymy jako zbiór R . Przykładowo dla $s = „bab”$, $R = \{\{‘a’\}, \{‘b’\}, \{‘a’, ‘b’\}\}$. Wyznaczenie R zajmuje czas $O(n|A|^2)$, zaś moc R wynosi co najwyżej $2^{|A|}$. Zadanie redukuje się teraz do znalezienia dwóch rozłącznych zbiorów w R , których suma ma największą moc.

Dla każdego zbioru $r \in R$ znajdziemy taki zbiór $r' \in R$, że $r \cap r' = \emptyset$ oraz $|r \cup r'|$ jest maksymalne. Innymi słowy dla każdego zbioru znajdziemy inny zbiór, który tworzy z nim najlepszy wynik. Wówczas odpowiedzią w zadaniu jest maksimum z rozważonych przypadków. Niech $W[a]$ dla każdego $a \subseteq A$ oznacza moc największego takiego zbioru $r \in R$, że $r \subseteq a$. Teraz $r \in R$ tworzy najdłuższe różnorodne pod słowo o długości $|r| + W[\bar{r}]$, gdzie \bar{r} oznacza dopełnienie r .

Pozostało nam jeszcze wyznaczyć wartości W , które będziemy obliczali w kolejności niemalejących mocy zbiorów. Załóżmy, że obliczamy $W[a]$ i mamy obliczone $W[b]$ dla wszystkich $b \subseteq a$. Jeśli $a \in R$, wówczas $W[a] = |a|$. W przeciwnym przypadku $W[a] < |a|$, czyli największy podzbiór a należący jednocześnie do R nie zawiera jakiegoś elementu a , zatem $W[a] = \max_{e \in a} W[a \setminus e]$. Obliczenie $W[a]$ zajmuje czas $O(|A|)$, wartości tablicy W jest $O(2^{|A|})$, zatem czas potrzebny do obliczenia W wynosi $O(2^{|A|}|A|)$. Całe rozwiązanie działa w czasie $O(|A|(n|A| + 2^{|A|}))$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Stochastyczne i deterministyczne modele epidemii

Marta ZALEWSKA*, Wojciech NIEMIRO**

* Zakład Profilaktyki Zagrożeń Środowiskowych i Alergologii, Warszawski Uniwersytet Medyczny
 ** Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

O procesach Markowa można przeczytać na przykład w $\Delta_{13}^{9,12}$.

Założenie o dużej populacji pozwala zignorować fakt, że przyrost $I(t)$ zmniejsza liczbę osób narażonych na zarażenie. To uproszczenie jest uzasadnione na początku epidemii.

Zjawiska opisywane na poziomie „mikro” przez procesy Markowa zachowują się na poziomie „makro” jak funkcje deterministyczne, będące rozwiązaniami równań różniczkowych. Można to zaobserwować na przykładzie prostego (ale, niestety, bardzo aktualnego w chwili pisania tego artykułu) modelu początkowej, wykładniczej fazy epidemii.

Rozważmy bardzo dużą populację. Niech $I(t)$ oznacza liczbę zarażonych w chwili t . Zakładamy, że w krótkim okresie czasu h każdy z nich zaraża średnio αh innych ludzi, ale przy tym z prawdopodobieństwem βh zdrowieje lub umiera i przestaje zarażać. Deterministyczny model jest następujący:

$$(1) \quad I(t+h) = I(t) + (\alpha - \beta)I(t)h + o(h) \quad \text{dla } h \searrow 0.$$

(Traktujemy $I(t)$ jako wielkość ciągłą. Symbol $o(h)$ oznacza nieskończenie małą rzędu wyższego niż h , czyli funkcję spełniającą równość $\lim_{h \searrow 0} o(h)/h = 0$.) Oczywiście (1) sprowadza się do zwyczajnego równania różniczkowego:

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\alpha - \beta)I(t).$$

Popatrzmy na to samo zjawisko z bliska (w skali mikro). Potraktujmy $I(t)$ jako zmienną losową o wartościach całkowitoliczbowych. Ewolucja procesu $I(t)$ jest opisana równaniami

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(I(t+h) = i+1 | I(t) = i) &= \alpha i h + o(h) \quad \text{dla } h \searrow 0, \\ \mathbb{P}(I(t+h) = i-1 | I(t) = i) &= \beta i h + o(h) \quad \text{dla } h \searrow 0, \\ \mathbb{P}(I(t+h) = i | I(t) = i) &= 1 - (\alpha + \beta) i h + o(h) \quad \text{dla } h \searrow 0. \end{aligned}$$

Zakładamy, że $\{I(t) : t \geq 0\}$ jest procesem Markowa, to znaczy ewolucja procesu po chwili t zależy tylko od $I(t)$, czyli stanu w chwili t , a nie od wcześniejszej „historii” procesu. Jest to skokowy proces Markowa: w losowych momentach $T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots$ proces rośnie lub maleje o 1. Żeby lepiej zrozumieć strukturę tego procesu i sposób jego symulowania, przyjrzyjmy się czasom pomiędzy skokami, $W_{n+1} = T_{n+1} - T_n$, gdzie

$$T_{n+1} = \inf\{t > T_n : I(t) \neq I(T_n)\} \quad (\text{rys. 1}).$$

Okazuje się (co zostanie uzasadnione na końcu artykułu), że W_{n+1} jest zmienną losową o rozkładzie *wykładniczym z parametrem* $(\alpha + \beta)i_n$. Ponadto

$$\mathbb{P}(I(T_{n+1}) = i_n + 1 | I(T_n) = i_n) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \mathbb{P}(I(T_{n+1}) = i_n - 1 | I(T_n) = i_n) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

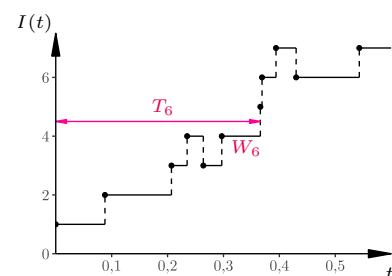
Łatwo w to uwierzyć, patrząc na równania (2).

Przebieg procesu $I(t)$ symulujemy zatem, losując kolejno czasy T_n i stany $I(T_n)$ zgodnie z dwiema powyższymi regułami. Chemicy, biolodzy i epidemiolodzy znają tę metodę pod nazwą algorytmu Gillespie’go. W rzeczywistości taki opis skokowego procesu Markowa podał znakomity amerykański matematyk czeskiego pochodzenia, Joseph Doob. Przykładowy przebieg krótkich symulacji przedstawiamy w poniższej tabelce i na rysunku 1.

krok n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
czas T_n	0,088	0,207	0,235	0,264	0,297	0,366	0,369	0,394	0,430	0,543
stan $I(T_n)$	2	3	4	3	4	5	6	7	6	7

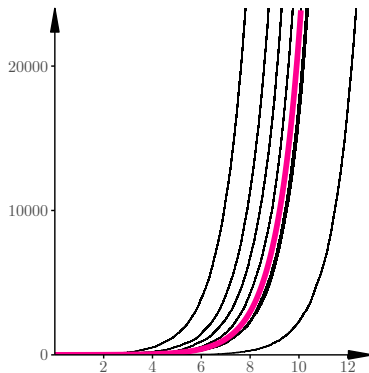
$\mathbb{P}(A|B)$ to prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B , czyli $\mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.

Co to znaczy, że zmienna ma rozkład wykładniczy? Niech λ będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Jeśli wylosujemy liczbę U jednostajnie z odcinka $[0, 1]$ (tzn. szansa na to, że U wpadnie w dowolnie wybrany odcinek $J \subset [0, 1]$, jest równa długości J), to zmienna losowa $W = -(\ln U)/\lambda$ ma rozkład wykładniczy z parametrem λ .

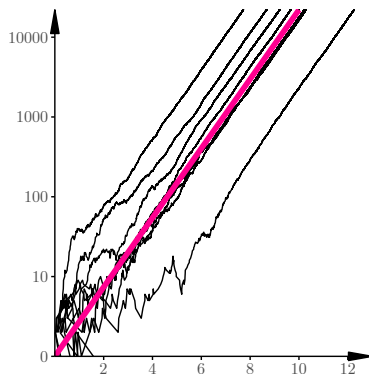


Rys. 1

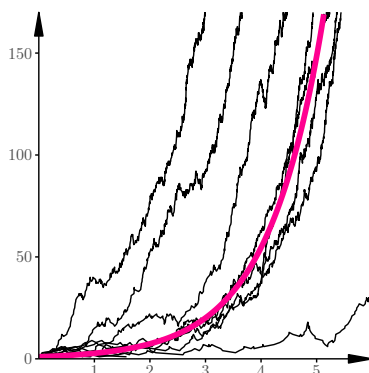
Popatrzmy teraz na dłuższe przebiegi symulacji i porównajmy trajektorie procesu losowego z rozwiązaniem równania różniczkowego, czyli funkcją wykładniczą $I(t) = i_0 \exp\{(\alpha - \beta)t\}$. Przyjęliśmy następujące wartości parametrów: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $i_0 = I(0) = 1$ (śledzimy rozwój epidemii od pierwszego



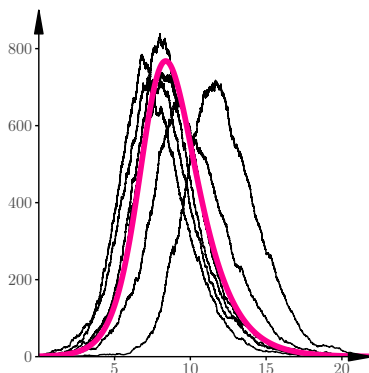
Rys. 2



Rys. 3. Skala logarytmiczna



Rys. 4. Początkowe fragmenty 20 trajektorii

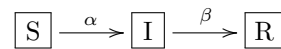


Rys. 5. Trajektorie procesu $I(t)$ w modelu SIR

zarażonego). Na rysunku 2 przedstawionych jest 20 niezależnych trajektorii procesu Markowa. Spośród tych 20 trajektorii 12 wpadło dość wcześnie w stan 0. Jest to stan „pochłaniający”: jeśli $I(T_n) = 0$, to dla każdego $t \geq T_n$ mamy $I(t) = 0$. Pogrubiona, kolorowa linia to wykres funkcji wykładniczej.

Uderzającą cechą procesu losowego opisanego równaniami (2) jest zgodność trajektorii w makroskali z rozwiązaniem równania różniczkowego, czyli z funkcjami wykładniczymi $I(t) = \exp\{(\alpha - \beta)(t - c)\}$. Poszczególne realizacje procesu różnią się jednak wyraźnie przesunięciem w fazie c . To widać na rysunku 3, na którym oś pionowa została przedstawiona w skali logarytmicznej. Rysunek 4 pokazuje te same 20 trajektorii w początkowym okresie rozwoju. Wspomniane wyżej przesunięcia w fazie wynikają z losowych fluktuacji na początku. Rezultatem tych losowych fluktuacji jest to, że 12 spośród przedstawionych trajektorii jest „pochłoniętych” przez zero. Dalszy przebieg procesu jest niemal deterministyczny.

Model SIR. Rozważmy populację złożoną z ℓ osobników. Niech $I(t)$ oznacza liczbę zarażonych w chwili t , zaś $R(t)$ łączną liczbę uodpornionych i zmarłych. Liczba osobników narażonych na zakażenie jest równa $S(t) = \ell - I(t) - R(t)$. Osobnik typu S może przejść do kategorii I , a stąd do kategorii R (stąd nazwa „model SIR”). Schematycznie:



Zakładamy, że w krótkim okresie czasu h każdy osobnik I zaraża średnio $\alpha(S(t)/\ell)h$ innych ludzi, a z prawdopodobieństwem βh zdrowieje lub umiera i przestaje zarażać. Zauważmy, że jeśli $S(t)/\ell \simeq 1$, to dostajemy model fazy wykładniczej, przedstawiony w zadaniu poprzednim.

Klasyczny model deterministyczny jest następujący:

$$(3) \quad \begin{aligned} I(t+h) &= I(t) + \left(\alpha \frac{S(t)}{\ell} - \beta \right) I(t)h + o(h) \quad \text{dla } h \searrow 0, \\ S(t+h) &= S(t) - \alpha \frac{S(t)}{\ell} I(t)h + o(h) \quad \text{dla } h \searrow 0, \end{aligned}$$

oraz $R(t) = \ell - I(t) - S(t)$. Oczywiście (3) jest układem równań różniczkowych zwyczajnych:

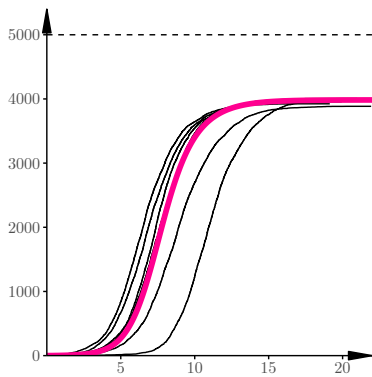
$$(4) \quad \frac{dI(t)}{dt} = \left(\alpha \frac{S(t)}{\ell} - \beta \right) I(t), \quad \frac{dS(t)}{dt} = -\alpha \frac{S(t)}{\ell} I(t).$$

W skali mikro traktujemy $I(t)$ i $S(t)$ jako zmienne losowe o wartościach całkowitoliczbowych. Stan układu jest parą $(I, S)_t := (I(t), S(t)) = (i, s)$. Ewolucja procesu jest opisana równaniami

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}((I, S)_{t+h} = (i+1, s-1) | (I, S)_t = (i, s)) &= \alpha \frac{s}{\ell} ih + o(h) \quad \text{dla } h \searrow 0, \\ \mathbb{P}((I, S)_{t+h} = (i-1, s) | (I, S)_t = (i, s)) &= \beta ih + o(h) \quad \text{dla } h \searrow 0, \\ \mathbb{P}((I, S)_{t+h} = (i, s) | (I, S)_t = (i, s)) &= 1 - \left(\alpha \frac{s}{\ell} + \beta \right) ih + o(h) \quad \text{dla } h \searrow 0. \end{aligned}$$

Symulacja procesu opisanego powyższymi równaniami również może zostać przeprowadzona przy użyciu algorytmu Gillespie’go. Tym razem jednak musimy monitorować dwie wielkości – liczbę zainfekowanych (I) oraz liczbę osobników podatnych na zakażenie (S). Jeśli liczby te wynoszą i i s , odpowiednio, to czas oczekiwania na kolejne „zdarzenie” (czyli zainfekowanie nowej osoby lub wyzdrowienie/śmierć osoby zarażonej) ma rozkład wykładniczy z parametrem $\frac{\alpha}{\ell} si + \beta i$. Kiedy już dojdzie do zdarzenia, to z prawdopodobieństwem $\frac{\frac{\alpha}{\ell} si}{\frac{\alpha}{\ell} si + \beta i}$ jest to nowe zarażenie (oraz wyzdrowienie/śmierć w przeciwnym przypadku). Nowe stany odpowiadające tym dwóm rodzajom zdarzeń to, odpowiednio, $(i+1, s-1)$ oraz $(i-1, s)$. Oczywiście symulacja kończy się, kiedy $i = 0$.

Na rysunku 5 widać kilka trajektorii procesu opisanego równaniami (5), wraz z zaznaczonym kolorem rozwiązaniem równania różniczkowego (4). Przyjęliśmy następujące wartości parametrów: $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $i_0 = I(0) = 1$, $\ell = 5000$.



Rys. 6. Liczba wszystkich dotychczas zainfekowanych. Przerwaną linią oznaczono rozmiar populacji. We wszystkich symulowanych przebiegach po wygaśnięciu epidemii około 1000 osób pozostaje w stanie S (są to osoby, które nie zostały zarażone)

Początkowo trajektorie zachowują się tak, jak w modelu poprzednim: najpierw sporo losowych fluktuacji, później następuje faza wykładniczego wzrostu. Jeszcze później widać zupełnie inne zjawisko: hamowania wzrostu wskutek spadku liczby narażonych $S(t)$, aż do zupełnego wygaśnięcia epidemii.

Dla różnych realizacji tego samego procesu SIR widać duże przesunięcia w fazie, wynikające z losowego charakteru początkowego fragmentu. Losowe fluktuacje (głównie początkowe) mają też pewien (niewielki) wpływ na maksymalną liczbę zarażonych (maksyma poszczególnych krzywych).

W opracowaniach dotyczących rozwoju epidemii często przedstawia się również liczbę wszystkich osób, które zostały zainfekowane do danego momentu (tzn. liczbę zdarzeń polegających na zarażeniu nowej osoby). Liczba ta odpowiada procesowi $\ell - S(t)$, widocznemu na rysunku 6. Warto zwrócić uwagę na niewielkie fluktuacje liczby wszystkich osób, które zostały zakażone do czasu wygaśnięcia epidemii.

Przedstawione w tym artykule modele rozwoju epidemii są skrajnie uproszczone i nie nadają się do ilościowego opisu rzeczywistego zjawiska. Niemniej nawet takie modele pozwalają trochę zrozumieć mechanizm epidemii na poziomie jakościowym.

Dlaczego czasy oczekiwania na skok mają rozkład wykładniczy?

Aby udowodnić, że zmienna W ma rozkład wykładniczy z parametrem λ , wystarczy pokazać, że zmienna $e^{-\lambda W}$ ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$, tzn. że dla dowolnego $t > 0$: $\mathbb{P}(W < t) = \mathbb{P}(e^{-\lambda W} > e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Przyjrzyjmy się czasowi *pierwszego* skoku, $W_1 = T_1 = \inf\{t : I(t) \neq i_0\}$. Nietrudno uwierzyć, że

$$\mathbb{P}(W_1 \leq t + h | W_1 > t) = \mathbb{P}(I(t+h) \neq i_0 | I(t) = i_0) + o(h) = (\alpha + \beta)i_0 h + o(h),$$

gdzie druga równość wynika z (2). Jeśli $F(t) = \mathbb{P}(W_1 \leq t)$, to dostajemy stąd równanie $\frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)} = (\alpha + \beta)i_0 h + o(h)$, zatem $\frac{d}{dt} \log(1 - F(t)) = \frac{(1 - F(t))'}{1 - F(t)} = -(\alpha + \beta)i_0 t$, skąd wnioskujemy, że $1 - F(t) = \exp\{-(\alpha + \beta)i_0 t\}$. Identyczne rozumowanie stosuje się do W_{n+1} i prowadzi ono do analogicznego rezultatu, z i_0 zastąpionym przez i_n .

Fibonacci spotyka Banacha

Jarosław GÓRNICKI*

* Politechnika Rzeszowska

Fibonacci (właściwie Leonardo z Pizy, ok. 1170–1240) nauczył się zasad arytmetyki hindusko-arabskiej, gdy razem z ojcem przebywał w Bougie (obecnie algierska Bidżaja). Poszerzał swoją wiedzę podczas podróży do Egiptu, Syrii, Grecji, na Sycylię, do Prowansji. Gdy osiadł w Pizie, w 1202 roku napisał traktat *Liber Abaci* (Księga rachunków), z myślą o rozpowszechnieniu w Europie notacji dziesiętnej opartej na wykorzystaniu cyfr $0, 1, 2, \dots, 9$. Pokazał w nim użyteczność nowych metod na wielu przykładach rachunkowych, szczególnie związanych z przeliczaniem miar i wag, obliczaniem zysków i odsetek, wymianą pieniędzy. W 1225 roku napisał rozprawę *Liber Quadratorum*, która miała być kontynuacją *Arytmetyki* Diofantosa. Problemy rozwiązywane przez Leonarda nie są banalne. Przekonujemy się o tym, rozwiązując zadania zamieszczone w jego tekstach:

1. Znaleźć liczbę wymierną x taką, że liczby $x - 5$, x oraz $x + 5$ są kwadratami.
[Najmniejszym rozwiązaniem jest: $x = \frac{1681}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$,
 $x - 5 = \frac{961}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2$, $x + 5 = \frac{2401}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2$.]
2. Wybrać pięć odważników tak, aby można było na wadze szalkowej zważyć każdy ładunek o masie $1, 2, 3, \dots, 30$, jeżeli podczas ważenia odważniki można układać tylko na jednej szalce.
[Odpowiedź: $1, 2, 4, 8, 16$.]
3. Wybrać możliwie najmniej odważników tak, aby na wadze szalkowej można było zważyć każdy ładunek o masie $1, 2, 3, \dots, 30$.
[Odpowiedź: $1, 3, 9, 27$.]
4. Ile będzie po roku par królików, które urodzą się jako potomstwo jednej pary, jeśli każda para wydaje na świat co miesiąc nową parę, zdolną z kolei po miesiącu do rozmnażania, i jeśli żadna para w tym czasie nie ginie?
[Odpowiedź: 377 .]

Choć traktat *Liber Abaci* przyczynił się do rozwoju bankowości i rachunkowości w Europie, to największą sławę przyniósł Fibonacciemu niezwykły ciąg

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ... ,

wykorzystany w rozwiązaniu zadania 4. Wcześniej, w VI wieku, ciąg ten został opisany przez matematyków hinduskich (Virahanka), ale wtedy nie wzbudził zainteresowania.

Ciągiem Fibonacciego $\{F_n\}$, o generatorach $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, nazywamy ciąg, którego kolejne wyrazy spełniają równość $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 2$.

Ciągi z rodziny Fibonacciego (otrzymane dla różnych generatorów, przy rozmaitych modyfikacjach formuły na obliczanie wartości F_n) budzą wiele emocji u matematyków oraz miłośników matematyki rekreacyjnej. Dzieje się tak za sprawą odkrywania obecności ciągu Fibonacciego w naszym otoczeniu (np. w botanice), w sztuce – *złota proporcja*, w zastosowaniach ciągu Fibonacciego w teorii liczb.

Nie wszystko o nim wiemy: w ciągu Fibonacciego występują liczby pierwsze 2, 3, 5, 13, 89, 233, ... , ale czy liczb pierwszych jest w nim nieskończenie wiele?

W 1611 roku Johannes Kepler w pracy *Strena, Seu de Nive Sexangula*, o sześciokątnych płatkach śniegu, ponownie odkrył ciąg Fibonacciego i **zgađł**, że kolejne proporcje $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, czyli stosunki $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, ... , bardzo szybko, choć raz z lewej, raz z prawej strony, zbliżają się do wartości $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803...$ Liczba ta, zwana *złotą proporcją*, od Starożytności była wykorzystywana w sztuce, zwłaszcza w architekturze jako „reguła piękna” – wielkości, których stosunek jest równy φ , mają się wyróżniać przyjemną estetyką.

Gdy wiemy, że w przedziale domkniętym na prostej euklidesowej \mathbb{R} każdy ciąg spełniający warunek Cauchy’ego jest zbieżny, to spostrzeżenie Keplera możemy uzasadnić w oparciu o twierdzenie Stefana Banacha o punkcie stałym z 1922 roku.

Twierdzenie. Niech $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$ silnie zbliża każdą parę punktów (istnieje $M < 1$, że $|Tx - Ty| \leq M|x - y|$ dla wszystkich $x, y \in [a, b]$). Wtedy istnieje dokładnie jeden taki punkt $u \in [a, b]$, że $u = Tu$.

Uzasadnienie jest łatwe. Gdyby $u = Tu \neq Tv = v$, to otrzymamy sprzeczność,

$$0 < |u - v| = |Tu - Tv| \leq M|u - v| < |u - v|.$$

Zatem jeśli punkt stały istnieje, to dokładnie jeden. Weźmy dowolne $x_0 \in [a, b]$ i utwórzmy ciąg $x_n = Tx_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ Wówczas

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |T^{n+1}x_0 - T^n x_0| \leq M|T^n x_0 - T^{n-1}x_0| \leq \\ &\leq \dots \leq M^n |Tx_0 - x_0| \rightarrow 0, \text{ gdy } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &\leq |x_{n+k} - x_{n+k+1}| + |x_{n+k+1} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq |x_{n+k} - x_{n+k+1}| + M|x_{n+k} - x_n| + |x_{n+1} - x_n|, \end{aligned}$$

więc

$$|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{1}{1-M} \{|x_{n+k+1} - x_{n+k}| + |x_{n+1} - x_n|\} \rightarrow 0, \text{ gdy } n \rightarrow \infty,$$

a to oznacza, że $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy’ego i $x_n \rightarrow u \in [a, b]$. Warunek $x_n = Tx_{n-1}$, $n \geq 1$, oraz ciągłość przekształcenia T zapewniają, że $u = Tu$.

Zastosowanie. Z warunku $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 2$ mamy

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}.$$

Zależność tę możemy zapisać w postaci

$$x_n = Tx_{n-1} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}, \text{ gdzie } x_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

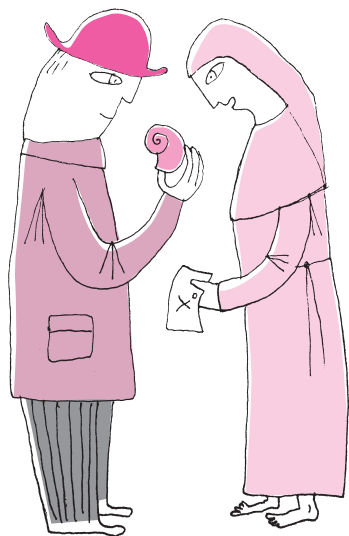
Zauważmy, że dla funkcji $T : [\frac{3}{2}, 2] \rightarrow [\frac{3}{2}, 2]$ danej wzorem $Tx = 1 + \frac{1}{x}$ mamy

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{|xy|} |x - y| \leq \frac{4}{9} |x - y|, \text{ gdy } x, y \in \left[\frac{3}{2}, 2 \right].$$

Zatem z twierdzenia Banacha ciąg $y_0 = \frac{3}{2}$, $y_n = Ty_{n-1}$, $n \geq 1$ jest zbieżny do wartości $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, która jest pierwiastkiem równania $x = 1 + \frac{1}{x}$ w przedziale $[\frac{3}{2}, 2]$. Ponieważ $y_n = \frac{F_{n+3}}{F_{n+2}}$, $n \geq 1$, więc $\frac{F_n}{F_{n-1}} \rightarrow \varphi$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Opisana metoda (gdy trafnie dobierzemy zakres działania odpowiedniego przekształcenia T) jest skuteczna w badaniu granicznych zachowań takich ilorazów również dla innych przedstawicieli z rodziny ciągów Fibonacciego.

Dobre bajki nigdy się nie kończą... .



Rozwiązanie zadania M 1639.

Zalóżmy, że funkcja f spełnia warunki zadania. Niech $P(x, y)$ oznacza nierówność $f(x+y) + y \leq f(f(x))$. Wybierzmy dowolnie $x, y \in \mathbb{R}$. Ponieważ $P(x, f(f(x)) - x)$, więc $f(f(x)) \leq x$. Podstawiając w ostatniej nierówności $f(x)$ zamiast x i uwzględniając $P(x, y)$, dostajemy $f(x+y) + y \leq f(x)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Podstawiając $y - x$ zamiast y , dostajemy $f(y) + y \leq f(x) + x$. Z dowolności x, y wnioskujemy, że $f(y) + y = f(x) + x = a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ i wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, zatem musi być $f(x) = a - x$. Łatwo sprawdzić, że ta funkcja faktycznie spełnia $P(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Masa efektywna

Paweł PERKOWSKI*

* Wydział Nowych Technologii i Chemii,
Wojskowa Akademia Techniczna

Na początku XX wieku Albert Einstein oparł swoją szczególną teorię względności na dwóch postulatach: pierwszym zdroworozsądkowym, mówiącym o tym, że wszystkie prawa fizyki powinny wyglądać we wszystkich układach inercjalnych tak samo, i drugim eksperymentalnym, stwierdzającym, że prędkość światła jest taka sama we wszystkich układach inercjalnych. Te postulaty doprowadziły do sformułowania teorii, w której prędkość światła jest graniczną prędkością, nieosiągalną dla masywnych obiektów. U osoby interesującej się fizyką i jednocześnie sceptycznie podchodzącej do nowych teorii i pomysłów mogła się wówczas pojawić wątpliwość, którą można sformułować w następujący sposób:

Jeżeli obowiązuje II zasada dynamiki Newtona, która mówi, że przyspieszenie \vec{a} , jakie uzyskuje ciało, jest wprost proporcjonalne do siły \vec{F} , a odwrotnie proporcjonalne do masy m tego ciała, to powinno ono poruszać się ruchem przyspieszonym pod wpływem działania tej siły. Gdy siła jest stała, to przyspieszenie też musi być stałe.

Ale Einstein twierdzi, że graniczną prędkością niemożliwą do osiągnięcia jest prędkość światła w próżni c . Czyli działanie siły, nawet dowolnie długie, nie pozwoli tej prędkości osiągnąć. Dla dużych prędkości ciało nie przyspiesza tak efektywnie, jak dla małych prędkości. Narzucającym się wytłumaczeniem jest stwierdzenie, że „odczuwalna” bezwładność ciała „w jakiś sposób” wzrasta wraz ze wzrostem prędkości. Dochodzimy tu do pojęcia *masy efektywnej*, która nie jest obca fizyce nierelatywistycznej. Jaki jest jej sens?

W ramach klasycznej dynamiki Newtona, jeżeli jesteśmy w stanie określić ilościowo wszystkie siły, które działają na ciało o masie m , i wyznaczyć wypadkową \vec{F}_W tych sił, to możemy napisać równanie wynikające z II zasady: $\vec{a} = \frac{\vec{F}_W}{m}$. W niektórych sytuacjach siłę wypadkową możemy rozdzielić na sumę dwóch składowych: $\vec{F}_W = \vec{F} + \vec{F}_O$, gdzie \vec{F} jest przyłożoną (na przykład kontrolowaną przez nas) zewnętrzną siłą, a \vec{F}_O jest siłą oporu. Wówczas wzór, z którego obliczamy przyspieszenie, napisać możemy w postaci: $\vec{a} = \frac{\vec{F} + \vec{F}_O}{m}$. W takim przypadku nie ma potrzeby wprowadzać masy efektywnej – we wzorze jest masa ciała. A co zrobić, jeżeli wiemy, że siły oporu istnieją (i wpływają na przyspieszenie), ale nie możemy ich w sposób jawny zdefiniować i określić w sposób ilościowy?

W sytuacji, kiedy mierzone przyspieszenie \vec{a}_{ex} nie jest równe ilorazowi $\frac{\vec{F}}{m}$, wygodnie jest czasem wprowadzić do opisu zjawiska tzw. *masę efektywną* m_{ef} , dobraną tak, aby spełniona była zależność $\vec{a}_{ex} = \frac{\vec{F}}{m_{ef}}$. Innymi słowy, masa efektywna to odwrotność współczynnika proporcjonalności pomiędzy siłą zewnętrzną \vec{F} a obserwowanym przyspieszeniem \vec{a}_{ex} . Masa efektywna zwykle zależy od czasu (gdy działa na ciało siła zewnętrzną, wywołując np. zmianę prędkości lub zmianę położenia).

Omówimy teraz jeden z wielu przykładów zastosowania pojęcia masy efektywnej w fizyce nierelatywistycznej. W tym przykładzie masa efektywna zależy od prędkości, czyli także zależy od czasu i może przyjmować wartości dodatnie, ujemne i nawet, w pewnym sensie, nieskończone. Załóżmy, że na ciało poruszające się w cieczy o współczynniku oporu η działa siła zewnętrzna \vec{F} oraz siła oporu proporcjonalna do prędkości ciała \vec{v} i zwrócona w przeciwną stronę niż prędkość: $\vec{F}_O = -\eta\vec{v}$. Przyspieszenie, jakie uzyskuje ciało, jest równe: $\vec{a}_{ex} = \frac{\vec{F} + \vec{F}_O}{m} = \frac{\vec{F} - \eta\vec{v}}{m}$. Porównując to z równaniem $\vec{a}_{ex} = \frac{\vec{F}}{m_{ef}}$, dostajemy zależność $m_{ef} = \frac{F}{F - \eta v} m$, gdzie $F = |\vec{F}|$, $v = |\vec{v}|$. Gdy siła \vec{F} zacznie działać, to ciało zacznie przyspieszać, ale z każdą sekundą coraz wolniej, ponieważ mianownik będzie malał. A w konsekwencji masa efektywna będzie rosła. Gdy ciało przyspieszy do prędkości granicznej $v_{gr} = \frac{F}{\eta}$, to mianownik się wyzeruje (siła zewnętrzna będzie równa sile oporu) i ciało, pomimo przyłożonej siły, nie będzie w ogóle



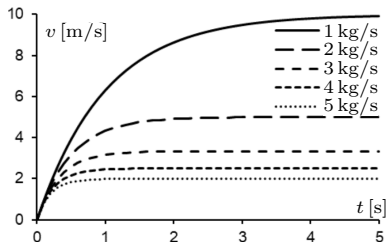
Rozwiązanie zadania M 1641.

Niech N będzie liczbą składającą się w zapisie dziesiętnym z 2^n jedynek. Mamy

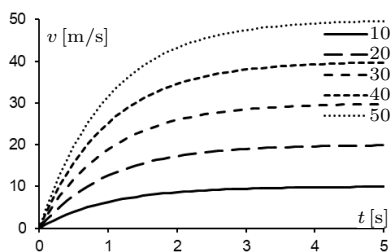
$$9N = 10^{2^n} - 1 = 9 \cdot (10 + 1)(10^2 + 1) \dots (10^{2^{n-1}} + 1).$$

Wystarczy zatem uzasadnić, że liczby $10^{2^k} + 1$ i $10^{2^l} + 1$ są względnie pierwsze dla $0 \leq k < l$. Załóżmy, że obie te liczby są podzielne przez liczbę pierwszą p . Oczywiście liczba p jest nieparzysta.

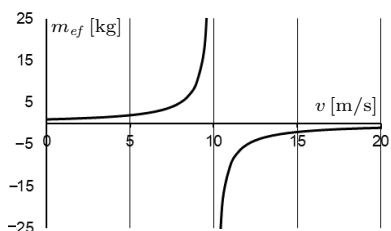
Ponieważ $10^{2^k} \equiv -1 \pmod{p}$, więc $10^{2^l} \equiv (-1)^{2^l - 2^k} = 1 \pmod{p}$. Skoro jednak p dzieli $10^{2^l} + 1$, to $p = 2$, co przeczy wcześniej poczynionej uwadze o nieparzystości p i kończy rozwiązanie zadania.



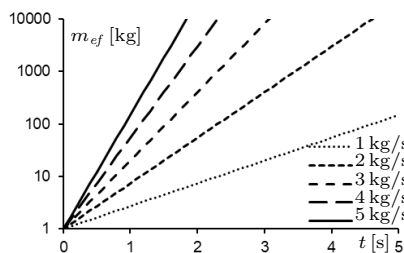
Rys. 1. Zależność prędkości od czasu $v(t)$ dla ciała o masie $m = 1$ kg, rozpędzanego stałą siłą $F = 10$ N. Każda krzywa odpowiada ośrodkowi o różnym współczynniku oporu: $\eta = 1, 2, 3, 4, 5$ kg/s. Początkowo ciało spoczywa $v(0) = 0$, a następnie przyspiesza, osiągając coraz większą prędkość



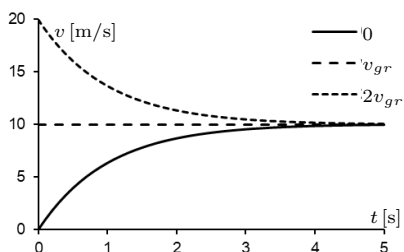
Rys. 2. Zależność prędkości od czasu $v(t)$ dla ciała o masie $m = 1$ kg, rozpędzanego stałą siłą F , poruszającego się w ośrodku o współczynniku oporu $\eta = 1$ kg/s. Każda krzywa odpowiada sile o różnej wartości $F = 10, 20, 30, 40, 50$ N



Rys. 3. Zależność masy efektywnej od prędkości $m_{ef}(v)$ dla ciała o masie $m = 1$ kg, na które działa siła $F = 10$ N. Prędkość graniczna wynosi $v_{gr} = \frac{F}{\eta} = 10 \frac{m}{s}$



Rys. 4. Zależność masy efektywnej od czasu $m_{ef}(t)$ w przypadku rozpędzania tego ciała stałą siłą zewnętrzną $F = 10$ N. Masa rozpędzanego ciała jest równa $m = 1$ kg. Pięć krzywych odpowiada różnym współczynnikom oporu ośrodka $\eta = 1, 2, 3, 4, 5$ kg/s. Oś rzędnych jest przedstawiona w skali wykładniczej



Rys. 5. Zależność prędkości od czasu $v(t)$ dla ciała o masie $m = 1$ kg rozpędzanego stałą siłą $F = 10$ N. Każda krzywa odpowiada różnej prędkości początkowej $v(0) = 0, v_{gr}, 2v_{gr}$

przyspieszać. Oznacza to nieskończoną bezwładność (efektywną) tego ciała.

Jeżeli prędkość ciała będzie większa od prędkości granicznej, to mianownik będzie ujemny ($F < \eta v$). Oznaczać to będzie ujemną masę efektywną! Wynika to z faktu, że pomimo przyłożenia siły w kierunku ruchu ciało będzie zwalniać. Oczywiście proces hamowania będzie trwał do wyzerowania się mianownika i od tej chwili prędkość pozostanie stała, praktycznie równa wartości granicznej.

Na rysunku 1 przedstawiono zależności prędkości od czasu dla ciała, na które działa stała siła, które porusza się w ośrodkach o różnych współczynnikach oporu. Widzimy, że większy współczynnik skutkuje tym, że ciało szybciej dochodzi do prędkości granicznej (najniższa krzywa na wykresie). Jednocześnie widać, że im większy opór (większy współczynnik oporu), tym mniejsza prędkość graniczna.

Na rysunku 2 przedstawiono zależności prędkości od czasu dla ciała poruszającego się w ośrodku o ustalonym współczynniku oporu, ale dla różnych wartości stałej siły zewnętrznej. Analizując wykres, widzimy, że proces rozpędzania jest tak samo rozłożony w czasie dla wszystkich wartości siły przyspieszającej. Prędkość graniczna v_{gr} , jaką osiąga przyspieszane ciało, jest proporcjonalna do działającej siły – co widzimy na wykresie.

Na wykresie 3 przedstawiono zależność masy efektywnej m_{ef} od prędkości ciała. Widzimy, że masa efektywna wzrasta od masy spoczynkowej i dąży do nieskończoności, gdy prędkość zbliża się do wartości granicznej $v_{gr} = F/\eta$. Masa efektywna może mieć także wartość ujemną. Dzieje się tak, gdy „wstrzelimy” ciało w ośrodek lepki, czyli kiedy ciało w początkowym momencie ruchu wpadnie w ośrodek z prędkością spełniającą warunek $v > v_{gr}$. Wówczas, pomimo stałej siły zewnętrznej działającej w kierunku ruchu, ciało efektywnie hamuje – stąd pojawia się ujemna masa efektywna. Ten proces trwa aż do momentu, gdy ciało zwolni do prędkości granicznej. Dalej porusza się ruchem jednostajnym.

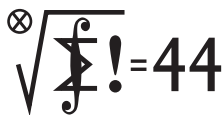
Na rysunku 4 przedstawiono zależności masy efektywnej od czasu przy rozpędzaniu analizowanym na wykresie 1, czyli dla różnych wartości współczynnika oporu. Widzimy, że masa efektywna rośnie najszybciej w przypadku ośrodka stawiającego największy opór poruszającemu się ciało.

Analityczne prędkości ciała w funkcji czasu, na podstawie którego zostały wykreślone wykresy 1, 2 i 4, ma postać: $v(t) = \frac{F}{\eta} (1 - e^{-\frac{\eta}{m}t})$. Jest to rozwiązanie prawdziwe dla ciała spoczywającego w chwili początkowej.

Na rysunku 5 przedstawiono trzy wykresy obrazujące zależność prędkości w funkcji czasu. Trzy krzywe na rysunku różnią się prędkością początkową, z jaką ciało wpada w ośrodek. Krzywa najniższa odpowiada zerowej prędkości początkowej. Krzywa pozioma odpowiada sytuacji, w której ciało wpada z prędkością początkową równą prędkości granicznej $v = v_{gr}$. Krzywa najwyższa obrazuje prędkość w funkcji czasu w sytuacji, kiedy prędkość początkowa jest większa od prędkości granicznej $v = 2v_{gr}$. Widzimy, że przy małej (lub zerowej) prędkości początkowej ciało się rozpędza, dochodząc asymptotycznie do prędkości granicznej. W tym przypadku masa efektywna jest dodatnia i wzrasta z czasem do nieskończoności. Przy prędkości początkowej równej prędkości granicznej ciało ani nie przyspiesza, ani nie hamuje, jego masa efektywna jest, w pewnym sensie, nieskończona od samego początku ruchu. W przypadku początkowej prędkości większej od granicznej masa efektywna jest ujemna i wraz z dochodzeniem do prędkości granicznej dąży do $-\infty$.

Z przedstawionego przykładu widzimy, że może się zdarzyć w fizyce małych prędkości, że będziemy chcieli przyspieszyć ciało, a ono będzie się tak zachowywało, jakby miało nieskończoną masę efektywną. Czyli tak, jak to jest w fizyce dużych (relatywistycznych) prędkości. Na zakończenie zadajmy sobie pytanie, czy w fizyce relatywistycznej dla dużych prędkości ujawnia się jakaś tajemnicza siła, która przeciwstawia się dalszemu wzrostowi prędkości – tak jak jest to pokazane w powyższym przykładzie? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Efekt wzrostu masy efektywnej w fizyce relatywistycznej nie polega na pojawieniu się takiej „tajemniczej” siły przeciwstawiającej się wzrostowi prędkości, ale to już jest zupełnie inna historia...

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2020

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 789 ($WT = 1,93$) i 790 ($WT = 2,68$) z numeru 11/2019

Mikołaj Pater	Opole	43,11
Janusz Fiett	Warszawa	42,09
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,79
Paweł Burdzy	Warszawa	35,34
Jakub Węgrecki	Kraków	33,71
Marek Spychała	Warszawa	33,34
Łukasz Merta	Kraków	32,54
Błażej Żmija	Kraków	32,29

W rocznym omówieniu sezonu ligowego (Δ_{20}^2), w opublikowanej rozszerzonej czołówce („Lista uczestników...”) zostało omyłkowo pominięte nazwisko Karol Matuszewski ze stanem konta 15,79 (po zadaniach z Δ_{19}^6). Za niedopatrzenie przepraszamy.

795. Z definicji ciągu (x_n) wynika (przez oczywistą indukcję), że wszystkie jego wyrazy są dobrze określonymi liczbami dodatnimi. Weźmy pod uwagę ilorazy $t_n = x_n/x_{n-1}$; ciąg liczb dodatnich t_1, t_2, t_3, \dots z wyrazem początkowym $t_1 = 1/\sqrt{2}$ spełnia zależność rekurencyjną

$$(1) \quad t_{n+1} = \sqrt{\frac{1+t_n}{2}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Pokażemy, że dla $n = 1, 2, 3, \dots$ zachodzi równość

$$(2) \quad t_n = \cos \alpha_n, \quad \text{gdzie } \alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Uzasadnienie indukcyjne: dla $n = 1$ tak jest. Przyjmijmy równość $t_n = \cos \alpha_n$ dla pewnego $n \geq 1$. Ponieważ $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$, mamy wówczas

$$t_n = \cos(2\alpha_{n+1}) = 2(\cos \alpha_{n+1})^2 - 1;$$

stąd (wobec spostrzeżenia, że $\cos \alpha_{n+1} > 0$):

$$\cos \alpha_{n+1} = \sqrt{\frac{1+t_n}{2}}.$$

W połączeniu ze wzorem (1) daje to równość (2) z n zastąpionym przez $n+1$, czyli tezę indukcyjną.

Wzór (2) został wykazany. Wywnioskujemy z niego, że

$$(3) \quad x_n = \frac{1}{2^n \sin \alpha_n}$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Znow indukcja: dla $n = 1$ zgadza się (bo $\alpha_1 = \pi/4$). Ustalmy $n \geq 2$ i przyjmijmy słuszność (3) z n zastąpionym przez $n-1$. Z takiego założenia indukcyjnego i ze wzoru (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_n &= t_n x_{n-1} = (\cos \alpha_n) \cdot \frac{1}{2^{n-1} \sin \alpha_{n-1}} = \\ &= \frac{\cos \alpha_n}{2^{n-1} \sin(2\alpha_n)} = \frac{1}{2^n \sin \alpha_n}, \end{aligned}$$

co kończy indukcyjny dowód wzoru (3). Tak więc

Zadania z matematyki nr 803, 804

Redaguje Marcin E. KUCZMA

803. Dane są liczby rzeczywiste $a > b > 0$. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych x spełniających równanie $[ax + b] = [bx + a]$ zawiera pewien przedział długości $1/a$. Pokazać też, że dla dowolnej liczby $b > 0$ można znaleźć liczbę $a > b$ tak, by rozważany zbiór zawierał przedział długości większej niż $1/a$.

804. Niech p będzie liczbą pierwszą; $p > 2$. Dla liczby całkowitej r niech A_r oznacza zbiór takich permutacji (x_1, \dots, x_p) zbioru wszystkich reszt (mod p), że

$$x_1 + 2x_2 + \dots + px_p \equiv r \pmod{p}.$$

Dowieść, że jeśli $0 < r < s < p$, to zbiory A_r i A_s są równoliczne.

Zadanie 804 zaproponował pan Semen Słobodianiuk

Rozwiązania zadań z numeru 2/2020

Przypominamy treść zadań:

795. Ciąg x_0, x_1, x_2, \dots jest określony rekurencyjnie: $x_0 = 1, x_1 = 1/\sqrt{2}$,

$$x_{n+1} = x_n \sqrt{\frac{x_{n-1} + x_n}{2x_{n-1}}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Uzasadnić zbieżność i wyznaczyć granicę tego ciągu.

796. Dane są liczby całkowite $m > n > 1$, przy czym m jest liczbą parzystą. Udowodnić, że równanie

$$x^m + y^m = (x + y)^n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y wtedy i tylko wtedy, gdy $n - 1$ dzieli się przez $m - n$.

$$\frac{1}{x^n} = 2^n \sin \alpha_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^{n+1}}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \text{gdzie } n \rightarrow \infty$$

(bo $(\sin x)/x \rightarrow 1$ przy $x \rightarrow 0$). Stąd, ostatecznie, $x_n \rightarrow 2/\pi$.

796. Załóżmy, że dodatnie liczby całkowite x, y spełniają podane równanie. Oznaczmy przez d ich największy wspólny dzielnik; tak więc $x = ud, y = vd$, gdzie u, v to liczby naturalne względnie pierwsze. Wstawiając to do równania i dzieląc stronami przez d^m , otrzymujemy

$$(4) \quad d^{m-n}(u^m + v^m) = (u + v)^n.$$

Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $u^m + v^m$. Wobec związku (4) p jest też dzielnikiem sumy $u + v$. To znaczy, że $u \equiv -v \pmod{p}$; a skoro m jest liczbą parzystą, mamy stąd $u^m \equiv v^m \pmod{p}$, i dalej

$$2u^m \equiv u^m + v^m \equiv 0 \pmod{p}.$$

Liczba u nie dzieli się przez p (bo $p \mid u + v$, zaś u, v są względnie pierwsze); zatem $p = 2$.

Skoro $u^m + v^m$ nie ma innych dzielników pierwszych, znaczy to, że

$$(5) \quad u^m + v^m = 2^l \quad \text{dla pewnego } l \in \mathbb{N}.$$

Zatem liczby u i v (względnie pierwsze) są obie nieparzyste; stąd $u^m \equiv v^m \equiv 1 \pmod{4}$, bo m jest liczbą parzystą. W równości (5) mamy więc $l = 1$, skąd $u = v = 1$. Wracamy do równania (4): $d^{m-n} \cdot 2 = 2^n$. To pokazuje, że $d = 2^k$ (dla pewnego $k \in \mathbb{N}$); przy tym $2^{k(m-n)} \cdot 2 = 2^n$, czyli $k(m-n) = n-1$: liczba $n-1$ dzieli się przez $m-n$.

Na odwrót, załóżmy, że $n-1 = k(m-n)$ dla pewnego k . Wówczas para $x = y = 2^k$ jest rozwiązaniem zadanego równania:

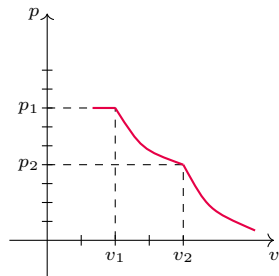
$$x^m + y^m = 2 \cdot 2^{km} = 2 \cdot 2^{kn+n-1} = 2^{n(k+1)} = (x + y)^n.$$

Uzyskaliśmy żadaną równowagę.

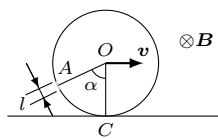
Klub 44 F



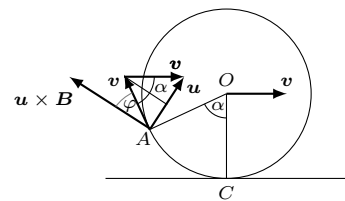
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2020



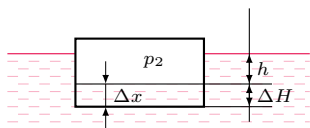
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadania z fizyki nr 700, 701

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

700. Jedna okładka powietrznego kondensatora płaskiego o pojemności c jest nienaładowana, druga jest naładowana ładunkiem q . Okładki połączone przewodnikiem o dużym oporze. Ile ciepła wydzielili się w przewodniku po długim czasie? Rozmiary okładek kondensatora są bardzo duże w porównaniu z odległością między nimi.

701. Mieszanina gazów złożona z $m_N = 100$ g azotu oraz nieznannej masy tlenu została poddana sprężaniu izotermicznemu w temperaturze $T = 74,4$ K. Wykres zależności ciśnienia tej mieszaniny od jej objętości przedstawia rysunek 1. Znaleźć masę tlenu oraz ciśnienie pary nasyconej tlenu w temperaturze T . Przy ciśnieniu normalnym T jest temperaturą wrzenia ciekłego azotu, a tlen wrze w wyższej temperaturze.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2020

Przypominamy treść zadań:

692. W jednorodnym polu magnetycznym, którego linie są poziome, a wartość wektora indukcji wynosi B , toczy się bez poślizgu z prędkością v cienki metalowy pierścień, w którym jest bardzo mała przerwa o długości l . Wektor B jest prostopadły do płaszczyzny pierścienia (rys. 2). Znaleźć SEM indukcji w chwili, gdy promień pierścienia trafiający w rozcięcie tworzy z pionem kąt α .

693. Cienkościenny cylinder o masie M i wysokości H , którego pole podstawy wynosi S , wypełniony jest gazem doskonałym i pływa w wodzie. W wyniku utraty hermetyczności w dolnej części cylindra, jego głębokość zanurzenia zwiększyła się o ΔH . Jakie było ciśnienie początkowe gazu w cylindrze? Ciśnienie atmosferyczne wynosi p_0 , temperatura nie zmienia się.

692. Gdyby pierścień był zamknięty, nie zmieniłby się strumień pola magnetycznego przez ograniczoną przez niego powierzchnię i SEM indukcji byłaby równa zeru. Zatem szukana siła elektromotoryczna \mathcal{E}_0 w przerwanym pierścieniu spełnia równanie

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 = 0,$$

gdzie \mathcal{E}_1 jest siłą elektromotoryczną, jaka powstaje w elemencie o długości l , uzupełniającym przerwę w pierścieniu. Prędkość u tego elementu jest sumą prędkości ruchu postępowego i obrotowego (rys. 3) i ma wartość

$$u = 2v \sin(\alpha/2).$$

Siła Lorentza działająca na jednostkowy ładunek w tym elemencie dana jest wzorem

$$F_L/q = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

i tworzy kąt $\varphi = \alpha/2$ ze styczną do pierścienia. Siła elektromotoryczna \mathcal{E}_1 jest pracą wykonaną przez siłę Lorentza nad jednostkowym ładunkiem na drodze l , zatem

$$\mathcal{E}_1 = uBl \cos \varphi = 2vBl \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) = Bvl \sin \alpha.$$

Potencjał wzdłuż odcinka o długości l rośnie w kierunku zgodnym ze wskazówkami zegara. Szukana siła elektromotoryczna indukcji w rozerwanym pierścieniu dana jest wzorem

$$\mathcal{E}_0 = Bvl \sin \alpha.$$

693. Oznaczmy przez h początkową głębokość zanurzenia cylindra, a przez Δx wysokość słupa wody, która wciekła do naczynia po utracie hermetyczności. Zgodnie z prawem Archimedesesa $Mg = \rho ghS$, gdzie ρ jest gęstością wody. Stąd $h = M/\rho S$. W stanie końcowym:

$$Mg + \rho gS \Delta x = \rho gS(h + \Delta H),$$

zatem $\Delta x = \Delta H$ (rys. 4). Warunek równowagi ciśnienia na głębokości h ma postać:

$$p_2 = p_0 + \rho gh = p_0 + Mg/S,$$

gdzie p_2 jest ciśnieniem gazu w naczyniu w stanie końcowym. Oznaczając szukane ciśnienie początkowe przez p_1 , z prawa przemiany izotermicznej otrzymujemy:

$$p_1 = p_2(1 - \Delta x/H) = (p_0 + Mg/S)(1 - \Delta H/H).$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: *Fast and furious* – uciekająca gwiazda

Badania nad gwiazdą LAMOST-HVS1 zostały opisane w artykule *Origin of a massive hyper-runaway subgiant star LAMOST-HVS1 – implication from Gaia and follow-up spectroscopy*, Kohei Hattori et al.

Wiek gwiazdy jest ściśle związany z jej składem chemicznym. Wystarczy więc zaobserwować widmo spektroskopowe emitowanego przez nią światła (Δ_{19}). W zależności od wieku gwiazdy widoczne w nim będą różne linie emisyjne.

Droga Mleczna ma cztery duże ramiona spiralne: Węgielnicy (zwane Zewnętrznym lub Łabędzia), Strzelca, Krzyża i Perseusza. Słońce wraz z Ziemią znajduje się w mniejszym ramieniu Oriona, umiejscowionym pomiędzy ramionami Strzelca i Perseusza.

Często pisaliśmy o tym, że gwiazdy rodzą się i umierają w galaktykach. Dla większości gwiazd jest to prawda. Na przykład nasze Słońce spokojnie krąży wokół centrum Drogi Mlecznej i, miejmy nadzieję, w najbliższym czasie nic tego nie zmieni. Są jednak gwiazdy nietypowe – uciekinierki czy też poszukiwaczki przygód (jak kto woli). Młode, jasne i superszybkie gwiazdy, które opuściły Galaktykę i z zawrotną prędkością zmierzają w kierunku pustej przestrzeni międzygalaktycznej.

Jedną z nich jest absolutną rekordzistką prędkości. Gwiazda LAMOST-HVS1 jest ponad 8 razy cięższa od Słońca i aktualnie ucieka z Galaktyki z prędkością 553 km/s. Naturalnie więc chcielibyśmy poznać jej historię.

Superszybkie gwiazdy nie tyle uciekają z galaktyki, co zostały z niej wyrzuczone, gdy osiągnęły wystarczająco dużą prędkość, krążąc wokół supermasywnej czarnej dziury w centrum Drogi Mlecznej. Tak jest zazwyczaj. Jednak historia LAMOST-HVS1 jest inna. Ta konkretna gwiazda została wyrzuciona z dysku galaktyki, a nie z jej centrum.

Skąd to wiemy? Naukowcy pod kierunkiem dr. Kohei Hattoriego z Uniwersytetu Michigan oszacowali wiek uciekającej gwiazdy na 37 milionów lat. Jest to więc górny limit czasu, w jakim gwiazda mogła podróżować pomiędzy aktualną pozycją a miejscem swoich narodzin. Następnie badacze zrekonstruowali milion możliwych trajektorii ruchu gwiazdy, wykorzystując metodę modelowania Monte Carlo. Wzięli przy tym pod uwagę jej aktualną prędkość, pozycję i wspomniany wcześniej limit czasowy. Badając najbardziej prawdopodobne trajektorie ruchu, odkryli historię LAMOST-HVS1.

I tak, nasza uciekinierka jest młodą gwiazdą typu B. Narodziła się w gęstym obszarze wewnętrznego dysku galaktyki w otoczeniu podobnych sobie gwiazd. Gwiazdy te były na tyle blisko, że tworzyły razem układ wielu ciał. Jej najbliższą sąsiadką była prawdopodobnie masywniejsza gwiazda lub nawet średniej wielkości czarna dziura. LAMOST-HVS1 gromadziła energię kinetyczną w wyniku interakcji z obiektami ze swojego otoczenia. Ostatecznie osiągnęła prędkość ucieczki pozwalającą na pokonanie oddziaływania grawitacyjnego swojego masywnego towarzysza. Wówczas została wyrzuciona (całkiem dosłownie) z orbity i od tego momentu samotnie przemierza przestrzeń kosmiczną.

Miejscem narodzin naszej najszybciej uciekającej gwiazdy najprawdopodobniej jest ramię Węgielnicy – największe i najbardziej zewnętrzne ramię spiralne Drogi Mlecznej. Astronomowie starają się jednak znaleźć jej bardziej szczegółowy „adres domowy”. Młode, masywne gwiazdy, takie jak LAMOST-HVS1, rodzą się w gęstym środowisku podobnych sobie gwiazd, tworząc gromady. Ponieważ gwiazdy te powstają z tego samego obłoku gazu, wszystkie mają takie same (lub bardzo podobne) właściwości – typ, masę, skład chemiczny etc. Problem w tym, że w wewnętrznej części ramienia Węgielnicy nie zaobserwowano gromad, które zawierałyby gwiazdy podobne do LAMOST-HVS1. Jej domem, gdziekolwiek jest, może więc być nieznaną jak dotąd gromada młodych gwiazd, chowająca się za ciężkim pyłem.

Anna DURKALEC

Niebo w czerwcu

Przez cały czerwiec Słońce przebywa na północ od równoleżnika 20° deklinacji północnej. Miesiąc ten na półkuli północnej naszej planety odznacza się najdłuższymi dniami i najkrótszymi nocami w ciągu roku. Słońce osiągnie najbardziej na północ wysunięty punkt ekliptyki 20 czerwca o 23:44 naszego czasu, a następnego dnia będzie najdłuższym dniem w całym roku. Polska rozciąga się na ponad 5° szerokości geograficznej, stąd w naszym kraju w okolicach przesilenia różnice długości dnia i nocy są całkiem spore między południowymi i północnymi krańcami naszego kraju. Nad Bałtykiem

Słońce przebywa nad widnokresem przez ponad 17 godzin i 17 minut, natomiast w górach jasno jest o godzinę krócej.

Wciąż trwa sezon na zjawiska łuku okołohoryzontalnego (więcej o tym zjawisku na angielskiej stronie: <https://www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm>) oraz obłoków srebrzystych. Z tego względu przy zasnutym cirrusami w okolicach południa niebie warto przyglądać się obszarowi nieba 46° na południe od Słońca, natomiast po zmierzchu – północnej części horyzontu, gdzie mimo zmierzchu mogą pojawić się jasno oświetlone chmury.

Czerwiec zacznie się dobrą widocznością **Merkurego** na niebie wieczornym. Już na początku miesiąca, 4 czerwca, planeta osiągnie maksymalną elongację wschodnią, oddalając się wtedy na ponad 23,5 stopnia od Słońca. Niestety w czerwcu nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokregu zaczyna się pogarszać i planeta nie jest tak wysoko, jak mogłaby być, gdyby taka elongacja zdarzyła się na przełomie wiosny i lata. W dniu maksymalnej elongacji godzinę po zachodzie Słońca Merkury zajmie pozycję na wysokości około 6° nad północno-zachodnią częścią nieboskłonu i zniknie za widnokregiem kolejną godzinę później. Po maksymalnej elongacji Merkury podąży ku spotkaniu ze Słońcem 1 lipca i pozostanie widoczny przez mniej więcej 2 tygodnie. Jednak przez cały ten okres jasność planety osłabnie z $+0,3^m$ do $+1,8^m$, i jej obserwacje na tle zorzy wieczornej staną się coraz trudniejsze. Pod koniec okresu widoczności średnica tarczy planety przekroczy $10''$, zaś faza spadnie do 16%. Kilkanaście stopni nad Merkurym znajdują się dwie jasne gwiazdy Bliźniąt, Kastor i Polluks, które mogą służyć za wskazówkę przy próbach odnalezienia planety.

Planeta **Wenus** 3 czerwca przejdzie przez koniunkcję dolną ze Słońcem i przeniesie się na niebo poranne. Niestety równocześnie przeniesie się też na południe od ekliptyki, która rano jest jeszcze nachylona niekorzystnie. Z tego względu planeta zacznie pojawiać się ponownie dopiero pod koniec miesiąca. Ostatniego dnia czerwca, na godzinę przed wschodem Słońca, Wenus zdaży się wznieść na wysokość 3°, zaś 10° nad nią pokażą się Plejady, które mogą służyć za pomoc przy odnalezieniu planety. Tego dnia jasność planety wyniesie $-4,5^m$, średnica jej tarczy $44''$, natomiast faza – 18%. Można żałować, że ominie nas najciekawszy okres widoczności planety, gdy jej średnica jest największa, zaś faza najmniejsza.

Jednak najciekawszym czerwcowym wydarzeniem związanym z Wenus jest jej zakrycie przez Księżyc. Stanie się to 19 czerwca przed południem naszego czasu. Tego dnia do nowiu zabraknie Księżycowi dwa dni. Zjawisko zacznie się około godziny 10:15, zaś skończy niecałe 45 minut później po południowej stronie nieba, na wysokości ponad 50° nad widnokregiem i jednocześnie ponad 22° na zachód od Słońca. Podczas zakrycia tarcza Wenus osiągnie jasność $-4,3^m$ przy średnicy tarczy $51''$ i fazie 8%. Zakrycie będzie można zaobserwować w całej Polsce. Niedaleko na południe od naszych granic przebiegnie południowa granica tego zjawiska, z tego względu np. w Bieszczadach zakrycie potrwa jedynie 15 minut. Być może dzięki bliskości Księżyca da się wtedy Wenus dostrzec gołym okiem, ale na pewno warto mieć ze sobą teleskop.

W czerwcu dobrze widoczne są dwie największe planety Układu Słonecznego, **Jowisz** i **Saturn**, które przez cały miesiąc tworzą parę o rozwartości 5–6 stopni, choć znajdują się na tle różnych gwiazdozbiorów: Jowisz w Strzelcu, Saturn zaś w Koziorożcu. Obie planety szykują się do lipcowych opozycji i wschodzą w drugiej części nocy, górując o świcie na wysokości 20°. Do końca miesiąca tarcza Jowisza zwiększy średnicę do $47''$, a jego jasność do $-2,7^m$. Saturn zwiększy jasność do $+0,2^m$, przy

średnicy tarczy $18''$. Księżyc spotka się z planetami 9 czerwca, mając fazę 88%. Przejdzie wtedy niecałe 4° od Saturna i 5° od Jowisza.

Planeta **Mars** przez cały miesiąc przemierzy dystans 18°, przechodząc z gwiazdozbioru Wodnika do Ryb, i tym samym zwiększy dystans do pary Jowisz-Saturn do ponad 60°. W tym czasie jasność Czerwonej Planety urośnie do $-0,5^m$, a średnica tarczy przekroczy $11''$. Jest to już odpowiednia średnica do obserwacji szczegółów na powierzchni tarczy Marsa, oczywiście jeśli znowu nie zdarzy się jakaś globalna burza piaskowa, przesłaniająca twory na powierzchni planety, jak to było dwa lata temu. Mars przejdzie 13 czerwca niecałe 2° na południe od Neptuna, który w tym miesiącu zaczyna pokazywać się w najciemniejszej części nocy. Neptun wędruje jakieś 3,5° na północny wschód od gwiazdy λ Aquarii i świeci z jasnością $+7,9^m$. Stąd o ile z dostrzeżeniem Marsa nie ma kłopotu, to do odnalezienia Neptuna potrzebny jest teleskop. Księżyc spotka się z obiema planetami 13 czerwca, przechodząc 3,5° na południe od Marsa, mając wtedy fazę 53%.

Z **Księżycem** związane są dwa kolejne zjawiska, choć słabo widoczne dla mieszkańców Polski. Srebrny Glob 5 czerwca wieczorem przejdzie przez pełnię na tle gwiazdozbioru Wężownika i jednocześnie zahaczy o półcień Ziemi. W Polsce da się obserwować całe zjawisko, lecz niestety jest ono płytsze od podobnego zaćmienia w styczniu. Tym razem w półcień Ziemi wejdzie jedynie 57% średnicy Księżyca, a zatem może się tak stać, że blask księżycowej tarczy zmieni się na tyle mało, że trudno je będzie dostrzec bez fotografowania zjawiska. Maksymalna faza zaćmienia nastąpi o godzinie 21:26.

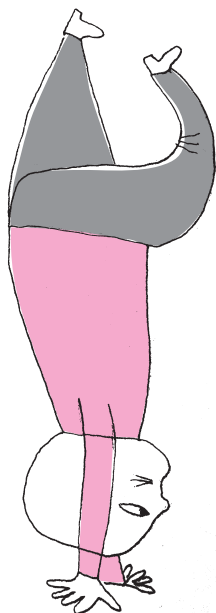
Drugie zjawisko związane z Księżycem to obrączkowe zaćmienie Słońca podczas nowiu 21 czerwca. Pas zaćmienia obrączkowego przejdzie przez środkowo-wschodnią Afrykę, Półwysep Arabski, Indie, Chiny i Tajwan. Natomiast w całej południowej części Azji, wschodniej Afryce oraz południowo-wschodniej Europie zobaczymy częściowe zaćmienie Słońca. Niestety w Polsce zjawisko da się dostrzec jedynie z południowo-wschodniego krańca kraju, na południowy wschód od linii Wetlina-Czarna Góra, gdzie w godzinach 7:40–8:00 Księżyc wyszczerbi tarczę Słońca, powodując zaćmienie o fazie mniejszej od 1%.

W czerwcu występują **meteory z roju Bootydów**, promieniujących od 22 czerwca do 2 lipca, z maksimum około 27 czerwca. Są to bardzo charakterystyczne meteory, gdyż ich prędkość zderzenia z naszą atmosferą wynosi zaledwie 18 km/s, a zatem są to meteory bardzo wolne. Radiant Bootydów znajduje się niedaleko radiantu promieniujących w styczniu Kwadrantydów. Aktywność roju jest zmienna, od kilku do ponad 100 zjawisk na godzinę. Niestety w tym roku nie prognozuje się silnej aktywności tego roju. W dniu maksimum Księżyc przed I kwadrą zachodzi około północy, pozostawiając kilka godzin na obserwacje Bootydów.

Ariel MAJCHER

Neutrino i hiperbole

W lutym rząd Japonii podjął decyzję o finansowaniu projektu Hyper-Kamiokande. Ten olbrzymi detektor neutrin jest następcą Super-Kamiokande, który pozwolił na zbadanie oscylacji neutrin i wyznaczenie parametrów opisujących neutrina – różnice kwadratów ich mas oraz prawdopodobieństwa, z jakimi neutrina oddziałują z innymi znanymi cząstkami. Nowy projekt pozwoli znacznie zwiększyć dokładność, z jaką znamy te parametry, oraz, być może, wskaże różnice między oddziaływaniami neutrin i antyneutrin.



Decyzja o budowie Hyper-Kamiokande to świetna wiadomość dla fizyków cząstek elementarnych na całym świecie. Niestety, zawód budzi sposób, w jaki została ona zakomunikowana opinii publicznej przez KEK, japońskie laboratorium fizyki akceleratorowej, współtworzące projekt. W pierwszym zdaniu komunikatu prasowego czytamy [1]:

Projekt Hyper-Kamiokande [...] to globalnie wiodący, międzynarodowy projekt badawczy prowadzony przez Japonię, mający na celu wyjaśnienie pochodzenia materii i teorii wielkiej unifikacji cząstek elementarnych.

Jedno zdanie, dwa problemy. Dzięki pracom Andrieja Sacharowa od pół wieku wiemy, że aby wygenerować dynamicznie (tzn. w oddziaływaniach cząstek we wczesnym Wszechświecie) asymetrię między materią i antymaterią, należy spełnić kilka warunków. Jeden z nich żąda, by te oddziaływania rozróżniały cząstki i antycząstki w tym sensie, że pewne procesy z udziałem cząstek powinny mieć inne prawdopodobieństwa niż analogiczne procesy z udziałem antycząstek. Mówiąc uczenie, symetria między cząstkami i antycząstkami (zwana jeszcze bardziej uczenie kombinowaną parzystością) musi być naruszona.

Nie wiadomo jednak, czy neutrina są na pewno tymi cząstkami, których oddziaływania doprowadziły do powstania nadwyżki materii we Wszechświecie. Istnieją modele teoretyczne, które przewidują taki scenariusz, np. model wykorzystujący mechanizm huśtawki (*seesaw mechanism*), który pozwala na jednoczesne wyjaśnienie niewielkich mas neutrin i tej nadwyżki (tzw. bariogeneza przez leptogenezę). Nie wszystkie parametry tego modelu mogą być jednak wyznaczone w eksperymentach takich jak Hyper-Kamiokande. Kilkanaście lat temu Sacha Davidson ze współpracownikami przeprowadziły analizę sprawdzającą, czy badania oscylacji neutrin mogą potwierdzić lub wykluczyć wspomniany sposób wytworzenia materii we Wszechświecie. Odpowiedź na to pytanie była zdecydowanie przecząca [2].

Koncepcja teorii wielkiej unifikacji pojawiła się w połowie lat 70. XX wieku. Zakłada ona, że znane oddziaływania są różnymi aspektami tego samego, bardziej fundamentalnego oddziaływania i że różnice te zacierają się w miarę wzrostu energii zderzających się cząstek. Początkowo pomysł ten wydawał się zapewniać rozwiązanie dla wielu problemów Modelu Standardowego cząstek elementarnych, wyjaśniając specyficzne własności fundamentalnych składników materii oraz rodzajów i sił ich oddziaływań. W teoriach tych naturalnie pojawia się także wspomniany wyżej mechanizm huśtawki. W miarę upływu lat stwierdzono, że najprostsze i najlepsze wytłumaczenie obserwowanych zależności otrzymuje

się w teoriach supersymetrycznych. Należy jednak podkreślić, że przez ostatnie dziesięciolecia nie udało się potwierdzić żadnych specyficznych przewidywań teorii wielkiej unifikacji, w tym rozpadu protonu. Nie można oczywiście wykluczyć, że jest to „wina” szczególnej konstrukcji realizowanej w przyrodzie teorii. Z drugiej strony, wobec nieodkrycia supersymetrycznych partnerów znanych cząstek w LHC, wielu badaczy zaczyna wątpić, czy teorie wielkiej unifikacji to właściwy kierunek poszukiwań. Liczby mówią same za siebie: wśród tysięcy publikowanych corocznie prac poświęconych fizyce cząstek elementarnych tylko kilkadziesiąt rozważa teorie wielkiej unifikacji.

Powyższe uwagi skłaniają mnie do stwierdzenia, że cytowany komunikat KEK nie jest wzorcowym przykładem komunikacji środowiska naukowego z opinią publiczną. Odwołując się do inspirujących haseł w rodzaju pochodzenia materii i teorii wielkiej unifikacji, zakłada po cichu, że opinia publiczna nie powie „sprawdzam”. Tymczasem jednym z najważniejszych przykazań dla osób zajmujących się szeroko pojętą komunikacją naukową jest zakaz przekraczania granic prawdy – nawet jeśli miałoby to pozwalać na formułowanie efektownych metafor.

Krzysztof TURZYŃSKI

[1] <https://www.kek.jp/en/newsroom/2020/02/12/0930/>

[2] S. Davidson, J. Garayoa, F. Palorini, N. Rius, JHEP 0809 (2008) 053



Równoległobok

Bartłomiej BZDEGA

Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych, ale można by go zdefiniować jeszcze na kilka innych sposobów. Dla czworokąta wypukłego $ABCD$ następujące warunki są parami równoważne (dowód pomijamy):

- $AB \parallel CD$ i $BC \parallel DA$,
- $AB \parallel CD$ i $|AB| = |CD|$,
- $|AB| = |CD|$ i $|BC| = |DA|$,
- odcinki AC i BD mają wspólny środek.

Siła powyższego twierdzenia polega na tym, że jeśli wykazemy, że pewien czworokąt wypukły spełnia choć jeden z powyższych warunków, to możemy mieć pewność, że spełnia on wszystkie pozostałe.

Równoległoboki względnie często pojawiają się w zadaniach olimpijskich. Niekiedy jawnie – w założeniach lub tezie, gdy mamy dany pewien równoległobok lub chcemy wykazać, że jakiś czworokąt nim jest. Czasem treść zadania wskazuje na to, że gdzieś w rozważanej konfiguracji geometrycznej ukryty jest równoległobok, na przykład gdy trzeba wykazać, że jakaś prosta przechodzi przez środek jakiegoś odcinka. Nie brakuje również zadań, w których treści nie dopatrzymy się równoległoboku, ale musimy go znaleźć lub dorysować, aby zadanie rozwiązać.

Zadania

1. Na płaszczyźnie leżą różne punkty A, B, C i D . Punkty P, Q, R, S, T, U są środkami odpowiednio odcinków AB, BC, CA, AD, BD, CD . Dowiedź, że odcinki PU, QS i RT mają wspólny punkt.
2. Czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Punkty P i Q są środkami odcinków odpowiednio CD i AB . Wykazać, że jeśli $AP \parallel CQ$ i $BP \parallel DQ$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
3. Odcinki AD i BE są wysokościami trójkąta ABC . Punkt M jest środkiem odcinka AB , a punkty P i Q są symetryczne do M względem prostych odpowiednio AD i BE . Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ .
4. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC i AC w punktach odpowiednio D i E . Punkt $K \neq D$ leży na prostej DE , przy czym $|BD| = |BK|$. Dowiedź, że prosta AI przechodzi przez środek odcinka EK .
5. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P na proste odpowiednio BC, CA, AB . Punkty G, H, I są ortocentrami trójkątów odpowiednio AFE, BDF, CED . Dowiedź, że trójkąty DEF i GHI są przystające.
6. Na boku AC trójkąta ABC wybrano punkt Q . Punkt P jest środkiem odcinka BC . Odcinki AP i BQ przecinają się w punkcie T . Punkt R jest środkiem odcinka AT , natomiast punkt S leży na odcinku BT i spełnia równość $|BS| = |QT|$. Dowiedź, że prosta PS jest równoległa do prostej QR .
7. Niech AB będzie krótszym łukiem okręgu o . Na łuku AB wybieramy punkt P różny od A i B . Punkt Q leży na prostej AP i spełnia równość $|PQ| = |BQ|$. Punkt R leży na prostej BP i spełnia warunek $|AR| = |RP|$. Wreszcie punkt M jest środkiem odcinka QR i przez ℓ oznaczamy prostą PM . Dowiedź, że wszystkie otrzymane w ten sposób proste ℓ (dla różnych punktów P) mają punkt wspólny.
8. Dowiedź, że wielokąt wypukły można rozciąć na skończoną liczbę równoległoboków wtedy i tylko wtedy, gdy ma on środek symetrii.

Wskazówki do zadań
 1. Odcinki QR i ST są równoległe do AB i mają długość $\frac{1}{2}|AB|$. Wynika z tego, że albo punkty T, Q, R, S leżą na jednej prostej, albo wyznaczają równoległobok. Analogicznie jest dla odcinków PU i RT .
 2. Niech K będzie punktem przecięcia odcinków AP i DQ , natomiast L – odcinków BP i CQ . Trójkąty AKQ i QLB są podobne do trójkąta APB w skali $\frac{1}{2}$ (kbk), a trójkąt LQK jest do nich przystający (kbk). W takim razie $KL \parallel AB$ i $|KL| = \frac{1}{2}|AB|$, analogicznie $KL \parallel DC$ i $|KL| = \frac{1}{2}|DC|$.
 3. Czworokąty $AMDP$ i $MBQP$ są rombami, bo ich przekątne dzielą się na połowy i są prostokątne. Odcinki DP i EQ mają zatem długość $\frac{1}{2}|AB|$ i są równoległe do AB .
 4. Rozważamy romb $ABPQ$, którego przekątne AP leży na prostej AI . Punkt K leży na odcinku BF , a ponadto $|BK| = |QE|$, więc czworokąt $BKQE$ jest równoległobokiem. Z tego wynika, że środek odcinka EK pokrywa się ze środkiem rombu $ABPQ$.
 5. Czworokąty $EPTD$ i $FHPD$ są równoległobokami, gdyż mają po dwie pary boków równoległych, więc czworokąt $GFDE$ też jest równoległobokiem. Z tego wynika, że $|GI| = |DF|$. Analogicznie $|GH| = |DE|$ i $|HI| = |EF|$.
 6. Narzynamy równoległobok $BUCT$. Czworokąt $CQST$ też jest równoległobokiem, czyli $US \parallel AQ$. Na koniec $\frac{|PT|}{|RT|} = \frac{|AT|}{|QT|} = \frac{|TS|}{|ST|}$.
 7. Rozważamy równoległobok $PRSQ$. Jest oczywiste, że prosta ℓ przechodzi przez punkt S . Okrąg opisany na trójkącie QRS przechodzi przez punkty A i B , ponadto $|\angle ABP| = |\angle PAS|$, więc AS jest styczna do okręgu o , analogicznie BS . Położenie punktu S nie zależy zatem od wyboru punktu P .
 8. Jeżeli można dokonać podziału, to rozważając wszystkie równoległoboki mające jeden z boków równoległy do ustalonego boku wielokąta, dojdziemy do ustalonego boku wielokąta, dojdziemy do ustalonego boku wielokąta, więc ma on środek symetrii.
 W drugą stronę, niech AB będzie jednym z boków wielokąta środkowosymetrycznego W . Przez W' oznaczmy wielokąt W przesunięty o wektor \overline{AB} . Wówczas wielokąt $W \cup W'$ łatwo rozciąć na równoległoboki, a wielokąt $W \cup W'$ ma środek symetrii i o dwa boki mniej niż wielokąt W .

