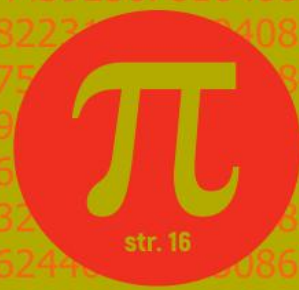


3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749415923078164062
620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223... 34081
848111745028410270193852110555964462294895493038... 34428810975... 34
5648233786783165271201909145648566923460348610... 332667821339... 2
372458700660631558817488152092096282925409... 333667821339... 8
046652138414695194151160943305727036575959... 333667821339... 8
8074462379962749567351885752724891227938183... 333667821339... 8
139494639522473719070217986094370277053921717... 333667821339... 8
200056812714526356082778577134275778960917363717... 333667821339... 8
95853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747713099
05187072113499999983729780499510597317328160... 333667821339... 8
230825334468503526193118817101000313783875... 333667821339... 8
359825349042875546873115956286388235378... 333667821339... 8
5195778185778053217122680661300192787... 333667821339... 8
57201065485863278865936153381827968... 333667821339... 8
019520353018529689957736225994138... 333667821339... 8
4245415069595082953311686172785... 333667821339... 8
75098381754637464939319255060... 333667821339... 8
60356370766010471018194295... 333667821339... 8
55379774726847104047534... 333667821339... 8
313677028989152104753... 333667821339... 8
2533824300355876403... 333667821339... 8
2199245863150302... 333667821339... 8
321165344987202... 333667821339... 8
417574672890977772793800... 333667821339... 8
1613611573525521334757418494684382... 333667821339... 8
56209921922218427255025425... 333667821339... 8
32796797668145410095388378636095... 333667821339... 8
5042419652850222106611... 333667821339... 8
46776465757396241389086583... 333667821339... 8
5957098258226205224894077267... 333667821339... 8
49625245174939... 333667821339... 8
9754989301617539284681... 333667821339... 8
5845987273644695848653836736222626099... 333667821339... 8
59977001296... 333667821339... 8
945226746767889525213852... 333667821339... 8
363456817432411251507606... 333667821339... 8
0560101503308617928680920874760... 333667821339... 8
978482168299894872265880485756401... 333667821339... 8
47952658678210511413547357... 333667821339... 8
576540359027993440374200731057853... 333667821339... 8
35064302184531910484810053706146... 333667821339... 8
3745123718192179998391015919561814... 333667821339... 8
30951465502252316038819301420937621378559... 333667821339... 8
2562599661501421503... 333667821339... 8
243408819071048633173464965145390579626856100550810... 333667821339... 8
25714591028970641401109712062804390397595156771577004203378699360
7230558763176359421873125147120532928191... 333667821339... 8
06095752706957220917567116722910981690915280173506712748583222871835209353



MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA
NR 3 (550) 2020
CENA 5,5 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR INID 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

Twórczość Wisławy Szymborskiej © Fundacja Wisławy Szymborskiej



Nakład: 3500 egz.



ISSN 1643-9010
p-ISSN 1733-1455

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (550)

Toporna logika brudnych maszyn
Paweł Jakubczyk



Zadania

O trójkątach (nie tylko) na sferze
Michał Miśkiewicz

Od obserwacji Eddingtona do obrazu
czarnej dziury
Maciek Wielgus

Lemat Spernera, czyli co wspólnego mają
trójkąty i sprawiedliwy podział
Jakub Szulc

Pół szklanki mocnego kodu. Ghost speaker
Piotr Krzyżanowski

Problem więźniów – o pewnych
własnościach losowych permutacji
Joanna Jasińska



Reagować zdecydowanie
Magdalena Fikus

Czy π jest normalna?
Łukasz Rajkowski

O nierówności między średnią
arytmetyczną sinusa i tangensa kąta
ostrego a jego miarą
Wojciech Wilhelm Wdowik

Informatyczny kącik olimpijski (135):
Little Elephant and Array

Klub 44

Prosto z nieba: Kosmologiczny zbieg
okoliczności

Niebo w marcu

Aktualności

Kolory przymrużonym okiem fizyka



Gauss, czyli tam i z powrotem
Bartłomiej Bzdęga

W następnym numerze:

10 MILIARDÓW LAT TEMU. WSZECHŚWIAT.

Czasy są niespokojne. Ciemna strona, mając po swojej stronie potężne siły grawitacji, rządzi niepodzielnie, kształtując strukturę kosmosu. Zdesperowane galaktyki jasnej strony mobilizują siły, tworząc nowe gwiazdy w niespotykanym jak dotąd tempie. W tych trudnych czasach dochodzi do wewnętrznych konfliktów. Większe galaktyki wchłaniają mniejsze w desperackiej próbie zdobycia cennego helu i wodoru. Paliwa dla nowych gwiazd. Wydaje się, że jasna strona skazana jest na zagładę...

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki,

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Wiersz na okładce wykorzystano za zgodą Fundacji Wisławy Szymborskiej

Toporna logika brudnych maszyn

*Instytut Fizyki Teoretycznej,
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

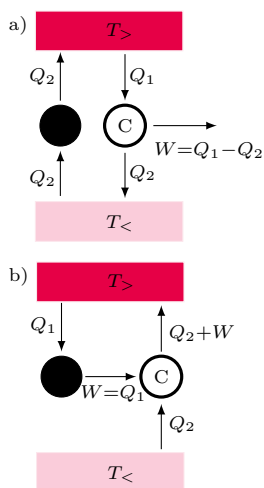
Paweł JAKUBCZYK*

Perpetuum mobile (z łac. „wiecznie poruszający się”) pierwszego rodzaju to hipotetyczna maszyna, której jedynym efektem działania jest wykonywanie pracy, a więc również produkcja energii. Istnienie takiego tworu sprzeczne jest w oczywisty sposób z zasadą zachowania energii. Konstrukcją nieco bardziej wyrafinowaną jest *perpetuum mobile* drugiego rodzaju, a więc urządzenie, którego (jedynym) skutkiem funkcjonowania byłaby zamiana ciepła na pracę. Możliwość zbudowania takiej maszyny nie jest bynajmniej wykluczona przez zasadę zachowania energii, a wizja urządzenia, które produkowałoby użyteczną pracę poprzez chłodzenie jakiegoś medium, może się (słusznie) wydać ze wszech miar pociągająca.

Historycznie jedno z pierwszych sformułowań drugiej zasady termodynamiki odwołuje się właśnie do tego poniekąd inżynierskiego konceptu i pochodzi od Kelvina. Zasada Kelvina orzeka wprost, że *perpetuum mobile* drugiego rodzaju nie można zbudować. W rzeczy samej, pojęcie entropii w owych czasach nie istniało, ludzi zaś frapował (dziś nie mniej aktualny) problem maksymalnie efektywnego wykorzystania energii wyzwolonej wskutek spalania czarnych substancji wykopywanych spod powierzchni ziemi. Z punktu

widzenia języka współczesnych nauk przyrodniczych kelwinowskie sformułowanie fundamentalnego prawa fizyki (jakim jest druga zasada) poprzez odwołanie do brudnych i hałaśliwych maszyn cieplnych wydać się może nieco toporne. Podobnie sprawa wygląda z pochodzącym z równie zamierzchłych czasów sformulowaniem Clausiusa. Można z drugiej strony na ten problem spojrzeć jako na przykład ewolucji języka i tworzenia się (abstrakcyjnych poniekąd) pojęć inspirowanych przez, jak może się zdawać, ekstremalnie praktyczne zagadnienie, wskutek czego powstać może to, co nazywamy często „teorią fenomenologiczną”.

Równoważna zasadzie Kelvina zasada Clausiusa orzeka, że niemożliwy jest proces, którego jedynym efektem byłby przepływ ciepła od ciała o temperaturze $T_<$ do ciała o wyższej temperaturze $T_>$. Chronologicznie zasada Clausiusa (1850) nieznacznie poprzedza zasadę Kelvina i może być uznana za najwcześniejsze sformułowanie drugiej zasady termodynamiki. W pewnym sensie jej treść jest zawarta we wcześniejszej pracy Carnota (1824), która jednakże dotyczy „cieplika”, czyli „fluidu ciepła”, konceptu, który nie przetrwał próby czasu (tj. konfrontacji z doświadczeniem).



Rys. 1

Maszyna cieplna to układ realizujący zamknięty cykl przemian termodynamicznych (obieg termodynamiczny), w wyniku których następuje wymiana energii między układem a dwoma zbiornikami ciepła o różnych temperaturach. Maszyna realizująca cykl w takim kierunku, że ciepło przepływa ze zbiornika cieplejszego do zimniejszego, przy czym część ciepła zamienia na pracę, nazywa się *silnikiem cieplnym*. Maszynę realizującą cykl w przeciwnym kierunku, która dzięki wykonanej na układzie pracy przeprowadza ciepło ze zbiornika zimniejszego do cieplejszego, nazywa się *pompą ciepła*.

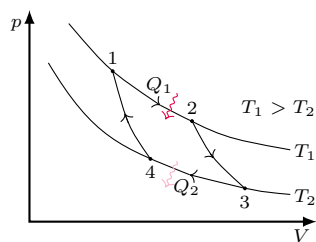
Zrozumienie równoważności zasad Kelvina (K) i Clausiusa (C) nie jest trudne. Obrazuje to diagram naszkicowany na rysunku 1. Ilustracja 1a pokazuje rozumowanie prowadzące do implikacji $K \implies C$. Maszyna cieplna oznaczona jako kółko ze znakiem „C” pobiera ciepło Q_1 ze zbiornika o temperaturze $T_>$ (grzejnika) i jego część oddaje do zbiornika o temperaturze $T_<$ (chłodnicy), wykonując przy tym użyteczną pracę $W = Q_1 - Q_2$ (na przykład służącą do rozpędzania lokomotywy). Rozumujemy teraz *ad absurdum*: zakładamy, że (wbrew zasadzie C) zbudowano maszynę, której jedynym efektem działania jest przekaz ciepła od chłodnicy do grzejnika. Urządzenie to podłączamy tak, jak pokazuje rysunek 1a, gdzie oznaczone jest ono schematycznie czarnym kółkiem. Cały skonstruowany w ten sposób aparat *de facto* pobiera ciepło z grzejnika i zamienia na pracę. Jest to sprzeczne z zasadą K . W ten sposób pokazaliśmy implikację $K \implies C$.

Dowód implikacji $C \implies K$ przebiega nieco podobnie. Zakładamy prawdziwość zasady C i znów uprawiamy *reductio ad absurdum*. Jeśli nasza teza (czyli zasada K) nie jest prawdziwa, to istnieje urządzenie przedstawione jako czarne koło na rysunku 1b. Posługując się maszyną C (działającą w odwróconym cyklu), zbudować możemy schemat z rysunku 1b, którego jedynym efektem działania jest przekazywanie ciepła od chłodnicy do grzejnika. Złamaliśmy zatem zasadę C (wbrew założeniu, które na początku poczyniliśmy). Mamy zatem implikację $C \implies K$ i w konsekwencji równoważność $K \iff C$.

Wychodząc od zasady zachowania energii i zasady Kelvina (oraz konceptu empirycznej temperatury), zbudować można w gruncie rzeczy całą termodynamikę. Zobaczmy teraz, jak posługując się językiem maszyn, dotrzeć do drugiej zasady w ujęciu, które dziś można by uznać za standardowe. Przyda się do tego bardzo konkretne urządzenie, mianowicie znajomy silnik Carnota (działający w sposób odwracalny). Przypomnijmy, że urządzenie takie wymaga dwóch zbiorników cieplnych: grzejnika i chłodnicy, o temperaturach odpowiednio $T_>$ i $T_<$. Jego cykl składa się z czterech procesów: (i) izotermicznego rozprężania w $T = T_>$ (czemu towarzyszy pobranie ciepła od grzejnika); (ii) adiabatycznego

Przemiana izotermiczna (np. sprężanie lub rozprężanie izotermiczne) to przemiana zachodząca przy określonej, stałej temperaturze. Stała temperatura układu może być wymuszana poprzez kontakt termiczny z wyidealizowanym zbiornikiem (o stałej temperaturze), z którym układ wymienia ciepło.

Przemiana adiabatyczna (np. adiabatyczne sprężanie lub rozprężanie) to proces termodynamiczny, podczas którego izolowany układ nie wymienia ciepła z otoczeniem, lecz całość energii jest dostarczana lub odbierana z niego jako praca.



Rys. 2. Cykl Carnota na diagramie pV pokazującym zależność ciśnienia gazu od objętości:

- 1 → 2 izotermiczne rozprężanie (układ pobiera ciepło),
 - 2 → 3 adiabatyczne rozprężanie (układ wykonuje pracę),
 - 3 → 4 izotermiczne sprężanie (układ oddaje ciepło),
 - 4 → 1 adiabatyczne sprężanie (praca jest wykonywana nad układem).
- Całkowita praca, jaką w takim cyklu udaje się uzyskać z układu, jest równa polu obszaru ograniczonego krzywymi reprezentującymi cykl

rozprężania; (iii) izotermicznego sprężania w kontakcie z chłodnicą w $T = T_2$, któremu towarzyszy oddawanie ciepła do chłodnicy, (iv) oraz adiabatycznego sprężania do osiągnięcia stanu wyjściowego. Zakładamy, że operacje te możemy również przeprowadzić w przeciwnym kierunku.

Znana jest taka właściwość silnika Carnota, że stosunek ciepła pobranego (Q_1) do ciepła oddanego ($-Q_2$) zależy jedynie od temperatur T_1 i T_2 i wynosi $-Q_1/Q_2 = T_1/T_2$. Nadmienić można, że fakt ten służy do zdefiniowania temperatury absolutnej w fenomenologicznej konstrukcji termodynamiki (ale o tym może innym razem). Mamy więc dla rozpatrywanego silnika własność $\sum Q_i/T_i = 0$. Pokażemy teraz podobny wynik dla dowolnego cyklu odwracalnego oraz ważną nierówność przypisywaną Clausiusowi. Uprawiając konsekwentnie toporną logikę doskonale naoliwionych (funkcjonujących potencjalnie w sposób odwracalny) maszyn, rozpatrujemy dowolne urządzenie U działające w sposób cykliczny. W każdym z „infinitesimalnych elementów” składających się na cykl praca jest wykonywana przez układ bądź nad układem i doprowadzane (bądź odprowadzane) jest ciepło. Wyobrażamy sobie teraz, że każdy element ciepła (q) przekazywany jest do (bądź z) układu przez pomocniczy układ U' o temperaturze T . Ponadto U' jest silnikiem Carnota mogącym działać pomiędzy temperaturą T i (ustaloną) temperaturą zbiornika T_0 . Infinitesimalny element cyklu traktujemy więc jako następującą procedurę: (i) U jest w danym stanie, U' w stanie o temperaturze T_0 ; (ii) przeprowadzamy U' adiabatycznie (odwracalnie) do T ; (iii) U wykonuje element cyklu, absorbując ciepło q od U' , U' podąża wzdłuż izotermy odpowiadającej T ; (iv) U' podlega adiabatycznej (odwracalnej) przemianie do temperatury T_0 , a następnie jest sprężony (bądź rozprężony) do osiągnięcia stanu wyjściowego. Zauważamy teraz, że skoro w naszym infinitesimalnym procesie U' oddał w kroku (iii) ciepło q , to musi w kroku (iv) pobrać ciepło qT_0/T . W trakcie całego cyklu układu U ciepło pobrane ze zbiornika wynosi zatem $T_0 \oint q/T$ (gdzie całka przebiega po cyklu układu U). Zauważamy teraz, że po wykonaniu pełnego cyklu układy U oraz U' znalazły się w swoich stanach wyjściowych, a zatem ich energia (która jest funkcją stanu) nie zmieniła się. Ciepło $T_0 \oint q/T$ pobrane ze zbiornika musiało zatem zamienić się w pracę wykonaną w trakcie realizacji cyklu. Ale powołując się teraz na zasadę Kelvina, stwierdzamy, że nie może ono być dodatnie, a zatem

$$(1) \quad \oint q/T \leq 0.$$

Jest to słynna nierówność Clausiusa. Podkreślmy, że otrzymaliśmy ją, posługując się zasadą Kelvina i bardzo szczególną maszyną cieplną (odwracalnym silnikiem Carnota). Jeżeli dodatkowo cykl układu U jest odwracalny, to powtarzając powyższe rozumowanie „w drugim kierunku” (biorąc $q \rightarrow -q$), dostaniemy

$$(2) \quad -\oint q/T \leq 0,$$

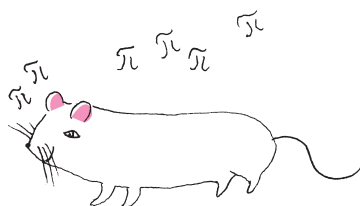
co nieuchronnie prowadzi (dla cykli odwracalnych) do równości

$$(3) \quad \oint q/T = 0$$

i wniosku, że dla dowolnych dróg łączących stany A i B całka $\int_A^B q/T$ nie zależy od drogi. Możemy więc zdefiniować pewną funkcję S następującym wzorem:

$$(4) \quad S_B = S_A + \int_A^B q/T,$$

gdzie A jest pewnym ustalonym stanem, dla którego wartość S_A możemy przyjąć dowolnie. Wartość S_B dla dowolnego innego stanu jest już jednoznacznie zadana powyższym wzorem, ponieważ całka nie zależy od drogi. Tak zdefiniowana funkcja S jest więc funkcją stanu (wyznaczoną z dokładnością do stałej, ze względu na dowolność wartości S_A). Konkluzję tę można też bardziej formalnie wyrazić następująco: z niezależności całki od drogi wynika, że forma q/T jest różniczką zupełną, a zatem istnieje funkcja stanu S taka, że $dS = q/T$ i dla dowolnych stanów A i B zachodzi równość (4).



Funkcją stanu nazywa się w termodynamice wielkość zależną wyłącznie od stanu układu, czyli od aktualnych wartości opisujących go parametrów, takich jak masa, liczność materii, temperatura, ciśnienie, objętość itp. Wartość funkcji stanu nie może natomiast zależeć od jego historii, tzn. tego, co działo się z nim wcześniej. Jest to równoważne temu, że zmiana wartości funkcji stanu zależy tylko od stanu początkowego i końcowego układu, a nie od sposobu, w jaki ta zmiana została zrealizowana. Funkcjami stanu nie są np. ciepło ani praca, ponieważ wykonując zamknięty cykl termodynamiczny, układ wraca do pierwotnego stanu, ale całkowity przekaz ciepła w takim cyklu może być niezerowy, podobnie jak praca wykonana przez układ. Natomiast energia całkowita układu jest funkcją stanu.

Co natomiast w sytuacji, gdy zarzucimy założenie odwracalności? Dla dowolnego procesu od A do B przeprowadzamy proces odwrrotny w sposób odwracalny. Do otrzymanego w ten sposób cyklu stosujemy nierówność Clausiusa, co daje nam $\int_A^B q/T < S(B) - S(A)$. W szczególności, gdy przeprowadzamy proces adiabatyczny (ale nieodwracalny), to $q = 0$ i $S(B) - S(A) > 0$. Dla procesu nieskończenie małego mamy $q/T \leq dS$ (gdzie równość zachodzi jedynie dla procesu odwracalnego).

Nawiązaliśmy zatem kontakt z bardziej powszechnym podejściem do termodynamiki, gdzie istnienie funkcji S (zwanej entropią), określonej na stanach równowagi termodynamicznej jest postulatem. Niektóre kanoniczne podręczniki termodynamiki (np. książka A. Briana Pipparda z roku 1957) jako punkt startowy przyjmują właśnie zasadę Kelvina i wprowadzają entropię na podstawie rozumowania podanego (w nieco skróconej formie) powyżej. Wydaje się, że podejście to jest wypierane (bądź zostało wręcz wyparte) przez wzorzec logiczny oparty na książce Herberta Callena z roku 1966, gdzie termodynamika formułowana jest poprzez zasadę wariacyjną odnoszącą się do funkcji S , której istnienie jest postulatem. Urok tego podejścia polega na tym, że termodynamika stanów równowagi w sposób jasny staje się zamkniętą teorią aksjomatyczną, opartą w gruncie rzeczy na zasadzie zachowania energii oraz pewnej eleganckiej (choć być może lekko enigmatycznej) zasadzie wariacyjnej, której sensowność weryfikowana jest de facto *a posteriori*. Odrobinę kuriozalnym jest fakt, że w tej wersji kursu termodynamiki poradzić można sobie bez odwołania się do maszyn ciepłych, zasady Kelvina i Clausiusa natomiast pominąć, bądź też przywołać jako „historyczne” sformułowania II zasady (co słuchaczom wyda się zapewne cokolwiek nudną i nie do końca potrzebną dygresją). Urzekająca w swej estetyce aksjomatyczna termodynamika jest „ortogonalna” do historycznej logiki brudnych maszyn. Logika brudnych maszyn jest natomiast czysta, acz może nieco toporna.



Zadania

Przygotował **Lukasz RAJKOWSKI**

M 1630. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 2. Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden sposób przedstawienia $\frac{2}{p}$ w postaci sumy $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, gdzie $x < y$.
Rozwiązanie na str. 13

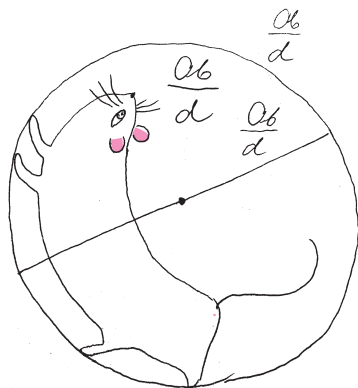
M 1631. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC i nie jest środkiem okręgu ω opisanego na tym trójkącie. Udowodnić, że wśród odcinków PA , PB i PC znajdują się odcinek krótszy oraz odcinek dłuższy od promienia okręgu ω .
Rozwiązanie na str. 15

M 1632. Liczby x_1, \dots, x_n należą do odcinka $[0, 1]$. Udowodnić, że istnieje takie $0 \leq a \leq 1$, że $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - a| = \frac{1}{2}$.
Rozwiązanie na str. 13

Przygotował **Andrzej MAJHOFER**

F 995. Ile baterijek 9 V należy połączyć szeregowo, aby długości fal de Broglie'a elektronów przyspieszanych uzyskanym w ten sposób napięciem były równe „promieniowi Bohra” atomu wodoru $r_0 \approx 0,53 \cdot 10^{-10}$ m? Masa elektronu $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, stała Plancka $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js, ładunek elementarny $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
Rozwiązanie na str. 14

F 996. Dla fotokomórki próżniowej o katodzie wykonanej z cezu zmierzono napięcie hamowania i prąd nasycenia, podczas oświetlania katody światłem o długości fali $\lambda_1 = 500$ nm oraz $\lambda_2 = 300$ nm. W obu przypadkach strumień energii światła padającego na katodę był taki sam i wynosił $S = 1$ W/m². Jakie wartości napięcia hamowania i prądu nasycenia uzyskano dla każdej z użytych długości fali? Dla cezu praca wyjścia $W = 1,95$ eV. Iloczyn stałej Plancka h i prędkości światła c , $hc \approx 1,24 \cdot 10^{-6}$ m, a ładunek elementarny $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
Rozwiązanie na str. 12



O trójkątach (nie tylko) na sferze

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Michał MIŚKIEWICZ*

Rozpocznijmy od przypomnienia, czym jest trójkąt geodezyjny. Mając dane dwa punkty na powierzchni (powiedzmy, że leżące odpowiednio blisko siebie), najkrótszą łączącą je krzywą leżącą na tej powierzchni nazwiemy *geodezyjną*. Dla przykładu – na płaszczyźnie tę rolę pełnią odcinki, a na sferze łuki tzw. okręgów wielkich. Przez *trójkąt geodezyjny* rozumiemy obszar wyznaczony przez trzy punkty, zamknięty między łączącymi je geodezyjnymi. Kąt w wierzchołku takiego trójkąta liczymy jako kąt między stycznymi do odpowiednich krzywych geodezyjnych.

W poprzednim numerze (Δ_{19}^2), w artykule *O trójkątach na sferze*, wprowadziliśmy pojęcie *krzywizny Gaussa*,

opierając się na przykładzie sfer o różnych promieniach. Przypomnijmy je w trochę zmienionej wersji: jeśli na danej powierzchni \mathcal{M} dowolny trójkąt geodezyjny o kątach α, β, γ i polu A spełnia nierówność

$$(*) \quad \alpha + \beta + \gamma \geq \pi + K \cdot A,$$

to powiemy, że powierzchnia ta ma krzywiznę Gaussa ograniczoną z dołu przez K . Jeśli $(*)$ jest zawsze równością, to mówimy, że krzywizna Gaussa *jest równa* K . W świetle tej definicji płaszczyzna ma zerową krzywiznę Gaussa, natomiast okazuje się, że sfera o promieniu r ma krzywiznę równą $1/r^2$, co wykazaliśmy w poprzednim artykule.

Celem tego artykułu jest uzasadnienie następującej zależności pola *całej* powierzchni \mathcal{M} od jej krzywizny:

Twierdzenie. Jeśli \mathcal{M} jest spójną powierzchnią o krzywiznie Gaussa ograniczonej z dołu przez $K > 0$, to jej pole $|\mathcal{M}|$ spełnia nierówność

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{4\pi}{K}.$$

Warto odnotować, że dla dowolnej sfery ta nierówność staje się równością.

Na potrzeby dowodu zacznijmy od nałożenia na \mathcal{M} siatki złożonej z trójkątów geodezyjnych, oznaczmy przez $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ odpowiednio zbiory wierzchołków, krawędzi i trójkątów w tej siatce, a przez V, E, F liczności tych zbiorów. Zadanie pozostawione na koniec poprzedniego artykułu pokazuje, że

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{2\pi}{K}(V - E + F).$$

Pozostaje więc wykazać nierówność $V - E + F \leq 2$. Sprowadziliśmy więc dowód twierdzenia do następującego faktu:

Lemat. Jeśli spójna powierzchnia \mathcal{M} jest pokryta trójkątną siatką, to $V - E + F$ nie przekracza 2.

Aby ten fakt uzasadnić, wprowadzimy narzędzie pomocnicze, w którym odpowiednio doświadczony życiem Czytelnik może rozpoznać homologie symplecjalne o współczynnikach w \mathbb{Z}_2 .

Wprowadźmy zbiory potęgowe (czyli zbiory wszystkich podzbiorów) $2^{\mathcal{V}}, 2^{\mathcal{E}}, 2^{\mathcal{F}}$ i określmy tak zwany *operator brzegu* $\partial_1: 2^{\mathcal{E}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$:

$$\partial_1(X) = \{v \in \mathcal{V} : v \text{ jest końcem nieparzystej wielu krawędzi należących do } X\}.$$

Analogicznie definiujemy drugi operator brzegu $\partial_2: 2^{\mathcal{F}} \rightarrow 2^{\mathcal{E}}$:

$$\partial_2(Y) = \{e \in \mathcal{E} : e \text{ jest krawędzią nieparzystej wielu ścian należących do } Y\}.$$

Nazwa *operator brzegu* bierze się stąd, że $\partial_1(\{e\})$ to dwuelementowy zbiór końców krawędzi e , a $\partial_2(\{f\})$ jest zbiorem trzech boków ściany f .

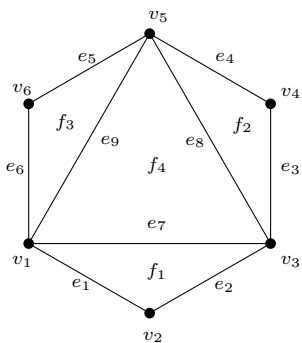
Dla dowodu kluczowa jest pewna własność tych operatorów, którą nazwiemy tutaj *liniowością*. Mianowicie operator $p: 2^A \rightarrow 2^B$ nazwiemy *liniowym*, jeśli

$$p(A_1 \div A_2) = p(A_1) \div p(A_2) \quad \text{dla } A_1, A_2 \subseteq A,$$

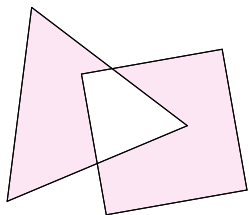
gdzie \div oznacza różnicę symetryczną dwóch zbiorów. Sprawdzenie liniowości operatorów ∂_1 i ∂_2 zostawimy Czytelnikowi jako ćwiczenie (rozwiązanie na stronie 14).

Równość $p(A_1) = p(A_2)$ jest równoważna równości $p(A_1) \div p(A_2) = \emptyset$, co (jeśli p jest liniowy) zachodzi dokładnie wtedy, gdy $p(A_1 \div A_2) = \emptyset$. Stąd wynika, że p przyjmuje każdą swoją wartość tyle samo razy, a mianowicie

Gdyby znać *wszystkie* spójne powierzchnie i dla każdej obliczyć charakterystykę Eulera, otrzymalibyśmy dokładnie liczby $2, 1, 0, -1, -2, \dots$. Taka wiedza nie będzie nam jednak konieczna.



Na powyższym rysunku:
 $\partial_1(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}) = \{v_1, v_6\}$,
 $\partial_2(\{f_1, f_2, f_4\}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_9\}$



Różnica symetryczna trójkąta i kwadratu zaznaczona jest kolorem.

$|p^{-1}(\emptyset)|$ razy. Oznacza to, że zbiór 2^A można podzielić na $|p(2^A)|$ podzbiorów, każdy o liczności $|p^{-1}(\emptyset)|$, co daje nam równość

$$(1) \quad |2^A| = |p(2^A)| \cdot |p^{-1}(\emptyset)|.$$

Ustalmy ścianę f i oznaczmy jej krawędzie oraz wierzchołki jak na rysunku, wówczas $\partial_2(\{f\}) = \{e_1, e_2, e_3\}$. Widzimy teraz, że każdy z wierzchołków v_1, v_2, v_3 należy do dwóch krawędzi z otrzymanego zbioru, natomiast każdy pozostały wierzchołek nie należy do żadnego. Jako że 0 i 2 są liczbami parzystymi, wnioskujemy, że $\partial_1(\partial_2(\{f\}))$ jest zbiorem pustym. Korzystając z liniowości operatorów ∂_1 i ∂_2 (i indukcji względem k), możemy wyprowadzić równość $\partial_1(\partial_2(\{f_1, \dots, f_k\})) = \emptyset$ dla dowolnego podzbioru $\{f_1, \dots, f_k\}$ rodziny \mathcal{F} . Oznacza to, że jeśli \mathcal{E}' jest wartością ∂_2 (czyli jest elementem $\partial_2(2^{\mathcal{F}})$), to $\partial_1(\mathcal{E}') = \emptyset$ (czyli \mathcal{E}' jest elementem $\partial_1^{-1}(\emptyset)$). Zbiór $\partial_2(2^{\mathcal{F}})$ jest więc podzbiorem $\partial_1^{-1}(\emptyset)$, w związku z czym

$$(2) \quad |\partial_2(2^{\mathcal{F}})| \leq |\partial_1^{-1}(\emptyset)|.$$

Wprost z definicji ∂_2 wynika, że $\partial_2(\emptyset) = \emptyset$ oraz $\partial_2(\mathcal{F}) = \emptyset$; sprawdzimy teraz, że istotnie $\partial_2^{-1}(\emptyset) = \{\emptyset, \mathcal{F}\}$. Rozważmy mianowicie podzbiór $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, dla którego $\partial_2(\mathcal{F}') = \emptyset$. Warunek ten oznacza, że jeśli jakaś ściana należy do \mathcal{F}' , to każda ze ścian sąsiadujących również należy do \mathcal{F}' . Ponieważ \mathcal{M} jest powierzchnią spójną, łatwo zauważyć, że wówczas wszystkie ściany muszą należeć do \mathcal{F}' . Pozostawia to dwa możliwe przypadki: $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ oraz $\mathcal{F}' = \emptyset$.

Wykażemy również, że $\partial_1(2^{\mathcal{E}}) = \mathcal{P}$, gdzie \mathcal{P} jest rodziną wszystkich parzystoelementowych podzbiorów \mathcal{V} . Zauważmy najpierw, że $\partial_1(\{e\})$ jest zbiorem dwuelementowym, a więc $\partial_1(\{e\}) \in \mathcal{P}$. Ponieważ różnica symetryczna dwóch zbiorów parzystej mocy również jest parzystej mocy, ogólny warunek $\partial_1(\{e_1, \dots, e_k\}) \in \mathcal{P}$ łatwo otrzymujemy z liniowości ∂_1 przez indukcję ze względu na k . Stąd zawieranie $\partial_1(2^{\mathcal{E}}) \subseteq \mathcal{P}$. Dla dowodu przeciwnego zawierania rozważmy najpierw dowolny dwuelementowy zbiór wierzchołków $\{v_1, v_2\}$. Dzięki spójności \mathcal{M} możemy znaleźć łamaną e_1, \dots, e_k prowadzącą z v_1 do v_k ; wprost z definicji mamy wtedy $\partial_1(\{e_1, \dots, e_k\}) = \{v_1, v_2\}$. Ogólny przypadek ponownie otrzymujemy przez indukcję. Jeśli dla dowolnych v_1, \dots, v_4 umiemy znaleźć podzbiory X, Y spełniające $\partial_1(X) = \{v_1, v_2\}$ i $\partial_1(Y) = \{v_3, v_4\}$, to

$$\partial_1(X \div Y) = \partial_1(X) \div \partial_1(Y) = \{v_1, \dots, v_4\}.$$

Iterując to rozumowanie, otrzymujemy odpowiedni zbiór krawędzi dla każdego parzystoelementowego zbioru wierzchołków.

Z powyższych dwóch akapitów wynika, że

$$(3) \quad |\partial_2^{-1}(\emptyset)| = 2 \quad \text{oraz} \quad |\partial_1(2^{\mathcal{E}})| = |\mathcal{P}| = 2^{V-1}.$$

Wykorzystując równości (1), (2) i (3), otrzymujemy

$$\frac{2^{\mathcal{F}}}{2} = \frac{|2^{\mathcal{F}}|}{|\partial_2^{-1}(\emptyset)|} = |\partial_2(2^{\mathcal{F}})| \leq |\partial_1^{-1}(\emptyset)| = \frac{|2^{\mathcal{E}}|}{|\partial_1(2^{\mathcal{E}})|} = \frac{2^{\mathcal{E}}}{2^{V-1}}.$$

Po zlogarytmowaniu obu stron odczytujemy nierówność $V - E + F \leq 2$, która kończy dowód lematu, przez to również uzasadnienie twierdzenia, w konsekwencji niestety niniejszy artykuł. A wszystko zaczęło się tak niewinnie, od sumy kątów w trójkącie...

Dlaczego $|\mathcal{P}| = 2^{V-1}$? Jeśli ustalimy dowolny wierzchołek $v \in \mathcal{V}$, to

$$X \mapsto X \div v$$

zadaje bijekcję między rodziną \mathcal{P} a dopełnieniem tej rodziny.

Od obserwacji Eddingtona do obrazu czarnej dziury

* Black Hole Initiative,
Harvard University

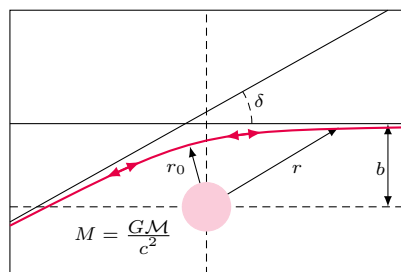
Maciek WIELGUS

W kwietniu 2019 roku mieliśmy okazję zobaczyć pierwszy obraz supermasywnej czarnej dziury w centrum galaktyki M87, zarejestrowany przez Teleskop Horyzontu Zdarzeń (*Event Horizon Telescope*, EHT). Obraz przedstawia niezbyt ostry jasny pierścień, czasem określany jako *cień czarnej dziury*. Szybko zrobił popkulturową karierę, zostając bohaterem licznych memów, ale czy aby wszyscy publikujący jego internetowe przeróbki wiedzą, co tak naprawdę przedstawia? Żeby to wyjaśnić, musimy najpierw cofnąć się w czasie o 100 lat, do początków teorii względności i teorii grawitacyjnego ugięcia promieni światła.

W roku 1915 Albert Einstein sformułował nową teorię grawitacji, ogólną teorię względności (OTW). Zamiast widzieć grawitację jako siłę oddziałującą między masywnymi ciałami zanurzonymi w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, OTW opisuje ją jako krzywiznę czterowymiarowej rozmierności – *czasoprzestrzeni*. Geometria czasoprzestrzeni determinuje tor ruchu fotonów, prowadząc do efektu ugięcia promieni światła w pobliżu masywnych obiektów. W świetle klasycznej newtonowskiej teorii grawitacji fotony, jako cząstki bezmasowe, nie oddziałują grawitacyjnie, a zatem ich trajektorie nie powinny ulegać zakrzywieniu. Jeśli jednak zapomnimy o tym na chwilę i założymy, że fotony poruszają się w polu grawitacyjnym tak jak dowolnie lekkie materialne cząstki, obliczymy kąt ugięcia światła δ . Zignorujemy również fakt, że taki ruch implikowałby, że fotony przyspieszają w polu grawitacyjnym, a więc prędkość światła musiałaby nie być stała. Same problemy!

Problem ruchu dwóch ciał w teorii Newtona zawsze daje rozwiązania będące krzywymi stożkowymi: okręgami, elipsami, parabolami lub hiperbolami.

Żeby wyprowadzić wzór (*), trzeba założyć, że foton osiąga maksymalną prędkość równą c w punkcie najmniejszej odległości r_0 . Alternatywna wersja, z prędkością c osiąganą w nieskończoności, daje taki sam kąt δ_N w pierwszym rzędzie rozwinięcia względem M/r_0 .



Grawitacyjne ugięcie promienia światła o kąt δ pod wpływem obiektu o masie M . Strzałki na trajektorii zaznaczają, że foton może ją przebyć w obydwie strony

Dla małego kąta ugięcia δ masywne fotony poruszałyby się po hiperbolach w newtonowskim polu grawitacyjnym. Przykład takiej trajektorii jest pokazany na rysunku na marginesie. Newtonowski kąt δ_N i odległość r_0 , najmniejsza odległość między fotonem i centrum masy, są związane prostą formułą

$$(*) \quad \delta_N = 2 \arccos \left(\frac{-M}{r_0 - M} \right) - \pi = 2 \frac{M}{r_0} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{M}{r_0} \right)^2 \right).$$

Wprowadziliśmy tu mierzoną w jednostkach odległości masę M , nazywaną też *promieniem masowym*. Jest ona związana ze standardową masą \mathcal{M} przez odpowiednie skalowanie, $M = G\mathcal{M}/c^2$, gdzie G to stała grawitacji, natomiast c to prędkość światła w próżni.

OTW rozwiązuje problem grawitacyjnego ugięcia trajektorii bezmasowego fotonu – to krzywizna czasoprzestrzeni spowodowana obecnością masywnego obiektu wymusza zmianę jego toru ruchu. W teorii względności fotony nie tylko pozostają bezmasowe, ale również zawsze poruszają się ze stałą prędkością c . Einsteinowska formuła na obserwowany kąt δ_E jest trochę bardziej zawiła i zadana przez całkę oznaczoną:

$$\delta_E = 2 \int_0^1 \frac{dq}{\sqrt{(1-q^2) \left(1 - 2 \frac{1-q^2}{1-q^2} \frac{M}{r_0} \right)}} - \pi = 4 \frac{M}{r_0} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{M}{r_0} \right)^2 \right),$$

gdzie $q = r_0/r$, w tym przypadku r_0 jest nie mniejsze od fizycznego promienia Słońca. Porównując te dwa równania, widzimy, że newtonowska formuła przewiduje dla małych wartości M/r_0 dwukrotnie mniejsze ugięcie δ od formuły wynikającej z OTW – świetny test dla teorii względności! Dla Słońca M/r_0 jest nie większe niż około 2×10^{-6} , a zatem spokojnie możemy zaniedbać wyrazy wyższego rzędu. W 1919 roku ugięcie promieni światła odległych gwiazd przez grawitację Słońca zostało zaobserwowane i zmierzone po raz pierwszy podczas wyprawy badawczej pod kierownictwem sławnego brytyjskiego astronoma, Arthura Eddingtona. Wykorzystując całkowite zaćmienie Słońca, aby móc zarejestrować dokładne położenie gwiazd znajdujących się w pobliżu tarczy słonecznej, otrzymał on wynik $\delta = 1,98'' \pm 0,18''$ (sekundy łuku kątownego), który dość dobrze zgadzał się z wartością przewidzianą przez OTW, $\delta_E = 1,75''$. To bardzo niewielkie ugięcie promieni światła (rzędu tysięcznej części średnicy kątownej Księżyca w pełni) było pierwszym zweryfikowanym obserwacyjnie przewidywaniem OTW i wielkim triumfem Einsteina, który przyniósł mu światową sławę.

Promień horyzontu zdarzeń nierotującej czarnej dziury, tak zwany promień Schwarzschilda, jest równy $2M$.

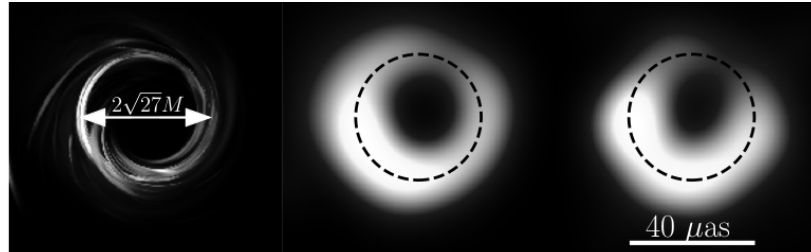
Innym nieoczywistym wnioskiem z teorii grawitacji Einsteina jest istnienie rozwiązań równań OTW, dla których krzywizna czasoprzestrzeni rośnie nieograniczenie, tworząc *osobliwość*. Jest ona otoczona *horyzontem zdarzeń* – sferą, którą można przekroczyć tylko w jednym kierunku. Rozwiązania te nazywamy *czarnymi dziurami*. Nic, nawet światło, przekraczając horyzont czarnej dziury, nie może już nigdy powrócić do zewnętrznego świata. Maksymalny kąt ugięcia promienia światła zależy od zwartości obiektu – obiekty o większej masie względem średnicy pozwalają na większą wartość M/r_0 , a zatem na większe ugięcie δ . Czarne dziury są również pod tym względem bardzo szczególne, zapewniają bowiem maksymalną zwartość, a kąt ugięcia światła przez czarną dziurę może być... nieskończony! Dla wartości $r_0 = 3M$, odpowiadającej *parametrowi zderzenia* $b = \sqrt{27}M$ (patrz schemat na marginesie), wartość δ_E rośnie nieograniczenie,

Sama orbita fotonowa jest niestabilna, więc fotony nie mogą na niej pozostawać zbyt długo.

Promieniowanie synchrotronowe jest generowane przez ładunki elektryczne (w tym przypadku elektrony w zjonizowanym gazie – plazmie) przyspieszające w polu magnetycznym.

co odpowiada wielokrotnemu okrążeniu czarnej dziury przez foton. Jest to tak zwana *orbita fotonowa*. Dla mniejszych b fotony wpadają pod horyzont zdarzeń, dla większych uciekają. Potężny teleskop może uchwycić te, którym udało się uciec, gdzieś daleko od czarnej dziury (54 mln lat świetlnych w przypadku M87).

Z nowo zdobytą wiedzą możemy wrócić do obrazu M87. Poniższy rysunek przedstawia symulację obrazu czarnej dziury. Stworzenie tego rodzaju obrazu wymaga modelowania gorącej (miliardy kelwinów), turbulენტnej plazmy opadającej na czarną dziurę i emitującej *promieniowanie synchrotronowe*.



Z lewej: przykładowa klatka symulacji M87, zaznaczona średnica odpowiadająca $D = 2b = 2\sqrt{27}M$ (autorzy: Wong, Prather i Gammie). W środku: ta sama klatka rozmyta do rozdzielczości EHT, zaznaczony okrąg o promieniu $b = \sqrt{27}M$. Z prawej: jeden z obrazów M87 uzyskany przez EHT z zaznaczonym wymiarem kątowym

Ścisłej, $\sqrt{27}M$ to wartość dla nierotującej czarnej dziury. Wraz z rotacją i kątem obserwacji kontur staje się nieco mniejszy i potencjalnie asymetryczny. Te efekty są jednak niewielkie wobec ograniczonej rozdzielczości EHT i niedokładności wyznaczonej odległości do M87.

Symulacje przewidują, że 10–15% całkowitej jasności pierścienia wokół czarnej dziury pochodzi z jego ostrego wewnętrznego brzegu.

Pomiar promienia pierścienia czarnej dziury w symulacjach zazwyczaj daje wynik systematycznie większy o kilka procent od $\sqrt{27}M$, co jest związane z wpływem turbulენტnej składowej obrazu.

Następnie trajektorie emitowanych fotonów trafiających do odległego obserwatora muszą być obliczone zgodnie z OTW, uwzględniając absorpcję i rozproszenie przez plazmę, i dopiero wtedy możemy z nich poskładać obraz taki jak na pierwszym panelu rysunku. Widzimy na nim pierścien o ciemnym wnętrzu – to sygnatura horyzontu zdarzeń, z którego wnętrza żaden foton nie może być wyemitowany. Ostry kontur pierścienia to fotony, które zbliżyły się do orbity fotonowej, a ich trajektorie zostały ugięte do wspomnianej krytycznej wartości parametru zderzenia $b = \sqrt{27}M$, dając związek pomiędzy rozmiarem kątowym obrazu i masą czarnej dziury (po uwzględnieniu odległości między obserwatorem a źródłem, pozwalającej na konwersję między wymiarem liniowym i kątowym). Ale widzimy również dość chaotyczną spiralną strukturę dookoła ostrego konturu – to fotony emitowane przez dynamiczną, turbulენტną plazmę wirującą wokół czarnej dziury. Fotony takie są emitowane blisko horyzontu zdarzeń, ale nie muszą być powiązane z orbitą fotonową. Niestety Teleskop Horyzontu Zdarzeń, chociaż chwali się największą rozdzielczością w historii naziemnych obserwacji astronomicznych, nie pozwala aktualnie na rozróżnienie tej subtelnej, złożonej struktury. Jeśli rozmyjemy symulowany obraz do efektywnej rozdzielczości EHT (ok. $20 \mu\text{as}$ – mikrosekund łuku kąowego, wystarczająco, by pozostając w Warszawie, poczytać *New York Timesa* leżącego na półce w nowojorskim sklepie z gazetami), otrzymamy obraz na środkowym panelu. Nareszcie przypomina to rezultat EHT! Wykorzystując duży zbiór tego rodzaju symulacji, pomiar masy czarnej dziury w M87 został odpowiednio skalibrowany, dając ostateczny wynik – ponad 6 miliardów mas Słońca.

Pozostaje wyjaśnić, skąd bierze się asymetria pierścienia. Otóż jest to dobrze znana konsekwencja relatywistycznego efektu Dopplera. Rozgrzany gaz wiruje wokół czarnej dziury z ogromną prędkością, porównywalną z prędkością światła. Promieniowanie emitowane przez plazmę poruszającą się chwilowo w kierunku obserwatora jest wzmocnione, nieco podobnie jak dźwięk sygnału zbliżającego się do nas pociągu uzyskuje wyższą częstotliwość, a więc i wyższą energię.

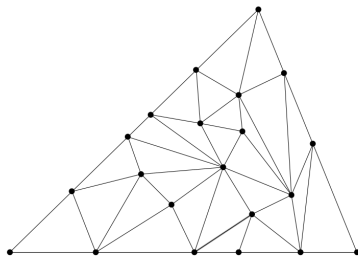
Równo 100 lat po obserwacji Eddingtona, mierzącego pojedyncze sekundy łuku odchylenia promieni światła, EHT pokazał obrazy, na których ugięcie jest setki tysięcy razy większe i powodowane przez obiekt miliardy razy bardziej masywny od Słońca. Wygląda jednak na to, że obydwa przypadki są bardzo dobrze opisane przez jedną i tę samą teorię, ogólną teorię względności, wciąż niezawodną po stuleciu obserwacyjnych i eksperymentalnych testów. Przyszłe usprawnienia EHT, w szczególności obserwacje w zakresie fal radiowych wyższej częstotliwości, mogą pozwolić na oddzielenie turbulენტnej składowej emisji od prostego, geometrycznego komponentu przewidzianego przez OTW, umożliwiając jeszcze dokładniejsze badania własności czarnych dziur, czasoprzestrzeni i poprawności teorii względności.



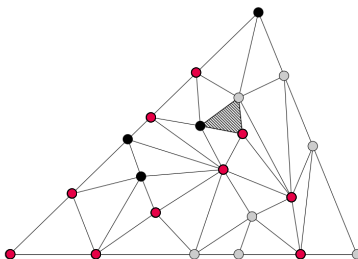
Lemat Spernera, czyli co wspólnego mają trójkąty i sprawiedliwy podział

Jakub SZULC*

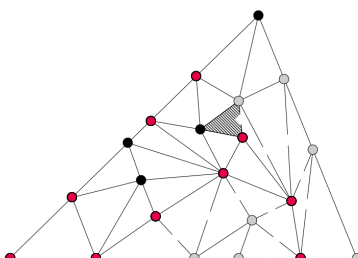
*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Triangulacja trójkąta



Rys. 2



Rys. 3

Poprzez *triangulację* będziemy rozumieć podział figury na trójkąty (rys. 1). W dalszej części artykułu będziemy zajmować się kolorowaniem wierzchołków triangulacji pewnego trójkąta. Wyjściowy trójkąt będziemy nazywali *dużym*, natomiast „jednostkowe” trójkąty triangulacji będziemy nazywać *małymi*. Kluczowym elementem tych rozważań będzie następujący lemat:

Lemat (Sperner). *Weźmy dowolną triangulację trójkąta i pokolorujmy każdy wierzchołek na czarno, szaro lub pomarańczowo, zachowując dwa warunki:*

- *duży trójkąt jest różnokolorowy (to znaczy, że jego wierzchołki są pokolorowane parami różnymi kolorami),*
- *na żadnym boku dużego trójkąta nie mogą występować wszystkie trzy kolory.*

Wtedy istnieje różnokolorowy mały trójkąt (rys. 2).

Dowód. Załóżmy, że nie ma takiego małego trójkąta. Poprzez *drzwi* będziemy rozumieli każdą krawędź między pomarańczowym a szarym wierzchołkiem (na rysunku 3 oznaczone przerwany odcinkiem). W dalszej części dowodu będziemy myśleli o małych trójkątach jako o pokojach, między którymi będziemy chodzić. Zauważmy, że wszystkie drzwi na bokach dużego trójkąta mogą być tylko na jednym boku (powiedzmy, że jest to „dolny” bok, tak jak na rys. 3). Co więcej, na tym boku jest ich nieparzysta wiele.

Sprawdźmy, ile drzwi może znajdować się w pokojach. Łatwo zauważyć, że żaden pokój nie może mieć dokładnie trojga. Jedne drzwi mógłby mieć tylko w wypadku, gdyby był różnokolorowy (a założyliśmy, że takiego nie ma). Wszystkie pokoje mają zatem albo 0 albo 2 drzwi.

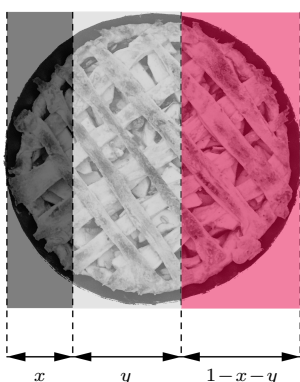
Możemy teraz zacząć chodzić po pokojach. Każdych drzwi będziemy używać co najwyżej raz. Najpierw „wejdziemy” do dużego trójkąta przez któreś z drzwi na jego dolnym boku i będziemy chodzić do momentu, gdy „wyjdziemy” z dużego trójkąta przez jakieś drzwi na jego dolnym boku. Fakt, że każdy pokój ma albo 0, albo 2 drzwi, gwarantuje nam, że z każdego pokoju, do którego wejdziemy, możemy też wyjść, a ponadto nigdy dwukrotnie nie wejdziemy do tego samego pokoju. Całą procedurę powtarzamy, aż wyczerpiemy drzwi na dolnym boku dużego trójkąta. Z drugiej strony oznacza to, że drzwi na tym boku jest parzysta wiele, i otrzymujemy sprzeczność. □

Zauważmy, że jest to tak naprawdę dowód konstrukcyjny i przedstawia on algorytm na znalezienie takiego trójkąta. Chcąc znaleźć różnokolorowy pokój, chodzimy do momentu, aż utknijemy. Zwróćmy również uwagę, że z powyższego dowodu wynika, iż różnokolorowych małych trójkątów jest nieparzysta wiele. Wynika stąd, że lemat Spernera działa dla większej liczby wymiarów i kolorów. Dowód przebiega w podobny sposób przy użyciu indukcji. Fakt, że liczba drzwi na dolnej ścianie sympleksu (czyli wielowymiarowego trójkąta) jest nieparzysta, to w rzeczywistości „poprzednio-wymiarowa” wersja lematu Spernera.

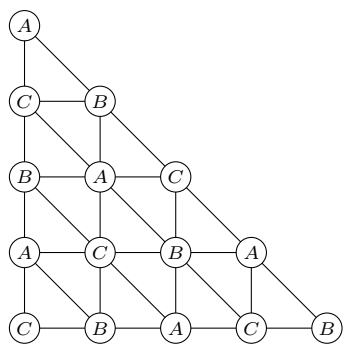
Problem 1. *Aldona, Bogumił i Celina chcą podzielić między siebie ciasto. Jak to zrobić, żeby nikt nikomu nie zazdrościł? Każdy może mieć różne preferencje co do tego, która część ciasta jest najlepsza.*

Rozwiązanie. Ustalmy dowolnie pewien kierunek i załóżmy, że w tym kierunku ciasto ma szerokość 1. Będziemy ciąć prostokątne ciasto prostopadłe do tego kierunku. Możemy wtedy przedstawić każde takie cięcie jako parę (x, y) , gdzie $x + y \leq 1$ i kawałki będą mieć odpowiednio szerokości $x, y, 1 - x - y$. Kawałki nazwiemy odpowiednio czarny, szary i pomarańczowy (rys. 4).

Zbiór wszystkich takich par (x, y) tworzy trójkąt o wierzchołkach $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$. Potnijmy go na bardzo dużo mniejszych trójkątów. Oznaczmy wierzchołki literami

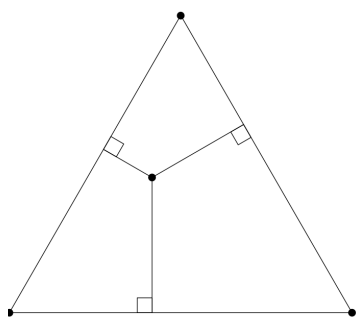


Rys. 4



Rys. 5

Dociekliwy Czytelnik może nie być usatysfakcjonowany podanym rozwiązaniem problemu 1. Znaleźliśmy bardzo dobry podział ciasta, a nie idealny, i ktoś nadal może być delikatnie niezadowolony. Chcąc znaleźć idealny podział ciasta, możemy wziąć coraz lepszych podziałów. Wśród nich, na mocy twierdzenia Bolzano–Weierstrassa, istnieje podciąg zbieżny. Granica tego podciągu wyznacza nam idealny podział ciasta.



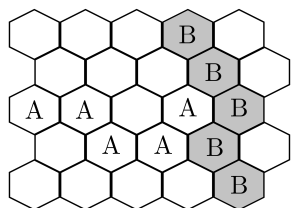
Rys. 6

A, B, C tak, że w każdym małym trójkącie wśród oznaczeń wierzchołków będą wszystkie litery (tak jak na rys. 5). Następnie dla każdego wierzchołka (x, y) pytamy odpowiadającą mu osobę (Aldonę, Bogumiłą lub Celinę), który kawałek by wybrał, gdyby właśnie taki podział ciasta miał miejsce. W ten sposób kolorujemy wierzchołki na czarno, szaro lub pomarańczowo. Łatwo sprawdzić, że ten podział wierzchołków spełnia warunki lematu Spernera. W końcu na krawędziach dużego trójkąta któryś kawałek jest pusty, a nikt nie wybierze pustego kawałka! W szczególności w wierzchołkach dużego trójkąta niepusty będzie tylko jeden kawałek, w każdym inny. Zatem istnieje różnokolorowy mały trójkąt. Oznacza to, że istnieją trzy bardzo podobne podziały ciasta, w których każdy woli inny kawałek. Możemy więc wziąć np. średnią z nich (środek ciężkości małego trójkąta) i podzielić kawałki zgodnie z preferencjami. Mogliśmy wziąć dowolnie drobną triangulację, więc różnice między kawałkami będą minimalne. \square

Problem 2. *Aldona, Bogumił i Celina chcą razem wynająć trzypokojowe mieszkanie. Czynsz za całe mieszkanie wynosi 3000 złotych. Jak podzielić między nich pokoje i czynsz tak, żeby nikt nikomu nie zazdrościł?*

Rozwiązanie. Skorzystamy ze znanej własności trójkąta równobocznego, takiej że dla każdego punktu wewnątrz tego trójkąta suma $x + y + z$ jest stała (rys. 6). Weźmy zatem „regularną” triangulację (rys. 6) i powiedzmy, że dla każdego punktu (x, y, z) zachodzi $x + y + z = 6000$. Dalej postępujemy analogicznie do poprzedniego zadania: oznaczmy wierzchołki literami A, B, C podobnie jak na rysunku 5, tylko że dla trójkąta równobocznego. Następnie dla każdego wierzchołka (x, y, z) pytamy odpowiadającą mu osobę, który pokój by wybrała, gdyby ceny czarnego, szarego i pomarańczowego pokoju wynosiły odpowiednio $(3000 - x)$, $(3000 - y)$ i $(3000 - z)$ złotych (dopuszczamy „ujemne ceny”, tzn. dopłacanie lokatorowi za mieszkanie w danym pokoju). Zauważmy, że istotnie te ceny sumują się do całego czynszu, czyli 3000 złotych. W ten sposób kolorujemy wszystkie wierzchołki. Zakładamy przy tym, że nikt nie weźmie pokoju za 3000 złotych (nikt nie chce płacić sam czynszu za całe mieszkanie). Łatwo sprawdzić, że wtedy to kolorowanie spełnia warunki lematu Spernera. Istnieje zatem mały różnokolorowy trójkąt, a więc trzy bardzo podobne podziały czynszu, w których każdy woli inny pokój. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, możemy wziąć np. średnią z tych trzech podziałów czynszu i rozdzielić pokoje zgodnie z preferencjami. Mogliśmy wziąć dowolnie drobną triangulację (podzielić na dowolnie dużo małych trójkątów), więc różnice w zadowoleniu lokatorów będą minimalne. \square

Problem 3. *Aldona i Bogumił grają w Hex. Jest to gra polegająca na naprzemiennym oznaczaniu sześciokątnych pól na „kwadratowej” (tyle samo sześciokątów w pionie i w poziomie) planszy. Celem Aldony jest utworzenie ścieżki od lewej do prawej krawędzi, a celem Bogumiła – od górnej do dolnej (np. na rys. 7 wygrywa Bogumił). Aldona zaczyna. Czy może zapewnić sobie zwycięstwo?*



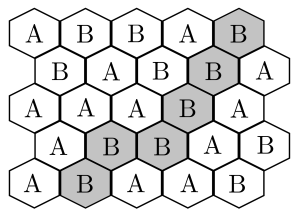
Rys. 7

Rozwiązanie. Udowodnimy, że istnieje strategia wygrywająca dla Aldony. Najpierw zauważmy, że na mocy twierdzenia Zermelo zachodzi dokładnie jedno z poniższych:

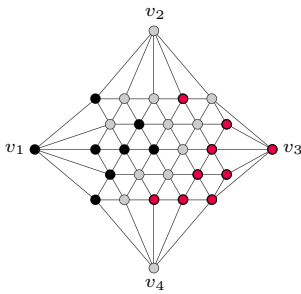
1. Aldona ma strategię wygrywającą.
2. Bogumił ma strategię wygrywającą.
3. Oboje mają strategię remisującą.

Udowodnimy, że niemożliwy jest przypadek 2. Załóżmy, że Bogumił miałby strategię wygrywającą. Wtedy Aldona mogłaby zacząć grę, oznaczając dowolne pole (co nie może jej w żaden sposób zaszkodzić) i następnie podążać za strategią Bogumiła. Wygrałaby wtedy Aldona, i otrzymujemy sprzeczność (ten pomysł nazywa się „złodziejem strategii”, możecie o tym poczytać więcej w Δ_{17}^5).

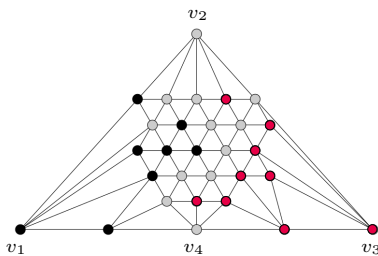
Wystarczy zatem udowodnić, że niemożliwy jest remis. Załóżmy, że każde pole na planszy należy do kogoś, ale nikt nie wygrał (rys. 8). Poprzez wierzchołki będziemy rozumieli pola planszy oraz cztery sztucznie dodane wierzchołki reprezentujące każdą stronę planszy. Oznaczmy „sztuczne” wierzchołki przez v_1, v_2, v_3, v_4 . Powiemy, że v_1 i v_3 należą do Aldony, a v_2 i v_4 do Bogumiła.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Pokolorujemy każdy wierzchołek v według następującej zasady (rys. 9):

- na czarno, jeśli v należy do Aldony i istnieje ścieżka od v_1 do v należąca całkowicie do Aldony,
- na szaro, jeśli v należy do Bogumiła i istnieje ścieżka od v_2 do v należąca całkowicie do Bogumiła,
- na pomarańczowo w przeciwnym wypadku.

Wydawałoby się, że nie da się tu użyć lematu Spernera (w końcu graf na rysunku 9 w żadnym stopniu nie przypomina trójkąta). Nie jest to jednak problem, bo możemy go zdeformować, aby uzyskać trójkąt, co widać na rysunku 10. Sprawdźmy, czy powstała triangulacja spełnia warunki lematu Spernera:

- v_1 , v_2 i v_3 są wierzchołkami powstałego dużego trójkąta i są odpowiednio czarne, szare i pomarańczowe (gdyby v_3 było czarne, to istniałaby ścieżka od v_1 do v_3 należąca do Aldony – sprzeczność z założeniem o remisie).
- Na lewym boku dużego trójkąta znajdują się v_1 i v_2 , które są odpowiednio czarne i szare. Jest też lewy górny róg planszy. Jest on połączony z v_1 i v_2 , zatem jeśli należy do Aldony, to jest czarny, a jeśli należy do Bogumiła, to jest szary. Nie ma więc koloru pomarańczowego.
- Na prawym boku dużego trójkąta znajdują się v_2 i v_3 , które są odpowiednio szare i pomarańczowe. Jest też prawy górny róg planszy. Gdyby był czarny, to istniałaby ścieżka od v_1 do v_3 w całości należąca do Aldony – sprzeczność. Nie ma więc koloru czarnego.
- Na dolnym boku dużego trójkąta znajdują się: v_1 , v_3 , v_4 oraz rogi planszy. Wierzchołek v_1 jest czarny, a v_3 pomarańczowy. Gdyby v_4 lub któryś z rogów planszy był szary, to istniałaby ścieżka od v_2 do dolnej krawędzi planszy należąca tylko do Bogumiła – sprzeczność. Nie ma więc koloru szarego.

Widzimy zatem, że ta triangulacja spełnia warunki lematu i istnieje różnokolorowy mały trójkąt. Oznaczmy przez a, b, c jego wierzchołki, które są odpowiednio czarne, szare i pomarańczowe. Jeśli c należy do Aldony, to ponieważ istnieje ścieżka od v_1 do a należąca do Aldony, to istnieje także ścieżka od v_1 do c należąca do Aldony. Zatem c powinno być czarne – sprzeczność. Podobnie sprzeczność uzyskujemy, gdy c należy do Bogumiła, co kończy dowód. \square

Pół szklanki mocnego kodu

Ghost speaker

Piotr KRZYŻANOWSKI*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Jest wiele sposobów zrobienia wrażenia na ludziach, ale jednym z najbardziej popularnych jest wciąż

wyłoszenie przemówienia.

W życiu każdego mówcy może przyjść taki moment, gdy wcześniej przygotowaną płomienną przemowę chciałoby się przedłużyć, by jeszcze wyżej wznieść się na emocjach entuzjastycznego tłumu, doskonale rezonującego z głosem z megafonów... Łatwo tu jednak wpaść w pułapkę, bo przecież nie można zbyt długo mówić samych mądrych, samych porywających, samych głęboko przemyślanych zdań. Trzeba więc mieć w zanadrzu pewną „watę słowną”, którą w razie konieczności można by *nadmuchać* długość przemówienia.

Oczywiście problem nie jest nowy – i jest od dawna rozwiązany, zresztą na kilka sposobów. Na przykład na stronie textinflator.com możemy skorzystać z automatu, który *rozwadnia* podany tekst – nawet dwukrotnie zwiększając jego objętość! Niestety w trakcie wydarzenia na żywo nie da się z niego skorzystać, bo przecież to, co mieliśmy przeczytać z kartki, już przeczytaliśmy...

W takim przypadku lepiej sprawdzi się rozwiązanie polegające na wykorzystaniu *mowy-trawy*, czyli spreparowaniu tekstu składającego się z okrągłych zdań, zawierających pewne rytualne, oklepne teksty – przez co przemowa będzie udawać, że niesie w sobie jakąś sensowną treść. Między innymi w latach osiemdziesiątych XX wieku tygodnik „Polityka” opublikował żartobliwą tabelkę – *uniwersalną ściągaczkę zebraniową* – wystarczającą na „czterdziestogodzinne przemówienie”, tworzone na żywo przez przypadkowe złączenie fraz-wytrychów ówczesnej nowomowy. Przytaczamy ją w całości poniżej, łącznie z instrukcją użycia: *Dowolną frazę z kolumny 1. należy kolejno połączyć z dowolnymi frazami z kolumn 2., 3. i 4.*

Jak działa Textinflator? Na przykład wstawia do tekstu niewiele znaczące ozdobniki, zastępuje krótkie wyrazy długimi itp.

| | | | |
|---|--|---|--|
| Koleżanki i koledzy | realizacja nakreślonych zadań programowych | zmusza nas do przeanalizowania | istniejących warunków administracyjno-finansowych. |
| Z drugiej strony | zakres i miejsce szkolenia kadr | spełnia istotną rolę w kształtowaniu | dalszych kierunków rozwoju. |
| Podobnie | stały wzrost ilości i zakres naszej aktywności | wymaga sprecyzowania i określenia | systemu powszechnego uczestnictwa. |
| Nie zapominajmy jednak, że | aktualna struktura organizacji | pomaga w przygotowaniu i realizacji | postaw uczestników wobec zadań stawianych przez organizację. |
| W ten oto sposób | nowy model działalności organizacyjnej | zabezpiecza udział szerokiej grupie w kształtowaniu | nowych propozycji. |
| Praktyka dnia codziennego dowodzi, że | dalszy rozwój różnych form działalności | spełnia ważne zadania w wypracowaniu | kierunków postępowego wychowania. |
| Wagi i znaczenia tych problemów nie trzeba szerzej uzasadniać, ponieważ | stałe zabezpieczenie informacyjno-programowe naszej działalności | umożliwia w większym stopniu tworzenie | systemu szkolenia kadry odpowiadającego potrzebom. |
| Różnorodnie i bogate doświadczenia | wzmacnianie i rozwijanie struktur | powoduje docenianie wagi | odpowiednich warunków aktywizacji. |
| Troska organizacji, a szczególnie | konsultacja z szerokim aktywem | przedstawia interesującą próbę sprawdzenia | modelu rozwoju. |
| Wyższe założenia ideowe, a także | rozpoczęcie powszechnej akcji kształtowania postaw | pociąga za sobą proces wdrażania i unowocześniania | form oddziaływania. |

Dziś te frazesy nieco trąca myszką, choć wciąż zaskakująco dobrze się je czyta... Oczywiście *teraz* – z pomocą komputera – możemy bez najmniejszego trudu wygenerować nieskończenie długi tekst oparty na tej czy innej podobnej tabelce (w Internecie jest tego trochę):

```
from random import choice

przemowa = [ ['koleżanki_i~koledzy_', 'z_drugiej_strony_', ...itd...],
              ['realizacja_zadań', 'zakres_szkolenia_kadr', ...itd...], ...itp... ]
while True:
    for frazy in przemowa:
        print choice(frazy),
    print
```



Równie łatwo możemy tak wyprodukowane przemówienie automatycznie *przeczytać*, wykorzystując komputerową syntezę mowy – a potem godzinami wsłuchiwać się w coraz bardziej usypiające zdania: w kółko *o tym samym*, a przecież *nie te same*:

```
1 from gtts import gTTS
2 import pygame
3 from random import choice
4
5 pygame.init()
6 pygame.mixer.init()
7
8 while True:
9     for frazy in przemowa:
10        fraza = choice(frazy)
11        print fraza,
12        gTTS(fraza, lang='pl').save('fraza.mp3')
13        pygame.mixer.music.load('fraza.mp3')
14        pygame.mixer.music.play()
15        while pygame.mixer.music.get_busy():
16            continue
17    print
```

Moduł gTTS (*Google Text-to-Speech*) generuje z pomocą internetowego serwisu Google Translate (tak właśnie!) plik mp3 zawierający odczytaną kobiecym głosem frazę.

Zobacz też cloud.google.com/translate/docs/reference/libraries.

(Nie syntezujemy całego zdania, tylko pojedyncze fragmenty, ze względu na ograniczenie serwisu do tekstów o maksymalnej długości 100 znaków.) Odtworzenie pliku mp3 powierzamy sympatycznej bibliotece pygame. Co prawda ostateczny efekt dźwiękowy działania naszego

skryptu jest daleki od tego, który uzyskalibyśmy, zapraszając do współpracy, powiedzmy, panią Krystynę Czubównę – ale łatwo go ulepszyć, nagrywając własne, pełne pasji interpretacje fraz.

A więc, złotouści, do dzieła! Zróbcie maszynkę opowiadającą młodszemu rodzeństwu *nieskończoną bajkę* na dobranoc! (I w razie sukcesu zapewne także na dzień dobry?) Najzabawniejsze tabelki/kody opublikujemy na stronie internetowej *Delty*, deltami.edu.pl.

Problem więźniów – o pewnych własnościach losowych permutacji

Joanna JASIŃSKA*

* Studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania F 996.

W zewnętrznym zjawisku fotoelektrycznym energia padających kwantów światła hc/λ i maksymalna energia kinetyczna elektronów wybijanych z katody E_k spełniają związek:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_k + W.$$

Przyłożenie do elektrod fotokomórki napięcia U_h , do którego pokonania nie wystarczy maksymalna energia kinetyczna uzyskiwana przez elektrony, całkowicie wygasza prąd przez fotokomórkę. Mamy więc:

$$eU_h = \frac{hc}{\lambda} - W, \quad \text{czyli} \quad U_h = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{W}{e}.$$

Jeśli napięcie przyspieszające elektrony w kierunku anody jest wystarczająco duże, to wszystkie elektrony wybite z katody docierają do anody i wtedy przez fotokomórkę płynie prąd nasycenia (dalsze zwiększanie napięcia nie zwiększa prądu). Odpowiada to sytuacji, kiedy każdy padający foton wybija jeden elektron, który dociera do anody. Prąd nasycenia wynosi więc:

$$I_n = \frac{eS\lambda}{hc}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy (odpowiednio dla λ_1 i λ_2):

$$U_{h1} = 0,53 \text{ V}, \quad U_{h2} = 2,2 \text{ V}$$

oraz

$$I_{n1} = 0,40 \text{ A}, \quad I_{n2} = 0,24 \text{ A}.$$

Cyklem długości k w permutacji σ nazywamy ciąg elementów a_1, \dots, a_k takich, że $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ dla $i < k$ oraz $\sigma(a_k) = a_1$.

W pewnym zakładzie karnym przebywa stu skazanych, ponumerowanych liczbami od 1 do 100: B_1, B_2, \dots, B_{100} . Strażnik zaproponował im następującą grę: sto kartek z ich numerami umieszcza w stu skrytkach, po jednej kartce w każdej skrytce. Sposób rozmieszczenia kartek nie jest znany więźniom. Następnie strażnik pozwala każdemu z więźniów sprawdzić dokładnie połowę skrytek. Sprawdzający wchodzi do pokoju ze skrytkami sam, a po swojej turze musi zostawić pokój w stanie nienaruszonym i jedynie poinformować nadzorcę, czy odnalazł swój numer, czy też nie. Nie komunikuje się później z pozostałymi więźniami. Osadzeni wygrywają wyjście na wolność wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z nich zdoła odnaleźć swój numer. Jaka jest szansa na to, że im się to uda? Na pierwszy rzut oka więźniowie są w dramatycznej sytuacji. Każdy z nich ma szansę 50% na odnalezienie numeru w swojej turze, więc wydawać by się mogło, że szansa na sukces wszystkich wynosi $(0,5)^{100}$, czyli przeraźliwie mało. Okazuje się, że ta intuicja jest błędna. Opowiem o strategii pozwalającej na zmaksymalizowanie prawdopodobieństwa wygranej w opisaną grę – dzięki niej szansa więźniów na uzyskanie wolności wynosi... ponad 30%!

Wspomniana strategia jest następująca: więzień B_i swoją turę rozpoczyna od sprawdzenia i -tej szafki. Jeśli nie znajdzie tam swojego numeru, tj. znajdzie numer $k \neq i$, to sprawdza k -tą szafkę. Postępuje w ten sposób aż do momentu sukcesu lub wyczerpania się puli szafek możliwych do sprawdzenia. Dla przykładu, ograniczmy się do przypadku 10 więźniów, żeby z łatwością prześledzić przebieg rozgrywki. Załóżmy, że w szafkach znajdują się kolejno numery: 3, 2, 8, 5, 9, 4, 6, 10, 7, 1. Rozgrywka więźnia B_1 krok po kroku przedstawia się następująco:

Sprawdza szafkę 1. → Znajduje w niej 3 → Sprawdza szafkę 3. → Znajduje w niej 8 → Sprawdza szafkę 8. → Znajduje w niej 10 → Sprawdza szafkę 10. → Znajduje w niej 1 → Zwycięsko kończy swoją turę.

Zauważmy, że w momencie znalezienia swojego numeru (czyli po czterech sprawdzeniach) więzień B_1 już wie, że więźniowie B_3, B_8, B_{10} będą sprawdzać dokładnie te same szafki co on, w pewnym cyklicznym przesunięciu, i każdy z nich odniesie sukces w czwartym kroku. Sukcesy więźniów nie są zatem, przy zastosowaniu tej strategii, zdarzeniami niezależnymi, a więc – chociaż wciąż każdy z nich ma szansę 50% na znalezienie swojego numerka – szansa na sukces wszystkich więźniów nie musi być tak mała, jak podpowiadała opisana na wstępie intuicja. A ile ta szansa wynosi dokładnie? Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy odrobinę sformalizować naszą grę.

Gdy spojrzymy na tę zagadkę jak na problem matematyczny, rozmieszczanie przez strażnika numerów więźniów w szafkach ponumerowanych od 1 do 100 odpowiada losowaniu przez niego pewnej permutacji σ zbioru $\{1, \dots, 100\}$. Zgodnie z opisaną strategią i -ty więzień rozpocznie od sprawdzenia i -tej szafki, w której znajdzie numerka $\sigma(i)$. Jeśli $\sigma(i) \neq i$, to więzień kontynuuje i otwiera szafkę o numerze $\sigma(i)$, w której znajduje $\sigma(\sigma(i)) =: \sigma^2(i)$. O ile wcześniej nie znalazł swojego numerka, w k -tym podejściu otworzy szafkę $\sigma^{k-1}(i)$ i znajdzie tam numer $\sigma^k(i)$. W tej sytuacji i -ty więzień odnajdzie swój numer, jeśli liczba i jest elementem cyklu długości nie większej niż 50. Zatem sukces więźniów jest równoważny temu, że w permutacji σ nie ma cyklu długości większej niż 50. Szansa na ich porażkę to zatem szansa na wystąpienie takiego cyklu w losowej permutacji liczb $1, 2, \dots, 100$.

Obliczanie prawdopodobieństwa przegranej przy opisaną strategii sprowadza się więc do znalezienia liczby permutacji zbioru 100-elementowego, które mają cykl długości 51 lub dłuższy. W ogólności sprawę wyjaśnia następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Liczba permutacji zbioru n -elementowego, które zawierają cykl długości $k > \frac{n}{2}$, wynosi $\frac{n!}{k}$.

**Rozwiązanie zadania M 1630.**

Załóżmy, że liczby $x < y$ spełniają $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Równanie to można sprowadzić do postaci

$$(2x - p)(2y - p) = p^2.$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, wynika stąd, że $2x - p = p$ lub $2x - p = 1$. Pierwsza z tych możliwości oznaczałaby, że $x = p = y$, co przeczy zależności $x < y$. Musi być zatem $x = \frac{p+1}{2}$, skąd

$y = \frac{p(p+1)}{2}$; ponieważ $p > 2$, liczby te są całkowite i faktycznie spełniają wymaganą równość.

Dowód. Zwróćmy uwagę, że permutacja może mieć co najwyżej jeden cykl długości większej niż $\frac{n}{2}$. Wybieramy na $\binom{n}{k}$ sposobów, które k elementy mają wejść w skład cyklu k -elementowego. Ustawiamy je na $k!$ sposobów. Cykl nie zmienia się przy przesunięciach – możliwych przesunąć w prawo reprezentacji cyklu jako (a_1, \dots, a_k) jest dokładnie k . Liczba możliwych istotnie różnych ustawień wybranych k elementów to zatem $\frac{k!}{k} = (k-1)!$. Pozostałe $n - k$ elementy permutujemy na $(n - k)!$ sposobów. Liczba permutacji zbioru n -elementowego, które w swoim rozkładzie zawierają cykl długości $k > \frac{n}{2}$, to w takim razie: $\binom{n}{k} \cdot (k-1)! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k}$. □

Zgodnie z powyższym twierdzeniem dla $k = 51, 52, \dots, 100$ cykle długości k stanowią $\frac{1}{k}$ wszystkich permutacji. Prawdopodobieństwo otrzymania permutacji posiadającej cykl długości 51 lub dłuższy jest wobec tego równe:

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{51} \approx 0,688.$$

Szansa więźniów na wygraną wynosi więc w przybliżeniu $1 - 0,688 = 0,312$, czyli w ponad 30% przypadków więźniowie wyjdą na wolność.

Dygresja dla Czytelników-Analityków. Nasuwa się pytanie, czy istnieje dodatnie ograniczenie dolne szansy na wygraną, niezależnie od liczby więźniów. Odpowiedź na nie jest twierdząca. Rozważmy sytuację, w której jest $2n$ więźniów. Skazani wygrywają, gdy permutacja zbioru $A = \{1, \dots, 2n\}$, czyli ułożenie w szafkach ich numerów, nie będzie zawierała cyklu długości większej lub równej $n + 1$. Prawdopodobieństwo wystąpienia takiego cyklu wynosi

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Z łatwością można zauważyć, że jest to górna suma riemannowska dla całki $\int_n^{2n} \frac{1}{x+1} dx$ i dolna suma riemannowska dla całki $\int_n^{2n} \frac{1}{x} dx$. Obliczając każdą z tych całek, otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = \int_n^{2n} \frac{1}{x+1} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \ln 2.$$

Przechodząc z n do nieskończoności i korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, obliczamy granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$. Co więcej, ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ jest rosnący, co Wnikliwy Czytelnik zechce samodzielnie wykazać, uzasadniając, że dla każdego $b_{n+1} - b_n > 0$. W takim razie ciąg $(1 - b_n)_{n=1}^{\infty}$ maleje do granicy, jaką jest

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 - \ln 2 \approx 0,307.$$

Na podstawie tych rachunków wiemy, że niezależnie od tego, ilu skazanych podjęło się gry, ich szanse na zwycięstwo przy opisanej strategii nie będą mniejsze niż 30%.

Pozostaje uzasadnić, dlaczego jest to najlepsza możliwa strategia. Nie jest zaskakujące, że dowód optymalności będzie bardziej skomplikowany, jest jednak wielce pouczający! Dla uproszczenia będziemy znów rozważać przypadek z dziesięcioma więźniami, $n = 10$. Rozważmy subtelną zmianę reguł gry: tym razem każdy z więźniów musi otwierać szafki do momentu, w którym znajdzie swój numer. Nie ma ograniczeń co do liczby sprawdzeń, jednak więźniowie przegrywają, gdy na końcu okaże się, że któryś z nich otworzył ponad połowę szafek. Taka zmiana nie wpływa na prawdopodobieństwo zwycięstwa w rozważanej przez nas grze, którą dalej będziemy nazywać **grą A**.

Opiszemy teraz zasady nieco innej gry, nazywanej przez nas dalej **grą B**. Tym razem strażnik zaprasza wszystkich więźniów jednocześnie do pokoju z szafkami, tak że mogą oni obserwować przebieg rozgrywki. Założmy, że rozmieścił on numery w kolejności: 2, 5, 10, 3, 9, 4, 6, 8, 1, 7. Więzień B_1 rozpoczyna sprawdzanie. Szuka do momentu, w którym znajdzie swój numer, przy czym nie zamyka już otwartych szafek. Inni gracze widzą, jakie numery zostały już znalezione. Ponadto jeśli B_1 odnajdzie (postępując według jakiejś swojej strategii) kolejno numery 4, 7, 2, 1, to B_4 , B_7 i B_2 już nie startują w grze, ich numery zostały odnalezione. Kolejnym sprawdzającym będzie teraz więzień o najmniejszym numerze, który nie został znaleziony w poprzedniej turze, czyli B_3 . Odnajduje on numery 9, 5, 10, 6, 3. Pozostały gracz B_8 w jednym kroku odnajduje swój numer. Na końcu sprawdzamy, czy któryś z graczy otworzył więcej niż 5 szafek. Tym razem więźniom udało się wygrać.

Jest jasne, że gra B jest dla więźniów korzystniejsza niż gra A . Oznacza to w szczególności, że najlepsza możliwa strategia w grze A daje nie większą szansę na sukces niż najlepsza możliwa strategia w grze B . Pokażemy, że każda strategia

**Rozwiązanie zadania M 1632.**

Niech $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x|$. Ponieważ $0 \leq x_i \leq 1$, więc

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - x_i) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \\ &= 1 - f(0). \end{aligned}$$

W tej sytuacji $f(0) \leq \frac{1}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(1) \geq \frac{1}{2}$. Teza wynika zatem z ciągłości funkcji f i własności Darboux funkcji ciągłych.

Rozwiązanie ćwiczenia z artykułu

O trójkątach (nie tylko) na sferze:

Pokażemy liniowość ∂_1 , ale uzasadnienie dla ∂_2 przebiega analogicznie. Ustalmy dwa podzbiory krawędzi $X, Y \subseteq \mathcal{E}$ oraz wierzchołek $v \in V$. Jeśli na chwilę ograniczymy się jedynie do krawędzi kończących się w v , to liczba krawędzi z $X \div Y$ ma tę samą parzystość co suma liczby krawędzi z X i liczby krawędzi z Y . Aby ta ostatnia suma była nieparzysta, dokładnie jeden ze składników musi być nieparzysty, a drugi parzysty. Innymi słowy, $v \in \partial_1(X \div Y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy v należy do dokładnie jednego ze zbiorów $\partial_1(X)$ i $\partial_1(Y)$. W języku różnicy symetrycznej oznacza to dokładnie równość $\partial_1(X \div Y) = \partial_1(X) \div \partial_1(Y)$.

Dlaczego dla $k > 5$ mamy $\frac{10!}{k}$ permutacji z blokiem długości k ? Taki blok może być co najwyżej jeden. Najpierw na $\binom{10}{k}$ sposobów wybieramy k elementów, które mają być częścią bloku. Najmniejszy z nich m musi znaleźć się na końcu, a pozostałe możemy ustawić na $(k-1)!$ sposobów. Elementy spoza bloku możemy ustawić na $(10-k)!$ sposobów i dla każdego z nich w dokładnie jednym miejscu możemy ustawić wyróżniony blok, tzn. tuż po tym, jak pojawią się wszystkie elementy od 1 do $m-1$.



Rozwiązanie zadania F 995.

Długość fali de Broglie'a cząstki spełnia równość $\lambda = h/p$, gdzie p jest pędem cząstki. Energie kinetyczne elektronów w rozważanych procesach są małe w porównaniu z energią spoczynkową elektronu ($m_e c^2 \approx 511 \text{ keV}$), możemy więc użyć klasycznego związku pędu i energii kinetycznej cząstki. Energia kinetyczna uzyskana przez elektron przyspieszany napięciem U wynosi:

$$eU = \frac{p^2}{2m_e}.$$

Po podstawieniu $p = h/\lambda$ otrzymujemy:

$$U = \frac{h^2}{2e\lambda^2 m_e} \approx 540 \text{ V},$$

czyli napięcie uzyskiwane przez połączenie szeregowo 60 baterijek 9 V.

w grze B daje prawdopodobieństwo sukcesu takie, jak opisana wcześniej strategia dla gry A , co będzie dowodzić optymalności tej ostatniej.

Powróćmy do rozważanego wcześniej przykładu rozgrywki w grę B . Powiedzmy, że każdy z wykonujących ruchy graczy zapisywał numery kolejno otwieranych szafek w jednym ciągu. Tutaj dałoby to ciąg $\tau = (4, 7, 2, 1, 9, 5, 10, 6, 3, 8)$. Uzyskany ciąg jest pewną permutacją zbioru liczb od 1 do 10, potencjalnie dowolną. Ponadto można z niego wywnioskować „bloki” numerów odkrywanych przez kolejnych graczy: każdy blok ma kończyć się najmniejszym „jeszcze niezblokowanym” numerem (4, 7, 2, 1 wraz z 9, 5, 10, 6, 3 oraz 8 to trzy bloki). Więźniowie wygrywają grę B , jeśli uzyskana permutacja τ nie ma bloku długości większej niż 5.

Kluczowym spostrzeżeniem jest teraz to, że jeśli każda z permutacji σ rozmieszczenia kartek w szafkach była wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem, to w wyniku każda z permutacji τ również będzie uzyskana z tym samym prawdopodobieństwem. Dokładne wyjaśnienie tego faktu nie jest długie, jednak mało interesujące i mogłoby się zdawać „przeformalizowane”, zamiast tego przedstawimy zatem przekonującą intuicję.

Prawdopodobieństwo pojawienia się danego uporządkowania numerków w szafkach wynosi $\frac{1}{10!}$. Niezależnie od tego, którą szafkę postanowi jako pierwszą sprawdzić B_1 , prawdopodobieństwo wystąpienia w niej na przykład 9 wynosi $\frac{1}{10}$. Pod warunkiem, że owa dziewiątka zostanie odszukana jako pierwsza, prawdopodobieństwo odszukania na przykład 1 w drugim kroku jest równe $\frac{1}{9}$ (ze względu na „symetrię” wyjściowego losowania σ). W tym wypadku nie ma żadnego znaczenia, jaką strategią posłużą się więźniowie, gdyż z punktu widzenia ich decyzji każdy z nieodkrytych jeszcze numerków pełni tę samą rolę. Powtarzając to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że każda wynikowa permutacja τ może zostać uzyskana z tym samym prawdopodobieństwem $\frac{1}{10!}$.

Prawdopodobieństwo przegranej jest zatem dla każdej strategii takie samo – jest to prawdopodobieństwo, że losowo wybrana permutacja ma blok dłuższy niż 5. W ilu przypadkach z 10! możliwych więźniowie przegrają? Otóż dokładnie w ten sam sposób, jak udowodniliśmy twierdzenie, możemy pokazać, że permutacji, które mają blok długości $k > 5$, jest dokładnie $\frac{10!}{k}$ – szczegóły na marginesie.

W tej sytuacji więźniowie wygrywają grę B z prawdopodobieństwem równym $1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) = \frac{893}{2520} \approx 0,354$. Prawdopodobieństwo zwycięstwa w grze B jest równe prawdopodobieństwu sukcesu w grze A , w której wykorzystano strategię poruszania się po cyklach.

Więźniowie mogą zaadaptować dowolną strategię z gry A do gry B . Przy ustalonym ustawieniu numerów w szafkach, jeśli dana strategia poprowadziła do zwycięskiej kolejności otwierania w grze A , to ta kolejność będzie również zwycięska w grze B . W takim razie, gdyby istniała lepsza strategia dla gry A , niż przechodzenie przez cykle, to po zaadaptowaniu do gry B musiałaby również dawać w niej większe szanse na zwycięstwo. Jednakże nie jest to możliwe, ponieważ wszystkie strategie w grze B prowadzą do takich szans na zwycięstwo, jak przechodzenie przez cykle. Jest to zatem strategia optymalna.

Udało nam się rozwikłać problem więźniów – wskazaliśmy najlepszą możliwą strategię. Zagadnienie to ma jednak tę własność, że generuje dużą liczbę pytań, które można sobie zadać, kiedy już pozna się jego rozwiązanie. Co się stanie, gdy szafek będzie dwukrotnie więcej niż więźniów i połowa z nich będzie pusta? Wtedy oczywiście strategia przechodzenia przez cykle nie działa, bo można natrafić na pustą szafkę. Czy w takim wariacie można stwierdzić, że razem ze zwiększającą się liczbą graczy, prawdopodobieństwo ich wygranej będzie zmniejszać się aż do 0? Okazuje się, że wciąż jest to problem otwarty. Można również zadać pytanie, co się stanie, jeśli strażnik więzienia byłby niezwykle dociekliwym Czytelnikiem *Delty* i przewidział, że więźniowie będą postępować zgodnie ze strategią przechodzenia przez cykle. Wtedy mógłby ustawić numery specjalnie w taki sposób, by pojawił się cykl o długości większej niż połowa liczby szafek. Zagadką dla Czytelnika równie dociekliwego, co ów strażnik, pozostaje znalezienie sposobu, w jaki więźniowie mogliby poradzić sobie wówczas z pilnującym ich matematykiem.

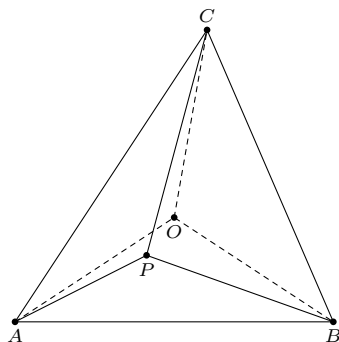


Rozwiązanie zadania M 1631.

Skorzystamy z następującego lematu: jeśli punkt R leży wewnątrz trójkąta XYZ i $R \neq Z$, to $RX + RY < ZX + ZY$. Aby go udowodnić, zauważmy najpierw, że R nie leży na co najmniej jednym z odcinków ZX, ZY . Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to ZX . Niech S będzie punktem przecięcia prostych RX i ZY . Wtedy z nierówności trójkąta:

$$RX + RY \leq RX + SY < XZ + ZS + SY = ZX + ZY.$$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Niech O będzie środkiem okręgu ω , a r będzie promieniem tego okręgu. Punkt P leży w co najmniej jednym z trójkątów ABO, BCO, CAO ; bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to trójkąt ABO . Podobnie, O leży w którymś z trójkątów ABP, BCP, CAP ; przyjmijmy, że jest to trójkąt BCP . Zgodnie z lematem zachodzi $AP + BP < AO + BO = 2r$; i analogicznie: $BP + CP > 2r$. Zatem któryś z odcinków AP, BP jest mniejszy od r i któryś z odcinków BP, CP jest większy od r .



Reagować zdecydowanie

Zapewne pierwszym powszechnie dyskutowanym na całym globie problemem tak zwanej nauki alternatywnej były organizmy genetycznie modyfikowane (GMO), realnie istniejące od początku lat 80. XX wieku. Fala protestów laików rozpoczęła się od tabloidów i była skierowana do szerokiej publiczności, bez troski o wyjaśnienie słów „genetycznie” i „modyfikowane”. Internet nie był wtedy jeszcze powszechnie dostępny i te protesty narastały dość powoli. Zazwyczaj na czele wojowników stali działacze polityczni i społeczni, którzy w antagonizmie wobec GMO widzieli prosty sposób uzyskania poklasku i popularności. Sama, będąc naukowcem, wiedziałam, jakie zagrożenia niosą GMO i jakie potencjalnie ogromne korzyści. Powoli gromadziła się wiedza, udokumentowana doświadczalnie i teoretycznie. Wydawało się, że poglądy alternatywne nie mogą, ze względu na „nienaukowość”, zyskać szerokiego poparcia.

Naukowcy bronili nauki o GMO na niezbyt licznych debatach publicznych; mieli znacznie więcej ważnych zadań zawodowych, wymagających zaangażowania i czasu. Myślę, że powoli i systematycznie gromadząc wiedzę, uważali, że nierzeczowe poglądy o GMO zwyczajnie wygasną, nie mając poparcia w faktach. Ale nie wygasły, bo fakty zawsze można fabrykować. A argumentacja opierała się na prostej zasadzie: nie bo nie, tak bo tak. . .

Omawiane zjawisko w Polsce pojawiło się z pewnym opóźnieniem, ale nie miało oryginalnej formy. Tak jak biotechnologię mieliśmy opóźnioną w stosunku do bogatego świata, tak i z podobnym poślizgiem rozpoczęły się, podobne do amerykańskich czy francuskich, protesty. Polscy oponenti GMO wysuwali argumenty znane z wcześniejszych wystąpień zagranicznych. Byli wśród nich politycy, działacze. . . i byli też naukowcy. I późno bardzo doczekaliśmy się pierwszej książki „W królestwie Monszatana”¹ Marcina Rotkiewicza. Świetny dziennikarz naukowy wszedł bardzo głęboko w problemy GMO oraz roli biotechnologicznej firmy Monsanto.

Od czasu pierwszej szeroko rozpowszechnionej akcji anty-GMO minęło kilkadziesiąt lat, wszechobecny stał się Internet z mediami społecznościowymi, dorobiliśmy się znacznie bogatszej palety alternatywnych poglądów. Trudno uwierzyć, ale w XXI wieku istnieją zwolennicy: płaskiej Ziemi, powszechnej szkodliwości glutenu, pożytku z homeopatii oraz przeciwnicy szczepień ochronnych. W popularnych mediach ukazują się również drobne i „przekonujące” informacje – niestety te rekordowe bzdury wypowiadają popularni celebryci: dietetycy, lekarze, dziennikarze, aktorzy, utrwalając takie myśli, jak: *Polskie dzieci chorując na odrę, będą zdrowsze* (lekarz, 2018 r.); *Autyzm jest chorobą metaboliczną i można go cofnąć dietą* (lekarz, 2018 r.); *Rak piersi powstaje w wyniku picia wody z kranu* (2019 r.); *Szczepionki zmieniają biorcę w cyborga, którym można potem sterować zdalnie* (2018 r.); *Smalec jest pożyteczny, ponieważ zawiera dużo białka*.² Za zdanie podsumowujące uznaję (nie mogę powstrzymać się od podania nazwiska autora) stwierdzenie Rafała Ziemkiewicza: *Po raz pierwszy od czasów Reagana w USA prezydentem jest mężczyzna z chromosomami*.

Fizyk, profesor Iwo Białynicki-Birula powiedział krótko: *Wymagana jest zdecydowana reakcja na wtargnięcie ignorantów na teren, który jest domeną nauki*. Koleżanki i koledzy – to jest także do nas apel. Dlatego z radością donoszę, że znalazł się naukowiec, Łukasz Lamża, który spokojnie i rzeczowo rozpatruje zjawisko nauki „alternatywnej”. Bez złośliwości i zacierzenia próbuje zrozumieć, skąd biorą się antyszczepionkowcy i im podobni.³ Gorąco polecam, z wdzięcznością dla autora.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

¹ Marcin Rotkiewicz „W królestwie Monszatana. GMO, gluten i szczepionki”. Wydawnictwo Czarne (2017).

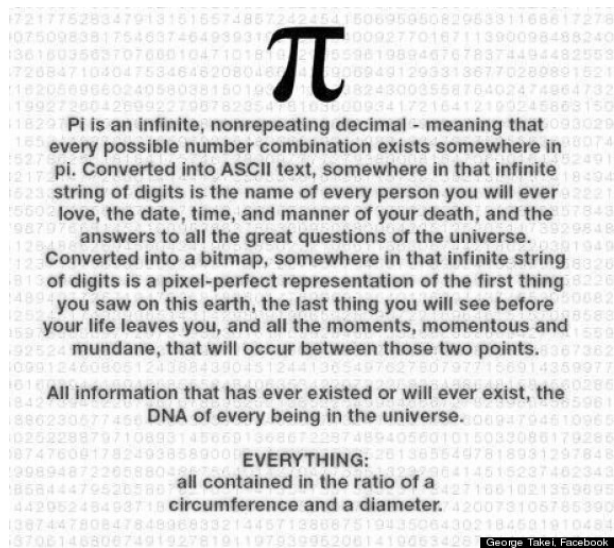
² Wszystkie cytaty pochodzą z internetowych zestawów „Biologicznych bzdur roku”.

³ Łukasz Lamża „Święty równoległe. Czego uczą nas płaskoziemcy, homeopaci i różdżkarze”, Wydawnictwo Czarne (2020).

Czy π jest normalna?

Łukasz RAJKOWSKI

Być może nie wypada zadawać tytułowego pytania w numerze marcowym, gdyż w tym miesiącu obchodzone jest wspaniałe święto tej największej bodaj celebrytki spośród liczb rzeczywistych, jednak *Delta* nie pozwoli zakneblować sobie ust poprawnością polityczną. Tym bardziej, że w Internecie roi się od plotek i pogłosek na ten temat. Zamieszanie rozpoczęło się od utworzonego w dobrej wierze memu (zamieszczony poniżej), którego autor w poetycki sposób opisywał rzekomą, mistyczną własność π – jej rozwinięcie dziesiętne miałoby skrywać wszelkie tajemnice tego świata i odpowiedzi na wszystkie fundamentalne dla ludzkości pytania.



Mem w wolnym tłumaczeniu (redakcja odcina się od zawartych tu stwierdzeń): *Pi jest liczbą o nieskończonym i nieokresowym rozwinięciu dziesiętnym – co oznacza, że dowolna kombinacja cyfr pojawi się gdzieś w tym rozwinięciu. Jeśli potraktować ją jako kod ASCII pewnego tekstu, gdzieś w tym nieskończonym ciągu znajdą się imiona wszystkich osób, które kiedykolwiek pokochasz, czas i okoliczności twojej śmierci oraz odpowiedzi na wszystkie wielkie zagadki Wszechświata. Po przekształceniu w bitmapę, gdzieś w tym rozwinięciu pojawi się pierwsze, co ukazało się twoim oczom przy przyjściu na świat, i ostatnie co ujrzysz, z tego świata odchodząc, a także wszystkie momenty, wzniosłe i przyziemne, które nastąpią pomiędzy. Cała informacja, istniejąca i ta, która jeszcze powstanie, a także DNA każdej żyjącej istoty. WSZYSTKO zawarte w stosunku obwodu do średnicy.*

Sama π nie potwierdziła ani nie zaprzeczyła tej pogłosce, twierdząc, że pytania o naturę jej rozwinięcia dziesiętnego godzą w jej prywatność. O komentarz w tej sprawie poprosiliśmy zaprzyjaźnionego z redakcją eksperta, prof. dra hab. inż. Piotra Pipińskiego.

ŁR: *Zapytam bez ogródek: co Twoim zdaniem π skrywa w teczkach swojego rozwinięcia dziesiętnego? Co na ten temat mówi nauka?*

PiPi: Pogłoski, jakoby w rozwinięciu dziesiętnym π można było odnaleźć wszystko, pomimo wysiłków uczonych, nie zostały niestety zweryfikowane. Przez „wszystko” rozumiemy dowolną skończoną kombinację cyfr. Na przykład własną datę urodzenia – to akurat

możemy zrobić, zaglądając na stronę internetową <http://www.mypiday.com/>. Albo tysiąc zer, jedno obok drugiego – takiego miejsca jednak nie potrafimy wskazać i jednocześnie nie potrafimy udowodnić, że na pewno istnieje. Nawet jednak gdybyśmy potrafili zweryfikować te plotki, to dużo bardziej interesująca jest dla nas kwestia bardziej szczegółowa – chcielibyśmy bowiem dowiedzieć się, czy π jest liczbą normalną. Normalną, czyli mającą pewne własności losowej liczby rzeczywistej.

ŁR: *„Losowej liczby rzeczywistej”? Co należy przez to rozumieć i o jakiej własności mowa?*

PiPi: Zastanówmy się, jak moglibyśmy wylosować liczbę rzeczywistą z przedziału $[0, 10)$. Najpierw losujemy cyfrę jedności, każdą z jednakowym prawdopodobieństwem. Następnie to samo robimy z kolejnymi cyframi po przecinku: dziesiętnych, potem setnych i tak dalej. Załóżmy, że byliśmy nieskończenie cierpliwi i w ten sposób wygenerowaliśmy wszystkie cyfry rozwinięcia dziesiętnego pewnej liczby X . Wówczas częstotliwość występowania cyfry 1 w pierwszych 10, 100, 1000 (i tak dalej) cyfrach rozwinięcia dziesiętnego X praktycznie zawsze coraz lepiej przybliża $\frac{1}{10}$. Obowiązek ten wynika ze specjalnej ustawy regulującej gry hazardowe, nazywanej Mocnym Prawem Wielkich Liczb. Obejmuje ona wszystkie cyfry, nie tylko 1, a także dowolne skończone kombinacje cyfr, z tą modyfikacją, że ustalony ciąg cyfr długości d ma się pojawiać, mówiąc potocznie, raz na 10^d cyfr. W oschłym języku matematycznego ustawodawstwa zależność ta brzmi:

dla każdej kombinacji cyfr długości d granica podzielonej przez n liczby wystąpień tej kombinacji wśród pierwszych n cyfr rozwinięcia dziesiętnego X wynosi 10^{-d} .

Właśnie tę cechę liczby X nazywamy normalnością, a dokładniej: *normalnością w podstawie 10*, gdyż w podobny sposób można określić normalność w innych podstawach – wystarczy patrzeć nie na rozwinięcia dziesiętne, a dwójkowe, trójkowe itp. Pojęcie to ukuł Émile Borel – w 1909 roku wykazał, że losowa liczba rzeczywista jest na 100% *absolutnie normalna*, czyli normalna w każdej podstawie.

ER: Czyli jeśli z zamkniętymi oczami zaznaczylibym na osi liczbę rzeczywistą, to byłaby ona normalna, tak? A czy można wskazać konkretne przykłady?

PiPi: Jest to dość zabawna kwestia, gdyż nie jest tak łatwo wskazać konkretny przykład, choć prawie każda liczba rzeczywista jest normalna. Można pokazać, że tzw. stała Champernowne'a, czyli $0,123456789101112\dots$, jest normalna w bazie 10. Dużo trudniej uzasadnić, że liczba $0,2357111317\dots$, powstała przez „sklejenie” kolejnych liczb pierwszych, jest normalna w podstawie 10. Udowodnili to dopiero Arthur Copeland i Paul Erdős w 1946 roku. To nie jedyna istotna zasługa Erdősa w badaniu normalności! Wraz z Haroldem Davenportem w 1952 roku pokazali, że normalna w bazie 10 jest dowolna liczba postaci $0,w(1)w(2)w(3)\dots$, gdzie w jest niestałym wielomianem, który dla naturalnych argumentów przyjmuje naturalne wartości, np. $w(n) = n^2$.

ER: Kręcimy się cały czas wokół normalności w podstawie 10. A co ze wspomnianą przez Ciebie absolutną normalnością? Czy tutaj znane są jakieś przykłady?

PiPi: To jest bardzo dobre pytanie i odpowiedź na nie jest dość niewygodna. Faktycznie, wspomniane przeze mnie stałe albo *nie są*, albo *nie wiadomo, czy są* absolutnie normalne. Tutaj również znane są przykłady, jednak ich konkretność może wydawać się niektórym Czytelnikom dyskusyjna. Pierwszą „dobrze zdefiniowaną” liczbę absolutnie normalną podał nasz rodak, Wacław Sierpiński. Jego konstrukcja niestety nie nadaje się do publikacji w prasie codziennej. Dość powiedzieć, że wyznacza on pewną przeliczalną rodzinę odcinków o wymiernych końcach. Okazuje się, że odcinki te nie pokrywają całego przedziału $(0, 1)$, a liczby, które nie zostaną pokryte, muszą być absolutnie normalne. Opierając się na tej konstrukcji, Verónica Becher i Santiago Figueira pokazali, jak wyznaczać kolejne cyfry pewnej absolutnie normalnej liczby z dowolną dokładnością. Oczywiście nie ma najmniejszego sensu wypisywać poniżej pierwszych cyfr rozwinięcia dziesiętnego ich wyniku; normalność nie zależy od tego, jak liczba zaczyna, a od tego, jak kończy. Mając liczbę normalną, możemy po przecinku dopisać jej dowolny ciąg cyfr i nie przestanie ona być normalna. Czyli faktycznie liczy się tylko to, że możemy przybliżyć tę absolutnie normalną liczbę z dowolną dokładnością, a nie to, co dostajemy na początku.

ER: Robi się strasznie abstrakcyjnie, powróćmy zatem do konkretnu. Czy zatem π jest normalna, czy nie jest?

PiPi: Tak jak już wspominałem – nie wiadomo. Znamy już jednak bardzo wiele cyfr rozwinięcia dziesiętnego π . Ostatni rekord należy do Emmy Haruka Iwao, która obliczyła π z dokładnością do ponad $3 \cdot 10^{13}$ (a dokładnie $\lfloor \pi \cdot 10^{13} \rfloor$, co jest dość urokliwe) cyfr. To dużo – zwykły plik tekstowy zawierający to rozwinięcie zająłby pewnie ponad 1 TB = 10^3 GB, zatem nie zmieściłby się pewnie na komputerze większości Czytelników *Delty*. Na podstawie

tej próbki nie stwierdzono żadnych odchyień π od normalności. Nawet więcej: uzyskanego ciągu cyfr nie da się żadnymi statystycznymi metodami odróżnić od losowego ciągu cyfr. Oczywiście, niezależnie od tego, jak wiele cyfr rozwinięcia dziesiętnego π uzyskamy, nie przybliży nas to do dowodu normalności – jest to jedynie (bardzo mocna, ale jednak) sugestia. W tym momencie warto wspomnieć o pewnej anegdotycznej historii. Otóż w roku 1872 August de Morgan poczynił spostrzeżenie, że w znanym ówczesnie rekordowo długim rozwinięciu π (608 cyfr), opublikowanym przez Williama Shanksa w 1853 roku, występuje zaskakująco niewiele siódemek. Widać to na poniższej tabelce, prezentującej liczbę wystąpień poszczególnych cyfr w rozwinięciu Shanksa.

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 60 | 62 | 67 | 68 | 64 | 56 | 62 | 44 | 58 | 67 |

De Morgan poprawnie ocenił prawdopodobieństwo tak istotnego odstępstwa cyfry 7 od „przeciętności” – na ok. 2%, co uznał za pewną osobliwość. Należy tu poczynić statystyczną dygresję i zaznaczyć, że tak naprawdę powinien był on zastanowić się nad prawdopodobieństwem takiego odstępstwa u „najbardziej odstępującej” cyfry; mierzona w ten sposób „niezwykłość” rozwinięcia Shanksa wynosiłaby już tylko ok. 20%. Tak czy inaczej, de Morgan nie traktował swojej obserwacji jako zarzut wobec obliczeń Shanksa (przynajmniej nie sformułował tego zarzutu na piśmie), a raczej jako ciekawostkę, uszczypliwie komentując, że niezwykłość siódemki w tym względzie może być wodą na młyn wszelkiego rodzaju mistyków (zwłaszcza że najczęstszą z występujących w rozwinięciu jest inna magiczna liczba, czyli 3). Dopiero w latach czterdziestych XX wieku D. F. Ferguson wskazał na błąd w obliczeniach Shanksa. Pomyłka pojawiła się dopiero na 528 miejscu, jednak propagowała na kolejne cyfry rozwinięcia.

ER: Z naszej rozmowy wylania się dość przygnębiający obraz stanu naszej wiedzy. Nie wiadomo, czy π jest normalna. Nie wiadomo, czy w rozwinięciu dziesiętnym π można znaleźć dowolną skończoną kombinację cyfr. O ile mi wiadomo, nie wiadomo nawet, czy w tym rozwinięciu znajduje się nieskończenie wiele zer (jedynek, dwójek, ...). Czy na zakończenie może Pan wspomnieć o czymś, co wiadomo w tej kwestii?

PiPi: Przyparty do muru mogę jedynie przypomnieć, że π jest liczbą niewymierną (a nawet niealgebraiczną), zatem nie może być tak, że w jej rozwinięciu dziesiętnym od pewnego miejsca po przecinku powtarzają się kolejne cyfry jej rozwinięcia dziesiętnego (począwszy od pierwszej). Osobiście uważam jednak, że niewiedza w tak elementarnej (przynajmniej w warstwie sformułowania) kwestii może mieć bardzo pozytywne skutki, gdyż ze względu na prostotę określenia problemu może potencjalnie więcej osób zainspirować do pogłębiania swojej wiedzy... Czego życzę wszystkim Czytelnikom *Delty*.

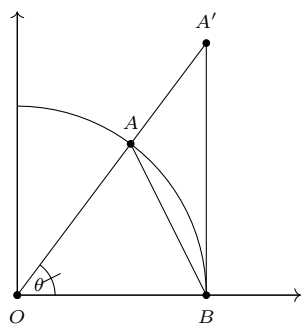
O nierówności między średnią arytmetyczną sinusa i tangensa kąta ostrego a jego miarą

* Student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Wojciech Wilhelm WADOWIK*

Celem tego artykułu jest wykazanie prawdziwości nierówności $2\theta < \sin \theta + \operatorname{tg} \theta$ dla dowolnego kąta ostrego θ . Podaną nierówność można łatwo udowodnić, używając rachunku różniczkowego. Można jednak zadać pytanie: czy da się tego uniknąć, czy można ją wykazać krócej, używając przy tym jedynie elementarnej geometrii. Okazuje się, że tak.

Rozważmy okrąg jednostkowy o środku w początku O układu współrzędnych i ustalmy dowolny kąt $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Niech $B = (1, 0)$ i obierzmy taki punkt A leżący na okręgu jednostkowym w pierwszej ćwiartce, że $\sphericalangle AOB = \theta$; na półprostej OA tak obierzmy zaś punkt A' , aby trójkąt $\triangle A'OB$ był prostokątny, o kącie prostym $\sphericalangle OBA'$. Zostało to przedstawione na rysunku 1.



Rys. 1

Łatwo można dostrzec, że

$$\text{pole trójkąta } AOB < \text{pole wycinka kołowego } AOB < \text{pole trójkąta } A'OB.$$

Obliczmy teraz kolejno pola wymienionych figur. Po pierwsze zachodzi

$$\text{pole trójkąta } AOB = \frac{1}{2}|AO||OB| \sin \sphericalangle AOB = \frac{\sin \theta}{2}.$$

Znany jest także wzór na pole wycinka kołowego o danej rozwartości, który mówi, iż

$$\text{pole wycinka kołowego } AOB = \frac{\theta}{2}.$$

Ponieważ zachodzi równość $|BA'| = \frac{|BA'|}{|OB|} = \operatorname{tg} \theta$, to

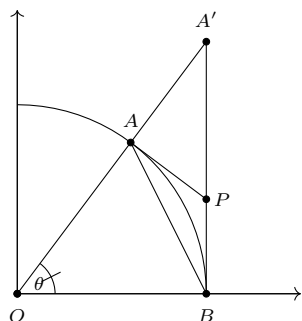
$$\text{pole trójkąta } A'OB = \frac{1}{2}|OB||BA'| = \frac{\operatorname{tg} \theta}{2}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób geometryczny dowód związku między wartościami funkcji trygonometrycznych kąta ostrego a jego miarą.

Twierdzenie. Dla dowolnej liczby $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność

$$\sin \theta < \theta < \operatorname{tg} \theta.$$

Wykorzystane w dowodzie powyższego twierdzenia geometryczne konstrukcje przydadzą się nam do wykazania podanej we wstępie nierówności. Poprowadźmy styczną w punkcie A do okręgu, przecinającą odcinek BA' w punkcie P (rys. 2).



Rys. 2

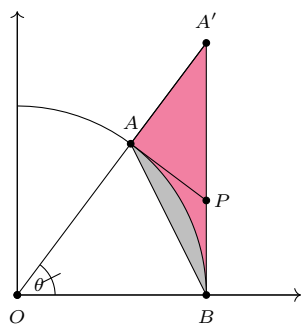
Z twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu wiemy, iż $|AP| = |BP|$.

Odcinek PA' jest przeciwprostokątną trójkąta $\triangle APA'$, odcinek AP jest zaś jego przyprostokątną, zatem $|AP| < |PA'|$. Z powyższych własności wynika, że $|BP| < |PA'|$.

Rozważmy teraz trójkąty APA' i BPA . Mają one tę samą wysokość opuszczoną na prostą BA' , skoro zaś podstawa tego pierwszego jest dłuższa od podstawy drugiego, to

$$\text{pole trójkąta } BPA < \text{pole trójkąta } APA'.$$

Wiemy już, polami czego są wielkości $\frac{\sin \theta}{2}$, $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\operatorname{tg} \theta}{2}$. Spójrzmy więc na rysunek 3, na którym na szaro zaznaczono figurę o polu $\frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2}$, kolorem zaś figurę o polu $\frac{\operatorname{tg} \theta}{2} - \frac{\theta}{2}$.



Rys. 3

Łatwo zauważyć, że

$$\frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2} < \text{pole trójkąta } BPA < \text{pole trójkąta } APA' < \frac{\operatorname{tg} \theta}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

Udowodniliśmy tym samym następującą zależność.

Twierdzenie. Dla dowolnej liczby $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność

$$2\theta < \sin \theta + \operatorname{tg} \theta.$$

Informatyczny kącik olimpijski (135): *Little Elephant and Array*

Zadanie: Dany jest n -elementowy ciąg liczb naturalnych $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ oraz m zapytań. Każde zapytanie jest opisane za pomocą dwóch liczb naturalnych (l, p) , gdzie $1 \leq l \leq p \leq n$, i brzmi: „Ile jest dobrych liczb w podślowie a_l, a_{l+1}, \dots, a_p ?” Liczba x jest dobra, jeśli występuje dokładnie x razy. Przykładowo, wynikiem dla podkreślonego fragmentu $A = (3, \underline{1}, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 2)$ jest 2, gdyż dobrymi liczbami są 1 (występuje raz) oraz 3 (występuje trzy razy). Napisz program, który odpowiada na wszystkie m zapytań.

Niech $a_{l:p}$ oznacza podślowo a_l, a_{l+1}, \dots, a_p .

Rozwiązanie $O(m(n + \max(A)))$

W pierwszym podejściu każde zapytanie rozważymy niezależnie. Załóżmy, że szukamy wyniku dla $a_{l:p}$. Na początku zliczmy wystąpienia każdej wartości w tym podślowie. Niech Z będzie tablicą zliczającą i $Z[x]$ oznacza liczbę wystąpień x . Taka tablica ma rozmiar rzędu $O(\max(A))$ i jej wygenerowanie zajmuje czas $O(n + \max(A))$. Wówczas wynikiem jest liczba takich x , że $Z[x] = x$, co możemy obliczyć w czasie $O(\max(A))$, przeglądając Z . Znalezienie odpowiedzi na jedno zapytanie zajmuje czas $O(n + \max(A))$, więc całe rozwiązanie działa w czasie $O(m(n + \max(A)))$.

Rozwiązanie $O(mn)$

Zauważmy, że dobre liczby są nie większe niż n . Żadna liczba większa niż n nie może być dobra, ponieważ długość ciągu (liczba wszystkich wystąpień) wynosi n . Zatem zliczanie wystąpień możemy ograniczyć do wartości nie większych niż n . Teraz tablica zliczająca ma rozmiar $O(n)$. Odpowiedź na jedno zapytanie realizujemy w czasie $O(n)$, a całe rozwiązanie działa w czasie $O(mn)$.

Rozwiązanie $O((n + m)\sqrt{n})$

W tym podejściu, przed przystąpieniem do odpowiadania na zapytania, znajdziemy zbiór S zawierający kandydatów na dobre liczby. Kandydatami mogą być tylko takie liczby x , które występują przynajmniej x razy w całym ciągu. Tak jak wcześniej zauważyliśmy, możemy ograniczyć zliczanie do wartości nie większych niż n , zatem S generujemy w czasie $O(n)$. Okazuje się, że wszystkich kandydatów jest nie więcej niż $\lfloor \frac{-1 + \sqrt{1 + 8n}}{2} \rfloor$.

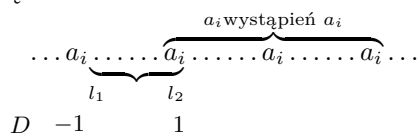
Dlaczego? S zawiera różne liczby, a jego suma jest nie większa niż n . Zbiór ma największą moc, kiedy zawiera kolejne liczby $1, 2, \dots, k$. Niech k oznacza największą spośród nich. Oczywiście musi zachodzić $1 + 2 + \dots + k = \frac{(1+k)k}{2} \leq n$. Wystarczy skorzystać ze standardowych metod rozwiązywania nierówności drugiego stopnia, aby otrzymać, że największe k wynosi $\lfloor \frac{-1 + \sqrt{1 + 8n}}{2} \rfloor$. \square

Dla każdej liczby x ze zbioru S przygotujmy tablicę L_x , gdzie $L_x[i] = 1$, jeśli $a_i = x$ lub $L_x[i] = 0$ w przeciwnym przypadku. Intuicyjnie mówiąc, skopiowaliśmy ciąg A , zamieniając wystąpienia x na 1, zaś pozostałe liczby na 0. Dodatkowo, niech P_x będzie tablicą sum prefiksowych L_x . Wówczas sprawdzenie, czy x jest dobrą liczbą $a_{l:p}$, sprowadza się do obliczenia $L_x[l] + L_x[l + 1] + \dots + L_x[p] = P_x[p] - P_x[l - 1]$. Za pomocą tak przygotowanej struktury danych

potrafimy w czasie $O(1)$ sprawdzić, czy kandydat jest dobrą liczbą w podślowie. Aby znaleźć dobre liczby w $a_{l:p}$, wystarczy sprawdzić kandydatów ze zbioru S , których jest $O(\sqrt{n})$. Wyznaczenie odpowiedzi na m zapytań zajmuje czas $O(m\sqrt{n})$. Przygotowanie opisanych struktur danych zajmuje czas $O(n\sqrt{n})$, zatem całe rozwiązanie działa w czasie $O((n + m)\sqrt{n})$.

Rozwiązanie $O((n + m) \log(n))$

W tym rozwiązaniu odpowiemy na zapytania *offline*. Oznacza to, że najpierw wczytamy wszystkie zapytania, następnie obliczymy wyniki (być może w innej kolejności niż ta podana na wejściu) i na końcu wypiszemy odpowiedzi w pierwotnej kolejności zapytań. Najpierw pogrupujemy zapytania według ich końców. Niech $zap[i]$ oznacza zapytania, których koniec znajduje się w i . Przejdźmy teraz do przeglądania kolejnych elementów ciągu według rosnących indeksów (od 1 do n). Załóżmy, że rozważamy indeks i . Jeśli wartość a_i występowała wcześniej przynajmniej a_i razy, to a_i jest dobrą liczbą dla niektórych fragmentów. Dokładniej, niech l_1 oznacza najmniejszy taki indeks, że $a_{l_1:i}$ zawiera a_i wystąpień a_i , oraz niech l_2 oznacza największy taki indeks, że $a_{l_2:i}$ zawiera a_i wystąpień a_i . Te indeksy możemy wyznaczyć, mając dla każdej wartości zapamiętane pozycje, na których ta wartość występuje. Wówczas dla każdego $l_1 \leq j \leq l_2$ fragment $a_{j:i}$ również zawiera a_i jako dobrą liczbę.

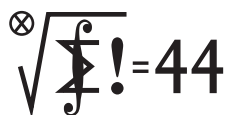


Zachowajmy tę informację w tablicy D . Niech $D[l_1 - 1] = -1$, zaś $D[l_2] = 1$. Warto nadmienić, że jeśli wcześniej mieliśmy wyznaczony przedział $[l'_1; l'_2]$, gdzie mogło zaczynać się podślowo z dobrą wartością a_i , to należy usunąć ten przedział przed nowym przypisaniem, czyli $D[l'_1 - 1] = 0$ oraz $D[l'_2] = 0$. Teraz możemy już odpowiedzieć na zapytania $zap[i]$. Załóżmy, że rozważamy zapytanie (l, i) . Wtedy wynikiem jest $D[l] + D[l + 1] + \dots + D[i]$. Na D możemy rozpiąć drzewo przedziałowe, aby w czasie $O(\log(n))$ obliczać sumę i aktualizować wartości.

Grupowanie zapytań według ich końca realizujemy w czasie $O(n + m)$, jeśli wykorzystamy metodę zliczania. Odpowiedź na zapytanie odbywa się w czasie $O(\log(n))$, co w sumie dla m zapytań daje $O(m \log(n))$. Wszystkie aktualizacje D zajmują $O(n \log(n))$. Całkowita złożoność czasowa rozwiązania wynosi $O((n + m) \log(n))$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2020

Zadania z matematyki nr 797, 798

Redaguje Marcin E. KUCZMA

797. W trójkącie ABC wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość h . Punkty M i N to (odpowiednio) środki boków AC i BC . Okrąg przechodzący przez punkty B i N , styczny do prostej BM , przecina prostą AB ponownie w punkcie P . Wyznaczyć największą liczbę λ , dla której (przy każdej takiej konfiguracji) odcinek AP ma długość nie mniejszą niż λh .

798. W nieograniczonym trójkątnym diagramie

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

w górnym wierszu jest pojedyncza jedynka; a dalej każdy element jest sumą trzech liczb znajdujących się nad nim w poprzednim wierszu ($\searrow, \downarrow, \swarrow$). Wiersze są numerowane od zera; zatem w n -tym wierszu jest $2n + 1$ liczb dodatnich.

(a) Wykazać, że w każdym wierszu, poza zerowym i pierwszym, jest jakaś liczba parzysta.

(b) Wyznaczyć numery tych wierszy, w których są dokładnie trzy liczby nieparzyste.

Zadanie 798 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2019

Przypominamy treść zadań:

789. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(f(x) + y) = 4yf(x) + f(x^2 - y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

790. Na bokach AB, AC trójkąta ostrokątnego ABC , po jego zewnętrznej stronie, zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne ABD, ACE z kątami prostymi przy wierzchołkach D, E . Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P . Punkty M i N są środkami odcinków BC i DE . Udowodnić, że każda z prostych MN, AP jest prostopadła do prostej DE .

789. Podstawmy, kolejno, $y = -f(x)$ oraz $y = x^2$; otrzymujemy równania

$$f(0) = -4f(x)^2 + f(x^2 + f(x))$$

oraz

$$f(f(x) + x^2) = 4x^2f(x) + f(0),$$

które po dodaniu stronami i redukcji dają związek $f(x)(f(x) - x^2) = 0$. Zatem dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ ma miejsce alternatywa: $f(x) = 0$ lub $f(x) = x^2$. Stąd, w szczególności, $f(0) = 0$.

Jeśli $x = 0$ jest jedynym miejscem zerowym funkcji f , to $f(x) = x^2$ dla wszystkich x . Łatwo sprawdzić, że ta funkcja spełnia zadane równanie. Pozostaje przypadek, gdy f ma jeszcze jakieś miejsce zerowe $a \neq 0$. Wykażemy, że wówczas f jest tożsamościowo równa zeru.

Przypuśćmy, że $f(b) \neq 0$ dla pewnego b . Biorąc w zadanym równaniu $x = a, y = b$, dostajemy $f(b) = f(a^2 - b)$; ta liczba nie jest zerem, więc z wcześniejszej alternatywy wynika, że wynosi ona jednocześnie b^2 oraz $(a^2 - b)^2$. Przyporównanie tych wartości daje równość $2b = a^2$. To liczba dodatnia; stąd $f \equiv 0$ w przedziale $(-\infty, 0]$. Weźmy teraz dowolną liczbę $c > 0$ i w wyjściowym równaniu podstawmy $y = c, x = -\sqrt{c}$ (już wiemy, że $f(-\sqrt{c}) = 0$). Wychodzi $f(c) = 0$. Tak więc $f \equiv 0$ także w przedziale $(0, \infty)$.

Wniosek (odpowiedź): jedynymi funkcjami spełniającymi podane równanie są: $f(x) = 0$ (dla wszystkich x) oraz $f(x) = x^2$ (dla wszystkich x).

790. Niech punkty J, K, L będą rzutami prostokątnymi punktów A, B, C na prostą DE . Trójkąt prostokątny AJD jest przystający do trójkąta DKB ; analogicznie, trójkąt AJE przystaje do ELC . Zatem $|JD| = |KB|, |JE| = |LC|, |AJ| = |DK| = |EL|$. Z ostatniej równości wynika, że środek N odcinka DE jest też środkiem odcinka KL , i wobec tego $MN \perp DE$.

Prosta AJ przecina odcinki CD i BE w punktach, które nazwiemy odpowiednio X i Y . Z proporcji

$$\frac{|JX|}{|DJ|} = \frac{|LC|}{|DL|} = \frac{|JE|}{|DL|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|JY|}{|EJ|} = \frac{|KB|}{|EK|} = \frac{|JD|}{|EK|}$$

wyznaczamy

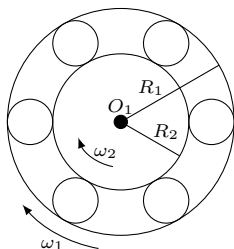
$$|JX| = \frac{|JD| \cdot |JE|}{|DL|} \quad \text{oraz} \quad |JY| = \frac{|JD| \cdot |JE|}{|EK|}.$$

Skoro zaś $|DK| = |EL|$, zatem $|DL| = |EK|$, i w takim razie $|JX| = |JY|$. To oznacza, że $X = Y = P$, a prosta AP to prosta AJ , prostopadła (z definicji) do DE .

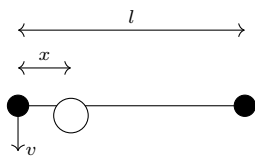
Klub 44 F



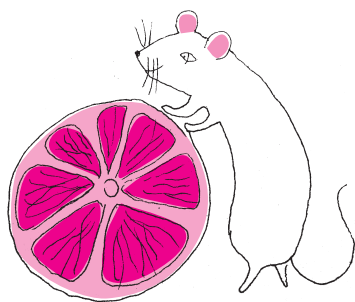
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2020



Rys. 1



Rys. 2



Zadania z fizyki nr 694, 695

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

694. Statek napędzany jest za pomocą silnika – „miotacza wody”, który wyrzuca z rufy strumień wody z prędkością u . Masa wody pobieranej z rzeki i wyrzucanej w jednostce czasu wynosi μ . Przy jakiej prędkości statku sprawność silnika jest maksymalna? Siłę tarcia i opór wody należy zaniedbać.

695. Rysunek 1 przedstawia przekrój łożyska kulkowego. Promienie pierścieni zewnętrznego i wewnętrznego wynoszą odpowiednio R_1 i R_2 , a ich prędkości kątowe ω_1 i ω_2 . Opisać ruch jednej z kulek, jeżeli nie występuje poślizg między pierścieniami i kulkami.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2019

Przypominamy treść zadań:

686. Dwie małe kulki o masach m , połączone nieważkim prętem o długości l , spoczywają na gładkim stole. W odległości x od jednej z kulek znajduje się wbity w powierzchnię stołu kołek. W chwili początkowej odległość między prętem a kołkiem jest bardzo mała (rys. 2). Kulka położona bliżej kołka została uderzona w kierunku równoległym do powierzchni stołu i prostopadłym do pręta i w bardzo krótkim czasie uzyskała prędkość v . Następnie pręt zderzył się sprężysto z kołkiem. Jaka powinna być odległość x , aby po zderzeniu pręt nie obracał się?

687. Znaleźć promień największej kropli wody, która może wyparować, nie pobierając ciepła z otoczenia. Ciepło parowania wody wynosi $q = 2,26 \cdot 10^6$ J/kg, współczynnik napięcia powierzchniowego wody $\sigma = 7,2 \cdot 10^{-2}$ J/m². Zakładamy, że temperatura kropli nie zmienia się.

686. Po uderzeniu kulki ruch postępowy układu z prędkością V opisuje równanie $F\Delta t = 2mV$, gdzie F jest średnią siłą działającą na kulkę w czasie zderzenia Δt . Równanie ruchu obrotowego układu z prędkością kątową ω wokół środka masy ma postać $F l/2\Delta t = 2m(l/2)^2\omega$, stąd $V = \omega l/2$. Ruch kulki, której nadano prędkość v , jest złożeniem ruchu postępowego i obrotowego, zatem $v = V + \omega l/2 = \omega$, $V = v/2$. Prędkość drugiej kulki wynosi $v_2 = V - \omega l/2 = 0$. Po zderzeniu sprężystym z kołkiem ruch układu jest ruchem czysto postępowym, zasada zachowania energii ma więc postać $mv^2/2 = 2mV_x^2/2$, gdzie $V_x = v/\sqrt{2}$ jest prędkością układu po zderzeniu. Oznaczając przez F_1 średnią siłę działającą na pręt w czasie Δt_1 podczas zderzenia z kołkiem, możemy napisać równanie ruchu postępowego: $F_1\Delta t_1 = 2m|V_x - V| = 2m(V_x + V)$ oraz równanie ruchu obrotowego: $F_1\Delta t_1(l/2 - x) = 2m(l/2)^2\omega$. Rozwiązując powyższe równania, otrzymujemy szukaną odległość

$$x = l(2 - \sqrt{2})/2.$$

687. Przy założeniu, że temperatura kropli, a tym samym jej energia wewnętrzna, nie zmienia się, energia potrzebna do parowania może pochodzić tylko z energii powierzchniowej. Rozważmy sytuację, gdy promień kropli maleje o małą wielkość ΔR . Objętość kropli maleje wtedy o $\Delta V = 4\pi R^2\Delta R$, a masa wyparowanej przy tym wody jest równa $m = \rho\Delta V$, gdzie ρ jest gęstością wody. Ciepło potrzebne do wyparowania masy m wody wynosi $Q = Lm = 4\pi\rho R^2\Delta R$. Pole powierzchni kropli maleje o $\Delta S = 4\pi R^2 - 4\pi(R - \Delta R)^2 \cong 8\pi R\Delta R$. Energia powierzchniowa maleje przy tym o $\Delta W = \sigma\Delta S$. Z bilansu energetycznego $Q = \Delta W$ otrzymujemy

$$R = 2\sigma/(\rho L) \cong 10^8 \text{ cm.}$$

Otrzymaliśmy, że szukany promień jest rzędu odległości międzycząsteczkowych, zatem żadna kropla wody nie może wyparować, nie pochłaniając ciepła z zewnątrz.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można też robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Kosmologiczny zbieg okoliczności

W sierpniu ubiegłego roku (28.08.2019 r.) detektory wchodzące w skład konsorcjum LIGO/Virgo zaobserwowały dwa źródła fal grawitacyjnych, S190828j oraz S190828l. Dzięki analizie widm promieniowania ustalono, że w obu przypadkach fale te zostały wyemitowane w wyniku połączenia się dwóch czarnych dziur. Od czasu zarejestrowania pierwszej fali grawitacyjnej (14.09.2015 r.) obserwacje fal grawitacyjnych powoli stają się normą i naukowcy nie ekscytują się aż tak bardzo każdym zarejestrowanym przypadkiem, jednak te dwie obserwacje wydają się szczególnie interesujące.

Najciekawszą cechą tych dwóch detekcji jest ich czas obserwacji, a konkretnie odstęp czasu pomiędzy nimi. Okazało się bowiem, że detektory zarejestrowały oba sygnały w odstępie zaledwie 21 minut! Dodatkowo źródła promieniowania S190828j i S190828l znajdowały się bardzo blisko siebie. Analizując możliwości detektorów oraz częstość występowania rejestrowanych przez nas fal grawitacyjnych, naukowcy wynioskowali, że zaobserwowanie dwóch niezależnych połączeń czarnych dziur w odstępie zaledwie 20 minut może zdarzyć się raz na 16 lat.

Niestety przy zlanie się dwóch czarnych dziur nie obserwujemy poświaty w zakresach elektromagnetycznych (przynajmniej jak do tej pory i przy użyciu dostępnej obecnie w astronomii technologii), dlatego niezmiernie trudno jest ustalić, co było przyczyną tej niezwyklej obserwacji. Jednak dla naukowca nie ma niczego, co nie mogłoby stanowić pożywki dla nowych teorii. Biorąc pod uwagę fakt, że te dwa sygnały pochodziły z bardzo podobnych obszarów nieba, a obecnie obszary te wyznaczane są z ogromnymi błędami, rodzi się pytanie, czy rzeczywiście były to dwa różne zdarzenia? Jest bardzo możliwe, że było to tylko jedno zdarzenie połączenia się dwóch czarnych dziur, które zostało w jakiś sposób grawitacyjnie przysłonięte, a następnie wykryte ponownie!

Niebo w marcu

Trzeci miesiąc roku oznacza koniec półrocznego okresu, w którym Słońce przebywało na południe od równika niebieskiego. Przejście na półkulę północną nastąpi 20 marca przed godziną 5 naszego czasu i w tym momencie zacznie się astronomiczna wiosna. Już 3 dni wcześniej, ze względu na zjawisko refrakcji atmosferycznej, dzień na północ od równika zrówna się z nocą. W ostatni weekend marca, z soboty 28 na niedzielę 29 dnia miesiąca, zmieni się czas z zimowego na letni. Należy pamiętać o przestawieniu zegarków z godziny 2 na 3.

W marcu planety Układu Słonecznego utworzą dwa zgrupowania: pierwsze, mniej atrakcyjne, na niebie

Od czasu powstania do momentu zaobserwowania na Ziemi fale grawitacyjne podróżują przez różnego rodzaju struktury, takie jak gwiazdy, galaktyki i gromady galaktyk. Każda z napotkanych na drodze fali struktur powoduje lekkie zakrzywienie czasoprzestrzeni (właśnie z powodu grawitacji). Im masywniejszy obiekt, tym większe zakrzywienie. Czas podróży fali grawitacyjnej (lub jakiegokolwiek innego rodzaju promieniowania) przechodzącej przez tak zakrzywiony obszar czasoprzestrzeni wydłuża się, przez co dotarcie do detektora zajmuje jej więcej czasu. W związku z tym zakrzywiona przez masywne obiekty czasoprzestrzeń mogłaby spowodować zaobserwowanie w różnym czasie dwóch sygnałów pochodzących od tego samego zdarzenia.

Czy za przypadkami zarejestrowanymi przez LIGO/Virgo stoją dwie, czy cztery czarne dziury? Grupa naukowców amerykańskich pod przewodnictwem Leo Singera z Goddard Space Flight Center w NASA oszacowała, że znajdująca się na drodze fali grawitacyjnej gromada galaktyk o masie $10^{15} M_{\odot}$ mogłaby spowodować separację kątową zaobserwowanych fal rzędu jednej minuty łuku. W przypadku obserwacji LIGO/Virgo istnieje prawdopodobieństwo oceniane na ponad 99,99%, że odległość pomiędzy tymi dwoma sygnałami jest jednak dużo większa niż 1 stopień na niebie. Tak więc, aby obie obserwacje pochodziły z jednego zdarzenia związanego z połączeniem się czarnych dziur, potrzebny byłby dotychczas nieodkryty, monstrualny obiekt znajdujący się dokładnie pomiędzy źródłem fali grawitacyjnej a Ziemią. Jakkolwiek jest bardzo mało prawdopodobne, aby dwa różne zderzenia czarnych dziur mogły zostać wykryte w ciągu 20 minut, autorzy twierdzą, że inne możliwe wyjaśnienie jest jeszcze mniej prawdopodobne. Oczywiście prędkiej czy później będziemy mieć tyle detekcji, że będzie jasne, czy takie przypadki to zbiegi okoliczności, czy soczewkowanie, czy jeszcze inny, nierozważany do tej pory efekt. Tymczasem wygląda na to, że był to rzeczywiście tylko kosmologiczny zbieg okoliczności. . .

Katarzyna MAŁEK

wieczornym – planeta Wenus przejdzie bardzo blisko planety Uran, ale tylko pierwsza z nich będzie łatwo widoczna gołym okiem; oraz drugie, dużo bardziej widowiskowe, na niebie porannym, gdzie planeta Mars spotka się z planetami Jowisz i Saturn. W drugim przypadku wszystkie trzy planety nie mają kłopotu z przebicciem się przez zorzę poranną. Niestety, jak na złość, planety Wenus i Uran wznoszą się całkiem wysoko nad widnokregiem i można je obserwować bez kłopotu, natomiast kolejne trzy planety wznoszą się na niewielką wysokość i trzeba dysponować odpowiednio odsłoniętym horyzontem oraz liczyć na spokojną atmosferę, by teleskopy dawały satysfakcjonujące obrazy tych planet.

Pozostałe dwie planety, czyli **Neptun** i **Merkury**, są w marcu niewidoczne. Neptun 8 marca znajdzie się w koniunkcji ze Słońcem, które przejdzie 1° na północ od niego, natomiast Merkury 24 marca osiągnie swoją maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą prawie 28° . Niestety pomimo tego, że jest to wartość niemal o 10° większa od odległości podczas lutowej maksymalnej elongacji wschodniej, to niekorzystne nachylenie ekliptyki do porannego widnokregu na wysokich północnych szerokościach geograficznych uniemożliwi obserwację tej planety z Polski i innych krajów położonych tak samo blisko, lub bliżej, Bieguna Północnego.

Wenus swoją maksymalną elongację wschodnią osiągnie tego samego dnia, co Merkury swoją elongację zachodnią, oddalając się od Słońca na ponad 46° . Oznacza to, że dystans między planetami urośnie do prawie 75° , zbliżając się do maksymalnej możliwej wartości; ale pomiędzy nimi znajdzie się Słońce i z Ziemi nie da się zaobserwować obu planet jednocześnie. Po zmierzchu nachylenie ekliptyki do widnokregu jest bardzo dobre i w przeciwieństwie do Merkurego planeta Wenus początkowo znajduje się wysoko na niebie i można ją obserwować przez kilka godzin po zmierzchu. Jednak Wenus najlepiej widoczna jest na jasnym niebie tuż po zachodzie Słońca, albo nawet jeszcze za dnia. Na ciemnym niebie obraz planety ulega wielu zniekształceniom ze względu na duży kontrast między nią a tłem nieba. Ostatniego dnia miesiąca Wenus osiągnie najwyższą wysokość nad widnokregiem po zmierzchu, zaczynając wieczór na wysokości około 40° nad zachodnim horyzontem i świecąc przez następne prawie 5 godzin.

W marcu Wenus przetnie cały gwiazdozbiór Barana, kończąc miesiąc 3° na zachód od Plejad, przez które przejdzie na początku kwietnia. W tym czasie jasność planety zwiększy się z $-4,2$ do $-4,4^m$, średnica tarczy urośnie z 19 do $25''$, zaś faza spadnie z 62 do 47% . 8 marca Wenus przejdzie nieco ponad 2° na północ od Urana, dążącego do spotkania ze Słońcem pod koniec kwietnia – i z tego względu zbliżającego się z każdym kolejnym dniem do widnokregu. **Uran** w marcu świeci blaskiem $+5,9^m$ i jest widoczny za pomocą małych przyrządów optycznych. Obie planety pod koniec miesiąca minie Księżyc w fazie cienkiego sierpa. Najpierw 26 marca Srebrny Glob w fazie 5% (dwa dni po nowiu) minie Urana w odległości 5° , a 28 marca, z fazą zwiększoną do 16% , minie Wenus w odległości o $1,5^\circ$ większej.

Po spotkaniach z planetami **Księżyc** podąży dalej na północny wschód i już 29 marca dotrze do Hiad, dużej gromady otwartej gwiazd w Byku. Przy czym jego faza urośnie do 24% . Tego wieczora już od zmierzchu można obserwować zbliżanie się Księżyca do gwiazdy ϵ Tau o jasności $+3,5^m$, stanowiącej północny róg tworzonej przez Hiady litery „V”. Około godziny 20:30 gwiazda zniknie za ciemnym brzegiem księżycowej tarczy i pojawi się ponownie niewiele ponad godzinę później.

Równocześnie Księżyc znajdzie się w pobliżu Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka. Tym razem naturalny satelita Ziemi przejdzie 3° na północ od niej. Będzie to już drugie takie spotkanie w tym miesiącu. Księżyc przejdzie przez Hiady także 2 marca, jednak uczyni to w ciągu dnia (polskiego czasu). Wieczorem, mając tarczę oświetloną dokładnie w połowie, zajmie on pozycję ponad 5° od Aldebarana.

Sześć dni później, 8 marca wieczorem, Srebrny Glob dzień przed pełnią, w fazie 99% , spotka się z Regulesem, najjaśniejszą gwiazdą Lwa, pokazując się ponad 6° od niego. Następnie, 9 marca przed godziną 19 naszego czasu Księżyc znajdzie się w pełni, docierając na pogranicze gwiazdozbiorów Lwa i Panny. A zatem pierwsza połowa miesiąca upłynie w silnym blasku naturalnego satelity Ziemi i dopiero w drugiej jego części Księżyc przeniesie się na niebo poranne i zmniejszy blask do wartości nieprzeszkadzających w obserwacjach innych ciał niebieskich. Srebrny Glob z tarczą oświetloną w 93% przejdzie 11 marca 6° na północ od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, zaś 5 dni później w takiej samej odległości minie Antaresa, najjaśniejszą gwiazdę Skorpiona. Do tego czasu faza jego tarczy zmniejszy się do 64% .

Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę w gwiazdozbiórze Wężownika 16 marca, zajmując pozycję prawie w tym samym miejscu, co Jowisz w zeszłym roku, i podąży ku wspomnianej już trójce planet – **Mars**, **Jowisz**, **Saturn**, tworzącej dość ciasne zgrupowanie tuż przed wschodem Słońca, niestety nisko nad widnokregiem. Dwa dni później, 18 marca, prezentując tarczę oświetloną w 32% , Srebrny Glob dotrze na $2,5^\circ$ do Marsa, natomiast $1,5^\circ$ dalej na linii łączącej Księżyc z Marsem znajdzie się najjaśniejsza z całej trójki planeta Jowisz. Dobę później faza Księżyca zmniejszy się do 23% i pokaże się on $3,5^\circ$ od **Saturna**. Niestety w tym czasie Księżyc przewędruje pod i tak nisko położoną ekliptyką, wskutek czego pojawi się na nieboskłonie niecałe 2 godziny przed Słońcem i do jego wschodu nie wzniesie się wyżej niż kilka stopni ponad widnokrąg.

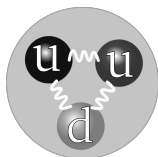
Wszystkie trzy widoczne rano planety zaczną miesiąc w gwiazdozbiórze Strzelca, układając się na jednej linii. Położonego najbardziej na zachód Marsa i najbardziej na wschód Saturna oddzieli dystans 18° , a Jowisz znajdzie się w połowie drogi pomiędzy nimi. Potem Mars z Jowiszem zbliżą się do Saturna, lecz Czerwona Planeta porusza się najszybciej z całej trójki i 20 marca przejdzie niecałe $45'$ na południe od Jowisza. Tego samego dnia Saturn wejdzie do gwiazdozbioru Koziorożca, co Mars uczyni ostatniego dnia miesiąca, zbliżając się jednocześnie do Saturna na odległość 1° . W trakcie miesiąca jasność Marsa urośnie z $+1,1$ do $+0,8^m$, a jego tarcza zwiększy średnicę do ponad $6''$. W tym samym czasie blask Jowisza zwiększy się do $-2,1^m$, a tarcza planety osiągnie średnicę $37''$. Mająca średnicę $16''$ tarcza Saturna osiągnie jasność $+0,7^m$.

Ariel MAJCHER

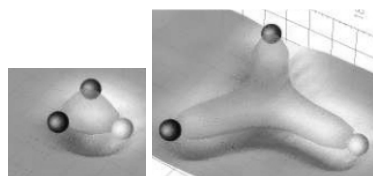
Kolory przymrużonym okiem fizyka

Jądra atomowe składają się z protonów i neutronów, określanych zbiorczo mianem nukleonów. Nukleony wyobrażamy sobie zazwyczaj jako cząstki złożone z trzech kwarków, utrzymywanych razem przez oddziaływania silne. W odróżnieniu od oddziaływań elektromagnetycznych, w oddziaływaniach silnych mamy do czynienia nie z jednym, ale z trzema ładunkami. Fizycy nazywają te ładunki ładunkami kolorowymi, posuwając się niekiedy do nazywania ich określonymi kolorami: czerwonym, zielonym i niebieskim. Nie mają one, rzecz jasna, nic wspólnego z jakimkolwiek zmysłowym postrzeganiem barw i stanowią zaledwie metaforę dla pewnych struktur matematycznych.

Metafora ta jest o tyle trafna, że w przyrodzie stany związane kwarków, czyli bariony i mezony, są pozbawione koloru (czytaj: nie niosą wypadkowego ładunku związanego z oddziaływaniami silnymi).



Rys. 1. Schemat protonu, dwa kwarki górne i jeden dolny. Źródło: Wikimedia Commons contributors. File: Quark structure proton.



Rys. 2. Wyniki symulacji oddziaływań silnych układu trzech równoodległych kwarków. Powierzchnia łącząca kwarki obrazuje największe prawdopodobieństwo znalezienia gluonu. Lewa i prawa część rysunku odpowiada różnym odległościom między kwarkami. Źródło: [1]

Z tego względu w materiałach popularno-naukowych chętnie ilustruje się stany związane kwarków w sposób podobny do tego przedstawionego na rysunku 1. Wiadomo jednak od dawna [1], że tego rodzaju schematy nie opisują poprawnie, gdzie znajdują się gluony w nukleonie. Bliższe rzeczywistości schematy, zaczerpnięte z pracy [2], przedstawione są na rysunku 2.

Kolory – tym razem traktowane dosłownie – pozwalają także na wnioskowanie o aktywności wulkanicznej na Ziemi na podstawie dzieł sztuki malarskiej. Okazuje się bowiem, że stosunek czerwonych i zielonych tonów kolorystycznych w obrazach przedstawiających zachód słońca, które można oglądać w galeriach całego świata, jest związany z ilością aerozoli znajdujących się w stratosferze w wyniku erupcji wulkanicznych [3, 4]. Analiza ta została wsparta pomysłowym eksperymentem, w którym uczestniczący w badaniach artysta przygotował dwa szkice zachodu słońca podczas dwóch kolejnych wieczorów. Daty tych działań artystycznych zostały dobrane tak, by tylko drugiego wieczora światło zachodzącego słońca przechodziło przez chmurę pyłu przywianą wiatrem (takie warunki są oczywiście tylko pewnym przybliżeniem sytuacji rozważanej w badaniach, ale erupcje wulkaniczne trudno zaplanować i kontrolować). Wyniki przedstawione są na rysunku 3.

Czy znaczy to, że fizycy widzą barwy inaczej niż reszta populacji?

Krzysztof TURZYŃSKI

- [1] Bissey F. *et al.*, *Gluon flux-tube distribution and linear confinement in baryons*, Phys. Rev. D76 (2007) 114512.
- [2] backreaction.blogspot.com/2017/12/get-your-protons-right.html.
- [3] Zerefos, C. S. *et al.*, *Atmospheric effects of volcanic eruptions as seen by famous artists and depicted in their paintings*, Atmos. Chem. Phys., 7 (2007), 4027.
- [4] Zerefos, C. S. *et al.*, *Further evidence of important environmental information content in red-to-green ratios as depicted in paintings by great masters*, Atmos. Chem. Phys. 14 (2014), 2987–3015.

Kolorowe wersje ilustracji na stronie deltami.edu.pl.



Rys. 3. Zachód słońca namalowany przez P. Tetsisa w dniach różniących się głębokością optyczną atmosfery. Źródło: [4]





Gauss, czyli tam i z powrotem

Bartłomiej BZDEGA

Według legendy pod koniec XVIII wieku działa się następująca rzecz. Pewien nauczyciel kazał swoim uczniom dodać wszystkie liczby od 1 do 40, aby mieć przez dłuższą chwilę spokój. Wszyscy, z wyjątkiem jednego, wykonywali pracowicie kolejne dodawania i zazwyczaj popełniali błędy. Tym wyjątkowym uczniem był Carl Friedrich Gauss, który rozumował następująco:

| | | | | | | |
|----|----|----|-----|----|----|---------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | ... | 39 | 40 | $2(1 + 2 + \dots + 40) = 40 \cdot 41$ |
| 40 | 39 | 38 | ... | 2 | 1 | |

(lewą stronę równości otrzymujemy, sumując liczby w wierszach, a prawą – w kolumnach), więc $1 + 2 + \dots + 40 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 41 = 820$. Podobne rozumowanie stosujemy w zadaniach 1–3. Idea jest taka, żeby parować składniki lub czynniki: najmniejszy z największym, drugi najmniejszy z drugim największym itd.

Powyższy trik można nieco uogólnić – przecież tabela może mieć więcej niż dwa wiersze, a parowanie najmniejszych z największymi też nie jest koniecznością.

Dla przykładu rozważmy ciąg liczbowy (a_1, a_2, \dots, a_n) i niech

$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Wówczas

$$(1) \quad S_1 + S_2 + \dots + S_n = a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + \dots + na_1,$$

co można wykazać za pomocą poniższej tabelki, po lewej stronie. Ta tożsamość rozwiązuje zadania 4 i 5.

| | | | |
|----------|----------|----------|-------|
| a_1 | | | |
| a_1 | a_2 | | |
| \vdots | \vdots | \ddots | |
| a_1 | a_2 | \dots | a_n |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|--|
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | • | | | | • | | | | |
| 1 | | • | | • | | • | | • | | • | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |

Podobne rozumowanie możemy stosować, zliczając wierszami i kolumnami pary liczb naturalnych spełniające określone warunki, gdyż każda taka para ma swoje miejsce w odpowiedniej tabeli.

Przykładowo policzmy wierszami i kolumnami pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$, gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą, zaś $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ (w tabeli wyżej, po prawej: $n = 11$ i $p = 2$). Pozostawimy Czytelnikowi zauważenie, że doprowadza to nas do *twierdzenia Legendre'a*: liczba pierwsza p występuje w rozkładzie liczby $n!$ na czynniki pierwsze z wykładnikami $[n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \dots$

Takie podejście jest skuteczne w zadaniach 6 i 7.

Zadania

- Znając wzory $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ i $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, wyprowadzić wzór na $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.
- Udowodnić, że dla liczb całkowitych $b > a > 0$ zachodzi nierówność $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{b} > 2 \cdot \frac{b-a}{b+a}$.
- Dowieść, że $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}$ dla naturalnych $n \geq 3$.
- Wykazać, że dla naturalnych n zachodzą następujące równości:
 - $n \cdot 2^0 + (n-1) \cdot 2^1 + (n-2) \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} - n - 2$,
 - $1 \cdot n + 3 \cdot (n-1) + 5 \cdot (n-2) + \dots + (2n-1) \cdot 1 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.
- Niech $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$ dla całkowitych dodatnich k . Udowodnić, że $H_1 + H_2 + \dots + H_{n-1} = n(H_n - 1)$ dla naturalnych $n \geq 2$.
- Niech $d(k)$ oznacza liczbę dzielników liczby naturalnej k , zaś H_n – jak w poprzednim zadaniu. Dowieść, że $H_n - 1 < \frac{d(1)+d(2)+\dots+d(n)}{n} \leq H_n$.
- Wykazać, że dla każdego naturalnego $n \geq 2$ zachodzi równość $[\sqrt{2n}] + [\sqrt{3n}] + \dots + [\sqrt{nn}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \dots + [\log_n n]$.
- Niech $d(k)$ będzie jak w zadaniu 6. Ustalmy liczbę rzeczywistą $x > 1$. Dowieść, że dla wszystkich naturalnych $n \geq 1$ zachodzi nierówność $\frac{d(1)}{x^1} + \frac{d(2)}{x^2} + \dots + \frac{d(n)}{x^n} < \frac{1}{x^1-1} + \frac{1}{x^2-1} + \dots + \frac{1}{x^n-1}$.
- Liczby całkowite a_1, a_2, \dots, a_n spełniają równości $a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2a_1$. Udowodnić, że jeśli m jest liczbą różnych dzielników pierwszych iloczynu $a_1 a_2 \dots a_n$, to $(a_1 a_2 \dots a_n)^{m-1} \geq (n!)^m$.

Wskazówki do zadań
 1. Zauważ, że $(1+k)^3 + (n-k)^3 = 3n^2 - 3n + 1$.
 2. Udowodnić nierówność $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{b} > 2 \cdot \frac{b-a}{b+a}$.
 3. Zauważ, że $(1+k) + (n-k) \geq n$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Ponadto dla $k \neq 0, n-1$ nierówność jest ostra.
 4. (a) Skorzystaj z tożsamości (1) dla ciągu $a_k = 2^{k-1}$.
 (b) Jak wyżej, dla $a_k = 2k - 1$. Przyda się też równość $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$.
 5. Skorzystaj z tożsamości (1) dla $a_k = \frac{1}{k}$, gdzie $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.
 6. Rozważaj takie pary (a, b) , dla których $b \mid a$, gdzie $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$. Porównaj liczbę takich par z liczbą n .
 7. W tabeli dla $a, b \in \{2, 3, \dots, n\}$ zaznaczamy takie pary (a, b) , dla których $a \leq n$. Wówczas w a-tej kolumnie mamy $\log_a n$ liczb b takich, że $a^b \mid n$.
 8. Ponieważ $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n} < \frac{1}{x-1}$ dla $x > 1$.
 9. W tabeli dla $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ zaznaczamy takie pary (a, b) , dla których $a \leq n$ i $p^b \mid a$.
 10. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 11. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 12. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 13. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 14. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 15. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 16. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 17. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 18. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 19. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 20. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 21. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 22. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 23. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 24. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 25. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 26. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 27. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 28. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 29. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 30. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 31. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 32. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 33. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 34. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 35. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 36. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 37. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 38. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 39. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 40. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 41. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 42. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 43. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 44. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 45. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 46. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 47. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 48. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 49. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 50. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 51. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 52. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 53. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 54. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 55. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 56. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 57. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 58. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 59. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 60. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 61. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 62. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 63. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 64. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 65. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 66. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 67. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 68. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 69. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 70. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 71. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 72. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 73. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 74. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 75. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 76. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 77. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 78. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 79. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 80. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 81. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 82. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 83. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 84. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 85. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 86. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 87. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 88. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 89. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 90. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 91. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 92. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 93. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 94. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 95. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 96. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 97. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 98. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 99. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.
 100. Wierszami i kolumnami policzmy pary (a, b) , dla których $p^b \mid a$.

KATEGORIA
NAUKOWA A+

WSPÓŁPRACA
MIĘDZYNARODOWA

INSTYTUCJONALNA
OCENA
WYRÓŻNIAJĄCA
PKA

PONAD 1100
STUDENTÓW
W 2019 R.

**DLACZEGO
REALIZOWAĆ
STUDIA NA
WYDZIALE
FIZYKI UW?**

CO 35 LAUREAT
STYPENDIUM
MNISW UCZY
SIĘ U NAS

STUDIA
W POŁĄCZENIU
Z PRACĄ
BADAWCZĄ

OGÓLNODOSTĘPNA
PRACOWNIA
I SALE PRACY
WŁASNEJ

NASI BADACZE
REALIZUJĄ
GRANTY ERC