



oeseio

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$II=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot s$ $h=3,141592$

NR 2 (549) 2020

CENA 5,5 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

Zabawa
zapałkami
str. 6

UNIwersYTET
WARSZAWSKI






9 770137 300007 02



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (549)

Problem komiwojażera w praktyce <i>Łukasz Kowalik</i>	str. 1
Trudniej, a łatwiej <i>Piotr Chrząstowski-Wachtel</i>	str. 4
 Zadania	str. 5
Zabawa zapałkami <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 6
O trójkątach na sferze <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 8
 Trudny model poznawczy – życie <i>Magdalena Fikus</i>	str. 10
Komputer kwantowy Google'a – przełom czy PR? <i>Rafał Demkowicz-Dobrzański</i>	str. 11
Trójkąt harmoniczny – bliźniak trójkąta Pascala <i>Karol Gryszka</i>	str. 12
O nierównościach typu Diananda-Shapiro <i>Piotr Kumor</i>	str. 14
Spadek swobodny z księżycowej orbity <i>Andrzej Soltan</i>	str. 15
Klub 44	str. 17
Prosto z nieba: Zaskakująco dużo gazu w „martwych” galaktykach	str. 22
Niebo w lutym	str. 22
Aktualności Czy Słońce jest częścią układu podwójnego gwiazd?	str. 24
 Kochajcie trygonometrię, dziewczęta <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze piszemy,
jak wyjść z więzienia.



Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wymolek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Problem komiwojażera w praktyce

*Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Łukasz KOWALIK*

Korzystając z popularnych serwisów internetowych, błyskawicznie znajdziemy najkrótszą trasę między dwoma miastami. A co, gdybyśmy chcieli znaleźć najkrótszą trasę, która pozwoli po wyruszeniu z domu odwiedzić wszystkie interesujące nas miasta i wrócić do punktu wyjścia? Możemy to pytanie sformalizować w następujący sposób. Wybrane miasta (wraz z tym, w którym mieszkamy) numerujemy od 1 do n . Zakładamy, że mamy tabelę $n \times n$ o wartościach d_{ij} dla $i, j = 1, \dots, n$, gdzie d_{ij} oznacza odległość (np. podaną przez nasz ulubiony serwis) z miasta i do miasta j . Tabela jest symetryczna, tzn. $d_{ij} = d_{ji}$. Naszym celem jest znalezienie kolejności odwiedzania miast, czyli permutacji v_1, \dots, v_n , która minimalizuje długość trasy, tzn. $\sum_{i=0}^n d_{v_i v_{i+1}}$, przyjmując $v_0 = v_n$. To zadanie znane jest jako *problem komiwojażera* i od kilkudziesięciu lat spędza sen z oczu informatykom.

Z jednej strony jest to problem NP-trudny, a najlepszy w sensie złożoności pesymistycznej algorytm działa w czasie $O(2^n n^2)$. Z drugiej strony, istnieją implementacje, które dla instancji pochodzących ze świata rzeczywistego uzyskują spektakularne wyniki (tabela poniżej), ale ich pesymistyczna złożoność czasowa nie jest znana.

rok	autorzy	liczba miast
1954	Dantzig, Fulkerson, Johnson	49
1977	Grötschel	120
1987	Padberg, Rinaldi	2 392
2004	Applegate, Bixby, Chvátal, Cook, Helsgaun	24 978
2016	Cook, Espinoza, Goycoolea, Helsgaun	49 603

Wszystkie powyższe rekordy dotyczą optymalnych rozwiązań dla rzeczywistych map połączeń drogowych (w USA, Niemczech, Szwecji), z wyjątkiem rekordu Manfreda Padberga i Giovanniego Rinaldiego, którzy znaleźli najkrótszą trasę dla wiertarki wierzącej otwory w płycie obwodu drukowanego. Aktualnie rozwiązanie problemu na zwykłym laptopie dla 1000 miast to kwestia kilkudziesięciu sekund, ale już wynik z ostatniego wiersza tabelki (2016) uzyskano za pomocą 310 procesorów pracujących przez 8 miesięcy. Choć pierwszy wiersz tabelki wygląda skromnie, w rzeczywistości stanowi wielkie osiągnięcie, a kolejne rekordy były wynikiem rozwinięcia technik wypracowanych przez George'a Dantziga, Delberta Fulkersona i Selmera Johnsona. W dalszej części artykułu zobaczymy, jak działa ich metoda na nieco bliższym nam przykładzie 51 dużych miast w Polsce.

Kluczowy pomysł polega na zapisaniu naszego problemu jako zbioru równań i nierówności liniowych. Dla każdej pary różnych miast $i, j = 1, \dots, 51$ wprowadzmy zmienną x_{ij} , przy czym x_{ij} oraz x_{ji} traktujemy jako dwie nazwy tej samej zmiennej. Na początek przyjmijmy, że

zmienne x_{ij} mogą przyjmować tylko dwie wartości: 0 i 1. Myślimy o nich w ten sposób, że połączenie między i oraz j jest używane w naszym rozwiązaniu wtedy i tylko wtedy, gdy $x_{ij} = 1$. Zauważmy, że długość takiej trasy wynosi $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} x_{ij}$.

Czy możemy za pomocą prostych równań i nierówności wymusić, aby spełniające je wartości zmiennych odpowiadały dokładnie możliwym trasom komiwojażera (czyli cykлом długości n)? Pierwsza obserwacja jest prosta: dla każdego miasta i dokładnie *dwie* zmienne x_{ij} powinny mieć wartość 1, co można wyrazić jako $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 2$. To jednak nie wystarczy, gdyż zamiast jednej trasy moglibyśmy dostać kilka krótszych, rozłącznych cykli (w skrajnym przypadku $n/3$ rozłącznych trójkątów).

Aby zagwarantować, że miasta z pewnego zbioru S nie tworzą krótszej trasy, możemy dodać warunek *eliminacji podtras*, który mówi, że do tego zbioru musimy co najmniej jeden raz wejść i co najmniej jeden raz z niego wyjść. Zwykle ten warunek zapisujemy w równoważnej formie $\sum_{i, j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1$ (czyli $\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 2$). Równoważność łatwo dostaniemy, mnożąc oryginalną nierówność przez -1 , dodając do niej równość $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 2$ dla wszystkich $i \in S$ i dzieląc otrzymaną nierówność przez 2. Niestety, taki warunek musimy dodać dla każdego zbioru miast S o mocy między 3 a $\lfloor n/2 \rfloor$. Otrzymujemy następujące zadanie, które jest przykładem tzw. *programu liniowego całkowitoliczbowego*.

Zminimalizuj $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij} x_{ij}$ przy ograniczeniach

- $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 2$, dla $i = 1, \dots, n$,
- $\sum_{i, j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1$, dla $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ i $3 \leq |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,
- $x_{ij} \in \{0, 1\}$, dla $1 \leq i < j \leq n$.

Skąd pomysł na zapisanie problemu w języku równań i nierówności liniowych? Otóż teraz rozluźniamy założenia naszego zadania: warunki $x_{ij} \in \{0, 1\}$ zamieniamy na $0 \leq x_{ij} \leq 1$ i szukamy rozwiązania w liczbach rzeczywistych. Wówczas otrzymujemy tzw. *program liniowy*. Tak się składa, że nasi bohaterowie umieli szybko rozwiązywać programy liniowe, gdyż jeden z nich, George Dantzig, w 1947 roku opublikował do dziś najskuteczniejszy w praktyce algorytm realizujący ten cel, nazywany algorytmem *simplex*. Jest on obecnie dostępny w bibliotekach dla wielu popularnych języków programowania, np. przygotowując ten artykuł, użyliśmy modułu PuLP dla języka Python.

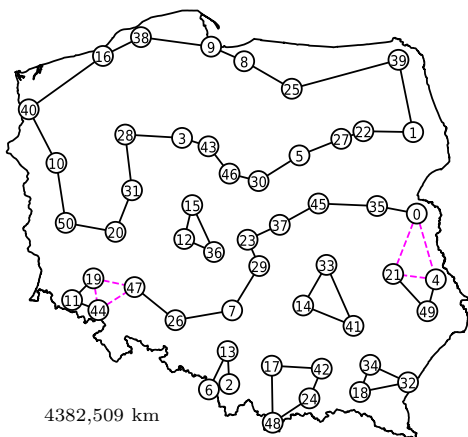
Plan jest następujący. Jeśli szczęśliwie jako rozwiązanie optymalne naszego programu liniowego dostaniemy same zera i jedynki, to będą one definiowały pewną trasę, która musi być optymalna, ponieważ *każda* trasa komiwojażera spełnia wszystkie warunki programu. Niestety może się okazać, że dostaniemy rozwiązanie *ułamkowe*, w którym niektóre zmienne będą miały wartość w przedziale $(0, 1)$. Wtedy będziemy musieli jakoś zareagować.

Dodatkowy kłopot polega na tym, że nasz program liniowy ma gigantyczną liczbę warunków eliminacji podtras: tylko dla $|S| = 25$ jest ich $\binom{51}{25} = 247\,959\,266\,474\,052$. To za dużo nawet dla współczesnych komputerów. Pomysł Dantziga i jego kolegów polegał na tym, aby zacząć od prostego programu liniowego postaci:

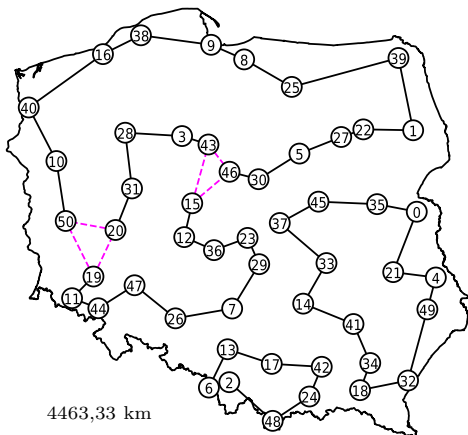
Zminimalizuj $\sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij}x_{ij}$ przy ograniczeniach

- $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 2$, dla $i = 1, \dots, n$,
- $0 \leq x_{ij} \leq 1$, dla $1 \leq i < j \leq n$;

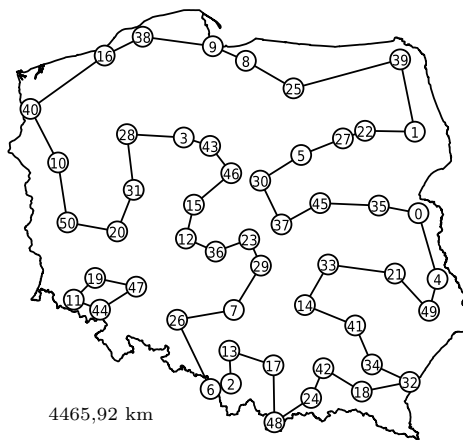
a następnie dodawać warunki w miarę potrzeby. Taki program ma $\binom{51}{2} = 1275$ zmiennych i 2601 warunków liniowych. Uruchamiamy na komputerze algorytm simplex i w ułamku sekundy dostajemy poniższe rozwiązanie.



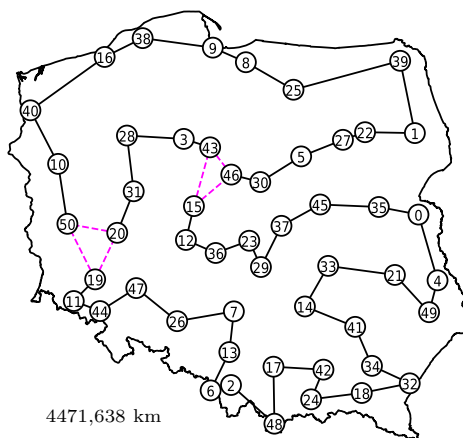
Liniami ciągłymi oznaczyliśmy zmienne o wartości 1, natomiast przerywanymi o wartości $\frac{1}{2}$ (innych ułamkowych wartości w uzyskanym rozwiązaniu nie było). Widzimy, że możemy dodać warunki eliminacji podtras dla zbiorów $\{14, 33, 41\}$, $\{2, 6, 13\}$, $\{32, 34, 18\}$, $\{17, 24, 42, 48\}$ oraz $\{12, 15, 36\}$. Choć miasta 4, 21 i 49 nie utworzyły krótkiego cyklu, zauważmy, że dla $S = \{4, 21, 49\}$ oraz dla $S = \{11, 44, 19\}$ warunek eliminacji podtras też nie jest spełniony; dodajemy więc jeszcze te dwa warunki i ponownie uruchamiamy algorytm.



W nowym rozwiązaniu mamy nowe krótkie cykle, dodajemy warunki eliminacji podtras dla kolejnych dwóch zbiorów $\{2, 6, 13, 17, 42, 24, 48\}$ oraz $\{4, 21, 0, 35, 45, 37, 33, 14, 41, 34, 18, 32, 49\}$ i generujemy kolejne rozwiązanie.



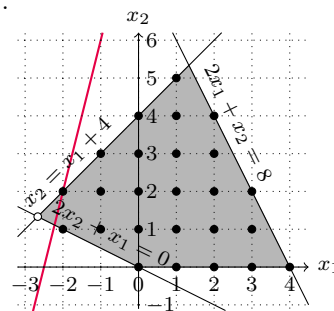
Otrzymaliśmy dwa cykle, a więc dodajemy warunek eliminacji podtras dla krótszego z nich o zbiorze wierzchołków $\{11, 19, 44, 47\}$. Efekt kolejnego uruchomienia algorytmu simplex widzimy poniżej.



Niestety *wszystkie* warunki eliminacji podtras są spełnione, a jednak nie uzyskaliśmy pojedynczego cyklu. Jest to spowodowane dopuszczeniem ułamkowych wartości zmiennych. Ratunkiem w takiej sytuacji jest znalezienie nowej nierówności, którą spełniają trasy komiwojażera, ale nie spełnia jej nasze rozwiązanie. Takie nierówności nazywamy *plaszczynami odcinającymi*. Dlaczego? Wyobraźmy sobie, że nasz program liniowy ma tylko dwie zmienne, a wszystkie warunki to nierówności. Wówczas zbiór punktów spełniających te warunki jest wielokątem na płaszczyźnie, jak poniżej.

Zminimalizuj x_1 przy ograniczeniach

- $x_2 \leq x_1 + 4$,
- $2x_1 + x_2 \leq 8$,
- $2x_2 + x_1 \geq 0$,
- $x_2 \geq 0$.



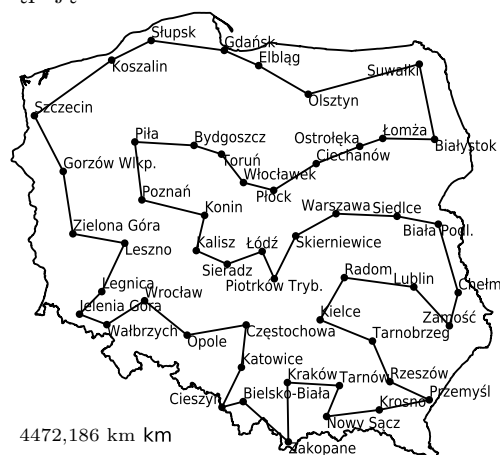
Algorytm simplex ma tę własność, że zwraca nam rozwiązanie optymalne, które jest wierzchołkiem wielokąta. Tymczasem my szukamy całkowitoliczbowego rozwiązania optymalnego. Możemy wówczas do programu liniowego dodać nierówność, która oddzieli nasz wierzchołek od wszystkich punktów o współrzędnych całkowitych wewnątrz wielokąta, odcinając fragment wielokąta

za pomocą linii prostej (na rysunku fioletowa linia jest przykładem takiej prostej). W wyniku tej procedury możemy znów dostać rozwiązanie niecałkowitoliczbowe, wówczas powtarzamy operację. Z analogiczną sytuacją mamy do czynienia w większej liczbie wymiarów, gdzie uogólnieniem linii jest hiperpłaszczyzna.

Wróćmy do ostatniego rozwiązywania i spójrzmy na trójkąt $H = \{19, 20, 50\}$, którego krawędzie odpowiadają zmiennym połówkowym $x_{19,20}$, $x_{20,50}$ i $x_{50,19}$, oraz na sąsiadujące z nim połączenia $T = \{19,11, 20,31, 50,10\}$. W naszym rozwiązaniu suma $s = x_{19,20} + x_{20,50} + x_{50,19} + x_{19,11} + x_{20,31} + x_{50,10}$ wynosi $4\frac{1}{2}$. Tymczasem w dowolnej trasie komiwojażera $s \leq 4$. Dlaczego? Z warunku $\sum_{j \neq i} x_{ij} = 2$ dla $i \in H$ wiemy, że

$$\begin{aligned} x_{19,20} + x_{19,50} + x_{19,11} &\leq 2, \\ x_{20,19} + x_{20,50} + x_{20,31} &\leq 2, \\ x_{50,20} + x_{50,19} + x_{50,10} &\leq 2. \end{aligned}$$

Dodając stronami te nierówności i trywialną $\sum_{e \in T} x_e \leq |T|$, otrzymujemy $2s \leq 9$. Ale jeśli zmienne opisują trasę komiwojażera, to s jest liczbą całkowitą, a wtedy otrzymana nierówność jest równoważna $2s \leq 8$, czyli $s \leq 4$. Zachęcamy w tym miejscu Pracowitego Czytelnika, aby wykazał, że ogólniej, dla dowolnego zbioru miast H i nieparzystej liczby połączeń T wychodzących z H , $\sum_{i,j \in H, i < j} x_{ij} + \sum_{i \in T} x_{ij} \leq |H| + \frac{|T|-1}{2}$. Są to tzw. nierówności 2-skojarzeniowe, gdyż zostały odkryte w kontekście problemu skojarzeń w grafach. Do naszego programu dodajmy nierówność 2-skojarzeniową $s \leq 4$, która pozwoli się pozbyć połówkowego trójkąta $\{19, 20, 50\}$. Okazuje się, że w rozwiązaniu optymalnym takiego programu liniowego wszystkie zmienne mają już wartość 0 lub 1, a odpowiadające im rozwiązania tworzy pojedynczy cykl, a więc jest optymalną trasą komiwojażera. Wygląda ona następująco.



Dantzig z kolegami nie odkryli nierówności 2-skojarzeniowych, podobnie jak w naszym przykładzie nierówności eliminacji podtras nie były wystarczające, więc musieli użyć dwóch dziwnych nierówności. W kolejnych latach odkryto metody automatycznego znajdowania płaszczyzn odcinających, jednak wciąż najbardziej skuteczne okazują się rodziny płaszczyzn (czyli po prostu nierówności) projektowane z myślą o konkretnym problemie, jak nasze nierówności 2-skojarzeniowe. Dla problemu komiwojażera odkryto wiele takich rodzin. Dla niektórych z nich jesteśmy w stanie szybko (w czasie wielomianowym) znajdować nierówność niespełnioną przez dane rozwiązanie, o ile taka istnieje (jest to

możliwe dla nierówności eliminacji podtras i nierówności 2-skojarzeniowych). Dla innych stosujemy heurystyki, które wprowadzicie działają szybko, ale mogą pozostawić jakąś niespełnioną nierówność.

Dociekliwy Czytelnik na pewno zadaje sobie teraz pytanie, co się dzieje, gdy program rozwiązujący problem komiwojażera nie miał tyle szczęścia co my z mapą Polski i w pewnym kroku generuje rozwiązanie, które nie jest całkowitoliczbowe, a mimo to wszystkie rodziny nierówności, które jest w stanie sprawdzić, są spełnione. Odpowiedź jest prosta: wówczas używa się brutalnej siły. Wybieramy dowolną zmienną x_{ij} o wartości w przedziale $(0, 1)$ i rekurencyjnie rozwiązujemy dwa podproblemy. W pierwszym dodajemy warunek $x_{ij} = 1$, w drugim $x_{ij} = 0$. Zauważmy, że każda optymalna trasa komiwojażera spełnia warunki dokładnie jednego z tych podproblemów. W każdym z podproblemów możemy znowu szukać płaszczyzn odcinających i rozgałęziać się na kolejne podproblemy. W ten sposób znajdziemy wiele tras komiwojażera, z których najkrótza będzie optymalna.

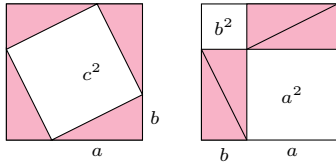
Liczba podproblemów może szybko wymknąć się spod kontroli, bo k poziomów rozgałęzień to 2^k podproblemów. Z pomocą przychodzi wówczas heurystyki znajdujące niekoniecznie optymalne trasy komiwojażera (obecnie najskuteczniejsza, heurystyka Lina–Kernighana–Helsgauna, dla mapy świata zawierającej 1904711 miast znajduje trasę dłuższą od optymalnej o co najwyżej 0,023 %). Powiedzmy, że heurystyka znalazła nam trasę komiwojażera o długości u , i rozważmy podproblem, w którym wartość rozwiązania optymalnego programu liniowego wynosi l . Każda trasa, którą możemy znaleźć w tym podproblemie, będzie miała długość co najmniej l , a więc jeśli $l \geq u$, to taki podproblem możemy zignorować, gdyż nie pozwoli on znaleźć lepszej trasy niż ta, którą już mamy. Dzięki temu możliwe jest znaczne ograniczenie szybkiego wzrostu liczby podproblemów.

Okazuje się, że dla danych pochodzących ze świata rzeczywistego i dostatecznie bogatych rodzin płaszczyzn oddzielających liczba generowanych podproblemów nie jest astronomiczna. Jest to jednak jedynie obserwacja empiryczna. W 2018 roku Stefan Hougardy i Xianghui Zhong wymyślili sposób generowania sztucznych, wyjątkowo trudnych instancji problemu komiwojażera. Na podstawie testów oszacowali, że Concorde, najlepszy obecnie program korzystający z naszkicowanej w tym artykule metody, uruchomiony na współczesnym komputerze potrzebuje $3 \cdot 10^{22}$ lat obliczeń dla wygenerowanej przez nich instancji 1000 miast. To pokazuje, że przynajmniej na razie NP-trudności problemu nie dało się oszukać. Na szczęście duże instancje problemu komiwojażera rozwiązane optymalnie lub niemal optymalnie pokazują, że świat wokół nas rzadko jest aż tak złośliwy jak generator Hougardy'ego i Zhonga.

Optymalna trasa dla 51 polskich miast zaprezentowana w tym artykule została obliczona na podstawie tabeli 1275 długości najkrótszych połączeń drogowych między nimi, znalezionych za pomocą serwisu Google maps we wrześniu 2019 roku. Dane oraz prosty skrypt w języku Python, który znajduje optymalną trasę i tworzy rysunki do tego artykułu, są dostępne na github.com/lkowalik/tsp. Zachęcamy do eksperymentów!

Trudniej, a łatwiej

Piotr CHRZAŚTOWSKI-WACHTEL

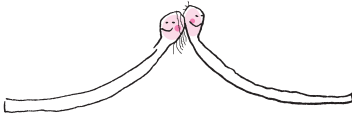


Są twierdzenia łatwe i trudne do udowodnienia. Zazwyczaj im mocniejsze sformułowanie, obejmujące więcej przypadków, tym trudniej się je dowodzi. Tak jest na przykład z twierdzeniem cosinusów i twierdzeniem Pitagorasa, które jest jego szczególnym przypadkiem. Łatwiej jest udowodnić twierdzenie Pitagorasa; można to zrobić nawet w sposób zrozumiały dla przedszkolaka (zobacz rysunek obok). Do dowodu twierdzenia cosinusów trzeba przynajmniej wiedzieć, co to cosinus, w szczególności kąta rozwartego.

Jest jednak metoda dowodzenia, w której dowody mocniejszych twierdzeń bywają łatwiejsze niż ich sformułowań mniej ogólnych. To indukcja matematyczna.

Weźmy taki przykład. Postarajmy się udowodnić, że suma sześciątów początkowych n liczb naturalnych jest pełnym kwadratem, czyli kwadratem pewnej liczby naturalnej. Spróbujmy dowodu indukcyjnego. Sprawdzamy bazę dla $n = 1$. Działa: $1^3 = 1^2$, czyli suma pojedynczego sześciątka jedynki jest kwadratem jedności (dla $n = 0$ zresztą też działa!). Załóżmy teraz, że $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = m^2$ dla pewnego naturalnego m . Mamy wykazać, że $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = m'^2$ dla pewnej liczby naturalnej m' . Stosujemy założenie indukcyjne: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = m^2 + (n+1)^3 \dots$ i klops! Tego się nie da już doprowadzić do niczego sensownego. Dowód się zaczyna.

Wystarczy jednak wzmocnić nieco tezę: nie tylko twierdzić, że jest to pełny kwadrat *jakiejś* liczby, ale ją bezpośrednio wskazać: tą liczbą jest suma początkowych n liczb naturalnych, czyli $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Nasze mocniejsze twierdzenie mówi, że $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Teraz krok indukcyjny działa bez zarzutu: Zakładamy, że $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, i dowodzimy, że $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Elementarne rachunki nas w tym upewniają: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.



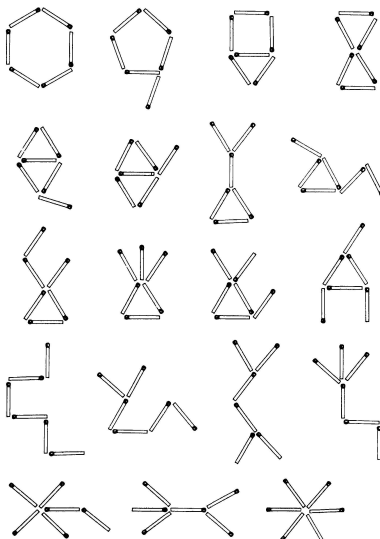
Co się stało? Po prostu z mocniejszych założeń wyciągamy więcej wniosków. A że założenie jest częściowo teżą? Tym lepiej! Nic dziwnego, że przy indukcji matematycznej krok indukcyjny dowodzi się prościej, gdy założenie jest silniejsze. Zobaczmy jeszcze jeden przykład.

Spróbujmy wykazać, że dla każdego n wartość $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} = \sum_{k=1}^n k^{-3}$ jest mniejsza od $\frac{5}{4}$. Gdybyśmy użyli zwykłej indukcji, to co prawda baza indukcji by była prawdziwa, bo $1 < \frac{5}{4}$, ale z krokiem indukcyjnym byłoby już trudniej. Załóżmy bowiem, że $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$. Mamy wykazać, że $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4}$. I widać gołym okiem, że założenie indukcyjne do niczego nam się nie przyda. Co z tego, że suma odwrotności sześciątów aż do n włącznie jest mniejsza od $\frac{5}{4}$, skoro nie wiemy, o ile jest mniejsza i czy $\frac{1}{(n+1)^3}$ tam się jeszcze zmieści?

Widać, że dużego pola manewru nie mamy. Po prostu założenie indukcyjne było zbyt słabe. Spróbujmy zatem wzmocnić tezę, twierząc, że nie tylko ta suma jest mniejsza od $\frac{5}{4}$, ale wręcz od $\frac{5}{4} - \frac{1}{n^2}$.

Co? Że to wcale nie jest prawda? Faktycznie: już dla $n = 1$ ta nierówność nie zachodzi. Dla $n = 2$ również, nawet dla $n = 3$ okazuje się, że $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27}$ przekracza wartość $\frac{5}{4} - \frac{1}{9}$. Ale dla $n = 4$ już jest OK: $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} < \frac{5}{4} - \frac{1}{16}$, co można sprawdzić za pomocą kalkulatora, albo nawet bez.

Teraz już jest łatwo. Stawiamy hipotezę indukcyjną, że dla $n \geq 4$ zachodzi $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2}$. Baza już jest udowodniona. Pozostaje krok indukcyjny. Zakładamy zatem, że $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2}$, i wykazemy, że $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2}$. To już jest proste.



Wszystkie topologicznie różne układy sześciu zapalek; szczegóły w artykule Jarosława Górnickiego *Zabawa zapalkami* (str. 6).

Mamy bowiem na mocy założenia indukcyjnego $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^3}$, a wykazanie, że prawa strona tej nierówności jest mniejsza od $\frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2}$, to już jest elementarna algebra. Wystarczy obie strony przemnożyć przez niewątpliwie dodatnią wartość $n^2(n+1)^3$ i zredukować powstałą nierówność do równoważnej oczywistej $-n^2 - 3n - 1 < 0$.

W ten sposób udowodniliśmy, że nierówność ta zachodzi dla wszystkich $n \geq 4$. Przypadki, gdy $n < 4$, możemy sprawdzić ręcznie – ostatecznie dla $n = 0, 1, 2, 3$ liczb po prostu wyjściowa nierówność jest spełniona z prawą stroną równą $\frac{5}{4}$, a dla $n \geq 4$ nawet mocniejsza, z odjętym składnikiem $\frac{1}{n^2}$ po prawej stronie.

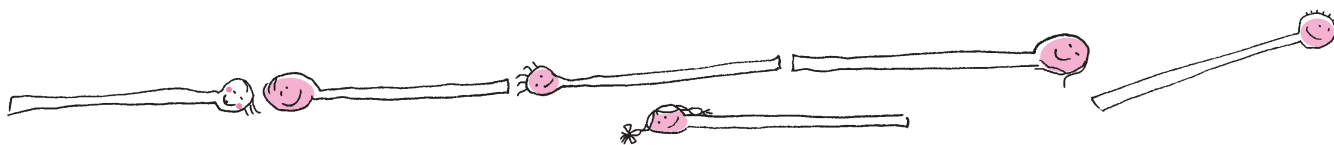
Przy okazji można zadać narzucające się pytanie: czy $\frac{5}{4}$ jest najlepszym przybliżeniem sumy nieskończonego szeregu odwrotności sześcianów? Wiemy, że ciąg jego sum częściowych rośnie wraz z n i ma ograniczenie górne, więc z twierdzenia Weierstrassa wynika, że ma granicę. Czy jest nią $\frac{5}{4}$? Nie. Można lepiej oszacować tę wartość z góry. Próbowało tego wielu matematyków; pierwszym chyba był Euler, któremu nie udało się rozwiązać zagadki do końca. Podał co prawda związek tej granicy, z której istnienia zdawał sobie zresztą sprawę, z innymi sumami parzystych potęg odwrotności liczb naturalnych.

Choć udało mu się wyznaczyć dokładne postacie granic szeregów z drugimi i czwartymi potęgami, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, to na trzeciej potędze się zaciął.

Nic dziwnego. Mimo z górą dwustuletnich starań matematyków do dziś nie znamy wyrażenia definiującego tę wartość; nie wiemy, czy w ogóle takie wyrażenie istnieje. Znamy ponad bilion (czyli 10^{12}) cyfr rozwinięcia dziesiętnego tej liczby, którego początek to 1,2020569031595942853997381615. Wiemy, że jest to liczba niewymierna, choć zostało to udowodnione dopiero w roku 1978 przez francuskiego matematyka Rogera Apéry'ego i od jego nazwiska stała ta jest od tej pory nazywana stałą Apéry'ego. Pojawia się ona zresztą w naturalny sposób przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień fizycznych, jak wyznaczanie współczynnika żyromagnetycznego (ilorazu momentu magnetycznego przez moment obrotowy), a także informatycznych przy analizie minimalnych losowych drzew rozpinających graf.

Nie wiemy do tej pory, czy liczba ta jest algebraiczna i czy kiedykolwiek poznamy jej symboliczną postać odnoszącą się na przykład do znanych stałych, takich jak π czy e . Zagadkowa sprawa.

Liczba jest algebraiczna, jeśli jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych. Na przykład $\sqrt{2}$ jest algebraiczny, ponieważ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 - 2$.



Zadania

Przygotował *Lukasz BOŻYK*

W poniższych zadaniach przyjmujemy, że wieża szachowa *atakuje* inną wieżę, jeśli znajduje się w tej samej linii szachownicy (tj. wierszu lub kolumnie) i pomiędzy nimi w tej linii nie znajduje się żadna inna wieża.

M 1627. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, aby każda wieża była atakowana przez dokładnie jedną inną wieżę.

Rozwiązanie na str. 9

M 1628. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, aby każda wieża była atakowana przez dokładnie dwie inne wieże.

Rozwiązanie na str. 9

M 1629. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wież szachowych, które można umieścić na szachownicy $m \times n$ w taki sposób, aby każda wieża, która nie znajduje się w narożniku szachownicy, była atakowana przez dokładnie trzy inne wieże.

Rozwiązanie na str. 16

Przygotował *Andrzej MAJHOFER*

F 993. W kolejnych próbach na torze kierowca sprawdza, jaką maksymalną prędkość osiąga nowy model sportowego samochodu. W pierwszej próbie jechał bez pasażerów i osiągnął prędkość $v_1 = 200$ km/godz. Podczas drugiej próby zabrał do kabiny samochodu 4 inżynierów. Oszacuj, jaką prędkość v_2 kierowca osiągnął w drugiej próbie, jeżeli samochód z kierowcą ma masę 1200 kg, a każdy z inżynierów to dodatkowe 80 kg. Próby były wykonywane w takich samych warunkach i nie zostały w nich osiągnięte granice „wydolności” silnika.

Rozwiązanie na str. 14

F 994. W słynnym doświadczeniu Ottona von Guerickego dwa zaprzęgi po 8 koni rozrywały dwie szczelnie przylegające do siebie miedziane półkule, z których wnętrza wypompowano powietrze. Zakładając, że wewnątrz półkul o średnicy $d = 42$ cm była niemal doskonała próżnia, oszacuj siłę potrzebną do ich rozerwania.

Rozwiązanie na str. 8

Zabawa zapalkami

Jarosław GÓRNICKI*

Jeśli czytasz ten tekst, to świetnie się składa, możesz poznać drobny fragment topologii i zmierzyć się z następującym pytaniem:

Problem. Ile topologicznie różnych figur można ułożyć na płaszczyźnie z sześciu zapalek, które stykają się tylko końcami?

Dlaczego mówimy o topologicznej, a nie geometrycznej równości figur? Powód jest dość oczywisty, w geometrii euklidesowej dwie figury uznajemy za równe, gdy istnieje ruch sztywny, który przenosi jedną z nich na drugą. Z tego punktu widzenia w geometrii ilość różnych figur jest tak ogromna, że nikt nawet nie rozważa pomysłu ich katalogowania. Topologia (w odróżnieniu od bardzo bogatej w szczegóły geometrii) uwydatnia najistotniejsze cechy figur, zapominając o reszcie.

Figury A i A' nazywamy *topologicznie równymi* (homeomorficznymi), gdy istnieje wzajemnie jednoznaczne przekształcenie h figury A na figurę A' takie, że przekształcenia h i do niego odwrotne h^{-1} są ciągłe. Przekształcenie h o tych własnościach nazywamy *homeomorfizmem*. Mówiąc obrazowo, homeomorfizm to przekształcenie jednej figury na drugą, które nic nie rozrywa, nic nie skleja i dba o to, by bliskie punkty jednej figury przeprowadzić na bliskie punkty drugiej figury. Ale uwaga, nie oznacza to, że zawsze można fizycznie przekształcić jedną figurę na drugą, deformując ją stopniowo w sposób ciągły i różnowartościowy. Węzeł

trójlistnik (są dwa, lewo- i prawoskrętny, rys. 1) i okrąg są homeomorficzne, ale w przestrzeni trójwymiarowej bez użycia chirurgii (rozcinania i sklejania), przez żadne wyginanie, ściskanie, rozciąganie nie można zrobić jednego z drugiego. Banalna jest obserwacja, że okrąg i brzeg trójkąta są figurami homeomorficznymi. Gdy umieścimy brzeg trójkąta w obszarze ograniczonym okręgiem, to projekcja radialna jest homeomorfizmem przeprowadzającym jedną z tych figur na drugą (rys. 2). Podobnie nierozróżnialne z topologicznego punktu widzenia są litery E, F, T, Y.

Wykazanie topologicznej równości dwóch figur zawsze wymaga wskazania między nimi homeomorfizmu. A jak wykazać, że figury nie są homeomorficzne? Wystarczy podać własność, która nie zmienia się przy homeomorfizmach i przysługuje jednej z nich, a nie przysługuje drugiej. Skoro przekształcenia homeomorficzne nie pozwalają na rozrywanie figury ani na jej sklejanie, to najprostszymi niezmiennikami homeomorfizmów są:

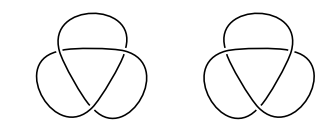
1. liczba *kawałków* (= maksymalnych części spójnych), z których składa się figura;
2. ilość punktów rozdzielających figury, tj. ilość takich punktów figury, których usunięcie z figury powoduje jej rozpad na rozłączne kawałki;
3. indeksy punktów, tj. liczba łuków, które schodzą się w danym punkcie.

Ponieważ w badaniu niehomeomorficzności figur nie wszystkie niezmienniki są tak samo skuteczne, więc bardzo pożądana jest znajomość wielu różnych niezmienników homeomorfizmów, im więcej, tym lepiej. Zobaczmy na przykładach, jak to działa. Figury z rysunku 3 są homeomorficzne (są topologicznie równe).

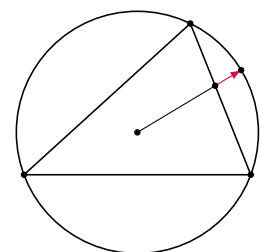
Gdy poszukujemy przekształcenia homeomorficznego między tymi figurami na płaszczyźnie, to... niczego takiego nie widać. Sytuacja zmienia się diametralnie, gdy te układy zapalek wyobrazimy sobie w przestrzeni trójwymiarowej i potraktujemy je jak elastyczną strukturę. Wówczas przekształcenie w przestrzeni trójwymiarowej polegające na „wywróceniu figury na drugą stronę przez wnętrze kwadratu” (lub przy nieruchomym kwadracie obrót „ogonka” w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny kwadratu) jest homeomorfizmem, który przeprowadza jedną figurę na drugą.

Tak działa wymiar, w przestrzeniach o wyższym wymiarze można wykonać operacje, które w niższych wymiarach nie istnieją i na niższe wymiary nie mają żadnego wpływu. Teraz wyobraź sobie, że trójlistnik (rys. 1), i każdy inny węzeł, który da się zrobić z prawdziwego sznurka, można w przestrzeni czterowymiarowej rozplątać, otrzymując okrąg, oczywiście nigdzie niczego nie rozrywając. Wystarczy, korzystając z czwartego wymiaru, łuk węzła, który jest pod spodem, przenieść na wierzch lub odwrotnie (szczegóły na końcu artykułu). W przestrzeni czterowymiarowej piłkę można wywrócić na drugą stronę, nigdzie jej nie rozrywając. Prostą analogią tej sytuacji jest przekształcenie płaskiego pierścienia. Gdy dodamy trzeci wymiar, to pierścień ten tak możemy wywrócić, by jego brzeg wewnętrzny stał się brzegiem zewnętrznym. Przekształcenia te są oczywiście homeomorfizmami.

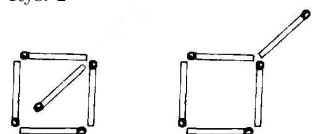
Z drugiej strony, figury z rysunków 4 i 5 nie są homeomorficzne. Figura na rysunku 5 ma jeden punkt o indeksie 4, a figura z rysunku 4 takiego punktu nie ma.



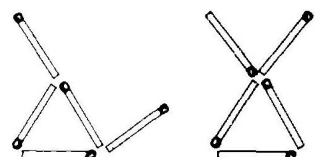
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Rys. 5

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Liczba zapalek	Liczba topologicznie różnych figur
1	1
2	1
3	3
4	5
5	10

Rys. 6

Analizując w ten sposób figury, jakie możemy utworzyć z nie więcej niż pięciu zapalek, otrzymujemy zbiory topologicznie różnych figur (rys. 6). Naturalne jest pytanie: skąd mamy pewność, że są to wszystkie możliwe topologicznie różne figury? Warto nad tym pomyśleć. Proszę również spróbować rozwiązać postawiony problem i znaleźć wszystkie topologicznie różne figury, jakie można tak utworzyć z sześciu zapalek. Aby nie psuć zabawy, rozwiązanie podajemy na stronie 4. Powiemy jednak, że na płaszczyźnie z sześciu zapalek stykających się tylko końcami można utworzyć 19 topologicznie różnych figur. Jeśli ten sam problem rozpatrzmy w przestrzeni i nie ograniczymy się jedynie do płaszczyzny, to możliwa jest tylko jedna dodatkowa konfiguracja: szkielet czworościanu. Z kolei dla siedmiu zapalek można w ten sposób utworzyć na płaszczyźnie aż 39 topologicznie różnych figur.

Budując tego typu atlasy (katalogi), porządkujemy naszą wiedzę o świecie: w postaci tablicy Mendelejewa, systematyki roślin, systematyki zwierząt itp. Jednym z podstawowych zadań topologii jest klasyfikacja różnych zbiorów: węzłów, powierzchni, rozmaitości. Topologowie chcieliby z rozmaitościami dokonać tego, czego wcześniej dokonali dla powierzchni i węzłów:

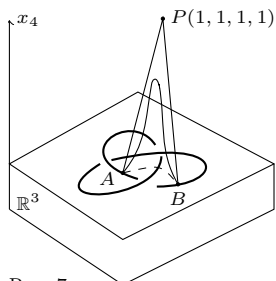
- rozstrzygnąć, kiedy dwie rozmaitości są topologicznie równe,
- sklasyfikować wszystkie możliwe rozmaitości,
- znaleźć wszystkie sposoby zanurzania jednej rozmaitości w drugiej,
- rozstrzygnąć, kiedy dwa sposoby zanurzania jednej rozmaitości w drugiej są lub nie są takie same.

Ta trudna tematyka inspiruje nowe badania przyrody (i sama jest nimi inspirowana), np. w zakresie fizyki kwantowej, biologii molekularnej, teorii chaosu, ale to temat na inny artykuł.

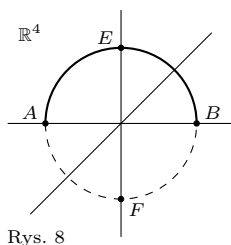
Jak homeomorficznie przekształcić trójkąt na okrąg?

(Rozumowanie geometryczne.) Węzeł T zanurzamy w przestrzeni \mathbb{R}^3 , a tę w przestrzeni \mathbb{R}^4 (rys. 7). Wybieramy punkt $P(1, 1, 1, 1)$ nieleżący w przestrzeni \mathbb{R}^3 i łączymy punkt P z każdym punktem węża T . Otrzymujemy w ten sposób „stożek”, którego podstawa jest w przestrzeni \mathbb{R}^3 , a jego powierzchnia boczna nie ma nic wspólnego z przestrzenią \mathbb{R}^3 . Chcemy łuk AB poprowadzić nad krzyżującą się z nim linią, wzdłuż linii przerywanej. Punkty łuku AB łączymy z punktem P łączącym w czwartym wymiarze i po powierzchni tak utworzonego stożka, która z przestrzenią \mathbb{R}^3 nie ma nic wspólnego, przekładamy łuk AB narysowany linią ciągłą na łuk AB narysowany linią przerywaną. Ponieważ wszystko dzieje się poza przestrzenią \mathbb{R}^3 , więc podczas tej operacji łuk AB narysowany linią ciągłą w żadnym momencie nie przecina krzyżującej się z nim linii. Po usunięciu w ten sposób jednego „skrzyżowania” z figury T otrzymujemy krzywą zamkniętą w oczywisty sposób homeomorficzną z okręgiem.

(Rozumowanie analityczne, dla „niedowiarków”.) Rozważmy przestrzeń euklidesową \mathbb{R}^4 i niech $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : u = 0\}$, $A = (-1, 0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0, 0)$, $E = (0, 0, 1, 0)$, $F = (0, 0, -1, 0)$. Ponadto niech oś Y będzie zbiorem $\{(0, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : y \in \mathbb{R}\}$ (rys. 8).



Rys. 7



Rys. 8

Rozważmy łuk $AEB = \{(s, 0, \sqrt{1-s^2}, 0) \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq s \leq 1\}$. Pokażemy, jak przeprowadzić łuk AEB na łuk AFB , nie przecinając osi OY w przestrzeni \mathbb{R}^4 i nie ruszając z miejsca punktów A i B (rzecz jasna w przestrzeni \mathbb{R}^3 jest to niemożliwe). Oczywiście tego typu operacje pozwolą na rozplątanie trójkątnika.

Etap I. Definiujemy ciągłą rodzinę ciągłych przekształceń

$$(s, 0, \sqrt{1-s^2}, 0) \rightarrow (s, 0, \sqrt{1-s^2}, t\sqrt{1-s^2}), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Wszystkie punkty łuku AEB , poza jego końcami, „ciągniemy” w głąb przestrzeni \mathbb{R}^4 , bo dla tych punktów mamy $u \neq 0$.

Etap II. Definiujemy drugą ciągłą rodzinę ciągłych przekształceń

$$(s, 0, \sqrt{1-s^2}, \sqrt{1-s^2}) \rightarrow (s, 0, (3-2t)\sqrt{1-s^2}, \sqrt{1-s^2}), \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Efektom tych przekształceń jest „spadek” łuku wzdłuż kierunku Z do łuku (dla $t = 2$):

$$\{(s, 0, -\sqrt{1-s^2}, \sqrt{1-s^2}) \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq s \leq 1\},$$

bez przecięcia osi Y , gdyż współrzędne x, z, u nigdy się nie zerują w tym samym czasie dla $t \in [1, 2]$.

Etap III. Opuszczamy łuk „z głębi” przestrzeni \mathbb{R}^4 wzdłuż u w kierunku do łuku AFB , stosując ciągłą deformację

$$(s, 0, -\sqrt{1-s^2}, \sqrt{1-s^2}) \rightarrow (s, 0, -\sqrt{1-s^2}, (3-t)\sqrt{1-s^2}), \quad 2 \leq t \leq 3.$$

Dla $t = 3$ otrzymujemy łuk $AFB = \{(s, 0, -\sqrt{1-s^2}, 0) \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq s \leq 1\}$. Ponieważ w czasie $0 \leq t \leq 3$ żaden punkt rozważanych łuków nie ma współrzędnych postaci $(0, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$, więc podczas tej deformacji następuje ciągle przekształcenie łuku AEB na łuk AFB bez przecięcia osi Y .

O trójkątach na sferze

Michał MIŚKIEWICZ*

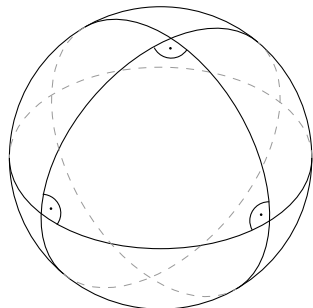
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Znany jest wzór na sumę kątów w trójkącie:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Dotyczy on oczywiście trójkątów na płaszczyźnie. Jaki związek ma płaskość (lub zakrzywienie) z powyższym wzorem? O tym za chwilę.

Pójdźmy krok dalej i rozważmy trójkąty geodezyjne na sferze. Są to obszary wycięte ze sfery za pomocą trzech płaszczyzn przechodzących przez środek sfery. Dzięki temu wierzchołki takiego trójkąta są połączone najkrótszymi możliwymi łukami (czyli geodezyjnymi); wśród krzywych na sferze są to odpowiedniki odcinków na płaszczyźnie. Kąt między dwoma bokami takiego trójkąta możemy definiować jako kąt między płaszczyznami wycinającymi je lub, równoważnie, jako kąt między odpowiednimi prostymi stycznymi.



Rys. 1. Trójkąt o trzech kątach prostych

Przykładowy trójkąt z rysunku 1 powstał w wyniku trzech wzajemnie prostopadłych cięć, a więc każdy z jego trzech kątów ma miarę $\frac{\pi}{2}$.

W rezultacie ich suma przekracza o $\frac{\pi}{2}$ wartość, do której przyzwyczailiśmy się na płaszczyźnie!

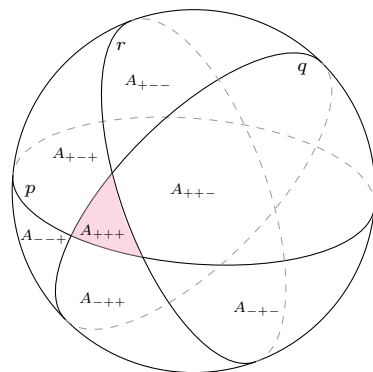
Gdyby coś nas podkuśiło, żeby policzyć pole takiego trójkąta, to zauważylibyśmy, że osiem takich trójkątów składa się na całą sferę.

Przyjmąwszy promień sfery równy 1, otrzymujemy pole trójkąta: $\frac{1}{8} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}$. Czy zbieżność pola trójkąta z nadmiarem sumy kątów jest przypadkiem?

Przekonamy się, że nie, dowodząc, że wzór na sumę kątów w trójkącie geodezyjnym na sferze o promieniu r ma postać

$$(*) \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi + A/r^2,$$

gdzie α, β, γ są kątami trójkąta, a A jego polem; jest to szczególny przypadek tak zwanego *wzoru Gaussa-Bonneta*.



Rys. 2. Podział sfery na 8 obszarów

W tym celu oznaczymy płaszczyzny wycinające trójkąt jako p, q, r , zgodnie z rysunkiem 2. Każda z tych płaszczyzn rozcina przestrzeń (i sferę) na dwie części – za *dodatnią* uznamy tę, w której leży nasz trójkąt, a tę drugą za *ujemną* . Możemy teraz wygodnie oznaczyć wszystkie wycięte obszary – np. A_{++-} będzie obszarem leżącym po dodatniej stronie p i q oraz po ujemnej stronie r . Zauważmy trzy zależności:

- Ze względu na symetrię środkową mamy $|A_{++-}| = |A_{--+}|$ oraz wszystkie inne tożsamości powstałe przez zamianę znaków na przeciwne.
- Suma $A_{++o} := A_{+++} \cup A_{++-}$ daje razem obszar leżący po dodatniej stronie płaszczyzn p i q . Pole takiego wycinka jest proporcjonalne do kąta między tymi płaszczyznami, a więc wynosi $2\alpha r^2$; podobnie jest dla pozostałych obszarów tego typu.
- Suma $A_{+oo} := A_{+++} \cup A_{++-} \cup A_{+-+} \cup A_{+--}$ daje półsferę po dodatniej stronie p , a zatem $|A_{+oo}| = 2\pi r^2$; tak samo dla pozostałych półsfery.

Pozostaje nam zebrać te obserwacje, przeprowadzając rachunek oparty na wzorze włączeń i wyłączeń:

$$\begin{aligned} |A_{+oo} \cup A_{o+o} \cup A_{oo+}| &= (|A_{+oo}| + |A_{o+o}| + |A_{oo+}|) - \\ &\quad - (|A_{++o}| + |A_{o++}| + |A_{+o+}|) + |A_{+++}| = \\ &= 3 \cdot 2\pi r^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)r^2 + |A_{+++}|. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, obszar $A_{+oo} \cup A_{o+o} \cup A_{oo+}$ pokrywa całą sferę z wyjątkiem A_{---} , ma więc pole

$$|A_{+oo} \cup A_{o+o} \cup A_{oo+}| = 4\pi r^2 - |A_{---}| = 4\pi r^2 - |A_{+++}|.$$

Połączenie tych równości daje nam żądany wzór na pole trójkąta:

$$A = |A_{+++}| = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2.$$

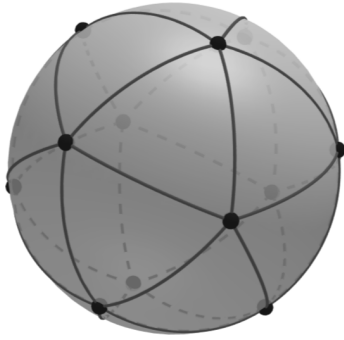


Rozwiązanie zadania F 994.

Siła F potrzebna do rozerwania półkul musi przewyższyć składową nacisku powietrza (atmosfery) prostopadłą do płaszczyzny złączenia półkul.

$$F = \pi d^2 p/4,$$

gdzie p oznacza ciśnienie atmosferyczne: $p \approx 10^5$ Pa. Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy $F \approx 13900$ N. Jest to siła w przybliżeniu równa ciężarowi średniego samochodu osobowego. 16 koni to jednak była przesada, ale jak przekonująco to wygląda na znanej wszystkim rycinie!



Rys. 3. Siatka odpowiadająca dwudziestościanowi foremnemu. Tutaj $V = 12$, $E = 30$, $F = 20$

Pokażemy teraz, jak wykorzystać uzyskany związek do otrzymania *wzoru Eulera*.

Twierdzenie (Euler). Rozważmy na sferze dowolną siatkę złożoną z trójkątów geodezyjnych i oznaczmy przez V , E , F odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i trójkątów w tej siatce. Zachodzi wówczas równość

$$V - E + F = 2.$$

Dowód. Powtórzmy tutaj (choć w całkiem innym wydaniu) rozumowanie z artykułu *Czy Ziemia jest płaska? A może jednak?* (Δ_{16}^{10}), zbadamy mianowicie sumę wszystkich kątów przy wierzchołkach. Ponieważ przy każdym wierzchołku kąty dodają się do 2π , suma ta wynosi $V \cdot 2\pi$. Z drugiej strony, sumę tę możemy otrzymać, dodając stronami zależności (*) dla wszystkich trójkątów w siatce – ponieważ pola trójkątów sumują się do całkowitego pola sfery, daje to $F \cdot \pi + 4\pi$ (bez straty ogólności przyjęliśmy $r = 1$). Po przyrównaniu tych dwóch wyników mamy $2V = F + 4$. Pozostaje przypomnieć sobie, że każda ściana ma trzy krawędzie, a każda krawędź rozdziela dwie ściany, skąd wnioskujemy dodatkową zależność $2E = 3F$. Te dwie równości pozwalają obliczyć

$$V - E + F = \frac{1}{2}(F + 4) - \frac{3}{2}F + F = 2,$$

co kończy dowód. □

Choć jest to istotnie trudniejsze do pokazania, analogiczną własność ma każda powierzchnia, nie tylko sfera. Wówczas wielkość $V - E + F$ (zwana *charakterystyką Eulera*) zależy tylko i wyłącznie od powierzchni, a nie od wyboru siatki. Przykład powierzchni o charakterystyce Eulera równej 0 można znaleźć we wspomnianym już artykule (Δ_{16}^{10}).

Wracając do zależności (*), Czytelnika może zdziwić, że znajomość kątów trójkąta pozwala na wyznaczenie pola – na płaszczyźnie przecież sprawa ma się zupełnie inaczej. Ten fenomen ma związek z niezerową *krzywizną Gaussa* sfery. Możemy nawet sformułować następującą definicję: jeśli na danej powierzchni dowolny trójkąt geodezyjny o kątach α , β , γ i polu A spełnia równość

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + K \cdot A,$$

to powiemy, że powierzchnia ta ma krzywiznę Gaussa stałe równą K .

Dla takiej powierzchni pole trójkąta można wyznaczyć ze wzoru $A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)/K$, chyba że... wzór ten wymaga dzielenia przez zero! Ma to miejsce jedynie w przypadku płaszczyzny (lub jej „zwinieć”, na przykład walca), dla której mamy $K = 0$. Nasz dowód pokazuje natomiast, że sfera o promieniu r ma krzywiznę Gaussa równą $K = 1/r^2$. Odpowiada to dobrze intuicji mówiącej, że *duże sfery są prawie płaskie* – taka wydaje się na przykład powierzchnia Ziemi.

Idąc dalej za tą samą intuicją, moglibyśmy twierdzić, że *powierzchnie o dużej krzywiznie mają małe pole*. Tak jest w istocie i podejmiemy ten temat w kontynuacji niniejszego artykułu, która ukaże się już za miesiąc. Jako pierwszy krok w tym kierunku proponuję poniższe zadanie.

Zadanie. Dana jest powierzchnia \mathcal{M} wraz z siatką trójkątów, z których każdy w miejsce (*) spełnia nierówność $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi + K \cdot A$ z tym samym parametrem K . Wykażemy

$$V - E + F \geq \frac{K \cdot |\mathcal{M}|}{2\pi},$$

gdzie $|\mathcal{M}|$ jest polem \mathcal{M} , a V , E , F tak jak poprzednio oznaczają liczbę wierzchołków, krawędzi i trójkątów w siatce.

Uzasadnienie jest nietrudną modyfikacją dowodu twierdzenia Eulera, przy czym tutaj należy oczywiście operować na nierównościach. „Do przeczytania” za miesiąc!



Rozwiązanie zadania M 1627.

Zauważmy, że każdej parze atakujących się wież odpowiadają dokładnie trzy linie, w których nie znajdują się żadne inne wieże – mianowicie te linie, w których te dwie wieże się znajdują. Wobec tego liczba par wież nie przekracza $\lfloor \frac{m+n}{3} \rfloor$. Ponadto w każdej linii mogą pojawić się co najwyżej dwie wieże. Łącząc powyższe obserwacje, uzyskujemy, że liczba wież nie przekracza

$$2 \cdot \min \left\{ m, n, \left\lfloor \frac{m+n}{3} \right\rfloor \right\}.$$

Udowodnimy, że powyższe wyrażenie w istocie zadaje największą możliwą liczbę wież. Przypuśćmy, bez straty ogólności, że $m \geq n$ oraz, że m to liczba kolumn, a n – liczba wierszy. Nietrudno wskazać przykład, że jeśli $m = n$, to można osiągnąć ustawienie $2 \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ wież. Jeżeli $m \leq 2n$, to w $m - n$ wierszach umieszczamy po dwie wieże, tym samym redukując szachownicę do kwadratu o boku $2n - m$ i wobec obserwacji z poprzedniego zdania, znów otrzymujemy ustawienie realizujące $2 \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ wież. Wreszcie dla $m > 2n$ ustawiamy po dwie wieże w każdym wierszu i otrzymujemy ustawienie $2n$ wież.



Rozwiązanie zadania M 1628.

Ustawmy na zewnątrz szachownicy, wzdłuż jej boków, *dotatkowe* $2(m+n)$ wież (po jednej na każdą jednostkę obwodu szachownicy). Zauważmy, że każda *prawdziwa* wieża jest atakowana przez dokładnie dwie wieże dotatkowe. Stąd wniosek, że liczba wież prawdziwych nie przekracza połowy liczby wież dotatkowych, czyli $m+n$. Ustawiając wieże w czterech narożnikach szachownicy oraz wzdłuż dwóch jej prostopadłych boków, uzyskujemy przykład realizujący to szacowanie.

Trudny model poznawczy – życie

Początek roku to czas noworocznych podsumowań i planów na przyszłość. Co wydarzyło się w nauce w ubiegłym roku, co zaważy na jej dalszym rozwoju? W poszukiwaniach odpowiedzi na to pytanie nie pomoże analiza tegorocznych Nagród Nobla. Od lat nie wierzymy, że wola założyciela, o przyznawaniu nagrody za osiągnięcia poprzedzającego roku, może być spełniona. Współczesne odkrycie w nauce doświadczalnej, aby mogło być uznane za ważne, wymaga czasu dla dokładnych badań i wielostronnej ich weryfikacji. Jeszcze dłużej czeka się na zastosowanie odkrycia dla dobra ludzkości, o czym także marzył Alfred Nobel. Twórca dynamitu! Stąd nagrody odbierają często osoby w podeszłym wieku – za to, co zrobiły dziesiątki lat temu. Nagroda z chemii 2019, przyznana za wymyślenie i ulepszanie baterii litowych, przypadła trzem uczonym. Prace rozpoczęli niezależnie w latach 70. ubiegłego wieku; jeden z nich, John Goodenough, jest najstarszy wśród dotychczasowych laureatów. Trwające od co najmniej 50 lat prace trzeba kontynuować, o czym wie każdy ładujący co noc swoją komórkę.

We współczesnej genetyce, mam wrażenie, trwa okres zbierania danych. Przez 70 ostatnich lat osiągnęliśmy wiele: znamy w atomowych szczegółach strukturę wszystkich najważniejszych cząsteczek aktywnych w podtrzymywaniu życia każdej komórki. Znamy kilkaset genomów archaicznych ludzi, a nawet wymarłych gatunków – neandertalczyka i denisowianina. Sekwencjonowanie DNA stało się tańsze i rutynowe. Ważną decyzją początkową w badaniu DNA jest wybór obiektu. Czy z kolejnej kosteczki paluszka wydobyc DNA i określić gatunek człowieka, którego kosteczkę odnaleźliśmy? Czy spróbować znaleźć ważny szkielet nie do końca zidentyfikowany (moim ulubionym odkryciem tego typu jest szkielet Ryszarda III)? Czy włos znaleziony w starej księdze należał do Mikołaja Kopernika? Czy analizować cmentarzysko pochowanych ofiar zarazy i poszukać tam bakterii, która ją wywołała? A może analizować setki genomów współczesnych Finów, aby poznać ich etniczne korzenie? Analiza współczesnego DNA mieszkańców Afryki sugeruje, że 200 tysięcy lat temu wyemigrowali na północ, wtedy gdy dokuczyla im susza. To byli nasi przodkowie, *Homo sapiens*. Biada nam, jeśli historia powtórzy się w XXI wieku. . .

Poznaliśmy systemy regulacji działania makrocząsteczek. Poznaliśmy struktury komórkowe w całej ich złożoności, w różnorodnych układach i zespołach. Nauczyliśmy się syntezy białek i kwasów nukleinowych z podstawowych elementów, stworzyliśmy bakterię *Mycoplasma mycoides* z syntetycznym DNA, która żyje i realizuje wszystkie funkcje narzucone jej przez ten syntetyczny DNA. Więcej – umiemy już w sposób kontrolowany i niemal bezbłędny modyfikować istniejące w komórkach (bakteryjnych, ludzkich, grzybowych, zwierzęcych, roślinnych) geny, co otwiera dalekosiężne plany terapeutyczne. Jednak przed przedwczesnym optymizmem w tym zakresie przestrzega jedna z twórczyń metody CRISPR, Jennifer Doudna, przywołując m.in. informacje o kłopotach pana He w Chinach, który twierdził, że modyfikował dwa zarodki w celu nadania im odporności na zakażenie HIV. Nie da się zlokalizować ani urodzonych dzieci, ani pana He. . .

Nazwałabym to dojściem do ściany. Ze znajomości genów nie da się zrozumieć, przewidzieć procesów, które nazywamy życiem, ponieważ są one uzależnione i sterowane wieloczynnikowo. Te liczne zależności strukturalne i metaboliczne podlegają wpływom szeroko rozumianego środowiska – czynników pozagenetycznych, ale wpływających na geny i ich ekspresję. Obrazowo mówi o tym opowieść o efekcie motyla. . . Nie ma takich komputerów, które obliczyłyby lawinę skutków zapoczątkowanych wieloczynnikowo. Jesteśmy bezradni we wnioskowaniu o dynamice życia. Ostatnio przeanalizowano genomy 252 gatunków kręgowców o znanej długości życia i sporządzono wykaz 42 genów „podejrzanych” o odgrywanie roli w tym zakresie. To chyba i tak za mało!

Nowy Rok zachęca do optymizmu. Szklanka jest już do połowy pełna.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Procesy onkogenezy zależą od wielu setek genów. Regulacja wzrostu człowieka – od niemal 200 i zasadniczo od warunków wzrostu w dzieciństwie.

Wiele z tych przemyśleń z przyjemnością odnalazłam podczas niezwykle interesującego spotkania z prof. Pawłem Golikiem w Kawiarni Naukowej Festiwalu Nauki, które odbyło się w Warszawie 16 grudnia 2019 roku.

Komputer kwantowy Google'a – przełom czy PR?

*Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Rafał DEMKOWICZ-DOBRZAŃSKI*

Komputerom kwantowych poświęciliśmy cały numer Δ_{12} , którego redaktorem prowadzącym był Tomasz Kazana.

Obliczenia kwantowe wykorzystują ideę superpozycji kwantowej, która pozwala na przygotowanie układów kwantowych w „wielu stanach jednocześnie”, w celu uzyskania nieosiągalnego na komputerach klasycznych zrównoleglenia obliczeń i rozwiązania bardzo trudnych problemów matematycznych w czasie nieosiągalnym dla tradycyjnych urządzeń liczących. Przykładem obliczeń prostych dla komputerów kwantowych, a trudnych dla klasycznych, jest rozkład liczby na czynniki pierwsze. Trudność tego problemu jest kluczowa dla bezpieczeństwa ogromnej większości zaszyfrowanej komunikacji internetowej.

Ostatnio docierały do nas informacje o nowym sukcesie Google'a w związku z przeprowadzeniem obliczeń na komputerze kwantowym, które najlepszemu superkomputerowi klasycznemu zajęłyby 10 000 lat, na co IBM odpowiedział „wcale nie”! Na ile jest to PR, a na ile faktyczny przełom?

1. Na pewno jest to bardzo duże osiągnięcie. Grupie z Google'a udało się zbudować urządzenie pracujące na 53 kubitach, ale co najważniejsze kubitach bardzo dobrej jakości, gdzie pojedyncze bramki kwantowe są wykonywane z bardzo niewielkimi błędami, poniżej 0,5%. Na przykład DWAVE postawił na liczbę kubitów (nawet 4096), nie dbając o ich jakość. Jednak takie myślenie wprowadziło sporo zamieszania i wątpliwości, czy w ogóle to, co robi DWAVE, można nazwać obliczeniami kwantowymi.

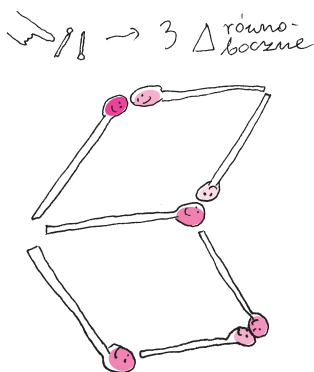
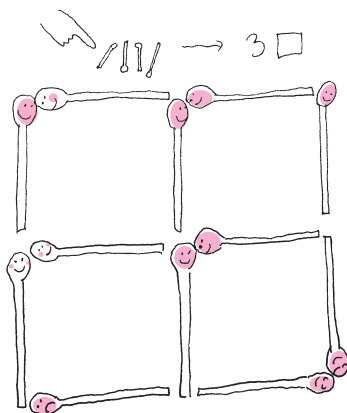
W przypadku urządzenia Google'a nie ma wątpliwości: jest to topowe na świecie urządzenie, które wykonuje obliczenia kwantowe.

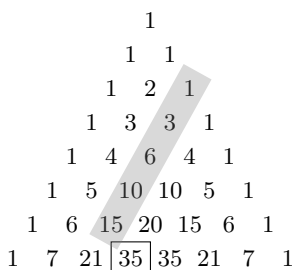
2. Należy przy tym zaznaczyć, że mimo iż poziom błędów poniżej 0,5% wydaje się niski, nie jest on niestety wystarczająco niski, żeby urządzenie spełniało wymogi tzw. *fault-tolerance* – które oznaczają, że przy danej jakości komponentów można efektywnie zmniejszać błędy poprzez rozbudowywanie obwodów i implementacje tzw. kwantowych kodów korekcji błędów. Do tego niestety wciąż brakuje około 1–2 rzędów wielkości zmniejszenia błędów.

3. Z tego powodu na razie nie ma możliwości przeprowadzenia żadnych praktycznych obliczeń na tego typu urządzeniach. Tym samym Google obniżył sobie poprzeczkę, nie starając się przeprowadzić praktycznego obliczenia, a jedynie jakiegokolwiek obliczenie, które byłoby trudne klasycznie. Z tego powodu zdecydowali się na zadanie: niech komputer klasyczny spróbuje generować liczby losowe zadane rozkładem prawdopodobieństwa zdeterminowanym przez wyjścia pewnego kwantowego obwodu logicznego wygenerowanego poprzez losowo wybierane bramki kwantowe. Jeśli zgodzić się z takim wyzwaniem, to faktycznie wydaje się, że w tym sensie osiągnięto swój cel.

4. Dzień po ogłoszeniu wyników IBM wysunął kontrargument, że w zasadzie to, co zrobił Google, można zasymulować na superkomputerze Summit (klasyczny komputer opracowany przez IBM), i to wcale nie w 10 000 lat, ale w 2 dni. I to też wydaje się prawdą. Google nie docenił tym razem dostępnej ogromnej pamięci w urządzeniu Summit, która de facto pozwala zapisać wiernie wektor stanu 53 kubitów (ponieważ 2^{53} wciąż jest mniejsze niż 250 petabajtów, którymi dysponuje Summit). Ale nawet jeśli kontrargument IBM jest słuszny, to faktem jest, że gdyby tylko dodano 3–4 kubity do urządzenia kwantowego, to już taka szybka symulacja nie byłaby możliwa – chyba że IBM powiększy swój superkomputer o kolejne kilka boisk.

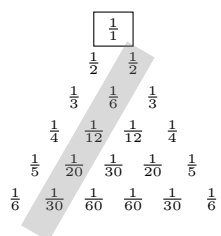
5. Podsumowując, nie należy się spodziewać, że osiągnięcie Google'a spowoduje przełom, dzięki któremu w końcu komputery kwantowe zaczną liczyć coś użytecznego. Do tego potrzeba jeszcze paru skoków technologicznych, tak aby poziom błędów był wystarczająco niski i możliwe było przeprowadzanie poważniejszych obliczeń na większej liczbie kubitów oraz aby skutecznie implementować kody kwantowej korekcji błędów. Niemniej jest to pewien wyraźny i wcale nie oczywisty krok naprzód.



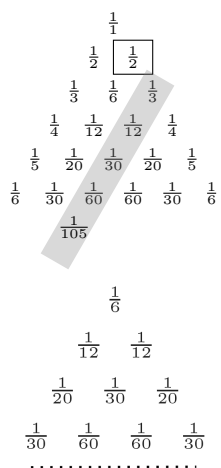


Przez skos trójkąta zawsze będziemy oznaczać zbiór liczb stojących na odcinku równoległym do boku trójkąta, o początku w jego boku.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$$



$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots$$



Oznacza to, że jeżeli weźmiemy liczby znajdujące się na skosie trójkąta (dowolnym skosie, ale równoległym do jego boku; patrz rysunek), to suma liczb na tym skosie będzie równa liczbie pod nim (tej, która nie leży na przedłużeniu skosu), na przykład

$$35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1, \quad 35 = 20 + 10 + 4 + 1, \quad 21 = 15 + 5 + 1.$$

Istnieje analogiczna relacja dla trójkąta harmonicznego, którą sformułujemy w kolejnym twierdzeniu.

Twierdzenie 3. Dla dowolnych n oraz k zachodzi $H(n, k) = \sum_{m \geq n+1}^{\infty} H(m, k+1)$.

Powyższa równość oznacza w szczególności, że każda liczba harmoniczna jest nieskończoną sumą liczb na skosie trójkąta, na przykład $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \dots$. Co więcej, analogiczna równość jest prawdziwa dla *każdej* liczby w tym trójkącie.

Dowód. Dla ustalonego $N \geq n+1$ możemy, korzystając z rekurencyjnej definicji elementów trójkąta harmonicznego, napisać

$$\sum_{m \geq n+1}^N H(m, k+1) = \sum_{m \geq n+1}^N (H(m-1, k) - H(m, k)) = H(n, k) - H(N, k).$$

Teza twierdzenia wynika teraz z oczywistego faktu, że granica $H(N, k)$ przy N dążącym do nieskończoności wynosi 0. \square

Spójrzmy teraz na ułamki znajdujące się wewnątrz trójkąta harmonicznego, czyli te, które nie znajdują się na jego bokach (patrz rysunek obok).

Jaka jest suma wszystkich takich wyrazów? Odpowiedź jest zaskakująco prosta.

Twierdzenie 4. Zachodzi wzór $\sum_{n \geq 3} \sum_{k=2}^{n-1} H(n, k) = 1$.

Dowód. Z twierdzenia 3 wynika, że $1 = \sum_{n \geq 2}^{\infty} H(n, 2)$. Korzystając raz jeszcze

(i wielokrotnie) z twierdzenia 3, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n \geq 2}^{\infty} H(n, 2) = H(2, 2) + \sum_{n \geq 3}^{\infty} H(n, 2) = \sum_{n \geq 3}^{\infty} H(n, 3) + \sum_{n \geq 3}^{\infty} H(n, 2) = \\ &= H(3, 3) + \sum_{n \geq 4}^{\infty} H(n, 3) + \sum_{n \geq 3}^{\infty} H(n, 2) = \sum_{n \geq 5}^{\infty} H(n, 4) + \sum_{n \geq 4}^{\infty} H(n, 3) + \sum_{n \geq 3}^{\infty} H(n, 2). \end{aligned}$$

Postępujemy tak analogicznie aż do równości

$$1 = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n \geq k+1}^{\infty} H(n, k).$$

Zamieniając kolejność sumowania (we wzorze powyżej – sumujemy po skosach), otrzymujemy tezę. \square

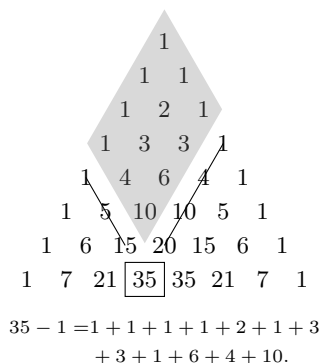
Twierdzenie 4 można uogólnić!

Twierdzenie 5. Dla dowolnego n i dowolnego k prawdziwa jest równość

$$H(n, k) = \sum_{m \geq n+2}^{\infty} \sum_{\ell=k+1}^{m+k-n-1} H(m, \ell).$$

Dowód powyższego twierdzenia w oparciu o przedstawione powyżej wyniki pozostawiamy Czytelnikowi Dociekliwemu.

Twierdzenia 4 i 5 mają następującą interpretację: każdy element trójkąta harmonicznego jest sumą wszystkich elementów w trójkącie, które leżą poniżej i pomiędzy dwoma skosami zawierającymi daną liczbę. Można zapytać o to, czy istnieje jakaś analogia twierdzenia 6 dla trójkąta Pascala. Czytelnik może sprawdzić, że każdy element trójkąta Pascala pomniejszony o 1 jest sumą wszystkich elementów tego trójkąta, które leżą powyżej i pomiędzy dwoma skosami zawierającymi daną liczbę. Życzymy owocnych poszukiwań kolejnych zależności.



O nierównościach typu Diananda–Shapiro

E-mail autora: piotr-kumor@wp.pl

Piotr KUMOR

Zacznijmy od przypomnienia zadania 766 z Klubu 44M (Δ_{18}^9):

Znaleźć liczbę rzeczywistą $M > \frac{5}{2}$ taką, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+a}} + \sqrt[5]{\frac{e}{a+b}} \geq M.$$

Im większa liczba M , tym lepsze rozwiązanie.

Powyższy problem można w naturalny sposób sformułować w ogólniejszej postaci. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą oraz $\alpha > 0$ liczbą rzeczywistą. Oznaczmy przez $S(n, \alpha)$ największe ograniczenie dolne wartości sumy $\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)^\alpha$, gdzie $x_1, \dots, x_n > 0$. Wówczas zadanie 766 to pytanie o jak najlepsze oszacowanie $S(5, \frac{1}{5})$ z dołu. Co wiadomo w tej kwestii dla ogólnych wartości n i α ?

Dla $\alpha = 1$ zagadnienie jest znane jako *problem Shapiro*. Ma on długą i barwną historię, która rozpoczęła się od zadania zaproponowanego przez Joela Shapiro w 1954 roku na łamach *The American Mathematical Monthly*, w którym prosił on czytelników magazynu o udowodnienie, że $S(n, 1) = \frac{n}{2}$. Okazało się, że zależność ta nie jest prawdziwa; pierwszy kontrprzykład ($n = 20$) pojawił się w 1956 roku (James Lighthill), w 1985 roku B.A. Troesch zaproponował elegancki kontrprzykład dla $n = 14$ – należy rozważyć ciąg liczb $(0, 42, 2, 42, 4, 41, 5, 39, 4, 38, 2, 38, 0, 40)$. Okazuje się, że jest to najmniejszy (co do n) możliwy kontrprzykład – hipoteza Shapiro została udowodniona dla parzystych $n \leq 12$ oraz nieparzystych $n \leq 23$. Wiadomo również, jaka jest największa stała D , dla której $S(n, 1) \geq Dn$ dla wszystkich $n \geq 1$. Jest to tak zwana *stała Drinfelda* i wynosi w przybliżeniu 0,494. Precyzyjniej, $D = \frac{1}{2}\phi(0)$, gdzie ϕ jest największą funkcją wypukłą, która ogranicza z dołu funkcje e^{-x} oraz $2(e^x + e^{x/2})^{-1}$. Zatem dla $\alpha = 1$ znamy kompletną odpowiedź. Szczegóły znajdziemy na przykład w [1] i [2]. Warto przy okazji nadmienić, że Władimir Drinfeld – autor wspomnianej nierówności – był laureatem Medalu Fieldsa w 1990 roku, a niedawno (w 2018 roku) otrzymał Nagrodę Wolfa w dziedzinie matematyki.

Okazuje się, że dla $\alpha \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zachodzi nierówność $S(n, \alpha) \geq \frac{n}{2\alpha}$, zaś równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby w ciągu są równe. Dowód można odnaleźć w [5]. Zatem dla $\alpha \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ też wszystko jest jasne.

Pozostają więc do zbadania przypadki: $1 < \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $0 < \alpha < 1$. Dalej interesować nas będzie tylko ta druga sytuacja. Ustalmy liczby rzeczywiste $x, y, z > 0$ oraz $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Niech $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, wówczas $0 < \gamma < 1$. Mamy $\left(\frac{x}{y+z}\right)^\alpha = \left(\left(\frac{x}{y+z}\right)^\gamma\right)^\beta > \left(\frac{x^\gamma}{y^\gamma+z^\gamma}\right)^\beta$, bo jeżeli $0 < \gamma < 1$, to $\left(\frac{x}{y+z}\right)^\gamma > \frac{x^\gamma}{y^\gamma+z^\gamma}$. Wobec tego dla wszystkich wykładników $0 < \alpha < \beta \leq 1$ zachodzi nierówność $S(n, \alpha) \geq S(n, \beta)$.

Z rozwiązania problemu Shapiro i powyższej uwagi wnioskujemy, że dla parzystych liczb $n \leq 12$ i wszystkich wykładników $0 < \alpha < 1$ zachodzi $S(n, \alpha) \geq \frac{n}{2}$. Liczby $\frac{n}{2}$ nie można tu zastąpić liczbą większą, wystarczy bowiem rozważyć $1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0$. Zatem dla parzystych liczb $n \leq 12$ i wszystkich wykładników $0 < \alpha < 1$ mamy pełną odpowiedź: $S(n, \alpha) = \frac{n}{2}$.

Rozumując podobnie jak w firmowym rozwiązaniu zadania 766 (zobacz Δ_{19}^1), możemy udowodnić nierówność $S(n, \alpha) \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \cdot \frac{1}{2\alpha}$ dla wszystkich n i α . Z drugiej strony, rozważając ciąg $1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0$ dla n parzystych lub $1, 1, 0, 1, \dots, 0$ (dwie jedynki sąsiadują) dla n nieparzystych, dostajemy $S(n, \alpha) \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Ponieważ 2^α zbiega do 1, gdy α dąży do 0, więc naturalna jest hipoteza, że dla bliskich 0 wartości wykładnika α zachodzi $S(n, \alpha) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Jak zauważyliśmy

Łatwo uzasadnić, że $S(n, 1) \leq \frac{n}{2}$; wystarczy rozpatrzyć ciąg samych jedynek.



Rozwiązanie zadania F 993. Silniki samochodów sportowych dysponują zwykle nadmiarem mocy i są w stanie wytworzyć moment siły pozwalający zerwać przyczepność opon do podłoża. W takich warunkach, maksymalna możliwa do osiągnięcia prędkość wynika z wartości sił oporu i granicy przyczepności opon. Przy dużych prędkościach niemal cała siła oporu pochodzi od oporu powietrza i jest proporcjonalna do kwadratu prędkości: $F_{op} = av^2$. Zerwanie przyczepności opon następuje, gdy zostanie przekroczona graniczna wartość tarcia statycznego: $T = fQ$, gdzie f oznacza współczynnik tarcia statycznego opon o podłożu, a Q siłę nacisku na koła napędzające. Maksymalna prędkość v_{max} odpowiada warunkowi $T = F_{op}$, a więc:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{fQ}{a}}.$$

Jeśli dla naszego oszacowania przyjmiemy uproszczenie, że siła Q jest proporcjonalna do całkowitej masy pojazdu, to otrzymujemy, że w drugiej próbie kierowca osiągnął

$$v_2 = (1520/1200)^{1/2} 200 \text{ km/godz.} \approx 225 \text{ km/godz.}$$

Rozumowanie podane w rozwiązaniu zadania 766 pochodzi z pracy [4] i było potem wielokrotnie odkrywane ponownie.

wyżej, jest ona spełniona dla parzystych $n \leq 12$ i wszystkich wykładników $0 < \alpha \leq 1$, gdyż dla parzystych n mamy $\frac{n}{2} = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Dla $n = 3$ oraz $0 < \alpha < \log_2 \frac{3}{2} \approx 0,58496$ i dla dowolnych dodatnich liczb a, b, c prawdziwa jest nierówność $(\frac{a}{b+c})^\alpha + (\frac{b}{c+a})^\alpha + (\frac{c}{a+b})^\alpha > 2$. Jest to udowodnione w [3]. Zatem $S(3, \alpha) = 2$ dla $0 < \alpha \leq \log_2 \frac{3}{2}$. Oczywiście dla $\alpha > \log_2 \frac{3}{2}$ jest $S(3, \alpha) < 2$, co widać na przykładzie liczb $a = b = c = 1$. Dla $n = 3$ oraz dla parzystych liczb $n \leq 12$ wszystko jest więc jasne.

Na podstawie udowodnionej wyżej nierówności $S(n, \alpha) \geq S(n, 1)$ dla $0 < \alpha < 1$ oraz tego, co wiadomo z rozwiązania problemu Shapiro, otrzymujemy, że $S(n, \alpha) \geq \frac{n}{2}$ dla liczb nieparzystych $n \leq 23$ oraz $S(n, \alpha) \geq Dn$ dla pozostałych wartości n .

Kierując się wyłącznie intuicją, postawiłem hipotezę, że $S(n, \alpha) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ dla wszystkich n oraz $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Nie potrafię tego dowieść dla żadnej liczby n poza wskazanymi powyżej (czyli dla $n = 3$ oraz parzystych $n \leq 12$). O sytuacji dla pozostałych wartości n mogę powiedzieć bardzo niewiele. Jedynie dla $n = 5$ (najmniejsza niezbadana wartość n) udało mi się pokazać, że $S(5, \alpha) = 3$ dla $0 < \alpha \leq \frac{1}{5}$, co stanowi pełne rozwiązanie zadania 766. Dowód udostępniony jest na stronie *Delty*. Będę bardzo wdzięczny za wszelkie uwagi lub związane wyniki. Na przykład dowody nierówności postaci $S(n, \alpha) > M > \frac{n}{2}$ dla nieparzystych n i możliwie dużych α (najlepiej $\alpha > \frac{1}{2}$) lub ewentualne kontrprzykłady do uczynionych wyżej hipotez. Zapraszam do kontaktu poprzez zamieszczony na początku artykułu adres poczty elektronicznej, a także do dyskusji w komentarzach do tego artykułu na stronie *Delty*. Według mojej wiedzy w literaturze ani w sieci nie ma aktualnie żadnych innych tego rodzaju wyników. Uzyskanie takowych może więc być cenne, w szczególności dla osób zainteresowanych Konkursem Prac Uczniowskich z Matematyki im. Pawła Domańskiego.

Literatura:

- [1] Kourliandtchik, L. (2002). *Słynne nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat.
- [2] „Shapiro inequality” Wikipedia, The Free Encyclopedia, dostęp 7 sierpnia 2019 r.
- [3] Hung, P. K. (2008). *Secrets in Inequalities* vol. 2 – „Advanced Inequalities”, Gil Publishing House, darmowy rozdział dostępny na stronie wydawcy.
- [4] Diananda, P. H. (1973). *Some cyclic and other inequalities. III*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 73, part 1, 69–71.
- [5] Diananda, P. H. (1974). *Some cyclic and other inequalities. IV*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 76, part 1, 183–186.



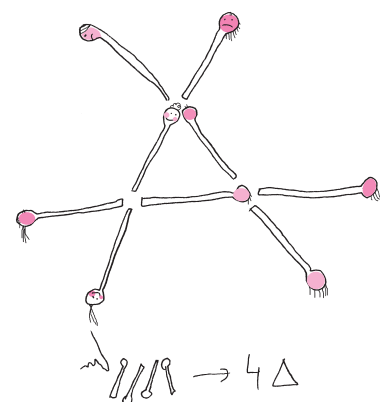
Spadek swobodny z księżycowej orbity

*Andrzej SOŁTAN**

Siła grawitacji sprawia, że jakikolwiek upuszczony przedmiot spada ruchem jednostajnie przyspieszonym. Wartość przyspieszenia ziemskiego znamy na pamięć. Można więc obliczyć położenie ciała i jego prędkość w dowolnej chwili. Również czas spadania wyznaczymy natychmiast, jeżeli tylko znamy wysokość początkową. Trudno o mniej wymagające zadanie z dynamiki.

Rachunki się komplikują, gdy ciało spada z dużej wysokości. Tak dużej, że nie możemy już przyjąć, iż przyspieszenie ziemskie jest stałe. Na przykład z wysokości orbity Księżyca. Ponieważ przyspieszenie grawitacyjne maleje z kwadratem odległości, 384 750 km od Ziemi (średnia odległość Księżyca od środka Ziemi) natężenie pola grawitacyjnego Ziemi jest około 3600 razy słabsze niż w pobliżu jej powierzchni. Wiedział to już Izaak Newton, co znacząco pomogło mu sformułować prawo powszechnej grawitacji.

Jak długo zatem będzie trwał spadek swobodny w centralnym polu grawitacyjnym Ziemi z wysokości orbity Księżyca? Promień orbity Księżyca jest 60 razy większy od promienia Ziemi. Wobec takiej różnicy wielkości, dla uproszczenia, pominiemy w rachunkach rozmiar Ziemi. Dokładnie tak brzmiało

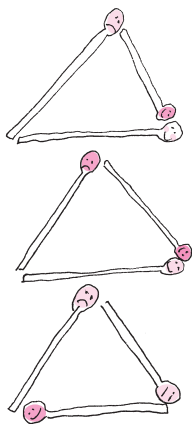


* CAMK PAN, Przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Astronomicznej

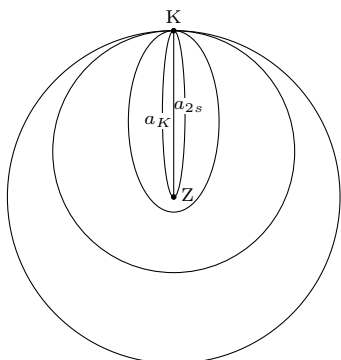


Rozwiązanie zadania M 1629.

Każde z $2(m+n) - 4$ pól szachownicy przylegających do jej brzegu nazwijmy brzegowym. Zauważmy, że każda wieża, która sama nie znajduje się na polu brzegowym, atakuje dokładnie jedno puste (czyli niezajęte przez inną wieżę) pole brzegowe. Wobec tego łączna liczba wież jest nie większa od liczby pól brzegowych. Z drugiej strony, ustawiając wieże na wszystkich polach brzegowych, uzyskujemy konfigurację, która spełnia warunki zadania.



4 Δ równoboczne



jedno z zadań LX Olimpiady Astronomicznej. W każdym punkcie pionowej trajektorii znamy przyspieszenie ruchu, które jest przeciwieństwem drugą pochodną położenia. Wystarczy zatem dwa razy scałkować... Niestety, nie jest to dobry pomysł na szybkie rachunki. Skoro jednak problem trafił do szkolnej olimpiady, musi być lepszy sposób rozwiązania.

Dzięki Keplerowi zadanie jest niemal trywialne. Jego III prawo mówi bowiem, że stosunek sześcianu wielkiej półosi orbity a do kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca T jest jednakowy dla wszystkich planet: $a^3/T^2 = \text{const}$. Newton wykazał, że ta prosta reguła wynika z prawa powszechnego ciążenia i stosuje się do wszelkich orbit zamkniętych wokół ciała centralnego:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2},$$

gdzie M i m to masy obiegających się ciał, a G jest stałą grawitacji. Dla orbity kołowej prawo to można łatwo wyprowadzić z zasad dynamiki Newtona i – oczywiście – prawa powszechnego ciążenia. Półś a sprowadza się w tym przypadku do promienia wodzącego łączącego oba ciała. Wzór powyższy pozostaje słuszny również dla orbit eliptycznych, ale jego wyprowadzenie jest nieco bardziej skomplikowane.

Suma mas obu ciał, $M+m$, w liczniku po prawej stronie w przypadku Słońca i planety nie jest oczywiście stała, gdyż masy planet różnią się bardzo, ale wszystkie są znacznie mniejsze od masy Słońca i z dobrym przybliżeniem masę m planety można w powyższym wzorze pominąć. Jowisz jest wprawdzie 318 razy masywniejszy od Ziemi, a blisko 6000 razy od Merkurego, ale stanowi mniej niż jedną tysięczną masy Słońca. Tak więc III prawo jest spełnione dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym z dokładnością do jednego promila.

Zastosujemy teraz to prawo do układów „Ziemia–Księżyc” i „Ziemia–ciało próbne”, ale zanim „upuścimy” ciało próbne na Ziemię z orbity Księżyca, umieścimy je najpierw dokładnie na kołowej (w przybliżeniu) księżycowej orbicie wokół Ziemi:

$$\frac{a_K^3}{T_K^2} = \frac{G(M_Z + m_K)}{4\pi^2}, \quad \frac{a_p^3}{T_p^2} = \frac{GM_Z}{4\pi^2}.$$

Teraz a_K jest półosią wielką orbity Księżyca i ciała próbnego, M_Z i m_K – masami Ziemi i Księżyca i odpowiednio T_K i T_p okresami obiegu Księżyca i ciała próbnego. Nie pominęliśmy masy Księżyca, gdyż nie jest ona znikoma w porównaniu z masą Ziemi: $M_Z = 81,3 M_K$. W efekcie ciało próbne będzie poruszać się nieco wolniej niż Księżyc i $T_p \approx 1,006 T_K$. Jeżeli umieścimy ciało próbne w odległości Księżyca od Ziemi, ale nadamy mu prędkość orbitalną mniejszą niż niezbędna, by utrzymało się na orbicie kołowej, to będzie się ono poruszało po orbicie eliptycznej. Im mniejsza będzie ta prędkość, tym elipsa orbity będzie bardziej spłaszczona. Przy pewnej prędkości ciało próbne uderzy w Ziemię. W naszym zadaniu tak się jednak nie stanie, gdyż pomijamy rozmiar Ziemi, czyli przyjmujemy, że ma dowolnie mały promień. W miarę dalszego zmniejszania prędkości początkowej w apogeum, to jest w punkcie najbardziej oddalonym od Ziemi, orbita ciała próbnego staje się coraz bardziej „smukła” i zbliża się do odcinka o długości a_K . Półś orbity a_s w tak „zdegenerowanym” przypadku jest wobec tego dwa razy mniejsza: $a_s = a_K/2$, a okres orbitalny T_p jest równy podwojonemu czasowi spadku T_s , którego szukamy: $T_p = 2T_s$:

$$\frac{(a_K/2)^3}{(2T_s)^2} = \frac{GM_Z}{4\pi^2}.$$

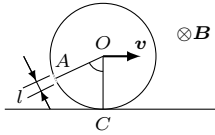
Porównując odpowiednie wzory, otrzymujemy $T_s = T_p/\sqrt{32} \approx 0,1778 T_K$. W tablicach astronomicznych znajdujemy długość miesiąca syderecznego, czyli okres obiegu Księżyca wokół Ziemi $T_K = 27,322$ dni, i ostatecznie otrzymujemy $T_s = 4,858$ dni = 116,6 godzin. Jest to około 1,6 razy dłużej niż czas podróży powrotnej z Księżyca astronautów programu Apollo.

Czytelnikowi pozostawiam obliczenie, ile minut wcześniej ciało próbne zderzy się z Ziemią, gdy nie pominiemy jej rozmiarów.

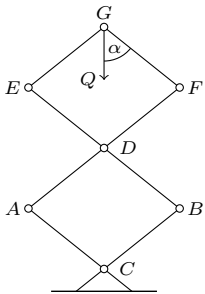
Klub 44 F



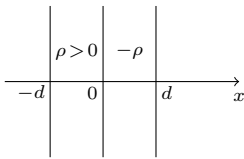
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2020



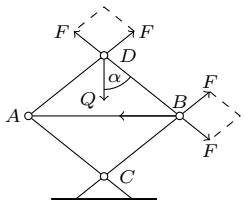
Rys. 1



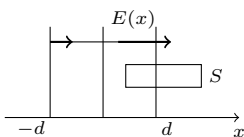
Rys. 2



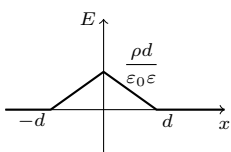
Rys. 3



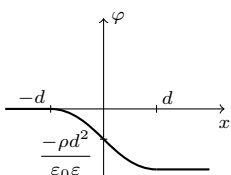
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Zadania z fizyki nr 692, 693

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

692. W jednorodnym polu magnetycznym, którego linie są poziome, a wartość wektora indukcji wynosi B , toczy się bez poślizgu z prędkością v cienki metalowy pierścień, w którym jest bardzo mała przerwa o długości l . Wektor B jest prostopadły do płaszczyzny pierścienia (rys. 1). Znaleźć SEM indukcji w chwili, gdy promień pierścienia trafiający w rozcięcie tworzy z pionem kąt α .

693. Cienkościenny cylinder o masie M i wysokości H , którego pole podstawy wynosi S , wypełniony jest gazem doskonałym i pływa w wodzie. W wyniku utraty hermetyczności w dolnej części cylindra, jego głębokość zanurzenia zwiększyła się o ΔH . Jakie było ciśnienie początkowe gazu w cylindrze? Ciśnienie atmosferyczne wynosi p_0 , temperatura nie zmienia się.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2019

Przypominamy treść zadań:

684. Na rysunku 2 przedstawiony jest układ sześciu nieważkich prętów, połączonych przegubowo. Pręty AF i BE są jednorodne, z przegubem w środku. Długości odcinków AC , CB , BD , AD , DE , DF , FG i GE są jednakowe. Do przegubu G przymocowany jest ciężar Q . Znaleźć naprężenie linki łączącej przeguby A i B .

685. Znaleźć natężenie pola elektrycznego i potencjał od dwóch nieskończonych warstw dielektryka o stałej dielektrycznej ϵ , naładowanych z gęstościami objętościowymi $\rho > 0$ i $-\rho$ (rys. 3). Grubość każdej warstwy wynosi d . Przyjąć warunek brzegowy dla potencjału $\varphi(-d) = 0$.

684. Rozważmy najpierw układ przedstawiony na rysunku 4. Pręt DB jest ściskany, bo po jego usunięciu przeguby D i B zbliżałyby się do siebie. Siły sprężystości działają na przegub D wzdłuż prętów, w przeciwnym razie przegub działałby na pręt siłą, której moment powodowałby obrót pręta wokół drugiego przegubu. Z warunku równowagi sił działających na przegub D dostajemy: $F = Q/(2 \cos \alpha)$. Siły działające na przegub B też się równoważą, stąd naprężenie linki AB wynosi $N = Q \tan \alpha$. Jeśli w wyniku skrócenia linki o mały odcinek Δl ciężar Q w układzie przedstawionym na rysunku 4 podniesie się o Δh , to w układzie przedstawionym na rysunku 2 podniesie się on o $2\Delta h$. W obu przypadkach musimy wykonać pracę na drodze Δl siłą równą naprężeniu linki, co spowoduje wzrost energii potencjalnej ciężaru Q . Szukane naprężenie linki w układzie przedstawionym na rysunku 2 dane jest wzorem $N_2 = 2Q \tan \alpha$.

685. Zgodnie z prawem Gaussa natężenie pola elektrycznego na zewnątrz warstw wynosi 0. Wewnątrz warstw linie pola elektrycznego skierowane są zgodnie z osią x , a natężenie pola elektrycznego ma największą wartość dla $x = 0$. Stosując prawo Gaussa dla powierzchni zamkniętej w kształcie prostopadłościanu, którego przekrój przedstawiony jest na rysunku 5, a powierzchnia podstawy wynosi S , otrzymujemy równanie:

$$-E(x)S = -\rho S(d-x)/\epsilon_0\epsilon, \text{ stąd } E(x) = \rho(d-x)/\epsilon_0\epsilon \text{ dla } x \geq 0;$$

analogicznie: $E(x) = \rho(d+x)/\epsilon_0\epsilon$ dla $x < 0$. Zależność wartości wektora natężenia pola elektrycznego od współrzędnej x przedstawia wykres na rysunku 6. Różnica potencjałów między dwoma punktami równa jest pracy pola elektrycznego nad jednostkowym ładunkiem, wziętej ze znakiem minus. Pracę tę możemy policzyć jako pole pod wykresem na rysunku 7.

Dla $-d \leq x \leq 0$ mamy:

$$\varphi(x) - \varphi(-d) = -E(x)(-d-x)/2.$$

Zgodnie z unormowaniem $\varphi(-d) = 0$ otrzymujemy:

$$\varphi(x) = \rho(d+x)^2/(2\epsilon_0\epsilon), \quad \varphi(0) = \rho d^2/(2\epsilon_0\epsilon).$$

Dla $0 \leq x \leq d$ otrzymujemy:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x(E(0) + E(x))/2,$$

stąd $\varphi(x) = -\rho(d^2 + 2xd - x^2)/(2\epsilon_0\epsilon)$. Wykres funkcji $\varphi(x)$ przedstawiony jest na rysunku 7.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klubu 44F
po zakończeniu
roku szkolnego 2018/19
(po 681 zadaniach)

Tomasz Rudny	-	40,98
Michał Koźlik	-	4-35,04
Jacek Konieczny	-	29,80
Ryszard Woźniak	-	28,77
Krzysztof Magiera	-	3-27,75
Aleksander Surma	-	4-27,75
Paweł Perkowski	-	2-27,33
Mateusz Kapusta	-	25,37
Sławomir Buć	-	18,33
Jerzy Witkowski	-	3-16,83
Jacek Greła	-	13,91

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2016–2018 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 13 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Najwyższy współczynnik trudności ($WT = 3,77$) miało zadanie **673** z termodynamiki, w którym następowały skokowe zmiany ciśnienia na zewnątrz cylindra izolowanego cieplnie od otoczenia. Należało znaleźć temperaturę końcową. Procesy były nieodwracalne i nie można było stosować prawa przemiany adiabatycznej kwazistacjonarnej: $V^k = \text{const}$. Podobny problem pojawiał się już we wcześniejszych zadaniach klubu i była bardzo ciekawa, jak to zadanie wypadnie. W pełni poprawne rozwiązanie nadesłał **Tomasz Wietecha**, pozostałe rozwiązania ocenione zostały na zero punktów.

Najwięcej (osiem) rozwiązań bez żadnej usterki nadesłali w tym roku Jan Zambrzycki i Tomasz Wietecha. Wyróżnił się również **Mateusz Kapusta**, który ma na swoim koncie

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44F w roku szkolnym 2018/19

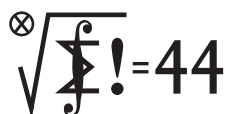
W ubiegłym roku próbowałam zrealizować pomysł, żeby w każdej serii zadań jedno było łatwiejsze, a drugie trudniejsze. Celem było zachęcenie do udziału w tej zabawie oraz wypromowanie uczestników, którzy poradzą sobie z trudniejszymi zadaniami. Ale pomysły sobie, a życie sobie. Kilka razy zdarzyło się, że zadanie, które uznałam za łatwe, uzyskało wysoki współczynnik trudności i odwrotnie. Takim zaskoczeniem było zadanie **679** ($WT = 3,25$). Zderzały się w nim sprężyste, niecentralnie dwa krążki hokejowe, z których jeden początkowo spoczywał. Zakładając brak tarcia, należało znaleźć maksymalną część energii układu, która podczas zderzenia przechodzi w energię sprężystości. Prawie wszyscy uczestnicy uznali, że cała energia ruchu wzdłuż prostej przechodzącej przez środki krążków zamieni się na energię sprężystości, podczas gdy w chwili maksymalnego odkształcenia prędkości krążków w tym kierunku wyrównują się. Zaskoczyło mnie również zadanie **675** ($WT = 3,33$), w którym trzy jednakowe, jednakowo naładowane kulki połączone nieprzewodzącymi niciami, tworzącymi trójkąt prostokątny. Należało znaleźć przyspieszenia kulek natychmiast po przecięciu nici na przeciwprostokątnej trójkąta. Tu zdecydowana większość uczestników uznała, że przyspieszenie kulki na przecięciu prostokątnych nici wynosi zero, tymczasem na układ kulek na przyprostokątnej działa wzdłuż nici niezrównoważona siła zewnętrzna i ich przyspieszenia w tym kierunku są jednakowe. Autorem jedynych poprawnych rozwiązań w obu przypadkach był **Jan Zambrzycki**. Niemniej jednak pomysł sprawdził się o tyle, że pojawili się nowi uczestnicy ligi, a wśród nich uczniowie.

pięć bezbłędnych rozwiązań, a w przypadku trzech zadań były to jedyne w pełni poprawne rozwiązania. Chodzi o zadania **663** ($WT = 3,13$), które było połączeniem elektrostatyki i mechaniki, oraz **668** ($WT = 3,06$) i **670** ($WT = 2,35$), oba z optyki. Niektórzy uczestnicy klubu, mają wyraźne preferencje do wybranych tematów, inne wychodzą im nieco gorzej albo omijają ją szerokim łukiem.

Trzech klubowiczów przekroczyło limit 44 punktów: Tomasz Wietecha po raz 14(!), Marian Łupieżowicz i Jan Zambrzycki po raz drugi.

Na koniec prośba do uczestników klubu, którzy przysyłają skany ręcznie pisanych rozwiązań, żeby były one pisane w miarę czytelnie i na neutralnym tle.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2020

Zadania z matematyki nr 795, 796

Redaguje Marcin E. KUCZMA

795. Ciąg x_0, x_1, x_2, \dots jest określony rekurencyjnie: $x_0 = 1$, $x_1 = 1/\sqrt{2}$,

$$x_{n+1} = x_n \sqrt{\frac{x_{n-1} + x_n}{2x_{n-1}}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Uzasadnić zbieżność i wyznaczyć granicę tego ciągu.

796. Dane są liczby całkowite $m > n > 1$, przy czym m jest liczbą parzystą. Udowodnić, że równanie

$$x^m + y^m = (x + y)^n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y wtedy i tylko wtedy, gdy $n - 1$ dzieli się przez $m - n$.

Zadanie 796 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2019

Przypominamy treść zadań:

787. Niech M będzie dowolnym niepustym skończonym zbiorem liczb całkowitych. Dowieść, że można ustawić elementy zbioru M w ciąg (x_1, \dots, x_n) tak, by dla każdej trójki wskaźników $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, $i < j < k$ spełniony był warunek: $x_i + x_k \neq 2x_j$.

788. Znaleźć największą liczbę t , dla której nierówność

$$(a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2) - 3abc \geq t(a + b + c)^3$$

zachodzi dla każdej trójki liczb dodatnich a, b, c , będących długościami boków trójkąta.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2018/19

Krzysztof Kamiński	–	2–42,48
Franciszek S. Sikorski	–	1–41,28
Krzysztof Maziarz	–	37,45
Michał Koźlik	–	35,73
Janusz Fiett	–	2–33,09
Mikołaj Pater	–	31,50
Paweł Burdzy	–	30,60
Zbigniew Skalik	–	3–30,03
Jakub Węgrecki	–	29,41
Marek Spychała	–	2–27,55
Bartłomiej Pawlik	–	27,51
Marcin Kasperski	–	4–27,01
Janusz Wojtal	–	25,24
Szymon Kitowski	–	23,49
Stanisław Bednarek	–	2–23,02
Piotr Lipiński	–	1–23,02
Marcin Małogrosz	–	3–22,34
Łukasz Merta	–	20,93
Błażej Żmija	–	20,68
Kacper Morawski	–	20,50
Andrzej Kurach	–	1–20,29
Jędrzej Biedrzycki	–	19,85
Michał Adamaszek	–	4–19,81
Tomasz Wietecha	–	12–19,12
Adam Woryna	–	3–15,10
Marek Prauza	–	4–14,96

Legenda (przykładowo): stan konta 4–27,01 oznacza, że uczestnik już czterokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (piątej) rundzie ma 27,01 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 14 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2017, 2018 lub 2019.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałeczki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowidrzal, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (14), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (20), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (12), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczański, M. Adamaszek (4), P. Kubit (7), J. Cisło (14), W. Bednarek (8), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik, A. Dzedzej, M. Miodek, M. Małogrosz (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, J. Fiett, Z. Galias, L. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, M. Spychała, T. Warszawski, G. Zakrzewski.

787. Warunki zadania nie zmieniają się przy przesunięciu zbioru M o dowolną liczbę całkowitą. Można więc zakładać, że jego elementami są liczby nieujemne. Zauważmy też, że jeśli elementy pewnego zbioru M da się uporządkować w wymagany sposób, wówczas to samo uporządkowanie jest dobre dla każdego podzbioru zbioru M (po wykreśleniu zbędnych elementów).

Wystarczy zatem udowodnić tezę zadania dla zbiorów postaci

$M_m = \{1, 2, 3, \dots, 2^m\}$. Dla $M_1 = \{1, 2\}$ każde z dwóch uporządkowań jest dobre (warunek spełniony „w próżni”). Dalej indukcja: przyjmijmy, że dla pewnego m zbiór M_m daje się ustawić w ciąg (x_1, \dots, x_{2^m}) tak, że $x_i + x_k \neq 2x_j$, gdy $i < j < k$. Wówczas ciąg

$$(y_1, \dots, y_{2^{m+1}}) = (2x_1, \dots, 2x_{2^m}, 2x_1 - 1, \dots, 2x_{2^m} - 1)$$

jest szukanym uporządkowaniem zbioru M_{m+1} (jednym z możliwych); bo gdy $0 < i < j < k \leq 2^m$ lub $2^m < i < j < k \leq 2^{m+1}$, nierówność $y_i + y_k \neq 2y_j$ wynika z założenia indukcyjnego; gdy zaś $i \leq 2^m < k$, liczba $y_i + y_k$ jest nieparzysta, więc $\neq 2y_j$. To kończy krok indukcyjny.

788. Dla trójkąta równobocznego zachodzi równość przy wartości parametru $t = 1/9$. Wykażemy, że wartość $t = 1/9$ gwarantuje spełnienie nierówności dla każdego trójkąta.

Długości boków a, b, c dowolnego trójkąta można wyrazić przez trójkę liczb $x, y, z > 0$, pisząc: $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Oznaczmy przez $F(a, b, c)$ różnicę między lewą oraz prawą stroną zadanej nierówności (z parametrem $t = 1/9$); mamy uzasadnić, że $F \geq 0$. Do dowodu użyjemy tożsamości

$$(1) \quad F(y + z, z + x, x + y) = \frac{2}{3} A(x, y, z) + \frac{2}{9} B(x, y, z),$$

gdzie

$$(2) \quad A(x, y, z) = x(x - y)(x - z) + y(y - z)(y - x) + z(z - x)(z - y),$$

$$(3) \quad B(x, y, z) = (x + y + z)[(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2].$$

Sprawdzenie tożsamości (1) jest czynnością mechaniczną; z uwagi na wielomianową jednorodną (stopnia 3) postać obu jej stron, wystarczy ją sprawdzić np. dla $z = 1$ oraz czterech różnych wartości y (można też użyć programu komputerowego). Wyrażenia (2) i (3) mają dla $x, y, z \geq 0$ wartości nieujemne: nierówność $B \geq 0$ jest oczywista; zaś $A \geq 0$ to znana *nierówność Schura*. Stąd $F \geq 0$. Wniosek: szukana maksymalna wartość t wynosi $1/9$.

[Dla kompletności – jednoliniowy dowód nierówności Schura: niech np. $x \geq y \geq z \geq 0$; wówczas

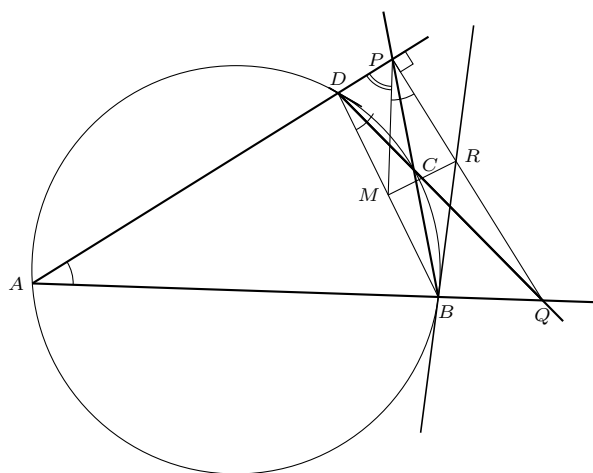
$$A(x, y, z) = (x - y)[x(x - z) - y(y - z)] + z(x - z)(y - z);$$

to wartość nieujemna, bo $x(x - z) \geq y(y - z)$.]

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44M w roku szkolnym 2018/19

W tegorocznym omówieniu do znużenia powtarza się fraza „wszystkie nadesłane rozwiązania podobne do firmowego”. To chyba oznacza, że zadania były trochę niefortunnie dobrane; tylko nieliczne dały możliwość rozwiązania sposobem odmiennym, a zgrabnym. Te, w których uczestnicy jednak zdołali znaleźć ciekawe rozwiązanie lub uogólnienie – bądź też opatrzyli interesującym komentarzem – włączamy do omówienia; a spośród pozostałych – zadania z wysokim współczynnikiem trudności (*WT*) lub niską liczbą przysłanych rozwiązań (*LPR*).

Tu mała uwaga: formuła definiująca *WT* ma faktyczne znaczenie w obrębie jednej serii, bowiem zależy od N , liczby uczestników owej serii. W serii 765, 766 wartość *WT* obu zadań wydaje się nie dość wysoka; to skutek niewielkiej wartości N , bowiem redaktor Ligi wyraźnie nie docenił geometrycznego zadania 765 i oczekiwał znacznie wyższej frekwencji w owym miesiącu...



Zadanie 765. [Czworokąt $ABCD$ cykliczny ($\sphericalangle A = \min$ kąt wewn.); $P = AD \cap BC$, $Q = AB \cap DC$, $AP \perp PQ$; $M = \text{środek } BD \Rightarrow PM \perp AB$] (WT=1,78; LPR=4).

Tylko cztery dobre rozwiązania: **M. Adamaszek**, **J. Węgrecki**, **J. Cisło** – zupełnie elementarnie (choć nie prościej niż w rozwiązaniu firmowym). **Janusz Olszewski** – inaczej i bardzo krótko: styczne do okręgu ($ABCD$) w punktach B, D przecinają się w punkcie R na prostej PQ (tw. Pascala dla sześciokąta $ABBCDD$); $MR \perp MD$, $PR \perp PD$, więc czworokąt $MDPR$ jest cykliczny; stąd $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BDR| = |\sphericalangle MPR| = 90^\circ - |\sphericalangle MPA|$ i $PM \perp AB$.

„Jednokrotni” członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie): R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Józwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Kurach, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowicz, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłega, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Piłkuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiał, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawislowski, P. Żmijewski.

Zadanie 766. [Znaleźć $M > 5/2: \forall a, b, c, d, e > 0: \sum_{\text{cykl}} \left(\frac{a}{b+c}\right)^{1/5} \geq M$; większe M – wyższa ocena] (WT=2,44; LPR=3). Proponując to zadanie, **Piotr Kumor** nie znalazł optymalnej wartości stałej M (czyli kresu dolnego rozważanej sumy cyklicznej). Potrafił pokazać, że liczba $M = 3 \cdot 2^{-1/5}$ jest ograniczeniem dolnym (większym od banalnego $5/2$). To ograniczenie, wraz z uzasadnieniem Autora zostało podane jako rozwiązanie firmowe; zostało też znalezione przez dwóch rozwiązujących (**M. Adamaszek**, **J. Olszewski**). Jednak końcowa klauzula zadania nie pozwoliła przyznać im oceny maksymalnej, bowiem do boju ponownie ruszył Autor zadania – i udowodnił, że $M = 3$ jest szukanym kresem dolnym (!). Dowód jest o wiele za długi, by go tu zamieścić, nawet skrótowo. Wzmiankę o tym wyniku, osadzoną w szerszym kontekście, znajdzie Czytelnik w artykule Autora w niniejszym numerze *Delty* (s. 14–15); a w elektronicznej wersji numeru – pełny dowód.

Zadanie 767. [Kwadrat $n \times n$; linie podziału – siatka $2n(n+1)$ odcinków jednostkowych; należy je pokolorować (4 kolory); każdy mały kwadracik ma mieć brzeg 4-barwny; duży kwadrat ma mieć brzeg 4-barwny, ale każdy bok 1-barwny; dla jakich n da się to wykonać?] (WT=1,47; LPR=15). Da się dla każdego n ; odmienny (nietrudny) dowód dla n parzystych i nieparzystych. **Janusz Fiett** wyliczył, że (przy ustalonych kolorach boków dużego kwadratu) liczba możliwych pokolorowań siatki dla $n = 30$ wynosi 33 554 944; wierzymy na słowo.

Janusz Olszewski zauważył, że modyfikacja rozumowania firmowego daje dla planszy prostokątnej $m \times n$ odpowiedź pozytywną, gdy m, n są jednakowej parzystości, oraz uzasadnił odpowiedź negatywną w pozostałym przypadku. To ładne uzupełnienie zadania: przypuśćmy, że udało się pomalować w opisany sposób prostokąt $ABCD$ o bokach AB, CD długości nieparzystej oraz BC, AD długości parzystej, przy czym bok AB jest czerwony; skracając boki BC, AD o jednostkę dostajemy prostokąt $A'B'CD$ (o polu nieparzystym), którego żaden bok nie zawiera odcinka czerwonego. Zatem wszystkie czerwone odcinki rozważanej siatki (poza tymi na boku AB) leżą wewnątrz tego ostatniego prostokąta; każdy z nich skleja dwa kwadraciki jednostkowe; dostajemy parkietaż prostokąta $A'B'CD$ kostkami domino – sprzeczność.

Zadanie 768. [Równanie $1 + x + x^2 + \dots + x^k = (1 + x)^m$ w $(k, m, x) \in \mathbb{N}^3$] (WT=2,85; LPR=5 (?)). Dwaj najczęściej cytowani uczestnicy Ligi zaimponowali erudycją: **Janusz Olszewski** zwrócił uwagę na ogólne twierdzenie:

Dla liczb naturalnych $a > b$, względnie pierwszych, oraz dla $n \geq 7$ istnieje liczba pierwsza p , która dzieli różnicę $a^n - b^n$, ale nie $a^i - b^i$ dla $i = 1, \dots, n-1$; gdy $2 \leq n \leq 6$ też tak jest, z wyjątkiem przypadków: $[n = 6, a = 2, b = 1]$ oraz $[n = 2, a + b = 2^m (m \in \mathbb{N})]$.

Jest ono najlepiej znane pod nazwą: twierdzenie Zsigmondy’ego; w nieznacznie różniących się wersjach jest również wiązane z nazwiskami: Bang, Birkhoff, Vandiver; por. artykuł A. Rotkiewicza w *Pracach Mat.* IV (1960), s. 21–28.

Dane w zadaniu równanie można (dla $x > 1$) przepisać równoważnie:

$$(1) \quad x^{k+1} - 1 = (x - 1)(x + 1)^m.$$

Gdy $k, x \geq 2$, wówczas biorąc w tw. Zsigmondy’ego $a = x, b = 1, n = k + 1$, dostajemy – poza wymienionymi przypadkami [...] – liczbę pierwszą p dzielącą $x^{k+1} - 1$, ale nie $x - 1, x^2 - 1$, co daje sprzeczność z równaniem (1); zaś przypadki [...], jak również $k = 1$ lub $x = 1$, łatwo już zbadać bezpośrednio, uzyskując ogólne rozwiązanie równania: $(k, m, x) = (1, 1, x)$ lub $(2^m - 1, m, 1)$. (**J. Olszewski** dostarczył jeszcze dwa inne rozwiązania, dłuższe).

Piotr Kumor podzielił się wiedzą na temat równania Nagella–Ljunggrena

$$(2) \quad x^n - 1 = (x - 1)y^q; \quad x, y, n, q \in \mathbb{N}; \quad x, y, q > 1; \quad n > 2;$$

oczywiście (1) jest szczególnym przypadkiem (2).

Choć ogólne rozwiązanie (2) nie jest znane, do celów naszego zadania wystarczy twierdzenie mówiące, że (2) nie ma rozwiązań z $y \equiv 1 \pmod{x}$ (Bugeaud, Mignotte, Roy): pdfs.semanticscholar.org/e645/956801dd058624d9a8ed1c279c62199e53bb.pdf

Nie ma tu miejsca, by zreferować wszystkie ciekawe przysłane informacje o tym równaniu (Google: Nagell-Ljunggren equation; można też zajrzeć do omówienia ligi w elektronicznej wersji numeru).

Jak zaś zrobić to zadanie bez głębokiej wiedzy (lub sprawnej przeglądarki), pokazuje rozwiązanie firmowe oraz podobne elementarne rozwiązania, które przysłali: **M. Adamaszek, M. Małogrosz, T. Wietecha**; jeszcze dwaj uczestnicy zrobili istotną część zadania, jednak w konkluzji gubiąc serię przypadków.

Zadanie 770. [Dane $m, n \in \mathbb{N}$; $m, n \geq 2$; $K_n(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m n^{-a_i}$; $S = \{K_n(a_1, \dots, a_m) < 1: a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}\}$; $\sup S = ?$] (WT=2,71; LPR=6 (9?)). Rozwiązania nie odbiegały od firmowego: **M. Adamaszek, M. Kasperski, J. Fiett, J. Olszewski, A. Kurach, Z. Skalik**; a także (poprawnie po dopracowaniu): **J. Cisło, S. Słobodianiuk, P. Najman**. Autor zadania, **Adam Woryna**, wspominał, że rozważana wielkość $K_n(a_1, \dots, a_m)$ jest nazywana *sumą Krafta* ciągu (a_1, \dots, a_m) .

Zadanie 771. [$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna; $f'(\frac{a+b}{2}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a - b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $f = ?$] (WT=2,91; LPR=6). Nie wszyscy rozwiązujący zauważyli, że podane równanie jest zakładane *jedynie* dla par liczb o różnicy całkowitej (przyjęcie tego założenia dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ to istotna zmiana zadania!). Dobre rozwiązania: **M. Adamaszek, W. Bednarek, J. Cisło, P. Kumor, M. Małogrosz, J. Olszewski**; we wszystkich wystarczało rozważanie par a, b różniących się o 2, 4 lub 8; teza: f jest wielomianem stopnia ≤ 2 . Intrygujące pytanie postawił **P. Kumor**: czy dla uzyskania tezy nie wystarczy założenie podanej równości dla pewnych ustalonych *dwóch* (a nie trzech) wartości różnicy $|a - b|$? Pytanie przekazujemy Czytelnikom. (Ustalenie *jednej* nie wystarczy; przykłady: math.stackexchange.com/questions/116236/mean-value-property-with-fixed-radius).

Zadanie 776. [Sześcian o krawędzi k przecięty płaszczyzną w odległości d od jego środka, nierozłączną z żadną ścianą; $\max d = ?$] (WT=2,88; LPR=7).

Rozwiązania jak firmowe: nieistotne różnice w warsztacie (rozmiary prac: od 1/2 do 4 stron wydruku): **M. Adamaszek, J. Fiett, A. Kurach, M. Małogrosz, Ł. Merta, J. Olszewski, B. Żmija**.

Zadanie 777. [$\triangle ABC$; $K \in BC$, $L \in CA$, $M \in AB$ – punkty styczności z okręgiem wpisanym; P na prostej KM ; $PC \parallel KL \Rightarrow$ prosta AP przepoławia KL] (WT=2,45; LPR=10). Twierdzenie Menelausa, użyte w rozwiązaniu firmowym, można było zastosować i do innych trójkątów widocznych na rysunkach (**Michał Adamaszek**: $\triangle ABC$; **Andrzej Kurach**: $\triangle KLY$; $Y = AC \cap KM$); dawało tezę prawie natychmiast. Używając metod bardziej wymyślnych (wzajemność biegunowych, dwustosunek, symediany), zadanie zrobili **Janusz Olszewski, Semen Słobodianiuk**; nie przedstawiamy tych prac, zważywszy większą prostotę (i mniejszą długość) rozwiązania firmowego oraz pokrewnych. Pozostałe dobre rozwiązania – rachunkowe.

Zadanie 779. [Plansza $n \times n$; w każdym polu liczba całkowita; liczby w polach sąsiednich różnią się ≤ 1 ; badamy $m \in \mathbb{N}$ takie, że przy każdym takim wypełnieniu pewna liczba pojawi się na $\geq m$ polach; $\max m = ?$] (WT=2,71; LPR=7). Rozwiązania jak firmowe (lub dość podobne): **M. Adamaszek, Ł. Merta, J. Olszewski, B. Żmija, R. Kujawa, K. Matuszewski**; oraz (rozpatrując liczne przypadki) **A. Kurach**. Tylko **Michał Adamaszek** zwrócił uwagę, że przy każdym takim wypełnieniu dowolnej planszy *prostokątnej* pewna liczba występuje w każdym wierszu lub każdej kolumnie; stąd dla kwadratu $n \times n$ odpowiedź: $(\max m) = n$.

Zadanie 781. [Dane $b > a > 0$ oraz liczba parzysta n ; badamy średnie $A = A(x_1, \dots, x_n)$, $H = H(x_1, \dots, x_n)$, gdy $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$; $\sup(A/H) = ?$] (WT=1,36; LPR=16). Prościej niż firmówka: prawie wszyscy skorzystali z wypukłości (względem każdego x_i) funkcji A/H i wywnioskowali, że na kostce $[a, b]^n$ osiąga ona maksimum w jednym z wierzchołków – mianowicie tym, gdzie jest jednakowo wiele wystąpień a i b ; zaś dla n nieparzystego – gdzie liczby wystąpień a i b różnią się o 1; ten przypadek to naturalne uogólnienie zadania (**M. Kasperski, J. Olszewski, T. Wietecha**).

Zadanie 783. [N kwadratów (boki \parallel , \perp do ustalonego kierunku); S – zbiór ich środków \Rightarrow można wyróżnić pewne kwadraty tak, by każdy punkt zbioru S leżał w ≥ 1 oraz ≤ 4 wyróżnionych kwadratach] (WT=3,76; LPR=2). Oba dobre rozwiązania jak firmowe: **Karol Matuszewski, Janusz Olszewski**.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Zaskakująco dużo gazu w „martwych” galaktykach

Wodór, najpowszechniej występujący we Wszechświecie pierwiastek, występuje w dwóch odmianach gazowych: jako *gaz atomowy* (H_1) złożony z pojedynczych atomów oraz jako *gaz molekularny* złożony z dwuatomowych cząsteczek wodoru (H_2).

Jedno z fundamentalnych stwierdzeń współczesnej astronomii zakłada, że gwiazdy powstają w zimnym gęstym gazie molekularnym. Wszystkie modele tworzenia i ewolucji galaktyk, które przecież składają się między innymi z milionów gwiazd, oparte są bezpośrednio na tym założeniu. Wspierane jest ono przez obserwacje astronomiczne, które wskazują, że galaktyki aktywnie tworzące gwiazdy – zazwyczaj spiralne o niebieskim kolorze – posiadają duże zapasy zimnego gazu molekularnego, przez co szybka produkcja gwiazd może być w nich podtrzymywana. Z kolei w drugiej klasie galaktyk, charakteryzujących się kolorem czerwonym, produkcja gwiazd zanikła i wypełniają je jedynie stare gwiazdy, będące u schyłku swojego życia. Przez długi czas sądzono, że takie martwe galaktyki mają tylko znikome ilości zimnego gazu molekularnego. Wnioskowano, że gaz ten został zużyty w przeszłości do tworzenia gwiazd lub galaktyka została go pozbawiona w wyniku jakiegoś zdarzenia (np. zjawisk związanych z wywiewaniem gazu z galaktyki w wyniku sił pływowych lub niestabilności Kelvina–Helmholza), lub też kombinacji obu tych efektów.

Do pełnego obrazu potrzebna jest jeszcze jedna informacja. Istnieją ewidentne dowody na to, że galaktyki tworzące gwiazdy i te wygasłe znaleźć można w bardzo różnych środowiskach. Galaktyki aktywnie tworzące gwiazdy zazwyczaj są odizolowane lub znajdują się w bardzo małych grupach, podczas gdy duże, martwe galaktyki znaleźć można głównie w gromadach galaktyk (liczących od dziesiątek do setek obiektów). Ta zależność, pomiędzy morfologią a gęstością, wskazuje na kluczową rolę środowiska galaktyki w procesie jej tworzenia i ewolucji. W szczególności na rolę gęstych gromad galaktyk w procesie „tłumienia” aktywności gwiazdotwórczej.

Największe i najbardziej masywne galaktyki można znaleźć w centrach gromad galaktyk (nazywamy je galaktykami centralnymi, w przeciwieństwie do galaktyk „satelitów” znajdujących się na obrzeżach

gromady). W zaprezentowanej przez Chengpenga Zhanga w październiku 2019 roku pracy *Nearly all Massive Quiescent Disk Galaxies have a Surprisingly Large Atomic Gas Reservoir* opisano zaskakujące obserwacje dotyczące zawartości gazu w takich właśnie galaktykach.

Badacze wyselekcjonowali dużą próbkę masywnych galaktyk, o masach rzędu $10^{10,6} - 10^{11}$ Mas Słońca, zaobserwowanych w ramach przeglądu optycznego *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) oraz przeglądów radiowych *The Arecibo Legacy Fast ALFA Survey* (ALFALFA) i *The GALEX Arecibo SDSS Survey* (GASS). Jednak zamiast skupiać się wyłącznie na typowych centralnych galaktykach eliptycznych, do swojej próbki zaliczyli również rzadkie masywne centralne galaktyki spiralne nie wykazujące aktywności gwiazdotwórczej. Dzięki obserwacjom radiowym uzyskali dla tych galaktyk pomiary ilości gazu atomowego (H_1), który w sprzyjających warunkach może się ochłodzić do postaci gazu molekularnego (H_2).

Wyniki tych badań były zaskakujące: prawie wszystkie masywne spiralne galaktyki centralne mają niezwykle duże zapasy gazu atomowego (szczególnie w porównaniu z masywnymi galaktykami eliptycznymi). Co więcej jednak, centralne galaktyki spiralne nie tworzące gwiazd mają prawie taką samą ilość gazu, jak te aktywnie tworzące gwiazdy. Innymi słowy, masywne ciche galaktyki spiralne są tak samo bogate w gaz, jak ich odpowiedniki aktywnie tworzące gwiazdy.

Dlaczego więc, mimo zapasów gazu, gwiazdy w tych galaktykach przestały powstawać? Brak aktywności gwiazdowej może sugerować, że istnieją mechanizmy powstrzymujące przemianę gazu atomowego w molekularny lub że istnieją procesy blokujące tworzenie się gwiazd, mimo że w galaktyce obecny jest gaz molekularny (lub obie te przyczyny naraz). Późniejsze obserwacje zawartości zimnego gazu w galaktykach wykluczyły tę drugą możliwość. Wciąż jednak przyczyny występowania pierwszego zjawiska pozostają tajemnicą.

Anna DURKALEC

Niebo w lutym

Luty to pierwszy miesiąc z wyraźnie wydłużającymi się dniami i skracającymi nocami. W ciągu miesiąca, który w tym roku ma 29 dni (2020 jest rokiem przestępnym), wysokość górowania Słońca zwiększy się z 21° do 30° , w związku z czym czas jego przybywania na nieboskłonnie wzrośnie prawie do 11 godzin. Nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokregu cały czas się poprawia, zaś do porannego – pogarsza, stąd obiekty znajdujące się na niebie blisko niej i jednocześnie niezbyt daleko od Słońca są dobrze widoczne wieczorem i słabo rano.

Fakt ten ma znaczenie szczególnie dla Księżyca blisko nowiu i obu planet wewnętrznych, ale także dla innych ciał Układu Słonecznego. Można się o tym przekonać właśnie w lutym. Księżyc zacznie miesiąc w I kwadrze na pograniczu gwiazdozbiorów Wieloryba i Barana, przypadającej 2 lutego po godzinie 2 polskiego czasu. Potem podąży do pełni, a po drodze, w nocy z 3 na 4 lutego, prezentując tarczę oświetloną w 68%, przejdzie przez Hiady, zbliżając się na mniej niż 4° do Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka. Dwie noce

później Srebrny Glob dotrze do gwiazdozbioru Bliźniąt, zwiększając fazę do 86%. Tej nocy, mniej więcej od godziny 3:20 do 4, za księżycową tarczą zniknie dość jasna gwiazda η Gem. Księżyc przejdzie przez pełnię 9 lutego rano, a tego samego dnia wieczorem minie Regulusa, najjaśniejszą gwiazdę Lwa.

Już od początku miesiąca o zmierzchu, kilka stopni nad zachodnim widnokregiem, niebo ozdabia planeta **Merkury**, a dwadzieścia kilka stopni od niej, znacznie wyżej, niebo rozświetla bardzo jasna **Wenus**. Między nimi znajduje się niewidoczna gołym okiem planeta Neptun. Pierwsza z planet zbliża się do swojej maksymalnej elongacji wschodniej, którą osiągnie 10 lutego. Oddali się wtedy od Słońca na ponad 18° i godzinę po zachodzie Słońca zajmie pozycję na wysokości mniej więcej 6° , prawie dokładnie w połowie między punktami W a SW widnokregu. Jej jasność wyniesie wtedy $-0,5^m$, średnica tarczy $7''$, zaś faza 51%. Oczywiście Merkury jest widoczny nie tylko wtedy. Planetę można obserwować do końca drugiej dekady lutego. W tym czasie jej jasność spadnie od -1 do $+2,3^m$, średnica tarczy urośnie z 6 do $10''$, natomiast faza zmniejszy się od 83 do 9%. Niestety Księżyc przeszedł przez ten rejon nieba pod koniec stycznia i powróci doń już po zniknięciu Merkurego w zorzy wieczornej.

Druga planeta wewnętrzna również dąży do swojej maksymalnej elongacji wschodniej, którą osiągnie pod koniec marca. Przez cały luty planeta jest bez kłopotu widoczna gołym okiem, jak tylko skończy się dzień. W trakcie miesiąca wysokość Wenus nad horyzontem godzinę po zachodzie Słońca zwiększy się od 23° do 30° , urośnie również jasność (z $-4,1$ do $-4,2^m$) i średnica kątowa tarczy (z $15''$ do $19''$). Zmniejszy się za to faza, z 73 do 63%. Wszystkie te zmiany są dla nas korzystne, gdyż tarcza planety przybiera coraz atrakcyjniejszą postać. Księżyc spotka się z Wenus 27 lutego. Tego dnia jego sierp w fazie 14% minie planetę w odległości 6° .

Planetę **Neptun** można próbować dostrzec przez lornetki lub teleskopy tylko w pierwszej dekadzie miesiąca. Neptun zbliża się do spotkania ze Słońcem na początku marca i mimo dużego nachylenia ekliptyki tło nieba szybko stanie się zbyt jasne na jego obserwację. W pierwszych dniach lutego około godziny 18 zajmuję pozycję na wysokości 15° , świecąc z jasnością $+7,8^m$. Planeta znajduje się kilkanaście minut kątowych na zachód od gwiazdy 4. wielkości φ Aqr. W odnalezieniu Neptuna na pewno pomocna okaże się planeta Wenus, która 1 lutego potowarzyszy Neptunowi w odległości 6° , lecz do 10 dnia miesiąca oddali się od niego na ponad 15° .

Wciąż bardzo dobrze widoczna jest planeta **Uran**, wędrująca przez gwiazdozbiór Barana, około 11° na południe od Hamala, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji, choć ona także zbliża się do spotkania ze Słońcem pod koniec kwietnia. Dwie godziny po zachodzie Słońca, a więc na początku nocy astronomicznej, planeta zajmuje pozycję na wysokości 45° , by pod

koniec miesiąca o tej samej porze zmniejszyć ją do 25° . W lutym Księżyc spotka się z Uranem 2-krotnie: 1 lutego przed I kwadrą oddalający się już Srebrny Glob pokaże się 7° na wschód od planety oraz 28 lutego, gdy jego sierp w fazie 22% przejdzie 5° na południe od niej. W lutym jasność Urana wynosi $+5,8^m$ i na ciemnym niebie można próbować dostrzec go gołym okiem, ale nawet najmniejsza lornetka znacznie ułatwi jego odnalezienie.

Na niebie porannym coraz wyżej wspina się planeta **Mars**, a w drugiej połowie miesiąca dołączą do niej planety **Jowisz** i **Saturn**. Mars w lutym przejdzie z gwiazdozbioru Wężownika do gwiazdozbioru Strzelca i do końca miesiąca zbliży się do planety Jowisz na 11° . Do tego czasu blask Marsa osiągnie $+1,1^m$, przy wciąż małej tarczy, o średnicy $5''$. Czerwona Planeta przejdzie 18 lutego między znanymi mgławicami z katalogu Messiera M8 i M20, zbliżając się do nich na około $40'$, czyli niewiele więcej od średnicy kątowej Słońca czy Księżyc. Tej samej nocy planecie towarzystwa dotrzyma Księżyc, prezentujący wtedy sierp w fazie 27% około 4° na zachód od Marsa. Dobę później Srebrny Glob przesunie się kilkanaście stopni na wschód i jego sierp zwężony do 18% oddali się na 8° od Czerwonej Planety, zbliżając się jednocześnie na podobną odległość do Jowisza. Prawie dokładnie na linii łączącej Księżyc z Marsiem ($1,5^\circ$, czyli 3 jego średnice kątowe) przez lornetki powinno dać się dostrzec znaną gromadę kulistą gwiazd M22, o jasności obserwowanej $+6,5^m$.

W drugiej części miesiąca tuż przed świtem z zorzy porannej wyłaniać się będą planety Jowisz i Saturn, powracające na poranne niebo po spotkaniach ze Słońcem na przełomie lat 2019/20. Obie planety w tym sezonie obserwacyjnym utworzą całkiem ciasną parę o separacji kilku stopni, mieszcząc się razem w polu widzenia mniejszych lornetek. Pierwszy zacznie się pokazywać położony bardziej na zachód Jowisz, ale Saturn nie każe długo na siebie czekać. W lutym jasność Jowisza wyniesie $-1,9^m$, przy tarczy o średnicy $33''$. Saturn świeci o $2,5^m$ słabiej, ma również ponad dwukrotnie mniejszą tarczę. Księżyc spotka się z planetami zaraz po minięciu Marsa. Dokładnie 20 lutego Srebrny Glob z sierpem w fazie 11% utworzy trójkąt prawie równoramienny z obiema planetami. Niestety Srebrny Glob skieruje się wtedy pod i tak nisko położoną ekliptykę, co oznacza, że do jego dostrzeżenia potrzebny jest głęboko odsłonięty widnokrąg.

W lutym nadal jasna powinna być **miryda** χ Cygni, która około 20 stycznia osiągnęła maksimum swojej jasności. Gwiazda znajduje się niecałe 7° na północ od słynnej gwiazdy podwójnej Albireo i zwłaszcza na początku miesiąca jej blask przewyższy granicę widoczności gołym okiem. W lutym χ Cyg jest wyraźnie wyżej niż w styczniu. W trakcie miesiąca na dwie godziny przed wschodem Słońca, a więc pod koniec nocy astronomicznej, gwiazda zwiększy wysokość z 30° do 40° , a zatem jej warunki obserwacyjne są bardzo dobre.

Ariel MAJCHER

Czy Słońce jest częścią układu podwójnego gwiazd?

Nie. Ale odpowiedź na tytułowe pytanie to kawałek ciekawej nauki.

Około 65 milionów lat temu masowe wymieranie zniszczyło trzy czwarte gatunków żyjących wówczas na Ziemi. Kataklyzm, który doprowadził m.in. do zagłady dinozaurów, jest widoczny w układzie warstw skalnych na tzw. granicy kreda-paleogen. W warstwie skał odpowiadającej tej granicy geologicznej obserwuje się wysoką zawartość irydu, pierwiastka, który jest stosunkowo rzadki w skałach skorupy ziemskiej, ale występuje w znacznie większej obfitości w asteroidach. Skojarzenie warstwy irydu z wielkim wymieraniem było jednym z argumentów za hipotezą, że było ono spowodowane uderzeniem w Ziemię asteroidy o średnicy kilkunastu kilometrów. Takie zderzenie miałoby katastrofalne konsekwencje dla ziemskiego klimatu, co z kolei wyjaśniłoby ogromny spadek bioróżnorodności, wynikający z tego, że większość gatunków nie była w stanie przystosować się do zmienionych błyskawicznie warunków.

Chociaż wyginięcie dinozaurów jest uważane za najbardziej dramatyczne, nie jest ono bynajmniej wyjątkowe: dane geologiczne jednoznacznie wskazują na to, że biosfera Ziemi doświadczyła serii epizodów masowego wymierania. Analiza dwunastu tego typu zdarzeń, rozłożonych w ciągu ćwierci miliarda lat, skłoniła niektórych badaczy do wysunięcia hipotezy, że wielkie wymierania mają charakter okresowy i powtarzają się mniej więcej co 26 milionów lat [1]. Jedną z możliwości, która wyjaśniałaby taki stan rzeczy, byłoby istnienie gwiazdnego towarzysza Słońca, krążącego po wydłużonej eliptycznej orbicie i zaburzającego komety w obłoku Oorta, tak że są one wytrącane ze swoich orbit i mogą zderzać się z naszą planetą [2]. Okres orbitalny 26 milionów lat tłumaczy się jednoznacznie za pomocą trzeciego prawa Keplera na wielką półorbitę o długości 88 tysięcy jednostek astronomicznych. Gdyby gwiazda taka, którą roboczo nazwano imieniem greckiej bogini zemsty Nemezis, była świecącym w podczerwieni brązowym karłem, mogłaby nie być widoczna za pomocą teleskopów optycznych i pozostać niezauważona przez astronomów.

Pozostawało jednak pytanie, czy orbita Nemezis mogła być stabilna, jeśli wziąć pod uwagę oddziaływanie grawitacyjne wielkich planet czy innych gwiazd. Początkowo nie było to jasne [3] i dopiero niedawno stwierdzono, że prawdopodobieństwo wyrzucenia Nemezis z Układu Słonecznego przez oddziaływanie innych gwiazd w ciągu czasu rzędu wieku Słońca jest praktycznie stuprocentowe [4], a zatem nawet gdyby kiedyś towarzyszyła Słońcu, nie powinno jej już być w jego pobliżu.

Osobną sprawą było obserwacyjne poszukiwanie Nemezis. Pierwsze kroki w tym celu poczynił zespół pod wodzą późniejszego laureata Nagrody Nobla z fizyki, Saula Perlmuttera, kluczowe jednak były obserwacje w zakresie podczerwonym wykonane przez zespoły IRAS i 2MASS. Wszystkie one przyniosły wyniki negatywne. Co więcej, zaczęto także kwestionować okresowość wielkich wymierań, co sprawiło, że hipoteza Nemezis stała się po prostu niepotrzebna.

Trudne do wytłumaczenia ruchy komet w obłoku Oorta skłoniły jednak astronomów do ponownego rozważania

możliwych towarzyszy Słońca. Zamiast brązowego karła zaproponowano planetę podobną do Jowisza [5]. Okazało się jednak, że i taki obiekt jest w praktyce wykluczony przez obserwacje w zakresie podczerwonym wykonane kilka lat temu przez zespół WISE.

Postęp w badaniach krańców Układu Słonecznego przynosi tymczasem wciąż nowe zagadki, do rozwiązania których postuluje się istnienie nowych ciał niebieskich. Przeprowadzone w ostatnich latach obserwacje odległych planet karłowatych wskazują na to, że mają one wydłużone, eliptyczne orbity leżące w przybliżeniu w tej samej płaszczyźnie, a wielkie półosie tych elips ułożone są w tym samym kierunku. Taka konfiguracja byłaby możliwa do wyjaśnienia dzięki obecności daleko za orbitą Neptuna jeszcze jednej planety o masie około pięciokrotnie większej od Ziemi. Niektórzy badacze o bujnej fantazji zaproponowali nawet, że nie musiałyby to być planety – wystarczyłaby pierwotna, tzn. wytworzona w początkach historii Wszechświata, czarna dziura, mieszcząca całą tę masę w kuli o promieniu kilku centymetrów [6].

To ile mamy planet w Układzie Słonecznym?

Krzysztof TURZYŃSKI

- [0] Batygin K., Adams F.C., Brown M.E., Becker J.C., *The planet nine hypothesis*, Physics Reports 805 (2019) 1
- [1] Raup, D.M., Sepkoski, J.J. 1984, *Periodicity of Extinctions in the Geologic Past*, Pub. Nat. Acad. Sci., 81, 801
- [2] Davis, M., Hut, P., Muller, R.A. 1984, *Extinction of Species by Periodic Comet Showers*, Nature, 308, 715-717
- [3] Hills, J.G. 1984, *Dynamical Constraints on the Mass and Perihelion Distance of Nemesis and the Stability of its Orbit*, Nature, 311, 636; *How Stable is an Astronomical Clock that can Trigger Mass Extinctions on Earth?* Nature, 311, 638; Torbett, M.V., Smoluchowski, R. 1984, *Orbital Stability of the Unseen Solar Companion linked to Periodic Extinction Events*, Nature, 311, 641
- [4] Li, G., Adams, F.C. 2016, *Interaction Cross Sections and Survival Rates for Proposed Solar System Member Planet Nine*, Astrophys. J. Letters, 823, L3
- [5] Matese, J.J., Whitman, P.G., Whitmire, D.P. 1999, *Cometary Evidence of a Massive Body in the Outer Oort Cloud*, Icarus, 141, 354; Matese, J.J., Whitmire, D.P. 2011, *Persistent Evidence of a Jovian Mass Solar Companion in the Oort cloud*, Icarus, 211, 926-938
- [6] Scholtz J., Unwin J., *What if Planet 9 is a Primordial Black Hole?*, arXiv:1909.11090



Kochajcie trygonometrię, dziewczęta

Bartłomiej BZDEGA

Trygonometria, z zupełnie niezrozumiałych dla mnie powodów, bywa uznawana za brzydką metodę rozwiązywania zadań olimpijskich. Niestety skutkuje to tym, że młodzież mniej chętnie uczy się tego ważnego działu matematyki. Być może znalezienie odcinka, którego dorysowanie natychmiast rozwiązuje problem, jest nieco bardziej eleganckie niż stosowanie twierdzenia sinusów, ale nie ma gwarancji, że taki odcinek zdążymy w czasie zawodów znaleźć. Dlatego warto w swym arsenale mieć dodatkowe narzędzia, które, choć bardziej toporne, w niektórych warunkach są nieco pewniejsze.

W poniższych twierdzeniach używamy *standardowych oznaczeń*: niech α, β, γ będą miarami kątów przy wierzchołkach odpowiednio A, B, C trójkąta ABC , zaś a, b, c – długościami boków naprzeciw nich. Przez R oznaczamy promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie sinusów: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$.

Twierdzenie cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (analogicznie a^2 i b^2).

Pole trójkąta: $[ABC] = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \sin \beta$.

Nie będziemy wymieniać tu wzorów redukcyjnych ani innych tożsamości trygonometrycznych. Czytelnik, jeżeli jeszcze nie zapoznał się z nimi na lekcji matematyki w szkole średniej, znajdzie je w tablicach matematycznych.

Na koniec dwie uwagi do twierdzenia sinusów. Wynika z niego równość proporcji $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ (i dwie analogiczne), więc możemy płynnie przechodzić pomiędzy długościami boków i sinusami kątów trójkąta. Ponadto do korzystania z twierdzenia sinusów wcale nam trójkąta nie potrzeba, gdyż łączy ono długość d cięciwy okręgu, która wyznacza kąt wpisany δ , z promieniem R tego okręgu: $\frac{d}{\sin \delta} = 2R$.

Zadania

- Wykazać, że dla równoległoboku $ABCD$ zachodzi równość $|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2$.
- Punkt P leży na boku AB trójkąta ABC . Niech $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AP| = x$ i $|BP| = y$. Dowieść, że $|CP|^2 = \frac{a^2x + b^2y}{x+y} - xy$ (twierdzenie Stewarta).
- Ustalmy półproste p_a, p_b, p_c i p_d , mające wspólny początek P , które zostały podane w kolejności antyżegarowej. Prosta ℓ przecina je odpowiednio w punktach A, B, C i D . Dowieść, że wartość wyrażenia $\frac{|AC| \cdot |BD|}{|BC| \cdot |AD|}$ nie zależy od wyboru prostej ℓ (niezmienniczość dwustosunku).
- Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD , przy czym trójkąt AKL jest równoboczny. Dowieść, że suma pól trójkątów ABK i ALD jest równa polu trójkąta CLK .
- Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Na tym okręgu leży punkt P . Udowodnić, że iloczyn odległości punktu P od prostych AB i CD jest równy iloczynowi odległości punktu P od prostych BC i DA .
- Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC . Spełnione są następujące równości:

$$|AR| = |RP| = |PC|, \quad |BR| = |RQ| = |QC|.$$

Wykazać, że $|AC| + |BC| = 2|AB|$.

- W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą następujące równości:

$$|AB| = |BC| = |CD|, \quad |AE| = |EB| = |BD|, \quad |AC| = |CE| = |ED|.$$

Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.

- W trójkącie ABC , wpisanym w okrąg o środku O , kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D . Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q . Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ .

Wskazówki do zadań
 1. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku. Wyznaczycie $|AB|^2$ z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABP , podobnie trzy pozostałe kwadraty długości boków.
 2. Mamy $\cos \angle APC = -\cos \angle BPC$. Wyznaczycie lewą i prawą stronę z twierdzenia cosinusów dla trójkątów odpowiednio APC i BPC ; a następnie przeksztalcic otrzymaną równość, by otrzymac $|CP|^2$.
 3. Niech h będzie odległością punktu P od prostej ℓ . Oznaczmy przez α, β, γ kąty p_a, p_b i p_c, p_d . Wówczas obliczając pomiedzy półprostymi odpowiednio p_a na dwa sposoby pole trójkąta ACP , otrzymamy $|AC| = \frac{h}{|AP| \cdot |CP|} \cdot \sin(\alpha + \beta)$. Analogicznie należy postąpić z odcinkami BD, BC i AD .
 4. Przy standardowych oznaczeniach, jeśli $\gamma = 90^\circ$, to $[ABC] = \frac{1}{2}c^2 \sin 2\alpha$. Niech $\varphi = 2|\angle BAK|$. Zadanie sprowadza się do wykazania równości $\sin \varphi + \sin(60^\circ - \varphi) = \sin(60^\circ + \varphi)$.
 5. Przy standardowych oznaczeniach wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C ma długość $\frac{ab}{c}$. Odległości punktu P od prostych AB, BC, CD i DA są odpowiednio CDP, DAP .
 6. Niech $|AR| = x$ i $|BR| = y$. Obliczając pole trójkąta ABC na dwa sposoby, otrzymamy równość $\frac{1}{2}ab \sin \gamma = x y \sin \gamma + \frac{1}{2}(y - x)(a - x) \sin \gamma$ (oznaczenia standardowe). Teraz wystarczy zastosować twierdzenie sinusów dla trójkąta ABR i uproszczyć tę równość.
 7. Przyjmijmy oznaczenia $x = |AB|, y = |AE|, z = |AC|$ oraz $\varphi = \angle BAC$. Z równości $\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi$ otrzymamy po przekształceniach $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = 2$. Te równości prowadzą do wniosku, że pewne dwie z liczb x, y, z są równe, a dzięki założeniu o wypukłości pięciokąta mamy $y = z$. Dalszą część rozwiązania stanowią proste rachunki na kątach.
 8. Przyjmijmy standardowe oznaczenia dla trójkąta ABC . Z twierdzenia dwusiecznej zastosowanego dla trójkąta ADC otrzymujemy $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Miarę kątów trójkąta ADC wyznoszą odpowiednio $\alpha, 90^\circ - \alpha + \beta - \beta - 90^\circ$, więc z twierdzenia sinusów $\frac{|AD|}{|AC| + |CD|} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha + \beta)}{\sin \alpha}$. Po pomnożeniu i zastosowaniu równości twierdzenia sinusów, otrzymamy $\frac{|AD|}{|AC| + |CD|} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$. Analogicznie $\frac{|AD|}{|AC| + |CD|} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$.

Maths Beyond Limits

Maths Beyond Limits to dwunastodniowy międzynarodowy obóz matematyczny dla uzdolnionej młodzieży w wieku 15-19 lat, organizowany przez grupę byłych olimpijczyków oraz studentów Uniwersytetu Warszawskiego i University of Cambridge, pod patronatem Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci. Obóz odbywa się w Milówce koło Żywca w przepięknej scenerii Beskidu Śląskiego. Kolejna, czwarta edycja odbędzie się 7 - 19 września bieżącego roku. Wszystkich zainteresowanych zapraszamy do rekrutacji, która rusza już 1 kwietnia.

Dokładne informacje o obozie, a także materiały z poprzednich edycji można znaleźć na naszej stronie internetowej i Facebooku.



mathsbeyondlimits.eu



mathsbeyondlimits@gmail.com



facebook.com/mathsbeyondlimits

