

deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu \quad \pi=3,141592\dots$$

NR 1 (548) 2020

CENA 4 ZŁ VAT 8%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

**Planety
pozaśloneczne –
w poszukiwaniu
drugiej Ziemi**

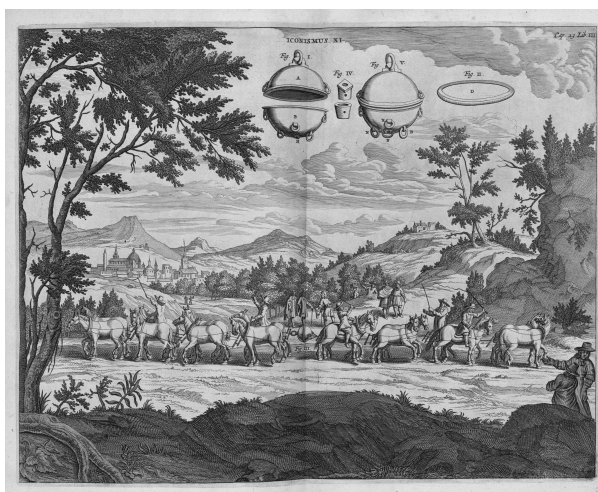
str. 18

Credits: M. Mizera / PTA / IAU 100



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 1 (548)



W następnym numerze dowiemy się, czy dwa zaprzęgi po 8 koni wystarczą do rozerwania dwóch półkul, z których wnętrza wypompowano powietrze.

- Mały Gauss
Mariusz Skalba
- Raz, dwa, trzy, wychodź ty!
Piotr Zarzycki
-  Zadania
- Nieskończoność: 8. Nieskończoność nieskończoności
Michał Korch
- Złożoność algorytmów teoriolicebowych
-  Co wiesz o grypie?
Magdalena Fikus
- Libella na krzywej podłodze
Jerzy Tyszkiewicz
- Informatyczny kącik olimpijski (134):
Beautiful Password
- Polscy nominaci do Nagrody Nobla z fizjologii i medycyny do 1953 roku
Andrzej Hennel
- Czworokąty bliźniacze
Stanisław Hauke
- Co ma π do pierwiastków z dwóch i trzech?
Piotr Chrzastowski-Wachtel
- Planety pozasłoneczne – w poszukiwaniu drugiej Ziemi
Milena Ratajczak
- Klub 44
- Prosto z nieba: Jak trudno jest zagiąć czasoprzestrzeń?
- Niebo w styczniu
- Aktualności
- Trójwymiarowa mapa Drogi Mlecznej
-  Szły raz drogą trzy sześciany
Bartłomiej Bzdęga
- str. 1
- str. 2
- str. 4
- str. 5
- str. 7
- str. 8
- str. 9
- str. 10
- str. 11
- str. 14
- str. 17
- str. 18
- str. 20
- str. 22
- str. 22
- str. 24
- str. 25
- Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.
- Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.
- Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.
- Adres do korespondencji:**
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
- Okladki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl
- Prenumerata:**
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl
- Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.
- Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 5,50 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł
- Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl
- Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo
- Wydawca: Uniwersytet Warszawski**



Mały Gauss

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Mariusz SKAŁBA*

Już rok po śmierci Gaussa (w 1856 r.) ukazała się książka wspomnieniowa jego wieloletniego przyjaciela Wolfganga Sartoriusa von Waltershausena *Zum Gauss Gedächtniss*. Trzeba o niej wiedzieć co najmniej z dwóch powodów. Stąd pochodzi najsłynniejszy aforyzm z matematyką w roli głównej. Jako teoretyk liczb przytoczę go z przyjemnością w pełnej postaci:

Matematyka jest królową nauk, a arytmetyka królową matematyki.

Drugi powód to tytułowy *kleiner Gauss* – tak w obszarze niemieckojęzycznym nazywa się czasem pochodzący z głębokiej starożytności wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych. Nazwa nawiązuje bezpośrednio do najpopularniejszej anegdoty, w której występuje matematyk, podanej właśnie w tej książce. Nie wypada tej anegdoty tu przypominać, gdyż każdy Czytelnik *Delty* na pewno ją zna. Zastanówmy się tylko, co bardziej kierowało Büttnerem, nauczycielem młodziutkiego Gaussa¹ – chęć poskromienia urwisów, czy też nadzieja wyłowienia perły?

¹ Co prawda Mozart, przez wielu uważany za większego geniusza niż Gauss, miał jeszcze trudniejsze zadanie: pamiętacie zapewne, co wyprawiał w Sykstyńnię jako 14-latek!

To, że ten dylemat każdego ambitnego nauczyciela jest ponadczasowy, ilustruje poniższa współczesna historia.

Matematyczka, przezywana przez uczniów Fibonaccią (czytaj: Fibonacią) z częstotliwością demaskującą jej wredny charakter² zadaje swoim uczniom w klasie następujące zadanie rachunkowe:

² Chociaż trzeba oddać jej sprawiedliwość, że nie opowiada historyjek o królikach.

Wybierz według uznania dwie liczby naturalne a oraz b , przy czym niech $a \in \{25, \dots, 99\}$, $b \in \{101, \dots, 199\}$. Następnie oblicz i starannie zapisz w zeszycie pierwsze 20 wyrazów ciągu danego rekurencyjnie

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Po zebraniu zeszytów ocenia rozwiązania według schematu: odczytuje x_{11}, x_{15}, x_{17} i sprawdza, czy

$$x_{11} - 8x_{15} + 3x_{17} = 0.$$

Jeśli tak, to zalicza rozwiązanie, a jeśli nie, to nie zalicza. Tak sobie życie upraszcza, że nie sprawdza w ogóle innych wyrazów ciągu x_1, x_2, \dots, x_{20} . Czy godzi się tak postępować? Z tym pytaniem zwracam się do tych wszystkich, którzy nie mieli przyjemności być uczniami Fibonaccii:³

³ Odpowiedź na str. 16.

Jest też Fibonaccia II, bardziej znana jako czołowa aktywistka ruchu FPNW⁴, która daje zniewalanym przez siebie uczniom jeszcze większą swobodę wyboru parametrów ciągu x_n . Prawi im tak:

⁴ Fibonaccia Pozwala Na Wszystko.

Wybierz dowolne liczby naturalne a, b, c, d i wypisz wyrazy x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ciągu określonego rekurencyjnie:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = dx_n + cx_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Czytelniku, jeżeli uważasz, że znasz się na ciągach, to jesteś wystarczająco postępowy, aby pomóc F II: podsuń jej wielomian $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ weryfikujący poprawność rachunku w tym sensie, że jeśli $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \neq 0$, to na pewno uczeń coś pomylił!⁵

⁵ Odpowiedź na str. 16.

Raz, dwa, trzy, wychodź ty!

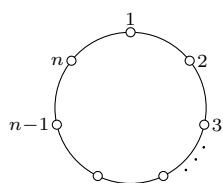
Piotr ZARZYCKI*

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański

Dawno temu... w czasach bez Internetu, bez gier komputerowych i smartfonów dzieci bawiły się w chowanego. Na początku zabawy trzeba było oczywiście wyznaczyć osobę, która będzie szukać. Uczestnicy ustawiali się w koło i ktoś odliczał: *Raz, dwa, trzy, wychodź ty*, i wówczas szósta osoba (odliczanka ma 6 sylab) wychodziła z kółka. Procedurę tę powtarzano aż do momentu, gdy w kółku pozostała jedna osoba – to był pierwszy szukający. Istnieje wiele wierszyków–odliczanek. Moją ulubioną jest odliczanka 15-sylabowa: *Mama daje jeść, tata daje pić, a ty sobie idź*.

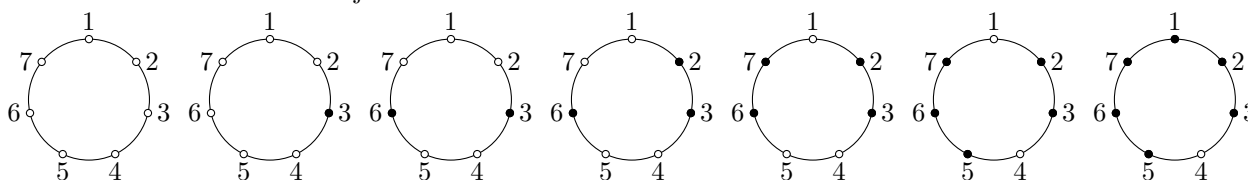
Historia powstańców otoczonych w jaskini została opisana w dziele *Wojna żydowska* przez historyka rzymsko-żydowskiego Józefa Flawiusza (37–94?).

Bardzo dawno temu... dokładniej prawie 2 tysiące lat temu, Flawiusz wraz z grupą powstańców został otoczony w jaskini. Powstańcy zdecydowali, że nie poddadzą się i nie dadzą się pojmać żywcem. Postanowili więc losować: „w jakiej kolejności mamy jeden drugiego zabijać. Pierwszy, na którego padnie, niech zginie z ręki następującego po nim” (cytat z dzieła Flawiusza). W opisie nie było szczegółów na temat losowania i wątpię, czy historyk myślał o jakimkolwiek matematycznym aspekcie tego zagadnienia. Jako pierwszy matematyczną postać temu zdarzeniu nadał francuski matematyk Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581–1638). Według niego powstańcy po ustawieniu się w okrąg mieli eliminować co trzeciego spośród siebie. Nie wiadomo, ilu było powstańców, niektóre źródła podają, że czterdziestu (wraz z Flawiuszem), inne, że czterdziestu jeden. Można też spotkać wersję z co siódmym eliminowanym uczestnikiem „śmiertelnej odliczanki”.



Rys. 1

Załóżmy, że liczby od 1 do n ustawiono na okręgu (patrz rys. 1). Posuwając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, skreślamy co k -tą liczbę. Oczywiście w kolejnym okrążeniu nie uwzględniamy w odliczance skreślonych wcześniej liczb. Zajmiemy się problemem szukania ostatniej nieskreślonej liczby spośród n , gdy wykreślamy co k -tą. Oznaczmy ją przez $J(n, k)$ i nazwijmy **liczbą szczęśliwą**. Zagadnienie to nosi nazwę **problemu Flawiusza** (*Josephus Problem*). Spójrzmy na kolejne skreślenia dla $n = 7$ oraz $k = 3$:



Wynika stąd, że $J(7, 3) = 4$.

Jak obliczać $J(n, k)$? Oczywiście wartości można wyznaczać „ręcznie”, ale dla większych n jest to niewygodne. Napiszmy program do obliczania liczb szczęśliwych. Poniżej prezentujemy procedurę napisaną w programie MATHEMATICA (ilustrujemy ją przykładem dla $n = 7$ oraz $k = 3$).

Krok 1. Przenieść $k - 1$ początkowych wyrazów listy $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ na jej koniec. Czyli z listy $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ otrzymujemy $\{3, 4, 5, 6, 7, 1, 2\}$.

```
f[lista_, k_] := Flatten[Append[Take[lista, {k, Length[lista]}],
    Take[lista, {1, k - 1}]]]
```

Krok 2. Wykreślić pierwszy element listy, tj. z $\{3, 4, 5, 6, 7, 1, 2\}$ otrzymujemy $\{4, 5, 6, 7, 1, 2\}$.

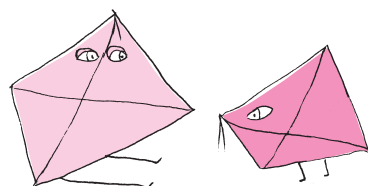
```
g[lista_, k_] := Drop[f[lista, k], 1]
```

Krok 3. Powtórzyć $k - 1$ razy kroki 1 i 2. Z listy $\{4, 5, 6, 7, 1, 2\}$ dostajemy $\{4\}$.

```
flawiusz[n_, k_] := Module[{lista=Range[n]},
    Do[lista=g[lista, k], {i, n - 1}]; Return[lista]
```

Wartości $J(n, 2)$. Spójrzmy na tabelkę, w której zamieszczono liczby szczęśliwe dla n w zakresie od 1 do 20, gdy skreślamy co drugą liczbę:

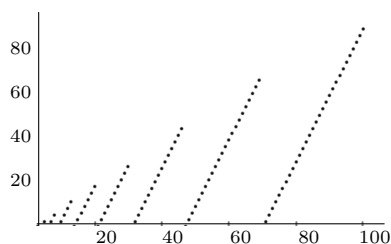
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$J(n, 2)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9



W dowodzie wzoru (*) korzysta się z dwóch zależności rekurencyjnych:

$$J(2n, 2) = 2J(n, 2) - 1,$$

$$J(2n + 1, 2) = 2J(n, 2) + 1.$$



Funkcje $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$, nazywane odpowiednio *podłoga* i *sufit*, zaokrąglają liczby rzeczywiste do liczb całkowitych odpowiednio w dół i w górę.

Prawidłowość jest ewidentna. Można nawet pokusić się o odgadnięcie wzoru jawnego:

$$(*) \quad J(n, 2) = 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) + 1.$$

Okazuje się, że jawny wzór na $J(n, k)$ jest znany jedynie dla $k = 2$.

$J(n, k)$ dla $k > 2$ – problem otwarty. Spójrzmy na poniższą tabelkę:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$J(n, 3)$	1	2	2	1	4	1	4	7	1	4	7	10	13	2	5	8	11	14	17	20

Wartości $J(n, 3)$ są przedstawione obok dla $n = 1, 2, \dots, 100$. Można dostrzec następującą prawidłowość: od $n = 4$ występują „bloki” coraz dłuższych ciągów arytmetycznych o przyroście 3.

Pójdźmy jeszcze tropem wyznaczonym przez Andrew M. Odlyzko oraz Herberta S. Wilfa, którzy w pracy [1] z 1991 roku zaproponowali następujący wzór:

$$J(n, 3) = 3n + 1 - \left\lfloor K(3) \left(\frac{3}{2} \right)^{\left\lceil \log_{\frac{3}{2}} \frac{2n+1}{K(3)} \right\rceil} \right\rfloor,$$

gdzie $K(3)$ jest stałą (obliczoną za pomocą dość skomplikowanej procedury), której wartość do 9-go miejsca po przecinku wynosi 1,622705028.

Jawny wzór, nieodwołujący się do żadnych innych procedur, dla $J(n, k)$, gdy $k > 2$ nie jest znany.

Inny trop, permutacje – i zaskakująca puenta. Pewne zastosowanie problemu Flawiusza można znaleźć w książce Israela N. Hersteina i Irvinga Kaplansky’ego *Matters Mathematical* [2]. Autorzy używają tak zwanych *permutacji Josephusa*. Wyjaśnimy to na przykładzie $J(8, 2)$: w ręcznym wykreślaniu eliminowane są kolejno 2, 4, 6, 8, 3, 7, 5. Na końcu ciągu dopiszmy nieskreślone 1. Kolejność skreślenia można zapisać w postaci permutacji

$$P(8, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 3 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Każdą permutację możemy przedstawić w postaci rozłącznych cykli, w naszym przypadku: $P(8, 2) = (1248)(3675)$. Analogicznie można postąpić dla dowolnego n . Herstein i Kaplansky odkryli, że jeśli n oraz $2n + 1$ są liczbami pierwszymi oraz n jest postaci $4k + 3$, to permutacja $P(n, 2)$ jest iloczynem dwóch rozłącznych cykli. Długości tych cykli dla wybranych n umieszczono w tabelce na marginesie.

n	długość rozłącznych cykli w $P(n, 2)$
3	2,1
11	7,4
23	14,9
83	47,36
131	72,59

Zanim opiszemy kolejne odkrycie Hersteina i Kaplansky’ego, przedstawimy kilka informacji dotyczących ciał liczbowych. Czytelnicy doskonale znają liczby wymierne oraz ich bogatą strukturę algebraiczną – z dodawaniem i odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem zbior \mathbb{Q} tworzy *ciało*. A co się stanie, gdy rozszerzymy zbiór \mathbb{Q} o jakiś element niebędący liczbą wymierną? Powinniśmy przy tym zadbać, aby algebraicznie nowy zbiór nic nie „stracił”, to znaczy pozostał ciałem. Przykład takiego rozszerzenia podał Gauss, jest to *ciało Gaussa*: $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Z kolei o *pierścieniu Gaussa* $\mathbb{Z}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ można powiedzieć, że jest tym dla ciała $\mathbb{Q}(i)$, czym dla \mathbb{Q} są liczby całkowite \mathbb{Z} . Kluczowa własność zbioru liczb całkowitych to rozkładalność na czynniki pierwsze i jednoznaczność tego rozkładu. Okazuje się, że w pierścieniu Gaussa liczby także są jednoznacznie rozkładalne na czynniki pierwsze.

Pojęciem ogólniejszym od ciała Gaussa są *ciała liczbowe* postaci $\mathbb{Q}(\theta)$, gdzie θ jest liczbą algebraiczną (czyli pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych). Ciało Gaussa jest ciałem liczbowym, $i = \sqrt{-1}$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^2 + 1$. Dla ciał liczbowych rozpatruje się pierścienie „liczb całkowitych” tych ciał i bada własność jednoznaczności rozkładu tych pierścieni. Ta własność ma fundamentalne znaczenie przy rozwiązywaniu *równań diofantycznych*, na przykład równania Fermata $x^n + y^n = z^n$. Batalia o dowód, że równanie Fermata nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych dla każdego $n \geq 3$, zakończyła się dla wielu wybitnych matematyków klęską. Przyjmowali oni bowiem błędne założenie, że pewne pierścienie mają własność jednoznaczności rozkładu.

Liczba bezkwadratowa to taka liczba całkowita, która nie jest podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej z wyjątkiem 1. Na przykład 10 jest liczbą bezkwadratową, ale 18 nie jest, bo 18 jest podzielne przez $9 = 3^2$.

Liczba klas dla ciał postaci $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ to pojęcie związane z funkcjami postaci $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Bierzemy zbiór wszystkich takich funkcji (często używa się nazwy *forma kwadratowa* dwóch zmiennych) o ustalonym wyróżniku $b^2 - 4ac$ i wprowadzamy pewną relację równoważności w tym zbiorze. Relacja ta dzieli rozpatrywany zbiór na rozłączne klasy abstrakcji. Klas tych jest zawsze skończenie wiele, a ich liczbę nazywamy liczbą klas ciała liczbowego.

Autorowi tekstu nie udało się niestety znaleźć informacji, czy odkrycie Hersteina i Kaplansky'ego zostało w pełnej ogólności udowodnione i opublikowane.

- [1] A.M. Odlyzko, H.S. Wilf *Functional iteration and the Josephus problem*, Glasgow Mathematical Journal, v. 33 (1991), 235–240.
 [2] I.N. Herstein, I. Kaplansky *Matters Mathematical*, American Mathematical Society (1978).
 [3] L.R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik *Matematyka konkretna*, PWN (2019).



Zadania

Jeśli θ jest pierwiastkiem wielomianu kwadratowego o współczynnikach całkowitych, to możemy zakładać, że $\theta = \sqrt{d}$, gdzie d jest *bezkwadratową* liczbą całkowitą. Wówczas pierścień liczb całkowitych ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ to po prostu $\mathbb{Z}(\sqrt{d})$, wtedy gdy d jest postaci $4k + 2$ lub $4k + 3$. Natomiast dla liczb postaci $4k + 1$ ten pierścień to $\mathbb{Z}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d})$.

Przykładem pierścienia, w którym nie ma jednoznaczności rozkładu, jest $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$. W pierścieniu tym mamy na przykład $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$. Aby badać problem jednoznaczności rozkładu w pierścieniach typu $\mathbb{Z}(\sqrt{d})$ lub $\mathbb{Z}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d})$, wprowadzono pojęcie *liczby klas*. Liczba klas ciała służy do rozpoznawania, czy wspomniane pierścienie mają własność jednoznaczności rozkładu, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczba klas jest równa 1. Udowodniono, że istnieje dokładnie dziewięć pierścieni ciał liczbowych $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, gdzie d jest bezkwadratową ujemną liczbą całkowitą, mających własność jednoznaczności rozkładu. Te liczby to: $-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$.

Powróćmy teraz do permutacji Josephusa. Przypomnijmy, że rozważamy takie n , że n oraz $2n + 1$ są liczbami pierwszymi oraz n jest postaci $4k + 3$. Okazało się, że długości cykli można wykorzystać do obliczania liczby klas niektórych ciał liczbowych postaci $\mathbb{Q}(\sqrt{-(2n + 1)})$. W każdym takim ciele pierścień liczb całkowitych to $\mathbb{Z}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-(2n + 1)})$. I tutaj niespodzianka: liczbę klas ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-(2n + 1)})$ można wyznaczyć, korzystając z długości cykli zamieszczonych w tabeli 1. Liczba klas ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ (czyli $n = 3$) wynosi $2 - 1 = 1$, liczba klas ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ ($n = 11$) wynosi $7 - 4 = 3$. Dla ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-47})$ ($n = 23$) mamy liczbę klas $14 - 9 = 5$ i tak dalej.

Przedstawiliśmy zadanie, problem Flawiusza, które ma już ponad 400 lat (de Méziriac opublikował je w książce wydanej w 1612 roku), ale wciąż wzbudza spore zainteresowanie. Mnóstwo informacji na ten temat można znaleźć w *Matematyce konkretnej* [3]. Zachęcamy do zapoznania się z tą piękną książką, zawierającą mnóstwo interesujących faktów dotyczących rozpatrywanych tu zagadnień.

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1624. Znaleźć największą wartość sumy $\sum_{i < j \leq n} |x_i - x_j|$, gdzie $x_i \in [0, 1]$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Rozwiązanie na str. 17

M 1625. Znaleźć największą liczbę parami różnych punktów kratowych (x_i, y_i) , $x_i, y_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, spośród których nie można wybrać czterech wierzchołków równoległoboku.

Rozwiązanie na str. 13

M 1626. Znaleźć największe pole trójkąta o bokach PA, PB, PC , gdzie P jest punktem wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku 1.

Rozwiązanie na str. 6

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 991. Podczas skurczu serce dorosłego człowieka wyrzuca $V = 70$ ml krwi pod ciśnieniem $p = 1,6 \cdot 10^4$ Pa (120 mmHg). Skurcz serca następuje ze średnią częstością $n = 70/\text{min}$. (Wszystkie dane dla człowieka spoczywającego). Oszacuj średnią moc serca L .

Rozwiązanie na str. 7

F 992. Kiedy już podróże kosmiczne staną się powszechne, policja na pewno będzie chciała fotografować kosmonautów łamiących „przepisy ruchu kosmicznego”. Oszacuj, z jakiej odległości L policjant będzie jeszcze mógł odczytać numer rejestracyjny pojazdu, jeśli wykona zdjęcie w świetle widzialnym za pomocą teleskopu Hubble'a o średnicy zwierciadła $D = 2,4$ m, a tablice rejestracyjne będą miały taką formę jak dzisiaj.

Rozwiązanie na str. 6

Nieskończoność: 8. Nieskończoność nieskończoności

Michał KORCH

W poprzednim odcinku zastanawialiśmy się, czy istnieje „nieskończoność” pomiędzy licznością zbioru liczb naturalnych i licznością zbioru liczb rzeczywistych. Pora na ostatni etap naszej podróży. Będzie to etap jeszcze dalej prowadzący w nieskończoność – będziemy rozważać i konstruować coraz większe „nieskończoności”. Okaze się, że jest ich bardzo nieskończenie wiele. Może aż za bardzo.

Piszemy tutaj „nieskończoności”, mając oczywiście na myśli możliwe liczności, czyli moce, nieskończonych zbiorów. Matematycy nazywają je też liczbami kardynalnymi. Będziemy mówić, że jedna „nieskończoność” (liczność lub moc zbioru A) jest mniejsza od drugiej „nieskończoności” (liczności lub mocy zbioru B), jeśli wszystkich elementów zbioru A nie da się ustawić w pary ze wszystkimi elementami zbioru B , ale można je ustawić z pewną częścią zbioru B .

W poprzednich odcinkach rozmawialiśmy o twierdzeniu Cantora. Mówi ono, że każdy zbiór A ma tę cechę, że zbiór $\mathcal{P}(A)$ wszystkich podzbiorów zbioru A nie jest równoliczny ze zbiorem A . Skoro jednak dla każdego elementu a zbioru A do zbioru $\mathcal{P}(A)$ należy $\{a\}$, czyli jednoelementowy podzbiór z tym elementem, to część zbioru $\mathcal{P}(A)$ złożona z jednoelementowych zbiorów jest równoliczna ze zbiorem A . Możemy zatem powiedzieć, że moc zbioru $\mathcal{P}(A)$ jest większa od mocy zbioru A , co oznaczamy $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.

Znając to twierdzenie, bez trudu możemy tworzyć coraz większe nieskończoności. Rzeczywiście, niech $A_0 = \mathbb{N}$ to zbiór liczb naturalnych. Wtedy niech $A_1 = \mathcal{P}(A_0)$. Oczywiście, $|A_0| < |A_1|$. Niech zatem $A_2 = \mathcal{P}(A_1)$ i w takim razie $|A_0| < |A_1| < |A_2|$. I tak dalej, niech $A_{i+1} = \mathcal{P}(A_i)$. Otrzymujemy w ten sposób

$$|A_0| < |A_1| < |A_2| < \dots < |A_i| < \dots$$

nieskończony ciąg coraz większych nieskończoności!

Ale i ten nieskończony ciąg nieskończoności to jeszcze nie koniec. Niech bowiem

$$X = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

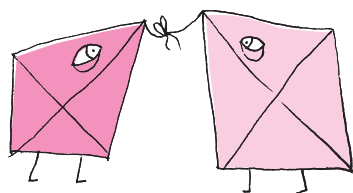
będzie sumą wszystkich tych nieskończenie wielu zbiorów. Zauważmy, że X jest jeszcze większy niż którykolwiek z nich. Rzeczywiście, dla dowolnego i mamy $|A_i| < |X|$, bowiem zbiór X zawiera zbiór A_{i+1} , a przecież $|A_{i+1}| > |A_i|$.

I to także oczywiście nie koniec, bo przecież możemy wziąć zbiór wszystkich podzbiorów tak zdefiniowanego zbioru X , aby otrzymać zbiór o jeszcze większej liczności. I tak dalej. W pewnym sensie w nieskończoność i za nieskończonością w nieskończoność.

Ale i na tym nie kończy się nasza przygoda. Przyjrzyjmy się temu procesowi tworzenia coraz większych „nieskończoności” bardziej metodycznie. Metodę tworzenia z liczności $|A|$ większej liczności $|\mathcal{P}(A)|$ będziemy tu nazywać metodą podzbiorów. Metodą sumy będziemy nazywać stworzenie z nieskończonej rodziny zbiorów, w której dla każdego zbioru A z tej rodziny jest w tej rodzinie zbiór B taki, że $|A| < |B|$, zbioru jeszcze większego od dowolnego jej elementu, mianowicie jej sumy.

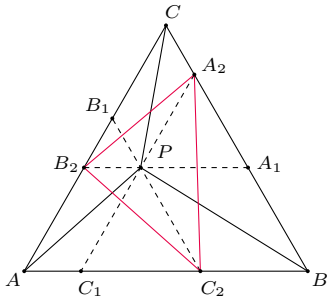
Zauważmy jednak, że metodą podzbiorów niekoniecznie z danej liczności otrzymamy najmniejszą liczność większą od niej. Być może istnieją liczby kardynalne pomiędzy $|A|$ oraz $|\mathcal{P}(A)|$. Zresztą właśnie hipoteza continuum odnosi się do tego typu rozważań.

Okazuje się, na szczęście (choć aby podać dowód tego faktu, potrzebne są definicje, które wykraczają poza tę serię artykułów), że dla każdej rodziny „nieskończoności” istnieje w niej „nieskończoność” najmniejsza. W szczególności, wynika z tego, że dla danego zbioru A można znaleźć pewien zbiór B , o liczności





Rozwiązanie zadania M 1626.



Przez punkt P poprowadźmy proste równoległe do boków trójkąta ABC , przecinające te boki w punktach A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2$), jak na rysunku. Wówczas $PA = B_2C_2$, podobnie z długościami PB i PC , stąd należy zmaksymalizować pole trójkąta $A_2B_2C_2$. Oznaczając przez $[F]$ pole figury F , dostajemy

$$\begin{aligned}
 (*) \quad [A_2B_2C_2] &= \frac{1}{2}([AC_1PB_2] + [BA_1PC_2] + [CB_1PA_2]) = \\
 &= \frac{1}{2}([ABC] - [PA_1A_2] - [PB_1B_2] - [PC_1C_2]).
 \end{aligned}$$

Trójkąty PA_1A_2 , PB_1B_2 i PC_1C_2 są podobne do ABC w skalach odpowiednio A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 . W związku z tym

$$\begin{aligned}
 (**) \quad [PA_1A_2] + [PB_1B_2] + [PC_1C_2] &= \\
 &= [ABC](A_1A_2^2 + B_1B_2^2 + C_1C_2^2) \leq \\
 &\leq \frac{1}{3}[ABC](A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)^2 = \\
 &= \frac{1}{3}[ABC]
 \end{aligned}$$

Łącząc (*) i (**), dostajemy $[A_2B_2C_2] \leq \frac{1}{3}[ABC] = \frac{\sqrt{3}}{12}$. Równość otrzymamy, biorąc za punkt P środek ciężkości trójkąta ABC , co kończy rozwiązanie.



Rozwiązanie zadania F 992.

Zgodnie z kryterium Rayleigha granica rozdzielczości obrazu uzyskanego za pomocą przyrządu o średnicy D i fali o długości λ wynosi $\alpha = 1,22\lambda/D \approx \lambda/D$, gdzie α oznacza najmniejszy kąt tworzony przez kierunki, pod jakimi widzimy dwa punkty jako rozdzielone. Będzie to więc kąt, pod jakim widzimy najmniejsze rozróżnialne szczegóły o wielkości d z odległości L . Światło widzialne odpowiada długościom fal świetlnych z przedziału od 380 do 770 nm. Do oszacowania przyjmijmy $\lambda = 500$ nm. Jak się wydaje, do odczytania tablicy rejestracyjnej wystarczy rozróżnianie szczegółów o wielkości $d = 5$ mm. Mamy więc:

$$\alpha \approx \lambda/D = d/L,$$

a stąd $L = dD/\lambda = 24$ km.

najmniejszej z tych, które są większe od liczności zbioru A . To przejście będziemy nazywać metodą następnikową.

Z reguły kolejne możliwe nieskończone liczby kardynalne oznacza się za pomocą pierwszej litery z języka hebrajskiego \aleph (*alef*) z odpowiednim indeksem. Tak więc \aleph_0 to liczność zbioru liczb naturalnych, a \aleph_1 to najmniejsza liczba kardynalna większa od \aleph_0 , zaś \aleph_2 to najmniejsza liczba kardynalna większa od \aleph_1 . Hipotezę continuum możemy więc sformułować jako stwierdzenie, że $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph_1$.

Warto w tym momencie odnotować wprost dwa mniej lub bardziej zaskakujące wnioski. Po pierwsze, nie istnieje największa „nieskończoność”. Rzeczywiście, dla każdego zbioru A istnieje zbiór o większej mocy, mianowicie zbiór $\mathcal{P}(A)$.

Drugi wniosek jest następujący: nie istnieje zbiór wszystkich „nieskończoności”. Znow, założmy przeciwnie, że taki zbiór istnieje. Ale zgodnie z poprzednim wnioskiem, skoro nie ma największej liczby kardynalnej, to dla każdej liczby kardynalnej w tym zbiorze jest w nim też większa liczba kardynalna. Ale w takim razie możemy metodą sumowania (biorąc sumę wszystkich elementów tego zbioru) wyprodukować jeszcze większą liczbę kardynalną, która jest większa od każdej z tego zbioru, więc nie jest elementem tego zbioru. Ale zbiór miał zawierać wszystkie liczby kardynalne, co stanowi sprzeczność.

Niemniej znaleźliśmy trzy metody konstruowania coraz większych liczb kardynalnych: metodę następnikową, metodę podzbiorów i metodę sumowania. Nasuwa się od razu nurtujące pytanie. Czy poczynając od liczności zbioru liczb naturalnych, można „dojść” do dowolnej „nieskończoności” (liczby kardynalnej), stosując te trzy metody?

Potrzebne będą nam jeszcze dwie definicje. Powiemy, że pewna liczba kardynalna jest graniczna, jeśli wśród mniejszych od niej nie ma największej. Zauważmy, że \aleph_0 jest graniczną liczbą kardynalną, bowiem każdy zbiór o liczności mniejszej niż jego moc to zbiór skończony. A zatem liczności mniejsze od \aleph_0 to po prostu skończone liczby i nie ma wśród nich największej.

Druga definicja to regularność „nieskończoności”. Powiemy, że pewna liczba kardynalna jest regularna, jeśli nie da się jej otrzymać metodą sumy ze zbioru liczności mniejszych od niej, który sam ma od niej mniejszą licznosc. Ponownie zauważmy, że \aleph_0 jest liczbą regularną, bowiem skończona suma skończonych zbiorów jest tylko skończona. Niemniej nie każda „nieskończoność” jest regularna. Na przykład zastosujemy metodę sumy do zbioru liczb kardynalnych $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$. Skoro elementy tego zbioru w oczywisty sposób są ponumerowane liczbami naturalnymi, to jest ich tyle samo co liczb naturalnych, czyli \aleph_0 . Jednak liczba, którą dostaniemy, jest większa od każdej z nich, i w szczególności od \aleph_0 . Nie jest więc regularna.

Inaczej mówiąc, liczb kardynalnych granicznych nie można skonstruować metodą następnikową z mniejszych licznosci. Za to liczb kardynalnych regularnych nie da się skonstruować metodą sumowania, używając tylko zbiorów o mniejszej mocy. Matematycy nazywają liczbę kardynalną większą od liczności zbioru liczb naturalnych słabo nieosiągalną, jeśli łączy w sobie te dwie cechy, czyli jeśli jest regularna i graniczna. Takiej liczby nie da się więc skonstruować z mniejszych „nieskończoności”, stosując tylko metody następnikową i sumy!

No dobrze, w takim razie zastanówmy się nad „nieskończonościami”, których nie da się skonstruować z mniejszych liczb kardynalnych, używając dowolnych z tych trzech metod. Takie hipotetyczne liczby kardynalne (większe od liczności zbioru liczb naturalnych), których nie można osiągnąć z mniejszych liczb, używając metod następnikowej, podzbiorów i sumy, nazywamy silnie nieosiągalnymi.

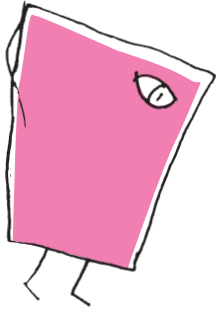
Czy jednak takie liczby istnieją? Odpowiedź na to pytanie jest podobna, ale może jeszcze bardziej subtelna niż w przypadku hipotezy continuum. Zakładając nawet, że taka liczba istnieje, możemy rozpatrzyć najmniejszą z nich – i zauważmy, że z powodzeniem możemy uprawiać teorię zbiorów



Rozwiązanie zadania F 991.

Jako model serca możemy rozważyć cylinder z tłokiem. Moc takiego urządzenia otrzymamy, mnożąc siłę, z jaką działamy na tłok przez jego prędkość. Siła jest równa iloczynowi ciśnienia p i powierzchni tłoka, a iloczyn powierzchni tłoka przez jego prędkość jest równy objętości krwi pompowanej w jednostce czasu. Otrzymujemy więc:

$$L = nVp \approx 1,3 \text{ W.}$$



i matematykę tylko w ramach zbiorów mniej licznych niż ona. Nigdy wtedy jej nie napotkamy! To, czy ona istnieje, nie będzie miało dla nas wtedy żadnego znaczenia. Doprecyzowanie tego rozumowania prowadzi do dowodu, że z aksjomatów nie da się wykazać, że taka liczba istnieje.

W drugą stronę jest jeszcze trudniej. Da się bowiem udowodnić, że w ramach aksjomatów nie da się udowodnić, że nie da się udowodnić, że taka „nieskończoność” nie istnieje! Gdyby bowiem było to możliwe, dawałoby to dowód niesprzeczności aksjomatów, co przeczyłoby twierdzeniu Gödla o niezupełności (patrz odcinek „Rozmyślania o myślakach”). Istnienie takich „nieskończoności” jest więc jeszcze bardziej ulotne niż istnienie nieskończoności pomiędzy liczebnością liczb naturalnych a liczebnością liczb rzeczywistych.

W takim razie wszechświat zbiorów wygląda następująco: najmniejszym zbiorem jest zbiór pusty, potem są coraz większe zbiory skończone, aż w końcu najmniejsza nieskończona liczba kardynalna \aleph_0 , czyli liczebność zbioru liczb naturalnych. Potem spotkamy zbiory, których liczebności to coraz większe „nieskończoności”, które możemy skonstruować, poczynając od \aleph_0 i korzystając z metod następnikowej, podzbiorów i sumy. I dalej jest horyzont, za którym być może nic nie ma, a być może jest pierwsza silnie nieosiągalna liczba kardynalna. Z tej „nieskończoności” znów moglibyśmy konstruować coraz większe liczby kardynalne, ale mniejsze niż kolejny hipotetyczny horyzont, którego przekroczyć nie możemy, a który stanowi kolejna silnie nieosiągalna liczba kardynalna. I tak dalej. To jest podróż w nieskończoność i za nieskończoność.

Przygodę tę wypada zakończyć, cytując jednego z bohaterów, od których zaczęliśmy nasze rozważania, czyli Davida Hilberta. „Nieskończoność! Żadne inne pytanie nie poruszyło tak głęboko duszy człowieka”.



Złożoność algorytmów teoriolicebnych

Rozważmy następujący algorytm:

```
function czynnik(int n)
{
    int i = 2;
    while (i < n)
    {
        if (n % i) == 0 return i;
        i = i + 1;
    }
    return 0;
}
```

Jak łatwo sprawdzić, podany kod zwraca najmniejszy nietrywialny czynnik podanej na wejściu liczby n , bądź 0 – gdy takiego czynnika nie ma (bo np. n jest liczbą pierwszą).

Zastanówmy się, jaka jest złożoność podanego programu. Pętla `while` wykona co najwyżej $O(n)$ obrotów.

W pojedynczym jej wykonaniu niemal wszystkie operacje mają koszt stały, poza operacją `%` (reszta z dzielenia), której koszt możemy bardzo zgrubnie oszacować z góry przez $O(n)$ (w rzeczywistości można łatwo osiągnąć $O(\log(n))$). Oznacza to, że cały algorytm działa w czasie nie większym niż $O(n^2)$.

Czy oznacza to, że właśnie pokazaliśmy wielomianowy algorytm na szukanie nietrywialnych czynników? Rozkład nawet dużych liczb na czynniki pierwsze już nie jest dla nas kłopotem?

Oczywiście, nic z tych rzeczy.

Nieporozumienie bierze się z problemu z ustaleniem, co jest parametrem, względem którego liczymy złożoność programów komputerowych. Otóż parametrem jest dla nas zawsze *rozmiar danych*, ale rozumiany jako długość *napisu* reprezentującego wejście. Konkretniej: 1 000 000 000 ma dla nas rozmiar „dziesięć”, a nie „miliard”...

Wracając do naszego algorytmu: jeśli rozmiar danych to k , to wówczas liczba n , którą reprezentują te dane jest rzędu 10^k . Skoro więc oszacowaliśmy czas działania algorytmu przez $O(n^2)$, to w języku rozmiaru danych przekłada się to na $O((10^k)^2) = O(100^k)$, czyli jest jednak wykładniczy od k .

Potencjalny algorytm wielomianowy na rozkład na czynniki musiałby więc być pewnie nieco bardziej wyrafinowany...

Tomasz KAZANA

Co wiesz o grypie?

Sezon grypowy trwa. Nie wiemy jeszcze, jak będzie długi i groźny w tym roku. Myśląc o grypie, podlegamy skrajnym odczuciom: to raczej zwyczajna choroba zakaźna, w której po 7 dniach można iść do pracy... Ale wiemy też o komplikacjach pogrypowych, braku skutecznych leków, zawodnych szczepionkach, a nawet przypadkach śmiertelnych.

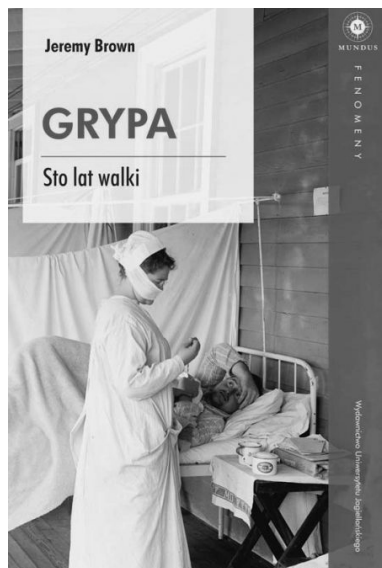
O grypie wiemy także, że w latach 1918–1919 odnotowano światową epidemię (pandemię), w wyniku której zmarło więcej ludzi (50–100 mln), niż zginęło w I wojnie światowej – oba te zdarzenia miały miejsce w podobnym czasie. Co było przyczyną tak bardzo złośliwego i tragicznego przebiegu grypy nazwanej hiszpanką (z Hiszpanii rozprzestrzeniła się na Europę)? Nawet dziś sugeruje się wiele przyczyn, żadna nie jest decydująca. Zadaje się również pytanie – czy TAKA grypa może się powtórzyć? Mnie zainteresowało tło genetyczne tej pandemii.

Czynnikiem zakaźnym w grypie są wirusy, zobaczono je przez mikroskop elektronowy w 1939 roku. Ich materiał genetyczny to 8 różnych cząsteczek RNA, a najważniejszymi kodowanymi białkami są hemaglutynina (H) i neuramidaza (N). Pierwsze uczestniczy w wnikięciu wirusa do zakażonej komórki nabłonka układu oddechowego, drugie – w uwalnianiu pokolenia namnożonych wirusów z takich komórek do otaczającego środowiska. Rozpoznano liczne warianty białek H i N i oznaczono je literami z numerami. Hiszpanka była typem H1N1. Od tamtych czasów infekcja typu H1N1 zdarzała się nie raz (np. tzw. świńska grypa, 1976 i 2009 r.) – nigdy jednak nie była tak poważna i niebezpieczna.

Na początku lat 90. XX wieku opracowano metody odzyskiwania DNA z preparatów konserwowanych i przechowywanych w parafinowych bloczkach, bez zamrażania. Jeffery Taubenberger postanowił poszukać wirusa z 1918 roku w zachowywanych przez 100 lat skrawkach tkanek pacjentów. Wydaje się to zadaniem beznadziejnym, a jednak w wycinku płuc zmarłego w 1918 roku szeregowego Roscoe Vaughana znalazł ślady genomu wirusa hiszpanki. Udało się namnożyć te geny, które kodują białko H. O postępach technik biologii molekularnej świadczy fakt, że w owych czasach odtworzenie takiego genu zajęło 5 lat, dziś wymagałoby dwóch tygodni!

Jednak preparatu ze skrawków było zbyt mało do dalszych badań. Dlatego wdrożono jeszcze jeden pomysł „detektywistyczny”. Wirusa zaczęto poszukiwać w ciałach zmarłych na grypę w 1918 roku na dalekiej północy, pochowanych w wiecznej zmarzlinie. Po jednej z ekshumacji (dokonywanych z zachowaniem szacunku dla zwłok i z pozwoleniem władz kościelnych i lokalnych) wydobyto ilość tkanki umożliwiającą rekonstrukcję całego genomu wirusa.

Na wieść o pierwszym „wskrzeszeniu” wirusa podobne badania podjęli liczni badacze w wielu krajach i laboratoriach. Tam, gdzie udało się znaleźć wirusa grypy z 1919 roku, nawet w różnych, bardzo odległych lokalizacjach świata, za każdym razem był to taki sam jego wariant – N1H1. Musiał rozchodzić się skutecznie na odległość tysięcy kilometrów. W roku 2005 dokonano rekonstrukcji żywego wirusa w dwóch amerykańskich laboratoriach (przy starannych zabezpieczeniach epidemiologicznych). Stworzono kilka zakaźnych klonów i stwierdzono szczególną rolę w wysokiej zjadliwości genu (i białka) H. Dane genetyczne sugerują także, że był to wirus ptasi, który uległ kolejnym mutacjom, przystosowującym go najpierw do niektórych ssaków, a potem do człowieka jako gospodarza.



„Grypa. Sto lat walki”, Jeremy Brown, tłum. Joanna Gilewicz, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego (2019)

Jestem pewna, że te informacje wzbudziły w Czytelnikach wątpliwości i obawy. W jakich warunkach – i w ogóle „czy” – można wskrzeszać organizmy zakaźne o stwierdzonej wysokiej zjadliwości. Co dalej robić z takim organizmem? Jakie powinny być ustalenia światowe i lokalne – wszak ktoś te badania popiera i finansuje, a mogą one być także

wskazówką dla terrorystów... Takie i wiele innych pytań wielokrotnie rozważano na forach naukowych i politycznych. O szczegółach dowiedzieć się można z książki Jeremy’ego Browna „Grypa. Sto lat walki”, z której korzystałam, przygotowując ten tekst.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Libella na krzywej podłodze

Jerzy TYSZKIEWICZ*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Dawne rzeczy mają w sobie jakąś magię. Nie inaczej jest ze starą libellą, którą odziedziczyłem po moim zmarłym wuju. Po tym przyrządzie znać, jak bardzo był wartościowy w swoich czasach: oprawka wygiętej rurki z płynem i pęcherzykiem gazu jest wykonana z mosiądzu, ma śruby umożliwiające regulację, a do kompletu należy futerał z miękką wyściółką zamykany na małe haczyki.

Współczesne libelle, nazywane raczej poziomiami, robi się z taniego surowca, zwykle nie mają też żadnej regulacji. Jak coś się przesunie albo wykrzywi, kupuje się za grosze nową i tyle. Regulacja miała oczywiście swoje zalety: można było ustawić niewielkie odchylenie od poziomu – co było pomocne na przykład przy układaniu rynny albo rury kanalizacyjnej, którymi woda miała płynąć nie za szybko i nie za wolno, tylko dokładnie zgodnie z projektem. I tu rodzi się ciekawe pytanie: gdy rynna była już gotowa, w jaki sposób majster ustawiał libellę ponownie na wskazywanie poziomu?

Wyobraźmy sobie taką sytuację: majster wchodzi do remontowanego mieszkania, ściany są trochę krzywe, podłogi też, ma ze sobą libellę i niezbędny do regulacji śrubokręt. Co ma teraz zrobić, żeby ją ustawić *na zero*?

Pierwsze rozwiązanie opiera się na dodatkowym, dotychczas przemilczanym, elemencie libelli wujka: ma ona podziałkę na rurce z płynem.

Rozwiązanie jest proste: wybieramy sobie niezbyt krzywy fragment podłogi, kładziemy libellę, a wzdłuż niej układamy równoległe śrubokręt, tak żeby jego czubek wskazywał środek podziałki. To pozwala nam zarejestrować jej kierunek i położenie. Zapamiętujemy, o ile kresek i w którą stronę pęcherzyk odbiega od środka skali, po czym obracamy libellę w drugą stronę, tj. o 180° – śrubokręt pozwala nam na dokładne dokonanie tego obrotu. Widzimy nowe wskazanie, zapewne różne od poprzedniego. Bierzemy teraz do ręki śrubokręt i śrubką regulacyjną zmieniamy położenie rurki w *dobrym* kierunku. Odkładamy śrubokręt wzdłuż libelli, powtarzamy pomiar w dwóch położeniach różniących się o 180° , znowu regulujemy, itd. Po kilku krokach uzyskamy w miarę dobrze wypoziomowaną libellę. Czyli na krzywej podłodze pęcherzyk powietrza będzie odbiegać od środka o tyle samo, co gdy obrócimy libellę o 180° – tyle że w drugą stronę.

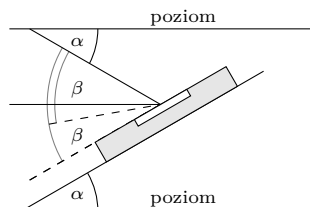
A co powinien zrobić majster, gdy skali na rurce nie ma i w zasadzie tylko na oko można ocenić, jak bardzo odchyła się pęcherzyk? Oczywiście środek rurki z płynem jest zawsze zaznaczony – bez tego użytek z libelli byłby marny.

I na to jest sposób, choć wymaga ciut bardziej zaawansowanej matematyki. Zaczniemy od wykonania poprzedniej procedury, doprowadzając do sytuacji, w której po obrocie libelli o 180° pęcherzyk wychyla się raz w jedną, raz w drugą stronę, z grubsza o podobną wartość. Brak skali nie jest w tym przeszkodą.

Położymy teraz śrubokręt w sprawdzonej pozycji – wzdłuż libelli, tak żeby jego czubek wskazywał jej środek – i zaczniemy ją powoli obracać wokół tego środka. Pęcherzyk w trakcie tego obrotu musi przewędrować na drugą stronę, więc w którymś momencie, jeszcze przed osiągnięciem obrotu o 180° , będzie dokładnie w środku skali (to jest właśnie ta dodatkowa matematyka: taki kąt istnieje). Zatrzymajmy się i zastanówmy. To oczywiście nie jest jeszcze to, o co nam chodziło, ale zbliżyliśmy się do celu. Libella pokazuje poziom, choć na poziomej podłodze raczej nie leży – powiedzmy, że kąt nachylenia podłogi wynosi α . Zaznaczmy nowe położenie libelli śrubokrętem i zróbmy to, co już potrafimy: wyregulujmy ją w kilku krokach tak, by po obrocie libelli o 180° pęcherzyk wychylał się od centrum raz w jedną stronę, a raz w drugą, z grubsza podobnie. W efekcie dostajemy nowe ustawienie libelli. Gdybyśmy mieli idealne oko (równie dobre jak podziałka), to zadanie byłoby już rozwiązane. Jednak nawet jeśli robimy spory błąd i wiemy tylko, że jeden z kątów, o jakie libella odchyła się od poziomu, jest najwyżej dwa razy większy od tego, gdy leży odwrotnie, to i tak jest dobrze. Można sprawdzić (obrazek obok), że jeśli robiliśmy to w miejscu o nachyleniu podłogi α , to po regulacji kąt odchylenia libelli do poziomu wynosi nie więcej niż $\alpha/3$.

Powtarzamy całość od początku i za chwilę dostajemy kąt nie większy niż $\alpha/9$, potem $\alpha/27$, $\alpha/91$ itd. Oczywiście to jest tylko teoria, bo zapewne bardzo szybko nie da się już dalej nic poprawić. Po prostu kąt odchylenia libelli od poziomu stanie się ludzkim okiem nieodróżnialny od 0. I o to chodziło!

W teorii bez trudu można skonstruować tak „poszarpaną podłogę”, żeby w żadnym miejscu libella nie pokazała dokładnie zerowego wychylenia, ale w praktyce budowlanej takich podłóg raczej się nie spotyka, o ile pomieszczenie w ogóle nadaje się do remontu. Zresztą majster zawsze może położyć libellę na przyniesionej desce, cegle albo czymkolwiek innym.



Informatyczny kącik olimpijski (134): *Beautiful Password*

Tym razem omówimy zadanie „Beautiful Password”, które pojawiło się na konkursie *Cuprum 2018* organizowanym przez firmę Codility.

Zadanie: Dane jest słowo $S = s_1s_2 \dots s_n$ o długości n , zawierające małe litery alfabetu angielskiego. Ustal długość najdłuższego pod słowa, zawierającego wyłącznie wystąpienia dwóch różnych liter w tych samych krotnościach. Przykładowo dla $S = \text{“}bbbcaccaacd\text{”}$ odpowiedzią jest 6.

Rozwiązanie $O(n^3)$

Pierwsze rozwiązanie, które przychodzi do głowy, polega na niezależnym sprawdzeniu każdego z $O(n^2)$ pod słów – czy ma ono dokładnie dwie różne litery występujące w tych samych krotnościach. Aby to zrobić, wystarczy przejść po sprawdzanym pod słowie i zliczyć wystąpienia każdej litery. Czas potrzebny na sprawdzenie jednego pod słowa jest proporcjonalny do jego długości. Zatem całe rozwiązanie działa w czasie $O(n^3)$. Alfabet ma stały rozmiar (26 liter), więc został pominięty w obliczeniu złożoności czasowej.

Rozwiązanie $O(n^2)$

Szybsze rozwiązanie polega na tym, aby każdą literę słowa S rozważyć jako pierwszą literę poszukiwanego pod słowa. Mając ustaloną pozycję początkową, przeglądamy kolejne litery, zliczając liczbę wystąpień każdej litery od a do z . Jeśli w którymś momencie dokładnie dwie litery będą miały taką samą dodatnią liczbę wystąpień oraz żadna inna litera się nie pojawiła, to znaleźliśmy pod słowo o poszukiwanych własnościach. Spośród znalezionych słów wybieramy najdłuższe i jego długość wypisujemy. Pozycji początkowych jest n , dla każdej z nich przeglądamy wszystkie litery na prawo, co daje złożoność czasową $O(n^2)$.

Warunek: dokładnie dwie litery

W procesie rozwiązywania zadania dobrze jest pomyśleć o różnych wariantach zadania macierzystego. W tym zadaniu możemy osłabić jeden z warunków. Otóż znajdziemy najdłuższe pod słowo, które ma dokładnie dwie różne litery (pomijamy warunek o tej samej krotności wystąpień). Takie zadanie można rozwiązać za pomocą metody gąsienicy. Na początku ustawiamy prawy i lewy koniec gąsienicy na pierwszej literze. Następnie rozszerzamy gąsienicę w prawo, dopóki pokrywa ona wystąpienia co najwyżej dwóch różnych liter. W przeciwnym przypadku skracamy gąsienicę, przesuując lewy koniec w prawo. Pozostało nam jeszcze opisać, w jaki sposób zapisywać w pamięci liczbę różnych liter, które pokrywa gąsienica. W tym celu dla każdej litery od a do z zapamiętujemy, ile razy ta litera występuje. Gdy przesuwamy prawy koniec gąsienicy, to zwiększamy liczbę wystąpień litery, którą właśnie dodaliśmy do gąsienicy. Kiedy zaś skracamy gąsienicę, to zmniejszamy liczbę wystąpień litery, która została usunięta z gąsienicy.

Prawy i lewy koniec gąsienicy wykonują po $n - 1$ ruchów. Aktualizacji przechowywanych wartości dokonujemy w czasie stałym. Zatem otrzymaliśmy rozwiązanie, które działa w czasie $O(n)$.

Warunek: ta sama liczba wystąpień

Wźmy na warsztat wersję zadania, w którym założymy, że S zawiera wystąpienia co najwyżej dwóch różnych liter. Bez straty ogólności możemy założyć, że te litery to a i b . Chcemy znaleźć najdłuższe pod słowo, które ma tyle samo wystąpień a co b . W tym celu literze a przypiszmy wartość 1, zaś b wartość -1 . Intuicyjnie chcemy, żeby suma wartości dwóch różnych liter sumowała się do 0. Niech zatem $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ oznacza wartości przypisane kolejnym literom.

Wówczas szukamy najdłuższego fragmentu w a o sumie 0. Niech teraz $p = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ oznacza sumy prefiksowe a , gdzie $p_i = \sum_{j=1}^i a_j$. Pod słowo a_x, a_{x+1}, \dots, a_y ma sumę 0, jeśli $p_y - p_{x-1} = 0$, czyli $p_{x-1} = p_y$. Zatem w ciągu sum prefiksowych szukamy dwóch takich samych wartości, pomiędzy którymi odległość jest najmniejsza. Aby to zrobić, wystarczy dla każdej wartości znaleźć jej pierwsze i ostatnie wystąpienie (można to zrobić za pomocą metody zliczania) i wziąć różnicę tych indeksów. Spośród wyników dla poszczególnych wartości wybieramy ten największy.

Wartości, które pojawią się w ciągu sum prefiksowych, są z przedziału $[-n; n]$, zatem jest ich $O(n)$. Wszystkie pozostałe kroki rozwiązania również wykonują $O(n)$ operacji, a więc całe rozwiązanie działa w czasie $O(n)$.

Rozwiązanie $O(n)$

Wróćmy do oryginalnej wersji zadania. Powyższe rozważania zastosujemy w rozwiązaniu wzorcowym. Otóż podzielmy słowo na bloki złożone z tych samych liter. Np. $S = \text{“}bbbcaccaacd\text{”}$ ma następujący podział $bbb|c|a|cc|aa|c|dd$. Następnie zastosujemy metodę gąsienicy (podobnie jak w pod zadaniu „Warunek: dokładnie dwie litery”) na wyznaczonych blokach. Przesuwamy prawy koniec gąsienicy dopóki występują co najwyżej dwie różne litery. W przeciwnym przypadku przesuwamy lewy koniec aż do uzyskania wystąpień dokładnie jednej litery. Na rysunku zostały przedstawione fragmenty słowa pokrywane przez gąsienicę po kolejnych fazach rozszerzania, a przed skracaniem:

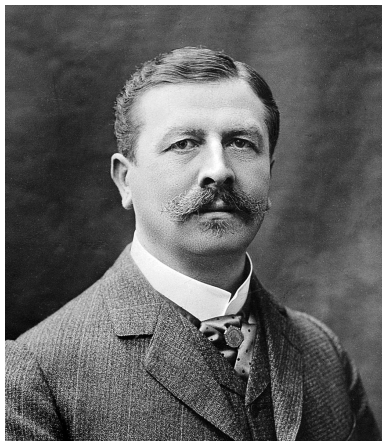
bbb|c|a|cc|aa|c|dd

Na otrzymanych fragmentach uruchamiamy algorytm opisany w sekcji „Warunek: ta sama liczba wystąpień”. Zauważmy, że każdy blok liter należy do co najwyżej dwóch takich fragmentów. Stąd złożoność czasowa rozwiązania wynosi $O(n)$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ



Napoleon Cybulski (1854–1919). Urodził się w Krzywonosach w obwodzie witebskim. Studiował medycynę w Akademii Wojskowo-Medycznej w Petersburgu. Tam też doktoryzował się. Od 1885 roku do końca życia pracował na Uniwersytecie Jagiellońskim, gdzie kierował Katedrą Fizjologii, był dziekanem Wydziału Lekarskiego, prorektorem i rektorem. Jest uważany za twórcę krakowskiej szkoły fizjologicznej. Jedna z krakowskich ulic nosi jego imię.



Józef Babiński (1857–1932). Urodził się w Paryżu w rodzinie polskich emigrantów politycznych. Skończył polską szkołę średnią i studia medyczne na Uniwersytecie Paryskim (Sorbonie). Doktoryzował się też w Paryżu, ale nie podjął kariery akademickiej. Był przez ponad 30 lat ordynatorem jednego z paryskich szpitali. W pracy naukowej był „wolnym strzelcem”, wygłaszał referaty na konferencjach i publiczne wykłady. Pozostawił 288 publikacji naukowych. Był członkiem polskich towarzystw lekarskich i honorowym profesorem Uniwersytetu Wileńskiego. Nie przyjął proponowanej mu katedry neurologii na Uniwersytecie Warszawskim. Jest uważany za jednego z ojców neurochirurgii. W Krakowie i w Łodzi znajdują się szpitale psychiatryczne jego imienia.

Na tylnej okładce numeru szczegółowo przedstawiamy nominujących profesorów lub uczelnie.

Polscy nominaci do Nagrody Nobla z fizjologii i medycyny do 1953 roku

Andrzej HENNEL

Archiwum noblowskie ujawnia informacje o osobach nominowanych i nominujących po 50 latach. Niestety nagroda z fizjologii i medycyny jest gorzej potraktowana, gdyż o ile wszystkie pozostałe nominacje są ujawnione do 1966 roku, to w tym przypadku jest to rok 1953. To bardzo odległy czas – nie ma na przykład żadnej ujawnionej nominacji związanej ze szczepionką na chorobę Heinego–Medina, a istnieją relacje, że takie nominacje były składane. Wśród nominowanych był między innymi wybitny polski wirusolog, profesor Hilary Koprowski. Zapytałem archiwum, kiedy będą ujawnione wszystkie nominacje do 1969 roku. Odpowiedziano mi, że chwilowo nie jest to planowane.

Nominujący dzielą się na stałych i zaproszonych okazjonalnie. Stałymi są m.in. dotychczasowi laureaci oraz członkowie Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk. Okazjonalnymi są przedstawiciele wybranych w danym roku uczelni.

O nominacjach w dziedzinie fizyki i chemii pisałem w Δ_{19}^2 . Tym razem przedstawiam szczegóły dotyczące polskich nominatów z fizjologii i medycyny od początku istnienia nagrody do 1953 roku. Przez „polskich nominatów” rozumiem osoby urodzone na ziemiach polskich lub w taki czy inny sposób związane z Polską.

Pierwszym polskim nominatem był w latach 1911–1918 profesor medycyny na Uniwersytecie Jagiellońskim – Napoleon Cybulski. Zajmował się fizjologią człowieka, jego największe osiągnięcia to badania EEG mózgu oraz odkrycie wraz z doktorantem Władysławem Szymonowiczem hormonalnej aktywności nadnerczy i wyizolowanie adrenalinę, którą nazwali „nadnerczyną”.

Pierwsze zgłoszenie Cybulskiego do nagrody pochodzi z 1911 roku – od siedmiu profesorów Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. Ich krótkie uzasadnienie zawiera osiągnięcia nad rejestracją badań przepływu krwi, działaniem nadnerczy i elektryczności mięśni.

Ponowne zgłoszenie, również z Uniwersytetu Lwowskiego, nastąpiło w 1914 roku. Tym razem z identycznym uzasadnieniem jak poprzednio wystąpiło sześciu profesorów. Trzecie zgłoszenie z 1918 roku nadeszło od czwórki profesorów z Uniwersytetu Jagiellońskiego. W uzasadnieniu wymienili oni prace z dziedziny elektrobiologii, hemotachometrii (przepływu krwi), wydzielania hormonalnego i mikrokalometrii.

Niestety I wojna światowa wywołała ogromny „zator” w przyznawaniu Nagród Nobla. W latach 1915–1918 napłynęło około 300 nominacji z fizjologii i medycyny, a nagród nie przyznano, po złych doświadczeniach roku 1914. Na przykład laureat Nagrody Nobla z fizjologii i medycyny z 1914 roku, Węgier Robert Bárány, dowiedział się o swoim sukcesie w rosyjskim obozie jenieckim, skąd Szwedzi wykupili go za pośrednictwem Czerwonego Krzyża. Napoleon Cybulski zmarł w kwietniu 1919 roku i nie był już rozpatrywany przy pierwszych nagrodach przyznanych po wojnie, w 1919 roku.

Następnym polskim nominatem był francuski neurolog Józef Babiński, znany w historii medycyny z tzw. odruchu Babińskiego. Zaliczam go do polskich nominatów, gdyż kończył polską szkołę średnią w Paryżu, utrzymywał kontakt z krajem i był honorowym profesorem Uniwersytetu Wileńskiego. Babiński był wybitnym neurologiem klinicystą, który swoje liczne odkrycia zawdzięczał wnikliwym obserwacjom i badaniom oraz logicznemu rozumowaniu.



Rudolf Weigl (1883–1957). Urodził się na Morawach, ukończył studia przyrodnicze na Uniwersytecie Lwowskim im. Jana Kazimierza w 1907 roku, tamże się doktoryzował i w 1913 roku habilitował. W trakcie I wojny światowej zajmował się w wojsku przygotowaniem szczepionki przeciwko durowi plamistemu. Po I wojnie został we Lwowie profesorem i szefem Instytutu Badań nad Tyfusem Plamistym i Wirusami, którym kierował przez prawie ćwierć wieku. Po II wojnie światowej pracował na Uniwersytecie Jagiellońskim oraz Uniwersytecie Medycznym w Poznaniu. W pięciu miastach polskich (m.in. Wrocławiu i Poznaniu) znajdują się ulice, które noszą jego imię.



Tadeusz Reichstein (1897–1996). Urodził się we Włocławku. Od ósmego roku życia mieszkał w Szwajcarii. Studiował chemię, doktoryzował się i habilitował na Federalnej Politechnice w Zurychu. W 1933 roku zsyntetyzował witaminę C. Od 1938 roku był profesorem Uniwersytetu w Bazylei. Był autorem ponad 700 prac naukowych i promotorem 150 doktoratów, członkiem zagranicznym Polskiej Akademii Nauk. Mówił o sobie, że jest polskim Żydem.

W 1914 roku jego kandydaturę za osiągnięcia z neurologii zgłosili dwaj profesorowie Uniwersytetu Lwowskiego. W 1924 roku o nominację wspólnie wystąpiło sześciu profesorów Uniwersytetu Warszawskiego – z następującym uzasadnieniem: „Prace nad odruchami, diagnozą różnicową między chorobami organicznymi a histerią oraz symptomatologią chorób mózdzku i rdzenia przedłużonego”.

Kolejne nominacje dla Babińskiego pojawiły się w 1928 roku. Pięciu profesorów Uniwersytetu Jagiellońskiego przysłało wspólną nominację z uzasadnieniem „Diagnostyka i symptomatologia zaburzeń układu nerwowego, zwłaszcza mózdzku i rdzenia kręgowego”.

Nadeszły też dwie nominacje z zagranicy. Pierwsza pochodziła od profesora psychiatrii i neurologii E. Fostera z Uniwersytetu w Greifswaldzie (Niemcy). Nominował on wraz z Babińskim małżeństwo francusko-niemieckie Cécile Vogt-Mugnier i Oskara Vogta, pracujące w Berlinie w utworzonym przez siebie Instytucie Badań Mózgu. Uzasadnienie nominacji było następujące „Vogtowie: Prace nad architekturą kory mózgowej. J. Babiński: Praca nad odruchami, zwłaszcza odruchem Babińskiego, diagnoza różnicowa pomiędzy chorobami organicznymi a histerią oraz symptomatologia chorób mózdzku i rdzenia przedłużonego”.

Druga nominacja zagraniczna nadeszła od profesora medycyny J. Dereux z Uniwersytetu w Lille (Francja) z uzasadnieniem „Prace nad patologią układu nerwowego, zwłaszcza odruchem Babińskiego”. Zaskakujący jest całkowity brak nominacji z Paryża, gdzie przecież Babiński całe życie pracował. Wydaje się, że pomimo blisko 300 publikacji naukowych Babiński był dla akademickiego Paryża „ciałem obcym”, i to mogło być przyczyną nieotrzymania przez niego Nagrody Nobla.

Kolejnym polskim nominatem był Rudolf Weigl. Był to rzadki przypadek Polaka z wyboru. Urodził się jako Niemiec, lecz wychowywany był we Lwowie przez ojczyma Polaka. Weigl od czasów I wojny światowej do końca życia zajmował się szczepionką przeciwko durowi plamistemu. Była wytwarzana bardzo skomplikowaną metodą hodowli i obróbki wszy. Metoda wymagała ludzi – karmicieli wszy oraz laborantów prowadzących mikropreparatykę tych owadów. Na jedną osobę potrzebny był materiał z około 90 wszy. Instytut Weigla we Lwowie ocalił tysiące istnień ludzkich i ani sowieccy, ani hitlerowscy okupanci Lwowa nie ośmielili się go ruszyć.

Weigla zgłaszano do Nagrody Nobla ponad 70 razy, w latach 1930–1939. Najpotężniejszy szturm przypuszczono w 1930 roku, gdy otrzymał 28 nominacji, oczywiście za prace nad dudem plamistym. Nominowała go duża grupa siedemnastu profesorów z Uniwersytetu Warszawskiego. Jedenastu z nich pracowało jednocześnie na Uniwersytecie w Berlinie, skąd również nadesłali nominacje. W 1931 roku nominacje nadesłało ośmiu profesorów z Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. W 1932 roku jedyna nominacja nadeszła z Uniwersytetu w Poznaniu, a w 1933 też jedna z Uniwersytetu w Wilnie. W 1934 nadeszła nominacja od profesora bakteriologii Richarda Bruynoghe z belgijskiego Katolickiego Uniwersytetu w Leuven, a ponadto szesnaście nominacji z Uniwersytetu Warszawskiego. W 1936 roku siedem nominacji nadesłał Uniwersytet Jagielloński. W 1937 roku znów siedem nominacji przysłał Lwów. W 1938 roku jedną zgłosił Uniwersytet w Wilnie i w 1939 roku trzy nadeszły z Poznania. Niestety wszystkie były bezskuteczne.

W polskim Internecie można znaleźć informację, że Weigl był nominowany w 1942 roku, ale kandydaturę utracili Niemcy. Miał też dostać nagrodę w 1946 (lub 1948) roku, ale polski rząd wycofał (?) jego kandydaturę. Obydwie te informacje są bardzo wątpliwe. Po pierwsze, na liście nominacji



Ludwik Hirszfild (1884–1954). Urodził się w Warszawie. Studiował medycynę i doktoryzował się w Niemczech. Habilitował się w Zurychu, a potem drugi raz na Uniwersytecie Warszawskim. W 1931 roku został profesorem Uniwersytetu Warszawskiego. Zmuszony do zamieszkania w warszawskim getcie uciekł z niego w 1942 roku. Od 1945 roku był profesorem Uniwersytetu Wrocławskiego. Był tam pierwszym dziekanem Wydziału Lekarskiego. Jest twórcą polskiej szkoły immunologicznej. W kilku miastach (m.in. w Warszawie i we Wrocławiu) są ulice jego imienia.



Rozwiązanie zadania M 1625.

Niech K będzie zbiorem punktów o współrzędnych należących do zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Niech S będzie zbiorem punktów należących do K , których co najmniej jedna współrzędna jest równa 1. Wówczas w S nie ma 4 punktów będących wierzchołkami równoległoboku, zatem szukana liczba nie przekracza liczności S , czyli $2n - 1$.

Rozważmy dowolny podzbiór R zbioru K , $|R| \geq 2n$. Przypuśćmy, że w R nie ma 4 wierzchołków równoległoboku. Dla $i \leq n$ niech R_i będzie zbiorem punktów należących do R , których pierwsza współrzędna wynosi i . Niech D_i będzie zbiorem odległości „najniższego” punktu zbioru R_i od pozostałych punktów tego zbioru. Wówczas $|D_i| = |R_i| - 1$. Ponadto, ze względu na przypuszczenie o braku równoległoboku, zbiory D_i muszą być parami rozłączne, a zatem

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n D_i \right| &= \sum_{i=1}^n |D_i| = \sum_{i=1}^n (|R_i| - 1) = \\ &= \sum_{i=1}^n |R_i| - n = |R| - n \geq n. \end{aligned}$$

Jest to sprzeczność, gdyż każdy ze zbiorów D_i jest podzbiorem $\{1, 2, \dots, n-1\}$, więc lewa strona powyższej nierówności nie może przekraczać $n-1$. Wobec przedstawionych rozważań odpowiedzią na pytanie z zadania jest $2n-1$.

1942 roku Weigla nie ma, ponadto w tym roku ze względu na II wojnę światową nagród w ogóle nie przyznano. Po wtóre, na listach nominacji z 1946 i 1948 roku również Weigla nie ma, a na dodatek nie ma takiej możliwości, by rząd mógł wycofać kandydaturę, której przecież nie zgłosił. System zgłaszania kandydatur naukowców jest precyzyjnie opracowany. Nie byłoby na przykład nagród dla Lecha Wałęsy czy Aleksandra Sołżenicyna, gdyby Komitet Noblowski kierował się opinią rządów. Może kiedyś po bezpośrednim zbadaniu archiwów noblowskich dowiemy się prawdy.

Wydaje mi się, że jedną z przyczyn braku nagrody dla Weigla może być sukces DDT, który to środek ustrzegł armie alianckiej na zachodzie przed epidemiami duru plamistego. Nie zdawano sobie sprawy z zagrożenia istniejącego w Europie Wschodniej i z tego, że zostało ono dzięki Weiglowi zażegnane. Nota bene szwajcarski chemik Paul Müller otrzymał w 1948 roku Nagrodę Nobla z fizjologii i medycyny „za odkrycie wysokiej skuteczności DDT w zwalczaniu niektórych stawonogów”.

Następną osobą, którą chciałbym zaliczyć do polskich nominatów, aczkolwiek jestem świadomy, że niektórzy będą protestować, jest laureat Nagrody Nobla Tadeusz Reichstein. Urodził się on w polsko-żydowskiej rodzinie we Włocławku pod zaborem rosyjskim. Gdy miał 8 lat, jego rodzice zdecydowali o emigracji do Szwajcarii. W konsekwencji do jego sukcesów przyznaje się zarówno Szwajcaria, jak i Izrael oraz Polska. Reichstein był profesorem chemii organicznej Uniwersytetu w Bazylei. Zajmował się kortyzonem i innymi hormonami nadnerczy.

Przez kilka lat (od 1943 do 1950, każdego roku z wyłączeniem 1946 r.) nominowano go 14 razy do Nagrody Nobla z chemii.

Wydaje się, że sprawę przesądziły nominacje zbiorowe z 1950 roku do nagrody z fizjologii i medycyny. Pierwsza nadeszła z Anglii, profesor Uniwersytetu w Bristolu J.M. Yoffey zgłosił Reichsteina wraz z Amerykaninem Edwardem C. Kendalllem. Natomiast profesor Erik Jorpes ze Sztokholmu zgłosił Reichsteina, Kendalla i jeszcze jednego Amerykanina Oskara Wintersteinera. Do tego trzeba dodać, że Edward C. Kendall był już 28 razy nominowany, począwszy od 1922 roku. Ponadto z tej samej dziedziny był w 1950 roku 13 razy nominowany kolejny Amerykanin Philip S. Hench.

Decyzją Komitetu Noblowskiego nagrodę z fizjologii i medycyny za 1950 rok otrzymali wspólnie Hench, Kendall i Reichstein „za ich odkrycia dotyczące hormonów kory nadnerczy, ich struktury i efektów biologicznych”. Dziesięć lat po śmierci Noblisty, w 2005 roku, we Włocławku ufundowano tablicę jego pamięci.

Ostatnim, jak dotąd, znanym polskim nominatem jest Ludwik Hirszfild. Był uciekinierem z warszawskiego getta, profesorem Uniwersytetu Wrocławskiego. Ludwikowi Hirszfeldowi zawdzięczamy odkrycie i nazwanie grup krwi 0, A, B i AB. Niestety jego ważne prace nie przebiły się na poziom Nagród Nobla. Miał tylko jedną nominację w 1950 roku, za badania grup krwi. Nominującym był uciekinier z Niemiec, profesor Uniwersytetu w Buffalo Ernst Witebsky. W uzasadnieniu napisał – za prace nad grupami krwi (ich dziedziczeniem, znaczeniem antropologicznym i „heterospecyficznymi ciążami”).

W Polsce nie ma, niestety, pomnika Ludwika Hirszfelda, natomiast o dziwo taki pomnik stoi od niedawna w Belgradzie. Jako lekarz ochotnik podczas I wojny światowej Hirszfild walczył z tyfusem plamistym w serbskiej armii.

We Wrocławiu jest natomiast należący do Polskiej Akademii Nauk Instytut Immunologii i Terapii Doświadczalnej im. Ludwika Hirszfelda, przed którym dawni pracownicy Instytutu Weigla ustawili tablicę pamięci Rudolfa Weigla.

Czworokąty bliźniacze

Stanisław HAUKE*

* zdobywca złotego medalu
w XL Konkursie Uczniowskich Prac
z Matematyki im. Pawła Domańskiego

Przypuśćmy, że dane mamy dwa czworokąty wypukłe $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ takie, że każdemu bokowi jednego odpowiada pewien równoległy doń bok drugiego, a każdej przekątnej – równoległa przekątna. Na pierwszy rzut oka wydawać by się mogło, że takie czworokąty muszą być podobne, jest jednak druga możliwość – wówczas czworokąty te są *bliźniacze*. Dokładna definicja tego określenia jest następująca: czworokąty wypukłe $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ nazwiemy bliźniaczymi, jeśli spełnione są dwa warunki:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle A^* = \sphericalangle B + \sphericalangle B^* = \sphericalangle C + \sphericalangle C^* = \sphericalangle D + \sphericalangle D^* = 180^\circ$$

oraz

$$\sphericalangle A^*E^*B^* = \sphericalangle AEB,$$

gdzie punkty E i E^* są odpowiednio przecięciami prostych AC i BD oraz A^*C^* i B^*D^* (rys. 1). Wówczas będziemy pisać $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$. Taka definicja par czworokątów bliźniaczych jest „porządna”, to znaczy: dla każdego czworokąta wypukłego W istnieje dokładnie jeden, z dokładnością do podobieństwa, czworokąt do niego bliźniaczy W^* . Dodatkowo czworokąt bliźniaczy do czworokąta W^* to po prostu czworokąt W .

Spójrzmy na dwie konstrukcje czworokąta bliźniaczego dla danego czworokąta $ABCD$.

Konstrukcja 1. Niech B^* będzie punktem przecięcia prostej AB i prostej równoległej do prostej AC , przechodzącej przez punkt D , zaś C^* niech będzie punktem przecięcia prostej CD i prostej równoległej do prostej BD , przechodzącej przez punkt A (rys. 2). Wówczas $AB^*C^*D \approx ABCD$.

Konstrukcja 2. Rozważmy inwersję o środku w punkcie przecięcia przekątnych AC i BD . Niech obrazami punktów A, B, C, D w tej inwersji będą odpowiednio punkty A^*, B^*, C^*, D^* (rys. 3). Wówczas $A^*B^*C^*D^* \approx ABCD$.

Sprawdzenie, wprost z definicji, że powyższe pary czworokątów są istotnie bliźniacze, pozostawiamy Czytelnikowi.

W geometrii rozważane są przeróżne układy współrzędnych. Układ współrzędnych kartezjańskich, przypisanie punktom płaszczyzny liczb zespolonych, ale też układy odniesienia względem trójkąta: współrzędne barycentryczne czy trzyliniowe (wyrażające stosunki odległości punktu od boków ustalonego trójkąta). My będziemy rozważać jeszcze inny układ współrzędnych, w odniesieniu do czworokąta. Niech dany będzie czworokąt $ABCD$ oraz punkt P , wtedy *współzrędnymi kątowymi punktu P względem czworokąta $ABCD$* nazwiemy czwórkę:

$$wk(P, ABCD) = (\sphericalangle APB, \sphericalangle BPC, \sphericalangle CPD, \sphericalangle DPA).$$

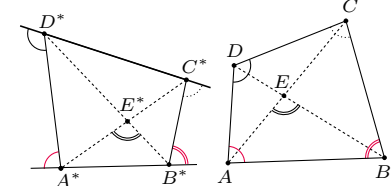
Okazuje się, że tak zdefiniowane współrzędne kątowe mają wiele wspólnego z czworokątami bliźniaczymi. Dokładniej mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to dla każdego punktu P istnieje taki punkt P° , że $wk(P, ABCD) = wk(P^\circ, C^*D^*A^*B^*)$.

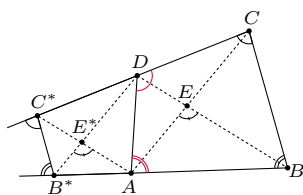
Dowód. Rozważmy antyinwersję AI_E^t , gdzie $t = AE \cdot CE$. Łatwo zauważyć, że $AI_E^t(C) = A$ oraz $AI_E^t(A) = C$. Oznaczmy $AI_E^t(B) = B^*$, $AI_E^t(D) = D^*$ oraz $AI_E^t(P) = P^*$ (rys. 4). Na mocy prawdziwości Konstrukcji 2 czworokąty $ABCD$ i CB^*AD^* są bliźniacze. Niech ω_1 i ω_2 będą odpowiednio okręgami opisanymi na trójkątach $\triangle ACP$ i $\triangle BDP$, niech punkt Q będzie drugim przecięciem okręgów ω_1 i ω_2 . Wykażę, że szukanym punktem P° jest punkt $AI_E^t(Q) = Q^*$.

Wystarczy uzasadnić, że

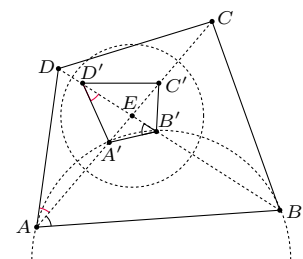
$$(1) \quad \sphericalangle DPA = \sphericalangle B^*Q^*A,$$



Rys. 1

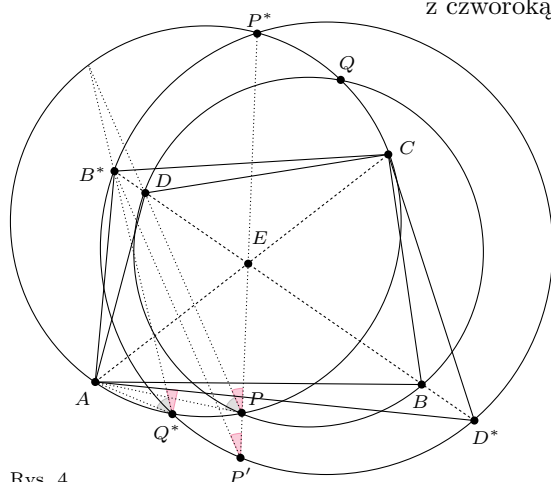


Rys. 2



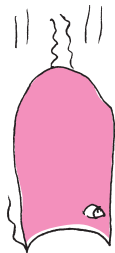
Rys. 3

Antyinwersja AI_E^t to złożenie inwersji I_E^t z symetrią środkową względem punktu E .



Rys. 4

By uniknąć rozważania niepotrzebnych przypadków, posługujemy się kątami skierowanymi. Kątem skierowanym między prostą k i l nazywamy taką liczbę α z przedziału $[0^\circ, 180^\circ)$, że po obroceniu prostej k przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o kąt α proste k' i l będą równoległe. Dla kątów skierowanych zachodzi następująca własność: kąt skierowany między prostą k i l jest równy kątowi skierowanemu między prostą k' i l' i różny od 0° wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $k \cap l, k' \cap l', k \cap k', l \cap l'$ leżą na jednym okręgu. Będę ją nazywał **Własnością 1**.



gdyż pozostałe do sprawdzenia równości są analogiczne. Ponieważ $PE \cdot EP^* = QE \cdot EQ^* = AE \cdot EC$, więc punkty P^* i Q^* leżą na okręgu ω_1 .

Na mocy Własności 1 (patrz margines) wystarczy zatem wykazać, że proste Q^*B^* i PD przecinają się na okręgu ω_1 . To zaś, ponownie na mocy Własności 1, jest równoważne równości

$$(2) \quad \sphericalangle P^*PD = \sphericalangle P^*Q^*B^*.$$

Niech P' będzie drugim przecięciem prostej P^*P z okręgiem $\omega_3 = AI_E^t(\omega_2)$. Ponieważ okrąg ω_3 przechodzi na okrąg ω_2 w pewnej jednokładności o środku w E (co wynika z definicji inwersji), więc proste DP i B^*P' są równoległe, stąd

$$(3) \quad \sphericalangle P^*PD = \sphericalangle P^*P'B^*.$$

Ponieważ punkty P^*, P', Q^* i B^* leżą na jednym okręgu, to na mocy Własności 1 zachodzi

$$(4) \quad \sphericalangle P^*P'B^* = \sphericalangle P^*Q^*B^*.$$

Równości (3) i (4) implikują (2), więc również (1), co kończy dowód. \square

W dowodzeniu kolejnych twierdzeń przyda nam się następujące stwierdzenie, które jest w pewnym sensie odwróceniem Twierdzenia 1. Jego dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Stwierdzenie. Jeśli kąty w odpowiadających wierzchołkach czworokątów $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ sumują się do 180 stopni oraz istnieją takie punkty P i P° , że $wk(P, ABCD) = wk(P^\circ, C^*D^*A^*B^*)$, to czworokąty te są bliźniacze.

Wyposażeni w przedstawione narzędzia możemy udowodnić poniższe Twierdzenia 2 i 3. Czytelnika Dociekliwego zachęcamy do samodzielnego zmierzenia się z tymi twierdzeniami przed przeczytaniem zamieszczonych dowodów. Można spróbować uzasadnić je bez powoływania się na Twierdzenie 1 (takie dowody są przedstawione w pełnej wersji mojej pracy *Czworokąty bliźniacze* dostępnej na stronie deltami.edu.pl).

Twierdzenie 2. Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$ oraz w czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg, to w czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ też da się wpisać okrąg.

Dowód. Na półprostych B^*C^* i A^*D^* wybierzmy punkty C_1^* i D_1^* tak, że odcinki C^*D^* i $C_1^*D_1^*$ są równoległe oraz w czworokąt $A^*B^*C_1^*D_1^*$ można wpisać okrąg. Wystarczy udowodnić, że $C_1^* = C^*$ i $D_1^* = D^*$.

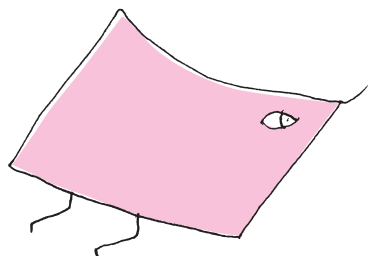
Niech I i I^* będą środkami okręgów wpisanych w $ABCD$ i $A^*B^*C_1^*D_1^*$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle AIB = 180^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$$

oraz

$$\sphericalangle C_1^*I^*D_1^* = 180^\circ - \frac{C_1^*}{2} - \frac{D_1^*}{2} = 180^\circ - \frac{C^*}{2} - \frac{D^*}{2} = \frac{C}{2} + \frac{D}{2},$$

zatem ponieważ $A + B + C + D = 360^\circ$, to $\sphericalangle AIB = \sphericalangle C_1^*I^*D_1^*$. W tej sytuacji punkty I i I^* mają takie same pierwsze współrzędne katowe odpowiednio względem czworokątów $ABCD$ i $C_1^*D_1^*A^*B^*$. Analogicznie możemy dowieść, że pozostałe trzy współrzędne też są takie same, zatem $wk(I, ABCD) = wk(I^*, C_1^*D_1^*A^*B^*)$, skąd na mocy Stwierdzenia wnioskujemy, że $ABCD \approx A^*B^*C_1^*D_1^*$. Zgodnie z założeniami mamy $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, zatem czworokąty $A^*B^*C^*D^*$ i $A^*B^*C_1^*D_1^*$ są podobne, skąd łatwo wywnioskować, że $C_1^* = C^*$ i $D_1^* = D^*$, a to kończy dowód. \square



Twierdzenie 3. Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$ oraz proste AC^* , CA^* i BD^* są współpękowe, to przez ich punkt przecięcia przechodzi prosta DB^* .

Dowód. Niech punkt P będzie przecięciem wyżej wymienionych trzech prostych. Załóżmy ponadto, że P nie leży na okręgu opisanym na trójkącie $A^*C^*D^*$ (dowód w przeciwnym przypadku jest raczej techniczny i mniej ciekawy).

Rozważmy taki punkt P° , by

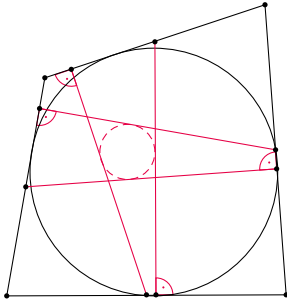
$$(5) \quad wk(P, ABCD) = wk(P^\circ, C^*D^*A^*B^*)$$

(istnienie takiego punktu gwarantuje nam Twierdzenie 1). Ponieważ proste

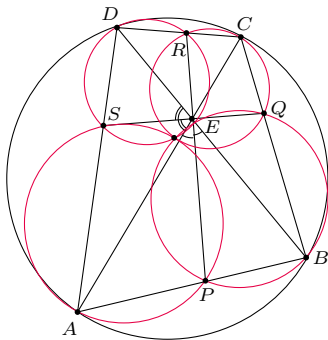
AC^* , CA^* i BD^* są współpękowe, to zachodzą równości kątów

$$\sphericalangle C^*P^\diamond D^* = \sphericalangle APB = \sphericalangle C^*PD^* \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle A^*P^\diamond C^* = \sphericalangle CPA = \sphericalangle A^*PC^*,$$

one zaś implikują, że czworokąty $PD^*C^*P^\diamond$ i $PC^*A^*P^\diamond$ są wpisane w okręgi. Ponieważ czworokąt $PD^*C^*A^*$ nie jest wpisany w okrąg, więc $P^\diamond = P$ lub $P^\diamond = C^*$. W analogiczny sposób możemy jednak udowodnić, że $P^\diamond = P$ lub $P^\diamond = A^*$ (role punktów A^* i C^* są symetryczne), zatem musi być $P^\diamond = P$. Z (5) wynika zatem, że $\sphericalangle A^*PB^* = \sphericalangle CPD$, z tego zaś mamy, że punkty D , P i B^* są współliniowe, więc teza zachodzi. \square



Rys. 5



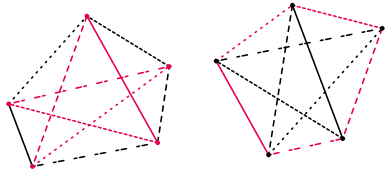
Rys. 6

Na zakończenie pozostawiamy dla Czytelnika dwa zadania, które da się rozwiązać, wykorzystując czworokąty bliźniacze – rozwiązania te można znaleźć w pełnej wersji mojej pracy zgłoszonej na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. Pierwsze z nich zostało przedstawione na stronie www.gogeometry.com jako problem 1351, bez znanego geometrycznego dowodu; to właśnie ono było dla mnie motywacją do napisania pracy. Drugie zadanie jest zadaniem autorskim, powstałym w trakcie badania czworokątów bliźniaczych.

Zadanie 1. W czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg. Przez środek każdego z odcinków AB , BC , CD , DA poprowadzono proste prostopadłe do przeciwległych boków czworokąta $ABCD$. Proste te ograniczają obszar będący czworokątem wypukłym. Wykazać, że w ten czworokąt również można wpisać okrąg (rys. 5).

Zadanie 2. Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta. Załóżmy, że dwusieczna kąta AEB przecina prostą AB w punkcie P , zaś prostą DC w punkcie R ; niech ponadto dwusieczna kąta BEC przecina prostą BC w punkcie Q , zaś prostą AD w punkcie S . Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach $\triangle PBQ$, $\triangle QCR$, $\triangle RDS$, $\triangle SAP$ mają punkt wspólny (rys. 6).

Uwaga końcowa. Jak już nadmienilem we wstępie, czworokąty bliźniacze na płaszczyźnie da się narysować w taki sposób, by ich odpowiadające boki i przekątne były równoległe. Można się zastanowić, czy istnieją inne pary n -kątów o tej własności, że da się je narysować w taki sposób, by ich odpowiadające sobie boki i przekątne były do siebie równoległe oraz by n -kąty te nie były do siebie podobne. Dla $n = 3$ oczywiście taka para nie istnieje, z kolei przykład dla $n = 5$ przedstawiony jest na marginesie. Potrafię udowodnić, że takich par jest stosunkowo mało, w szczególności nie dla każdego n -kąta istnieje tak zdefiniowany n -kąt bliźniaczy. Zachęcam Czytelnika do próby znalezienia odpowiedzi na to pytanie!



Rys. 7

Odpowiedzi do artykułu Mały Gauss

FI. Załóżmy, że w sprawdzanej pracy Bolka mamy $x_{11} = g$, $x_{12} = h$. Jeśli dalej obliczał prawidłowo (przynajmniej do miejsca x_{17}), to uzyskał następujące wartości:

$$\begin{aligned} x_{13} &= g + h, \\ x_{14} &= g + 2h, \\ x_{15} &= 2g + 3h, \\ x_{16} &= 3g + 5h, \\ x_{17} &= 5g + 8h. \end{aligned}$$

Fibonacci oblicza:

$$\begin{aligned} x_{11} - 8x_{15} + 3x_{17} &= \\ &= g - 8(2g + 3h) + 3(5g + 8h) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

FII. Jeśli Lolek prawidłowo wykonał swoje rachunki, to zachodzą:

$$(1) \quad \begin{cases} x_2c + x_1d = x_3 \\ x_3c + x_2d = x_4 \end{cases}$$

oraz

$$(2) \quad x_4c + x_3d = x_5.$$

Rozwiązując (dowolną metodą) układ równań (1) z niewiadomymi c, d , otrzymamy

$$c = \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2^2 - x_1x_3}, \quad d = \frac{x_2x_4 - x_3^2}{x_2^2 - x_1x_3},$$

co po podstawieniu do wzoru (2) daje następującą „tożsamość weryfikującą”:

$$x_5 = x_4 \cdot \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2^2 - x_1x_3} + x_3 \cdot \frac{x_2x_4 - x_3^2}{x_2^2 - x_1x_3}.$$

Jako wielomian weryfikujący F_2 można więc przyjąć

$$\begin{aligned} F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \\ &= x_3^3 + x_1x_4^2 + x_5x_2^2 - 2x_2x_3x_4 - x_1x_3x_5. \end{aligned}$$

Co ma π do pierwiastków z dwóch i trzech?

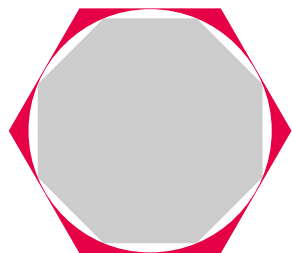
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL*

Na początek krótka zagadka: co jest większe, $\pi^4 + \pi^5$ czy e^6 ? Drogi Czytelniku! Nie wysilaj się. Nie masz szans raczej tego poprawnie ocenić. Weź kalkulator i sprawdź: $\pi^4 \approx 97,409091034$, $\pi^5 \approx 306,019684785$, zaś $e^6 \approx 403,428793493$. Suma tych pierwszych dwóch to 403,428775819, więc jest nieco mniejsza niż e^6 . Różnica niewielka: ok. 0,000017673, można powiedzieć, że niezauważalna. Błąd względny mniejszy od 0,00000005, czyli od jednej dwudziestomilionowej. Gdybyśmy z taką precyzją chcieli podać wysokość Pałacu Kultury, to trzeba by go zmierzyć z dokładnością do około jednej setnej milimetra. Nie jest znane żadne wyjaśnienie, dlaczego te dwie liczby są tak bliskie. Wygląda to na czysty przypadek. Ile jeszcze takich zagadkowych zbiegów okoliczności mamy w matematyce?

Krąży złośliwa anegdotka o tym, jak w amerykańskich szkołach pokazuje się niewymierność liczby π . Ponieważ $\sqrt{2} = 1,41$, zaś $\sqrt{3} = 1,73$, więc $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,14$, a to – jak wszyscy wiedzą – jest równe właśnie π . Również powszechnie wiadomo, że $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, to liczby niewymierne, a że suma dwóch liczb niewymiernych jest niewymierna, więc i liczba π jest niewymierna.

W tym „dowodzie” prawie każde stwierdzenie jest fałszywe. Czasami zadają uczniom w szkole, aby wyszukali wszystkie błędy w tym sformułowaniu, prowadzącym do poprawnego skądinąd wniosku. Ciekawe natomiast jest to, że faktycznie π jest bardzo bliskie sumie tych dwóch jakże podstawowych pierwiastków. Znowu przypadek?



Nie do końca. Spójrzmy na rysunek. W czerwony sześciokąt foremny wpisane jest białe koło, a w to koło szary ośmiokąt foremny. Przyjmijmy, że promień koła wynosi 1. Pole koła jest nieco mniejsze niż pole sześciokąta, ale nieco większe niż pole ośmiokąta. Przy czym „na oko” różnice te są podobne: łączne pole wystających sześciu czerwonych prawie trójkątów i łączne pole ośmiu białych prawie trójkątów wyglądają dość podobnie. Innymi słowy pole koła jest mniej więcej średnią arytmetyczną pól tych wielokątów.

Pozostaje zatem obliczyć pole sześciokąta foremnego opisanego na kole jednostkowym i pole ośmiokąta foremnego wpisanego w to koło i przekonać się, że pierwsze z nich to $2\sqrt{3}$, a drugie to $2\sqrt{2}$. Ich średnia arytmetyczna to po prostu $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, a że pole koła to π , więc możemy zrozumieć, że w bliskości tych dwóch liczb nie ma większej tajemnicy.



Rozwiązanie zadania M 1624.

Ustalmy $k \leq n$ oraz dowolne wartości zmiennych $x_i \in [0, 1]$ dla $i \neq k$. Wówczas wyrażenie $\sum_{i < j \leq n} |x_i - x_j|$ możemy traktować jako funkcję zmiennej x_k . Jest to funkcja ściśle wypukła, jako suma ściśle wypukłych funkcji $|x_k - x_i|$ dla $i \neq k$ oraz stałych $|x_i - x_j|$ dla $i, j \neq k$. W tej sytuacji największa wartość tej funkcji jest przyjmowana na krańcach dziedziny, tj. dla $x_k = 0$ lub $x_k = 1$. Z dowolności wyboru k wnioskujemy, że największa wartość badanego wyrażenia jest przyjmowana dla pewnej konfiguracji $x_i \in \{0, 1\}$, $i \leq n$. Jeśli k spośród zmiennych x_i jest równe 1, to rozważana suma ma wartość

$$k(n-k) = \binom{n}{2} - \binom{n-k}{2}$$

i przyjmuje największą wartość dla $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ równą $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Czasem więc tego typu zagadkowa koincydencja ma racjonalne wytłumaczenie, tak jak to się stało na przykład w przypadku stałej Ramanujana

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262\,537\,412\,640\,768\,743,999\,999\,999\,999\,25,$$

która jest tak bliska liczbie całkowitej, że Martin Gardner w numerze primaaprilisowym *Scientific American* z roku 1975 obwieścił po prostu, że to jest, zgodnie z przewidywaniami Ramanujana, liczba całkowita. Istniejące wtedy kalkulatory nie radziły sobie z taką dokładnością i łatwo było czytelników wkręcić w żart. Ramanujanowi się udało, bo jego imieniem nazwano stałą, która została dużo przed nim odkryta przez Charlesa Hermite'a (w 1859 r.), a on sam z nią akurat nie miał nic wspólnego. Ale żart Gardniera był na tyle nośny, że nazwisko słynnego Hindusa przyklepiło się do tej stałej mocniej niż nazwisko prawdziwego odkrywcy. Okazuje się, że bliskość tego wyrażenia do liczby całkowitej bynajmniej przypadkowa nie jest, lecz wynika z algebraicznej teorii pierścieni i związanych z nimi liczb Heegnera.

Planety pozasłoneczne – w poszukiwaniu drugiej Ziemi

* Obserwatorium Astronomiczne
Uniwersytetu Warszawskiego

Milena RATAJCZAK*

Człowiek spoglądał w nocne niebo od zarania dziejów, od równie dawna podejmował też próby znalezienia odpowiedzi na pytanie: czy jesteśmy sami we Wszechświecie? Dziś, w dobie zaawansowanych sond kosmicznych i ekstremalnie dużych teleskopów, pytanie to jest nadzwyczaj aktualne.

Temat odległych światów rozbudza wyobraźnię nie tylko uczonych, ale też szerokiego grona fascynatów nocnego nieba. Interpretowany na różne sposoby stał się pożywką dla myśli wybitnych twórców fantastyki naukowej. Trzydzieści lat temu planety pozasłoneczne, czyli takie, które znajdują się poza Układem Słonecznym, wyszły ze sfery *science fiction*, by na stałe zapisać się na kartach historii odkryć astronomicznych. Dziś odkryć kolejnych nowych światów dokonuje się niemal co tydzień, a ich łączna liczba przekracza 4 tysiące.

Pierwsze kroki

Falę odkryć planet pozasłonecznych, zwanych też egzoplanetami, zapoczątkował polski astronom Aleksander Wolszczan, który w 1992 roku, wspólnie z kanadyjskim uczonym Dale Frailem, dokonał odkrycia planet wokół nietypowego obiektu – pulsara PSR 1257+12. Pulsar jest szczególnym rodzajem „umarłej” gwiazdy powstałej w wybuchu supernowej – gwiazdy neutronowej. Zakładano, że eksplozja supernowej powinna zniszczyć potencjalne planety w takim układzie, stąd odkrycie Wolszczana było nie lada zaskoczeniem dla astrofizyków.

Astronomowie dążyli jednak do znalezienia planet krążących wokół gwiazd podobnych do Słońca. Dokonał tego 3 lata później duet szwajcarskich astrofizyków – Michel Mayor i Didier Queloz. Astronomowie przy użyciu techniki spektroskopowej wykryli zaburzenia w ruchu gwiazdy spowodowane istnieniem krążącej wokół niej planety, nazwanej 51 Pegasi b. Opracowana przez Szwajcarów metoda wykrywania planet, badająca okresowe zmiany w ruchu gwiazdy przy wykorzystaniu spektroskopii, dała podwaliny pod nową, prężnie rozwijającą się gałąź astronomii. Za swoje odkrycie Mayor i Queloz zostali uhonorowani Nagrodą Nobla z fizyki w 2019 roku.

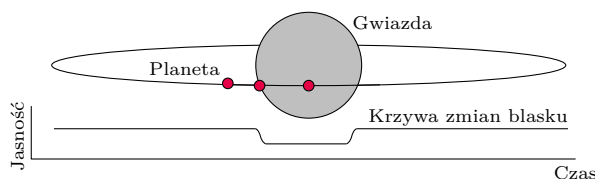
Techniki odkrywania egzoplanet

Odkrywanie odległych światów nie jest trywialne, planety bowiem giną w świetle gwiazd, wokół których krążą. Z grona ponad 4 tysiące egzoplanet zaledwie kilkanaście zostało zaobserwowanych w sposób bezpośredni, poprzez sfotografowanie przy przysłonięciu światła pochodzącego od gwiazdy. Do wykrycia pozostałych planet wykorzystano metody pośrednie, polegające na obserwacjach gwiazd i poszukiwaniu nieregularności w ich jasności, ruchu lub położeniu.

Wspomniana wcześniej metoda spektroskopowa użyta przez Szwajcarów, zwana **metodą prędkości radialnych**, wykorzystuje widma gwiazd uzyskane po przepuszczeniu światła od nich pochodzącego przez pryzmat lub siatkę dyfrakcyjną. W widmach dostrzegamy linie absorpcyjne i emisyjne, których odpowiednie zestawy przypisane są pierwiastkom występującym w atmosferach badanych gwiazd (zobacz Δ_{19}^4). Przesunięcie tych linii związane jest z efektem Dopplera i świadczy o ruchu analizowanej gwiazdy, a ten z kolei może być spowodowany istnieniem drugiego ciała (np. planety) w obserwowanym układzie. Prędkość gwiazdy w ruchu wokół środka masy takiego układu (wywołanym obecnością egzoplanety) jest względnie niewielka, współczesne spektrografy uzyskują jednak dokładność pomiaru lepszą niż 1 m/s, co pozwala na precyzyjne badanie wybranych obiektów. Do tej

pory przy użyciu metody prędkości radialnych udało się odkryć około 860 egzoplanet.

Najsukuteczniejszą ze znanych technik odkrywania odległych globów, dzięki której wykryto już niemal 3 tysiące planet, jest tzw. **metoda tranzytów**. U jej podstaw leży monitorowanie jasności gwiazd, wokół których mogą krążyć planety. Jeśli linia Ziemia (obserwator) – gwiazda zostanie przecięta przez poruszającą się planetę, dysk gwiazdy zostanie częściowo



Metoda tranzytu: planeta przechodząca na tle gwiazdy powoduje spadek jej jasności, który obserwujemy w tzw. krzywej zmian blasku

przysłonięty, a jej chwilowa jasność obserwowana spadnie. Zjawisko przejścia ciała niebieskiego przed tarczą innego ciała nazywamy tranzytem (stąd nazwa metody) i możemy go doświadczać także w naszym Układzie Słonecznym (np. z Ziemi możemy obserwować tranzyt Wenus i Merkurego na tle dysku Słońca, Δ_{19}^{10}). Przebieg wspomnianych okresowych zmian jasności gwiazdy jest zależny od wielkości planety, więc metoda ta pozwala na wyznaczenie względnego promienia odległego globu.

Odkrywcami pierwszej planety, której istnienie wykryto przy użyciu metody tranzytów w 2002 roku, byli astronomowie z warszawskiego projektu OGLE, kierowanego przez Andrzeja Udalskiego. Największą liczbę odkryć, jak i prawdziwy przełom w dziedzinie badań egzoplanet, przyniósł jednak Kosmiczny Teleskop Keplera, który od 2009 roku, poruszając się po orbicie okołosłonecznej przez kilka lat nieprzerwanie badał jasność kilkuset tysięcy gwiazd.

Kosmiczny Teleskop Keplera w liczbach:

- * Monitorowane gwiazdy: 530 506
- * Odkryte egzoplanety: 2662
- * Ilość zebranych danych: 678 GB
- * Publikacje naukowe: 2946
- * Długość trwania misji: 9,5 roku
- * Koszt: 591 mln USD

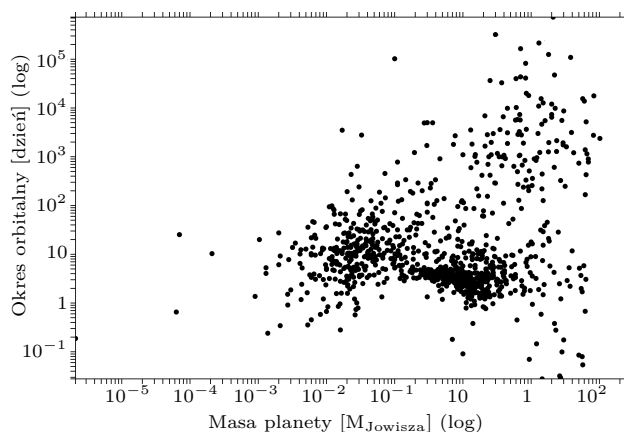
Kolejną metodą wykrywania planet pozasłonecznych jest **astrometria**, czyli badanie położenia gwiazd na niebie. Precyzyjne pomiary współrzędnych gwiazdy mogą wykazać jej ruch, co z kolei może świadczyć o obecności planety krążącej wokół niej, a dokładniej: wspólnego środka masy układu, wokół którego krążą też badana gwiazda. Obserwacje astrometryczne pomagają w wykryciu planet krążących daleko od gwiazd i wymagają długiego czasu, dlatego przy użyciu tej metody wykryto zaledwie 10 planet.

Ostatnia omawiana tu technika wykrywania planet wykorzystuje zjawisko **mikrosoczewkowania grawitacyjnego**, polegające na wykorzystaniu grawitacji gwiazdy, której nie widzimy przy obserwacjach innej, odległej gwiazdy. Jeśli ciała te i Ziemia znajdują się na jednej linii, wówczas gwiazda znajdująca się pomiędzy obserwatorem a odległą gwiazdą działa jak soczewka i powoduje pojaśnienie badanego obiektu. Te zmiany jasności odległej gwiazdy mogą być zaburzone przez istnienie planety wokół gwiazdy soczewkującej, co wykorzystuje się przy poszukiwaniu odległych światów. Pionierami użycia metody soczewkowania grawitacyjnego do znajdowania egzoplanet byli naukowcy ze wspomnianego wcześniej projektu OGLE. Do dziś dzięki tej metodzie wykryto nieco ponad 100 planet.

Zadziwiająco różne światy

Planety pozasłoneczne zaskoczyły nas swoją różnorodnością. Zdecydowana większość odkrytych egzoplanet należy do klasy tzw. gorących jowiszów, czyli planet o stosunkowo dużych rozmiarach i niskiej gęstości (jak znany z naszego Układu Słonecznego gazowy olbrzym – Jowisz). Planety te krążą bardzo blisko gwiazd, na orbitach często ciaśniejszych niż orbita Merkurego, a okres ich obiegu wynosi nie –

jak w przypadku Jowisza – 12 lat, tylko zaledwie kilkadziesiąt godzin. Fakt obserwacji tak wielu gazowych olbrzymów w niewielkiej odległości od gwiazd jest także związany z selekcją obserwacyjną – łatwiej jest nam wykryć większe planety znajdujące się blisko gwiazd niż te mniejsze i bardziej odległe. Niemniej jednak ich powszechne występowanie rzuca światło na zagadnienie migracji planet, także w naszym Układzie Słonecznym. Dziś przypuszczamy, że gorące jowisze powstały znacznie dalej od swych macierzystych gwiazd i na skutek migracji przywędrowały w ich pobliże.



Zależność okresu orbitalnego od masy odkrytych planet pozasłonecznych. Łatwiej jest nam odkrywać planety bardziej masywne znajdujące się blisko gwiazd

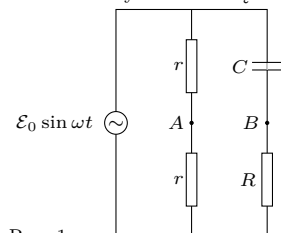
Kolejną klasą powszechnie występujących planet, których nie znamy z Układu Słonecznego, są tzw. super-ziemie. Są to planety skaliste o masach kilkakrotnie większych niż masa Ziemi i promieniach trzykrotnie przewyższających ziemski promień. Jednak największym zaskoczeniem dla łowców planet było odkrycie planet swobodnych, czyli takich, które nie okrążają gwiazd, a samotnie przemierzają przestrzeń kosmiczną. Przypuszcza się, że takie egzoplanety powstały w układach planetarnych, ale zostały z nich wyrzucone.

Na naszych oczach dzieje się rewolucja technologiczna, pozwalająca nie tylko na odkrywanie coraz większej liczby odległych światów, ale też na badanie ich właściwości. Dziś nie tylko potrafimy odkryć planetę, której nie widzimy, krążącą wokół dalekiej gwiazdy, ale i zbadać skład atmosfery takiej egzoplanety. Dzięki temu wiemy, jakie pierwiastki na niej występują, a stąd już niedaleko do zagadnienia poszukiwania życia we Wszechświecie. Śladów życia poza naszym Układem Słonecznym do tej pory nie odnaleźliśmy, ale planowane planetarne misje kosmiczne, jak *Characteristic Exoplanets Satellite* (Cheops), *Planetary Transit and Oscillations of Stars* (PLATO) czy *James Webb Telescope* (JWST), a także budowany w Chile *Ekstremalnie Duży Teleskop* (ELT) na pewno nas do tego przybliżą. Mnogość i różnorodność odległych światów zaskakuje nas do tego stopnia, że śmiemy przypuszczać, że znalezienie drugiej Ziemi i życia na niej jest tylko kwestią czasu. Pozostaje pytanie, jakie to życie będzie i czy na pewno chcemy dostrzec bliźniaczkę Ziemi, na której takie życie występuje.

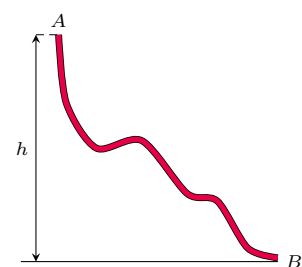
Klub 44 F



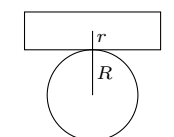
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2020



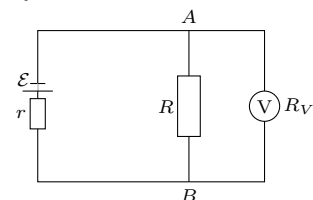
Rys. 1



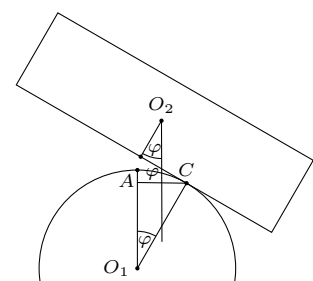
Rys. 2



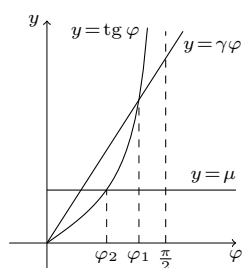
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Zadania z fizyki nr 690, 691

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

690. Jak zależy amplituda napięcia między punktami A i B , w obwodzie przedstawionym na rysunku 1, od oporu R ?

691. Elastyczna rurka o długości l łączy w przestrzeni punkty A i B . Różnica wysokości między tymi punktami wynosi h (rys. 2). Wewnątrz rurki wzdłuż całej jej długości leży sznurek, który przytrzymywany jest w punkcie A . Z jakim przyspieszeniem zacznie poruszać się sznurek w pierwszej chwili po jego oswobodzeniu? Tarcie między sznurkiem a ściankami rurki zaniedbujemy.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2019

Przypominamy treść zadań:

682. Na nieruchomym, poziomym walcu o promieniu R leży walec o promieniu r , również poziomo (rys. 3). Osie walców są wzajemnie prostopadłe. Przy jakim stosunku promieni równowaga górnego walca będzie trwała? O jaki maksymalny kąt można przy tym odchylić od poziomu górny walec? Współczynnik tarcia między walcami jest równy μ .

683. W obwodzie przedstawionym na rysunku 4 opór zewnętrzny R jest dużo większy niż opór wewnętrzny ogniwa: $r \ll R$. Podłączenie woltomierza o oporze R_V powoduje zmianę napięcia między punktami A i B . Jaka powinna być relacja między oporami R i R_V , aby to zaburzenie było jak najmniejsze?

682. W położeniu równowagi środka mas obu walców leżą na wspólnej prostej pionowej. Odchylimy górny walec z położenia równowagi o pewien kąt φ (rys. 5). Załóżmy na początku, że tarcie statyczne jest na tyle duże, że nie ma poślizgu między walcami. Punkt styczności walców przemieszcza się z punktu A do punktu C , punkt górnego walca, który stykał się z walcem, przemieszcza się do punktu B . Ponieważ nie ma poślizgu, długość łuku AC równa jest długości odcinka BC : $R\varphi = |BC|$. Jeżeli prosta pionowa przechodząca przez środek masy O_2 odchylonego walca znajduje się z lewej strony nowego punktu styczności C , siła ciężkości będzie powodować powrót górnego walca do położenia równowagi. Spełniony musi być warunek: $r \sin \varphi < |BC| \cos \varphi = R\varphi \cos \varphi$. Stąd $r/R = \varphi / \tan \varphi$. Ponieważ $0 < \varphi < \pi/2$, więc $\tan \varphi > \varphi$. Równowaga górnego walca będzie trwała, gdy $r/R < 1$.

Szukany stosunek promieni możemy też znaleźć z założenia, że energia potencjalna odchylonego walca musi być większa niż energia początkowa. Rozważmy przyczyny ograniczające wartość dopuszczalnego kąta odchylenia. Po pierwsze, dla dużych kątów odchylenia linia pionowa przechodząca przez środek ciężkości górnego walca może znaleźć się po prawej stronie punktu styczności C . Przy ustalonym stosunku promieni $\gamma = R/r > 1$ maksymalny kąt odchylenia dany jest równaniem $\tan \varphi_1 = \gamma \varphi_1$. Rozwiązanie tego równania można znaleźć metodą graficzną (rys. 6). Po drugie, walec nie powinien się ześlizgiwać, zatem kąt odchylenia ograniczony jest warunkiem $\tan \varphi_2 = \mu$. Z rysunku 6 widać, że maksymalny kąt odchylenia jest równy mniejszej z dwóch wartości φ_1 i φ_2 . Ponieważ współczynnik tarcia μ jest zwykle mniejszy od jedynki, dopuszczalny kąt odchylenia na ogół określony jest przez warunek poślizgu, czyli przez kąt φ_2 .

683. Przed podłączeniem woltomierza napięcie między punktami A i B wynosi $U = \varepsilon R / (r + R)$. Po podłączeniu $U_1 = \varepsilon R_z / (r + R_z)$, gdzie $R_z = RR_V / (R + R_V)$. Podłączenie woltomierza powoduje wzrost natężenia prądu płynącego przez źródło, co pociąga za sobą wzrost napięcia na oporze wewnętrznym źródła i obniżenie napięcia między punktami A i B . Zachodzi relacja $U_1 < U$. Względne zaburzenie napięcia między punktami A i B wynosi

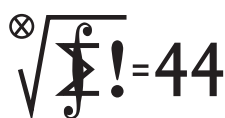
$$\Delta U / U = (U - U_1) / U = rR / (RR_V + r(r + R_V)),$$

co można oszacować

$$\Delta U / U \approx \begin{cases} r / (R_V + 2r) \approx r / R_V, & \text{gd } r \ll R \approx R_V, \\ r / (R_V + r) \approx r / R_V, & \text{gd } r \ll R_V \ll R, \\ r / R_V, & \text{gd } r \ll R \ll R_V. \end{cases}$$

Względne zaburzenie pomiaru jest tym mniejsze, im większy jest stosunek oporu woltomierza do oporu wewnętrznego ogniwa, niezależnie od relacji między R i R_V .

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2020

Zadania z matematyki nr 793, 794

Redaguje Marcin E. KUCZMA

793. Okręgi Ω i ω przecinają się w punktach A i B . Środek S okręgu ω leży na okręgu Ω i jest końcem jego średnicy NS . Cięciwa CS okręgu Ω , niebędąca średnicą, przecina okrąg ω oraz odcinek AB odpowiednio w punktach I oraz J . Prosta przechodząca przez I , równoległa do NS , przecina odcinek NC w punkcie K . Dowieść, że prosta IN przechodzi przez środek odcinka JK .

794. Dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geq 0$ przyjmijmy: $R(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $Q(x, y, z) = \sqrt{xy + xz + yz}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\frac{1}{R(a, b, c)Q(b, c, d)} + \frac{1}{R(b, c, d)Q(a, c, d)} + \frac{1}{R(a, c, d)Q(a, b, c)}$$

dla liczb $a, b, c, d \geq 0$ spełniających warunek $2a + 2b + 3c + 2d \leq 6$ oraz wyznaczyć wszystkie czwórki (a, b, c, d) , dla których to minimum jest osiąganе.

Zadanie 794 zaproponował pan Mikołaj Pater.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2019

Przypominamy treść zadań:

785. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o środku O ; przy tym $|BC| = |CD|$. Przekątne AD i CE są prostopadłe, zaś przekątne AD i BE przecinają się w takim punkcie P , że $|AP| = |AO|$. Wykazać, że trójkąt BCP jest równoboczny.

786. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele czwórek różnych liczb naturalnych (a, b, c, d) o tej własności, że każdy z iloczynów ab, bc, ac, bd, cd jest o 1 większy od kwadratu pewnej liczby naturalnej.

785. Skoro $|BC| = |CD|$, punkt C jest środkiem łuku BD ; zatem prosta EC jest dwusieczną kąta wpisanego BED . Przy tym jest prostopadła do prostej AD ; jest więc symetralną odcinka PD . Stąd wynika, że

$$|EP| = |ED| \quad \text{oraz} \quad |CP| = |CD| = |CB|.$$

Cięciwy AD i BE , przecinające się w punkcie P , wyznaczają trójkąty podobne: $\triangle PAB \sim \triangle PED$; a ponieważ $|ED| = |EP|$, zatem $|AB| = |AP| = |AO|$ (ostatnia równość jest dana w założeniach). To pokazuje, że trójkąt OAB jest równoboczny, wobec czego $\sphericalangle AOB = 60^\circ$. W takim razie $\sphericalangle ACB = 30^\circ$.

Czworokąt $ABCP$ to deltoid ($|AB| = |AP|$, $|CB| = |CP|$); stąd $\sphericalangle BCP = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 60^\circ$. Wobec wcześniejszego spostrzeżenia, że $|CP| = |CB|$, dostajemy tezę zadania: trójkąt BCP jest równoboczny.

786. Przykład Autora zadania (W. Bednarek): gdy $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ jest dowolną czwórką kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, wówczas czwórka $(a, b, c, d) = (F_\alpha, F_\beta, F_\gamma, F_\delta)$ jest dobra; jak zwykle, F_n oznacza n -tą liczbę Fibonacciego ($F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 2$).

Uzasadnienie: Dopełniamy taką czwórkę trzema kolejnymi liczbami parzystymi k, l, m do pełnego bloku siedmiu kolejnych liczb naturalnych $(\alpha, k, \beta, l, \gamma, m, \delta)$ i korzystamy ze znanych tożsamości

$$F_n^2 + 1 = \begin{cases} F_{n-1}F_{n+1} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ F_{n-2}F_{n+2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} ab &= F_\alpha F_\beta = F_k^2 + 1, & bc &= F_\beta F_\gamma = F_l^2 + 1, \\ cd &= F_\gamma F_\delta = F_m^2 + 1, & ac &= F_\alpha F_\gamma = F_\beta^2 + 1, \\ & & bd &= F_\beta F_\delta = F_\gamma^2 + 1. \end{aligned}$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 783 ($WT = 3,76$) i 784 ($WT = 1,18$) z numeru 6/2019

Janusz Olszewski	Warszawa	45,91
Paweł Kubit	Kraków	44,25
Krzysztof Kamiński	Pabianice	42,48
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Janusz Fiett	Warszawa	33,09
Mikołaj Pater	Opole	31,50

Dwaj uczestnicy przekraczają próg 44p., i to dalece nie pierwszy raz – tu chodzą duże liczby: pan Kubit – po raz siódmy! pan Olszewski – po raz dwudziesty!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Jak trudno jest zagiąć czasoprzestrzeń?

Od ponad 100 lat, czyli od momentu opublikowania szczególnej, a później ogólnej teorii względności (odpowiednio, w 1905 i 1915 roku), czas i przestrzeń splecione są w opisie fizycznym w jeden byt zwany *czasoprzestrzenią*. Realne istnienie czasoprzestrzeni udowadnia się w eksperymentach i obserwacjach badających naturę grawitacji, m.in. bezpośrednich obserwacjach astrofizycznych fal grawitacyjnych, dokonywanych regularnie (obecnie średnio raz na tydzień!) przez detektory Advanced LIGO i Advanced Virgo. Słowami Johna Wheelera – który jest odpowiedzialny także za epitet „czarna dziura” – w opisie ogólnej teorii względności „czasoprzestrzeń dyktuje masie, jak się poruszać, a masa dyktuje czasoprzestrzeni, jak się zakrzywić”. Tę współzależność ilustruje równanie Einsteina:

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}}_{\text{geometria}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}_{\text{masa-energia}}.$$

Ogólna teoria względności pozwala nam też oszacować, jak wiele energii „wtłaczanej” jest w czasoprzestrzeń w formie fal grawitacyjnych podczas ewolucji pary gwiazd neutronowych lub czarnych dziur, kosztem energii orbitalnej ich układu podwójnego: wynik to około 5% całkowitej początkowej masy-energii układu, co w przypadku masywnych gwiazdowych czarnych dziur typu GW150914 daje niebagatelne kilka M_{\odot} .

Inspirowane odpowiedzią Rainera Weissa po wykładzie Hamilton Lecture Kipa Thorne’a pt. „Exploring the Universe with Gravitational Waves: From the Big Bang to Black Holes and Colliding Stars”.

Odształcona przez masywne obiekty czasoprzestrzeń drga i przewodzi (transmituje) zmieniającą się w czasie deformację swojej własnej krzywizny. Deformacja (fala grawitacyjna) rozprzestrzenia się z prędkością światła, jak pokazała obserwacja zlania się gwiazd neutronowych GW170817 wykonana prawie jednocześnie przez detektory fal grawitacyjnych LIGO i Virgo oraz detektor promieniowania gamma (elektromagnetycznego) Fermi.

Jak porównać odształcanie czasoprzestrzeni z odształceniem zwykłych ziemskich materiałów? Z bezpośrednich detekcji wiemy, że zauważalne efekty (amplituda $h = \Delta L/L \simeq 10^{-21}$, co odpowiada zmianie długości ramion ΔL interferometrów LIGO i Virgo o mniej niż 10^{-18} m) wywołują zderzające się czarne dziury lub gwiazdy neutronowe odległe o wiele setek lub nawet tysięcy megaparseków (najbliższy zarejestrowany przypadek to wspomniany wcześniej GW170817 w galaktyce NGC 4993 odległej od Drogi Mlecznej zaledwie o 40 Mpc). Moduł Younga E sprężystego materiału poddanego sile F jest definiowany jako

$$E = \frac{F L}{A \Delta L},$$

gdzie A to pole przekroju prostopadłego do przyłożonej siły; E ma wymiar ciśnienia (mierzonego w układzie SI w paskalach [$\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$]), czyli [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$].

Grawitacyjny analog modułu Younga sporządzimy przy użyciu analizy wymiarowej, biorąc dostępne w teorii stałe – stałą grawitacji $G = 6,67408(31) \cdot 10^{-11} [\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}]$ oraz prędkość światła $c \equiv 299\,792\,458 [\text{m s}^{-1}]$. Analiza wymiarowa daje

$$E \propto \frac{c^2}{G} f^2 = 4,5 \cdot 10^{27} f^2 \text{ Pa},$$

z wielkością f o wymiarze [s^{-1}], która dobrze pasuje do częstotliwości fal grawitacyjnych. Detektory typu LIGO i Virgo są czułe w szerokim zakresie częstotliwości, od około 10 Hz do paru tysięcy Hz, z maksimum czułości w okolicy 100 Hz, dla których moduł Younga $E \approx 4,5 \cdot 10^{22}$ GPa. Dla porównania, moduł Younga gumy to 0,1 GPa, nylonu od 2 do 4 GPa, drewna 10 GPa, brązu, mosiądzu, miedzi lub tytanu około 100 GPa, stali 200 GPa, a diamentu ponad 1000 GPa. Czasoprzestrzeń jest zatem 10^{19} razy sztywniejsza (mniej podatna na odształcenie) od diamentu!

Michał BEJGER

Niebo w styczniu

Rok 2020 to ostatni rok drugiej dekady XXI wieku. Można go nazwać **rokiem planet Układu Słonecznego**. Na Merkurego zawsze można liczyć na przełomie zimy i wiosny (wieczorem) oraz na przełomie lata i jesieni (rano). Niestety w tym roku półkula północna ma pecha i podczas okresów dobrej widoczności Merkury oddala się od Słońca na jakieś 19° . Na półkuli południowej jest to nawet 9° więcej w związku z czym planeta wznosi się wyżej i można ją obserwować dłużej niż na półkuli północnej. Planeta Wenus, w przeciwieństwie do roku 2019, gdy była nieobserwowalna przez ponad 9 miesięcy, już od grudnia zeszłego roku jest widoczna na niebie wieczornym, z maksymalną elongacją pod koniec marca.

Wenus przejdzie przez Plejady 4 kwietnia i podąży ku spotkaniu ze Słońcem na początku czerwca. Potem przeniesie się na niebo poranne, by już od lipca się na nim rozgościć. Wenus pozostanie widoczna przed świtem do końca roku. Dzielne zakrycie Wenus przez Księżyc będzie widoczne z obszaru Polski 19 czerwca, natomiast 3 października planeta ta zbliży się na zaledwie $5'$ do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Planeta Mars pod koniec października znajdzie się w opozycji względem Słońca i choć nie osiągnie takiej wielkości i jasności jak w roku 2018, to jej parametry zmniejszą się tylko odrobinę. Za to wysokość jej górowania zwiększy się o ponad 30° , co oznacza znacznie lepsze warunki

obserwacyjne i bez porównania wyraźniejsze obrazy w teleskopach. Jowisz pokona kolejny gwiazdozbiór w swojej wędrówce po niebie i przeniesie się do Strzelca, zajmując mniej więcej tę samą pozycję co Saturn w zeszłym roku. Natomiast sam Saturn przesunie się jakieś 10° na wschód i obie planety prawie cały sezon spędzą przedzielone dystansem od 5 do 8° . Pod koniec roku, 21 grudnia, Jowisz przejdzie zaledwie $6'$ na południe od Saturna.

W ciągu roku zdarzą się cztery zaćmienia Księżyca, niestety wszystkie półcieniowe, i to częściowe. Tylko pierwsze z nich, już w styczniu, da się obserwować z Polski w całości. Dojdzie również do dwóch zaćmień Słońca: 21 czerwca obrączkowe, widoczne z południowej i zachodniej Azji, północno-wschodniej Afryki i południowo-wschodniej Europy. Północna granica zaćmienia częściowego zahaczy o południowo-wschodni koniuszek Polski. Z samego końca rogu Bieszczad, na południowy wschód od linii Wetlina–Czarna Góra tuż po świcie przez teleskopy z odpowiednim filtrem być może uda się dostrzec delikatne wyszczerbienie południowego brzegu jego tarczy o fazie mniejszej od 1% . Drugie zaćmienie, tym razem całkowite, zobaczą mieszkańcy Argentyny i Chile 14 grudnia.

Jak zawsze na początku stycznia, Ziemia przechodzi przez peryhelium swojej orbity, a maksimum swojej aktywności osiągają **meteory z roju Kwadrantydów**. Jest to obfity, lecz krótko promieniujący rój. Maksimum jego aktywności spodziewane jest 4 stycznia po godzinie 9 naszego czasu, a więc już w dzień. Ale w poprzedzającej je nocy można spodziewać się kilkudziesięciu meteorów na godzinę, a Księżyc w okolicach I kwadry nie przeszkodzi w obserwacjach. Na koniec nocy astronomicznej, około godziny 5:45, radiant roju wznosi się na wysokości ponad 60° nad wschodnim widnokregiem, czyli warunki obserwacyjne roju są w tym roku znakomite.

Ozdobą wieczornego styczniowego nieba jest planeta **Wenus**, która w trakcie miesiąca przejdzie od środka gwiazdozbioru Koziorożca do pogranicza gwiazdozbiorów Wodnika i Ryb, powoli wznosząc się coraz wyżej. Na początku miesiąca godzinę po zmierzchu planeta zajmuje pozycję na wysokości mniej więcej 13° nad zachodnim widnokregiem, by pod koniec miesiąca o tej samej porze wznosić się 10° wyżej. W tym czasie średnica tarczy planety zwiększy się tylko z 13 do $15''$, blask z -4 do $-4,1^m$, zaś faza spadnie z 82 do 73% . Pod koniec miesiąca, 28 stycznia, 5° na południe od Wenus przejdzie Księżyc w fazie 13% .

Również pod koniec stycznia do Wenus dołączy planeta **Merkury**, dążąca do maksymalnej elongacji wschodniej 10 lutego. Planeta zacznie pojawiać się w ostatnich dniach stycznia bardzo nisko nad zachodnim widnokregiem, świecąc z jasnością -1^m ponad 25° na prawo i w dół od Wenus, która może służyć za wskazówkę do odnalezienia planety. Na lepsze warunki do dostrzeżenia Merkurego trzeba poczekać do lutego.

Na ciemnym niebie dobrze widoczne są planety **Neptun** i **Uran**. Pierwsza z planet cały miesiąc spędzi na zachód od gwiazdy λ Aqr, zbliżając się doń na $20'$. Pod koniec miesiąca, 27 stycznia, zaledwie $7'$ od Neptuna przejdzie planeta Wenus, znacznie ułatwiając jego identyfikację, a 10° pod parą planet znajdzie się sierp Księżyca w fazie 7% . Kilka godzin później Wenus przejdzie mniej niż $1'$ od λ Aqr, niestety w Polsce zbliżenie zasłoni widnokrąg. Możliwość jego obserwacji będą mieli mieszkańcy basenu Oceanu Spokojnego. W styczniu Neptun świeci blaskiem $+7,9^m$. Planeta Uran 11 stycznia zmieni kierunek ruchu na prosty, kończąc tym samym okres swojej najlepszej widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Planeta wędruje jakieś 10° na południe od najjaśniejszych gwiazd Barana. Siedem dni wcześniej 5° pod planetą przejdzie Księżyc, już w fazie 64% (I kwadra przypada 3 stycznia przed 6 rano). Jasność Urana wynosi $+5,7^m$, stąd planeta jest łatwo widoczna w lornetach i małych teleskopach.

Tarcza złotego Globu przetnie 7 stycznia gromadę gwiazd Hiday, mijając Aldebarana, najjaśniejszą gwiazdę Byka, równocześnie zwiększając fazę do 90% . Trzy dni później **Księżyc** przejdzie przez pełnię, wędrując niecały 1° od gwiazdy Wasat (δ Gem). Tej nocy Księżyc na cztery godziny wejdzie w półcień Ziemi, co u nas zaowocuje jego półcieniowym zaćmieniem. Zjawisko zacznie się o godzinie 18:07, z maksimum po godzinie 20, osiągając fazę 90% . Niestety efekt raczej nie będzie bardzo widoczny, gdyż w ciągu trwania zaćmienia część księżycowej tarczy pozostanie oświetlona przez całą tarczę Słońca. W trakcie zjawiska warto robić zdjęcia z takim samym czasem naświetlania i czułością, by potem je porównać. To chyba najlepszy sposób na ukazanie efektu takiego zaćmienia.

Pod koniec zeszłego roku maksimum aktywności osiągnęła **miryda R Leo**. W styczniu raczej nie da się jej dostrzec gołym okiem, ale powinna pozostać widoczna przez lornetki i małe teleskopy. R Leo góruje w drugiej połowie nocy i jest widoczna bardzo dobrze, jakieś 5° na zachód od Regulusa. Za to 20 stycznia prognozuje się maksimum innej słynnej mirydy, χ Cygni, znajdującej się w szyi Łabędzia. χ Cyg może znacznie przekroczyć 4^m , stając się łatwo widoczna gołym okiem. Natomiast w minimum blasku jej jasność może spaść poniżej 13 . wielkości gwiazdowej i wtedy do jej dostrzeżenia potrzebny jest całkiem spory teleskop. Niestety styczeń jest najmniej korzystnym okresem do jej obserwacji. Wieczorem, na początku nocy astronomicznej, po godzinie 18 gwiazda wznosi się na wysokości 2° i zachodzi po 21, by pojawić się ponownie około 1:30, a po 4 godzinach dobić do wysokości prawie 30° po północno-wschodniej stronie nieba. Jeśli χ Cyg zbliży się do jasności $+3^m$, wyraźnie zmieni się kształt szyi Łabędzia. Gwiazda znajduje się niecałe 7° na północ od słynnej gwiazdy podwójnej Albireo, stanowiącej dziób ptaka w gwiazdozbiorze Łabędzia.

Ariel MAJCHER

Trójwymiarowa mapa Drogi Mlecznej

Gdybyśmy chcieli sfotografować Drogę Mleczną z zewnątrz, tak jak fotografujemy inne galaktyki, to musielibyśmy wysłać statek kosmiczny na odległość co najmniej dziesiątek tysięcy lat świetlnych, ponieważ Droga Mleczna ma ponad 100 000 lat świetlnych średnicy. Jednakże po pierwsze nie dysponujemy odpowiednią technologią, a po drugie zdjęcie wysłane z takiej odległości dotarłoby do nas dziesiątki tysięcy lat później, a podróż statku do miejsca wykonania zdjęcia trwałaby znacznie dłużej. Astronomowie badający kształt i strukturę Drogi Mlecznej są więc skazani na obserwacje prowadzone jedynie z jej wnętrza.

Pomimo tych trudności wiele wiemy o Galaktyce, w której mieszkamy. Astronomowie są raczej zgodni, że Droga Mleczna jest tzw. *galaktyką spiralną z poprzeczką*, ale jeżeli chodzi o liczbę ramion spiralnych, to już takiej powszechnej zgody nie ma – są różne hipotezy na ten temat. W kwestii struktury naszej Galaktyki jest zatem jeszcze wiele do zbadania.

Galaktyki spiralne mają kształt płaskich dysków ze zgrubieniem w centrum, tak też wyobrażano sobie kształt Drogi Mlecznej do tej pory. W sierpniu minionego roku pracownicy Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Warszawskiego opublikowali wyniki siedmioletnich obserwacji, wykonanych w ramach projektu OGLE, rzucające zupełnie nowe światło na kwestię kształtu naszej Galaktyki. Wyznaczenie dokładnego położenia około 2400 gwiazd pozwoliło wykonać trójwymiarową mapę dysku galaktycznego. Przekrój tej mapy przedstawia poniższy rysunek.

Z obserwacji wynika, że galaktyczny dysk nie jest płaski. Po przeciwnych stronach Galaktyki dysk zawija się w przeciwnych kierunkach, jak kapelusz zawinięty z jednej strony do góry, a z drugiej do dołu.

Jak wyznaczono dokładne położenie tych 2400 gwiazd? Przede wszystkim nie są to zwykłe gwiazdy, ale tzw. *cefeidy*, czyli gwiazdy zmienne pewnego szczególnego rodzaju. Cefeidy są bardzo jasnymi olbrzymami. Świecą nawet 1000 razy jaśniej od Słońca.

Najważniejszą ich cechą jest to, że regularnie zmieniają jasność na skutek pulsacji, którym podlegają. Pulsacje są okresowymi zmianami wielkości gwiazdy oraz temperatury powierzchni. To, co wyróżnia cefeidy spośród innych gwiazd zmiennych, to istnienie określonej zależności pomiędzy okresem pulsacji a jasnością absolutną, odkrytej przez Henriette Leavitt w 1912 roku. Zależność ta pozwala na wyznaczenie odległości do gwiazdy. Porównując jasność obserwowaną, którą mierzy się bezpośrednio, z jasnością absolutną, którą można wyliczyć na podstawie obserwacji okresu pulsacji cefeidy, możemy wyznaczyć odległość, ponieważ wiemy, że jasność obserwowana maleje proporcjonalnie do odwrotności kwadratu odległości.

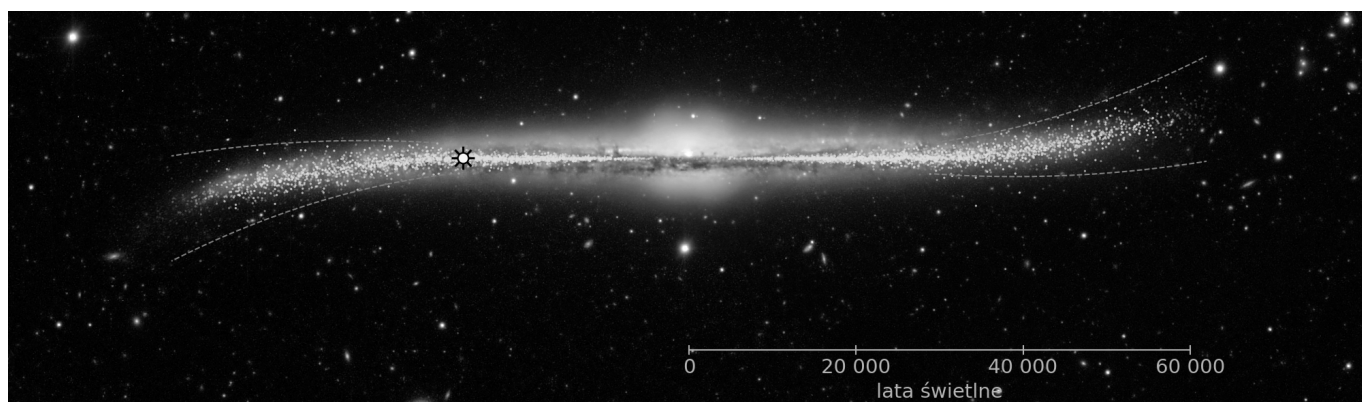
Zmniejszenie jasności obserwowanej gwiazdy może być również skutkiem przesłonięcia gwiazdy obłokami pyłu rozpraszającymi światło gwiazdy, znajdującymi się pomiędzy gwiazdą a obserwatorem. Ten efekt również został uwzględniony przez autorów odkrycia. Do oszacowania wpływu rozpraszania światła po drodze wykorzystano istniejące mapy rozkładu pyłu w Drodze Mlecznej.

Podejrzenia, że nasz galaktyczny dysk jest zakrzywiony, pojawiały się już wiele lat temu, ale pierwsza pozytywna weryfikacja tych podejrzeń stała się możliwa dzięki obserwacjom przeprowadzonym przez astronomów z OA UW, działających w ramach projektu OGLE, który jest jednym z największych na świecie przeglądów fotometrycznych nieba. W ramach projektu, działającego od 1992 roku pod kierownictwem prof. Andrzeja Udalskiego z OA UW, obserwuje się regularnie ponad dwa miliardy gwiazd.

Praca astronomów z UW [1] została opublikowana w prestiżowym czasopiśmie *Science*, a ich odkrycie było szeroko komentowane na całym świecie.

Szymon CHARZYŃSKI

[1] Dorota M. Skowron i inni: *A three-dimensional map of the Milky Way using classical Cepheid variable stars*, *Science* (2019), 365 (6452), 478–482.



Polscy nominaci do Nagrody Nobla z fizjologii i medycyny do 1953 roku (str. 11)

Nominujący profesorowie i uczelnie

**LUDWIK
HIRSZFELD**

1

1950

B. E. Witebsky

1950

J.M. Yoffey,
Erik Jopers

1948, 1949

P. Plattner, V. Prelog,
L. Ruzicka, H. Goldstein

1947

B. A. Houssay

1945

R. Flatt, H. Goldstein

1944

H. Fierz-David

1943

H. Erlenmeyer, F. Fichter

16

**TADEUSZ
REICHSTEIN**

1938-1939

Uniwersytet w Wilnie (1),
Uniwersytet w Poznaniu (3)

1936-1937

Uniwersytet Jagielloński (7),
Uniwersytet we Lwowie (7)

1934

Katolicki Uniwersytet w Leuven (1),
Uniwersytet Warszawski (16)

1932-1933

Uniwersytet w Poznaniu (1),
Uniwersytet w Wilnie (1)

1931

Uniwersytet Jana
Kazimierza we Lwowie (8)

1930

Uniwersytet Warszawski (17),
Uniwersytet w Berlinie (11)

**RUDOLF
WEIGL**

73

1928

J. Piltz, W. Szumowski, S. Ciechanowski,
S. Maziarski, L. Wacholz,
E. Foster, J. Dereux

1924

L. Kryński, S. Dzierzgowski, A. Gluziński,
J. Mazurkiewicz, F. Krzyształowicz,
N. H. Nilsson-Ehle

1914

L. Popielski, J. Prus

15

**JÓZEF
BABIŃSKI**

1918

W. Jaworski, K. Klecki, A. Rosner, J. Piltz

1914

H. Halban, A. de Mars

1911

A. Beck, W. Szymonowicz,
A. W. Gluziński, W. J. Sieradzki,

L. Popielski, H. Kadyi, S. Bądryński

**NAPOLEON
CYBULSKI**

17