



Nakład: 3500 egz.

$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$   $\pi = 3,141592...$

NR 11 (546) 2019

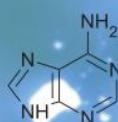
CENA 4 ZŁ VAT 5%  
PL ISSN 1770-1371-3005 | NR IND 353 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

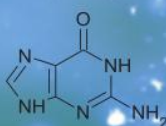
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

2 nm

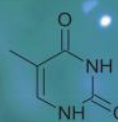
3,4 nm



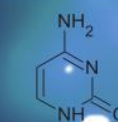
adenina



guanina



tymina






cytozyna

**Narodziny CRISPR,  
czyli jak bakteria  
zrewolucjonizowała  
genetykę**  
str. 4



## SPIS TREŚCI NUMERU 11 (546)

Wiązanie azotu – od zbrojenia do żywienia <i>Adam Wawro</i>	str. 1
Narodziny CRISPR, czyli jak bakteria zrewolucjonizowała genetykę <i>Paulina Mrozowska-Wawro</i>	str. 4
Kosmiczne kamery <i>Anna Durkalec</i>	str. 6
Zawijanie i wycinanie dźwięków <i>Radosław Kujawa</i>	str. 8
Google w łańcuchach <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 11
 Zadania	str. 13
Praktyczne, bo niepraktyczne, czyli: od teorii liczb do kryptologii <i>Tomasz Kazana</i>	str. 14
Teoria względności w smartfonie <i>Szymon Charzyński</i>	str. 16
 Nowe, niezwykle życie wieży ciśnień <i>Magdalena Fikus</i>	str. 19
Informatyczny kącik olimpijski (132): <i>XORanges</i>	str. 20
Prosto z nieba: Kosmiczne technologie Klub 44	str. 21 str. 22
Niebo w listopadzie	str. 22
Aktualności Jak szybko rozszerza się Wszechświat?	str. 24
 Potęga punktu względem okręgu <i>Bartłomiej Bzdega</i>	str. 25

### Wyniki 41. Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego

- Złote medale: **Kosma Kasprzak**, *Uwagi na temat pewnych granic występujących w teorii funkcji prawie okresowych*, XXXVIII Dwujęzyczne LO im. J. Nowaka-Jeziorańskiego w Poznaniu, opiekunem pracy był Dariusz Bugajewski, **Radosław Żak**, *Ciągi trzech kwadratów i krzywe eliptyczne*, V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie, opiekunem pracy był Grzegorz Kapustka.
- Srebrny medal: **Mikołaj Pater**, *Okrąg mixtilinear i jego własności*, Publiczne LO nr III z Oddziałami Dwujęzycznymi im. M. Skłodowskiej-Curie w Opolu, opiekunem pracy był Robert Sochacki.
- Brązowe medale: **Aleksander Bosek**, *Wybrane własności ciągów Perrina k-tego rzędu*, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie, praca bez opiekuna, **Mateusz Scharmach**, *Dwuwymiarowe ciągi Dolda*, III LO w Gdyni, opiekunem pracy był Grzegorz Graff.
- Wyróżnienie: **Adam Barański**, *O podzielności rozwiązań równania Pella*, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie, opiekunem pracy był Mariusz Skalba.

Gratulujemy wszystkim Finalistom i z zaciekawieniem wypatrujemy ich dalszych sukcesów.



**Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.  
Druk: Drukarnia Greg [www.greg-drukarnia.pl](http://www.greg-drukarnia.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski



## A jakie to ma zastosowanie?

„No dobrze, ale jakie to ma zastosowanie?” – to pytanie słyszałem wiele razy podczas rozmów ze znajomymi, którym próbowałem wytłumaczyć, czym się zajmuję. I z pewnością podobne pytania słyszą setki tysięcy naukowców na całym świecie. Nie lubimy tych pytań, bo – powiedzmy to sobie szczerze – sami czasem nie umiemy powiedzieć, czy nasza praca w ogóle ma sens. Można zapytać szerzej – czy w ogóle nauki teoretyczne mają sens? Czy nie można byłoby wykorzystać możliwości setek tysięcy wykształconych i inteligentnych osób dużo lepiej niż do dłubania przez całe życie w jakichś egzotycznych pytaniach – wydumanych i niespecjalnie związanych z funkcjonowaniem innych ludzi?

Niniejszy numer *Delty* stanowi próbę odpowiedzi, choćby częściowej, na to pytanie. Wiele społeczeństw zadaje sobie trud utrzymywania rzeszy naukowców-darmozjadów pracujących za pieniądze podatnika nad abstrakcyjnymi problemami. Powinna być w tym jednak jakaś myśl. Osobiście uważam, że można ją dostrzec dopiero, gdy się spojrzy z długoterminowej perspektywy na życie społeczeństw. Nasz świat jest tak bardzo wewnętrznie powiązany, że nieraz teoretyczne zrozumienie pewnego zjawiska dopiero po dekadach daje postęp w zupełnie innej dziedzinie. Jakież przykłady? Proszę bardzo, w numerze piszemy o tym, jak proces (Habera) syntezy amoniaku, obserwacje astronomiczne, transformata Fouriera, teoria łańcuchów Markowa, szczególna i ogólna teoria względności, geometria nieeuklidesowa, badanie genomu bakterii oraz teoria liczb przyczyniły się do rozwoju dziedzin często pozornie z nimi niezwiązanych. A rozwój ten, nieraz przechodzący wszelkie oczekiwania, nastąpił w tak ważnych i przydatnych obszarach, jak: rolnictwo, konstrukcja kamer CCD, obróbka muzyki, konstrukcja wyszukiwarki Google, technologia GPS, genetyka i bezpieczeństwo w informatyce. Zapraszamy do lektury!

Wojciech CZERWIŃSKI

## Wiązanie azotu – od zbrojenia do żywienia

Adam WAWRO\*

\* Uniwersytet Stanforda

Azot to pierwiastek będący jednym z podstawowych elementów budowy wszystkich żywych organizmów. Bez azotu nie istniałyby dwa kluczowe elementy skomplikowanego procesu życia: DNA, odpowiedzialne za przechowywanie i przenoszenie informacji genetycznej, oraz białka, będące mikroskopijnymi komórkowymi maszynami. Człowiek, podobnie jak inne zwierzęta, przyswaja azot głównie związany w postaci białek. Trawienie białek powoduje uwalnianie ich składników budulcowych, aminokwasów, z których każdy zawiera przynajmniej jeden atom azotu. Aminokwasy mogą być przez organizm powtórnie wykorzystane, bądź zostać rozłożone na jeszcze mniejsze części. Zapotrzebowanie organizmów żywych na azot jest stabilne, więc przy odpowiedniej diecie pierwiastka tego nie brakuje. Z odzyskiwaniem i przetwarzaniem przydatnych substancji natura radzi sobie doskonale. Skąd jednak związki azotu może do swoich celów pozyskiwać człowiek? Zapotrzebowanie na nie nie jest tak stałe i przewidywalne, jak na substancje odżywcze

w ewoluującym od milionów lat organizmie; jedno wydarzenie historyczne lub odkrycie naukowe może gwałtownie zwiększyć popyt na umiarkowanie dotychczas interesującą substancję.

Historycznym przykładem wzrostu zapotrzebowania na związki azotu jest wynalezienie i rozwój broni palnej. W przeciwieństwie do broni białej, broń palna wymaga użycia materiału wysokoenergetycznego, na przykład czarnego prochu, którego jednym z głównych składników jest saletra potasowa, inaczej azotan(V) potasu – sól kwasu azotowego(V). Kwas azotowy(V) jest z kolei używany przy produkcji bardziej współczesnych materiałów wysokoenergetycznych: nitrocelulozy, nitrogliceryny czy trotylu. Związki azotu, w tym sole kwasu azotowego oraz amoniaku, mają jednak drugie, zupełnie odmienne oblicze – są podstawowymi składnikami nawozów mineralnych, preparatów dostarczających roślinom niezbędne składniki odżywcze, powszechnie używanych do zwiększenia wydajności upraw rolnych.

## Czym się różni azot od ... azotu?

Azotany występują naturalnie w skorupie ziemskiej w postaci minerałów. Problem w tym, że ich rozmieszczenie na świecie nie jest równomierne, co może zostać im wybaczone, gdyby nie fakt, że zdecydowały się występować z dala od ośrodków przemysłowych, które chciałyby je wykorzystać. W dodatku minerały nie są surowcami odnawialnymi; prędzej czy później ich złoża będą wyczerpane, a procesów geologicznych, które doprowadziły do ich powstania, nie da się przyspieszyć. Sprowadzanie potrzebnych minerałów z odległych i nielicznych miejsc na świecie wiąże się z dodatkowym, praktycznym problemem: możliwością dyktowania cen, bądź wstrzymaniem dostaw pod presją sił politycznych. W takiej sytuacji znalazło się Cesarstwo Niemieckie na przełomie XIX i XX wieku. Wobec ograniczonego dostępu do światowych złóż saletry, niezbędnej do wytwarzania amunicji oraz nawożenia upraw rolnych, niemieccy naukowcy stanęli przed zadaniem znalezienia alternatywnej drogi otrzymywania pożądanych azotanów.

Szczęśliwie Cesarstwo Niemieckie – podobnie jak wszystkie inne cesarstwa, sułtanaty, republiki i federacje na naszej planecie – miało dostęp do praktycznie nieograniczonych źródeł pewnego związku azotu. W dodatku takiego, którego nie ograniczają granice państw, cła i limity: związku azotu z azotem, czyli azotu gazowego, głównego składnika atmosfery. Żeby uniknąć nieporozumień, ustalmy, czym się różni jeden azot od azotu drugiego: atomowy azot, oznaczany jako N, jest substancją nieistniejącą w przyrodzie; atom azotu może występować jedynie w połączeniu z drugim atomem azotu, tworząc stabilny azot cząsteczkowy, N<sub>2</sub>, bądź w postaci związków chemicznych z innymi pierwiastkami: od bardzo prostych połączeń z trzema atomami wodoru, jako amoniak, po złożone białka, jak tytyna, której każda cząsteczka składa się z ponad pół miliona precyzyjnie ułożonych względem siebie atomów węgla, wodoru, tlenu, azotu i siarki. Jednak niezwykła stabilność gazowego azotu powoduje zasadniczy problem: w jaki sposób przekształcić ten powszechny surowiec w coś bardziej przydatnego?

## Energochłonne próby ujarznienia azotu

W przeciwieństwie do tlenu, swojego atmosferycznego partnera biorącego udział w niezliczonych reakcjach spalania, gazowy azot nie reaguje z większością substancji po podgrzaniu w płomieniu palnika. Przeprowadzenie reakcji chemicznej z azotem nie jest jednak niewykonalne – trzeba znaleźć odpowiednio reaktywnego partnera lub dostarczyć reakcji znacznie więcej energii.

Tym drugim tropem poszli dwaj Norwegowie, Kristian Birkeland i Samuel Eyde, którzy na początku XX wieku opracowali metodę przekształcania mieszaniny azotu i tlenu w kwas azotowy(V). W ich procesie gazowy azot i tlen przepuszczane były przez łuk elektryczny, w którym w niewielkim stopniu reagowały ze sobą,

tworząc tlenek azotu(II). Ten półprodukt był od razu utleniany do tlenku azotu(IV), a następnie reagował z wodą, tworząc pożądany kwas azotowy(V). Szkopuł w tym, że proces wymagał ciągłego podtrzymywania łuku elektrycznego o temperaturze ponad 3000 °C. W dodatku całość przepływających gazów musiała być podgrzana do ponad 1000 °C, podczas gdy jedynie niewielka ich część faktycznie tworzyła pożądany produkt. Aby uruchomić produkcję kwasu azotowego(V) w dużej skali, Birkeland i Eyde musieli wybudować elektrownię wodną na wodospadzie w Svelgfossen, w południowej Norwegii, zapewniającą im stały dostęp do taniego i pewnego źródła energii elektrycznej. Wyznawcy byli świadomi wad swojego procesu, ale w opisującym proces technologiczny artykule, opublikowanym w 1909 roku, wyrazili przekonanie, że jakiegokolwiek ulepszenia ich metody by nie powstały w przyszłości, wszystkie będą najpewniej wymagać ciągłego dostarczania dużych ilości energii.

Inną drogę obrało dwóch niemieckich chemików, Adolph Frank i Nikodem Caro. W opracowanym przez nich procesie technologicznym gazowy azot był przepuszczany nad gorącym karbidem, czyli węglikiem wapnia. Produktem tej reakcji był cyjanamitek wapnia, stały materiał, który w reakcji z wodą uwalnia amoniak, związek azotu i wodoru. Dalej już było z górki: od 1902 roku znano metodę pozwalającą na utlenienie amoniaku do kwasu azotowego(V). Proces Franka i Caro wymagał dostarczenia energii na początku reakcji; po wstępnym ogrzaniu reaktora do 1000 °C uwalniana w procesie energia wystarczała do podtrzymywania rozpoczętej reakcji. Z tego punktu widzenia metoda Franka i Caro miała przewagę nad konkurencyjnym, wymagającym ciągłego dostarczania energii procesem Norwegów. Problemem był jednak kluczowy surowiec, węgiel wapnia, który nie występuje w naturze. Należało go wytworzyć w – a jakże – energochłonnym procesie stapiania dwóch powszechnie dostępnych surowców, wapna i koksu.

## Fritz Haber kontra termodynamika chemiczna

Równoległe nad bardzo eleganckim rozwiązaniem problemu wiązania gazowego azotu pracował inny niemiecki chemik, Fritz Haber. Jego pomysł opierał się na bepośredniej reakcji gazowego azotu, obecnego w powietrzu, i gazowego wodoru, produktu gazyfikacji węgla. W wyniku reakcji tych dwóch gazów powstawał amoniak:



Obliczenia termodynamiczne wskazywały, że pod ciśnieniem atmosferycznym i w temperaturze pokojowej reakcja azotu z wodorem jest samorzutna; w takiej mieszaninie powinien spontanicznie pojawiać się amoniak. I tak z pewnością było, choć ciężko to doświadczalnie stwierdzić, ponieważ we wspomnianych warunkach reakcja ta zachodzi bardzo, bardzo powoli. Podstawową, znaną od dawna metodą przyspieszania reakcji chemicznych jest ogrzanie mieszaniny reakcyjnej. I rzeczywiście, azot i wodór ogrzane do wysokich temperatur tworzą amoniak znacznie szybciej niż

w temperaturze pokojowej. Kłopot w tym, że reakcja wodoru z azotem jest odwracalna: amoniak, oczekiwany produkt reakcji, może rozkładać się z powrotem, do wodoru i azotu. I również ta odwrótka, niepożądana reakcja zachodzi szybciej wraz ze wzrostem temperatury. Gdzie w tym sens, może ktoś pomyśleć – z jednej strony ciągle azot i wodór reagują, tworząc amoniak, a z drugiej amoniak w kółko rozpada się na wodór i azot... Ma to jednak ręce i nogi.

Reakcje odwracalne, czyli przebiegające w obie strony, mają to do siebie, że dla danych warunków reakcji istnieje pewna równowaga między ilością reagentów po jednej stronie, w tym przypadku wodoru i azotu, i ilością reagentów po stronie drugiej, czyli amoniaku. W niskiej temperaturze preferowanym produktem jest amoniak, co oznacza, że jeżeli zostawilibyśmy mieszaninę azotu i wodoru odpowiednio długo, znaczna większość gazów początkowych utworzyłaby amoniak. Podniesienie temperatury takiej reakcji znacząco ją przyspiesza, ale jednocześnie, w przypadku niektórych reakcji, w tym reakcji omawianej tutaj, przesuwa ich równowagę w niekorzystną dla nas stronę: azot reaguje z wodorem szybciej, ale produkt reakcji, amoniak, rozpada się jeszcze szybciej i w miarę wzrostu temperatury dysproporcja ta rośnie. Żeby osiągnąć zamierzony cel, należało znaleźć pewien kompromis między wydajnością a szybkością procesu. Niestety w przypadku reakcji azotu z wodorem nie było prosto znaleźć ten złoty środek – każda temperatura pozwalająca na w miarę szybkie ustalenie równowagi była nie do zaakceptowania ze względu na jej niekorzystne położenie.

Część problemu została rozwiązana z pomocą katalizatorów, czyli materiałów, które nie zużywają się w trakcie reakcji i nie zmieniają jej równowagi, ale zwiększają szybkość jej ustalania. Znane Haberowi katalizatory, które mogły przyspieszyć otrzymywanie amoniaku, miały jednak dość wysoką temperaturę aktywacji; w temperaturach niższych po prostu nie działały, a jak pamiętamy, dla wydajności procesu otrzymywania amoniaku tym lepiej, im niższa temperatura. Haber zauważył, że w 1000 °C i w obecności katalizatora żelazowego równowaga reakcji zachodzi satysfakcjonująco szybko, ale w mieszaninie gazów pożądanym amoniak stanowi niewielki ułamek procenta. Obniżenie temperatury pozwalało zwiększyć ilość produktu, ale dezaktywowało katalizator i przez to dramatycznie zmniejszało szybkość reakcji. I tak źle, i tak niedobrze. Zniechęcony takim wynikiem badań Haber porzucił na pewien czas pracę nad swoim projektem. Rozwiązaniem tego problemu mogło być zwiększenie ciśnienia, w jakim zachodziła reakcja.

Ponieważ z danej objętości azotu i trzech równych objętości wodoru powstają dwie objętości gazowego amoniaku, w wyniku zachodzenia reakcji w pożądanym kierunku całkowita objętość mieszaniny malała. A na równowagę takich reakcji korzystnie wpływa zwiększenie ciśnienia, zgodnie z regułą sformułowaną przez Le Chateliera i Brauna. Jednak w pierwszej dekadzie XX wieku wysokociśnieniowe procesy w fazie gazowej nie były dobrze opanowane.

Trzy lata po zawieszeniu projektu, dzięki pomocy brytyjskiego chemika Roberta Le Rossignola, Haber wznowił jednak eksperymenty, tym razem mając do dyspozycji ciśnieniowy reaktor, pozwalający na sprężenie wodoru i azotu do 200 atmosfer i utrzymanie takiego ciśnienia podczas zachodzenia procesu. Pod tak wysokim ciśnieniem udało się przesunąć równowagę nieco w pożądanym kierunku amoniaku. Jednak dopiero znalezienie nowego katalizatora, aktywnego w temperaturze poniżej 600 °C, pozwalało osiągnąć wystarczającą wydajność, aby komercjalizacja procesu była opłacalna. Dzięki szeregowi ulepszeń proces, który jeszcze kilka lat wcześniej wydawał się beznadziejnym przypadkiem, pozwalał uzyskać amoniak z gazowego azotu z powietrza z oszałamiającą, jak na owe czasy, wydajnością 5%. Taki proces był już interesujący dla instytucji przemysłowych i nadawał się do prac nad powiększeniem skali i dalszej optymalizacji warunków. Kolejne badania nad katalizatorami pozwoliły zwiększyć wydajność procesu do 15%, a dzięki zastosowaniu systemu zwracania nieprzereagowanego wodoru i azotu do reaktora, całkowita wydajność otrzymywania amoniaku przekroczyła 95%.

### Nowy rozdział w gospodarce żywieniowej świata

Od uruchomienia wielkoskalowej produkcji w 1913 roku proces Habera zaczął wypierać konkurencyjne procesy wiązania azotu z powietrza – najpierw energochłonną metodę Birkelanda i Eyde'a, a następnie węglkowy proces Franka i Caro. Dwadzieścia lat później był już główną metodą otrzymywania związków azotu z powietrza. Jednocześnie gwałtownie zaczęła rosnąć globalna produkcja związków azotu, co przełożyło się na upowszechnienie nawozów mineralnych – na początku w krajach rozwiniętych, a następnie na całym świecie. W ciągu XX wieku zużycie nawozów azotowych, w przeliczeniu na czysty azot, wzrosło z niecałego pół miliona do prawie 90 milionów ton. Skutkiem tego było znaczące zwiększenie wydajności upraw rolnych na całym świecie, wzrost dostępności żywności i możliwość utrzymania rosnącej populacji na całej planecie.

Proces Habera, po ponad stu latach od opracowania, jest nadal powszechnie stosowany. Odpowiada obecnie za praktycznie całą globalną produkcję amoniaku, który z kolei jest kluczowym surowcem do produkcji innych związków azotu; w 2017 roku wyprodukowano na świecie ponad 150 milionów ton amoniaku. Dotychczas nie znaleziono prostszej i tańszej metody wiązania azotu atmosferycznego. Fascynująca historia tego wynalazku pokazuje, w jaki sposób badania naukowe prowadzone w obrębie jednej dziedziny mogą zrewolucjonizować inne, pozornie niepowiązane gałęzie gospodarki.



# Narodziny CRISPR, czyli jak bakteria zrewolucjonizowała genetykę

\* Uniwersytet Stanforda

Paulina MROZOWSKA-WAWRO\*



## Rozwiązanie zadania M 1618.

Odpowiedź: Wszystkie nieparzyste liczby  $n$ .

Z warunków zadania wynika, że każda świeczka wypala się po całkowitej liczbie godzin, powiedzmy  $m$ . Wówczas łączny czas (w godzinach) płonięcia wszystkich świeczek to z jednej strony  $m \cdot n$ , a z drugiej

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

skąd  $m = \frac{n+1}{2}$  i w konsekwencji, aby opisana sytuacja mogła mieć miejsce,  $n$  musi być liczbą nieparzystą.

Z drugiej strony dla każdej nieparzystej liczby  $n$ , powiedzmy  $n = 2k + 1$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą nieujemną, można tak zaplanować, które świeczki będą zapalone danego dnia, aby warunki zadania zostały spełnione. Przykładowo, jeśli ponumerujemy świeczki od 1 do  $2k + 1$ , to możemy

- dla  $i \leq k$ :  $i$ -tego dnia zapalić wszystkie świeczki o numerach od 1 do  $i$ ;
- dla  $i \geq k + 1$ :  $i$ -tego dnia zapalić wszystkie świeczki o numerach od  $n - i + 1$  do  $n$ .

Uważny Czytelnik pamięta zapewne słynne powiedzenie przypisywane Albertowi Einsteinowi: „Szaleństwem jest robić wciąż to samo i oczekiwać różnych rezultatów”.

Mało jest dziedzin nauki tak poruszających wyobraźnię, jak inżynieria genetyczna. Modyfikacje genetyczne przewijały się w literaturze już w XIX wieku, na długo przed rozwojem współczesnej genetyki. Początkowo literackie mutacje wywoływane były przez tajemnicze chemikalia, zabiegi chirurgiczne lub radioaktywność. Wraz z rozwojem wiedzy na temat budowy DNA fikcyjne zmiany w genach stały się bardziej metodyczne, a spontaniczne mutacje zaczęły wypierać inżynieria genetyczna. Jednak z powodu braku faktycznych narzędzi pozwalających na wycinanie i precyzyjne wklejanie fragmentów DNA możliwość stworzenia współczesnego potwora Frankensteina pozostawała w bezpiecznej sferze wyobraźni. Do czasu, gdy kilka lat temu w ręce biologów wpadła nowa technologia rodem z filmów science fiction o tajemniczo brzmiącej nazwie – CRISPR.

CRISPR (*Clustered Regularly Interspaced Short Palindromic Repeats*), zanim została tajną bronią bioinżynierów, była prostym naturalnie występującym mechanizmem obrony bakterii przed patogenami. W dużym uproszczeniu: zaatakowana przez wirusa bakteria wbudowuje fragmenty jego DNA do swojego. Te wbudowane fragmenty służą jako baza informacji o wirusach, z którymi bakteria miała już styczność. Gdy do wnętrza bakteryjnej komórki ponownie wnika ten sam wirus, bakteria rozpoznaje go i niszczy poprzez rozcięcie jego nici DNA w miejscu zapisanym wcześniej w bazie. Proste, a śmiertelnie efektywne.

Odkąd w 2012 roku zespół badaczy z Uniwersytetu Technologicznego Massachusetts (MIT) pokazał, że CRISPR może być w prosty sposób wykorzystany do edycji ludzkiego DNA, w środowisku naukowym rozpułała się burza, która trwa do dzisiaj. Laboratoria na całym świecie zaczęły prześcigać się w wymyślaniu nowych zastosowań tej techniki. Publikacje i patenty pojawiały się jak grzyby po deszczu. Do końca 2018 roku ukazało się ich ponad 10 000 (przed 2012 była ich niespełna setka). Wybuchło zainteresowanie wykorzystaniem CRISPR w badaniach klinicznych i rolnictwie, ale pojawił się też niepokój wynikający z oferowanej przez nią potencjalnej możliwości tworzenia dzieci „na zamówienie”.

Mimo że rewolucja CRISPR wybuchła praktycznie z dnia na dzień, sama metoda ma za sobą ponad 25 lat żmudnych badań, obfitujących częściej w szczęśliwe zbiegi okoliczności niż skrupulatnie budowane hipotezy. Jej historia rozpoczyna się w małym hiszpańskim porcie Santa Pola, gdzie na słonych mokradłach mieszka mały kuzyn bakterii i pierwszy bohater CRISPR-owej rewolucji, archeon *Haloferox mediterranei*. Niezwykły wpływ soli na zachowanie tego organizmu skłonił młodego doktoranta Francisco Mojica do przeanalizowania jego materiału genetycznego. Mojica odkrył w nim intrygujące struktury – sekwencje regularnie oddalonych krótkich powtórzeń DNA (nazwane później przez niego CRISPR). Z wpływem soli nie miały one nic wspólnego, ale zafascynowały młodego Hiszpana na tyle, że poświęcił im kolejne dziesięć lat swoich badań. W tym czasie udało mu się odkryć podobne struktury u ponad dwudziestu różnych gatunków mikrobów, co jednoznacznie wskazywało, że mają one jakąś istotną, chociaż wciąż nieznaną funkcję. Olśnienie przyszło równie nieoczekiwanie, jak samo odkrycie. Pewnego popołudnia Mojica przeglądał bazy danych, porównując sekwencje jego „CRISPR-owych powtórzeń” z sekwencjami DNA innych organizmów, co oczywiście robił już wcześniej milion razy, bez rezultatu. Na szczęście słynne powiedzenie Einsteina tym razem się nie sprawdziło i wciąż rozszerzana baza danych wygenerowała nowy wynik. Fragment analizowanego przez Mojicę DNA pałeczki okrężnicy zgadzał się dokładnie z DNA jednego z bakteryjnych wirusów. Po długim tygodniu przekopywania baz danych i 4500 sekwencji później Mojica miał swoją odpowiedź – tajemnicze powtórzenia okazały się systemem obronnym bakterii, prokariotycznym układem odpornościowym.



### Rozwiązanie zadania F 987.

Rozważmy staczanie walca (belki) po równi (pochylni), gdy nie występuje poślizg. W każdej chwili tworząca powierzchni walca stykająca się z równią jest (chwilową) osią obrotu. Obrót walca wokół tej osi opisuje równanie:

$$I\epsilon = mgR \sin(\alpha),$$

gdzie  $I$  oznacza moment bezwładności walca względem jednej z krawędzi bocznych walca (chwilowej osi obrotu),  $m$  jest masą walca,  $\epsilon$  jego przyspieszeniem kątowym, zaś  $\alpha$  kątem nachylenia równi. Zgodnie z twierdzeniem Steinera, dla walca o promieniu  $R$ ,  $I = I_0 + mR^2$ , przy czym  $I_0 = mR^2/2$ . Gdy nie występuje poślizg, przyspieszenie  $a$  ruchu postępowego wzdłuż równi spełnia warunek:

$$a = \epsilon R.$$

Z drugiej strony, zgodnie z drugą zasadą dynamiki:

$$ma = mg \sin(\alpha) - T,$$

gdzie  $T$  oznacza siłę tarcia statycznego zapobiegającą brak poślizgu, a  $mg \sin(\alpha)$  jest składową siły ciężkości wzdłuż równi. Możemy teraz wyznaczyć wartość siły tarcia statycznego:

$$T = \frac{I_0 mg \sin(\alpha)}{I_0 + mR^2} \leq f mg \cos(\alpha),$$

gdzie prawa strona nierówności określa maksymalną wartość siły tarcia statycznego zapobiegającego poślizgowi. Ostatecznie otrzymujemy, że staczanie walca bez poślizgu odbywa się, gdy:

$$\operatorname{tg}(\alpha) \leq 3f = 1,74,$$

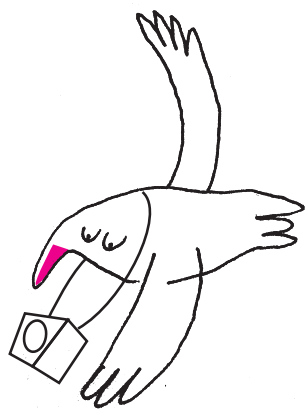
co odpowiada ograniczeniu kąta do  $60,1^\circ$ .

Po opublikowaniu odkrycia przez Mojicę coraz więcej naukowców zaczęło interesować się tematem CRISPR, ale dokładne opisanie jego mechanizmu zajęło im kolejne siedem lat. W tym czasie odkryto nie tylko, które białko jest odpowiedzialne za rozcinanie wirusowego DNA w systemie CRISPR, ale też, że naturalny system można przeprogramować tak, aby jego celem było DNA ssaków. Powoli zaczęła docierać do badaczy, że przy odrobinie wysiłku i twórczej inwencji CRISPR może być zaadaptowany do edycji ludzkich genów.

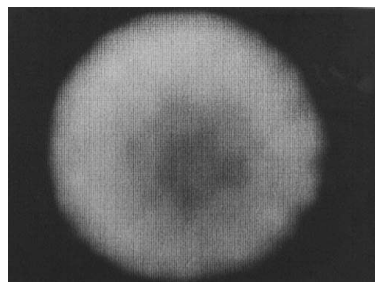
Inwencji zdecydowanie nie brakowało Fengowi Zhangowi, młodemu bioinżynierowi z MIT. Zhang już od dawna badał dostępne ówczesne metody manipulacji DNA. Kilka z nich z powodzeniem wykorzystywał w komórkach zwierzęcych, jednak wszystkie były bardzo pracochłonne i nieefektywne. Zhang po raz pierwszy usłyszał o CRISPR podczas seminarium wydziałowego i momentalnie uległ fascynacji. Następnego dnia poleciał na konferencję naukową do Miami, ale nie pojawił się na żadnym wykładzie. Zamiast tego siedział zamknięty w hotelowym pokoju i pochłaniał CRISPR-ową literaturę. Kiedy po tygodniu wrócił do swojego laboratorium w Bostonie, natychmiast zabrał się do pracy, a po roku skrupulatnych badań i optymalizacji stało się to, na co wszyscy czekali – powstała pierwsza ludzka komórka wyedytowana techniką CRISPR. Rewolucja się rozpoczęła.

Co takiego sprawia, że CRISPR bije na głowę wszystkie inne metody edycji DNA? Przede wszystkim jej koszt i łatwość użycia. CRISPR jest tak prosta, że nie potrzeba do niej nawet laboratorium. Nie żartuję; zestaw do domowego użytku jest już w sprzedaży. Za jedyne 159 dolarów dostajesz go prosto do domu, wkładasz do lodówki pomiędzy jajka i karton z mlekiem, a w wolnej chwili robisz bakterie mutanty na własnym stole kuchennym. Ponadto CRISPR, w przeciwieństwie do wcześniejszych technik, pozwala wziąć na cel niemal dowolny fragment DNA i przeciąć go z bardzo wysoką wydajnością, w kilku miejscach jednocześnie. W praktyce oznacza to, że można przeciąć nić DNA, usunąć z niej niechcianą sekwencję, a następnie zastąpić ją inną. To wszystko sprawia, że CRISPR jest potencjalnym kluczem do wyeliminowania chorób dziedzicznych, powstrzymania epidemii, stworzenia upraw zdolnych do przetrzymania najgorszych zmian klimatycznych, szykowanych dla nas przez globalne ocieplenie, i wiele więcej.

Jednak CRISPR ma też swoją ciemną stronę. Jennifer Doudna, jedna z pionierek badań nad CRISPR, opisuje w swojej książce „Edycja genów. Władza nad ewolucją” swój nawracający koszmar. W śnie jest proszona o wytłumaczenie metody działania CRISPR pewnej osobie czekającej na nią w pokoju obok. Gdy wchodzi do pokoju, zszokowana widzi siedzącego przy stole Adolfa Hitlera. Hitler wyciąga do niej rękę i mówi „Chciałbym lepiej zrozumieć zastosowania i implikacje tej fascynującej techniki, którą stworzyłaś...”. Sami twórcy zdają sobie sprawę, że ich dziecko w nieodpowiednich rękach może narobić dużych szkód. Największe kontrowersje wzbudza możliwość manipulacji genetycznych na ludzkich embrionach. Gdy w 2015 roku chińscy naukowcy po raz pierwszy użyli CRISPR do edycji DNA zapłodnionych komórek jajowych, to mimo że zmodyfikowane komórki nigdy nie zostały wszczepione do macicy, świat naukowy zgodził się, że zaczynamy stąpać niebezpiecznie blisko zakazanych granic etycznych. Na ich przekroczenie nie trzeba było długo czekać. Pod koniec 2018 roku Chiński bioinżynier He Jiankui ogłosił narodziny pierwszych dzieci zmodyfikowanych za pomocą CRISPR. Bliźniaczki, których ojciec jest nosicielem HIV, urodziły się z wyciętym genem odpowiedzialnym za wnikanie wirusa do organizmu, co ma im zapewnić odporność na chorobę. Eksperyment He spotkał się z gorącą krytyką międzynarodowej społeczności naukowej, a Chiński rząd wszczął dochodzenie w tej sprawie. Ponieważ modyfikacje genetyczne w Chinach nie są jasno regulowane, nie jest jeszcze jasne, jakie prawa złamał He, ale zarówno rząd, jak i uniwersytet, na którym pracował, zgadzają się, że dopuścił się poważnego naruszenia etyki i standardów akademickich. W odpowiedzi na niepokojące wieści z Chin Światowa Organizacja Zdrowia rozpoczęła prace nad skuteczną metodą patrzenia na ręce wszystkim badaczom prowadzącym jakiegokolwiek modyfikacje genetyczne na ludzkich komórkach rozrodczych.



Każda płyta fotograficzna miała rozmiar 36 cm × 36 cm i mogła zarejestrować duży obszar nieba o rozmiarze ok. 36 stopni kwadratowych (dla porównania Księżyc na niebie zajmuje około 0,2 stopnia kwadratowego). Każdy region nieba został sfotografowany dwukrotnie, raz przy użyciu płytki czułej na kolor czerwony (Kodak 103a-E), a raz czułej na niebieski (Kodak 103a-O). Pozwoliło to na zarejestrowanie koloru każdego z obserwowanych obiektów.



Pierwsze astronomiczne zdjęcie wykonane kamerą CCD w 1976 roku (Fred Landauer, Larry Hovland i James R. Janesick), przedstawiające Urana. Planeta w tamtym czasie była zwrócona biegunem w kierunku Ziemi. Ciemniejszy obszar w środku przedstawia, wcześniej niemożliwe do obserwacji, chmury metanu otaczające biegun planety. Źródło: *Scientific Charge-Coupled Devices*, James R. Janesick

## Kosmiczne kamery

Anna DURKALEC

Brzmi jak hasło reklamowe, i w dodatku to prawda. Urządzenia, o których mowa, znajdują się wszędzie tam, gdzie chcemy uchwycić obraz. Od teleskopów kosmicznych poprzez wyszukane aparaty cyfrowe po kamerki w laptopach i telefonach komórkowych. Zawdzięczamy im zapierające dech w piersiach zdjęcia odległych mgławic i galaktyk (ostatnio nawet czarnych dziur), artystyczne fotoreportaż z Timbaktu i... łożenkowe selfie. Kamery CCD (*charged-coupled device*) i CMOS (*complimentary metal-oxide-semiconductor*), bo o nich mowa, zrewolucjonizowały fotografię. Ich twórcy, Willard S. Boyle i George E. Smith, w 2009 roku otrzymali Nagrodę Nobla z fizyki. A wszystko zaczęło się od tego, że astronomowie chcieli obserwować więcej galaktyk.

### Wydajniejsza metoda obserwacji

W 1839 roku Louis Jacques Mande Daguerre wykonał pierwsze w historii zdjęcie księżyca. Nie wyszło ono zbyt dobrze, było niewyraźne i prześwietlone. Dało jednak początek astrofotografii. Ta z kolei pozwoliła astronomom na rzetelny zapis obserwacji niezależny od ich umiejętności artystycznych. Możliwe było udokumentowanie wyglądu Księżyca, Słońca (w szczególności plam słonecznych) i planet. Ale na naszym Układzie Słonecznym Wszechświat się przecież nie kończy. Astronomowie chcieli zobaczyć, co jest dalej. Szybko zorientowano się więc, że wydłużenie czasu naświetlania umożliwia obserwację tego, co wcześniej było niewidoczne – uchwycono obraz gwiazd, mgławic i galaktyk, emitujących zbyt mało światła dla ludzkiego oka.

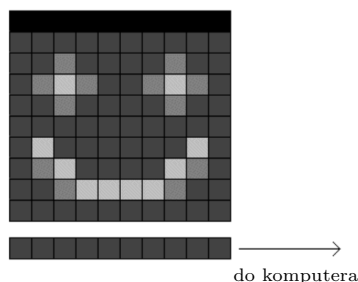
W miarę rozwoju technologii podjęto próby skatalogowania jak największej ilości słabych obiektów. W 1948 roku rozpoczęto obserwacje w ramach *The Palomar Observatory Sky Survey* (POSS) – 10-letniego przeglądu całego nieba, którego wynikiem były zdjęcia nieba uwiecznione na 1872 płytach fotograficznych. Obserwacje były niesamowitym sukcesem, ale... pojawił się problem. Astronomowie zostali dosłownie zalani danymi – konkretnie 89 milionami obiektów (jak się okazało po cyfryzacji zdjęć), które trzeba było skatalogować ręcznie, po prostu przeglądając zdjęcia. Nie był to jedyny problem. Wykorzystanie płyt fotograficznych miało również inne technologiczne ograniczenia. Aby uzyskać zdjęcia słabszych obiektów, konieczny był bardzo długi czas naświetlania. Poza tym płyty zajmowały dużo miejsca, były drogie i jednorazowego użytku.

A astronomowie chcieli więcej. Krótco potem pojawiły się plany wysłania teleskopów na orbitę okołozemską, a tam wykorzystanie i wymiana klisz fotograficznych byłaby... no cóż, problematyczna. Stało się więc jasne, że aby móc robić większe i dokładniejsze przeglądy nieba, potrzebna będzie lepsza metoda rejestracji światła. I taka pojawiła się w 1970 roku, gdy w trakcie 5-minutowego wystąpienia konferencyjnego przedstawiono pierwszy detektor CCD, jednocześnie sucho stwierdzając, że może zostać wykorzystany do robienia zdjęć. Szybko zaadaptowano i rozpoczęto ulepszanie przetworników CCD do obserwacji astronomicznych, mimo że na początku charakteryzowały się gorszą rozdzielczością i mniejszym obszarem detekcji w porównaniu z płytami fotograficznymi. Detektory CCD miały jednak zasadniczą przewagę nad tradycyjną fotografią, dobrze radziły sobie z rejestrowaniem słabego promieniowania – były superczułe.

Już w 1976 roku, po raz pierwszy w historii, użyto kamery CCD do obserwacji astronomicznych, wykonując zdjęcie Urana (na marginesie). Astronomom opadła szczena... Kontrast zdjęcia, jak na tamte czasy, był niesamowity! A wszystko dzięki temu, że kamera CCD była czuła na słabe promieniowanie w bliskiej podczerwieni (NIR). Wkrótce nowy rodzaj detektora zaczął ustanawiać rekordy w obserwacjach najciemniejszych i najdalszych obiektów astronomicznych, takich które dalece wykraczały poza możliwości najczulszych filmów i płyt fotograficznych. Astronomia zmieniła się na zawsze. Technologia okazała się na tyle skuteczna, że NASA zdecydowała o zastosowaniu superczułej technologii CCD w Kosmicznym Teleskopie Hubble'a, co w rezultacie przyczyniło się do jej globalnego rozpowszechnienia. Ostatecznie ciągly rozwój kamer CCD



Kamery CCD zmieniały się w bardzo szybkim tempie. Na przykład w ramach polskiego projektu OGLE (*Optical Gravitational Lensing Experiment*) każda z czterech faz projektu wiązała się z zastosowaniem coraz lepszych detektorów. W krótkim odstępie czasu, pomiędzy 2001 a 2009 rokiem, kamera CCD była zmieniana trzykrotnie: z pojedynczej matrycy o rozmiarach  $2048 \times 2049$  piksela i z ponad 2-minutowym czasem sczytywania obrazu do kamery składającej się z mozaiki 32 czipów, o rozmiarach  $2048 \times 4096$  każdy, umożliwiającą jednoczesną obserwację  $1,4$  stopnia kwadratowego nieba (około 7 tarcz Księżyca), z rozdzielczością  $0,26$  arcsec/pixel i 20-sekundowym czasem sczytywania obrazu.



Schemat matrycy CCD. Obraz sczytywany jest rzędami, a ładunek elektryczny przetwarzany na sygnał cyfrowy możliwy do interpretacji przez komputer

od lat 80. do chwili obecnej dał nam urządzenia z ponad 100 milionami pikseli, możliwością odczytywania szumu tak niskiego jak sygnał od pojedynczego elektronu, sprawnością kwantową bliską 100% oraz bardzo użyteczną w astronomii czułością na różne zakresy długości fali – od promieniowania rentgenowskiego do bliskiej podczerwieni.

### Jak działa CCD?

Ogólnie rzecz ujmując, przetwornik CCD (lub bardziej popularny w zastosowaniach komercyjnych CMOS) tłumaczy sygnał świetlny na elektryczny (czyli fotony na elektrony). Urządzenie składa się z szeregu komórek światłoczułych – siatki małych kwadratów (czasami trójkątów), które odpowiadają pikselom na końcowym zdjęciu. W zależności od urządzenia ich liczba może wahać się od kilku tysięcy do nawet kilkuset milionów. Generalnie, im jest ich więcej, tym lepsza końcowa rozdzielczość zdjęcia.

W czasie ekspozycji fotony (światło) uderzają w powierzchnię komórek światłoczułych, uwalniając elektron w wyniku efektu fotoelektrycznego. Wytworzony w ten sposób ładunek elektryczny gromadzi się w ścianach tych komórek, tworząc studnię potencjału. Jak łatwo się domyślić, liczba elektronów w takiej studni zależy od ilości światła, jaka padła na pojedynczą komórkę. W obszarach matrycy CCD, na które pada światło bardzo jasnej gwiazdy (emitującej wiele fotonów), komórki światłoczułe zawierają więcej ładunku elektrycznego niż w miejscach, do których dociera światło z ciemniejszych mgławic lub odległych galaktyk.

Po zakończeniu ekspozycji (poprzez zamknięcie migawki w aparacie) ładunek jest przeniesiony z przetwornika CCD do komputera i wyświetlony na monitorze. Jak? Metoda jest całkiem prosta. Zdjęcia są odczytywane po jednym wierszu na raz. Zgromadzony w każdej komórce ładunek elektryczny jest przesuwany w dół matrycy, a ostatni wiersz przenoszony do rejestru przesuwnego (*shift rejestr*). Tam do każdej komórki przypisywana jest wartość liczbową na podstawie zgromadzonej w niej liczby fotonów. Tak przekonwertowany sygnał cyfrowy jest z kolei wysyłany do komputera. Cały proces powtarza się aż do momentu, gdy elektrony każdej komórki zostaną przekonwertowane na wartość piksela. Wówczas mogą zostać wyświetlone na ekranie komputera jako surowy obraz.

### Rewolucja w astronomii

Zastosowanie kamer CCD w astronomii dostarczyło nam niesamowitych ilości danych. Ich liczba jest tak duża, że aby identyfikować obiekty, które jesteśmy w stanie zarejestrować na zdjęciach, potrzebujemy pomocy komputerów i samouczących się algorytmów. Jedno zdjęcie wykonane kamerą CCD (np. *Hubble Deep Field Image* wykonane teleskopem Hubble'a) może zawierać obraz setek tysięcy galaktyk emitujących bardzo słabe promieniowanie docierające do nas sprzed miliardów lat. Dzięki kamerom CCD rejestrujemy promieniowanie niosące informacje o tworzeniu się i ewolucji galaktyk, obcych układów planetarnych i zmian na naszym Słońcu.

Technologia tak bardzo użyteczna w astronomii szybko znalazła zastosowanie w życiu codziennym i uległa swoistej ewolucji. Jej zmodyfikowaną wersję – detektor CMOS – nosisz codziennie w kieszeni. Zasada działania obu detektorów jest taka sama – wykorzystanie zjawiska fotoelektrycznego, różnią się jedynie sposobem sczytywania ładunku z matrycy. Początkowo detektory CMOS charakteryzowały się gorszą efektywnością w przekształcaniu sygnału świetlnego na elektryczny (sygnał obciążony był szumem), przez co w astronomii, skupionej na bardzo słabym sygnale, nie znalazły zastosowania. Jednak popularność detektorów CMOS, szczególnie zastosowanie w telefonach komórkowych, doprowadziły do ich udoskonalenia. Współcześnie efektywnością dorównują kamerom CCD, a do tego zużywają zdecydowanie mniej energii i pozwalają na szybsze sczytywanie obrazu (może się okazać przydatne w obserwacji planet). Zmiany zaszły tak daleko, że historia zatoczyła koło. Detektory CMOS są coraz częściej wykorzystywane przez rynek kamer astronomicznych i wkrótce prawdopodobnie całkowicie zastąpią kamery CCD.



#### Rozwiązanie zadania M 1619.

Oznaczmy przez  $s$  wspólną wartość sumy elementów w obydwu podziorach. Wówczas

$$2s \leq 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

czyli

$$s \leq \frac{n(n+1)}{4}.$$

Gdyby pewien z rozważanych podziorów miał  $m \geq n/\sqrt{2}$  elementów, to jego suma elementów byłaby nie mniejsza od  $s$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + m &= \frac{m(m+1)}{2} \geq \\ &\geq \frac{n(n+\sqrt{2})}{4} \geq s. \end{aligned}$$

Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.



Czytelnik Lubiący Analizę Matematyczną doprecyzuje, że „porządna” znaczy tu „spełniająca warunki Dirichleta”.

W funkcjach z okresem  $T \neq 2\pi$  trzeba przeskalować  $x$  przez  $\frac{2\pi}{T}$ .

Sporządzanie widma funkcji  $f$  to nic innego, jak znajdowanie takich  $n$ , że wyrażenie  $a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$  jest istotnym składnikiem funkcji  $f$ .

## Zawijanie i wycinanie dźwięków

Radosław KUJAWA\*

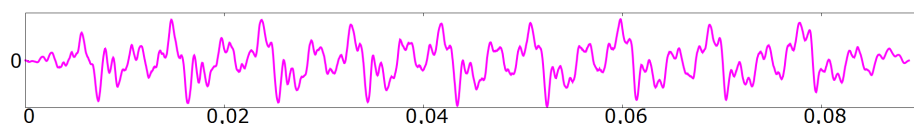
Nagraliśmy ze znajomymi piosenkę. Nie było to profesjonalne przedsięwzięcie: nie wynajęliśmy studia nagraniowego, ale spotkaliśmy się u jednego z nas, wyjęliśmy instrumenty i zagraliśmy kilka razy do porządnego dyktafonu. Niestety, brak zawodowstwa dało się odczuć natychmiast – okazało się, że siedziałem na skrzypiącym krześle, które przy każdym moim ruchu robiło *ziiik*, *ziiiiiik*. Skrzypienie, choć nie permanentne, stanowczo utrudniało percepcję.

Na szczęście reżyserzy dźwięku dysponują narzędziami, które mogą „wyciąć”, albo przynajmniej „schować”, takie niepożądane odgłosy. Nie trzeba było więc spotykać się jeszcze raz i pamiętać, by siedzieć na innym krześle. Wystarczyło pozbyć się skrzypienia w trakcie obróbki nagrania. Taka operacja wycięcia zbędnego dźwięku jest możliwa dzięki narzędziu, które w skrócie nazwiemy FFT (*Fast Fourier Transform*, czyli Szybka Transformata Fouriera).

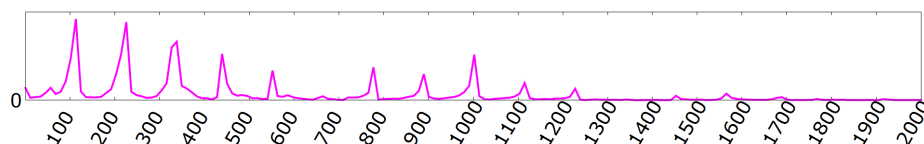
Żeby zobaczyć, jak działa FFT, zacznijmy od podstaw. Dźwięk to funkcja zmiany ciśnienia powietrza. Nie jest to jednak dowolna funkcja – ciśnienie podlega niewielkim zmianom, a dźwięki, przynajmniej te w przyjaznej dla ucha postaci, mają (mówiąc muzycznie) swoją wysokość, czyli (ściślej) odpowiadająca im funkcja zmiany ciśnienia powietrza jest funkcją okresową.

Każdą porządną funkcję okresową można przedstawić za pomocą szeregu Fouriera. W dużym uproszczeniu – jeśli funkcja  $f$  ma okres  $2\pi$ , to da się ją przedstawić jako  $f(x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$ . Tego mocnego narzędzia teoretycznego nie można tu stosować ściśle, bo na ogół dźwięki zmieniają się w czasie, więc nie mamy do czynienia z funkcjami *par excellence* okresowymi. Wciąż są one jednak „okresowawe”, to znaczy zmieniają się na tyle wolno, że można lokalnie sporządzić *widmo* dźwięku – czyli powiedzieć, które częstotliwości bazowe są istotne w danej chwili. Właśnie to *widmo* jest generowane przez FFT.

Spójrzmy na dwie postaci pierwszego dźwięku wspomnianej wcześniej piosenki – wykres drgania oraz odpowiadającego mu widma.



Rys. 1. Funkcja zmiany ciśnienia w czasie dla dźwięku struny gitarowej. Można w niej dostrzec pewną regularność, lecz trudno ją precyzyjnie opisać



Rys. 2. Widmo dźwięku z rysunku 1. Na osi X jest częstotliwość w Hz, na osi Y – amplituda drgania w danej częstotliwości

Czytelnik Obeznanym z Reżyserią Dźwięku, gdy spojrzy na rysunek 2, powie z łatwością, że przedstawiony jest na nim dźwięk A z oktawy wielkiej (czyli dźwięk o bazowej częstotliwości 110 Hz).

Rysunek 2 przedstawia udział danej częstotliwości w dźwięku z rysunku 1. Ten dźwięk nie jest funkcją okresową – każdy puls ma *nieco* inny kształt – jednak mimo to można spróbować skonstruować jego szereg Fouriera. Istotną rolę będą odgrywać w nim jedynie amplitudy  $a_{110}$ ,  $b_{110}$ ,  $a_{220}$ ,  $b_{220}$ ,  $a_{330}$ ,  $b_{330}$  itd.

Razem z FFT pojawia się nowy punkt widzenia, niebywale przydatny w analizie dźwięku. Z rysunku 1 można od biedy wydedukować częstotliwość bazową, ale cała subtelność kształtu widma jest już nie do wychwycenia. Na rysunku 2 zupełnie jasne jest, że szósta składowa (ząbek o  $f = 660$  Hz)

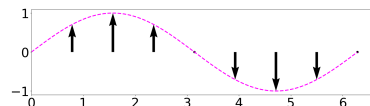
Konstrukcja widma dyskretnego sygnału to Dyskretna Transformata Fouriera (w skrócie DFT – *Discrete Fourier Transform*).

Czytelnik Oswojony z Liczbami Zespolonymi może dla  $k = 0, \dots, N - 1$  oraz dla próbek  $a_0, \dots, a_{N-1}$  obliczyć  $k$ -ty element widma zgodnie ze wzorem:

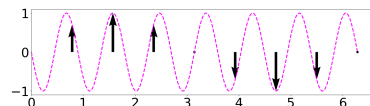
$$A_k = \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{i \frac{2\pi k n}{N}} \right|.$$

Uwaga: w DFT moduł nie występuje –  $A_k$  jest wtedy liczbą zespoloną, która niesie ze sobą dodatkową informację o fazie drgania.

Czytelnik Wnikliwy zauważy, że oba nawinięcia, które nie sumują się do 0, są równoważne – nawijanie co 1 promień musi być symetryczne do nawijania co  $N - 1$  promień! Co więcej, nawijanie co  $N - 1$  promień ma swój własny sens. Bo choć, patrząc na próbki z rysunku 3a, spodziewamy się, że przybliżają one funkcję  $\sin(x)$ :

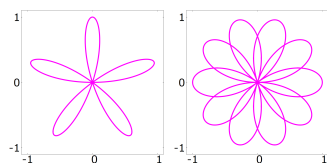


to jednak równie dobrze mogą być próbkami funkcji  $-\sin(7x)$ :



Niepożądane zjawisko, które bierze się z niejednoznacznej reprezentacji sygnału okresowego przez jego wartości chwilowe i może zaistnieć przy nieostrożnym przetwarzaniu sygnałów, nosi nazwę *aliasingu*. Polega na tym, że po obróbie sygnału pojawiają się w nim częstotliwości, których na początku nie było. Aby tego uniknąć, trzeba brać na poważnie tylko połowę nawinięć (druga połowa jest symetryczna). Zatem dla  $N$  próbek zbadamy efektywnie tylko pierwszych  $N/2$  częstotliwości bazowych.

Można na nawijanie spojrzeć z innej strony – jeśli wiemy, jaką funkcję nawijamy, nie musimy jej próbować, możemy ją nawinąć w sposób ciągły. Na poniższych ilustracjach funkcja  $f(x) = \sin(5x)$  nawinięta jest odpowiednio jeden i dwa razy:

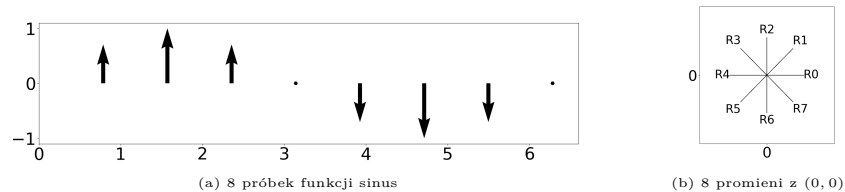


Oba kształty nieprzypadkowo wyglądają bardzo podobnie do tych z rysunku 5 dla  $k = 1$  i  $k = 2$ . Takie nawinięcie nieskończenie wielu próbek odbywa się w Ciągłej Transformacie Fouriera.

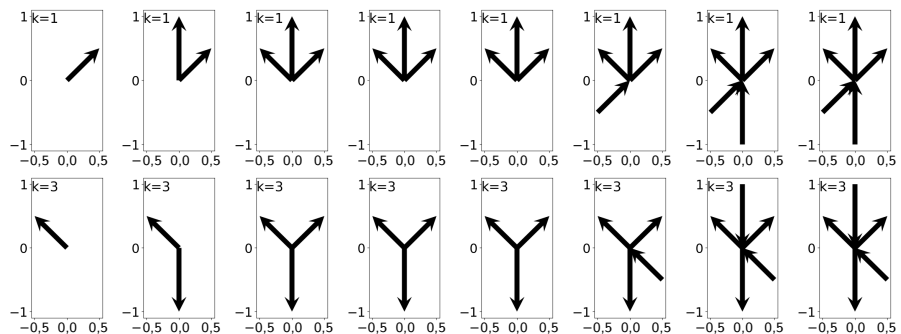
niemal nie istnieje, za to dziewięta ( $f = 990$  Hz) jest tak duża jak czwarta ( $f = 440$  Hz). To, że takie fakty są w ogóle możliwe do zaobserwowania, jest kluczowe chociażby w analizie mowy.

Jak skonstruować takie widmo? Załóżmy, że funkcja opisująca dźwięk jest dyskretna, a więc zadana jakimś ciągiem próbek  $a_0, \dots, a_{N-1}$ . Wtedy widmo również jest dyskretno, nazwijmy jego wartości  $A_0, \dots, A_{N-1}$ . Wartość  $A_k$  powie, jak istotną składową dźwięku jest drganie o częstotliwości  $k$ .

Wyobraźmy sobie płaszczyznę z punktem  $(0, 0)$ , z którego wychodzi  $N$  promieni (zob. rys. 3b). Potraktujmy wartości próbek jako długości wektorów (zob. rys. 3a). Każdy wektor umieszczamy na odpowiednim promieniu, czyli zaczepiamy go w punkcie  $(0, 0)$  i nadajemy mu kierunek tegoż promienia. Dla danego  $k$  zaczynamy od  $k$ -tego promienia i z następną próbką skaczemy do promienia  $k$  kroków wprzód. Liczba  $A_k$  to długość sumy wektorów-próbek nawiniętych podczas  $k$ -tego nawijania.

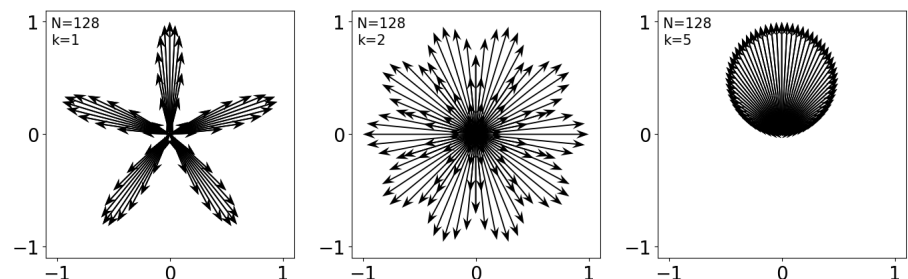


Rys. 3. Weźmy  $N = 8$  próbek, by na rysunku 4 nawinąć je wokół punktu  $(0, 0)$



Rys. 4. Nawijanie, przykłady dla  $k = 1, 3$ . Wektory zsumują się do zera dla  $k = 0, 2, 3, 4, 5, 6$  (dla  $k = 1$  zsumują się do  $(0, 4)$ , więc drganie o częstotliwości 1 jest drganiem bazowym badanej funkcji; natomiast  $k = 7$  to patologia – zob. margines)

By lepiej wyobrazić sobie mechanizm nawijania, weźmy funkcję  $\sin(5x)$  oraz ogromne  $N$ , np. 128 (zob. rys. 5). Nawinięte wektory wykreślą fantazyjne, choć zarazem bardzo regularne, kształty. Dość łatwo można wyrobić sobie intuicję, że w każdym przypadku, z wyjątkiem  $k = 5$ , wektory zsumują się do  $(0, 0)$ .



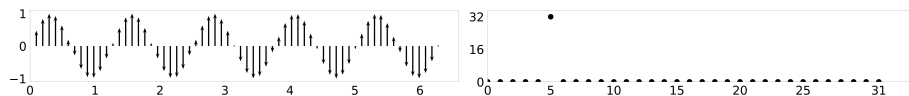
Rys. 5. Nawijanie  $N = 128$  próbek funkcji  $\sin(5x)$  dla  $k = 1, 2, 5$

To, że nawijane próbki funkcji  $\sin(lx)$  zsumują się do  $(0, 0)$  dla każdego  $k \neq l$ , to tylko połowa sukcesu. Kluczową własnością jest, że algorytm wciąż będzie działał, gdy badana funkcja ma więcej niż jedno drganie

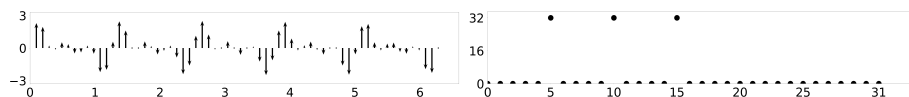
Zgodnie z uwagą o aliasingu, dla 64 próbek policzymy 32 wartości widma.

bazowe. Mówiąc bardziej formalnie, jeśli nawiniemy próbki funkcji  $f(x) = \sum_{l=1}^n a_l \sin(lx) + b_l \cos(lx)$ , to zsumują się one do  $(0, 0)$  zawsze, gdy dla danego  $l$  mamy  $a_l = 0$  i  $b_l = 0$ . Czytelnik Spostrzegawczy od razu zauważy, że wzór funkcji  $f$  jest już bardzo podobny do wzoru na szereg Fouriera. . .

Spójrzmy na zestawione parami  $N = 64$  próbki różnych funkcji z ich widmami wyliczonymi zgodnie z algorytmem nawijania.

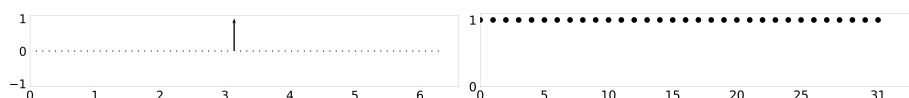


Rys. 6. Próbkę  $f(x) = \sin(5x)$  oraz ich widmo – jest zerem wszędzie poza  $k = 5$



Rys. 7. Dla  $f(x) = \sin(5x) + \sin(10x) + \sin(15x)$  widmo wskaże 5, 10 i 15

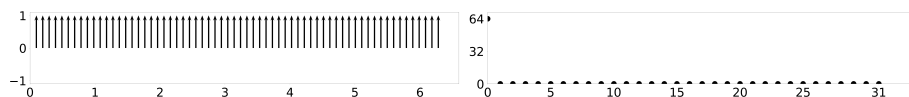
Przykład z punktowym skokiem (rys. 8) ma intuicyjny sens fizyczny, w praktyce bowiem takim skokiem jest każdy stuk, trzask itd. Widmo zaś elegancko tłumaczy, czemu jeśli kłaśnie się przy pianinie z nietłumionymi strunami, to wszystkie mniej więcej jednakowo mocno zadźwięczą.



Rys. 8. Funkcja punktowo różna od 0 ma widmo jednolicie różne od 0

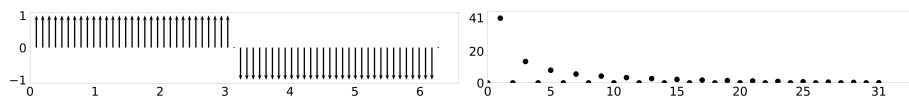
Tu zbliżamy się jeszcze bardziej do szeregu Fouriera (rys. 9), bo wartość widma dla  $k = 0$  odpowiada stałej  $C$  we wzorze

$$f(x) = C + \sum_{l=1}^n a_l \sin(lx) + b_l \cos(lx).$$



Rys. 9. Funkcja stała ma widmo różne od 0 tylko w  $k = 0$

Oczywiście nie tylko syntetyczna fala prostokątna ma w widmie same nieparzyste składowe. W naturze taką falą jest chociażby dźwięk tworzony przez drgającą kolumnę powietrza jednostronnie zamkniętą, czyli np. przez klarinet. Zwłaszcza niski rejestr tego instrumentu ma miękką, ciepłą barwę, która bierze się właśnie z wyeliminowania parzystych składowych.



Rys. 10. Próbkę tzw. fali prostokątnej, czyli  $f(x) = \text{sgn}(\sin(x))$ , dadzą widmo, w którym zapalone są składowe dla  $k$  nieparzystych

Czytelnika Uważnego zaniepokoi, że we wszystkich przykładach okresem badanej funkcji było sprytnie dobrane  $2\pi$ , co więcej, po cichu założyliśmy, że ten okres jest znany. Takiego założenia w praktyce jednak na ogół nie ma – i to jest realny problem podczas przetwarzania sygnału. Rozwiązuje się go, „ścisząc” krańce badanego przedziału, by zniwelować skok na granicy okresów. Mówiąc ściślej, przemnaża się próbki przez tzw. funkcję okna. Dlatego też drganie przedstawione na rysunku 1 ma małą amplitudę na swoich końcach.

Wzmianka o szybkim generowaniu widma jest doskonałą okazją, by wspomnieć, od czego *tak naprawdę* pochodzi skrót FFT: Fast Fourier Transform to nazwa algorytmu, który w czasie  $O(n \log n)$  oblicza widmo zadanego sygnału. Jest szybki, bo w elegancki sposób korzysta z pewnej dość prostej cechy liczb zespolonych, aby dwukrotnie zmniejszyć rozmiar danych wejściowych

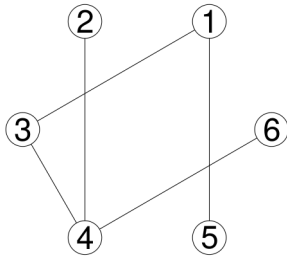
Wiemy zatem, że widmo dźwięku można wygenerować, i mniej więcej wiemy jak. Okazuje się, że po pierwsze: umiemy je wygenerować szybko, a po drugie: umiemy to widmo z powrotem odwinąć i wrócić do jego pierwotnej postaci (i to też umiemy zrobić szybko!). Mogę więc bez problemu użyć FFT, by przeanalizować widmo nagrania ze skrzypiącym krzesłem, zlokalizować częstotliwość dźwięku skrzypu i ją ordynarnie wyciąć (przy odrobinie szczęścia uda mi się nie zrobić dużej krzywdy właściwym dźwiękom piosenki). Następnie mogę z powrotem odwinąć widmo i uzyskać pierwotne nagranie, tylko już bez krzesła.

Naturalnie transformata Fouriera jest czymś dużo więcej niż tylko korektorem niedoskonałości offowych piosenek. Jest wszechobecna w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów, zarówno elektrycznych, jak i akustycznych, jej wersja ciągła jest nieodzowna w mechanice kwantowej, pod nieco zmienioną postacią odpowiada za kompresję MP3, a nawet jest biologicznie zaimplementowana w ludzkim uchu. Jednak już sam jeden przykład wycinania skrzypiącego krzesła wystarczy, bym wciąż trwał w zachwycie, że „tak się da”.

# Google w łańcuchach

Łukasz RAJKOWSKI

Warto wspomnieć, że w kategorii „Słowo roku 2009” nominowany był czasownik *to fail*, który postąpił honorowo i przegrał. Jego porażka (sukces?) była jednak połowiczna, gdyż zwyciężył w kategorii „Najbardziej użyteczne słowo roku 2009”.



	1	2	3	4	5	6
%	20,25	9,93	20,04	29,75	10,10	9,92

**X<sub>0</sub> = Wstęp.** W roku 2009 słowem dziesięciolecia stowarzyszenie *American Dialect Society* ogłosiło czasownik *to google*, którego polski odpowiednik – guglować/guglać – omawiany jest już na stronach Słownika Języka Polskiego, PWN. Nic dziwnego, wszak korzystanie z wyszukiwarki *Google* stało się elementem codzienności większości z nas i nie mamy skrupułów przed zadawaniem jej pytań o najbliższe sprawy. Idąc za myślą przewodnią tego numeru *Delty*, o nieoczekiwanych związkach teorii z rzeczywistością, pokażemy, co wspólnego ma wszędobylska wyszukiwarka z teorią łańcuchów Markowa, sformułowaną w początkach XX wieku.

**X<sub>1</sub> = Przykład.** Powiedzmy, że zwiedzamy graf spójny w taki sposób, że po znalezieniu się w danym wierzchołku, w kolejnym kroku odwiedzamy któregoś z jego sąsiadów, każdego z tym samym prawdopodobieństwem. Dla przykładu, kolejnymi odwiedzionymi wierzchołkami przy spacerowaniu po grafie na marginesie mogłyby być 1, 3, 4, 2, 4, 6, ... Tabela przedstawia procentowy czas spędzony w poszczególnych wierzchołkach w pewnej symulacji 10 000 kroków zwiedzania tego grafu. Zauważmy, że przedstawione wartości wydają się mocno powiązane ze stopniami (czyli liczbami sąsiadów) poszczególnych wierzchołków. Oczywiście nie jest to wcale przypadek, co niebawem wyjaśnimy.

**X<sub>2</sub> = Internet.** Załóżmy, że przeglądamy strony internetowe w bezmyślny sposób (nie róbcie tego w domu!), za każdym razem klikając w losowo wybrany odnośnik na stronie, na jakiej się znaleźliśmy. Gdyby procentowa liczba odwiedzin danej strony (na przykład `deltami.edu.pl`) stabilizowała się na pewnej granicznej wartości, to byłoby rozsądnie uznać tę wartość za *miarę ważności* tej strony – im jest większa ta wartość, tym częściej trafialibyśmy na daną stronę, „losowo” przeglądając Internet. Na pierwszy rzut oka nie wiadomo jednak, jak tę wartość obliczyć – pomogą nam w tym wspomniane we wstępie łańcuchy Markowa.

**X<sub>3</sub> = Łańcuchy Markowa.** *Łańcuchy Markowa* stanowią matematyczny model dla następującej (mało rzeczywistej, ale mam nadzieję dość obrazowej) sytuacji: wyobraźmy sobie układ  $N$  miast (ponumerowanych liczbami od 1 do  $N$ ). W każdym z nich znajduje się teleport, który w losowy sposób wybiera miasto, do którego przenosi użytkownika. Niech teleport w mieście  $i$  przenosi do miasta  $j$  z prawdopodobieństwem  $p_{ij}$ . Załóżmy, że postanowiliśmy pozwiedzać miasta, codziennie korzystając (jednokrotnie) z zamieszczonych w nich teleportów.

Przyjmijmy, że miejsce startu („dzień zero”) jest losowe; z prawdopodobieństwem  $\pi_i$  jest to miasto  $i$ . Z jakim prawdopodobieństwem pierwszego dnia znajdziemy się w mieście  $j$ ? Szansa na rozpoczęcie z  $k$ -tego miasta i przejście do  $j$ -tego wynosi  $\pi_k p_{kj}$ , a zatem prawdopodobieństwo odwiedzenia  $j$ -tego miasta pierwszego dnia to  $\pi_j^{(1)} = \sum_{k=1}^N \pi_k p_{kj}$ . Z rozkładu w „dniu zero”  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N)$  otrzymaliśmy rozkład w pierwszym dniu  $\boldsymbol{\pi}^{(1)} = (\pi_1^{(1)}, \dots, \pi_N^{(1)})$ . W tym sensie prawdopodobieństwa  $(p_{ij})_{i,j \leq N}$  określają nam przekształcenie  $P$ , które z jednego rozkładu tworzy inny.

**X<sub>4</sub> = Rozkład stacjonarny.** Przy założeniu (\*), przedstawionym na marginesie,  $r$ -ta iteracja przekształcenia  $P$  jest *przekształceniem zwięzającym*, tzn. zmniejsza odległość między rozkładami o ustalony z góry czynnik. Aby to stwierdzenie miało sens, musimy doprecyzować odległość między rozkładami – u nas będzie to  $|\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\nu}| = \sum_{k=1}^N |\pi_k - \nu_k|$ . W tej sytuacji z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że istnieje punkt stały przekształcenia  $P$ , czyli taki rozkład  $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$  (nazywany *stacjonarnym*), że  $P(\tilde{\boldsymbol{\pi}}) = \tilde{\boldsymbol{\pi}}$ , tzn. prawdopodobieństwo wystartowania z  $i$ -tego miasta jest takie samo, jak prawdopodobieństwo znalezienia się w nim pierwszego (więc również drugiego, trzeciego, ...) dnia. Z twierdzenia Banacha

Rozkładem nazwiemy dowolny ciąg  $N$  liczb nieujemnych, sumujących się do 1.

(\*) istnieje takie  $r$ , że dla dowolnych  $i, j \leq N$  z dodatnim prawdopodobieństwem możemy się przenieść z miasta  $i$  do miasta  $j$  po dokładnie  $r$  dniach.

O twierdzeniu Banacha można więcej przeczytać w artykule Jarosława Górnickiego w  $\Delta_{18}^{10}$ .

wynika również, że rozkład  $\tilde{\pi}$  może zostać uzyskany z dowolnego rozkładu  $\pi$  poprzez iterację  $P$ , tzn. ciąg  $P^n(\pi)$  (gdzie  $P^n = P \circ \dots \circ P$ ) jest coraz lepszym przybliżeniem  $\tilde{\pi}$ .

**$X_5 =$  Czas powrotu.** Kiedy rozkład  $\tilde{\pi}$  istnieje, to (zakładając  $(\star)$ ) ma pewną ciekawą własność –  $\pi_i$  jest równy odwrotności średniego czasu oczekiwania na powrót do  $i$ -tego wierzchołka, co teraz uzasadnimy. Załóżmy, że rozpoczęliśmy naszą wędrówkę, losując startowe miasto z rozkładu stacjonarnego. Pewnego dnia znaleźliśmy się w  $i$ -tym mieście i zastanawiamy się, kiedy doń wrócimy. Liczbę dni, jakie upłyną do pierwszego powrotu, oznaczmy jako  $\tau_i$  – jest to pewna losowa wielkość. Niech  $\mu_i$  będzie wartością oczekiwaną  $\tau_i$ , tzn.

$$(1) \quad \begin{aligned} \mu_i &= \mathbb{P}(\tau_i = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(\tau_i = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(\tau_i = 3) + \dots = \\ &= \mathbb{P}(\tau_i \geq 1) + \mathbb{P}(\tau_i \geq 2) + \mathbb{P}(\tau_i \geq 3) + \dots \end{aligned}$$

Niech  $X_k$  będzie numerem miasta odwiedzonego  $k$ -tego dnia i niech  $A_{kl}$  oznacza zdarzenie, że  $k$ -tego dnia byliśmy w mieście  $i$ , do którego nie wróciliśmy przez kolejnych  $l$  dni. Zauważmy, że  $\mathbb{P}(\tau_i \geq k + 1) = \mathbb{P}(A_{0k} | X_0 = i)$  oraz  $\mathbb{P}(X_0 = i) = \tilde{\pi}_i$ , zatem korzystając z (1), dostajemy

$$(2) \quad \tilde{\pi}_i \mu_i = \mathbb{P}(A_{00}) + \mathbb{P}(A_{01}) + \mathbb{P}(A_{02}) + \mathbb{P}(A_{03}) + \dots$$

Ponieważ wyszliśmy od rozkładu stacjonarnego, więc  $\mathbb{P}(A_{kl})$  zależy tylko od  $l$  (co może wymagać chwili zastanowienia), zatem suma pierwszych  $n + 1$  składników w (2) to

$$(3) \quad \mathbb{P}(A_{n0}) + \mathbb{P}(A_{(n-1)1}) + \dots + \mathbb{P}(A_{0n}) = \mathbb{P}(\overbrace{A_{n0} \cup A_{(n-1)1} \cup \dots \cup A_{0n}}^{B_n}),$$

gdź zdarzenia  $A_{k(n-k)}$  są rozłączne, ponadto ich suma  $B_n$  to zdarzenie, że w pierwszych  $n$  dniach odwiedziliśmy co najmniej raz  $i$ -te miasto. Z założenia  $(\star)$  można wywnioskować, że  $\mathbb{P}(B_n)$  jest zbieżne do 1, a zatem z (2) i (3) wynika  $\tilde{\pi}_i \mu_i = 1$ .

**$X_6 =$  Liczba odwiedzin.** Na zakończenie teoretycznych rozważań zauważmy, że skoro wartość oczekiwana liczby dni potrzebnych na powrót do  $i$ -tego miasta wynosi  $\mu_i$ , to średnio „raz na  $\mu_i$ ” kroków wracamy do  $i$ , zatem jeśli  $D_n^{(i)}$  jest liczbą dni spędzonych w  $i$ -tym mieście podczas pierwszych  $n$  dni, to  $D_n^{(i)}/n$  staje się coraz bliższe  $1/\mu_i = \tilde{\pi}_i$ . Rozumowanie to można nietrudno uściślić przy użyciu Mocnego Prawa Wielkich Liczb.

**$X_7 =$  Przykład wyjaśniony.** Zauważmy, że nasz spacer po grafie spójnym odpowiada łańcuchowi Markowa o prawdopodobieństwie przejścia  $p_{ij} = \deg(i)^{-1} \mathbb{1}_{i \sim j}$ , gdzie  $\deg(i)$  to stopień wierzchołka  $i$ , a  $\mathbb{1}_{i \sim j}$  przyjmuje wartość 1, jeśli  $j$  jest sąsiadem  $i$ , oraz 0 w przeciwnym przypadku. Niech  $e$  będzie liczbą krawędzi. Łatwo uzasadnić, że suma stopni wierzchołków w grafie wynosi  $2e$ , a zatem wagi  $\tilde{\pi}_i = \deg(i)/(2e)$  stanowią rozkład. Zwróćmy uwagę, że

$$\sum_{k=1}^N \tilde{\pi}_k p_{kj} = \sum_{k=1}^N \frac{\deg(k)}{2e} \cdot \frac{\mathbb{1}_{k \sim j}}{\deg(k)} = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{k \sim j}}{2e} = \frac{\deg(j)}{2e} = \tilde{\pi}_j,$$

zatem  $\tilde{\pi}$  jest rozkładem stacjonarnym – uzasadnia to zaobserwowany wcześniej fenomen dotyczący średniego czasu przebywania w danym wierzchołku. Dość nieoczekiwanym stąd wnioskiem jest to, że średnia liczba odwiedzin jest w tym przypadku własnością lokalną i zależy tylko od stopnia wierzchołka i liczby krawędzi; bez znaczenia jest struktura pozostałej części grafu (jak również liczba wierzchołków).

**$X_8 =$  Google i PageRank.** Wróćmy do losowego przeglądania stron. Oczywiście, ono również określa nam pewien łańcuch Markowa. Gdyby spełnione było założenie  $(\star)$ , to średnia liczba odwiedzin danej strony (czyli szukana *wartość strony*) zbiegałaby do wartości rozkładu stacjonarnego dla tej strony. Niestety podczas opisanego spacerowania po stronach internetowych moglibyśmy wpaść w pewne pułapki; możemy na przykład trafić na stronę bez żadnego odnośnika lub w inny sposób naruszyć  $(\star)$ . Celem rozwiązania tego problemu

Przez  $\mathbb{P}(A|B)$  oznaczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$  pod warunkiem zajścia zdarzenia  $B$ .

Zauważmy, że losowe przeglądanie stron również możemy potraktować jako spacerowanie po grafie, lecz tym razem jest to graf skierowany.

wprowadza się niezerowe prawdopodobieństwo „teleportacji” – przed kliknięciem w dowolny odnośnik mamy szansę  $(1 - \alpha)$  (lub 1, jeśli na danej stronie nie ma odnośników) na przeskoczenie do losowo wybranej strony, każdej z jednakowym prawdopodobieństwem. W odróżnieniu od wcześniejszego przykładu, nie możemy jednak w prosty sposób wskazać rozkładu stacjonarnego, a dokładne rozwiązanie odpowiedniego układu równań nie wchodzi w grę ze względu na ogromną liczbę stron internetowych. Wiemy jednak, że zgodnie z twierdzeniem Banacha o punkcie stałym możemy przybliżyć rozkład stacjonarny poprzez rozpoczęcie od dowolnego rozkładu (np.  $\pi_i^{(0)} = 1/N$ ) i powtarzanie

$$(4) \quad \pi_i^{(n+1)} = \sum_{j \rightarrow i} \frac{\alpha \cdot \pi_j^{(n)}}{\deg(j)} + \sum_{\deg(j)=0} \frac{\alpha \cdot \pi_j^{(n)}}{N} + \sum_{j=1}^N \frac{(1 - \alpha) \cdot \pi_j^{(n)}}{N},$$

gdzie pierwsza suma obejmuje wszystkie strony wskazujące na  $i$ , a druga wszystkie „strony puste”. Ten sposób mierzenia i obliczania ważności strony został zaproponowany przez Larry’ego Page’a i Sergeya Brina w 1997 roku, ochrzczonej *PageRank* i wykorzystany w stworzonej przez nich wyszukiwarce Google jako istotny czynnik przy decydowaniu o kolejności wyświetlanych stron internetowych. I chociaż informacja o wartościach PageRanku nie jest już dostępna publicznie, wiele wskazuje na to, że ciągle odgrywa on niemałą rolę w sposobie, w jaki Google sortuje wyniki. Czytelnikom Zainteresowanym polecam samodzielne wyugłanie szczegółów.

O algorytmie PageRank z odrobiną innej perspektywy można przeczytać w artykule Krzysztofa Diksa w  $\Delta_{08}^s$ . Zachęcamy do lektury!



## Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

**M 1618.** Do dyspozycji mamy  $n$  jednakowych świeczek. Pierwszego dnia zapalamy jedną świeczkę na dokładnie godzinę. Drugiego dnia wybieramy dwie świeczki i zapalamy je również na godzinę. Ogólnie  $k$ -tego dnia pewnych  $k$  świeczek pali się przez godzinę. Przypuśćmy, że  $n$ -tego dnia po upływie godziny wszystkie świeczki wypaliły się równocześnie. Wyznaczyć wszystkie wartości  $n$ , dla których taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie na str. 4

**M 1619.** Dwa rozłączne podzbiory zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  mają tę samą sumę elementów. Wykazać, że każdy z tych podzbiorów ma mniej niż  $n/\sqrt{2}$  elementów.

Rozwiązanie na str. 7

**M 1620.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite  $n \geq 2$  o następującej własności: Liczby całkowite od 1 do 16 można tak wpisać w pola tablicy  $4 \times 4$ , aby sumy liczb w wierszach i kolumnach były ośmioma parami różnymi liczbami całkowitymi, z których każda jest podzielna przez  $n$ .

Rozwiązanie na str. 15

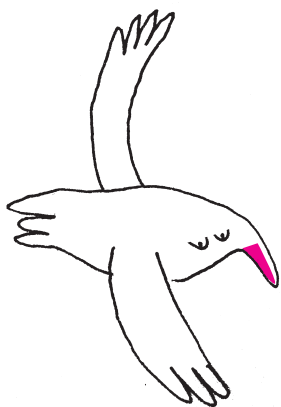
Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 987.** Podczas rozładunku wagonów dębowe belki staczane są z pochylni wykonanej z dębowych desek. Jaka jest największa wartość kąta  $\alpha$  między pochylnią i poziomem, dla której belki staczają się bez poślizgu? Należy przyjąć, że belki mają kształt walców, a współczynnik tarcia statycznego drzewa między powierzchniami z drzewa dębowego wynosi  $f = 0,58$ .

Rozwiązanie na str. 5

**F 988.** Dwa kółka (walce) o promieniach  $R$  i  $r$  ( $R > r$ ) wycięte z tego samego arkusza blachy osadzone są na dwóch równoległych osiach, wokół których mogą się swobodnie obracać. Większe z kółek wprawiono w ruch obrotowy, nadając mu prędkość kątową  $\Omega_0$ , a następnie osie zsunięto tak, że kółka stykały się. Jaka ustaliła się końcowa prędkość kątowa większego z kółek? Przyjmij, że współczynnik tarcia kinetycznego między powierzchniami bocznymi kółek wynosi  $f$  i pominiń pozostałe opory ruchu (tarcie w zamocowaniu osi, opór powietrza itp.).

Rozwiązanie na str. 14



# Praktyczne, bo niepraktyczne

## czyli: od teorii liczb do kryptologii

Tomasz KAZANA

Teoria liczb to prawdopodobnie najstarsza dziedzina wiedzy matematycznej, badana intensywnie już w czasach starożytnych (a zapewne jeszcze wcześniej; możliwe, że nawet zanim powstała jakakolwiek cywilizacja operująca przekazem pisemnym).

Greków niebywale fascynowały liczby pierwsze (umieli udowodnić, że jest ich nieskończenie wiele!) i różne zagadnienia obliczeniowe z nimi związane: potrafili na przykład sprawnie wyznaczać zbiór wszystkich liczb pierwszych nie większych niż  $N$ , dla zadanego  $N$  (sito Eratostenesa) czy szybko odnajdować największy wspólny dzielnik (NWD) dwóch liczb naturalnych (algorytm Euklidesa).

W zasadzie przez wszystkie kolejne stulecia zagadnienia z tej dziedziny były zawsze w orbicie zainteresowań matematyków, choć niespecjalnie miało to przełożenie na praktyczne zastosowania. Oczywiście dla rasowego matematyka nigdy nie jest to przeszkodą, a wręcz – co szczególnie podkreślał Carl Gauss – może stanowić, trudną do zrozumienia dla profanów matematyki, dodatkową motywację do ich zgłębiania.

Historia rozwoju teorii liczb jest fascynująca i pełna nieoczekiwanych wyników, jednak ambicją tego tekstu nie jest nawet jej naszkicowanie. Raczej – idąc z duchem numeru *Delta*, który Czytelnik trzyma w dłoni – chcemy pokazać pewne pojęcia, koncepcje i hipotezy, które znali już Fermat, Gauss, Goldbach czy Euler, a które okazały się użyteczne dopiero po ich śmierci. Innymi słowy, *królowa matematyki* (że pozwolimy sobie przywołać po raz drugi słowa Gaussa na temat teorii liczb) nie jest aż tak niewinnie i platonicznie piękna, jak naszym wielkim przodkom się wydawało.

Stety czy niestety, w XX wieku matematycy nauczyli się teorię liczb wykorzystywać do bardzo przyziemnych celów.

### Algorytmiczna teoria liczb

Jedną z ważnych klas problemów teorii liczb są problemy obliczeniowe. Już w czwartej klasie szkoły podstawowej dzieci uczą się, jak pisemnie dodawać dwie liczby zapisane w systemie dziesiętnym. Łatwo zauważyć, że podany na lekcjach algorytm będzie efektywny (dający się wykonać w rozsądnym czasie na kartce) dla bardzo dużych, nawet kilkudziesięciocyfrowych, liczb.

Nie każdy problem z teorii liczb umiemy efektywnie rozwiązywać. Czasami nawet dla pozornie bardzo podobnych do siebie problemów znamy bardzo różne (w sensie efektywności) jakościowo rozwiązania. Na przykład szukanie NWD dla dwóch nawet bardzo dużych liczb jest szybkie, ale już rozkład na czynniki dużych liczb – obliczeniowo jest w zasadzie poza zasięgiem najszybszych współczesnych komputerów.

Poddziedzina teorii liczb zajmująca się takimi zagadnieniami (co umiemy, a czego nie umiemy efektywnie obliczać dla dużych liczb) nazywana jest algorytmiczną teorią liczb. To właśnie głównie wyniki (zarówno negatywne, jak i pozytywne!) z tego obszaru stały się przyczynkiem do rozwoju kryptologii – jakże praktycznej gałęzi współczesnej informatyki.

### Kryptologia

W twierdzeniach kryptologicznych zwykle postulujemy, że przeciwnik (podszuchiwacz, włamywacz) – nawet jeśli ma częściowy dostęp do systemu (może podsłuchiwać to, co „w eterze”, ma ograniczony dostęp do komputera ofiary itp.) – to i tak nie jest w stanie *czegoś* zrobić – odtworzyć wiadomości, zmienić wartości jakiejś zmiennej itp. Jak w ogóle można podejść do rozwiązania tak postawionego problemu?



#### Rozwiązanie zadania F 988.

W chwili początkowej prędkość względna powierzchni kółek w punkcie ich styku wynosiła  $\Omega_0 R$ . Na powierzchni kółek działały więc siły tarcia kinetycznego równe co do wielkości, ale skierowane przeciwnie. Większe kółko było „hamowane”, a mniejsze „przyspieszane”, aż do chwili, gdy prędkości liniowe powierzchni w miejscu ich styku wyrównały się, co oznacza, że końcowe prędkości kątowe większego kółka  $\Omega_k$  i mniejszego  $\omega_k$  spełniły warunek:

$$(*) \quad \Omega_k R = -\omega_k r$$

(znak minus, bo obroty są w przeciwnie strony). Niech  $N$  oznacza siłę dociskającą powierzchnie kółek,  $I$  moment bezwładności większego z nich, a  $i$  mniejszego. Mamy równania ruchu obrotowego walców:

$$I E = -f N R, \quad i \varepsilon = -f N r,$$

gdzie  $E$  i  $\varepsilon$  oznaczają odpowiednio przyspieszenia kątowe większego i mniejszego kółka (w obu równaniach występuje po prawej stronie znak minus, bo i siły, i wektory położenia punktów przyłożenia sił względem osi kółek są skierowane przeciwnie). Z upływem czasu  $t$  prędkość kątowa większego kółka  $\Omega$  zmienia się jak  $\Omega = \Omega_0 - t f N R / I$ , a mniejszego jak  $\omega = -t f N r / i$ . Podstawienie tych zależności do warunku (\*) pozwala znaleźć czas ruchu  $t_k$  do chwili ustania poślizgu powierzchni:

$$t_k = \frac{\Omega_0 R}{f N (R^2 / I + r^2 / i)},$$

a następnie końcową prędkość kątową  $\Omega_k$ :

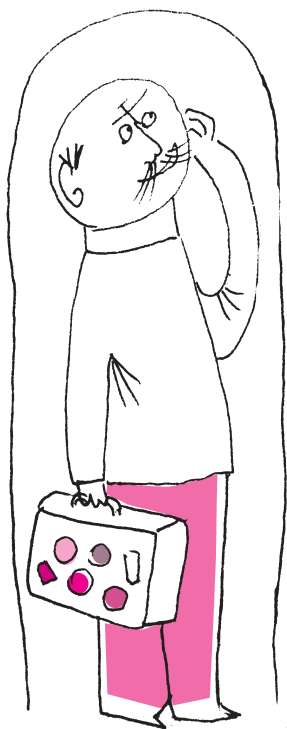
$$\Omega_k = \Omega_0 \left(1 - \frac{R^2}{R^2 + r^2 \frac{I}{i}}\right) = \Omega_0 \frac{R^2}{R^2 + r^2}.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że jeśli kółka wycięto z tego samego arkusza blachy, to ich masy pozostają w stosunku jak kwadraty ich promieni, a momenty bezwładności jak czwarte potęgi promieni. Jak widać, siła tarcia ( $fN$ ) występuje tylko we wzorze na  $t_k$ , co oznacza, że tę samą wartość  $\Omega_k$  otrzymalibyśmy, gdyby uzgodnienie prędkości obrotu nastąpiło natychmiast po zetknięciu kółek, tak jak można by przyjąć dla kół zębatach.



Taher ElGamal – egipski informatyk, który w 1985 (jako pracownik firmy Hewlett-Packard) zaproponował wykorzystanie trudności problemu logarytmu dyskretnego w kryptografii klucza publicznego. Wcześniej ten problem był wykorzystywany w kontekście szyfrowania symetrycznego, co zaproponował Martin Hellman, zresztą promotor doktoratu ElGamala na Stanfordzie.

Szyfr ElGamala to jeden z dwóch najpopularniejszych (obok RSA) szyfrów kryptografii asymetrycznej. Trudność RSA wynika z trudności rozłożenia dużej liczby na czynniki pierwsze, natomiast trudność szyfru ElGamala z trudności obliczenia logarytmu dyskretnego modulo duża liczba.



**Rozwiązanie zadania M 1620.**  
Odpowiedź:  $n = 2$  oraz  $n = 4$ .

Spośród ośmiu rozważanych sum największa jest z jednej strony nie mniejsza od  $8n$ , a z drugiej – nie większa od  $13 + 14 + 15 + 16 = 58$ . Stąd wniosek, że  $n \leq 7$ . Ponadto suma ośmiu rozważanych sum jest równa dwukrotności sumy wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy, czyli  $16 \cdot 17$ . Liczba  $n$  jest dzielnikiem tej sumy, wobec czego  $n = 2$  lub  $n = 4$ . Poniższy przykład pozwala stwierdzić, że te wartości  $n$  w istocie są osiągalne.

1	3	5	7
2	4	6	8
9	11	13	15
16	14	12	10

Szkic argumentacji jest zwykle podobny: wykazujemy, że gdyby przeciwnik był w stanie coś niecnego zrobić, to korzystając (być może nietrywialnie) ze szczegółów jego ataku, moglibyśmy efektywnie rozwiązać jakiś standardowy problem z algorytmicznej teorii liczb, o którym wiemy (a częściej: w który wierzymy), że jest trudny. Takie wnioskowanie sugeruje, że przesłanka była fałszywa, a więc że jednak taki sprytny przeciwnik po prostu nie istnieje.

I tak: szyfrowanie ElGamala da się zredukować do problemu trudności logarytmu dyskretnego. Problem ten polega na znalezieniu (dla danych  $a, b \in \mathbb{N}$  oraz  $p \in \mathbb{P}$ ) takiej liczby  $x \in \mathbb{N}$ , że

$$a^x = b \pmod{p}.$$

Wierzmy, że powyższy problem jest bardzo trudny dla dużych  $a, b, p$ . Z drugiej strony, potrafimy ściśle udowodnić, że mając w ręku algorytm  $A$  łamiący (w pewnym ściśle określonym sensie) schemat szyfrujący ElGamala, możemy skonstruować algorytm  $A'$  efektywnie rozwiązujący problem logarytmu dyskretnego.

Z powyższych dwóch faktów (a raczej: jednego postulatu „na wiarę” i jednego ścisłego rozumowania) wprost wynika, że nie może istnieć żaden algorytm łamiący szyfr ElGamala.

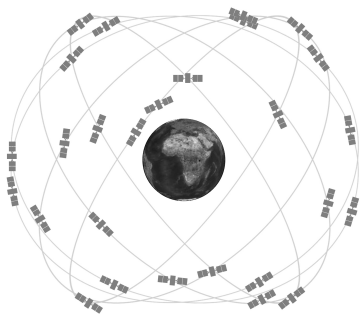
W podobnym duchu wykorzystuje się przeróżne założenia z algorytmicznej teorii liczb do dowodzenia bezpieczeństwa różnych, często bardzo nietrywialnych, protokołów kryptologicznych. Oczywiście staramy się, aby założeń teoriolichbowych było jak najmniej oraz aby były one jak najbardziej standardowe. Poza wyżej wyeksponowanym problemem logarytmu dyskretnego często wykorzystywanymi w kryptologii założeniami są m.in.:

- trudność rozkładu dużych liczb na czynniki pierwsze;
- trudność logarytmu dyskretnego w grupie punktów krzywej eliptycznej (zob.  $\Delta_{18}^8$ );
- trudność stwierdzania, czy dana liczba  $k$  jest resztą kwadratową modulo  $n = p \cdot q$ , dla pewnych danych  $p, q \in \mathbb{P}$  ( $a$  jest resztą kwadratową modulo  $b$ , gdy istnieje  $x \in \mathbb{N}$  taki, że  $a = x^2 \pmod{b}$ ). Ten problem jest problemem decyzyjnym ( $k$  albo jest, albo nie jest resztą kwadratową modulo  $n$ ), więc trudność oznacza tu, że nie umiemy znaleźć algorytmu, który osiąga prawdopodobieństwo sukcesu istotnie większe niż 50%;
- pewna ustalona funkcja  $f$  (np. funkcja SHA-3) ma własność funkcji jednokierunkowej, a więc dla danego losowego  $y$  bardzo trudne jest znalezienie dowolnego  $x$  takiego, że  $f(x) = y$ .

Powyższe założenia nie wyczerpują pełnego zakresu popularnych założeń teoriolichbowych, ale stanowią już potężną bazę, z której da się zbudować niezwykle wyrafinowane konstrukcje kryptologiczne, takie jak podpis cyfrowy, obliczenia wielopodmiotowe, dowody z wiedzą zerową, szyfrowanie asymetryczne, elektroniczna gotówka i inne.

Protokoły kryptologiczne są często bardzo pomysłowe, a dowody ich redukcji należą do trudnych zagadnień z algorytmicznej teorii liczb – niejednokrotnie są trikowe i nieoczywiste. Z braku miejsca w tym tekście nie umieszczamy konkretnych przykładów, pozostając w obszarze dywagacji ogólnych. Chętnych do dokładniejszego zgłębienia tych zagadnień zapraszam do prześledzenia cyklu *A jednak się da*, który proponowaliśmy w *Delcie* od numeru  $\Delta_{18}^{10}$  do numeru  $\Delta_{19}^8$ . Dodatkowo – można to zrobić, wyczułając się szczególnie na precyzyjną analizę, jakie konkretnie założenia teoriolichbowe stoją za rozpatrywanymi protokołami. To może być bardzo pouczające ćwiczenie!

Myszę, że naprawdę warto, tym bardziej że jest to przecież ta część osiągnięć ludzkości, która nawet nie śniła się takim tuzom matematyki, jak sam książę Carl Gauss.



Rys. 1. Orbity satelitów systemu GPS

## Teoria względności w smartfonie

Szymon CHARZYŃSKI

Gdy na przełomie XV i XVI wieku Krzysztof Kolumb przybijał z kolejnymi wyprawami do wybrzeży Ameryki, był przekonany, że są to wybrzeża Azji. W owych czasach określenie swojej pozycji na ziemskim globie nie było tak trywialnie proste jak dziś, kiedy prawie każdy ma w smartfonie odbiornik zdolny do określania aktualnego położenia z dokładnością do kilku metrów. Być może nie każdy wie, że działanie satelitarnych systemów pozycjonowania oparte jest na teorii względności Einsteina, i to zarówno szczególnej (STW), jak i ogólnej (OTW). Takiego zastosowania swojej teorii nie przewidywał zapewne nawet sam jej odkrywca.

**Nie tylko GPS.** Obecnie funkcjonują (lub są na ukończeniu) cztery niezależne od siebie globalne systemy pozycjonowania satelitarnego. Najstarszy to amerykański GPS-NAVSTAR. Od wielu lat działa również rosyjski GLONASS. Zbudowany przez Unię Europejską Galileo właśnie uzyskuje pełną funkcjonalność, natomiast czwarty system (chiński BeiDou) ma być w pełni gotowy w 2020 roku. Oprócz tego Indie i Japonia pracują nad swoimi systemami, które jednak nie będą miały zasięgu globalnego, przynajmniej na początku.

Promienie orbit i okresy obiegu satelitów różnych systemów:

GPS:	20 183 km, 11 h 58 min
GLONASS:	19 130 km, 11 h 16 min
Galileo:	23 222 km, 14 h 5 min
BeiDou:	21 150 km, 12 h 38 min

Okres obiegu satelity GPS jest równy dokładnie połowie doby gwiazdowej, dlatego satelity GPS wykonują dokładnie 2 obroty wokół Ziemi na dobę. Satelity GLONASS, Galileo i BeiDou wykonują odpowiednio  $\frac{17}{8}$ ,  $\frac{17}{10}$  i  $\frac{17}{9}$  obrotu na dobę.

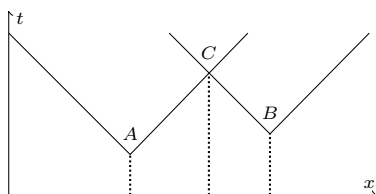
Każdy z działających systemów funkcjonuje na tej samej zasadzie. Składa się z około 30 satelitów, z których kilka pełni rolę rezerwowych, a od 24 do 28 jest w użyciu. Satelity krążą na wysokości około 20 000 km i obiegają Ziemię w czasie zbliżonym do 12 godzin. Orbita zawarte są w różnych płaszczyznach, tak aby w każdej chwili z każdego miejsca na Ziemi widoczna była możliwie jak największa liczba satelitów (dla pełnej funkcjonalności widoczne muszą być co najmniej cztery). Każdy satelita ma na pokładzie bardzo precyzyjny zegar atomowy, i to zwykle nie jeden, aby zmniejszyć ryzyko wyłączenia satelity z powodu awarii zegara. Obecnie instaluje się najczęściej cztery działające niezależnie zegary w jednym satelicie.

**Jak to działa?** Zegary zainstalowane na satelitach są ze sobą regularnie synchronizowane, a położenia wszystkich satelitów wyznaczone na podstawie parametrów ich orbit. Satelity nadają sygnał radiowy odbierany przez odbiornik naziemny, na przykład zainstalowany w smartfonie. W sygnale zakodowana jest chwila wysłania go przez satelitę. Ponieważ sygnał rozchodzi się ze skończoną prędkością światła, to chwila odebrania go przez nasz smartfon jest późniejsza niż chwila nadania go przez satelitę. Mnożąc różnicę czasów wysłania i odbioru przez prędkość światła, możemy wyznaczyć odległość do satelity. Wyznaczając odległość do trzech satelitów, których pozycję bardzo dokładnie znamy, byłibyśmy w stanie wyznaczyć położenie odbiornika. Sprowadza się to do geometrycznego problemu wyznaczenia punktu przecięcia trzech sfer o zadanych promieniach.

Niestety takie wyznaczanie położenia byłoby bardzo niedokładne, ze względu na zbyt małą precyzję zegara kwarcowego, w jaki wyposażony jest nasz smartfon. Błąd względny typowego zegara kwarcowego jest rzędu  $10^{-6}$  (a często nawet większy), co daje błąd rzędu kilku sekund na miesiąc. Oznacza to, że już w pierwszej sekundzie po synchronizacji pomiar obarczony jest błędem  $10^{-6}$  s, co pomnożone przez prędkość światła daje niedokładność w wyznaczaniu odległości do satelity rzędu 300 m. Po godzinie od synchronizacji zegara kwarcowego z wzorcem czasu błąd przeliczony na odległość będzie większy niż odległość do księżycy. Dlatego tak istotne jest, aby zegary na satelitach były bardzo precyzyjne (błąd względny najdokładniejszych zegarów atomowych jest rzędu  $10^{-14}$ ). Ponadto do dokładnego wyznaczenia położenia w trzech wymiarach potrzebujemy sygnałów z czterech satelitów (a nie trzech), aby móc uniezależnić pomiar od wskazań zegarka w odbiorniku.

Z czterech sygnałów można wyliczyć nie tylko położenie miejsca rejestracji sygnału, ale również czas, kiedy rejestracja miała miejsce, czyli znaleźć współrzędne przestrzenne i współrzędną czasową zdarzenia w czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Zdarzeniem jest chwila i miejsce odebrania sygnałów.

O pomiarach czasu i zegarach atomowych pisał Krzysztof Pawłowski w  $\Delta_{16}^4$ .



Rys. 2. W dwuwymiarowej czasoprzestrzeni mamy jeden wymiar przestrzenny  $x$  i wymiar czasowy  $t$ . Zdarzenie  $C$  to jednoczesna rejestracja sygnałów od dwóch satelitów. Na podstawie treści sygnałów można określić, gdzie i kiedy zostały one wysłane przez satelity, czyli określić w czasoprzestrzeni zdarzenia  $A$  i  $B$ . Ponieważ wiemy, że światło rozchodzi się w czasoprzestrzeni po stożkach, możemy znaleźć współrzędne zdarzenia  $C$  jako przecięcie dwóch stożków. Przy czym w dwóch wymiarach stożek to dwie linie proste

Geometrycznie problem ten sprowadza się do znalezienia punktu przecięcia czterech trójwymiarowych stożków (po których rozchodzą się z prędkością światła sygnały z satelitów) zanurzonych w czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Na rysunku przedstawiona jest uproszczona sytuacja wyznaczania położenia w dwuwymiarowej czasoprzestrzeni (jeden wymiar przestrzenny plus czas). W takim przypadku wystarczą dwa satelity, a stożek świetlny jest parą prostych. W trójwymiarowej czasoprzestrzeni (dwa wymiary przestrzenne plus czas) potrzebowalibyśmy trzech satelitów, a stożki byłyby dwuwymiarowymi powierzchniami zanurzonymi w trójwymiarowej czasoprzestrzeni, czyli wyglądałyby tak, jak zwykle wyobrażamy sobie stożek.

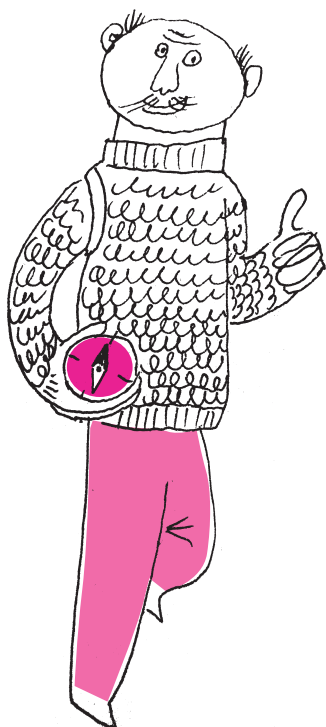
Warto podkreślić, że system pozwala wyznaczyć położenie w trzech wymiarach przestrzennych – nie tylko długość i szerokość geograficzną, ale też wysokość nad poziomem morza. Przydaje się to na przykład parolotniarzom rejestrującym trasę swojego lotu w trzech wymiarach, ale nie tylko im.

**Diabeł tkwi w szczegółach.** Przetłumaczyliśmy problem wyznaczania pozycji na prosty problem geometryczny, ale niestety pominieliśmy w tym tłumaczeniu pewne istotne szczegóły. STW uczy nas, że jeżeli zegar względem nas się porusza, to chodzi wolniej niż identyczny zegar spoczywający względem nas. Zjawisko to nosi nazwę dylatacji czasu i oznacza, że z naszego punktu widzenia zegar atomowy na pokładzie poruszającego się satelity chodzi wolniej niż identyczny na Ziemi. Algorytm wykonujący obliczenia oczywiście uwzględni tę poprawkę, ponieważ gdyby jej nie brać pod uwagę, to powodowałoby to istotne błędy w pozycjonowaniu.

Okazuje się jednak, że oprócz dylatacji czasu algorytm musi uwzględniać jeszcze jedną poprawkę, pochodzącą tym razem od OTW. Chodzi o to, że zegar na pokładzie satelity krąży w obszarze słabszego pola grawitacyjnego niż zegar stojący na powierzchni Ziemi, w dodatku znajduje się w stanie nieważkości. W pewnym uproszczeniu można powiedzieć, że pole grawitacyjne spowalnia bieg zegarów. Oznacza to, że grawitacja powoduje, że zegar na powierzchni Ziemi chodzi wolniej niż ten na orbicie. Poprawka pochodząca z OTW jest więc przeciwna do tej pochodzącej od STW!

Dla systemu GPS poprawki relatywistyczne są rzędu  $10^{-10}$ , przy czym poprawka od OTW jest około sześć razy większa niż ta od STW. Uwzględniając oba efekty wypadkowa poprawka równa jest około  $38 \mu\text{s}$  na dobę (co po pomnożeniu przez prędkość światła daje około 11,4 km błędu po jednej dobie działania systemu). Dopiero po uwzględnieniu tej poprawki (oraz innych niezwiązanych z teorią względności) pozycjonowanie daje poprawne wyniki. A co by było, gdyby Einstein (ani nikt inny) nie odkrył OTW? Technika raketowa mogłaby się rozwijać bez żadnych przeszkód. Ludzkość byłaby w stanie wysłać satelity na orbitę. Do budowy zegarów atomowych również nie jest potrzebna znajomość OTW. Po wysłaniu zegarów atomowych na orbitę zobaczylibyśmy, że chodzą inaczej niż powinny, i nie potrafilibyśmy tego wyjaśnić. Zapewne wtedy ktoś wpadłby na pomysł, że to grawitacja wpływa na tempo upływu czasu, i OTW została by prędzej czy później odkryta. Ciekawe jest jednak to, że OTW przewidywała te efekty na długo przed wysłaniem w kosmos pierwszego satelity. Wysyłając po raz pierwszy zegar atomowy na orbitę, ludzie spodziewali się, że będzie chodził szybciej niż identyczny na Ziemi, a pomiary tylko potwierdziły te przewidywania.

**Co jeszcze?** OTW przewidywała znacznie więcej. Oparty na OTW teoretyczny opis czarnych dziur pojawił się znacznie wcześniej, niż astronomowie znaleźli jakiegokolwiek obserwacyjne przesłanki wskazujące na ich istnienie. Długo trwały spekulacje, czy takie obiekty rzeczywiście istnieją. Teraz proces zlewania się czarnych dziur obserwuje się bezpośrednio, rejestrując generowane w nim fale grawitacyjne, których istnienie również przewidziane było przez OTW w czasach, kiedy jego detekcja była technicznie niemożliwa. Fakt, że teoria, do której sformułowania Einstein doszedł w wyniku czysto teoretycznych rozważań, przewidywała tak wiele rzeczywiście zachodzących we Wszechświecie zjawisk, fascynuje kolejne pokolenia fizyków.



Pierwsza bezpośrednia detekcja promieniowania grawitacyjnego miała miejsce w 2015 roku (*Prosto z nieba*,  $\Delta_{16}^6$ ), sto lat po sformułowaniu OTW przez Einsteina.

**Jak Einstein na to wpadł?** Isaac Newton, oddając szacunek swoim poprzednikom, powiedział podobno: „Jeśli widzę dalej, to tylko dlatego, że stoję na ramionach olbrzymów”. Na ramionach jakich olbrzymów stanął Einstein, żeby spojrzeć aż tak daleko? Praca Einsteina o STW z 1905 roku nosiła tytuł *O elektrodynamice ciał w ruchu*. To właśnie rozważania zawarte w tytule pracy, dotyczące elektrodynamiki klasycznej, doprowadziły go do sformułowania STW. W sformułowanej 10 lat później OTW posłużył się z kolei narzędziami geometrii różniczkowej – abstrakcyjnej i mało wówczas popularnej dziedziny matematyki.

**Elektrodynamika klasyczna.** Anegdota głosi, że William Ewart Gladstone, będąc kanclerzem skarbu brytyjskiego rządu w latach pięćdziesiątych XIX wieku, odwiedził kiedyś laboratorium Michaela Faradaya. Zapytał wtedy o praktyczne zastosowania elektryczności. Faraday odpowiedział, że nie wie, jakie one będą, ale że „zapewne pewnego dnia będzie pan od tego pobierał podatki”. Prawo indukcji odkryte przez Faradaya w 1831 roku pozwoliło mu zbudować pierwszą prądnicę, a potem silnik elektryczny. Jednak na początku nie doceniono potencjału, jaki miały w sobie te odkrycia.

Jeszcze na początku XIX wieku nie zdawano sobie sprawy, że jest jakikolwiek związek między elektrycznością i magnetyzmem. Przed odkryciem prądnic przez Faradaya prąd elektryczny wytwarzano, wykorzystując skonstruowane przez Alessandro Voltę stosy elektryczne. Badania Ørsteda, Biota, Savarta i Ampère’a pokazały, że prądy elektryczne oddziałują z magnesami i ze sobą nawzajem. Ostatnią cegiełkę do tej układanki dodał James Clerk Maxwell, zauważając, że nie tylko przewodniki z prądem są źródłem pola magnetycznego (prawo Ampère’a), ale jest nim również zmienne pole elektryczne. Równania opisujące pole elektromagnetyczne, będące zwieńczeniem kilkudziesięciu lat badań – noszą teraz nazwę równań Maxwella – zostały opublikowane w 1865 roku. Maxwell wykazał następnie, że z jego równań wynika istnienie fal elektromagnetycznych (jak uważał wtedy, rozchodzących się w tzw. eterze), których prędkość doskonale zgadzała się z mierzoną wówczas prędkością światła.

Teoretyczne badania Josepha Larmora, Hendrika Lorentza i Henriego Poincaré z przełomu XIX i XX wieku doprowadziły do odkrycia, że równania Maxwella nie zmieniają swojej postaci, jeżeli współrzędne przestrzenne i czas zmieniają się według przepisu zwanego obecnie *transformacją Lorentza*. Pierwotnie próbowano ją interpretować jako transformację z układu spoczywającego względem eteru do układu poruszającego się względem eteru.

**Geometria różniczkowa.** W 1854 roku Bernhard Riemann miał wygłosić swój wykład habilitacyjny. Jak píše Marek Kordos w swojej książce „Wykłady z historii matematyki”, Carl Friedrich Gauss zażyczył sobie, żeby Riemann, który w swojej pracy zajmował się głównie analizą, przygotował dla odmiany coś z geometrii.

Badania nad tzw. geometriami nieeuklidesowymi były prowadzone już wcześniej. Sam Gauss rozwijał teorię zakrzywionych powierzchni zanurzonych w przestrzeni trójwymiarowej. Istniała przepiękna geometria Bolyaia–Łobaczewskiego (można o niej poczytać w  $\Delta_{18}^8$ ). Jak się później okazało, wszystkie te geometrie są przykładami, które można opisać w języku geometrii Riemanna. Riemann wprowadził pojęcie *rozmaitości*, czyli obiektu w pewnym sensie pozszywanego z małych, prawie euklidesowych łatek, tak jak typową piłkę nożną zszywa się z wielu prawie płaskich kawałków skóry, otrzymując powierzchnię sferyczną. W ten sposób można uzyskać w zasadzie dowolny gładki (tzn. bez zagięć) kształt, i to nie tylko dwuwymiarowej powierzchni. Rozmaitości mogą mieć dowolny wymiar, np. 3 lub 4 (jak czasoprzestrzeń).

Riemann zauważył, że rozmaitość można opisywać (lokalnie) za pomocą dowolnych współrzędnych, niekoniecznie takich, które odzwierciedlają relacje geometryczne pomiędzy punktami. Na przykład odległość może być skomplikowaną funkcją współrzędnych punktów. Niezależnie od tego, w jakim układzie współrzędnych ją obliczamy, powinno zawsze wychodzić tyle samo. Wprowadził więc sposób mierzenia długości i kątów między wektorami na rozmaitości, czyli *metrykę Riemanna*.

Wykład Riemanna nie wzbudził na początku dużego zainteresowania. Został opublikowany dopiero po kilkunastu latach przez fizyka Hermana Helmholtza. Rozwijaniem geometrii Riemanna zajęli się następnie Włosi (dlatego w podręcznikach OTW pojawiają się nazwiska: Ricci, Bianchi czy Levi-Civita), którzy rozwinęli również tzw. rachunek tensorowy.

**Co dalej?** Einstein zrozumiał, że eter nie jest falam elektromagnetycznym do niczego potrzebny i że transformacja Lorentza jest poprawną transformacją pomiędzy poruszającymi się względem siebie obserwatorami. Tak powstała STW. Następnie Einstein wprowadził opis grawitacji jako zakrzywienia czasoprzestrzeni, a do opisu tej krzywej geometrii użył języka zaadaptowanej odpowiednio geometrii różniczkowej i rachunku tensorowego. Tak powstała OTW. Opisane poprawki do pozycjonowania GPS biorą się właśnie stąd, że czasoprzestrzeń, w której poruszamy się my i satelity, jest rozmaitością zakrzywioną, a nie euklidesową. Pamiętajmy o tym, kiedy smartfonowa nawigacja prowadzi nas na spotkanie ze znajomymi do pizzerii – może wymyślimy kolejne zastosowanie teorii względności.

Więcej o historii eteru i STW można przeczytać w artykule Michała Tarnowskiego  $\Delta_{18}^6$ .

## Nowe, niezwykle życie wieży ciśnień

Niezwykłe życie ciechanowskiej wieży ciśnień zaczyna się od równie niezwykłego człowieka, architekta Jerzego Michała Bogusławskiego (1925–2018). Niepokorny i niestandardowy, żołnierz AK i NSZ. Wykształcony w pracowni Tygrysów prof. Pniewskiego (m.in. współprojektował gmach KC PZPR w Warszawie). Pracując w Biurze Odbudowy Stolicy, wyspecjalizował się w projektowaniu obiektów przemysłowych. W latach 1976–1985 realizował tego typu projekty w Afganistanie (Kabul), Nigerii (Yola i Lagos) i Syrii (Damaszek). Projektował między innymi budynki rządowe w Afganistanie, w Nigerii osiedla mieszkaniowe w interiorze, a w Syrii budynki targów międzynarodowych.

W 1970 roku architekt podjął się zaprojektowania wieży ciśnień (zbiornika wyrównawczego) w Ciechanowie.

W czasie pracy nad tym projektem przyszła mu na myśl konstrukcja składająca się z dwóch form matematycznych: torusa i hiperboloidy.

Jednak gdy już ją zbudowano, okazało się, że nie spełnia nowych wymagań, i stała tak, rdzewiejąc, przez lata. Aż tu w 2013 roku w rankingu portalu The World Geography przyznano jej status jednej z 12 niezwykłych wież na świecie

([www.theworldgeography.com/2013/11/unusual-towers.html](http://www.theworldgeography.com/2013/11/unusual-towers.html)).

Pan Bogusławski, już na emeryturze, zobaczył dla wieży ciechanowskiej nową przyszłość – centrum popularyzacji nauk, w szczególności matematyki. W drugiej dekadzie XXI wieku z radością wrócił do „swojej” pięknej wieży.



(Zdjęcie jest własnością Urzędu Miasta Ciechanów)

Portal The World Geography Ciechanowską wieżę wymienia na piątym miejscu wśród najbardziej niezwykłych wież na świecie:

1. Ivy Tower, Belgia
2. Guinigi Tower, Włochy
3. Dzwonnica soboru św. Mikołaja w Kalazinie, Rosja
4. Wieża telewizyjna w Jekaterynburgu, Rosja
5. Wieża ciśnień w Ciechanowie
6. The Pirate Tower, USA
7. Sathorn Unique, Tajlandia
8. La Cheminée Moretti, Francja
9. Shime Tower, Japonia
10. Montreal Tower, Kanada
11. Tower of Wind, Japonia
12. PL Peace Tower, Japonia

Ideę jej rewitalizacji i przekształcenia w obiekt popularyzujący naukę w udany sposób zaszczepił w Urzędzie Miasta Ciechanowa – między innymi ówczesnej wiceprezydent UM Joannie Rak-Potockiej, prezydentowi Krzysztofowi Kosińskiemu i Radzie Miasta, a oni umieli także trafić do decyzyjnej wyobraźni marszałka województwa – Adama Struzika. Wsparło ich mazowieckie Radio Dla Ciebie (RDC). Projekt rewitalizacji zyskał finansowe wsparcie Unii Europejskiej.

Zaintrygowana audycją radiową pojechałam do Ciechanowa, gdzie zostałam serdecznie przyjęta przez panią Rak-Potocką. Uwierzyłam w jej słowa: „jestem osobą, która dobre pomysły realizuje”. (O początkach projektu pisałam w *Delcie* w grudniu 2015 roku.) Uwierzyłam słusznie, bo oto w sierpniu 2019 roku rozpoczęto sprzedaż biletów na zwiedzanie Parku Nauki Torus ([www.parknaukitorus.pl](http://www.parknaukitorus.pl)). Z początkiem roku szkolnego Park Nauki został udostępniony zwiedzającym. Byłam, nie tylko podziwiałam, ale też bardzo się cieszyłam. Park zwiedza się (modne słowo) interaktywnie, ekspozycji TRZEBA dotykać i je uruchamiać. Instalacje uczą i bawią, zachęcają do widzenia świata przez rozumienie praw fizyki, wciągają w aktywne myślenie o otaczających nas zjawiskach. Jestem pewna, że Park współpracować będzie z rewitalizowaną w równoległym projekcie piękną kamienicą opodal rynku. W kamienicy zagospodarują się seniorzy oraz Klub Młodych Odkrywców. Znajdą się

tam: sala spotkań, kawiarnia i biblioteka. W odległości pieszej przechadzki – Zamek Książąt Mazowieckich. Widokiem na zamek z kolei chwali się inny historyczny obiekt rewitalizowany przez miasto: młyn z czerwonej cegły (bardzo ciekawa jestem, co miasto zaprojektuje w jego wnętrzach, ja zaproponowałabym m.in. wystawy sztuki i siedzibę dla miejscowych artystów sztuk plastycznych). Kilka kilometrów dalej zaprasza Muzeum Romantyzmu w Opinogórze. Tak więc ośrodkowi kultury w Ciechanowie przybyła, w sposób naturalny, nauka.

Pięćdziesięcioletnia już opowieść o wieży w Ciechanowie jest niezwykle optymistyczna. Ucieleśnia entuzjazm i skuteczność architektów, budowniczych, techników, naukowców i działaczy samorządowych, którzy porwani piękną ideą zrealizowali piękny projekt. Do Parku Nauki Torus wkroczą teraz uczniowie, ludzie dorośli, ci aktywni zawodowo i ci, którzy przeżywają wiek podsumowań. To miejsce pulsować będzie inicjatywami i zaproszeniem do dalszego rozwoju. Od tych, którzy tam będą przychodzić, zależeć będzie dalsze życie wieży w Ciechanowie. Wszystkiego naj, najlepszego.

Magdalena FIKUS ([magda.fikus@gmail.com](mailto:magda.fikus@gmail.com))

## Informatyczny kącik olimpijski (132): XORanges

W tym odcinku omówimy rozwiązanie zadania XORanges, które pojawiło się na trzecich zawodach European Junior Olympiad in Informatics (Maribor, Słowenia).

**XORanges:** Dany jest ciąg  $n$  liczb naturalnych  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  oraz  $q$  poleceń dwóch typów. 1) Zmień wartość  $i$ -tego elementu. 2) Podaj współczynnik przedziału  $a_x, a_{x+1}, \dots, a_y$ . Współczynnik przedziału  $a_x, a_{x+1}, \dots, a_y$  obliczamy w następujący sposób: dla każdego podzłowa (spójnego fragmentu) tego przedziału liczymy xor jego wartości, następnie xorujemy te wyniki, otrzymując współczynnik przedziału. Przykładowo współczynnik przedziału  $(a_3, a_4, a_5)$  wynosi  $a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus (a_3 \oplus a_4) \oplus (a_4 \oplus a_5) \oplus (a_3 \oplus a_4 \oplus a_5)$ . Zaproponuj algorytm, który jest w stanie możliwie szybko wykonać wszystkie polecenia podane na wejściu.

Na początku przyjmijmy, że polecenia typu 1) będziemy wykonywali w czasie  $O(1)$  poprzez zmianę wartości  $a_i$ . Zatem zajmijmy się odpowiedziami na polecenia typu 2). Załóżmy, że chcemy obliczyć współczynnik  $a_x, a_{x+1}, \dots, a_y$ . Na potrzeby artykułu wprowadźmy kilka oznaczeń. Niech:

- $[a_i; a_j]$  oznacza ciąg  $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j)$ ,
- „xor podzłowa  $[a_i; a_j]$ ” oznacza wartość  $a_i \oplus a_{i+1} \oplus \dots \oplus a_{j-1} \oplus a_j$ .

### Rozwiązanie $O(q \cdot n^3)$

Pierwsze rozwiązanie polega na obliczeniu xora każdego z  $\frac{d(d-1)}{2}$  podzłowa, gdzie  $d = y - x + 1$  i oznacza długość przedziału  $[x; y]$ . Obliczenie xora podzłowa odbywa się za pomocą metody naiwnej, polegającej na przejściu po wszystkich elementach. Na koniec xorujemy powyższe wyniki. Rozwiązanie dla jednego polecenia działa w czasie  $O(n^3)$ , zatem całkowita złożoność to  $O(q \cdot n^3)$ .

### Rozwiązanie $O(q \cdot n^2)$

W tym rozwiązaniu, podobnie jak wyżej, obliczymy xor podzłowa  $[a_{x'}; a_{y'}]$  (dla wszystkich  $x \leq x' \leq y' \leq y$ ) niezależnie. Jednak tym razem, zamiast naiwnej metody, skorzystamy z obserwacji, że:

$$a_{x'} \oplus a_{x'+1} \oplus \dots \oplus a_{y'} = s_{y'} \oplus s_{x'-1},$$

gdzie  $s_i = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_i$ . Ciąg  $s = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_n)$  ma analogiczną konstrukcję do ciągu sum prefiksowych i możemy go wygenerować w czasie  $O(n)$ . Otóż  $s_0 = 0$ , zaś  $s_i = s_{i-1} \oplus a_i$  (dla  $i > 0$ ). W ten sposób otrzymaliśmy rozwiązanie działające w czasie  $O(q \cdot n^2)$ .

### Rozwiązanie $O(q \cdot n)$

Przypomnijmy proste fakty:

- $g \oplus g = 0$  (dla  $g$  naturalnego),
- $g \oplus 0 = g$  (dla  $g$  naturalnego),
- $\oplus$  jest operacją łączną i przemianą.

Na podstawie powyższych faktów możemy zauważyć, że do obliczenia współczynnika przedziału wystarczy znać parzystość liczby wystąpień każdego elementu w wyrażeniu je opisującym. Przykładowo:

$$\begin{aligned} a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus (a_3 \oplus a_4) \oplus (a_4 \oplus a_5) \oplus (a_3 \oplus a_4 \oplus a_5) &= \\ &= a_3 \oplus a_5, \end{aligned}$$

gdź  $a_3$  i  $a_5$  występują nieparzyście wiele razy w całym wyrażeniu, zaś  $a_4$  występuje parzyście wiele razy.

Zastanówmy się, ile razy  $a_i$  (dla  $x \leq i \leq y$ ) występuje we wzorze opisującym współczynnik przedziału  $[a_x; a_y]$ .

Innymi słowy chcemy obliczyć, w ilu podzłowach występuje  $a_i$ . Niech  $f_i$  oznacza tę wartość. Otóż początkiem takiego podzłowa może być element o numerze z przedziału  $[x; i]$ , końcem zaś element o numerze z przedziału  $[i; y]$ .

$$\underbrace{a_x, \dots, a_{i-1}}_{i-x+1}, \underbrace{a_i, a_{i+1}, \dots, a_y}_{y-i+1}$$

Zatem  $f_i = (i - x + 1)(y - i + 1)$ . Współczynnik przedziału to xor zbioru  $\{a_i \mid x \leq i \leq y \text{ i } f_i \text{ jest nieparzyste}\}$ . Wyznaczenie tego zbioru realizujemy w czasie  $O(n)$ . Zatem całe rozwiązanie działa w czasie  $O(q \cdot n)$ .

### Rozwiązanie $O(n + q \cdot \log(n))$

Przed nami rozwiązanie wzorcowe. Polecenie 1) będziemy wykonywali nieco inaczej niż poprzednio, ale najpierw opiszemy operację 2).

Przeanalizujemy parzystości elementów ciągu  $f$ . Otóż  $f_i$  jest nieparzyste, jeśli  $(i - x + 1)$  i  $(y - i + 1)$  są nieparzyste. Stąd  $f_i$  jest nieparzyste wtedy i tylko wtedy, gdy  $x, y, i$  są tej samej parzystości. Zatem jeśli  $x$  i  $y$  są różnej parzystości, to odpowiedzią jest 0. W przeciwnym przypadku odpowiedzią jest:

$$a_x \oplus a_{x+2} \oplus a_{x+4} \oplus \dots \oplus a_{y-2} \oplus a_y.$$

Chcemy szybko znajdować wartość powyższego wyrażenia. Zauważmy, że jest to xor elementów na pozycjach parzystych lub nieparzystych ciągu  $[a_x; a_y]$ . Niech zatem:

- $a^N = (a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, a_7, 0, \dots)$ ,
- $a^P = (0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, a_8, \dots)$ .

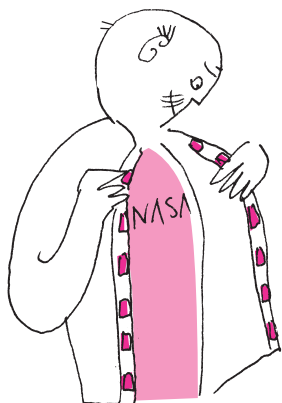
Wówczas dla  $x$  parzystego odpowiedzią jest  $a_x^P \oplus a_{x+1}^P \oplus \dots \oplus a_y^P$ , zaś dla  $x$  nieparzystego odpowiedzią jest  $a_x^N \oplus a_{x+1}^N \oplus \dots \oplus a_y^N$ .

Zbudujmy dwa drzewa przedziałowe. Liśćmi pierwszego z nich niech będą wartości ciągu  $a^N$ , zaś liśćmi drugiego niech będą wartości ciągu  $a^P$ . Pozostałe węzły będą przechowywały xor wartości dzieci. Taka struktura pozwala w czasie  $O(\log(n))$  znajdować xor przedziału oraz w tym samym czasie obsługiwać operację zmiany wartości elementu (polecenie typu pierwszego). Zatem całe rozwiązanie działa w czasie  $O(n + q \cdot \log(n))$ .

Bartosz ŁUKASIEWICZ

## Prosto z nieba: Kosmiczne technologie

Często mówi się, że kluczowe technologie prototypowych urządzeń projektowanych przez naukowców i inżynierów do podboju kosmosu są później wdrażane do masowej produkcji i codziennego użytku, choć nie zawsze wiadomo, które dokładnie wynalazki rzeczywiście wprost pochodzą z kosmosu. W tym numerze *Delty* piszemy na przykład o matrycy CCD oraz o nawigacji satelitarnej GPS. Oba te wynalazki zostały upowszechnione w ramach projektów transferów technologii NASA. Są to komercyjne produkty i usługi, które były opracowane z pomocą NASA, między innymi poprzez kontrakty badawczo-rozwojowe, patenty czy korzystanie z obiektów i badań agencji kosmicznej.



W upowszechnianiu tej formy wdrażania nowych pomysłów do zastosowań w życiu codziennym miał udział pisarz *science fiction* Robert A. Heinlein, który w 1979 roku rozreklamował ideę *spinoff* przed Kongresem Stanów Zjednoczonych po operacji wszczepienia bajpasów (jednej z pierwszych udanych operacji przeprowadzonej w celu skierowania przepływu krwi z obejściem niedrożnego fragmentu tętnicy). Heinlein był żywym dowodem na skuteczność czterech technologii opracowanych pierwotnie z myślą o podboju kosmosu, które to technologie umożliwiły operację.

W projektach *spinoff* powstały m.in. takie pomysły, jak:

- pianka z pamięcią kształtu (*memory foam*), pierwotnie stosowana do poprawienia amortyzacji siedzeń i ochrony przed wypadkami dla pilotów i pasażerów linii lotniczych,
- „niewidzialne” aparaty ortodontyczne do korekcji zgryzu, wykorzystujące przezroczystą ceramikę,
- odporne na zarysowania soczewki, wykorzystujące powłokę początkowo zaprojektowaną w celu ochrony sprzętu i wizjerów kasków w misjach kosmicznych,
- koc ratunkowy (folia termiczna NRC) – wykonany z cienkiego arkusza tworzywa sztucznego pokrytego metalicznym środkiem odbijającym,
- liofilizacja, czyli suszenie sublimacyjne zamrożonych substancji.

W przeciwieństwie do różnych legend NASA nie wynalazła innych popularnych technologii, takich jak:

- rezonans magnetyczny (MRI, *magnetic resonance imaging*); ale przyczyniła się do znacznego postępu w tej dziedzinie technologii,
- panele słoneczne – ogniwa fotowoltaiczne istnieją od XIX wieku, a technologia paneli słonecznych jest nieustannie rozwijana. Niemniej jednak NASA, która istnieje jako agencja rządu Stanów Zjednoczonych od 1958 roku, intensywnie wykorzystywała panele słoneczne w wielu swoich misjach,
- kody kreskowe – NASA opracowała specjalny rodzaj kodu kreskowego do inwentaryzacji promu kosmicznego i innych elementów systemu kosmicznego, jednak nie należy tego mylić z oryginalnym projektem kodu kreskowego znanego ze sklepów,
- zegary kwarcowe – pierwszy zegar kwarcowy pochodzi z 1927 roku. Pod koniec lat 60. NASA współpracowała z firmami prywatnymi w celu stworzenia bardzo dokładnego zegara kwarcowego,
- wykrywacze dymu – nie zostały wymyślone przez NASA, a jedynie używane, m.in. w ramach projektu Skylab,
- teflon – został wynaleziony przez firmę DuPont w 1938 roku i był często wykorzystywany przez NASA w osłonach termicznych i skafandrach kosmicznych, co bardzo zwiększyło rozpoznawalność tego materiału,
- zapięcia typu rzep (*velcro*) – tego typu zapięcia zostały wynalezione w latach 40. XX wieku przez szwajcarskiego inżyniera George’a de Mestrala. Rzep był wykorzystywany podczas misji Apollo do wygodnego składowania wyposażenia astronautów, przez co zyskał niezwykle dużą popularność.

Nieprawdziwa jest niestety też legenda o wynalezieniu przez NASA astronomicznie drogiego „kosmicznego długopisu” i sprytnych i praktycznych radzieckich kosmonautach, którzy używali zwykłych ołówków (w rzeczywistości długopis działający w nieważkości wyprodukowała firma Fisher).

Więcej informacji o starszych i nowych projektach NASA można znaleźć na stronie [spinoff.nasa.gov](http://spinoff.nasa.gov). W przyszłości w rozwoju nowoczesnych technologii paleczkę od NASA przejmą zapewne (lub już przejmują!) niezależne prywatne firmy przemysłu kosmicznego w rodzaju SpaceX Elona Muska.

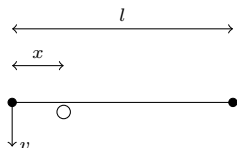
Michał BEJGER

### Wyniki Konkursu imienia Witolda Wilkosza

Jury Konkursu im. Witolda Wilkosza na najlepszą studencką pracę popularyzującą matematykę w 2019 roku (w składzie: Bartłomiej Bzdęga, Krzysztof Ciesielski – przewodniczący, Andrzej Dąbrowski, Adam Dzedzej, Jarosław Górnicki, Zdzisław Pogoda, Michał Szurek) postanowiło przyznać:

- dwie równorzędne **Nagrody II stopnia** otrzymali  
**Piotr Pikul** (UJ, matematyka) za pracę *O ortocentrach i parabolach, a zwłaszcza o twierdzeniu odwrotnym Steinera*,  
**Filip Rękawek** (UW, MISMaP) za pracę *Jedno zadanie, wiele możliwości*;
- **Nagrodę III stopnia** otrzymała **Maria Gałuszka** (UJ, matematyka) za pracę *Sumy kwadratów wielomianów*;
- **wyróżnienie** otrzymała **Nina Bażela** (AGH, informatyka) za pracę *Kwantowa strona mocy*.

## Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2020

## Klub 44 M

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
779 ( $WT = 2,71$ ) i 780 ( $WT = 1,21$ )  
z numeru 4/2019

Paweł Kubit	Kraków	43,07
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Krzysztof Kamiński	Pabianice	39,94
Janusz Olszewski	Warszawa	37,20
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Janusz Piet	Warszawa	31,23

### Zadania z fizyki nr 686, 687

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

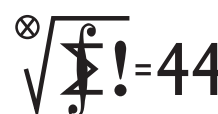


**686.** Dwie małe kulki o masach  $m$ , połączone nieważkim prętem o długości  $l$ , spoczywają na gładkim stole. W odległości  $x$  od jednej z kulek znajduje się wbity w powierzchnię stołu kołek. W chwili początkowej odległość między prętem a kołkiem jest bardzo mała (rysunek). Kulka położona bliżej kołka została uderzona w kierunku równoległym do powierzchni stołu i prostopadłym do pręta i w bardzo krótkim czasie uzyskała prędkość  $v$ . Następnie pręt zderzył się sprężysto z kołkiem. Jaka powinna być odległość  $x$ , aby po zderzeniu pręt nie obracał się?

**687.** Znaleźć promień największej kropli wody, która może wyparować, nie pobierając ciepła z otoczenia. Ciepło parowania wody wynosi  $q = 2,26 \cdot 10^6$  J/kg, współczynnik napięcia powierzchniowego wody  $\sigma = 7,2 \cdot 10^{-2}$  J/m<sup>2</sup>. Zakładamy, że temperatura kropli nie zmienia się.

### Zadania z matematyki nr 789, 790

Redaguje Marcin E. KUCZMA



**789.** Znaleźć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające równanie

$$f(f(x) + y) = 4yf(x) + f(x^2 - y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

**790.** Na bokach  $AB$ ,  $AC$  trójkąta ostrokątnego  $ABC$ , po jego zewnętrznej stronie, zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne  $ABD$ ,  $ACE$  z kątami prostymi przy wierzchołkach  $D$ ,  $E$ . Odcinki  $CD$  i  $BE$  przecinają się w punkcie  $P$ . Punkty  $M$  i  $N$  są środkami odcinków  $BC$  i  $DE$ . Udowodnić, że każda z prostych  $MN$ ,  $AP$  jest prostopadła do prostej  $DE$ .

Zadanie 790 zaproponował pan Mikołaj Pater.

#### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej karcie), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Niebo w listopadzie

Zaczął się czas zimowy i Słońce chowa się pod widnokrąg niewiele po godzinie 16. W trzeciej dekadzie miesiąca Słońce przetnie równoleżnik  $-20^\circ$  deklinacji w drodze na południe, rozpoczynając dwumiesięczny okres najkrótszych dni i najdłuższych nocy, z kulminacją w dniu przesilenia zimowego 21 grudnia. Przez cały miesiąc długość dnia skróci się o ponad półtorej godziny, do niewiele ponad 8 godzin pod jego koniec.

**Słońce** stanie się tłem głównego wydarzenia astronomicznego listopada, a nawet całego 2019 roku: 11 dnia miesiąca przed jego tarczą przejdzie planeta Merkury. Zjawisko szczegółowo opisane jest w poprzednim numerze *Delta*, przypomnę tylko, że



zacznie się ono przed godziną 13:35 i potrwa do 19:04 naszego czasu. Niestety Słońce zajdzie około godziny 16, stąd w Polsce da się zaobserwować tylko jego pierwszą część. Kolejne takie przejście zdarzy się również w listopadzie, ale dopiero w 2032 roku, a zatem jeśli tylko będzie odpowiednia pogoda, warto podjąć się jego obserwacji. Tarcza Merkurego podczas przejścia jest bardzo mała, jej średnica wyniesie 10", dlatego do obserwacji zjawiska potrzebny będzie teleskop z właściwym filtrem powiększającym kilkadziesiąt razy.

Bezksiężycowe noce wystąpią na początku i pod koniec listopada. **Srebrny Glob** zacznie miesiąc w fazie cienkiego sierpa, 4 listopada przechodząc przez I kwadrę



w gwiazdozbiorze Koziorożca. Dzień po transzycie Merkurego, 12 listopada, Księżyc zaświeci pełnym blaskiem na pograniczu Barana i Byka, aby tydzień później przejść przez ostatnią kwadrę na granicy Raka z Lwem. Nów przypada 26 listopada, a potem Księżyc przeniesie się na niebo wieczorne. Oczywiście o tej porze roku wieczorem ekliptyka jest nachylona niekorzystnie, zaś rano – korzystnie, a zatem po nowiu warunki obserwacyjne Księżyca są kiepskie, a rano – bardzo dobre. Tak więc 25 listopada będzie można całkiem łatwo dostrzec cienki sierp Księżyca na 33 godziny przed nowiem, jak na godzinę przed świtem wznosi się prawie  $7^\circ$  ponad południowo-wschodnim widnokregiem. Warto wtedy wstać wcześniej, szczególnie, że niecałe  $2^\circ$  na prawo od niego znajdzie się planeta Merkury, świecąca blaskiem  $-0,3^m$ , a z kolei  $10^\circ$  na prawo i w górę od Merkurego – świecąca znacznie słabiej, z jasnością  $+1,7^m$ , planeta Mars.

Jak już wspominałem, 11 listopada **Merkury** spotka się ze Słońcem w koniunkcji dolnej i przejdzie na niebo poranne, dążąc do maksymalnej elongacji zachodniej 28 listopada. Oddali się wtedy od Słońca na  $20^\circ$ , osiągając na początku świtu cywilnego wysokość prawie  $10^\circ$ . Merkury pozostanie ozdobą porannego nieba do końca pierwszej dekady grudnia. W tym czasie jasność planety urośnie z  $+1,7$  do  $-0,6^m$ , faza zwiększy się z 12 do 90%, zaś średnica tarczy spadnie z 9 do  $5''$ .

Planeta **Mars** powoli poprawia swoją widoczność, pokonując w listopadzie trasę od środka gwiazdozbioru Panny do jego granicy z Wagą. Mars 10 listopada przejdzie niecałe  $3^\circ$  od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji, a 24 listopada  $5^\circ$  nad nim znajdzie się Księżyc w fazie 8%. Przez cały miesiąc planeta wschodzi około godz. 4:35, zajmując pod koniec miesiąca na godzinę przed świtem pozycję na wysokości  $14^\circ$ . W drugiej części miesiąca Marsowi towarzysza dotrzyma Merkury, zbliżając się doń maksymalnie na  $10^\circ$ . Przez cały listopad jasność Marsa utrzyma się na poziomie  $+1,7^m$ , przy średnicy tarczy  $4''$ .

Na niebie wieczornym wyraźnie pogarszają się warunki obserwacyjne planet **Jowisz** i **Saturn**. Obie planety znikają z widnokregu niewiele po zachodzie Słońca, przebywając przez cały czas nisko nad widnokregiem. Stąd nie można liczyć na wiele więcej niż wzrokowe stwierdzenie obecności obu planet we właściwym miejscu nieboskłonu. Do końca listopada dystans między planetami skróci się do  $18^\circ$ . W tym czasie jasność Jowisza zmniejszy się do  $-1,8^m$ , a średnica jego tarczy – do  $32''$ . Jasność Saturna spadnie do  $+0,6^m$ , przy średnicy tarczy  $15''$ . Księżyc minie Saturna w pierwszych i ostatnich dwóch dniach miesiąca, zbliżając się za każdym razem na około  $4^\circ$ , lecz za drugim razem sierp Księżyca będzie wyraźnie cieńszy.

W końcówce miesiąca do obu planet dołączy planeta **Wenus**, pokazująca się wreszcie po 9-miesięcznej nieobecności na dużych północnych szerokościach geograficznych. Wenus należy szukać pod Jowiszem gdzieś od 20 listopada. Wenus minie Jowisza

24 listopada w odległości  $1,4^\circ$ , a 28 listopada między planetami znajdzie się Księżyc w fazie zaledwie 5%, zachowując do obu planet dystans około  $2^\circ$ . Wcześniej tego samego dnia, od około 10:44 do 11:48, nastąpi zakrycie Jowisza przez Srebrny Glob, co da się zaobserwować przez teleskop. Wenus pokaże tarczę o jasności  $-3,9^m$ , średnicy  $11''$  i fazie 90%.

Bardzo dobrze widoczne są dwie ostatnie planety Układu Słonecznego. **Neptun** 27 listopada zmieni kierunek ruchu na prosty, co oznacza, że kończy się właśnie okres najlepszej widoczności planety. Neptun zawróci  $1,5^\circ$  na południowy zachód od gwiazdy  $\varphi$  Aqr, świecąc z jasnością  $+7,8^m$ . **Uran** jest tuż po opozycji i można go obserwować przez całą noc jakiejś  $11^\circ$  na południe od Hamala, najjaśniejszej gwiazdy Barana. Jego jasność przekracza  $+5,7^m$ . Księżyc spotka się z Neptunem 6 i 7 listopada, w fazie ponad 70%, zaś z Uranem 4 dni później, przed pełnią.

Po minięciu Urana **Księżyc** powędruje dalej i 13 listopada przetnie Hiady, omijając niestety najjaśniejsze gwiazdy gromady. Srebrny Glob przejdzie niewiele ponad  $0,5^\circ$  od trójki gwiazd  $\delta 1$ ,  $\delta 2$  i  $\delta 3$  Tau, a nad ranem przekroczy linię łączącą Aldebarana z gwiazdą  $\epsilon$  Tau. W nocy z 15 na 16 listopada, w fazie obniżonej do 88%, Księżyc zakryje parę jasnych gwiazd Bliźniąt: Tejat Prior ( $\eta$  Gem, odkrycie ok. 23:40) i Tejat Posterior ( $\mu$  Gem, odkrycie ok. 4:15). Cztery dni później, 20 listopada, Księżyc przejdzie  $3^\circ$  od Regulusa, zaś 23 listopada rano, w fazie już tylko 15%, dotrze na  $11^\circ$  do Spiki.

W listopadzie blisko maksimum swojego blasku znajdują się dwie mirydy, które mogą być widoczne gołym okiem. **Mira Ceti** osiągnie największą jasność 7 listopada. Na początku miesiąca gwiazda góruje około godz. 23, a zatem jest widoczna bardzo dobrze. W tym okresie o Cet może mieć więcej niż  $+4^m$ . Mirę można odnaleźć, przedłużając linię łączącą Hamala z Uranem. Drugą taką gwiazdą jest R Leo, położona około  $5^\circ$  na zachód od Regulusa. Ta maksimum blasku osiągnie na początku grudnia i w drugiej połowie miesiąca powinna przekroczyć granicę widoczności gołym okiem. R Leo pod koniec miesiąca wschodzi przed godz. 22, górując 7 godzin później.

Również 7 listopada przypada opozycja planetoidy 4 Westa. Niestety tym razem nie osiągnie ona aż tak dużej jasności, jak latem zeszłego roku, gdy była widoczna gołym okiem. Jednak jej blask przekroczy  $+6,5^m$ , a zatem do jej dostrzeżenia wystarczy lornetka lub mały teleskop. Mimo to odnalezienie Westy nie powinno sprawiać trudności, gdyż znacznie ona miesiąc na pograniczu Byka, Barana i Wieloryba, niedaleko świecących blaskiem około  $+3,6^m$  gwiazd  $\xi$  i o Tau. 5 listopada Westa przejdzie  $20'$  na południe od drugiej z wymienionych gwiazd. Dzień później planetoida wejdzie na obszar gwiazdozbioru Wieloryba, kończąc miesiąc niecały  $1^\circ$  od słabszej o  $1^m$  gwiazdy  $\lambda$  Ceti.

Ariel MAJCHER

## Jak szybko rozszerza się Wszechświat?

Z pozoru niewinne, zawarte w tytule pytanie od kilku lat wywołuje gorące spory w środowisku kosmologów. Okazuje się bowiem, że aktualna dziś odpowiedź na nie brzmi: zależy, jak mierzy.

Zacznijmy jednak od podstawowych definicji. Tempo rozszerzania się Wszechświata opisujemy, podając prędkość zmian odległości między dwoma niezwiązanymi i nieoddziałującymi obiektami we Wszechświecie względem odległości między obiektami. Wynik wyznaczony dziś nosi nazwę stałej Hubble'a, ale – wyznaczony we wcześniejszych chwilach ewolucji Wszechświata – miałby inną wartość, dlatego lepiej byłoby go nazywać parametrem Hubble'a określonym dla danej chwili. Parametr Hubble'a ma wymiar odwrotności czasu, podobnie jak częstotliwość, ale najwygodniej jest używać jednostek  $\text{km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$ . Parametr ten w tych jednostkach ma wartość  $67,4 \pm 0,5$  według pomiarów satelity Planck lub  $74,0 \pm 1,4$  według pomiarów drabiny odległości. Drastyczna niezgodność tych dwóch wyników jest źródłem wspomnianych kontrowersji.

Może różne metody pomiaru stałej Hubble'a powodują, że wyniki obarczone są jakimś dodatkowym błędem? Przyjrzyjmy się im zatem nieco dokładniej.

Zespół naukowy satelity Planck mierzy niejednorodności mikrofalowego promieniowania tła, które zostało wyemitowane, gdy Wszechświat miał kilkaset tysięcy lat. Aby określić strukturę tych niejednorodności, należy wiedzieć, jak szybko w tak wczesnym Wszechświecie przemieszczały się zaburzenia gęstości i ciśnienia, które w normalnych okolicznościach nazwalibyśmy po prostu dźwiękiem. To zależy od wzajemnych proporcji liczby nukleonów i fotonów we wczesnym Wszechświecie, czyli od parametrów założonego modelu kosmologicznego. Wiedząc, jakie są rozmiary niejednorodności, możemy zmierzyć kąt, pod jakim je widzimy, a stąd określić, jak są daleko. Ta odległość jest związana z tempem rozszerzania się Wszechświata od chwili wyemitowania mikrofalowego promieniowania tła aż do chwili obecnej oraz związana ze stałą kosmologiczną.

W październiku 2018 roku Międzynarodowa Unia Astronomiczna w głosowaniu (przewagą 78% głosów za) zdecydowała o zmianie nazwy prawa Hubble'a na prawo Hubble'a-Lemaître'a, uznając w ten sposób ważny wkład Georges'a Lemaître'a, który w 1927 roku przewidział istnienie zależności pomiędzy prędkością ucieczki galaktyki a odległością do niej.

Rodzi się tu pokusa, aby zwątpić w model kosmologiczny, jednak zgadza się on doskonale z wieloma innymi obserwacjami na tyle dobrze, że trudno coś w nim bezkarnie zmieniać.

Najdokładniejszy obecnie wynik wyznaczenia stałej Hubble'a za pomocą drabiny odległości pochodzi od zespołu SH0ES. Kieruje nim Adam Riess, który po uzyskaniu w wieku 42 lat Nagrody Nobla za odkrycie przyspieszonego rozszerzania się Wszechświata bynajmniej nie przeszedł na naukową emeryturę. Skonstruowana przez SH0ES drabina odległości pozwala na określenie zależności między przesunięciem ku czerwieni danego obiektu (patrz  $\Delta_{19}^4$ ) a jego odległością od nas. Dla pobliskich cefeid wyznacza się odpowiednią zależność metodą paralaksy. Pobliskie supernowe typu Ia występują odpowiednio często w towarzystwie odległych cefeid, można więc tę zależność wyznaczyć i dla nich, ekstrapolując wyniki uzyskane w poprzednim kroku. Kolejna ekstrapolacja pozwala na sięgnięcie do jeszcze dalszych supernowych i wiarygodne pomiary parametrów kinematyki Wszechświata w wielkiej skali.

Czytelników zaniepokojonych ekstrawagancką typografią akronimu użytego w powyższym akapicie uprzejmie informujemy, że  $H_0$  odnosi się do powszechnego oznaczenia stałej Hubble'a, występującego w nazwie zespołu kierowanego przez Riessa: *Supernovae,  $H_0$ , for the Equation of State of Dark Energy*.

Jasne jest już chyba, że w przypadku każdego z omawianych wyników hasło „naukowcy zmierzili” oznacza ogrom mrówczej pracy i współpracę wielu ekspertów o uzupełniających się kompetencjach.

Podstawowa kontrowersja bierze się z porównania rezultatów dla światła „starego”, czyli mikrofalowego promieniowania tła pochodzącego z pierwszych (w skali kosmicznej) epok po Wielkim Wybuchu, ze światłem „nowym”, wyświeconym przez gwiazdy. Czy można coś tu jeszcze poprawić? Jak najbardziej! – mówią najnowsze wyniki prac innych badaczy, w tym zespołu H0liCOW.

Zarówno akronim określający buty, jak i święte krowy wydają się mieć umiarkowany związek z przedmiotem pomiarów.

Inna metoda wyznaczenia odległości do odległych obiektów wykorzystuje soczewkowanie grawitacyjne odległych kwazarów. Jeśli na drodze między takim źródłem a ziemskim obserwatorem stanie masywna galaktyka, obserwator zobaczy dwa obrazy źródła. Jeśli będą one się zmieniać w pewnym niewielkim odstępie czasowym, pozwoli to określić ilość materii na drodze tych promieni, a na tej podstawie – odległość do kwazara i do soczewkującej galaktyki. Te dane już wystarczają do niezależnego określenia stałej Hubble'a. Opublikowane w 2019 roku wyniki H0liCOW ( $73,3 \pm 1,8$ ), choć obarczone sporą niepewnością, są zgodne z wynikiem SH0ES, a nie Plancka.

Pat trwa.

Krzysztof TURZYŃSKI



# Potęga punktu względem okręgu

Bartłomiej BZDEGA

Rozważmy okrąg  $\omega = o(O, r)$  o środku  $O$  i promieniu  $r$  oraz ustalmy pewien punkt  $P$  w odległości  $d$  od punktu  $O$  (na rysunku obok  $d < r$ ). Niech  $AB$  będzie taką średnicą okręgu  $\omega$ , by punkt  $P$  leżał na prostej  $AB$ . Przez punkt  $P$  prowadzimy dowolną prostą, która przecina okrąg  $\omega$  w punktach  $X$  i  $Y$ . Z podobieństwa trójkątów  $APY$  i  $XPB$  wynika, że

$$|PX| \cdot |PY| = |PA| \cdot |PB| = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2,$$

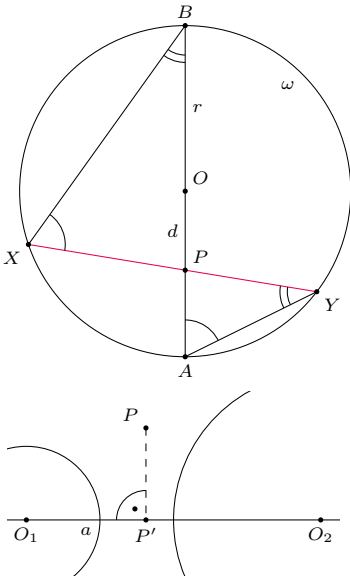
zatem wartość tego iloczynu nie zależy od wyboru prostej przechodzącej przez punkt  $P$ . Pozostawiamy Czytelnikowi wykazanie, że jeśli punkt  $P$  leży na zewnątrz lub na okręgu  $\omega$ , to  $|PX| \cdot |PY| = d^2 - r^2$ . Liczbę  $\mathcal{P}_\omega(P) = |OP|^2 - r^2$  nazywamy *potęgą punktu  $P$  względem okręgu  $\omega = o(O, r)$* . Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że jeśli prosta  $PT$  jest styczna do okręgu  $\omega$  w punkcie  $T$ , to  $\mathcal{P}_\omega(P) = |PT|^2$ .

Teraz rozważmy okręgi  $\omega_1 = o(O_1, r_1)$  i  $\omega_2 = o(O_2, r_2)$ , dla których  $|O_1O_2| = D > 0$ . Niech  $P'$  będzie rzutem prostokątnym punktu  $P$  na prostą  $O_1O_2$  oraz niech  $a = |O_1P'|$ , przy czym wartość  $a$  bierzemy ze znakiem minus, jeśli punkt  $P'$  leży „na lewo” od  $O_1$ . Po prostych rachunkach otrzymamy

$$\mathcal{P}_{\omega_1}(P) = \mathcal{P}_{\omega_2}(P) \iff a = \frac{r_1^2 - r_2^2 + D^2}{2D}.$$

To oznacza, że zbiór tych punktów, które mają jednakową potęgę względem okręgów  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , jest prostą prostopadłą do  $O_1O_2$ . Nazywamy ją *osią potęgową okręgów  $\omega_1$  i  $\omega_2$*  i będziemy oznaczać symbolem  $\ell_{\omega_1, \omega_2}$ . Zauważmy też, że jeśli okręgi przecinają się w dwóch punktach, to ich oś potęgowa przechodzi przez te dwa punkty.

Osie potęgowe są przydatne w dowodzeniu współliniowości punktów: jeśli  $\mathcal{P}_{\omega_1}(P) = \mathcal{P}_{\omega_2}(P)$ , to punkt  $P$  leży na prostej  $\ell_{\omega_1, \omega_2}$ .



**Wskazówki do zadań**

- Należy poszukiwać punktów, których potęgi względem pewnych okręgów można obliczyć na parę sposobów, oraz osi potęgowych par okręgów występujących w zadaniu. (Ta wskazówka odnosi się także do wszystkich pozostałych zadań.)
- Prosta  $PQ$  jest osią potęgową par okręgów z zadania, więc wystarczy wykazać, że punkt  $S$  ma jednakową potęgę względem obu okręgów z zadania. Umiejętne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa powinno wystarczyć.
- Trzeba wykazać, że punkt  $C$  ma równą potęgę względem obu okręgów z zadania. Umiejętne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa powinno wystarczyć.
- Niech  $T$  będzie okręgiem o średnicy  $OL$ . Wówczas okrąg  $T$  przechodzi przez punkt  $M$  i jest styczny do prostej  $AL$  w punkcie  $L$ . Wystarczy zauważyć, że punkt  $A$  ma jednakową potęgę względem okręgów  $\omega$ ,  $T$  i  $\omega$ . Można obliczyć na dwa sposoby potęgi punktów  $A$  i  $B$  względem okręgu z zadania i odjąć stronami otrzymane równości.
- Wystarczy udowodnić, że punkt  $P$  i  $Q$  mają równą potęgę względem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Do tego celu wystarczy podobieństwo odpowiednich trójkątów.
- Niech  $K$  i  $L$  będą punktami styczności okręgu  $\omega$  do odpowiednio, okręgu  $\omega_1$  i odcinka  $PS$ . Wówczas punkty  $A$ ,  $K$  i  $L$  są współliniowe, gdyż punkt  $K$  jest obrazem punktu  $A$  w jedynkowej symetrii względem punktu  $L$ , która przekształca okrąg  $\omega$  na  $\omega_1$ . Mamy też  $|AP| = |AT|$ , bo są to kąty wpisane, oparte na równej długości łuku okręgu  $\omega$ . Mamy też  $|AP| = |AT|$ , bo są to kąty wpisane, oparte na równej długości łuku okręgu  $\omega$ . Resztę zadania wskazujemy, oparte na równej długości łuku okręgu  $\omega$ . Resztę zadania wskazujemy, oparte na równej długości łuku okręgu  $\omega$ .

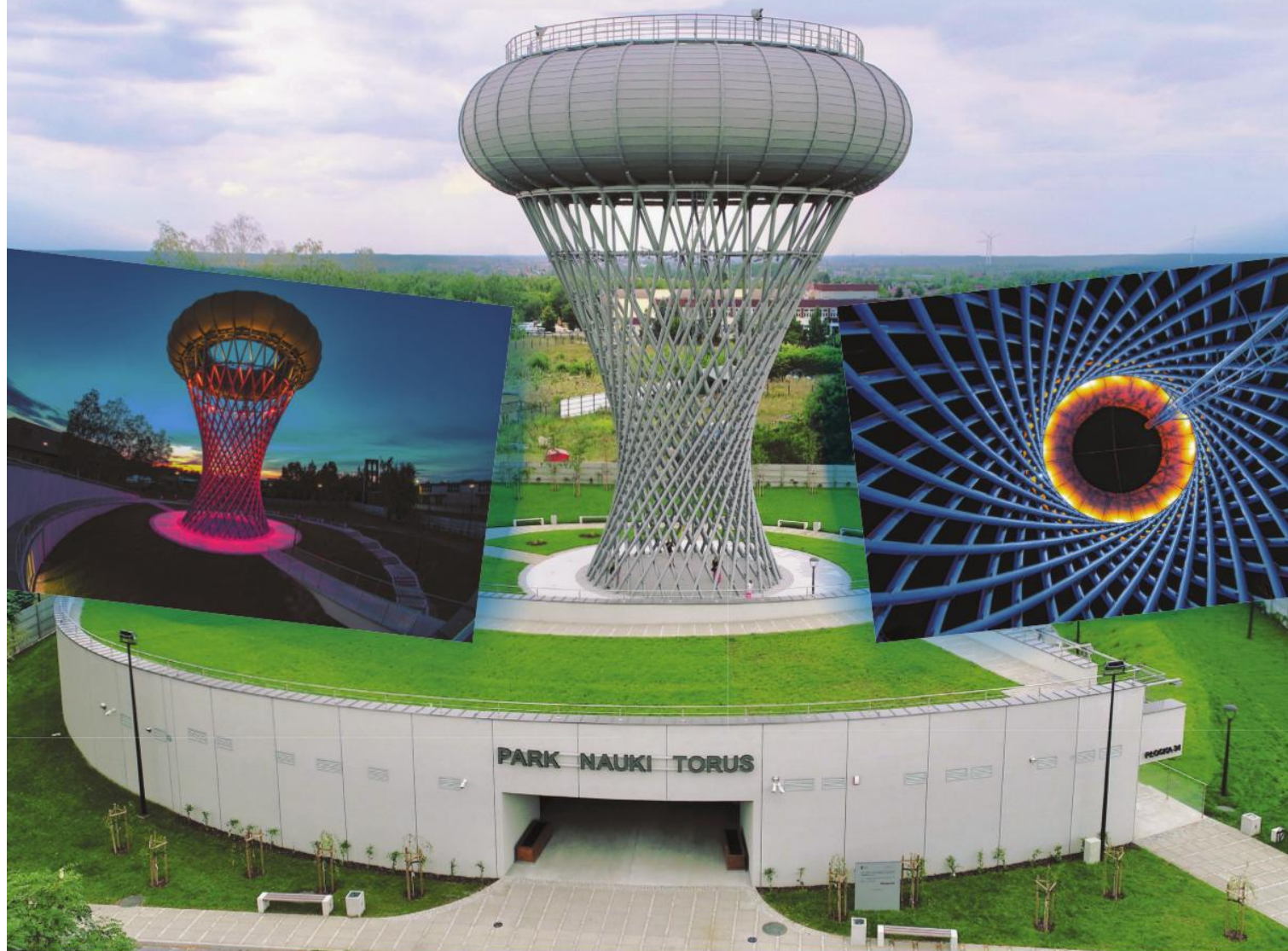
## Zadania

1. Odrobina klasyki:

- W kąt o wierzchołku  $O$  wpisano dwa okręgi:  $\omega_1$  styczny do ramion kąta w punktach  $A_1$  i  $B_1$  oraz  $\omega_2$  – w punktach  $A_2$  i  $B_2$ . Wykazać, że okręgi te wyznaczają cięciwy jednakowej długości na ich wspólnej siecznej  $A_1B_2$ .
  - Na każdej wspólnej stycznej dwóch rozłącznych zewnętrznie okręgów zaznaczono odcinek łączący punkty styczności. Dowieść, że środki wszystkich czterech zaznaczonych odcinków leżą na jednej prostej.
  - Okręgi  $\omega_1$  i  $\omega_2$  przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ . Z punktu  $P$  leżącego na prostej  $AB$  poprowadzono styczną do  $\omega_1$  w punkcie  $K$  i do  $\omega_2$  w punkcie  $L$ . Udowodnić, że trójkąt  $PKL$  jest równoramienny.
- Dany jest trapez  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$ . Okręgi o średnicach  $BC$  i  $DA$  przecinają się w punktach  $P$  i  $Q$ . Przekątne trapezu przecinają się w punkcie  $S$ . Dowieść, że punkty  $P$ ,  $Q$  i  $S$  leżą na jednej prostej.
  - Odcinek  $CT$  jest wysokością trójkąta  $ABC$ , w którym  $\angle ACB = 90^\circ$ . Okrąg o środku  $C$  i promieniu  $CT$  oraz okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  przecinają się w punktach  $P$  i  $Q$ . Dowieść, że prosta  $PQ$  przechodzi przez środek odcinka  $CT$ .
  - Z punktu  $A$  poprowadzono styczne do okręgu  $\omega$  o środku  $O$ , w punktach  $K$  i  $L$ . Punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $KL$ . Okrąg  $o$ , przechodzący przez punkty  $O$  i  $M$ , przecina okrąg  $\omega$  w punktach  $B$  i  $C$ . Wykazać, że punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  leżą na jednej prostej.
  - Dany jest trójkąt  $ABC$ . Okrąg styczny do odcinków  $BC$  i  $AC$  przecina odcinek  $AB$  w punktach  $K$  i  $L$ . Wykazać, że  $||AK| - |BL|| \leq ||AC| - |BC||$ .
  - Punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego, a punkt  $H$  ortocentrum trójkąta ostrokątnego i różnobocznego  $ABC$ . Punkty  $P$  i  $Q$  leżą odpowiednio na odcinkach  $CA$  i  $CB$ , przy czym czworokąt  $CPHQ$  jest równoległobokiem. Wykazać, że  $|OP| = |OQ|$ .
  - Średnica  $AB$  i prostopadła do niej cięciwa  $PQ$  okręgu  $o$  przecinają się w punkcie  $S$ . Okrąg  $\omega$  jest styczny (wewnętrznie) do okręgu  $o$  i do odcinków  $PS$  oraz  $BS$ . Niech  $T$  będzie punktem styczności okręgu  $\omega$  do odcinka  $BS$ . Wykazać, że  $|AT| = |AP|$ .

# Połącz naukę i zabawę!

Zobacz jedną z najbardziej charakterystycznych polskich budowli!



**Park Nauki Torus** w Ciechanowie jest miejscem interaktywnej edukacji poprzez zabawę. Ofertę kieruje do osób w różnym wieku, ale przede wszystkim do dzieci i młodzieży.

Część wystawowa została wyposażona w 24 eksponaty usytuowane w trzech salach, w czterech strefach tematycznych: matematyka i fizyka, technika, iluzja oraz architektura. Nauka za pomocą doświadczeń stanowi podstawę oferty. Odwiedzający Park Nauki Torus mogą samodzielnie badać zjawiska, poszukiwać ciągów przyczynowo-skutkowych, wyciągać wnioski. Można m.in. sprawdzić, na jakiej zasadzie działają wieże ciśnień, przekonać się o praktycznym zastosowaniu równań Bernoulliego czy doznać wrażenia iluzji i złudzeń optycznych.

**Park Nauki Torus** zaprasza również na warsztaty i zajęcia rozwijające zainteresowania matematyką, techniką i innymi naukami ścisłymi – organizowane dla grup uczniów, a także dla dorosłych.

W budynku funkcjonuje sklepik z gadżetami i kawiarnia. Odwiedzający mogą korzystać z otwartej przestrzeni rekreacyjnej. Fontanna i alejki z ławkami zachęcają do odpoczynku po zwiedzeniu wystawy. Atrakcją jest zrewitalizowana i podświetlona wieża ciśnień, znajdująca się na terenie Parku.

**Park Nauki Torus** czynny jest od wtorku do piątku w godz. 9-17 oraz w soboty i niedziele w godz. 10-18.

Szczegóły i sprzedaż biletów: [parknaukitorus.pl](http://parknaukitorus.pl)