

ISSN 0013-788X
p-ISSN 1663-1074
e-ISSN 1733-1415
92...

NR 5 (552) 2020

CENA 5,5 ZŁ (VAT 8%)
PI ISSN 1737-3095 | NR IND. 35-550 X
MIEŚCZNIK
www.deltami.edu.pl

153. problem
z Księgi Szkockiej
str. 9

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Źródło: Kazimierz Kuratowski, „Pół wieku matematyki polskiej 1920-1970”, wyd. Książka i Wiedza, 1973



UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

9 770137 300007

05

Nakład: 3500 egz.



W następnym numerze ostrzegamy przed zbliżaniem się do krawędzi peronu.




SPIS TREŚCI NUMERU 5 (552)

Proste i nieco pokręcone namagnesowanie
Andrzej Wawro

str. 1

Dyskretny Darboux
Michał Kieza

str. 4

 Zadania

str. 5

Zrób to sam: płaszczyzna hiperboliczna z papieru
Eryk Kopczyński


str. 6

Zrób to sam: płaszczyzna hiperboliczna szydełkiem
Dorota Celińska-Kopczyńska

str. 8

Problem 153. z Księgi Szkockiej
Wiesław Żelazko

str. 9

 ... w czasach zarazy i przedtem
Magdalena Fikus

str. 11

Indukcja przyrodnicza
Piotr Chrzastowski-Wachtel

str. 12

„Narzędzia zrobione ze światła”
Nagroda Nobla z fizyki 2018, część II
Piotr Fita

str. 14

Informatyczny kącik olimpijski (137):
po prostu znajdź wzór

str. 17

Wierzchołki, krawędzie, ściany i dalej...
Kamil Rychlewicz

str. 18

Klub 44

str. 20

Prosto z nieba: Pierwsze gwiazdy w mrocznych wiekach Wszechświata

str. 22


Niebo w maju

str. 22

Aktualności

str. 24

Kryzys w kosmologii?

 Wojnę powiedzieć myśli serce moje,
Do której miecza nie trzeba ni zbroje
Bartłomiej Bzdęga

str. 25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Proste i nieco pokręcone namagnesowanie

Andrzej WAWRO*

*Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk

Stare porzekadło mówi, że znalezienie igły w stogu siana nie należy do najłatwiejszych zadań. Sytuacja jest nieco korzystniejsza, gdy szukamy igły np. na dużym, wzorzystym dywanie. Bierzymy magnes... i igła jest nasza. Jest to zapewne jeden z najprostszych sposobów zastosowania właściwości magnetycznych materii. Wykorzystanie oddziaływań magnetycznych jednak nie ogranicza się jedynie do szukania igły...

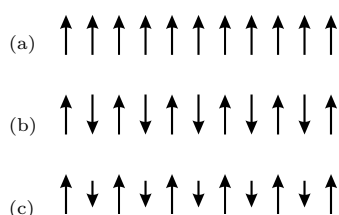
Magnetyzm towarzyszył ludzkości przez znaczną część jej istnienia. Historia wykorzystywania tego zjawiska zaczyna się jeszcze na długo przed początkiem naszej ery. Jako pierwsi szczególne własności magnetytu – tlenku żelaza (Fe_3O_4), występującego w stanie naturalnym – zauważyli Grecy i Chińczycy, którzy skonstruowali pierwsze kompas. Nazwa tego materiału pochodzi od regionu Grecji o nazwie Magnezja, gdzie odkryto jego złoża. Udowodnienie, że Ziemia jest dość dużym magnesem (Gilbert, 1600 r.), że prąd elektryczny odchyła igłę magnetyczną (Ørsted, 1819 r.), a zmienne pole magnetyczne może powodować przepływ prądu elektrycznego (Faraday, 1831 r.), oraz późniejsze pokazanie relacji pomiędzy polem magnetycznym i elektrycznym (równania Maxwella, 1873 r.) to tylko niektóre kamienie milowe wyznaczające drogę poznania i zastosowania zjawiska magnetyzmu. Obecnie jest ono wykorzystywane przy budowie potężnych akceleratorów, w urządzeniach, które mogą produkować energię termojądrową, lewitujących pociągach, medycznej aparaturze diagnostycznej, pamięciach komputerowych i... damskich torebkach. Czy zatem współczesne, rozwinięte społeczeństwa mogłyby sprawnie funkcjonować bez magnetyzmu? Chyba nie...

Właściwości magnetyczne materii pojawiają się już na poziomie atomowym. Elektrony obiegające

jądro atomowe przypominają mikroskopijne pętle, w których płynie prąd elektryczny wytwarzający pole magnetyczne. Dodatkowo każdy elektron zachowuje się jak niezwykle mały magnes. Cecha ta (*spin*) ma charakter czysto kwantowy, choć można spotkać czasami niezbyt ściśle obrazowe wyjaśnienie, że moment magnetyczny elektronu wynika z jego ruchu wirowego wokół własnej osi. Na poziomie atomowym wkład do właściwości magnetycznych materii dają zatem moment orbitalny i spinowy. Zachowanie się elektronu jako cząstki obdarzonej nie tylko ładunkiem elektrycznym, ale i momentem magnetycznym, wykorzystywane jest w obecnie intensywnie rozwijającej się gałęzi elektroniki – spintronice.

Obecność trwałych właściwości magnetycznych wymaga jednak uporządkowania momentów magnetycznych atomów w makroskopowych objętościach materii. Obszary, w których wszystkie momenty zorientowane są w tym samym kierunku, nazywane są *domenami magnetycznymi*, a same materiały – *ferromagnetykami*. Wśród czystych pierwiastków właściwości ferromagnetyczne przejawiają: żelazo (Fe), kobalt (Co), nikiel (Ni) i gadolin (Gd).

Wyjaśnienie długozasięgowego uporządkowania namagnesowania wymaga ponownego powrotu na poziom atomowy. Odpowiedzialne jest za nie oddziaływanie wymienne, wynikające z oddziaływania kulombowskiego elektronów, oraz zakaz Pauliego, który mówi, że dwa elektrony nie mogą przebywać obok siebie w tym samym stanie kwantowym. Ograniczenie to wynika z faktu, że elektrony są fermionami i gdy występują w stadzie, ich zachowanie opisuje statystyka Fermiego–Diraca.

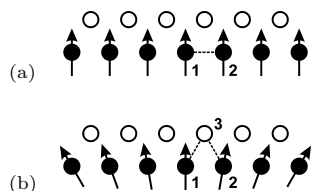


Rys. 1. Różne rodzaje uporządkowania atomowych momentów magnetycznych w:
(a) ferromagnetyku,
(b) antyferromagnetyku,
(c) ferrimagnetyku

Układy, w których występuje długozasięgowe heisenbergowskie uporządkowanie magnetyczne (tj. równoległe lub antyrównoległe), opisuje wyrażenie na energię w postaci $E_{H_{ij}} = -2J(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)$, gdzie parametr J nazywany całką wymiany opisuje oddziaływanie spinów sąsiednich atomów, a \mathbf{S}_i i \mathbf{S}_j to wektory opisujące te spiny. Całkowita energia jest sumą tych wkładów po wszystkich parach (i, j) sąsiadujących ze sobą atomów. Jeśli J przyjmuje wartości dodatnie, materiał ma właściwości ferromagnetyczne spowodowane równoległym ułożeniem sąsiednich spinów (rys. 1a). Jak już wspomniano, tego rodzaju materiały mogą wykazywać namagnesowanie w skali makroskopowej. Gdy J jest ujemne, preferowana jest antyrównoległa konfiguracja spinów, a materiał nazywa się antyferromagnetykiem (rys. 1b). Wśród pierwiastków cechy takie wykazuje chrom (Cr). Ponieważ antyferromagnetyki nie mają wypadkowego namagnesowania, do niedawna traktowano je jako ciekawe substancje z badawczego punktu widzenia, jednak bez większych zastosowań praktycznych. Niedawne prace, pokazujące możliwość kontrolowania uporządkowania antyferromagnetycznego metodami optycznymi i elektrycznymi, spowodowały gwałtowny wzrost zainteresowania tego typu materiałami pod kątem tworzenia urządzeń spintronicznych. Jeśli struktura składa się z dwóch podsieci, antyrównoległe momenty nie muszą mieć takich samych wartości (rys. 1c). Oddziaływania w ramach tej samej podsieci lub pomiędzy podsieciami opisywane są odmiennymi całkami wymiany. Takie materiały wykazują wypadkowe namagnesowanie i nazywane są *ferrimagnetykami*. Ich ciekawą właściwością jest temperaturowy punkt kompensacji, w którym momenty

magnetyczne obu podsieci przyjmują jednakowe wartości i ferrimagnetyk staje się antyferromagnetykiem.

Omówione powyżej oddziaływania natury heisenbergowskiej prowadzą do raczej nieskomplikowanego, współliniowego uporządkowania magnetycznego. Niemalże zamieszanie wprowadza natomiast oddziaływanie Działoszyńskiego–Moriya (DM). Ma ono charakter antysymetrycznego oddziaływania pośredniego, tzn. potrzebny jest „mediator” wpływający na wzajemną konfigurację rozpatrywanych spinów. Opisuje je wyrażenie na energię: $E_{D_{ij}} = -\mathbf{D}_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j)$, które ze względu na iloczyn wektorowy faworyzuje wzajemnie prostopadłą konfigurację oddziałujących ze sobą spinów (\mathbf{D}_{ij} jest wektorem opisującym wielkość oddziaływań DM). Tego typu interakcja może występować np. w materiałach litych, niemających centrosymetrycznej struktury krystalicznej. Jednak w ostatnim czasie uwagę badaczy oddziaływań DM przyciągnęły układy wielowarstwowe typu niemagnetyczny metal ciężki (Ta, W, Ir, Pt, Au) / ferromagnetyk (Co, Fe), wykazujące brak symetrii strukturalnej. Ponadto atomy metalu ciężkiego charakteryzują się silnym sprzężeniem spinowo-orbitalnym, niezbędnym do wzajemnego odchylenia spinów atomów ferromagnetyka, tworzących interfejs (granicę między warstwami). Mechanizm oddziaływania DM jest zilustrowany schematycznie na rysunku 2.



Rys. 2. Orientacja momentów magnetycznych ferromagnetyka na interfejsie ciężki metal (białe kółka) / ferromagnetyk (czarne kółka): (a) bez oddziaływania DM, (b) z oddziaływaniem DM. Liniami przerywanymi schematycznie zaznaczono oddziaływania pomiędzy atomami 1 i 2 ferromagnetyka: (a) bezpośrednie, (b) za pośrednictwem atomu 3 metalu ciężkiego

Za niektóre właściwości magnetyczne odpowiedzialne jest sprzężenie spinowo-orbitalne. Jest ono zjawiskiem relatywistycznym i obrazowo można je wytłumaczyć jako efekt oddziaływania spinowego momentu magnetycznego elektronu z polem magnetycznym wytworzonym przez orbitalny ruch elektronu wokół jądra. Wyjaśnia ono wiele efektów magnetycznych (m.in. anizotropię magnetokrystaliczną, która będzie krótko omówiona w dalszej części tego artykułu) i gwałtownie rośnie z liczbą atomową Z pierwiastka (jak Z^4). Dlatego też atomy metali ciężkich charakteryzują się silnym sprzężeniem.

Uporządkowanie magnetyczne w układach wielowarstwowych może przyjmować zróżnicowane konfiguracje, które są wynikiem wpływu kilku czynników: oddziaływania wymiany bezpośredniej w ferromagnetyku, prostopadłej anizotropii magnetycznej, oddziaływania DM i energii Zeemana, czyli energii wewnętrznej namagnesowanego materiału w przyłożonym zewnętrznym polu magnetycznym. Oddziaływania wymienne są charakterystyczne dla danego materiału i możliwość ich modyfikacji jest raczej ograniczona. Większe pole manewru pozostawiają anizotropia magnetyczna i oddziaływania DM.

Pojęcie anizotropii oznacza, że materiał wykazuje zróżnicowane właściwości (np. namagnesowanie) w zależności od kierunku. W strukturach warstwowych z prostopadłą anizotropią magnetyczną ich namagnesowanie preferuje orientację prostopadłą do płaszczyzny warstw. Na wynikową anizotropię składają się różne jej składniki: magnetokrystaliczny, magnetosprężysty, powierzchniowy i dipolowy (kształtu). Poszczególne wkłady silnie zależą od struktury wielowarstwowej i w związku z tym anizotropię prostopadłą można modyfikować w dość szerokim zakresie. Składowa magnetokrystaliczna zależy od krystalicznej struktury warstwy ferromagnetyka. Determinuje ona symetrię orbitali elektronowych, a te – poprzez wspomniane oddziaływanie spinowo-orbitalne – orientują przestrzennie spinowe momenty magnetyczne elektronów, wyznaczając tym samym kierunek namagnesowania warstwy. W okolicach interfejsu mogą występować również naprężenia sieci ferromagnetyka spowodowane niedopasowaniem symetrii krystalicznej i parametru sieciowego materiałów tworzących ten interfejs. Takie odkształcenia również dają dodatkowy wkład do anizotropii. Na interfejsie zachodzi także złamanie symetrii otoczenia atomów warstwy magnetycznej. Może też wystąpić przepływ elektronów pomiędzy sąsiadującymi atomami różnego rodzaju – hybrydyzacja elektronowa. Oba te zjawiska modyfikują rozkład elektronów w obszarze interfejsu i przyczyniają się do powstawania anizotropii powierzchni (interfejsu). Na anizotropię wpływa również dwuwymiarowy charakter warstw – wyindukowane przez prostopadłe namagnesowanie wewnętrzne pole magnetyczne oddziałuje z tym namagnesowaniem i zawsze wymusza



Rozwiązanie zadania M 1636.
Podaną w zadaniu równość możemy przekształcić do postaci

$$y^2 + xy + yz = zx,$$

co po dodaniu zx do obu stron daje

$$(y+x)(y+z) = 2zx.$$

Jeśli liczby x, y, z są nieparzyste, to lewa strona powyższej równości jest podzielna przez 4, w przeciwieństwie do prawej strony, co kończy rozwiązanie zadania.



Rozwiązanie zadania M 1638.
Niech x_1, \dots, x_n będą pierwiastkami P , tzn. $P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$. Korzystając ze wzorów Viète'a, mamy

$$s := \sum_{i=1}^n x_i = n,$$

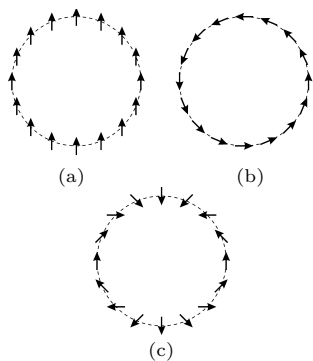
$$m := \sum_{i < j} x_i x_j = \frac{1}{2}n(n-1).$$

W tej sytuacji

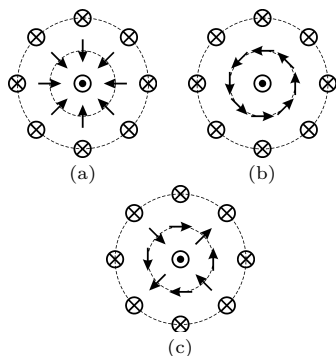
$$\sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2 = s^2 - 2m - 2s + n = 0,$$

skąd $x_i = 1$ dla $i \leq n$. Pozostaje łatwe sprawdzenie, że wielomian $(x-1)^n$ spełnia przedstawione w zadaniu warunki.

Dlatego $a_i = (-1)^{n-i} \binom{n}{i}$ dla $0 \leq i \leq n-3$.



Rys. 3. Konfiguracje z różnymi liczbami obrotu spinów odpowiadających ładunkowi Q skyrmionu: (a) 0, (b) 1, (c) 2. Są one topologicznie nierównoważne i nie mogą gładko ewoluować między swoimi postaciami



Rys. 4. Uproszczony schemat konfiguracji namagnesowania w: (a) skyrmionie Néela, (b) skyrmionie Blocha, (c) antiskyrmionie. We wszystkich powyższych konfiguracjach namagnesowanie w centrum skyrmionu i na zewnętrznym okręgu jest prostopadłe do płaszczyzny rysunku, ale ma przeciwne zwroty: „kluje” Czytelnika w oczy w centrum, natomiast na zewnętrznym okręgu ma zwrot „za płaszczyznę”. W każdym przypadku, przesuając się od zewnętrznego okręgu do centrum wzdłuż promienia, obserwujemy ciągłą zmianę kierunku namagnesowania. W skyrmionie Néela (a) namagnesowanie obraca się w płaszczyźnie zawierającej promień (wokół osi prostopadłej do promienia, zawartej w płaszczyźnie rysunku). W skyrmionie Blocha (b) namagnesowanie obraca się wokół promienia, w płaszczyźnie do niego prostopadłej

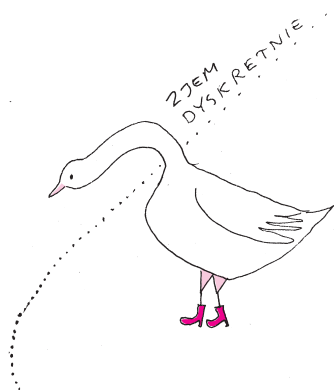
jego orientację w płaszczyźnie warstwy. Pozostałe wymienione czynniki: anizotropia magnetokrystaliczna, magnetoelastyczna i powierzchniowa mogą prowadzić do namagnesowania prostopadłego. Efektywna anizotropia jest zatem wynikiem balansu czterech wspomnianych składników. Należy zauważyć, że w strukturach cienkowarstwowych udział atomów tworzących interfejs, mających odmienne właściwości niż te z wnętrza warstwy, jest znaczny (np. w warstwach magnetycznych składających się z pięciu warstw atomowych wynosi on 40%). Rośnie on ze zmniejszaniem się grubości warstw składowych. W konsekwencji sztucznie wytworzona struktura takiego rodzaju będzie miała nowe właściwości fizyczne, niespotykane w materiałach objętościowych. Odpowiedni dobór grubości warstw magnetycznych oraz grubości i rodzaju przekładek niemagnetycznych (a tym samym rodzaju interfejsów) pozwala zatem na pożądaną modyfikację w szerokim zakresie zarówno anizotropii magnetycznej, jak i oddziaływań DM.

W ostatnich latach wśród struktur magnetycznych obserwowanych w układach wielowarstwowych, w których występuje oddziaływanie DM, szczególne zainteresowanie budzą *skyrmiony*. Są to lokalne stabilne zaburzenia namagnesowania w kształcie wirów. Ich nazwa pochodzi od brytyjskiego fizyka Tony’ego Skyrme’a (1922–1987), który opisał konfigurację pola wektorowego topologicznego solitonu (inny rodzaj zaburzenia namagnesowania). Istotną cechą skyrmionu jest jego topologicznie chroniona konfiguracja magnetyczna. Oznacza to, że nie jest możliwa ciągła deformacja konfiguracji magnetycznej skyrmionu do otaczającego go jednorodnego namagnesowania i wymaga ona przejścia przez osobliwość o (według teorii) nieskończenie wysokiej barierze energetycznej. W rzeczywistości eksperymentalnej bariera ta ma skończoną wysokość, która jednak z powodzeniem może stabilizować konfigurację skyrmionów. Konfiguracja skyrmionów jest wynikiem odpowiedniej relacji pomiędzy bezpośrednimi oddziaływaniami wymiennymi atomów magnetycznych, anizotropią magnetyczną i zewnętrznym polem magnetycznym, które starają się uporządkować namagnesowanie równoległe, oraz oddziaływaniami DM powodującym wzajemne skręcenie momentów magnetycznych sąsiednich atomów. Skyrmionom można przypisać pewne liczby charakteryzujące ich topologiczną strukturę. Jedną z nich jest topologiczny ładunek Q (nie należy go interpretować w kategoriach właściwości elektrycznych lub magnetycznych), który związany jest z liczbą obrotów momentów magnetycznych przy pełnym obiegu wokół osi skyrmionu (rys. 3). Z kolei polarność określa, czy namagnesowanie w centrum skyrmionu zorientowane jest wzdłuż osi z ($p = 1$), czy przeciwnie ($p = -1$). Różne struktury magnetyczne skyrmionów Blocha i Néela oraz antiskyrmionu przedstawione są na rysunku 4. Dla skyrmionów Néela i Blocha ładunek topologiczny i polarność przyjmują te same wartości ($Q = p = 1$). Przeciwne znaki tych wielkości występują w antiskyrmionach ($Q = -p$). Obiekty takie są mieszaniną skyrmionu Blocha i Néela i można je spotkać w materiałach o niższej symetrii. Obiegając skyrmion wokół jego osi, co 45° obserwuje się cykliczną zmianę przemagnesowania między typowymi namagnesowaniami dla skyrmionu Blocha i Néela (rys. 4).

W zależności od opisanych powyżej relacji pomiędzy poszczególnymi wkładami energetycznymi skyrmiony mogą przyjmować średnice w bardzo szerokim zakresie, od nanometrów do mikrometrów. Opracowane zostały mechanizmy generowania skyrmionów oraz identyfikacji ich struktury. Są one dobrze rozróżnialnymi obiektami (nazywanymi również kwazicząstkami), którym dodatkowo można przypisać pewne liczby wynikające z ich struktury wewnętrznej. Ponadto mogą być one przemieszczane przez płynący w materiale prąd elektryczny. Nie należy więc się dziwić, że w ostatnim czasie zaczęto rozważać skyrmiony jako potencjalne nośniki służące do magnetycznego zapisu informacji o bardzo dużej gęstości czy wykonywania operacji logicznych. Rozważa się również wykorzystanie ich do budowy detektorów mikrofalowych lub nanooscylatorów. Wydaje się zatem, że już w niedalekiej przyszłości pokręcone namagnesowanie może wyrobić sobie znacznie silniejszą pozycję w zastosowaniach praktycznych wobec tego bardziej uporządkowanego, czyli prostego.

Dyskretny Darboux

Michał KIEZA



Każda funkcja ciągła określona na zbiorze liczb rzeczywistych ma własność Darboux, tzn. jeśli dla pewnych x i y mamy $f(x) = a$ i $f(y) = b$, to w przedziale (x, y) są przyjmowane wszystkie wartości między a i b . Jest to bardzo skuteczne narzędzie do rozwiązywania wielu zadań z analizy matematycznej. Okazuje się, że podobny motyw możemy zaobserwować także w zadaniach dotyczących liczb całkowitych. Rozważmy bowiem taką funkcję $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, że $|f(x+1) - f(x)| \leq 1$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}$. Ma ona własność analogiczną do wcześniej opisanej własności Darboux, tzn. jeśli dla pewnych x i y mamy $f(x) = a$ i $f(y) = b$, to na zbiorze $\{x+1, x+2, \dots, y-1\}$ są przyjmowane wszystkie całkowite wartości między a i b . Spróbujmy zobaczyć na przykładach, jak potężna może być powyższa obserwacja.

Zadanie 1. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Każdy element zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 6n\}$ pomalowano na biało albo na czarno, przy czym dokładnie $4n$ elementów jest białych. Wykazać, że w tym zbiorze istnieje $3n$ kolejnych liczb całkowitych, wśród których dokładnie $2n$ liczb jest białych.

Rozwiązanie. Niech $f(k)$ dla $1 \leq k \leq 3n+1$ będzie liczbą elementów zbioru $\{k, k+1, \dots, k+3n-1\}$ pomalowanych na biało. Zauważmy, że $f(1) + f(3n+1)$ jest liczbą elementów zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 6n\}$ pomalowanych na biało, czyli $f(1) + f(3n+1) = 4n$. Jeśli $f(1) = 2n$, to teza zadania zachodzi. W przeciwnym razie $f(1) < 2n$ albo $f(1) > 2n$. Przyjmijmy bez straty ogólności, że spełniony jest pierwszy przypadek (drugi jest analogiczny). Wtedy $f(3n+1) > 2n$. Jest jasne, że $|f(k+1) - f(k)| \leq 1$, zatem istnieje taka liczba $1 < k < 3n+1$, dla której mamy $f(k) = 2n$, co jest równoważne z tezą zadania.

Zadanie 2. Udowodnić, że istnieje 2020 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, wśród których jest dokładnie 13 liczb pierwszych.

Rozwiązanie. Niech $f(k)$ dla $k \geq 1$ będzie liczbą liczb pierwszych w zbiorze $\{k, k+1, \dots, k+2019\}$. Wśród pierwszych 2020 liczb całkowitych dodatnich jest więcej niż 13 liczb pierwszych, zatem $f(1) > 13$. Zauważmy także, że wśród liczb $2021! + 2, 2021! + 3, \dots, 2021! + 2021$ występują same liczby złożone, zatem $f(2021! + 2) = 0$. Oczywiście mamy $|f(k+1) - f(k)| \leq 1$, skąd wniosek, że istnieje taka liczba $1 < k < 2021! + 2$, dla której mamy $f(k) = 13$. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 3. Nauczyciel napisał na tablicy trójmian kwadratowy $x^2 + 3x + 15$. Następnie wszyscy uczniowie w klasie podchodzili kolejno do tablicy; każdy z nich zmniejszał albo zwiększał o jeden współczynnik przy x albo wyraz wolny trójmianu. Na koniec okazało się, że na tablicy widnieje trójmian $x^2 + 13x + 5$. Udowodnić, że w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian o pierwiastkach całkowitych.

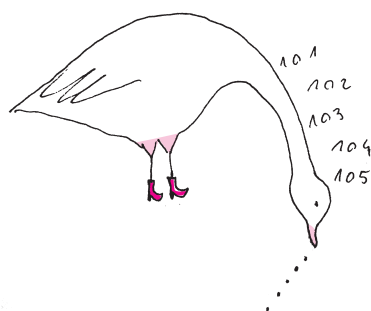
Rozwiązanie. Niech $f(k)$ będzie wartością danego trójmianu w punkcie $x = -1$ po zmianie współczynników przez k -tego ucznia i niech $f(0)$ będzie wartością w -1 trójmianu napisanego przez nauczyciela. Zauważmy, że $f(0) = 12$, a $f(n) = -7$ (gdzie n to numer ostatniego ucznia). Ponadto zachodzi nierówność $|f(k+1) - f(k)| \leq 1$. Rzeczywiście – jest to jasne, gdy zmieniamy wyraz wolny, zaś zmieniając o ± 1 wartość współczynnika przy x , dodajemy lub odejmujemy 1 do wartości wielomianu w -1 . W takim razie istnieje takie $1 \leq k < n$, że $f(k) = 0$. Zatem w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian $x^2 + ax + b$, którego jednym z pierwiastków było -1 ; ze wzorów Viète'a wnosimy, że drugim jego pierwiastkiem była liczba całkowita b .

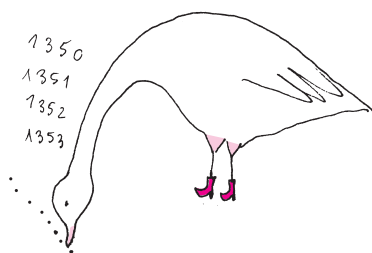
Metoda rozwiązania kolejnego zadania będzie nieznacznie różniła się od poprzednich, gdyż tym razem nasza funkcja będzie skakała o 2, ale tylko po liczbach parzystych.

Zadanie 4. Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowiedzieć, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części jednakowej długości.

Rozwiązanie. Niech liczba boków wielokąta będzie równa $2n$, a jego wierzchołkami będą kolejno $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}$. Dla $i = 1, 2, \dots, 2n$ niech

$$f(i) = A_i A_{i+1} + A_{i+1} A_{i+2} + A_{i+2} A_{i+3} + \dots + A_{i+n-1} A_{i+n} - A_{i+n} A_{i+n+1} - A_{i+n+1} A_{i+n+2} - A_{i+n+2} A_{i+n+3} - \dots - A_{i+2n-1} A_i,$$





gdzie $A_{k+2n} = A_k$ dla $k = 1, 2, \dots, 2n - 1$. Innymi słowy, $f(i)$ jest różnicą długości części, na które dzieli obwód wielokąta punkty A_i oraz A_{i+n} . Ponieważ

$$f(i) = 2 \cdot (A_i A_{i+1} + A_{i+1} A_{i+2} + A_{i+2} A_{i+3} + \dots + A_{i+n-1} A_{i+n}) - \ell$$

(gdzie ℓ jest obwodem danego wielokąta), to $f(i)$ jest liczbą parzystą. Ponadto mamy

$$|f(i+1) - f(i)| = |2 \cdot A_{i+n} A_{i+n+1} - 2 \cdot A_i A_{i+1}| = 2 \cdot |A_{i+n} A_{i+n+1} - A_i A_{i+1}| \leq 2.$$

Zachodzi także równość $f(i) = -f(i+n)$. Stąd wynika, że ciąg liczb

$$f(1), f(2), \dots, f(n) \text{ oraz } f(n+1) = -f(1)$$

składa się z liczb parzystych, a jego kolejne wyrazy różnią się nie więcej niż o 2. Zatem istnieje takie i , że $f(i) = 0$, czyli punkty A_i oraz A_{i+n} dzielą obwód danego wielokąta na dwie części o jednakowej długości.

Na koniec proponujemy Czytelnikom dwa zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. Niech n, p, q będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Ciąg liczb całkowitych (x_0, x_1, \dots, x_n) spełnia warunki:

$$x_0 = x_n \text{ oraz } x_{i+1} - x_i \in \{p, -q\}$$

dla $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Udowodnić, że jeżeli $n > p + q$, to istnieją takie k, ℓ , że $k \neq \ell$ i $\{k, \ell\} \neq \{0, n\}$ oraz $x_k = x_\ell$.

Zadanie 6. Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowiedź, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części, z których każda zawiera taką samą liczbę odcinków długości 2 i taką samą liczbę odcinków długości 3.



Zadania

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1636. Udowodnić, że nie istnieją takie nieparzyste liczby x, y, z , że

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 = (z + x)^2.$$

Rozwiązanie na str. 2

M 1637. W międzyszkolnym turnieju gry w warcaby każda para uczestników z różnych szkół rozegrała jedną partię; jeśli uczestnicy pochodzili z tej samej szkoły, nie grali ze sobą. *Singlem* nazwiemy każdy mecz rozegrany przez uczestników tej samej płci, a *miksem* – przez uczestników płci przeciwnej. Na koniec turnieju okazało się, że liczba dziewczynek biorących udział w turnieju różni się o co najwyżej 1 od liczby chłopców. Podobnie, liczba rozegranych singli różniła się o co najwyżej 1 od liczby mikсів. Udowodnić, że liczba szkół, z których startowały różne liczby chłopców i dziewcząt, nie przekracza 3.

Rozwiązanie na str. 19

M 1638. Wielomian $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ma n pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami). Wiedząc, że $a_{n-1} = -n$ i $a_{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1)$, wyznaczyć a_i dla $0 \leq i \leq n-3$.

Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 999. Jednorodnemu walcowi o masie m i promieniu r nadano prędkość kątową ω_0 wokół osi symetrii obrotowej i położono na poziomej podłodze. Przyspieszenie ziemskie wynosi g , a współczynnik tarcia kinetycznego między podłogą i powierzchnią walca wynosi μ . Po jakim czasie τ walec przestanie się ślizgać i zacznie się toczyć ze stałą prędkością kątową? Jaka pracę W wykona siła tarcia? Wskazówka: moment bezwładności I jednorodnego walca, o promieniu r i masie m , wokół jego osi symetrii wynosi: $I = mr^2/2$.

Rozwiązanie na str. 14

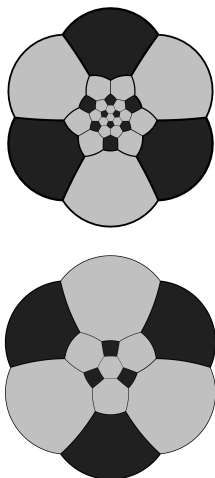
F 1000. Przeciętne oko ludzkie rejestruje światło o długościach fali λ mieszczących się w zakresie $380 \text{ nm} < \lambda < 740 \text{ nm}$. Ile linii widma wodoru człowiek może zaobserwować bezpośrednio? Stała Plancka wynosi $h = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, a stała Rydberga $R = 13,606 \text{ eV}$.

Rozwiązanie na str. 15

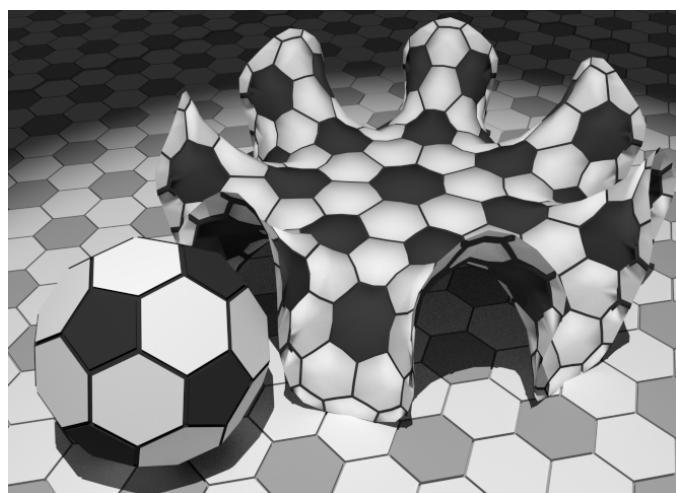
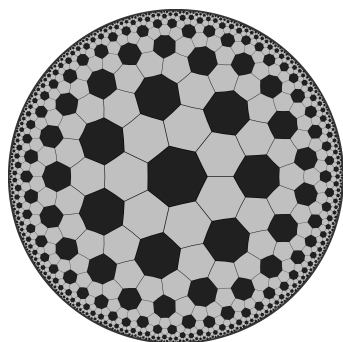


Zrób to sam: płaszczyzna hiperboliczna z papieru

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski



Wyobraźmy sobie, że rysujemy krawędzie wielościanu na przezroczystej sferze, następnie przykładamy oko do tej sfery. To, co widzimy, nazywa się rzutem stereograficznym.



Eryk KOPCZYŃSKI*

Od czasów starożytnych Greków wiadomo, że jest pięć brył foremnych: czworościan, sześciian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan. W każdym wierzchołku może się spotkać 3, 4 lub 5 trójkątów, 3 czworokąty lub 3 pięciokąty. Dużo później skompletowano wielościany półforemne, jednak i tu w żadnym z nich nie pojawia się siedmiokąt. Spróbujmy dać mu szansę...

Spójrzmy na klasyczną piłkę nożną. Jest ona wielościanem, którego ścianami jest 12 czarnych pięciokątów i 20 białych sześciokątów. W każdym wierzchołku stykają się dwa białe sześciokąty i jeden czarny pięciokąt. Na rysunku obok piłka nożna przedstawiona jest w rzucie stereograficznym. Co by było, gdybyśmy zastąpili pięciokąt inną figurą?

W tej piłce pięciokąt można zastąpić kwadratem lub trójkątem. Chcąc stworzyć taki wielościan z papieru, można wyciąć wszystkie potrzebne białe i czarne ściany, a następnie odpowiednio je połączyć. Ta metoda wymaga jednak dużo wycinania i klejenia, czego możemy sobie oszczędzić, tworząc siatkę docelowego wielościanu (czyli niektóre ze ścian od razu będą połączone). Taki wielościan można przedstawić jak na rysunku obok, pamiętając o tym, że jedna ze ścian (ta, przez którą patrzymy do wewnątrz sfery) nie jest na nim przedstawiona. Gdy będziemy tworzyć siatkę zgodnie z zasadami, że dwie białe i jedna czarna figura mają spotkać się w każdym wierzchołku, to otrzymamy właśnie tę bryłę, o którą nam chodziło.

Gdy będziemy chcieli w piłce nożnej zamienić pięciokąty na sześciokąty, to łatwo się zorientujemy, że nie istnieje wielościan, którego ścianami są same sześciokąty. Oczywiście można wykonać konstrukcję z papieru, otrzymamy wtedy coś takiego jak obok.

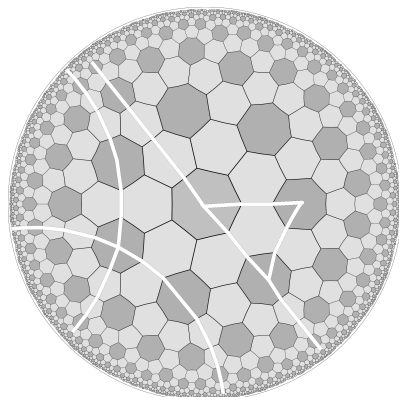
Pójdźmy dalej i zamieńmy czarne figury na siedmiokąty.

Przed rozpoczęciem sklejanego warto rozrysować na kartce strukturę czegoś takiego. Wynik przedstawiony jest na rysunku obok. Podobnie jak w przypadku czarnych sześciokątów, nasza konstrukcja nie będzie się składała w wielościan. Nie będzie się także składała w płaszczyznę. Da się ją jednak wykonać, jeśli ograniczymy się na przykład do 50 figur w odległości co najwyżej 3 od środkowego siedmiokąta. Konstrukcja siatki jest trochę trudniejsza niż w przypadku wielościanów. Jeden czarny sześciokąt i 2 białe idealnie mieściły się wokół wierzchołka, natomiast 1 czarny pięciokąt i 2 białe sześciokąty nie tylko się mieściły, ale także zostawiały trochę miejsca (które należało wyciąć i skleić). Tutaj czarny siedmiokąt i 2 białe sześciokąty już się nie mieszczą. Nie jest to jednak dużym problemem, blok techniczny jest na tyle giętki, by lekko wyginając papier dało się taką konstrukcję wykonać, i jednocześnie na tyle sztywny, by zachowywała ona swój kształt. Taką atrakcyjną konstrukcję niestety dosyć trudno przedstawić na dwuwymiarowych zdjęciach czy filmach – lepiej pobawić się samemu. Pora wyjaśnić, co to właściwie jest.

Kiedy w „piłce” czarne były sześciokąty, to otrzymaliśmy płaszczyznę. Dwudziestościan przycięty (z czarnymi pięciokątami) przypomina kulę – co widać na przykładzie piłki nożnej. Wersje z kwadratami i trójkątami również przypominają kulę, ale już nie tak dobrze. Nasza siedmiokątna konstrukcja również przybliży pewną powierzchnię.

Przykładowa gotowa siatka konstrukcji z siedmiokątami: www.mimuw.edu.pl/~erykk/paper/. Polecamy wydrukować na czterech kartkach A4. Do szybkiego i mocnego „sklejania” można użyć zszywacza.

Piąty postulat Euklidesa: *Jeżeli prosta przecina dwie proste, tworząc dwa kąty wewnętrzne po tej samej stronie, o sumie mniejszej niż dwa kąty proste, to te dwie proste przecinają się po tej stronie, po której znajdują się owe kąty wewnętrzne.*



Nasze rysunki przedstawiają płaszczyznę hiperboliczną w modelu Poincaré, który jest odpowiednikiem rzutu stereograficznego sfery. W tym modelu cała płaszczyzna hiperboliczna mieści się w dysku, proste przedstawione są jako łuki okręgów lub odcinki przecinające brzeg dysku pod kątem prostym.

Zachęcam do wirtualnego spaceru po płaszczyźnie hiperbolicznej, którego można doświadczyć w grze HyperRogue – gra toczy się na opisanej powyżej siatce z sześciokątów i siedmiokątów. Gra ma także opcję tworzenia gotowej do wycięcia siatki opisanego w artykule modelu (na podstawie sceny z gry) oraz możliwość tworzenia trójwymiarowego komputerowego modelu tej powierzchni.

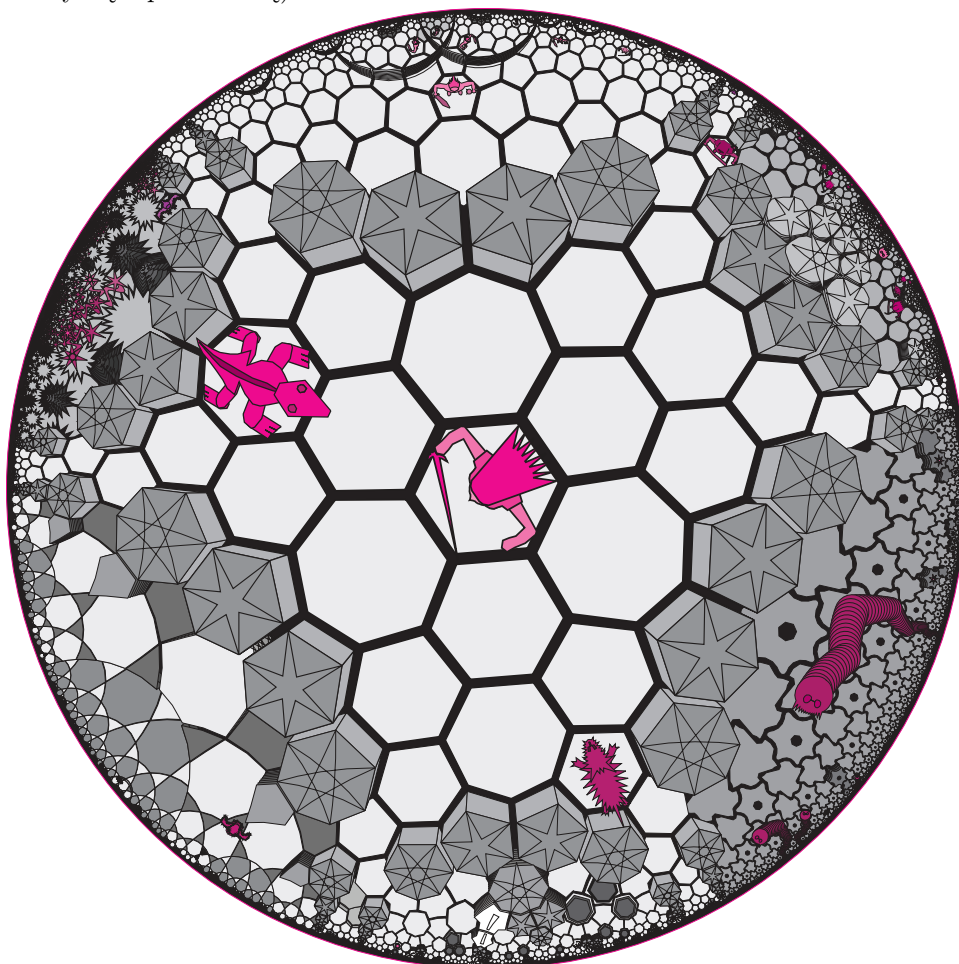
Gra HyperRogue:
www.roguetemple.com/z/hyper/online.php
 Zwiastun gry:
www.youtube.com/watch?v=xAFrKKApHTY

Głównymi twórcami gry HyperRogue są autor tego artykułu oraz Dorota Celińska-Kopczyńska (autorka tekstu, który znajduje się na kolejnej stronie).

Jakie własności ma ta powierzchnia? By to zbadać, spróbujmy rysować na niej linie proste – jako że mamy tylko przybliżenie, nie możemy prostych rysować gdziekolwiek. Jeśli zaczniemy w środku siedmiokąta i narysujemy linię prostą w kierunku wierzchołka lub środka krawędzi, to jest dosyć jasne, jak będziemy musieli ją kontynuować. Dla łatwiejszego zrozumienia, na rysunku obok rysujemy odcinki, używając naszej dwuwymiarowej reprezentacji. Z trzech odcinków łączących środki trzech najbliższych leżących siedmiokątów możemy stworzyć trójkąt i obliczyć sumę jego kątów: $3 \cdot 360^\circ / 7 < 180^\circ$. Możemy też narysować prostą, nazwijmy ją L , i jakiś punkt poza nią. Okaże się, że przez ten punkt można poprowadzić różne proste nieprzecinające L – można to zrobić na kilka znacząco różnych sposobów. Z tego wynika, że ta powierzchnia różni się od płaszczyzny, gdzie suma kątów w trójkącie wynosi 180° i przez punkt poza prostą L można przeprowadzić tylko jedną prostą do niej równoległą. Ta powierzchnia różni się także znacząco od sfery, gdzie suma kątów w trójkącie jest zawsze większa niż 180° i proste równoległe nie istnieją – równoleżniki nie są prostymi.

Geometria przybliżana przez konstrukcję z siedmiokątami jest nazywana *geometrią hiperboliczną*, a jej odkrycie jest jednym z najciekawszych, najbardziej zaskakujących fragmentów historii matematyki. Spełnia ona wszystkie postulaty geometrii Euklidesa oprócz piątego. Euklides, podobnie jak wielu innych matematyków przez 2000 lat, wierzył, że piąty postulat da się wyprowadzić z pozostałych. Nasza konstrukcja jest dowodem, że nie da się tego zrobić.

Wyobraźmy sobie, że spacerujemy po takiej konstrukcji i w każdym kroku możemy przejść na nowe pole, o ile ma ono wspólną krawędź z tym, na którym obecnie się znajdujemy. Można obliczyć, że liczba figur w odległości co najwyżej d kroków od wybranego siedmiokąta zależy wykładniczo od d . Jako że wartości funkcji postaci a^d są zawsze od pewnego momentu większe niż d^3 (czy dowolny inny wielomian zmiennej d), nie jest możliwe włożenie całej płaszczyzny hiperbolicznej w przestrzeń euklidesową – po prostu a^d figur nie mieści się w kuli o promieniu d w przestrzeni trójwymiarowej, przynajmniej jeśli robimy model z papieru (Hilbert wykazał, że nie można tego zrobić również z abstrakcyjną płaszczyzną hiperboliczną).



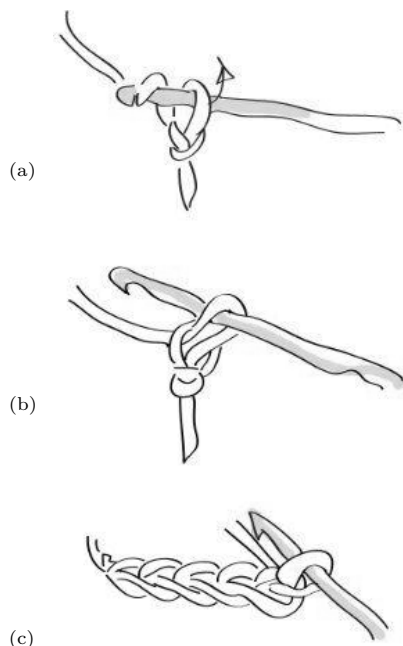
Zrób to sam: płaszczyzna hiperboliczna szydełkiem

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Dorota CELIŃSKA-KOPCZYŃSKA *

Stworzenie papierowego modelu płaszczyzny hiperbolicznej (patrz artykuł na stronie 6) wymaga nieco umiejętności manualnych. Papierowy model, niestety, ma bardzo poważną wadę: jest podatny na uszkodzenia. Dlatego prezentujemy konkurencyjny sposób produkcji płaszczyzny hiperbolicznej, zaproponowany po raz pierwszy przez Dainę Taiminę w 2001 roku. Pani Taimina, obserwując uczestników warsztatów, jak cierpliwie łączą papier taśmą klejącą, wymyśliła sposób na porządną i trwałą płaszczyznę hiperboliczną. Ten sposób wymaga szydełka, podstawowej umiejętności liczenia i znajomości zaledwie dwóch ściegów: łańcuszka i półsłupka.

Czytelników, którzy zaczęli kalkulować, „ile to będzie kosztowało?”, chcemy pocieszyć, że projekt tak samo dobrze będzie wyglądać, gdy użyjemy jakiegś starej, zabłąkanej w domu włóczki albo kordonka czy materiału z recyklingu, np. sprutego swetra, który już od dawna leżał nikomu niepotrzebny. Jeśli szydełka nie uda się znaleźć w domu (ani pożyczyć), to ich ceny nie są zatrważające: nie więcej niż 5–10 zł.



Rys. 1. Oczko łańcuszka

Uwaga dla osób leworęcznych: weź lusterko i przystaw je do rysunku z instrukcją, tak aby w lustrzanym odbiciu było widać sposób przerabiania kolejnych ściegów.

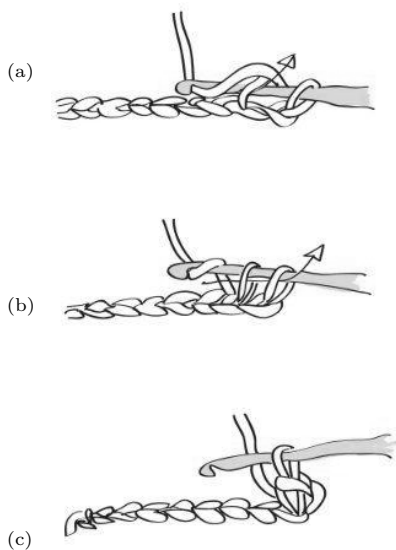
Co będzie potrzebne? Przygotuj materiały: włóczkę lub kordonek i wygodne szydełko dostosowane do grubości nici. Jest to ważny krok, ale drobne błędy nie przekreślą powodzenia projektu. Jeśli użyjesz zbyt grubego szydełka, nic poważnego się nie stanie – ściegi będą luźniejsze, a robótka bardziej lejąca. Gdy użyjesz zbyt cienkiego, być może nie będziesz w ogóle w stanie tworzyć. Zauważysz to bardzo szybko. Ogólnie im grubsza nitka, tym grubsze szydełko: dla popularnej, cienkiej włóczki akrylowej szydełko 4 mm będzie prawdopodobnie bezpieczną opcją. Niektórzy producenci włóczek podają na opakowaniu sugerowany rozmiar szydełka – warto na to zwrócić uwagę, jeśli zdecydujemy się na samodzielny zakup materiałów. Pożyczając szydełko od kogoś doświadczonego, na pewno można liczyć na jego rady.

Nie ma większego znaczenia, w jakiej pozycji trzymamy szydełko – ma być nam wygodnie. Można trzymać je jak druty lub ołówek. Osoby praworęczne najczęściej trzymają szydełko w prawej ręce, osoby leworęczne w lewej. Przeciwna ręka służy do kontroli napięcia nici i trzymania robótki.

Oczko łańcuszka. Wszystkie robótki szydełkowe zaczynają się od wykonania początkowego łańcuszka. Stanowi on bazę. Robimy małą pętelkę, taką żeby swobodnie przechodził przez nią haczyk szydełka, ale jednocześnie nie za dużą. Przekładamy haczyk szydełka przez pętelkę i nawijamy nitkę na szydełko w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 1a). Przeciągamy nawiniętą nitkę szydełkiem przez pętelkę, formując nową (oczko) (rys. 1b). Nie zaciskamy poprzedniej pętelki (oczka), później będziemy się w nią wbijać. Aby otrzymać łańcuszek początkowy, przerabiamy odpowiednią liczbę oczek (rys. 1c). Staramy się, żeby były równe.

Półsłupek. Mając łańcuszek oczekiwanej długości, dodajemy jeszcze jedno oczko. Będziemy tak robić zawsze przy odwracaniu robótki lub przechodzeniu do kolejnego rzędu. Wkłuwamy szydełko w robótkę, w drugie oczko początkowego łańcuszka, licząc od strony szydełka. Pierwsze oczko leży na szydełku. Nawijamy nitkę na szydełko i przeciągamy ją przez robótkę (pierwszą pętelkę zostawiamy na razie w spokoju) (rys. 2a). Znowu nawijamy nitkę i tym razem przeciągamy ją przez obie pętelki na szydełku (rys. 2b). Gratulacje, pierwszy półsłupek gotowy (rys. 2c). Żeby zrobić kolejny, wkłuwamy szydełko w następne oczko i powtarzamy sekwencję nawijanie-przeciąganie-nawijanie-przeciąganie. Gdy dojdziemy do końca rzędu, dodajemy zwykłe oczko łańcuszka, a robótkę odwracamy. Od drugiego rzędu zauważymy, że na wierzchu naszych półsłupków znajdują się pętelki – w zależności od wybranego wzoru możemy wbijać się w przednią część pętelki, tylną lub pod obydwoma.

Gdyby powyższy opis był niewystarczający, zachęcamy do poproszenia o pomoc kogoś znajomego, po kim spodziewamy się, że potrafi szydełkować. Jeśli Czytelnik nie wykazywał wcześniej zainteresowania robótkami ręcznymi, to nie uniknie zapewne (co najmniej) lekkiego zaskoczenia osoby pytaney. W najgorszym wypadku można powiedzieć, że zamierza się zrobić szalik (skoro niektórzy noszą zrobioną na drutach butelkę Kleina jako czapkę, to kto nam broni założyć płaszczyznę hiperboliczną na szyję?). Jeśli jednak osoba, którą chcemy poprosić o pomoc, nie reaguje na tematy matematyczne agresywnie



Rys. 2 Półślupek

Czy można rozprostować jeden rząd naszej konstrukcji? Łatwo sprawdzić, że nie można, i nic dziwnego – z punktu widzenia geometrii hiperbolicznej rzędy nie są prostymi (są raczej przybliżeniami hiperbolicznego kształtu zwanego *horocyklem*). By znaleźć prostą, chwytną nasz model w dwóch miejscach i rozciągamy, znajdując w ten sposób najkrótszą drogę między nimi. Po skonstruowaniu dużego trójkąta z trzech prostych możemy zaobserwować, że jego suma kątów jest mniejsza niż 180 stopni.

ani alergicznie, warto wziąć ten numer *Delty* i pouczyć się razem. W końcu matematyka lepiej smakuje w grupie.

Algorytm. Te kilka rzędów, które opisaliśmy jako próbkę do nauki ściągów, nie tworzy jeszcze płaszczyzny hiperbolicznej. Uważny Czytelnik dostrzeże, że przy starannym przerabianiu każdego oczka i pamiętaniu o dodaniu jednego na końcu rzędu tworzy nam się zwykły, euklidesowy prostokąt. Dlatego teraz, po przerobieniu bazowego łańcuszka, zwiększamy liczbę półślupków co n . Przyjmijmy, że nasze n będzie równe 5. Zaczynamy od małego łańcuszka, np. 20 oczek (+oczko na potrzeby przejścia do nowego rzędu). Zrobimy standardowe 4 półślupki, wbijając się w kolejne oczka. Piąty półślupkę zrobimy, wbijając się w tę samą pętelkę, co czwarty. Powtarzamy te dwa kroki do końca rzędu. Oznacza to, że co piąty półślupek będzie robiony „do tyłu” robótki. Na koniec rzędu dodajemy jedno oczko i odwróćmy robótkę. W początkowym łańcuszku mieliśmy 20 oczek, po pierwszym rzędzie jest ich już 26. Procedurę powtarzamy w kolejnych rzędach. Gdy znudzi nam się robótką, możemy obciąć nitkę, przeciągnąć ją przez leżącą na szydelku pętelkę i zacisnąć, żeby zakończyć.

Czemu to działa? W każdym rzędzie dodajemy coraz więcej oczek – zasada jest zbliżona do opisanej wcześniej konstrukcji papierowej. Bierzymy konstrukcję płaszczyzny euklidesowej i dodajemy element (tam – bok czarnej figury, tu – półślupek) tak, by twór nie mieścił się na płaszczyźnie i musiał się zakrzywić; element ten dodajemy w regularny sposób, dzięki czemu otrzymujemy powierzchnię o stałej krzywiznie. Stosunek liczby oczek pomiędzy rzędami pozostaje zawsze ten sam: n do $n + 1$. Po kilku (nastu) rzędach, w zależności od wybranego n , nasza robótką przestaje się wygodnie mieścić w trójwymiarowym, euklidesowym świecie. Dodawanie oczek to również powód, dla którego szydełko jest wygodniejsze od drutów. Przy korzystaniu z drutów, robótką musi zawsze na jednym z nich się opierać, co stanowi problem przy wykładniczym zwiększaniu się liczby oczek.

Co dalej? Teraz na różnych próbkach (żeby zachować stałą krzywiznę!) możemy wypróbować, jak zachowuje się płaszczyzna, gdy zwiększamy lub zmniejszamy n . Ciekawym rozszerzeniem jest również zrobienie pseudosfery: w tym celu po zrobieniu początkowego łańcuszka, wkłujmy się w najdalej leżące oczko (pierwsze, które zrobiliśmy) i po narzuceniu nitki, przeciągamy ją przez obie pętelki leżące na szydelku – stworzymy kółeczko. Jedno oczko łańcuszka na odwrócenie robótki i teraz spiralnie kontynuujemy algorytm, pamiętając, by co n -ty półślupek robić „do tyłu” robótki.

Problem 153. z Księgi Szkockiej

Wiesław ŻELAZKO*

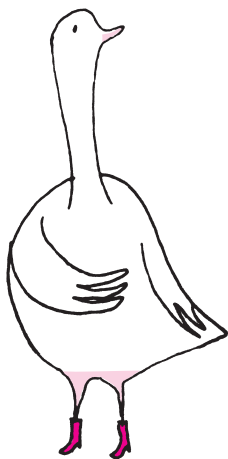
Tytułowy problem, postawiony przez Stanisława Mazura 6 listopada 1936 roku, brzmi:

Czy dla każdej funkcji ciągłej $f(x, y)$ określonej w kwadracie $0 \leq x, y \leq 1$ i dowolnej liczby dodatniej ε istnieją takie punkty kwadratu $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ oraz liczby c_1, \dots, c_n , że dla wszystkich punktów (x, y) tego kwadratu

$$\left| f(x, y) - \sum_{i=1}^n c_i f(x_i, y_i) f(x_i, y) \right| < \varepsilon.$$

Problem nie wygląda szczególnie interesująco, ale Mazur wiedział, że ma on związek z ważnym wówczas pytaniem: czy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha ma bazę Schaudera. Baza Schaudera $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ przestrzeni Banacha X to taki ciąg jej punktów, że dowolny element x tej przestrzeni daje się przedstawić w postaci $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i$, przy czym współczynniki $f_i(x)$ są funkcjami ciągłymi. Okazało się później (udowodnił to wielki matematyk francuski Alexander Grothendieck), że problem Mazura jest równoważny z problemem aproksymacji dla przestrzeni Banacha X : czy każdy liniowy operator zwarty

* Instytut Matematyczny, Polska Akademia Nauk



z dowolnej przestrzeni Banacha do X daje się aproksymować w normie przez operatory skończenie wymiarowe? Jest tak, jeśli przestrzeń X ma bazę Schaudera. Za rozwiązanie tego problemu Stanisław Mazur obiecał ufundować nagrodę w postaci żywej gęsi. Rozwiązał go po wielu latach Per Enflo w pracy opublikowanej w roku 1973. Odpowiedź była negatywna: Enflo skonstruował przestrzeń bez własności aproksymacji, a tym samym bez bazy Schaudera. Wynik ten wywołał sensację; gdy było już pewne, że jest poprawny, Enflo został zaproszony do Warszawy po odbiór nagrody.

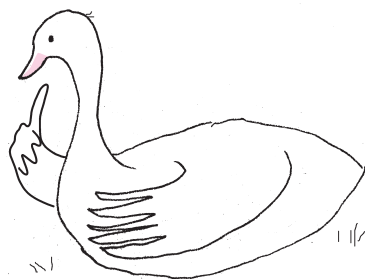


Zdjęcie można znaleźć w książce Kazimierza Kuratowskiego „Pół wieku matematyki polskiej 1920–1970” wydanej przez Książkę i Wiedzę w 1973 roku

Prezydent Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley, gdzie Enflo wówczas pracował, ofiarował mu bilet na przelot. Ponieważ wydarzenie miało miejsce w grudniu 1972 roku, na kilka dni przed Bożym Narodzeniem, szczęśliwy matematyk przy okazji mógł odwiedzić rodzinę w Szwecji. Sławetną gęś zakupiła i umieściła w koszyku dr Anna Warzecha. Enflo otrzymał ją w prywatnym mieszkaniu Mazura (nie byłem przy tym obecny). Słynne zdjęcie Mazura, Enflo i gęsi zrobił wtedy Wiesław Szlenk. Tego dnia gość wygłosił wykład podczas zebrania Towarzystwa Matematycznego w Pałacu Kultury i Nauki (Mazur nie był obecny na tym wykładzie). Reporter TVP (niejaki „Wicherek”) nagrywał tylko początek sesji, więc gdy gęś była już w piecu, można ją było zobaczyć żywą w wieczornych wiadomościach telewizyjnych.

Po wykładzie powstał naturalny problem, co zrobić z gęsią. Enflo następnego dnia miał lecieć do Sztokholmu i nie mógł zabrać jej w żadnej postaci. Problem rozwiązała moja żona Hania. Obiecała upiec gęś pod warunkiem, że ktoś ją zabije i oskubie. Egzekucji dokonał Przemek Wojtaszczyk, obecnie profesor, a wtedy doktorant Aleksandra Pelczyńskiego, który polecił mi to uczynić. Z podobnych powodów gęś została oskubana i oczyszczona przez moją doktorantkę Ewę Ligocką (obecnie emerytowaną profesor UW i laureatkę nagrody Bergmana w USA). Pióra latały po całym domu. Upieczona gęś została podana około trzeciej nad ranem. Przedtem goście dostali coś do jedzenia i picia, a Enflo przez cały czas grał na pianinie. Był i jest doskonałym pianistą, między innymi zagrał sonatę E-dur Beethovena (opus 109). Powiedział mi kiedyś, że dwukrotnie brał udział w międzynarodowych konkursach pianistycznych, i że pewnego razu zaproszono go na konferencję matematyczną, ale nie po to, aby coś powiedział, ale po to, aby zagrał. Było mu co prawda smutno, ale się zgodził. Pamiętam, że kiedyś podczas wizyty w Kent (Ohio, USA) byłem wraz z żoną zaproszony do Państwa Enflo na kolację. Na początku był koncert: pani Enflo zaśpiewała arię z 208. kantaty Bacha (była śpiewaczką w operze w Cleveland), a Per jej akompaniował. Potem słuchaliśmy Chopina, a w tym czasie pani Enflo szykowała kolację. Kilka dni później byliśmy na publicznym koncercie, na którym oboje wykonywali pieśni Schuberta. Słyszałem, że Per nadal koncertuje, czasami nawet z orkiestrą.

Per Enflo gościł w Krakowie na początku września 2019 roku, podczas Jubileuszowego Zjazdu Matematyków Polskich z okazji 100-lecia powstania Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Uczestnicy Zjazdu mieli możliwość wysłuchania koncertu fortepianowego Pera Enflo 6 września w Kinie Kijów.



Per Enflo miał także swój udział w rozwiązaniu innego słynnego, i chyba ważniejszego, problemu, mianowicie problemu podprzestrzeni niezmienniczej. Było to pytanie, czy każdy operator liniowy ciągły T przestrzeni Banacha X w siebie ma właściwą podprzestrzeń niezmienniczą, to znaczy taką podprzestrzeń domkniętą Y przestrzeni X , że $T(Y) \subset Y$. Per pokazał mi kiedyś gruby całkowicie zapisany brulion z konstrukcją kontrprzykładu. Zapamiętałem tylko, że na którejś stronie był sformułowany lemat 68. (numer zmyślony) z uwagą, że dowód jest podobny do dowodu lematu 36. Praca była oddana do druku, ale nikt nie był w stanie tego przeczytać. Słyszałem, że została opublikowana dopiero wtedy, gdy na ten sam temat ukazała się praca Charlesa Reada ze znacznie prostszą konstrukcją, mieszczącą się na kilkunastu stronach. Swoją drogą Charles Read był także niezłym pianistą. Zagrał u mnie w domu sonatę h-moll Liszta na tym samym pianinie, na którym grał Enflo. Pianino jest więc mocno związane z problemem podprzestrzeni niezmienniczej. Piszę dużo o muzyce ze względu na pewną klasyfikację matematyków: na takich, którzy chodzą po górach, grają w szachy lub słuchają muzyki. Istnieją co prawda wybitni matematycy nie podlegający tej klasyfikacji, ale jest ich stosunkowo niewiele.

... w czasach zarazy i przedtem

Urodziłam się niedługo przed II wojną światową. Z tej wojny pamiętam bombardowanie, potem strach o ojca wychodzącego co dzień z domu w Radości do pracy w Warszawie, przejście frontu, łuny palącej się Warszawy, służbę ojca w wojsku...

Po wojnie chodziłam do szkół, które dziś nazywa się „komunistycznymi”. Skończyłam studia. Świat odnotował dwie pandemie grypy, których nie pamiętam, i zakażenie czarną ospą we Wrocławiu (zamknięte miasto), które pamiętam.

Solidarność, stan wojenny, w moim życiu pojawiła się dwójka dzieci i jeden rozwód. Zajmowałam się biologią i genetyką molekularną. Zostałam „belwederskim” profesorem, dostałam kilka nagród i dwa ordery. Za mojego życia do medycyny wprowadzono antybiotyki (dzięki którym przeżył mój mąż), powstała inżynieria genetyczna, ludzie stworzyli GMO, wiele nowych leków i procedur. Rozwinęła się transplantologia. Rozpoznaje się choroby genetyczne, choć wciąż trudno je leczyć. Współorganizowałam Festiwal Nauki i Centrum Nauki Kopernik. Przeszłam na emeryturę.

Dziś przeżywam coś zupełnie nowego: pandemię koronawirusa, dobrowolną kwarantannę, serdeczność i pomoc najbliższej rodziny i dalszych znajomych. Jestem w grupie ludzi starych z wysokim zagrożeniem zejścia po zakażeniu.

Przepraszam za ten mocno osobisty ton. Traktuję ten tekst, jak list powierzony butelce. W momencie druku będziemy wiedzieć więcej o zarazie, im dalej, tym ciekawiej. A tymczasem na chwilę o niej zapomnijmy. Może dzięki historii biotechnologicznej o wielkich superlarwach. Należą do gatunku *Zophobas atratus*, po polsku chrząszcz drewnojad. Dorosłą formę – smukłego czarnego owada (3 cm) każdy z nas widział, larwalną – hodowcy ptaków, jaszczurek, małych gryzoni. W sieci sprzedawane są na kilogramy.

Do naszej części świata przywieziono je z Ameryki Południowej, teraz zainteresowanie budzą w Korei (zgadnijcie, czemu?). W przyrodzie można je spotkać w gnijącym drewnie (brzoza). Znajdowano je w odchodach owocolubnych nietoperzy (skojarzenie z koronawirusem). Larwy są pełne białka i tłuszczów, osiągają 6 cm długości, jedzą drewno, w dużej gromadzie zjadają wzajemnie siebie i poczwarki (kanibalizm). Od paru lat badacze z Pekinu zauważyli, że larwy z rodziny *Zophobas* nie gardzą polistyrenem. Larwa najżarłoczniejszych *Z. atratus* może żyć na samym polistyrenie, pochłaniając 0,58 mg dziennie tego specyfiku. Jeszcze ciekawsze okazały się produkty trawienia; Chińczycy (znowu koronawirus) przebadali ten proces bardzo dokładnie, i okazało się, że obok małych organicznych związków węgla głównym produktem (36%) trawienia polistyrenu jest dwutlenek węgla!!! Dodano do polistyrenu antybiotyki i... larwy przestały go trawić. Wniosek prosty: polistyren rozkładają obecne w jelitach larw bakterie.



Chyba w głowie każdego Czytelnika zapaliła się zielona lampka. Skoro światowa produkcja plastików w 2018 roku wyniosła 360 mln ton, w tym polistyrenu 33 mln ton (polistyren uważany jest za najtrudniejszy do utylizacji i recyklingu), to może trzeba odwołać się do tych larw – długich (6 cm) i dość człowieka brzydzących stworzeń. Może w ich jelitach warto poszukać bakterii, które są w stanie przetwarzać polistyren? Trzeba by też coś zrobić z dwutlenkiem węgla, którego dziś mamy nadmiar. Myślę, że z tym sobie damy radę, np. przerywając proces trawienia na wcześniejszym etapie. To się nazywa biotechnologią.

Biolog zastanowi się również, jak i kiedy pojawiła się opisana cecha bakterii z jelit larw. W historii świata polistyren zaistniał niedawno. Czy bakterie drewnojadów miały zawsze zestaw enzymów, które okazały się przydatne po zetknięciu z nowym, bogatym w węgiel produktem? Czy też przystosowały się do tego produktu przez wytworzenie nowego zestawu enzymów?

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Indukcja przyrodnicza

Piotr CHRZAŚTOWSKI-WACHTEL *

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

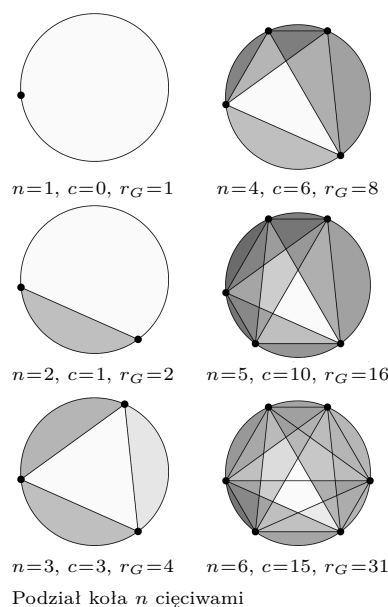
Tak zwana *zasada indukcji przyrodniczej* mówi: Gdy masz podejrzenie, że znalazłeś ogólny wzór, który działa dla każdej liczby naturalnej, to sprawdź go dla pierwszych paru wartości i dla jakiejś większej: jak wzór się zgadza, to zgadza się dla każdej liczby naturalnej.

Co, że to nie zawsze działa? No faktycznie, można podać bardzo proste zdania, które są prawdziwe tylko dla początkowych paru liczb, a potem przestają być prawdziwe. Najprostsze zdania to „twierdzenia” typu *każda liczba naturalna n jest mniejsza od miliona*. Faktycznie, gdy sprawdzimy prawdziwość takiego zdania dla $n = 1, 2, 3$, dostajemy zdania prawdziwe. Nawet dla $n = 100$ jest to prawda. No ale – tu wszyscy się uśmiechamy – nawet małe dziecko wie, że w oczywisty sposób to stwierdzenie nie jest prawdziwe dla, na przykład, $n = 1\,000\,001$.

Jednak gdy wzór jest nieco bardziej zagmatwany, możemy dać się ponieść fałszywej intuicji, że skoro nieoczywisty fakt zaskakuje nas dla niewielkich wartości początkowych, to będzie tak zawsze. Różni matematycy ulegali takim mirażom. Jednym z nich był wielki Pierre de Fermat, który

sądził, że liczby postaci $2^{2^n} + 1$ są pierwsze dla każdego n . Faktycznie, podstawiając $n = 0, 1, 2, 3, 4$, dostajemy liczby 3, 5, 17, 257, 65 537 – wszystkie one są pierwsze. Jednak, co wykrył Euler nieco później, już piąta liczba Fermata równa $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ może zostać przedstawiona w postaci iloczynu $641 \cdot 67\,000\,417$. Metoda, której użył Euler, bazowała na pewnym fakcie znanym też Fermatowi; historycy zastanawiają się, czemu Fermat tego nie zauważył. Podejrzewa się, że mógł po prostu pomylić się w obliczeniach.

Znalezienie rozkładu szóstej liczby Fermata, czyli $F_6 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,617$, było już poza zasięgiem uczonych niedysponujących komputerami, ale dziś wiadomo, że jest to liczba złożona i mniejszy z jej dwóch dzielników to 274 177. Za pomocą komputerów znaleziono również rozkłady liczb F_7, F_8, F_9, F_{10} i F_{11} . Wiadomo też, że liczby Fermata o numerach od 12 do 30 są złożone. Co dalej – nie wiadomo, to znaczy nie wiadomo, czy są jakieś pierwsze liczby Fermata inne niż pięć początkowych i czy trzydziesta pierwsza lub któraś z dalszych liczb Fermata jest złożona.



Podział koła n cięciwami

Jedną z metod odkrywania faktów o liczbach naturalnych jest obserwacja małych przypadków, postawienie hipotezy, zbadanie jej prawdziwości dla małych wartości, a następnie próba uogólnienia i, jeśli się da, udowodnienie – zazwyczaj przez indukcję – ogólnego wzoru. Spróbujmy zmierzyć się z takim oto zadaniem. Wybierzmy n punktów na brzegu koła i połączmy każdy z każdym. Na ile maksymalnie części dzieli koło wszystkie tak poprowadzone cięciwy? Widać, że aby nie zmarnować żadnego możliwego do uzyskania obszaru, wybrane punkty nie powinny być ułożone zbyt regularnie: żadne trzy cięciwy nie powinny się przecinać w tym samym punkcie. Zbadajmy parę początkowych wartości. Dla jednego punktu mamy 1 obszar – zero cięciw i całe koło. Dwa punkty tworzą jedną cięciwę i dwa obszary, trzy generują z cięciw trójkąt dzielący koło na 4 obszary. Cztery punkty dają nam 8 obszarów, pięć punktów 16 obszarów, ... No to już widzimy wzór: maksymalna liczba obszarów dla n punktów to po prostu 2^{n-1} . Sprawdzamy jeszcze dla $n = 6$ i bęc! Okazuje się, że nie da się wykroić 32 obszarów. Najwyżej 31.

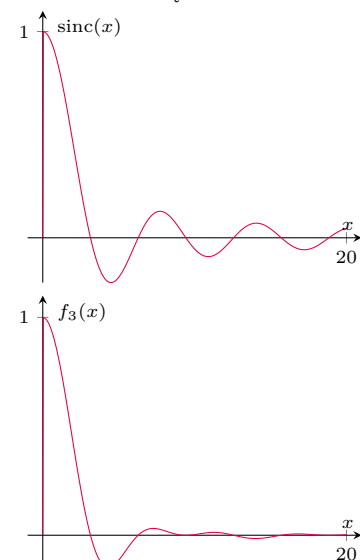
Niestety nasz wzór jest błędny: nie uda się nam krok indukcyjny. Trzeba by pokazać, że nowy punkt zwiększa dwukrotnie liczbę obszarów, a dla większych n jest to niemożliwe. W rzeczywistości wzór na maksymalną liczbę obszarów to $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$ albo, jak kto woli, $\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$, co przez przypadek dla pierwszych 5 wartości daje kolejne potęgi dwójki, ale potem już niekoniecznie (początkowe wartości to 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, 256, ...).

Teraz trochę bardziej zaawansowany przykład, ale robiący wrażenie. Wiąże się on z funkcją $f_1(x) = \text{sinc}(x)$ (łac. *sinus cardinalis*), którą definiuje się następująco:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Przyjrzyjmy się wykresowi tej funkcji. Widać, że z grubsza to, co jest nad osią OX , przeważa nad tym, co jest pod nią. Innymi słowy, łączne pole między krzywą wykresu a osią OX nad tą osią jest większe od łącznego pola pod osią. Pola kolejnych fragmentów nad i pod osią dość szybko zanikają, a różnica sum tych pól dąży do pewnej wartości rzeczywistej. Jest to całka oznaczona $\int_0^\infty \text{sinc}(x) dx$. Całka ta jest dość paskudna – funkcja sinc nie ma elementarnej funkcji pierwotnej, ale można wyznaczyć wartość tej całki oznaczonej na całej dodatniej półosi. Jest ona równa dokładnie $\frac{\pi}{2}$.

Takie rzeczy się zdarzają. Jednak naprawdę ciekawie się robi, gdy nieco zmodyfikujemy funkcję podcałkową. Rozważmy funkcję $f_3(x) = \text{sinc}(x) \text{sinc}(\frac{x}{3})$. Jej wykres przypomina wykres funkcji $\text{sinc}(x)$, a całka $\int_0^\infty \text{sinc}(x) \text{sinc}(\frac{x}{3}) dx = \frac{\pi}{2}$. Rozważmy jeszcze funkcję $f_5(x) = \text{sinc}(x) \text{sinc}(\frac{x}{3}) \text{sinc}(\frac{x}{5})$. Jej całka na dodatniej półosi też wynosi dokładnie $\frac{\pi}{2}$.



Co dalej? Skoro tak dobrze nam idzie, to spróbujmy obliczyć całki z iloczynów kolejnych funkcji sinc z argumentami będącymi kolejnymi nieparzystymi ułamekami x . Zatem mamy

$\int_0^\infty f_1(x) dx = \int_0^\infty \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{1}\right) dx$	$= \frac{\pi}{2}$
$\int_0^\infty f_3(x) dx = \int_0^\infty \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{1}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) dx$	$= \frac{\pi}{2}$
$\int_0^\infty f_5(x) dx = \int_0^\infty \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{1}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right) dx$	$= \frac{\pi}{2}$
$\int_0^\infty f_7(x) dx = \int_0^\infty \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{1}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{7}\right) dx$	$= \frac{\pi}{2}$
$\int_0^\infty f_9(x) dx = \int_0^\infty \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{1}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{7}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{9}\right) dx$	$= \frac{\pi}{2}$
$\int_0^\infty f_{11}(x) dx = \int_0^\infty \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{1}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{7}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{9}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{11}\right) dx$	$= \frac{\pi}{2}$
$\int_0^\infty f_{13}(x) dx = \int_0^\infty \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{1}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{7}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{9}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{11}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{13}\right) dx$	$= \frac{\pi}{2}$

No to już chyba nic złego się nie może stać. Tymczasem okazuje się, że

$$\int_0^\infty f_{15}(x) dx = \int_0^\infty \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{1}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{7}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{9}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{11}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{13}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{15}\right) dx$$

wcale nie jest równe $\frac{1}{2}\pi$, tylko $\frac{467\,807\,924\,713\,440\,738\,696\,537\,864\,469}{935\,615\,849\,440\,640\,907\,310\,521\,750\,000}\pi$, co jest prawie dokładnie równe $\frac{1}{2}\pi$, ale nie do końca. Ułamek, który stoi przed π , ma w przybliżeniu wartość równą 0,499999999992646, więc różni się od 0,5 o niespełna jedną stumiliardową.

Nie muszę dodawać, że 13 jest ostatnią liczbą nieparzystą, dla której całka z iloczynu funkcji sinc z nieparzystymi mianownikami pod x jest dokładnie równa $\frac{\pi}{2}$. Potem ta cudowna własność zanika i dla każdej większej liczby nieparzystej całka ta już jest mniejsza od $\frac{\pi}{2}$. Co tu się dzieje?

Na ten fenomen wpadła dwójka matematyków kanadyjskich: David i Jonathan Borweinowie (ojciec i syn). W 2001 roku opublikowali pracę, która zszokowała wielu matematyków. Od tej pory całki omawianej postaci nazywane są całkami Borweinów (*Borwein integrals*). Jest sporo prac wyjaśniających przyczyny tej niezwyklej anomalii; żadna z nich nie odnosi się do pechowości liczby 13. W oryginalnej pracy autorzy piszą nawet, że podczas weryfikacji tego wyniku dla $n = 15$ sprawdzający go za pomocą komputera był przekonany o błędzie oprogramowania. Trudno się dziwić.

Najprościej można objaśnić moment załamania regularności, odnosząc się do transformacji Fouriera i operatora konwolucji, co jednak wykracza poza zakres tego artykułu. Dla zainteresowanych polecam pracę H. Schmid

Two curious integrals and a graphic proof, dostępną pod adresem

www.schmid-werren.ch/hanspeter/publications/2014elemath.pdf. W skrócie, kluczową własnością trzynastki jest to, że jest to ostatnia nieparzysta liczba, dla której suma odwrotności kolejnych nieprzekraczających jej liczb nieparzystych (z pominięciem 1) nie przekracza jedynki. Po prostu $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} < 1$, ale po dodaniu $\frac{1}{15}$ przekraczamy jedynkę. Co nam ta jedynka wadzi na drodze do uzyskania $\frac{\pi}{2}$? Tu niestety trzeba się odnieść do konwolucji – ja nie potrafię tego inaczej wytłumaczyć. Jednak za pomocą tego mechanizmu można się bawić w jeszcze bardziej szokujące wyniki. Na przykład całki

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{1}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{101}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{201}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{301}\right) \cdots \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{100n+1}\right) dx$$

będą równe $\frac{\pi}{2}$ tak długo, jak długo szereg ułameków $\frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \cdots + \frac{1}{100n+1}$ nie przekroczy jedynki, a potem dla większych n już zawsze będą od $\frac{\pi}{2}$ mniejsze.

Dla jakiego n to się stanie? Dla bardzo dużego. Naprawdę, bardzo. Chętnych zweryfikować ten rezultat własnoręcznie i sprawdzić, ile wyrazów tego szeregu czyni jego sumę większą od jedynki, śpieszę ostrzec, że na pewno prosta metoda polegająca na sumowaniu ułameków aż się minie jedynkę nie zadziała – po prostu nie doczekamy się wyników. Otóż najmniejszym n , dla którego ta całka będzie mniejsza od $\frac{\pi}{2}$, jest $n = 15\,341\,178\,777\,673\,149\,429\,167\,740\,440\,969\,249\,338\,310\,889$. Czyli początkowych $n - 1$ całek będzie dokładnie równych $\frac{\pi}{2}$, a potem już żadna. No to teraz, zdolni informatycy, pytanie: jak można taką wartość tak dokładnie wyznaczyć? To samo w sobie jest bardzo ciekawym zadaniem. Więc nawet zachęcam tych, którzy mają dostęp do komputera i umieją programować, aby spróbowali wyznaczyć to graniczne n . Ostrzegam: nie jest to proste zadanie.

D. Borwein, J.M. Borwein (2001), „Some remarkable properties of sinc and related integrals”, *The Ramanujan Journal*, 5 (1): 73–89.

„Narzędzia zrobione ze światła” Nagroda Nobla z fizyki 2018, część II

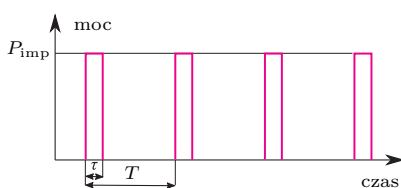
* Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Piotr FITA*

W poprzednim numerze zajmowaliśmy się tzw. pęsetą optyczną, za skonstruowanie której połowę nagrody Nobla z fizyki za rok 2018 otrzymał Arthur Ashkin. Tym razem omówimy odkrycie, za które Donna Strickland i Gérard Mourou otrzymali drugą połowę nagrody.

Wzmacnianie ultrakrótkich impulsów laserowych

Wyjaśnienie, dlaczego wytwarzanie ultrakrótkich impulsów światła o dużej energii było osiągnięciem na miarę Nagrody Nobla, najlepiej zacząć od przytoczenia kilku liczb i przeprowadzenia prostych rachunków. Impulsy światła laserowego, o których tu mowa, trwają od kilku do około 100 femtosekund, a femtosekunda (fs) to 10^{-15} s. Trudno wyobrazić sobie tak krótkie czasy, bo za najkrótszy czas postrzegany przez człowieka można uznać przysłowiowe „mgnienie oka”, trwające około 0,1 s. Tutaj mówimy o impulsach światła przynajmniej milion milionów razy krótszych. Czas trwania tych impulsów ma się do jednej sekundy tak, jak czas trwania przeciętnego filmu do wieku Wszechświata! Ma to kilka istotnych konsekwencji. Po pierwsze energia światła jest skupiona w niezwykle krótkich „paczkach”, co oznacza, że moc światła w takiej „paczce” jest bardzo wysoka, nawet jeśli średnia moc lasera generującego te impulsy nie jest duża. Zrobmy prosty rachunek, zakładając, że laser generuje ciąg impulsów o czasie trwania τ i energii U , oddalonych o T . Dla uproszczenia przyjmijmy, że impulsy mają kształt prostokątny (rys. 1). W takiej sytuacji średnia moc lasera jest równa



Rys. 1

$$P_{\text{sr}} = \frac{U}{T},$$

a moc światła w impulsie (moc szczytowa) równa jest

$$P_{\text{imp}} = \frac{U}{\tau}.$$

Stosunek szczytowej do średniej mocy światła wynosi więc

$$\frac{P_{\text{imp}}}{P_{\text{sr}}} = \frac{T}{\tau}.$$

Dla mieszczącego się na niewielkim stole lasera o średniej mocy 1 W, generującego impulsy trwające 100 fs, oddalone od siebie o 1 ms, stosunek ten wynosi 10^{10} , a moc szczytowa lasera jest równa 10^{10} W = 10 GW. Warto zauważyć, że z mocami mierzonymi w GW ma się do czynienia właściwie tylko w przypadku elektrowni atomowych. O oddziaływaniu światła z materią decyduje jednak nie tyle moc, co natężenie tego światła, czyli stosunek mocy do powierzchni, na którą pada światło. Wiązkę laserową można łatwo zogniskować do rozmiarów rzędu 0,01 mm. Natężenie światła I w ognisku wiązki o promieniu r jest równe

$$I = \frac{P}{\pi r^2}.$$

Przy podanych powyżej parametrach wiązki impulsów i $r = 0,01$ mm szczytowe natężenie światła ma wartość około $3 \cdot 10^{19}$ W/m². Dla porównania, natężenie światła słonecznego na powierzchni Ziemi jest równe około 10^3 W/m².

Natężenie światła jest bezpośrednio związane z amplitudą drgań pola elektrycznego E_0 :

$$I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2,$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni, a ε_0 przenikalnością dielektryczną próżni. Związek ten pozwala obliczyć amplitudę drgań pola elektrycznego, która w ognisku wiązki o powyższych parametrach jest rzędu 10^{11} V/m. Ten sam rząd wielkości mają natężenia pól elektrycznych w atomach, a więc pole elektryczne



Rozwiązanie zadania F 999.

W chwili początkowej powierzchnia walca porusza się względem podłogi z prędkością $u_0 = \omega_0 r$. W związku z tym podłoga działa na walec siłą tarcia $T = -\mu mg$. Siła ta nadaje walcowi przyspieszenie ruchu postępowego $a = \mu g$ oraz spowalnia jego ruch obrotowy – przyspieszenie kątowe $\varepsilon = -\mu mg r / I$ (znak minus w obu wzorach wynika z przyjęcia, że w chwili początkowej stykająca się z podłogą powierzchnia walca porusza się w dodatnim kierunku osi poziomej). Prędkość kątowa ω walca i prędkość v jego ruchu postępowego zmieniają się w czasie według wzorów

$$\omega = \omega_0 - \frac{\mu mg r t}{I} \quad \text{oraz} \quad v = -\mu g t,$$

a prędkość u powierzchni walca (stykającej się z podłogą) względem podłogi wynosi

$$\begin{aligned} u &= \omega r + v = \omega_0 r - \frac{\mu mg r^2 t}{I} - \mu g t = \\ &= \omega_0 r - 3\mu g t. \end{aligned}$$

Gdy u zmaleje do zera, poślizg ustanie. Nastąpi to po czasie

$$\tau = \frac{\omega_0 r}{3\mu g}.$$

Stała siła tarcia wykona pracę na drodze $s = \omega_0 r \tau - \frac{3}{2} \mu g \tau^2$ równej całkowitemu przesunięciu powierzchni względem siebie. Praca ta wynosi

$$W = \frac{\omega_0^2 r^2}{6\mu g}.$$

Praca ta jest równa różnicy początkowej energii kinetycznej ruchu obrotowego walca i jego całkowitej energii kinetycznej podczas toczenia bez poślizgu.



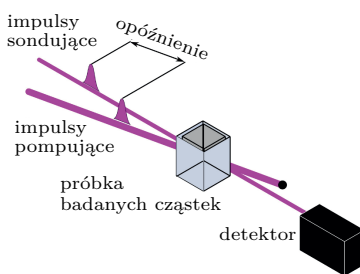
Rozwiązanie zadania F 1000.
Energie kwantów promieniowania elektromagnetycznego emitowanego przez atom wodoru opisuje zależność

$$h\nu = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

gdzie ν oznacza częstotliwość fali, a n_1 i n_2 to numery poziomów energetycznych, między którymi zaszło przejście promieniste ($n_1 < n_2$). Częstotliwość ν promieniowania związana jest z długością fali wzorem $\nu = c/\lambda$. Zakres długości fal rejestrowanych przez ludzkie oko odpowiada więc zakresowi energii 1,68 eV < $h\nu$ < 3,27 eV. Jeśli wyrazimy otrzymany zakres energii za pomocą stałej Rydberga, to otrzymamy

$$0,12R < h\nu < 0,24R.$$

Jak łatwo sprawdzić, wszystkie przejścia promieniste na poziom $n_1 = 1$ odpowiadają energiom większym od górnej granicy przedziału widzialnego, a na poziom $n_1 = 3$ energiom mniejszym od dolnej granicy tego obszaru ($1/9 < 0,12$). W badanym obszarze znajdują się linie o $n_1 = 2$ i $n_2 = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (ostatnie trzy linie wypadają w obszarze promieniowania nadfioletowego – za jego granicę przyjmuje się $\lambda = 400$ nm). Jest to tak zwana seria Balmera.



Rys. 2

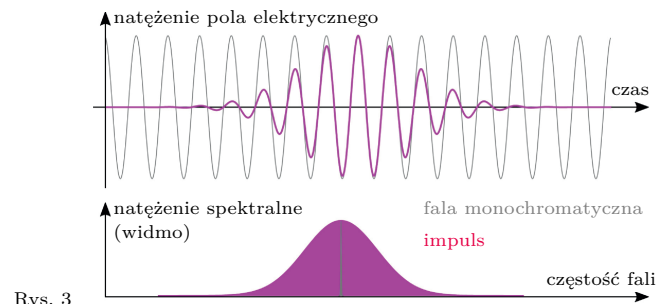
zogniskowanej wiązki impulsów femtosekundowych może łatwo okazać się silniejsze niż pole utrzymujące elektrony w atomie. W takiej sytuacji może dojść do oderwania elektronów od atomów lub cząsteczek znajdujących się w ognisku wiązki, czyli ich jonizacji. Po zogniskowaniu wiązki dostatecznie silnych impulsów w powietrzu skutkuje to wytworzeniem „iskierki” w ognisku wiązki (zdjęcie na tylnej okładce). Jest to chmurka zjonizowanych atomów i elektronów (plazmy) o temperaturze tysięcy kelwinów i rozmiarach rzędu mikrometrów. Taką „kulkę plazmy” można wykorzystać jako narzędzie do bardzo precyzyjnej obróbki materiałów, cięcia lub wiercenia otworów o mikrometrowych rozmiarach, nawet w najtwardszych materiałach o bardzo wysokiej temperaturze topnienia. Do obróbki materiałów oczywiście można zastosować również laser pracy ciągłej lub generujący o wiele dłuższe impulsy, co od dawna wykorzystuje się w przemyśle. Taki laser obrabia jednak materiał, topiąc go, co oznacza, że na krawędziach mogą pojawiać się nadtopienia. W przypadku cięcia materiału wiązką impulsów ultrakrótkich o odpowiednich parametrach materiał jest szybko przekształcany w plazmę, która od razu opuszcza obrabiany obszar w postaci gazowej, dzięki czemu jakość uzyskiwanych krawędzi jest dużo lepsza i możliwa jest o wiele bardziej precyzyjna obróbka.

Bardzo silne pola elektryczne ultrakrótkich impulsów laserowych można też wykorzystać do przyspieszania cząstek naładowanych w tzw. akceleratorach stołowych. Pozwalają one na relatywnie krótkiej drodze (dzięki czemu taki akcelerator mieści się na stole) przyspieszać cząstki do energii, które wymagają klasycznych akceleratorów o nieporównanie większych rozmiarach.

W innych zastosowaniach korzysta się nie tyle z dużych natężeń światła w impulsach, co z samego faktu, że ultrakrótkie impulsy trwają naprawdę bardzo krótko. Dzięki temu możliwe stało się badanie procesów zachodzących w pojedynczych cząsteczkach, takich jak tworzenie i zrywanie wiązań chemicznych, zmiany strukturalne (obroty fragmentów cząsteczek względem siebie) czy drgania fragmentów cząsteczek wokół ich położenia równowagi. Procesy te zachodzą w czasach rzędu femtosekund, a do ich badania niezbędne jest narzędzie pozwalające zaobserwować tak szybkie zmiany. Tym narzędziem są właśnie femtosekundowe impulsy laserowe. W doświadczeniach, które pozwalają zaobserwować przebieg wymienionych wyżej procesów, wykorzystuje się zwykle jeden lub więcej takich impulsów. Pierwszy z nich (tzw. pompujący) inicjuje badany proces, drugi zaś, opóźniony względem pierwszego (tzw. sondujący), oddziałuje z badanymi cząsteczkami w trakcie zainicjowanego procesu. Zmieniając opóźnienie pomiędzy impulsami i badając zmiany parametrów impulsu sondującego (energię, widmo, polaryzację) w zależności od opóźnienia, można uzyskać informację o szybkości i charakterze procesu zachodzącego w cząsteczkach oddziałujących z tym impulsem. Za badania w tej dziedzinie Ahmed Zewail w 1999 roku otrzymał Nagrodę Nobla.

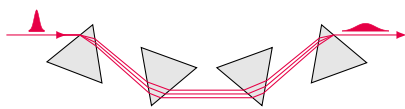
Nagroda Nobla z roku 2018 przyznana była jednak nie za zastosowania impulsów femtosekundowych o dużej energii, ale za samo opracowanie sposobu ich wytwarzania. Właściwie nawet nie tyle wytwarzania, co wzmacniania, bo metoda generacji impulsów o relatywnie małej energii była znana już wcześniej (co również jest interesującym, ale i obszernym zagadnieniem, więc nie będziemy się nim tutaj zajmować). Wzmacnianie impulsów femtosekundowych jest problematyczne ze względu na tę samą ich cechę, która jest jedną z ich zalet – bardzo duże szczytowe natężenie światła. Żeby impuls mógł zostać wzmocniony, musi przejść przez ośrodek wzmacniacza optycznego. Gdyby był to impuls ultrakrótki, to nawet jeśli powiększając wiązkę wzmacnianą, udałoby się uniknąć zniszczenia ośrodka wzmacniającego, pojawiłyby się cała gama zjawisk optycznych wynikających z oddziaływania światła o dużym natężeniu z materią. Choć są to zjawiska niezwykle interesujące, badane i wykorzystywane w dziedzinie zwanej optyką nieliniową, to tutaj zniweczyłyby cały oczekiwany efekt wzmocnienia światła.

Pomysł na wzmocnienie impulsów femtosekundowych wiąże się bezpośrednio z ich własnościami. W przeciwieństwie do typowego lasera pracy ciągłej, który ma wąskie widmo, a więc można w uproszczeniu powiedzieć, że generuje światło o jednej długości fali, widmo impulsów ultrakrótkich jest relatywnie szerokie. Wynika to z faktu, że przy czasie trwania impulsu rzędu femtosekund składa się on z kilku-kilkudziesięciu oscylacji fali elektromagnetycznej. Nie stanowi więc fali monochromatycznej, w której oscylacje mają niezmienny charakter i stałą częstość, lecz składają się na niego fale o różnych częstościach (czyli barwach). Najkrótsze impulsy mają widmo o szerokości porównywalnej z zakresem szerokości widma światła widzialnego!



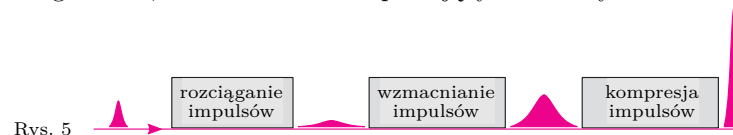
Rys. 3

Z tego wynika, że wiązka impulsów femtosekundowych padając na pryzmat lub siatkę dyfrakcyjną, rozszczepi się analogicznie do wiązki światła białego, które w takim przypadku rozdzieliłoby się na wszystkie barwy tęczy. Fale o różnych częstościach składające się na impuls (czyli jego składowe spektralne) za elementem rozszczepiającym światło (dyspersyjnym) będą poruszały się po różnych drogach. Ustawiając odpowiednio pryzmaty lub siatki dyfrakcyjne na drodze wiązki impulsów, można sprawić, że na końcu ich układu uzyska się znowu skolimowaną wiązkę, jednak różne składowe spektralne, poruszające się po drogach o różnej długości, będą przesunięte w czasie względem siebie (taki impuls nazywamy świergoczącym, bo częstość fali w impulsie zależy od czasu). Impuls przechodzący przez taki układ zostanie rozciągnięty w czasie, a szczytowe natężenie światła w impulsie zmaleje tyle razy, ile razy impuls zostanie wydłużony.



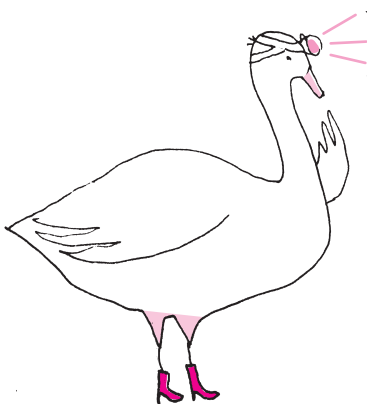
Rys. 4

Dzięki zastosowaniu tej metody impuls można wydłużyć na tyle znacząco, by dało się go bezpiecznie wzmocnić, a po wzmocnieniu znowu skompresować za pomocą odpowiedniego układu elementów dyspersyjnych, komplementarnym do układu, który wcześniej impuls rozciągnął: jeśli w układzie wydłużającym składowe krótkofalowe poruszały się po dłuższej drodze niż składowe długofalowe, to w układzie kompresującym musi być odwrotnie.



Rys. 5

Obecnie idea ta wydaje się niezwykle prosta, a wzmacniacze ultrakrótkich impulsów laserowych są już bardzo rozpowszechnionymi układami sprzedawanymi przez wiele firm. Ich użytkownicy często nie muszą nawet wiedzieć, w jaki sposób światło jest w nich wzmocniane, a tym bardziej nie wiedzą, kto ten sposób wymyślił. Bardzo dobrze, że Komitet Noblowski docenił ten prosty koncepcyjnie, ale niezwykle sprytny pomysł, który otworzył wiele nowych kierunków badań i zastosowań w dziedzinach odległych od optyki, takich jak inżynieria, fizyka cząstek elementarnych czy chemia. Tymczasem Gérard Mourou nie spoczywa na laurach – jest jednym z inicjatorów przedsięwzięcia *Extreme Light Infrastructure* (ELI), którego celem jest zbudowanie w krajach Europy Środkowo-Wschodniej (niestety nie w Polsce) szeregu źródeł impulsów laserowych, których moce mają być rzędu petawatów (10^{15} W). Z pewnością doprowadzi to do nowych odkryć w dziedzinie oddziaływania materii ze światłem o ekstremalnych natężeniach.



Informatyczny kącik olimpijski (137): po prostu znajdź wzór

Wiele zadań konkursowych proponowanych podczas zawodów programistycznych wymaga od uczestników zakodowania zawyłych algorytmów czy skomplikowanych struktur danych. Właśnie takie zadania nie raz i nie dwa, ale wielokrotnie prezentujemy w niniejszej rubryce. Dziś jednak opowiemy o pewnym bardzo specyficznym typie zadań olimpijskich, które zwykle sprowadzają się do znalezienia zwartego wzoru opisującego odpowiedź na pytanie zawarte w zadaniu. Jako przykład niech posłuży nam zadanie „Count the Arrays”, prezentowane na platformie *Codeforces*. Zadanie jest następujące:

Na wejściu otrzymujemy dwie liczby naturalne n oraz m . Interesować nas będą pewne bardzo specyficzne ciągi. Konkretnie powiemy, że ciąg jest elegancki, jeśli zawiera n elementów o wartościach w zbiorze $\{1, 2, \dots, m\}$ oraz:

Przykładowo wszystkie eleganckie ciągi dla $n = 4, m = 4$ to: (1, 2, 3, 2), (1, 2, 3, 1), (1, 3, 2, 1), (2, 3, 2, 1), (2, 3, 4, 3), (2, 3, 4, 2), (3, 4, 3, 2), (2, 4, 3, 2), (1, 3, 4, 1), (1, 3, 4, 3), (1, 4, 3, 1), (3, 4, 3, 1), (1, 2, 4, 1), (1, 2, 4, 2), (1, 4, 2, 1), (2, 4, 2, 1).

() istnieje dokładnie jedna para elementów ciągu, które są sobie równe;*

*(**) istnieje indeks i (szczytowy) taki, że ciąg jest ściśle rosnący na pozycjach $1, \dots, i$ oraz ściśle malejący na pozycjach i, \dots, n .*

Niech teraz $A_{n,m}$ oznacza liczbę eleganckich ciągów dla pewnych ustalonych n i m .

Celem zadania jest obliczenie $A_{n,m}$ (modulo 998244353).

Rozwiązanie. Twierdzymy, że prawdziwy jest wzór:

$$A_{n,m} = \binom{m}{n-1} \cdot (n-2) \cdot 2^{n-3}.$$

Dlaczego? Aby go udowodnić, spróbujmy zdefiniować „procedurę” generowania wszystkich rozważanych $A_{n,m}$ ciągów. Otóż wyobraźmy sobie, iż w pierwszym kroku chcemy zdecydować, które w ogóle elementy choć raz pojawiają się w naszym ciągu. Ponieważ ciąg ma długość n i tylko jeden element się powtarza – co więcej zawsze z krotnością 2 – to widać, że różnych elementów jest zawsze $(n-1)$. Możemy więc je wybrać ze zbioru wartości na dokładnie $\binom{m}{n-1}$ sposobów. Zauważmy, że gdy już ustalimy swój „alfabet”, to element szczytowy został już wybrany. Tam, gdzie mamy jeszcze swobodę, to wybór elementu zduplikowanego – dokonujemy go na $(n-2)$ sposobów (możemy wybrać każdy, poza szczytowym). Dla wszystkich pozostałych $(n-3)$ (poza szczytowym i zduplikowanymi) elementów musimy jeszcze podjąć decyzję, czy dany element znajdzie się po lewej, czy po prawej stronie szczytu. Różnych możliwości jest więc 2^{n-3} , a ustalenie tego wyboru już determinuje cały ciąg – elementy z obu stron szczytu są posortowane, więc nie pozostała już żadna swoboda w generowaniu eleganckich ciągów. Ta obserwacja kończy dowód prawdziwości postulowanego wzoru.

Zadania takie jak wyżej mogą oczywiście sprawiać kłopot w trakcie analizy kombinatorycznej, ale gdy już znajdziemy stosowny wzór, to wydaje się, że wystarczy już tylko napisać króciutki programik, który oblicza i zwraca wynik. W zasadzie jest to prawda, ale i tu czyhają pułapki. Skupimy się na dwóch problemach:

1. Jak szybko obliczyć 2^{n-3} (modulo 998244353)?

Kolejne potęgowanie dwójki może okazać się za wolne dla dużych wartości n . Wówczas warto skorzystać z metody, która działa w czasie $O(\log n)$. Polega ona na tym, że najpierw liczymy (podnosząc do kwadratu kolejne elementy) wartości

$$2^1, 2^2, 2^4, 2^8, \dots, 2^{\lfloor \log(n-3) \rfloor},$$

a następnie zapisujemy $(n-3)$ w systemie binarnym, dzięki czemu ustalamy, iloczyn których potęg dwójki da nam 2^{n-3} . Na przykład jeśli $(n-3) = 1011001_2$, to

$2^{n-3} = 2^1 \cdot 2^8 \cdot 2^{16} \cdot 2^{64}$. *Uwaga:* wszystkie mnożenia wykonujemy oczywiście modulo 998244353.

2. Jak szybko obliczyć $\binom{m}{n-1}$ (modulo 998244353)?

Dwumian Newtona można obliczać wprost z rekurencji $\binom{k+1}{l+1} = \binom{k}{l+1} + \binom{k}{l}$. Ta metoda, zastosowana jednak bezpośrednio, skończy się czasem wykładniczym.

Ulepszenie, polegające na spamiętywaniu już obliczonych wartości (tak zwane programowanie dynamiczne), da złożoność kwadratową, która wciąż będzie za duża, aby rozwiązanie przeszło skutecznie testy sprawdzające.

Skorzystamy więc z wzoru $\binom{m}{n-1} = \frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!}$.

Ponownie, proponujemy aby najpierw wykonać obliczenia wstępne i obliczyć (żargonowo: *spamiętać*):

$$2!, 3!, \dots, m! \pmod{998244353},$$

ale także (pomijamy, jak dokładnie to zrobić)

$$(2!)^{-1}, (3!)^{-1}, \dots, (m!)^{-1} \pmod{998244353}.$$

Uwaga: chodzi oczywiście o odwrotność w ciele $\mathbb{Z}_{998244353}$, czyli np. $(4!)^{-1} \pmod{998244353} = 291154603$.

Wyposażeni w powyższe dane już łatwo (w czasie $O(n+m)$) możemy obliczyć $\binom{m}{n-1} \pmod{998244353}$.

Powyższe rozwiązanie już jest wystarczające, bo we wszystkich testach mamy $n, m \leq 2 \cdot 10^5$. Co jednak, gdybyśmy chcieli rozwiązać zadania dla parametrów rzędu nawet kilku miliardów? Tutaj możemy sobie poradzić za pomocą następującego *Olimpijskiego Triku*:

Zanim zaczniemy pisać program właściwy, możemy obliczyć np. co milionową silnię (i jej odwrotność) modulo 998244353, a wyniki (wygenerowane choćby i przez godzinę w trakcie zawodów) zapisać BEZPOŚREDNIO W KODZIE rozwiązania jako stałą tablicę!

Wówczas kod programu może być ogromny, osiągając nawet kilkadziesiąt kilobajtów tekstu (co wciąż mieści się w regulaminowym limicie!). Dzięki temu same obliczenia właściwe po odczycie danych wejściowych podczas testów będą znacznie szybsze, bo fazy obliczania kolejnych silni nie musimy zaczynać od 2 tylko od najbliższej wielokrotności miliona!

Tomasz KAZANA

Wierzchołki, krawędzie, ściany i dalej...

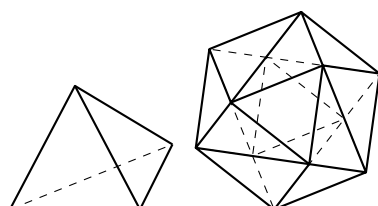
Kamil RYCHLEWICZ*

*Doktorant, Institute of Science and Technology Austria

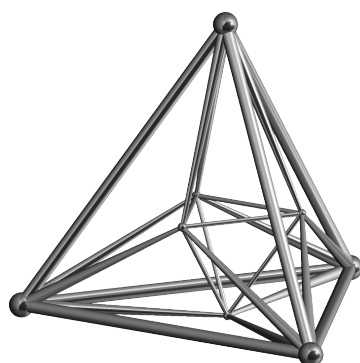
Zajmijmy się następującym prostym problemem. Niech P będzie wielościanem wypukłym o trójkątnych ścianach. Oznaczmy przez V , E , F odpowiednio liczbę jego wierzchołków, krawędzi i ścian. Jakie trójki (V, E, F) liczb naturalnych możemy w ten sposób uzyskać? Bez trudu możemy wypisać dwie równości:

$$V - E + F = 2, \quad 3F = 2E.$$

Pierwsza z nich to słynny wzór Eulera, druga zaś bierze się z wyliczenia na dwa sposoby liczby par (Krawędź, Ściana), gdzie Krawędź należy do Ściany. Stąd szybko dostajemy, że $(V, E, F) = (V, 3V - 6, 2V - 4)$. Ponadto $V \geq 4$ (w przeciwnym razie „wielościan” byłby figurą płaską). Okazuje się, że te dwa ograniczenia są już wystarczające, aby wektor (V, E, F) pochodził od pewnego wielościanu z trójkątnymi ścianami. Wnikliwego Czytelnika zachęcamy do skonstruowania odpowiednich przykładów.



Czworościan foremny i dwudziestościan foremny to przykłady wielościanów symplecjalnych



Szkielet 16-komórki, czyli 4-wymiarowego odpowiednika ośmiościanu foremnego [Wikimedia Commons contributors. File: Quark structure proton]

To oczywiście nie koniec zabawy. Załóżmy, że zamiast wielościanu rozpatrujemy jego wyżej wymiarowy odpowiednik (wielotop) P , którego ściany są sympleksami (czyli wyżej wymiarowymi odpowiednikami trójkątów, takimi jak trójwymiarowy czworościan) – innymi słowy, wielotop P jest *symplecjalny*. Dla $k = 0, 1, 2, \dots, d - 1$ oznaczmy przez f_k liczbę k -wymiarowych ścian wielotopu P – a więc f_0 to liczba wierzchołków, f_1 to liczba krawędzi i tak dalej. Otrzymujemy wtedy *f-wektor* wielotopu P , czyli $\underline{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$. Chcielibyśmy dowiedzieć się, które wektory (o współrzędnych naturalnych) możemy uzyskać jako f-wektory wielotopów symplecjalnych.

Powyżej uzyskane dla $d = 3$ warunki możemy bez trudu uogólnić. Dla przykładu, jeśli wielotop jest czterowymiarowy, wzór Eulera przyjmuje postać $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$. Z kolei zamiast powyższej równości $3F = 2E$, w analogiczny sposób dostajemy równość $4f_3 = 2f_2$, a więc $f_2 = 2f_3$. Stąd

$$\underline{f} = (f_0, f_1, 2f_1 - 2f_0, f_1 - f_0).$$

Ponadto, podobnie jak poprzednio, mamy ograniczenie $f_0 \geq 5$. Ale skoro $f_3 = f_1 - f_0 \geq 0$, to również $f_1 \geq f_0$. Okazuje się jednak, że zachodzi dużo silniejsza nierówność, mianowicie $f_1 \geq 4f_0 - 10$. Te warunki wystarczają już, aby dany wektor liczb naturalnych był f-wektorem pewnego czterowymiarowego wielotopu symplecjalnego.

Widać jednak, że wraz ze wzrostem liczby wymiarów konieczne warunki stają się coraz bardziej skomplikowane. Czy możemy liczyć na jakiś opis możliwych f-wektorów w ogólnym przypadku?

Spójrzmy, jak wcześniejsze warunki uogólniają się na dowolną liczbę wymiarów. Wzór Eulera w wyższych wymiarach mówi, że

$$f_0 - f_1 + f_2 - \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1}.$$

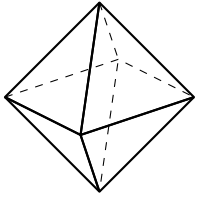
Mamy również analogiczne zależności $df_{d-1} = 2f_{d-2}$ oraz $f_0 \geq d + 1$. Ponadto, jeśli $d \geq 3$, to w każdym d -wymiarowym wielotopie zachodzi nierówność $f_1 \geq df_0 - \frac{d(d+1)}{2}$ (dla $d = 3$ zachodzi nawet równość, co pokazaliśmy w drugim akapicie). Ta nietrywialna nierówność, znana wcześniej jako hipoteza o dolnym ograniczeniu, została udowodniona w 1970 roku przez Davida Barnette. Ale okazuje się, że w ogólności warunków (zarówno nierówności, jak i równości) jest więcej.

Dla dowolnego d -wymiarowego wielotopu zdefiniujmy *h-wektor* jako (h_0, h_1, \dots, h_d) , gdzie

$$h_i = f_{i-1} - \binom{d-i+1}{d-i} f_{i-2} + \binom{d-i+2}{d-i} f_{i-3} - \dots + (-1)^i \binom{d}{d-i} f_{-1}.$$

Przyjmujemy tutaj konwencję, zgodnie z którą $f_{-1} = 1$. Dla przykładu, jeśli mamy do czynienia z ośmiościanem foremnym, to $(f_{-1}, f_0, f_1, f_2) = (1, 6, 12, 8)$

Aby udowodnić wielowymiarowy wzór Eulera, możemy postępować następująco. Jeśli usuniemy jedną z $(d-1)$ -wymiarowych ścian, suma po lewej stronie zmaleje o $(-1)^{d-1}$. Jeśli będziemy teraz w odpowiedniej kolejności usuwać kolejne $d-1$ -wymiarowe ściany (za każdym razem usuwając niżej wymiarowe ściany, które nie są już zawarte w żadnej $(d-1)$ -wymiarowej ścianie), to za każdym razem suma po lewej stronie wzoru Eulera pozostanie niezmienną. Na końcu zaś, gdy usuniemy ostatnią ścianę, suma zmaleje dokładnie o 1.



Ośmiościan foremny

i dostajemy

$$\begin{aligned} h_0 = f_{-1} &= 1 & h_2 = f_1 - 2f_0 + 3f_{-1} &= 3 \\ h_1 = f_0 - 3f_{-1} &= 3 & h_3 = f_2 - f_1 + f_0 - f_{-1} &= 1, \end{aligned}$$

a więc h-wektor to $(1, 3, 3, 1)$.

Okazuje się, że dla dowolnego symplecjajnego wielotopu tak otrzymany h-wektor zawsze jest symetryczny! Innymi słowy, $h_i = h_{d-i}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, d$ (np. równość $h_0 = h_d$ to po prostu wzór Eulera). Równości te nazywane są *równaniami Dehna-Sommerville'a* i zostały udowodnione już w latach dwudziestych XX wieku. Ponadto można udowodnić, że pierwsza połowa h-wektora tworzy ciąg niemalejący (a druga, na mocy symetrii, tworzy ciąg nierosnący). To twierdzenie jest uogólnieniem hipotezy o dolnym ograniczeniu, która w tym języku mówi po prostu, że $h_2 \geq h_1$.

Przedstawione własności to ciągle za mało – istnieją spełniające je ciągi, które nie są f-wektorami żadnego wielotopu. Do sformułowania ostatecznej charakteryzacji przyda się nam następujący lemat:

Lemat. Niech $k \geq 1$. Dla dowolnego $m \geq 1$ istnieją liczby $n_k > n_{k-1} > \dots > n_l \geq l \geq 1$ takie, że

$$m = \binom{n_k}{k} + \binom{n_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{n_l}{l},$$

ponadto są one wyznaczone jednoznacznie.

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi Dociekliwemu jako ćwiczenie. Polecamy zastosowanie indukcji względem k – podstawa indukcji jest trywialna, a w kroku indukcyjnym przyda się znana równość

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \dots + \binom{n-k}{0}.$$

Zdefiniujmy teraz $g_0 = h_0$ oraz $g_i = h_i - h_{i-1}$ dla $1 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ (zauważmy, że $g_i \geq 0$, skoro pierwsza połowa h-wektora tworzy ciąg niemalejący). Ustalmy $i \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1\}$ i zgodnie z lematem zapiszmy

$$g_i = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{n_j}{j},$$

gdzie $n_i > n_{i-1} > \dots > n_j \geq j \geq 1$. Oznaczmy

$$g_i^{<i>} = \binom{n_i+1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \dots + \binom{n_j+1}{j+1}.$$

Rozważania z zakresu geometrii algebraicznej prowadzą do wniosku, że $g_{i+1} \leq g_i^{<i>}$, co może się wydawać na pierwszy rzut oka szokujące.

Zależność tę udowodnił Richard Stanley w 1980 roku, a szkic jego rozumowania można znaleźć jako załącznik do elektronicznej wersji tego artykułu (del.ia.uni.edu.pl). Wcześniej w tym samym roku Louis Billera i Carl Lee udowodnili, że tak uzyskane warunki są wystarczające, tzn. że każdy spełniający je ciąg jest f-wektorem pewnego wielotopu. W ten sposób dochodzimy do następującego twierdzenia, dającego ostateczną odpowiedź na postawiony przez nas problem.

Twierdzenie. Wektor $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ liczb naturalnych jest f-wektorem pewnego wielotopu symplecjajnego wtedy i tylko wtedy, gdy uzyskany z niego h-wektor jest symetryczny, a g-wektor ma współrzędne nieujemne i spełnia nierówności $g_{i+1} \leq g_i^{<i>}$ dla $i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$.

Jeśli będziemy rozważać wszystkie wielotopy (bez ograniczania się do wielotopów symplecjajnych), to g-wektor nadal będzie miał współrzędne nieujemne. Jednak wciąż pozostaje problem otwarty: czy musi on spełniać powyższe nierówności? W ogólnym przypadku definicje h-wektora i g-wektora (zwanymi wówczas *h-wektorem torycznym* i *g-wektorem torycznym*) muszą jednak zostać zmodyfikowane i są bardziej skomplikowane (w przypadku symplecjajnym pokrywają się z definicjami podanymi powyżej).



Rozwiązanie zadania M 1637.

Niech g_i i b_i będą odpowiednio liczbami dziewczynek i chłopców startujących z i -tej szkoły. Niech ponadto s będzie liczbą singli, a m liczbą miksów. Wówczas

$$s = \sum_{i < j} (g_i g_j + b_i b_j),$$

$$m = \sum_{i < j} (g_i b_j + b_i g_j),$$

skąd

$$s - m = \sum_{i < j} (g_i - b_i)(g_j - b_j) = \sum_{i < j} d_i d_j,$$

gdzie $d_i = g_i - b_i$. Z założeń zadania

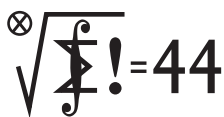
$$\left| \sum_i d_i \right| < 1 \text{ oraz } \left| \sum_{i < j} d_i d_j \right| = |s - m| < 1,$$

a zatem

$$\sum_i d_i^2 = \left(\sum_i d_i \right)^2 - 2 \sum_{i < j} d_i d_j \leq 3.$$

Oznacza to, że co najwyżej trzy spośród liczb d_i są różne od 0, co kończy rozwiązanie.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2020

Zadania z matematyki nr 801, 802

Redaguje Marcin E. KUCZMA

801. Na przyprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC został dowolnie wybrany punkt D . Symetralna odcinka CD przecina przeciwprostokątną AB w punkcie P . Punkt Q jest symetryczny do P względem środka M odcinka AB . Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu Q na prostą DP . Udowodnić, że M leży na dwusiecznej kąta PCR .

802. Niech x_1, x_2, x_3, \dots będzie rosnącym ciągiem wszystkich dodatnich liczb x spełniających równanie $\operatorname{tg} x = x$. Niech $y_n = (n + \frac{1}{2})\pi - x_n$. Obliczyć granicę ciągu (ny_n) przy $n \rightarrow \infty$ (lub wykazać, że granica nie istnieje).

Zadanie 802 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2020

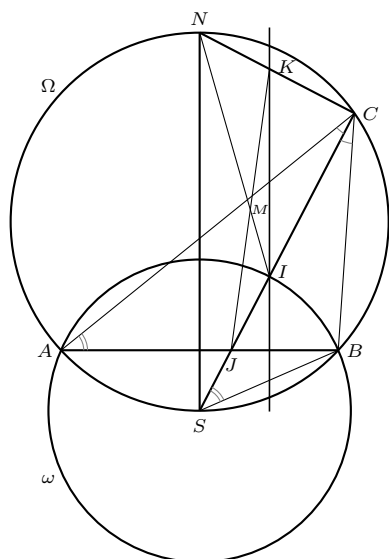
Przypominamy treść zadań:

793. Okręgi Ω i ω przecinają się w punktach A i B . Środek S okręgu ω leży na okręgu Ω i jest końcem jego średnicy NS . Cięciwa CS okręgu Ω , niebędąca średnicą, przecina okrąg ω oraz odcinek AB odpowiednio w punktach I oraz J . Prosta przechodząca przez I , równoległa do NS , przecina odcinek NC w punkcie K . Dowieść, że prosta IN przechodzi przez środek odcinka JK .

794. Dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geq 0$ przyjmijmy: $R(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $Q(x, y, z) = \sqrt{xy + xz + yz}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\frac{1}{R(a, b, c)Q(b, c, d)} + \frac{1}{R(b, c, d)Q(a, c, d)} + \frac{1}{R(a, c, d)Q(a, b, c)}$$

dla liczb $a, b, c, d \geq 0$ spełniających warunek $2a + 2b + 3c + 2d \leq 6$ oraz wyznaczyć wszystkie czwórki (a, b, c, d) , dla których to minimum jest osiągnięte.



793. Odcinek CS połowi kąt BCA . Leżący na nim punkt I spełnia warunek $|SI| = |SA| = |SB|$, charakteryzujący środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Trójkąt SCB jest podobny do ACJ (równe kąty przy wierzchołkach S, A oraz C, C). Otrzymujemy następujący ciąg proporcji (pierwsza z nich zachodzi, bo AI jest dwusieczną kąta A w trójkącie BAC ; druga wynika ze wspomnianego podobieństwa; a ostatnia z równoległości $KI \parallel NS$):

$$\frac{|CI|}{|IJ|} = \frac{|CA|}{|AJ|} = \frac{|CS|}{|SB|} = \frac{|CS|}{|SI|} = \frac{|CN|}{|NK|}.$$

Niech M będzie punktem przecięcia prostych IN i JK . Wystarczy teraz zastosować twierdzenie Menelausa do trójkąta CJK przeciętego prostą IN :

$$\frac{|CI|}{|IJ|} \cdot \frac{|JM|}{|MK|} \cdot \frac{|KN|}{|NC|} = 1.$$

W tym iloczynie skrajne czynniki dają (po wymnożeniu) wartość 1. Zatem $|JM| = |MK|$.

794. Rozważane wyrażenie oznaczmy literą W (stale zakładamy, że wszystkie mianowniki są dodatnie). Dwukrotnie stosujemy nierówność między średnimi (po drodze przegrupowując czynniki):

$$\begin{aligned} W &\geq 3 \left(\frac{1}{R(a, b, c)Q(b, c, d)} \cdot \frac{1}{R(b, c, d)Q(a, c, d)} \cdot \frac{1}{R(a, c, d)Q(a, b, c)} \right)^{1/3} = \\ &= 3 \left(\frac{1}{\sqrt{R(a, b, c)Q(a, b, c)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(b, c, d)Q(b, c, d)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R(a, c, d)Q(a, c, d)}} \right)^{2/3} \geq \\ &\geq 3 \left(\frac{3}{\sqrt{R(a, b, c)Q(a, b, c)} + \sqrt{R(b, c, d)Q(b, c, d)} + \sqrt{R(a, c, d)Q(a, c, d)}} \right)^2. \end{aligned}$$

Ponownie używając nierówności między średnimi (wartości R^2 i $2Q^2$), dostajemy oszacowanie

$$R(a, b, c)Q(a, b, c) \leq \frac{R(a, b, c)^2 + 2Q(a, b, c)^2}{2\sqrt{2}} = \frac{(a + b + c)^2}{2\sqrt{2}},$$

czyli $\sqrt{R(a, b, c)Q(a, b, c)} \leq 2^{-3/4}(a + b + c)$. Stąd i z analogicznego oszacowania dla trójek (b, c, d) , (a, c, d) uzyskujemy kontynuację wcześniejszego ciągu nierówności:

$$W \geq 3 \left(\frac{3 \cdot 2^{3/4}}{(a + b + c) + (b + c + d) + (a + c + d)} \right)^2 = \frac{3^3 \cdot 2^{3/2}}{(2a + 2b + 3c + 2d)^2} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

(bo $2a + 2b + 3c + 2d \leq 6$ z założenia). Znalaziona wartość zostaje osiągnięta, gdy

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 787 ($WT = 2,26$) i 788 ($WT = 1,82$) z numeru 10/2019

Krzysztof Kamiński	Pabianice	44,12
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Janusz Fiett	Warszawa	39,41
Mikołaj Pater	Opole	38,50
Paweł Burdzy	Warszawa	35,34
Zbigniew Skalik	Wrocław	33,86
Jakub Węgrecki	Kraków	32,16

Oto kolejny Weteran Klubu 44M: pan Krzysztof Kamiński zalicza 44 p. po raz trzeci.

wszystkie nierówności stają się równościami; więc gdy $2a + 2b + 3c + 2d = 6$ oraz

$$\sqrt{R(a, b, c)Q(a, b, c)} = 2^{-3/4}(a + b + c), \quad \sqrt{R(b, c, d)Q(b, c, d)} = 2^{-3/4}(b + c + d),$$

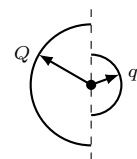
$$\sqrt{R(a, c, d)Q(a, c, d)} = 2^{-3/4}(a + c + d),$$

przy czym te trzy wartości też muszą być równe(!). To wymusza równości $a = b = d$ oraz $6a + 3c = 6$. Ponadto – oznaczając krótko $R(a, b, c) = R(b, c, d) = R(a, c, d) = R$ (i podobnie Q) – musimy mieć równość $R^2 = 2Q^2$ (do takiej pary też była stosowana nierówność między średnimi) – czyli $2a^2 + c^2 = 4ac + 2a^2$. Wraz z równością $6a + 3c = 6$ daje to alternatywę: $a = 1, c = 0$ lub $a = \frac{1}{3}, c = \frac{4}{3}$. Dla czwórek $(a, b, c, d) = (1, 1, 0, 1)$ oraz $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ wyznaczone oszacowanie $W \geq 3/\sqrt{2}$ przechodzi w równość. Zatem szukane minimum wynosi $3/\sqrt{2}$.

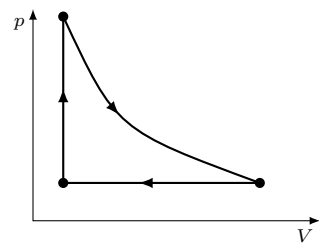
Klub 44 F



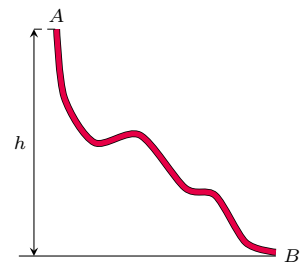
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2020



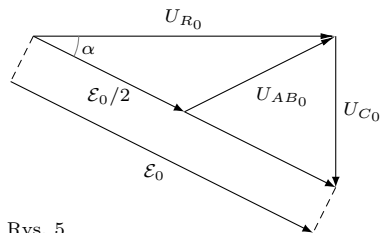
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z fizyki nr 698, 699

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

698. Znaleźć siły oddziaływania dwóch nieprzewodzących półsfery o promieniach R i r , naładowanych odpowiednio ładunkami Q i q , rozłożonymi równomiernie na powierzchniach półsfery. Środki półsfery oraz płaszczyzny ich maksymalnych przekrojów pokrywają się (rys. 1).

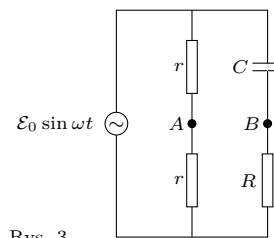
699. Cykl termodynamiczny składa się z izotermi, izobary oraz izochory (rys. 2). Gaz poddawany przemianom jest doskonały, jednoatomowy. Na izotermie gaz pobiera ciepło Q_{12} , na izobarze wykonana zostaje nad nim praca W_{23} . Oblicz sprawność cyklu.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2020

Przypominamy treść zadań:

690. Jak zależy amplituda napięcia między punktami A i B , w obwodzie przedstawionym na rysunku 3, od oporu R ?

691. Elastyczna rurka o długości l łączy w przestrzeni punkty A i B . Różnica wysokości między tymi punktami wynosi h (rys. 4). Wewnątrz rurki wzdłuż całej jej długości leży sznurki, który przytrzymywany jest w punkcie A . Z jakim przyspieszeniem zacznie poruszać się sznurki w pierwszej chwili po jego oswoobodzeniu? Tarcie między sznurkiem a ściankami rurki zaniedbujemy.



Rys. 3

690. Natężenie prądu płynącego przez kondensator i opornik R jest równe $I = I_0 \sin(\omega t + \alpha)$, gdzie $\text{tg } \alpha = \frac{1}{\omega CR}$.

Z warunku $I = \frac{dQ}{dt}$ otrzymujemy napięcie na kondensatorze $U_C = \frac{Q}{C} = U_{C0} \sin(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2})$. Jest ono przesunięte w fazie o kąt $\frac{\pi}{2}$ względem napięcia na oporniku $U_R = U_{R0} \sin(\omega t + \alpha)$.

Na diagramie wektorowym (rys. 5) wektory napięć U_R oraz U_C są prostopadłe, a ich suma jest wektorem o wartości E_0 . Napięcie na każdym z oporników r wynosi $U_r = \frac{E_0 \sin \omega t}{2}$. Wektor napięcia między punktami A i B dany jest wzorem $U_{AB} = U_R - U_r$. Z rysunku 5 widać, że szukana amplituda tego napięcia jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątna wynosi E_0 . Zatem $U_{AB0} = \frac{E_0}{2}$ i nie zależy od wartości oporu R .

691. Niech Δl oznacza przesunięcie sznurka w bardzo małym przedziale czasowym po rozpoczęciu ruchu, a v osiągniętą w tym czasie prędkość. Ponieważ Δl jest małe, możemy przyjąć, że $v^2 = 2a\Delta l$, gdzie a jest przyspieszeniem wszystkich punktów sznurka w chwili rozpoczęcia ruchu.

Nie ma tarcia, więc spełniona jest zasada zachowania energii: $Mv^2/2 = \Delta E_p$, gdzie M jest masą całego sznurka, a ΔE_p zmianą jego energii potencjalnej w czasie Δt , gdy jego kawałek o długości Δl „przechodzi” z punktu A do B . Zatem $\Delta E_p = \frac{M\Delta l}{l}gh$. Szukane przyspieszenie dane jest wzorem: $a = gh/l$.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Pierwsze gwiazdy w mrocznych wiekach Wszechświata

Wkrótce po Wielkim Wybuchu Wszechświat był zupełnie ciemny. Gwiazdy i galaktyki jeszcze nie powstały, a sam Wszechświat wypełniał tylko neutralny wodór, atomy helu oraz niewidoczna ciemna materia. Te kosmiczne mroczne wieki trwały kilkaset milionów lat, aż zaczęły tworzyć się pierwsze gwiazdy i galaktyki. Niestety obserwacje galaktyk pochodzących z tego okresu ewolucji Wszechświata stanowią ogromne wyzwanie, ponieważ ich światło jest wyjątkowo słabe. W opublikowanym 1 stycznia 2020 roku w *Nature* artykule Jon P. Willis i jego współpracownicy próbują odpowiedzieć na pytanie, co wydarzyło się podczas trwania ciemnych wieków i kiedy tak naprawdę zaczęły powstawać pierwsze gwiazdy. W tym celu przeprowadzili galaktyczne badania archeologiczne – mierzyli „dojrzałość” gwiazd w jednej z najstarszych znanych gromad galaktyk o wdzięcznej nazwie XLSSC 122.

Willis, J.P., Canning, R.E.A., Noordeh, E.S. et al. *Spectroscopic confirmation of a mature galaxy cluster at a redshift of 2*. *Nature* 577, 39–41 (2020).

Gromada galaktyk to grupa związanych grawitacyjnie tysięcy galaktyk, krążących z prędkością około 1000 kilometrów na sekundę. Są one powstrzymywane przed odłączeniem się od gromady przez przyciąganie grawitacyjne towarzyszącej im ciemnej materii, która ma równoważną całkowitą masę około 10^{14} – 10^{15} mas Słońca.

Przedstawione w artykule wyniki dostarczają kluczowych informacji o tym, gdzie i kiedy pojawiły się pierwsze gwiazdy i galaktyki we Wszechświecie.

Gromada galaktyk XLSSC 122 została odkryta w 2013 roku przez zespół prowadzony przez wspomnianego już Willisa. Najnowsze obserwacje, przeprowadzone m.in. za pomocą Kosmicznego Teleskopu Hubble’a, potwierdziły, że jest to bardzo dojrzała gromada galaktyk, w której znajduje się aż 37 galaktyk, zawierających wyewoluowaną populację gwiazdową, o średnim przesunięciu ku czerwieni wynoszącym 1,98. Oznacza to, że światło z tej gromady podróżowało do nas przez około 10,4 miliarda lat, czyli że patrzymy na taką, jaka była zaledwie 3,3 miliarda lat po Wielkim Wybuchu. W związku z tym obserwacje XLSSC 122 umożliwiają nam nieprawdopodobną podróż do bardzo wczesnego Wszechświata.

Willis i jego współpracownicy stwierdzili, że gromada zawiera kilka galaktyk, które mają podobne czerwone kolory. Kolor danej galaktyki można wykorzystać do oszacowania jej wieku, ponieważ młodsze gwiazdy są bardziej niebieskie niż ich starsze odpowiedniki.

W rezultacie galaktyki, które mają czerwony kolor, już dawno utworzyły swoje gwiazdy. Porównując kolory galaktyk w gromadach z kolorami modeli populacji gwiazdowych, autorzy oszacowali, że gwiazdy w tych galaktykach zaczęły powstawać, gdy Wszechświat miał zaledwie 370 milionów lat, czyli nadal w ciemnych wiekach naszego Wszechświata.

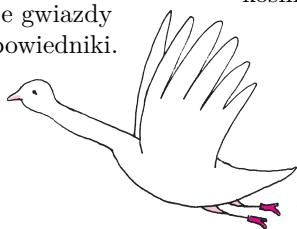
Kolor w astronomii definiowany jest jako stosunek strumienia promieniowania zmierzonego w różnych długościach fali elektromagnetycznej i wskazuje bezpośrednio na temperaturę badanego obiektu (np. gwiazdy, galaktyki), a także stopień ewolucji, czyli wiek.

Jedną ze szczególnie intrygujących kwestii jest to, że Willis zidentyfikował w gromadzie co najmniej 19 galaktyk o podobnych kolorach, co oznacza, że galaktyki te mają podobny wiek.

Dlaczego więc galaktyki zaczęły tworzyć gwiazdy w tym samym momencie? Czy miało na to wpływ otoczenie tych galaktyk? Czy może tworzenie się gwiazd w jednej z galaktyk wywołało w jakiś sposób reakcję łańcuchową, prowadzącą do powstawania gwiazd na pobliskich obłokach gazu? Obecnie nie znamy odpowiedzi na te pytania, ale ze wspomnianej pracy wynika jasno, że ta odległa gromada jest pełna galaktyk powstałych pod koniec ciemnych wieków Wszechświata.

Analiza wieku populacji gwiazdowych przeprowadzona przez zespół Willisa to obecnie najlepsza z możliwych do wykonania – mając do dyspozycji dane pochodzące z teleskopu Hubble’a. Jednak określanie wieku na podstawie kolorów galaktyk jest dość niedokładną metodą, obciążoną dużą niepewnością. Dla przykładu młoda galaktyka, która zawiera dużo pyłu, może mieć ten sam kolor co stara galaktyka zawierająca mało pyłu. Dlatego też wyniki przedstawione w pracy Willisa powinny być traktowane z pewną ostrożnością do czasu uruchomienia Kosmicznego Teleskopu Jamesa Webba (JWST), który będzie w stanie zmierzyć bardzo dokładne widma galaktyk wchodzących w skład gromady XLSSC 122. Porównanie widm z modelami będzie znacznie dokładniejszym sposobem określenia wieku gwiazd niż użycie kolorów galaktyk. Jednak wyniki pracy Willisa otwierają okno do dokładniejszego badania ewolucji naszego Wszechświata i odpowiedzi na pytanie, co się działo podczas panowania kosmicznych mroków.

Katarzyna MAŁEK



JAKIE PIĘKNE NIEBO...

Niebo w maju

Maj jest miesiącem na ogół z ciepłymi nocami, choć zdarzają się przymrozki, a raz na kilka lat nawet opady śniegu. To sprawia, że pomimo coraz krótszych nocy przybywa amatorów obserwacji nocnego nieba.

W maju Słońce wędruje od środka gwiazdozbioru Barana do środka gwiazdozbioru Byka, przecinając dzielącą je granicę około 14 maja. Tydzień później Słońce przechodzi 4° na południe od Plejad i na koniec

miesiąca dociera do Aldebarana, mijając najjaśniejszą gwiazdę Byka w odległości 5,5°. W tym czasie wysokość górowania Słońca zwiększa się o 7°, natomiast długość jego przebywania nad widnokregiem rośnie prawie do 16,5 godziny.

W trzeciej dekadzie miesiąca zaczyna się sezon na zjawisko łuku okołohoryzontalnego (więcej o nim na angielskiej stronie www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm) oraz

obłoków srebrzystych. Łuk okołohoryzontalny jest małą, lecz intensywną tęczą, powstającą w odległości 46° na południe (lub na północ, na półkuli południowej) od Słońca. Zjawisko zachodzi, gdy Słońce znajduje się na wysokości co najmniej 58° nad widnokregiem, co w Polsce zdarza się tylko od maja do sierpnia, w godzinach południowych. Stąd na dużych szerokościach geograficznych jest to zjawisko rzadkie i widoczne tylko latem. Wspomniane obłoki srebrzyste to zawieszona na wysokości kilkudziesięciu kilometrów chmury, widoczne na nocnym niebie, gdy Słońce chowa się niezbyt głęboko pod widnokrąg i oświetla je mimo ciemnego nieba. Tutaj uprzywilejowane są północne obszary naszego kraju, gdyż tam Słońce wędruje płyciej pod widnokregiem i sezon jest dłuższy.

Księżyc wkroczy w maj w fazie tuż po I kwadrze, która miała miejsce 30 kwietnia w Raku, niedaleko znanej gromady otwartej gwiazd M44 i widocznej na ciemnym niebie gołym okiem jako mgielka. Srebrny Glob przejdzie 7 maja przez pełnię w Wadze, 14 maja – przez ostatnią kwadrę w Koziorożcu, by 22 maja przejść przez now w Byku. Ponownie pokaże tarczę w połowie oświetloną już 30 maja, przemierzając tym razem gwiazdozbiór Lwa. Tak więc silnym blaskiem Księżyca zostanie rozświetlony początek miesiąca, a na ciemne niebo można liczyć pod jego koniec. W maju nadal ekliptyka jest korzystnie nachylona wieczorem i niekorzystnie rano, stąd dobrze widać Księżyc po nowiu i bliskie Słońca planety znajdujące się na wschód od niego. O świcie ma miejsce sytuacja przeciwna: Księżyc i bliskie Słońca planety wschodzą niewiele przed nim i giną w zorzy porannej.

Na niebie wieczornym planeta **Wenus** szykuje się do spotkania ze Słońcem na początku czerwca. Wenus zacznie miesiąc ponad 37° na wschód od naszej Gwiazdy Diennej, ale do końca maja zbliży się doń na niecałe 5° , by 3 czerwca minąć Słońce i przemieścić się na niebo poranne. Niestety wtedy Wenus znajdzie się pod ekliptyką, wskutek czego będzie widoczna dopiero od lipca – a zatem ominie nas najatrakcyjniejszy wygląd Wenus, gdy jej sierp jest największy i najcieńszy. Wenus zawróci w swoim ruchu na wschód wśród gwiazd 13 maja i od tego momentu zacznie bardzo szybko zbliżać się do Słońca. Planeta zakreśli $100'$ od gwiazdy El Nath, północnego rogu Byka. W maju blask planety spadnie z $-4,5$ do $-3,9^m$, jednocześnie tarcza planety zwiększy średnicę z 39 do $58''$ i zmniejszy fazę z 24 do prawie 0% .

Na pożegnanie Wenus spotka się z planetą **Merkury**, która z kolei 4 maja przejdzie przez koniunkcję górną ze Słońcem, a potem podaży ku maksymalnej elongacji wschodniej, osiągając ją 4 czerwca. Tego dnia Merkury oddali się od Słońca na ponad 23° . Planeta zacznie pojawiać się na wieczornym niebie od 13 maja. Początkowo bardzo nisko nad widnokregiem, ale szybko nabierze wysokości. Pod koniec miesiąca godzinę po zachodzie Słońca planeta wzniesie się na jakieś 7° ponad północno-zachodni widnokrąg. Niestety do końca maja blask planety osłabnie, z $-1,4^m$ do $+0,2^m$. Zmniejszy się też faza planety, z 90 do 45% , natomiast urośnie tarcza, z 5 do $7''$. Zanim do tego dojdzie, Merkury utworzy dość ciasną parę z planetą Wenus. Od początku okresu

widoczności dystans między planetami z dnia na dzień wyraźnie zmaleje, od 18° do $80\text{--}90$ minut kątowych w dniach 21–22 maja. Aż szkoda, że zabraknie przy nich Księżyca. Ten odwiedzi planety kilka dni później. Cieniusieńki sierp Srebrnego Globu, zaledwie 25,5 godziny po nowiu (23 maja), w fazie 1% , znajdzie się 7° pod Wenus. Ale trzeba się spieszyć, gdyż zajdzie on 50 minut po Słońcu. Dobę później Księżyc już da się dostrzec bez kłopotu. Jego faza urośnie do 4% i o tej samej porze znajdzie się 4° na lewo od dobrze widocznego Merkurego. Do tego momentu Wenus oddali się od Merkurego na 5° .

Przed świtem coraz lepiej widoczne są trzy najbliższe nam planety zewnętrzne, czyli **Mars**, **Jowisz** i **Saturn**. Ostatnie dwie planety w maju zmieniają kierunek swojego ruchu na wsteczny. Uczynią to w odstępie trzech dni 11 i 14 maja (odpowiednio Jowisz i Saturn). W tych dniach dystans między nimi osiągnie minimum (niecałe 5°) i potem zaczną ponownie rosnać. Natomiast w lipcu obie planety przejdą przez opozycję względem Słońca. Planety wschodzą w drugiej połowie nocy i nad ranem wznoszą się na wysokość 10° . Jasność Jowisza w maju urośnie z $-2,3$ do $-2,6^m$, zaś tarcza zwiększy średnicę z 41 do $45''$. W tym samym czasie Saturn zwiększy blask z $+0,6$ do $+0,4^m$ i średnicę tarczy do $18''$. Księżyc odwiedzi obie planety 12 i 13 maja. Najpierw w fazie 75% dotrze na 5° do Jowisza, a dobę później w fazie o 10% mniejszej wejdzie po drugiej stronie pary planet, 5° od Saturna.

Planeta **Mars** w maju przemierzy na niebie ponad 20° , przechodząc na początku miesiąca niecały stopień na północ od pary gwiazd Nashira i Deneb Algiedi, czyli dwóch jasnych gwiazd w północno-wschodniej części Koziorożca, by skończyć miesiąc 2° na południe od gwiazdy λ Aqr. Mars także zbliża się do opozycji w październiku i jego warunki obserwacyjne wyraźnie będą się poprawiały. Do końca miesiąca jasność Czerwonej Planety urośnie z $+0,4$ do 0^m , zaś średnica tarczy zwiększy się do ponad $9''$. Przed świtem planeta osiąga wysokość 10° nad widnokregiem i przez teleskopy z powiększeniem co najmniej kilkudziesiąt razy można próbować dostrzec jakieś szczegóły na jej tarczy, o ile pozwoli na to stan atmosfery obu planet. Dwa lata temu, przy okazji poprzedniej opozycji, Marsa spowijała mgła globalnej burzy piaskowej i szczegółów tarczy planety nie dało się obserwować. Księżyc spotka się z Marsem 15 maja, gdy tuż po ostatniej kwadrze przejdzie $3,5^\circ$ na południe od niego.

W kolejnych dniach naturalny satelita Ziemi zbliża się do fazy nowiu, ale ze względu na to, że znajdzie się wtedy pod ekliptyką, Księżyc zniknie z nieboskłonu już kilka dni przed nim. Za to gdy powróci na niebo wieczorne, w trzeciej dekadzie miesiąca, bardzo szybko nabierze wysokości i uświetni widoki swoją obecnością. Pod koniec miesiąca, 27 maja, prezentując tarczę w fazie 32% , Księżyc przejdzie zaledwie 1° na północ od wspomnianej już otwartej gromady gwiazdy M44 i jednocześnie $45'$ na południe od gwiazdy Asellus Borealis, stanowiącej północno-wschodni róg charakterystycznego trapezu gwiazd otaczających gromadę.

Ariel MAJCHER

Kryzys w kosmologii?

W poprzednim stuleciu kosmologia przeszła kilka kryzysów, które diametralnie zmieniły nasze spojrzenie na ewolucję Wszechświata. Autorzy publikacji, która ukazała się w „Nature Astronomy” [1], sugerują, że być może jesteśmy w przededniu kolejnego momentu zwrotnego w kosmologii.

Naukowcy rozważają w niej model Wszechświata z dodatnią krzywizną przestrzeni, który dobrze pasuje do kąтового widma mocy map anizotropii temperatury mikrofalowego promieniowania tła CMB (*cosmic microwave background*) zmierzonego przez satelitę Planck. Główną zaletą tego modelu jest duża zgodność parametrów kosmologicznych oszacowanych oddzielnie dla dużych i małych skal kątowych map anizotropii. W przypadku powszechnie przyjętego standardowego modelu kosmologicznego, zakładającego płaski Wszechświat (tzn. z zerową krzywizną przestrzeni), obserwowane są pewne (nieistotne statystycznie) różnice między parametrami kosmologicznymi dla dużych i małych skal kątowych. Chociaż Wszechświat z dodatnią krzywizną jest lepiej dopasowany do kąтового widma mocy promieniowania tła, okazuje się niezgodny z obserwacjami kosmologicznymi obiektów nam bliższych (tzn. o przesunięciu ku czerwieni mniejszym niż 3). Szczególnie duże rozbieżności, na poziomie pięciu standardowych odchyień, dotyczą wartości stałej Hubble’a. Podczas gdy dla kąтового widma mocy promieniowania tła i Wszechświata o dodatniej krzywiznie otrzymujemy wartość stałej $H_0 = 54,4_{-4,0}^{+3,3}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, to z pomiarów lokalnych supernowych typu Ia otrzymujemy wartość $H_0 = 73,52 \pm 1,62$ km s⁻¹ Mpc⁻¹. Co więcej, rozbieżności te są znacznie większe niż dla standardowego modelu płaskiego Wszechświata, dla którego powyższa rozbieżność stałej Hubble’a sięga trzech standardowych odchyień (Δ_{19}^{11} „Jak szybko rozszerza się Wszechświat?”). Jak piszą autorzy publikacji zamieszczonej w „Nature Astronomy”, fakt ten sugeruje, że powszechnie przyjęty model Wszechświata z zerową krzywizną może niejako ukrywać poważną niezgodność między obserwacjami kosmologicznymi pochodzącymi z większych odległości (jak CMB) a bliższymi nam częściami Wszechświata.

Kątowe widmo mocy określa amplitudę mapy anizotropii temperatury $\Delta T(\hat{n})$ dla poszczególnych skal kątowych θ . Otrzymuje się je, rozkładając mapy w bazie harmonik sferycznych $Y_{\ell m}$, gdzie indeks $\ell \propto \pi/\theta$, a następnie uśredniając po indeksie m kwadrat modułu współczynników tego rozkładu $a_{\ell m}$, tzn. $C_\ell \equiv \frac{\sum_m |a_{\ell m}|^2}{2\ell+1}$.

Według autorów obserwowane rozbieżności można wyjaśnić na trzy sposoby. Być może przyczyną są niewykryte jeszcze błędy systematyczne w mapach CMB z satelity Planck lub pomiarach obiektów o niższym przesunięciu ku czerwieni. Druga możliwość to nieznaczna statystyczna fluktuacja w kątowym widmie mocy map anizotropii w ramach standardowego modelu płaskiego Wszechświata. Jeżeli jednak nie jest to żadna z powyższych możliwości, niezgodność może wskazywać na konieczność poważnej zmiany obowiązującego obecnie modelu kosmologicznego.

Można by zadać jednak pytanie, dlaczego tej rozbieżności nie dostrzegli naukowcy z zespołu opracowującego dane z satelity Plancka? Otóż dostrzegli. Zespół Plancka miał świadomość lepszego dopasowania modelu Wszechświata z dodatnią krzywizną do kąтового widma mocy map anizotropii [2]. Jednak dopasowanie to wynika głównie z pewnej różnicy w widmie mocy dla dużych i małych skal kątowych, której konsekwencją są wspomniane już różnice w oszacowanych na podstawie tych widm wartości parametrów kosmologicznych dla płaskiego Wszechświata. Zespół Plancka pokazał, że różnica ta nie jest związana z jakimś znanym błędem systematycznym. Ponadto jej istotność statystyczna kształtuje się na poziomie około dwóch standardowych odchyień, więc obserwowaną rozbieżność można uznać za nieznaczną

fluktuację statystyczną w ramach modelu Wszechświata o zerowej krzywiznie. I tak też jest ona interpretowana przez zespół współpracy naukowej Planck. Interpretacja ta jest również zgodna z wartością krzywizny przestrzeni otrzymanej dla modelu kosmologicznego dopasowanego do pełnych danych Plancka, tzn. nie tylko do kąтового widma mocy map anizotropii, ale też zaobserwowanych korelacji anizotropii wywołanych soczewkowaniem grawitacyjnym promieniowania tła. Tak oszacowana krzywizna jest wówczas w granicach błędu równa zeru, zaś dopasowany model kosmologiczny jest dużo bardziej zgodny z obserwacjami bliższych nam obiektów kosmologicznych.

Możemy mieć nadzieję, że już wkrótce nowe obserwacje z przeprowadzanych obecnie eksperymentów mierzących CMB oraz przeglądów wielkoskalowej struktury Wszechświata pozwolą rozstrzygnąć, czy rzeczywiście mamy w kosmologii kryzys i czy potrzebujemy kolejnej zmiany w naszym postrzeganiu Wszechświata.

Paweł BIELEWICZ

Narodowe Centrum Badań Jądrowych
Grupa Współpracy Naukowej Planck

[1] E. Di Valentino, A. Melchiorri, J. Silk, *Planck evidence for a closed Universe and a possible crisis for cosmology*, Nature Astronomy 11 (2019), 484.

[2] Planck Collaboration, et al., *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*. arXiv:1807.06209 (2018).



Wojnę powiedzieć myśli serce moje, Do której miecza nie trzeba ni zbroje

Bartłomiej BZDEGA

Rozważamy tutaj gry z udziałem dwóch graczy, którzy podczas rozgrywki mają pełną informację na temat tego, co dzieje się na planszy. Każda gra ma ściśle określone reguły, w tym cel. Gracz, który jako pierwszy go osiągnie, wygrywa, a jego przeciwnik przegrywa, przy czym nie musi być to ten sam cel dla obu graczy.

Interesuje nas, jak grać, żeby wygrać. *Strategią* nazywamy przepis na to, jak grać; formalnie jest to funkcja, która każdej pozycji w grze przypisuje ruch, jaki należy wykonać. Poszukujemy *strategii wygrywającej*, czyli takiej, która jednemu z graczy zapewnia zwycięstwo, niezależnie od tego, co zrobi drugi.

W niektórych grach można znaleźć *strategie ruchów odpowiadających*, którym poświęcony jest niniejszy odcinek kącika. Wskazują one właściwy ruch w zależności praktycznie tylko od tego, co zrobił przeciwnik w ruchu poprzednim. Zazwyczaj wiążą się one z różnego rodzaju symetriami. Idea jest prosta: ten, który ma odpowiedź na każdy ruch przeciwnika, nie może przegrać.

Wskazując taką strategię, należy uzasadnić, że ruch odpowiadający jest zawsze możliwy do wykonania (nie łamie zasad) i nie powoduje natychmiastowej przegranej. Ponadto należy się jeszcze upewnić, czy gra się kiedyś zakończy, bo nie zawsze jest to oczywiste.

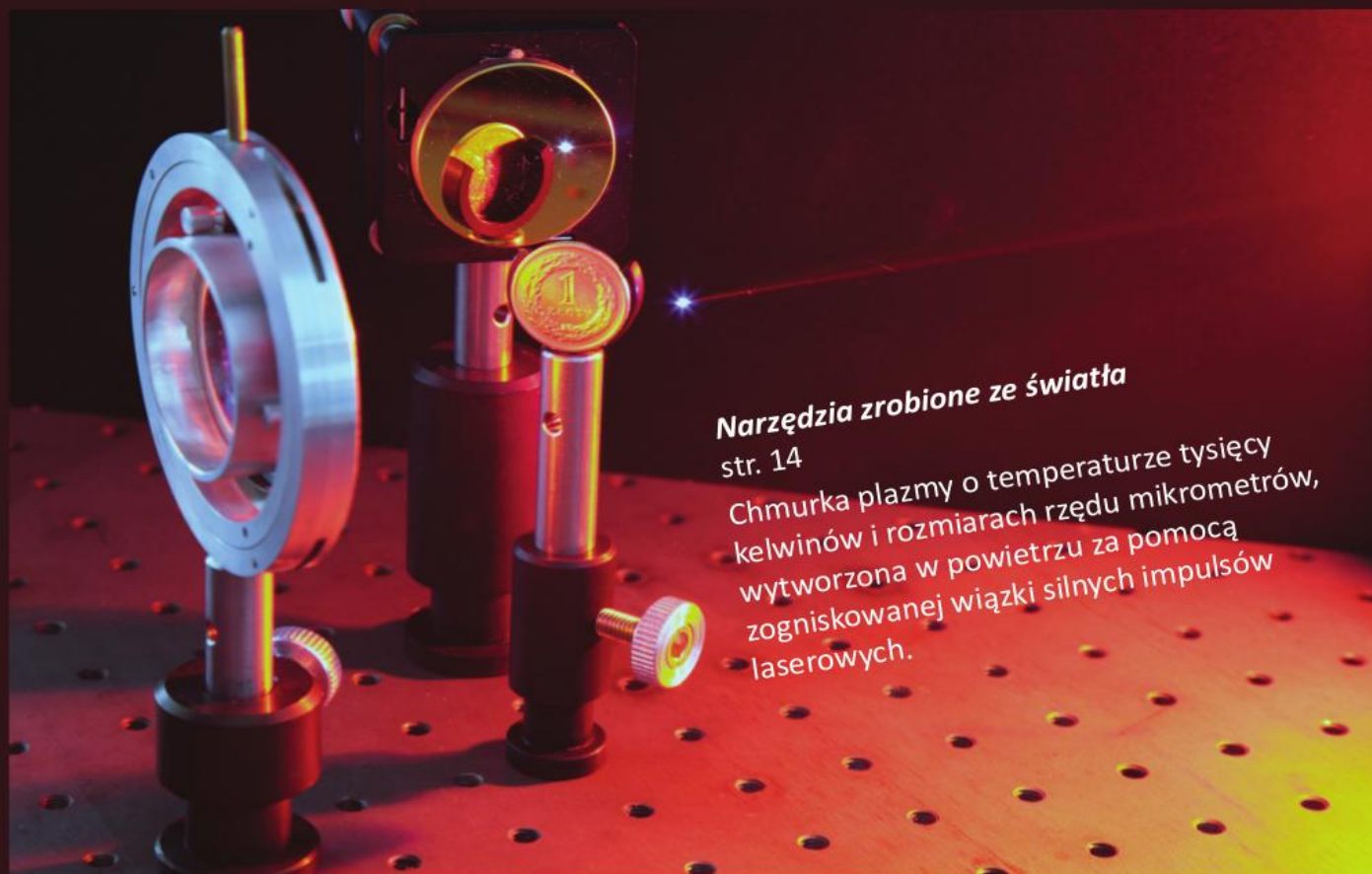
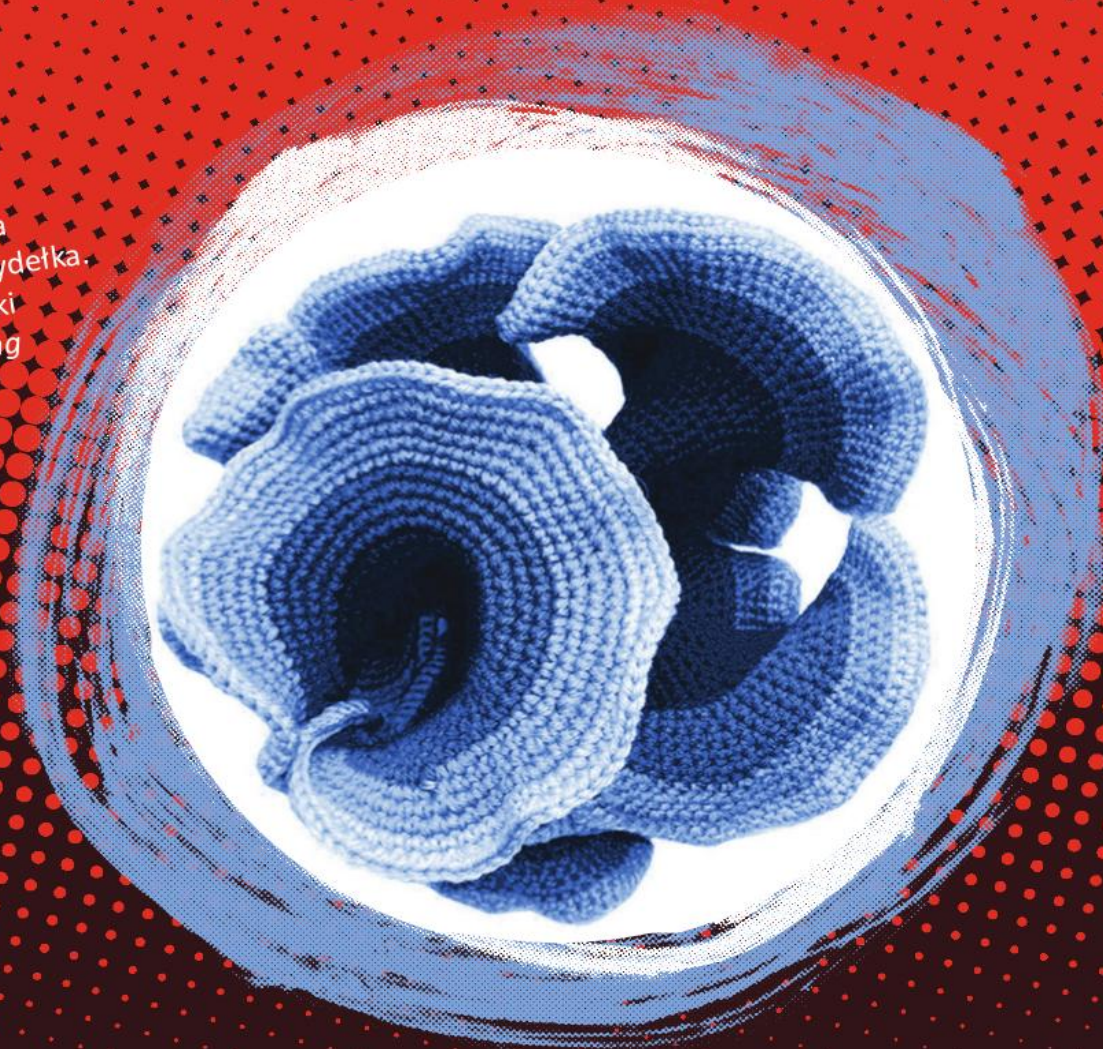
Zadania. W każdym zadaniu opisana jest gra dwuosobowa, w której gracze wykonują na zmianę ruchy. Należy wskazać strategię wygrywającą dla odpowiedniego gracza.

1. Gracze stawiają pionki na szachownicy 8×8 , jeden czarne, a drugi białe. Żadne dwa pionki tego samego koloru nie mogą stać na polach mających wspólny bok lub wierzchołek. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu.
2. Gracze stawiają hetmany na szachownicy o wymiarach 9×9 , przy czym hetmana można postawić wyłącznie na wolnym polu, którego nie atakuje żaden z hetmanów ustawionych wcześniej. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu.
3. Łańcuch ma 25 ogniów. Ruch polega na rozcięciu i odrzuceniu jednego z ogniów, ale tak wybranego, by liczba łańcuchów zwiększyła się. Przegrywa ten gracz, który nie może wykonać ruchu.
4. Dana jest czekolada o wymiarach m na n kostek. Dwaj gracze na zmianę łamią czekoladę wzdłuż linii prostej, nie uszkadzając kostek. Po złamaniu czekolady gracz wybiera jeden z dwóch otrzymanych kawałków i zjada go, a gra toczy się dalej na pozostałej części czekolady. Wygrywa ten, kto odda przeciwnikowi ostatnią kostkę.
5. Gracze stawiają na szachownicy o wymiarach 8×8 skoczki, przy czym gracz pierwszy stawia zawsze jednego, a gracz drugi trzy. Skoczki muszą stać na różnych polach i żadne dwa nie mogą się atakować. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu.
6. Na stole leżą dwa stosy monet: n srebrnych i n złotych. Ruch polega na zabraniu pewnej liczby monet z jednego lub dwóch stosów, ale złotych monet musi pozostać co najmniej tyle, co srebrnych. Ponadto, jeśli zabieramy monety z obu stosów, to po wykonaniu ruchu muszą one zawierać po tyle samo monet. Wygrywa gracz, który pozostawi na stole jedną złotą monetę i żadnej srebrnej.
7. Pierwszy gracz pisze na tablicy kolejno litery A lub B , jedną na jeden ruch. Drugi może w swoim ruchu zamienić miejscami dowolne dwie litery napisanego słowa albo może nic nie zmieniać. Gra kończy się, gdy każdy z graczy wykona n ruchów. Drugi gracz wygrywa, gdy powstałe słowo n -literowe jest palindromem; w przeciwnym razie wygrywa pierwszy.
8. Prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$ złożony jest z abc sześciąnków o wymiarach $1 \times 1 \times 1$. Ruch polega na przebicciu tego prostopadłościanu igłą na wylot, równoległe do wybranej krawędzi. W czasie ruchu zostaje przebitych a , b lub c sześciąnków. Żaden sześciąnek nie może być przebity dwa razy, a przegrywa gracz, który jako pierwszy nie może wbić igły zgodnie z podanymi prawidłami.

Rozwiązania
 1. Niech ℓ będzie osią symetrii szachownicy, równoległą do pewnych dwóch jej boków. Gracz drugi ma strategię wygrywającą – każdy swój pionek stawia symetrycznie do postawionego w w poprzednim ruchu pionka przeciwnika względem prostej ℓ . Gracz pierwszy ma strategię wygrywającą – powinien postawić pierwszy hetman na środkowym polu, a następnie odpowiadać symetrycznie do niego (przy czym nie musi być to ten sam cel dla obu graczy). Na przykład igłą ma gracz pierwszy wygrywać, ponieważ w najniższej pozycji, powiadają się dwa przeciwległe narożniki, a jeśli gracz pierwszy wygrywa, pisząc raz literę A i raz literę B . Gdy $n = 2k - 1$, to wygrywa gracz drugi w następujący sposób. Przechodzi do ruchu nie robi nic, a po napisaniu litery $(k + 1)$ -tej sprząda, czy jest ona taka sama jak litera $(k - 1)$ -ta. Jeśli tak, to nie robi, a jeśli nie, to literę k -tą zamienia z tą z liter $k \pm 1$, która jest od niej imna. Jeśli co najmniej dwie z liter a, b, c są parzyste, to wygrywa drugi gracz, wykonując środkowym narożnikiem odpowiedni ruch prostopadłościanu. Jeśli nie, to odpowiednia środkowa symetria prostopadłościanu) i następnie odpowiedni ruch prostopadłościanu.

**Zrób to sam: płaszczyzna
hiperboliczna szydełkiem**
str. 8

Płaszczyzna hiperboliczna
wykonana za pomocą szydełka.
Zdjęcie pochodzi z książki
Dainy Taiminy Crocheting
Adventures With
Hyperbolic Planes.



Narzędzia zrobione ze światła
str. 14

Chmurka plazmy o temperaturze tysięcy
kelwinów i rozmiarach rzędu mikrometrów,
zogniskowanej w powietrzu za pomocą
laserowych wiązek silnych impulsów.