



Nakład: 3500 egz.

Uniwersytet Warszawski,
brama główna (NAC sygn. 1-N-3268)

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $J \cdot s$ $\pi=3,141592...$
NR 9 (544) 2019
CENA 4 ZŁ VAT 5%
PL ISSN 0137-3009 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl



Trzyletni Stefan Banach
na ławeczce na Plantach
w Krakowie

Sierpiński i Mazurkiewicz
na Międzynarodowym Kongresie
Fizyków w Warszawie (NAC sygn. 1-M-516-1)

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA



Józef
Marcinkiewicz

Wiktoriańska. 163078




Oderuwając brach podjęzucików z ciziedriny
matematyki w języku polskim Kóło Matem
— Biuzyrne słuchaczy U.S.B. wyłoniło
Kontisję Wyplawnicę celu wydania saeregu
skryptów z wykładow wygłaszanym na
Wydziale Matem. — Przygłosziczym U.S.B.
w piernym rzdrze wyplawicmy skrypt
p.t. „Zastosowanie rachunku różniczkowego
i całkowego do geometriji.”

Wiktor Staniewicz angażował się w przygotowanie materiałów dydaktycznych
dla studentów: fragment strony tytułowej jego skryptu Zastosowanie
rachunku różniczkowego i całkowego do geometriji z r.a. 1922/23

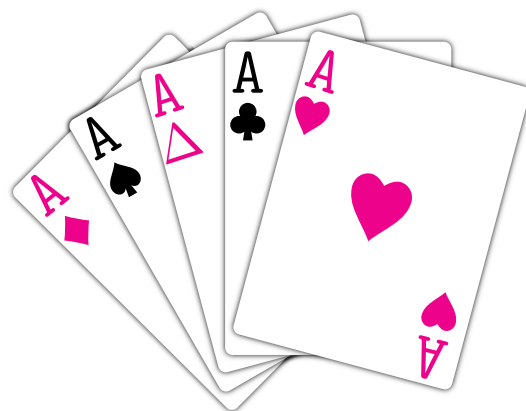
[2019]!
JUBILEUSZOWY
ROK MATEMATYKI



SPIS TREŚCI NUMERU 9 (544)

- Sto lat temu w Krakowie, czyli o początkach
Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Krzysztof Ciesielski str. 1
- Nieuczestne myśli topologa
Agnieszka Stelmaszyk-Śmierzchalska str. 3
- Początki Warszawskiej Szkoły Matematycznej
Urszula Foryś str. 6
- Twierdzenia geometrii euklidesowej we
Wszechświecie
Witold Mozgawa str. 8
-  **Zadania** str. 9
-  Co my tam i tu robiliśmy?
Magdalena Fikus str. 10
- Matematyczne spojrzenie na reakcje
chemiczne
Agnieszka Bartłomiejczyk str. 11
- Białostockie korzenie matematyki stosowanej
Zbigniew Bartosiewicz str. 13
- Trójkąt Sierpińskiego gra o życie
Karol Gryszka str. 15
- Czy funkcja może być brudna, czyli kilka
słów o programowaniu funkcyjnym
Marcin Borkowski str. 16
- Matematyka pomogła zaprojektować kopalnię
Krzysztof Szajowski str. 18
- Klub 44 str. 20
- Prosto z nieba: Narodziny magnetara str. 22
- Niebo we wrześniu str. 22
- Aktualności str. 24
- Podejrzane kaskady str. 24
-  W poszukiwaniu trójkąta
równobocznego
Bartłomiej Bzdega str. 25

W następnym numerze: triki karciane



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej,
dr Piotr Chrzastowski-Wachtel,
dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący,
prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski,
prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks,
dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak,
dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga,
prof. dr hab. Andrzej Majhofer,
prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur,
dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś,
prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki,
prof. dr hab. Andrzej Wyszomłek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol,
Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac.,
Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana,
Piotr Kaźmierczak, Kamila Łyczek – z-ca red. nac.,
Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik,
Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Z ramienia PTM za przygotowanie bieżącego numeru odpowiedzialna była Urszula Foryś

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 1 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

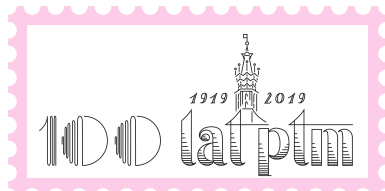
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Sto lat temu w Krakowie, czyli o początkach Polskiego Towarzystwa Matematycznego

* Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński,
Oddział Krakowski PTM

Pierwsi członkowie PTM (numeracja wg Księgi Protokołów)

1. Stanisław Zaremba
2. Franciszek Leja
3. Jan Sleszyński
4. Kazimierz Żorawski
5. Xawery Stankiewicz
6. Julian Chmiel
7. Mirosław Gibas
8. Antoni Rozmus
9. Stefan Banach
10. Otton Nikodym
11. Leon Chwistek
12. Antoni Wilk
13. Ludwik Hordyński
14. Alfred Rosenblatt
15. Antoni Hoborski
16. Ludwik Kaszycki
17. Tadeusz Banachiewicz
18. Włodzimierz Stożek
19. Gustaw Leśniodorski
20. Władysław Ślebodziński
21. Franciszek Brablec
22. Stanisław Ziobrowski
23. Kazimierz Fijoł
24. Edward Stamm
25. Jan Stella Sawicki
26. Bohdan Babski
27. Jan Baran
28. Wincenty Janik
29. Władysław Bogucki
30. Włodzimierz Kowalski
31. Ks. Feliks Horthyński
32. Władysław Dziewulski
33. Witold Wilkosz
34. Samuel Dickstein
35. Wacław Sierpiński
36. Zygmunt Janiszewski
37. Stefan Mazurkiewicz
38. Stanisław Zakrocki
39. Leopold Węgrzynowicz
40. Kazimierz Vetulani
41. Eustachy Żyliński
42. Bohdan Deryng
43. Wiktor Staniewicz
44. Zdzisław Krygowski
45. Irena Wilkoszowa
46. Hugo Steinhaus
47. Antoni Łomnicki
48. Stanisław Ruziewicz
49. Władysław Majewski
50. Mikołaj Rudnicki
51. Stanisław Leśniewski



Rysunek upamiętniający setną rocznicę powstania PTM, wykorzystany na pamiątkowej kartce pocztowej (projekt: Maciej Denkowski). Na rysunku motywowy okręgu warszawskiego i wieży Kościoła Mariackiego w Krakowie.

Krzysztof CIESIELSKI*

Gdy dobiegła końca I wojna światowa, rozpoczęto realizację wielu zamierzeń, które w latach wojennych nie mogły zostać urzeczywistnione. Dotyczyło to także matematyki. Franciszek Leja w swoich nieopublikowanych wspomnieniach „Dawniej było inaczej” pisał: *W latach 1917–1919 skupiał Kraków wielu ludzi interesujących się żywo nauką, a w szczególności matematyką, fizyką, logiką i filozofią. (...) W kawiarniach toczyły się dyskusje nie tylko na temat wojny, ale również na tematy naukowe z różnych dziedzin wiedzy. (...) W spotkaniach i dyskusjach nie brali udziału matematycy starsi. Należeli do nich między innymi profesorowie S. Zaremba i K. Żorawski. Potrzebę systematycznych spotkań wszystkich interesujących się matematyką odczuwało wielu z nas i stąd powstała myśl założenia statutowego towarzystwa, grupującego wszystkich matematyków. Myśl ta została wkrótce zrealizowana i w kwietniu 1919 powstało Towarzystwo Matematyczne w Krakowie.*

A przebywali wówczas w Krakowie znamienici matematycy. W 1895 roku katedrę na UJ objął Kazimierz Żorawski, który wcześniej uzyskał w Lipsku doktorat na podstawie pracy napisanej pod kierunkiem Sophusa Liego. Drugą katedrę objął w 1900 roku Stanisław Zaremba. Pisano o nim, że „przyszedł do Krakowa już opromieniony europejską sławą” – po doktoracie na Sorbonie i kilkunastoletnim pobycie we Francji. Zaremba i Żorawski osiągnęli światowej rangi wyniki. Niektóre rezultaty Zaremby uzyskane w Krakowie przed pierwszą wojną światową wymieniane są przez ekspertów wśród najważniejszych matematycznych osiągnięć pierwszej połowy XX wieku. Sam Henri Poincaré napisał artykuł streszczający i opisujący wyniki jednej z prac Zaremby. Zaremba zajmował się przede wszystkim równaniami różniczkowymi, Żorawski był jednym z pionierów badań w dziedzinie geometrii różniczkowej. Obok nich byli młodsi, wtedy już znakomicie się zapowiadający – Franciszek Leja, Antoni Hoborski, Alfred Rosenblatt, Witold Wilkosz, a także Stefan Banach oraz Otton Nikodym. Rozmowę tych dwóch ostatnich o całce Lebesgue’a na krakowskich Plantach przypadkowo usłyszał latem 1916 roku Hugo Steinhaus; ich spotkanie dało początek późniejszej wielkiej karierze Banacha.

W dniu 2 kwietnia 1919 roku o godzinie piątej po południu w budynku Collegium Nowodworskiego UJ przy ulicy św. Anny 12 rozpoczęło się (ogłoszone wcześniej w gazecie *Nowa Reforma*) zebranie, na którym założono *Towarzystwo Matematyczne w Krakowie*. Posiedzenie otworzył Żorawski, który powiedział, że w Warszawie ma powstać ogólnopolskie towarzystwo matematyczne, i postawił wniosek o założenie w Krakowie towarzystwa, które potem mogłoby wejść w związek z towarzystwem warszawskim. Wniosek uchwalono jednomyślnie. Wśród założycieli towarzystwa znalazły się też osoby dziś sławne z niematematycznej działalności: Leon Chwistek – logik, dziś znany przede wszystkim jako malarz, oraz Antoni Wilk – astronom, odkrywca czterech komet. Szesnastoosobowe grono założycielskie składało się z trzech profesorów uniwersytetu, dwóch docentów uniwersytetu, asystenta uniwersytetu, kilku profesorów gimnazjum, inżyniera i paru osób bez stałego zatrudnienia (jak Stefan Banach). W wyniku wyborów pierwszym prezesem został (jednomyślnie) wybrany Zaremba, zastępcą prezesa – Hoborski, sekretarzem – Leja, skarbnikiem – Ludwik Hordyński.

Towarzystwo rozpoczęło aktywną działalność, zgodną z wcześniejszymi ideami założycieli. Już tydzień później, 9 kwietnia, odbyło się posiedzenie, na którym Antoni Hoborski wygłosił odczyt „Z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej”. Wtedy też zgłoszono dziesięciu nowych kandydatów na członków Towarzystwa. Na kolejnym zebraniu, 30 kwietnia, odczyt „Z rachunku waryacyjnego” wygłosił Alfred Rosenblatt. W księdze protokołów znajduje się dokładne streszczenie tego wykładu. Po tygodniu, 7 maja 1919 roku, odczyt „Z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej” wygłosił nie kto inny, jak Stefan Banach. Na następnym

Prezesi PTM

Stanisław Zaremba (1919–1921)
Wiktor Staniewicz (1921–1923)
Samuel Dickstein (1923–1926)
Zdzisław Krygowski (1926–1928)
Wacław Sierpiński (1928–1930)
Kazimierz Bartel (1930–1932)
Stefan Mazurkiewicz (1932–1939)
Stefan Banach (1939–1945)
Karol Borsuk (1946)
Kazimierz Kuratowski (1946–1953)
Stefan Straszewicz (1953–1957)
Edward Marczewski (1957–1959)
Tadeusz Ważewski (1959–1961)
Władysław Ślebodziński (1961–1963)
Franciszek Leja (1963–1965)
Roman Sikorski (1965–1977)
Władysław Orlicz (1977–1979)
Jacek Szarski (1979–1980)
Zbigniew Ciesielski (1980–1983)
Wiesław Żelazko (1983–1985)
Stanisław Balcerzyk (1985–1987)
Andrzej Pelczar (1987–1991)
Julian Musielak (1991–1993)
Kazimierz Goebel (1993–1999)
Bolesław Szafirski (1999–2003)
Zbigniew Palka (2003–2005)
Stefan Jackowski (2005–2013)
Wacław Marzantowicz (od 2014)

posiedzeniu wysłuchano odczytu Edwarda Stamma „Algebra logiki jako nauka dedukcyjna”. Wtedy wybrano też dwuosobową Komisję Rewizyjną (weszli do niej Rosenblatt i Nikodym), pięcioosobowy Sąd Polubowny oraz nowego skarbnika – Antoniego Wilka, gdyż poprzedni „z przyczyn niezależnych od jego przynależności do Towarzystwa” zrezygnował z tej funkcji.

Aktywna praca trwała. Jednak wbrew pierwotnym przewidywaniom Towarzystwo Matematyczne w Krakowie nie połączyło się z warszawskim. Otóż w Warszawie towarzystwo matematyczne nie powstało, natomiast po kilku miesiącach znakomici warszawscy matematycy – Samuel Dickstein, Wacław Sierpiński, Zygmunt Janiszewski i Stefan Mazurkiewicz zgłosili akces do towarzystwa w Krakowie. Dickstein, mający wtedy 68 lat, znany był ze wspaniałej działalności na rzecz upowszechniania matematyki. Sierpiński, Janiszewski i Mazurkiewicz byli czołowymi przedstawicielami młodego pokolenia, które szturmem wdzierało się na szczyty światowej matematyki, a ich wyniki z topologii stawały się powoli dumą tworzącej się warszawskiej szkoły matematycznej. Uczni ci zostali przyjęci do Towarzystwa na IX posiedzeniu zwyczajnym, w dniu 19 listopada 1919 roku, a wydarzenie to dało impuls do nadania Towarzystwu ogólnopolskiego charakteru. Już na 29 listopada zaplanowano Nadzwyczajne Walne Zebranie. Jego celem miała być *organizacja biura sprawozdawczego z ruchu naukowego matematycznego w Polsce celem informowania zagranicy, a potem ewentualna reorganizacja Towarzystwa i uchwalenie statutu, Towarzystwo bowiem zostało założone głównie w celu skupienia matematyków, pracujących w Krakowie, obecnie zaś powstała myśl, aby działalność Towarzystwa rozszerzyć na całą Polskę.*

I tak się stało... Na zebraniu dziesięć dni później założono biuro, którego zadaniem było zamieszczanie sprawozdań z prac matematyków polskich w jednym z polskich pism, na przykład w „Wiadomościach Matematycznych”, na co wyraził zgodę redaktor tego pisma, Samuel Dickstein. Dickstein, obecny na tym posiedzeniu, przypomniał, że już w 1880 roku powstało w Petersburgu „Koło matematyków Polaków”, które wydało drukiem 4 tomy sprawozdań z matematycznych prac polskich matematyków. Na tymże zebraniu prezes poinformował, że właśnie nadszedł list od Antoniego Łomnickiego ze Lwowa. Łomnicki napisał, że we Lwowie przed dwoma laty powstało towarzystwo matematyczne, lecz jego działalność „w ostatnim czasie osłabła z powodu działań wojennych” i członkowie zamierzają przystąpić do towarzystwa krakowskiego w razie poszerzenia jego działalności.

Jak można się domyślić, kwestia zmiany obszaru działalności Towarzystwa na całą Polskę – zwłaszcza w kraju scalonym po ponad stuletnim okresie zaborów – musiała być przedmiotem szczegółowych rozważań i ustaleń. Niemniej różne kwestie zostały uzgodnione bardzo szybko (ciekawe, jak długo by to trwało obecnie). Na Nadzwyczajnym Walnym Zebraniu w dniu 21 kwietnia 1920 roku Zaremba *otwierając dyskusję, podniósł, że zmiana nazwy towarzystwa na „Polskie Towarzystwo Matematyczne”, na co godzą się matematycy spoza Krakowa, jest korzystną ze względu na przyszłe stosunki z towarzystwami zagranicznymi i ze względu na to, że po tej zmianie łatwiej można będzie od rządu polskiego otrzymać subwencje na cele towarzystwa.* Wniosek Zaremby o zmianę nazwy uchwalono. Na nowy statut trzeba było czekać trochę dłużej – do grudnia 1920 roku. Zgodnie z nim członkowie zamiejscowi mogli tworzyć zamiejscowe oddziały towarzystwa. Należało też wybrać nowy zarząd, jednak (na wniosek Nikodyma) odroczone to do końca okresu administracyjnego, czyli do maja 1921 roku. Nowe władze wybrano 4 czerwca, lecz Kazimierz Żorawski (wtedy reprezentujący już Warszawę ze względu na objęcie ważnej funkcji rządowej – Dyrektora Departamentu Nauki i Szkół Wyższych w Ministerstwie) wyboru na funkcję prezesa nie przyjął. Zastąpił go Wiktor Staniewicz z Wilna. Na początku 1921 roku PTM miał 51 członków. Dziś jest ich znacznie więcej...

Dodajmy jeszcze, że wiosną 1920 roku Towarzystwo wybrało delegatów Polski na Międzynarodowy Kongres Matematyków w Strasburgu – Sierpińskiego i Zarembę. Na tym Kongresie powołano (20 września 1920 r.) Międzynarodową Unię Matematyczną, a Polska była jednym z jedenastu krajów założycielskich.



Okolicznościowy stempel upamiętniający setną rocznicę PTM. Wykorzystano w nim motywy logotypów dwóch największych międzynarodowych Kongresów zorganizowanych przez PTM: International Congress of Mathematicians (Warszawa, 1983 r.) i European Congress of Mathematics (Kraków, 2012 r.).

Nieuczesane myśli topologa

Agnieszka STELMASZYK-ŚMIERZCHALSKA*

* Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, z inicjatywy Oddziału Poznańskiego PTM

W salonie fryzjerskim siedzi matematyk, obok leży potyskująca para nożyczek, mnóstwo szczotek i innych sprzętów. Matematyk nerwowo wierci się w fotelu – przecież nie od dziś wie, że sfery zaczesać się nie da. Fryzjer intuicyjnie sięga po nożyczki, szalejące nad czołem rozmaitości nie rokują zbyt dobrze. Niechętny rozspójnieniu klient wpada na pomysł – warkocz będzie idealny!

Zachęcamy do aktywnego czytania – większość przekształceń można zbadać empirycznie, wystarczy cztery kawałki sznurka.

Autorka nie próbuje tutaj definiować normalności, toż to sprawa konieczna do rozważenia przez filozofów, jednak roboczo założmy, że przez normalność rozumiemy człowieka nieskażonego wiedzą z zakresu wyższej matematyki.

Czym jest warkocz dla matematyka?

Dla „normalnego” człowieka warkocz stanowią zaplecione pasma włosów, sznurków itp. Dla wygody (i z empirycznego doświadczenia) wprowadzamy pewne uproszczenia – rozważamy n -pasmowe warkocze umieszczone wewnątrz walca, a końce zaczepione są w różnych punktach podstaw. Zakładamy, że wszelkie przeplecenia odbywają się wewnątrz „tuby”, w żadnym punkcie dwa pasma nie łączą się w jedno (nie przecinają się) i nie mogą zawracać. Nie ma też obawy, że ustalona długość pasm i skomplikowanie przepleceń spowoduje, że któreś nie dotrze do punktu zaczepienia końców – topologia to w uproszczeniu „giętka geometria” i nie ma problemu z rozciąganiem pasm.



Rys. 1. Przykładowy warkocz geometryczny

Tak więc wybieramy po n punktów na podstawach walca (ułożonego w poziomie), powiedzmy p_1, p_2, \dots, p_n na lewej podstawie oraz q_1, q_2, \dots, q_n na prawej podstawie. Rozpoczynając od punktów p_i , odbywa się splot aż do punktów zaczepienia q_j . Fachowo, warkoczem geometrycznym β nazywamy układ (ciąg) giętkich pasm (formalnie: wykresów funkcji), które zaplatają się wewnątrz walca, tak jak na rysunku 1.

Warto zwrócić uwagę na zachowanie pasm na podstawach walca. Przypuśćmy, że pasmo zaczynające się w punkcie p_1 na lewej podstawie, kończy się w punkcie q_4 na prawej podstawie itd. Wówczas połączenia między podstawami możemy zapisać jako

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ q_4 & q_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ lub prościej, zostawiając tylko indeksy: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 4 & 2 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Widzimy, że warkocz definiuje przyporządkowanie liczbom ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ liczby z tego samego zbioru (niekoniecznie inne). Przyporządkowania (różnowartościowe) opisujące przestawienia/przetasowania liczb nazywa się *permutacjami*. Permutację pochodzącą od warkocza β nazywamy *permutacją indukowaną* przez ten warkocz.

Dwukroć zaplecione „taki sam” warkocz (mimo usilnych chęci czeszącego) zawsze wygląda odrobinę inaczej. Fakt, że możemy użyć określenia „taki sam”, pozwala nam wnioskować, że niektóre warkocze reprezentują ten sam „rodzaj” warkocza (choćby kłos, francuz czy warkocz klasyczny trójpasmowy). Dwa warkocze uznamy za równoważne, jeśli jeden powstaje z drugiego poprzez powyginanie pasm z zaczepionymi nieruchomo końcami. Stąd indukowana permutacja jest ustalona dla konkretnej klasy równoważnych warkoczy.

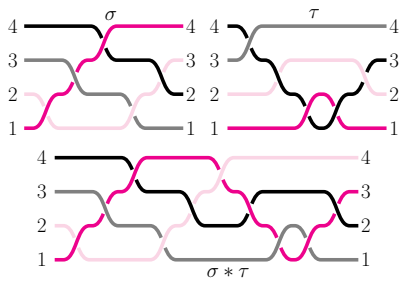
Struktura grupy

Z warkoczami, poprzez permutacje indukowane, nieodłącznie związana jest grupa permutacji. Grupą permutacji S_n nazywamy zbiór permutacji na n elementach wraz z działaniem składania, któremu przyjrzymy się na przykładzie grupy S_3 , czyli

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Grupa to jedno z fundamentalnych pojęć w matematyce. Prześledzimy je na przykładzie zbioru liczb rzeczywistych bez zera. Zbiór wraz z działaniem (u nas mnożeniem) nazywamy grupą, gdy wskazane działanie jest łączne, czyli $a(bc) = (ab)c$, oraz istnieją w nim szczególnie elementy: element neutralny i dla każdego elementu można wskazać element odwrotny (dla liczby a odwrotnością jest $1/a$). Więcej o grupach można przeczytać np. w Δ_9^4 .

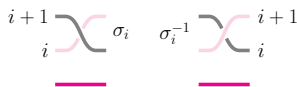




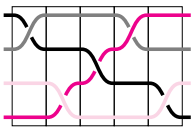
Rys. 2. Złożenie warkoczcy σ i τ

Twierdzenie. Zbiór warkoczcy na n -pasmach wraz z działaniem składania tworzy grupę (oznaczaną \mathbf{B}_n). Grupa ta nie jest przemienna.

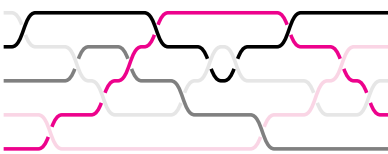
Odzworowanie grup $f : \mathbf{B}_n \rightarrow S_n$, przypisujące każdemu warkoczowi jego permutację indukowaną, spełnia warunek $f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$ dla $a, b \in \mathbf{B}_n$. Odzworowanie o tej własności nazywamy homomorfizmem.



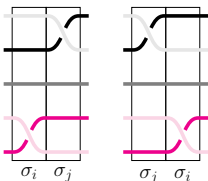
Rys. 3. Warkocz σ_i i odwrotny σ_i^{-1}



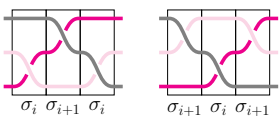
Rys. 4. Warkocz $\sigma_3^{-1} * \sigma_1 * \sigma_2 * \sigma_3^{-1} * \sigma_1^{-1}$



Rys. 5. Zamiana kolejności pierwszych dwóch skrzyżowań (licząc od lewej) daje równoważny warkocz



Rys. 6. Przeploty pasm niezależnych – zamiana



Rys. 7. Przeploty sąsiednich pasm – zamiana

Rolę elementu neutralnego pełni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Pozostaje jeszcze zastanowić się, jak uzyskać wynik złożenia $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$? Zaczynamy od wewnętrznej permutacji, która przesyła $1 \rightarrow 2$, z kolei zewnętrzna $2 \rightarrow 2$, więc łącząc te dwa warunki, dostajemy w wyniku $1 \rightarrow 2$. Podobnie postępując z 2 i 3, uzyskujemy permutację końcową. Warto zwrócić uwagę, że zamieniając permutacje miejscami, dostajemy inny wynik: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Oczywiście dla każdej permutacji z S_3 możemy znaleźć permutację odwrotną, co pokazuje, że S_3 ma strukturę grupy.

Podobnie jak w przypadku permutacji, w zbiorze warkoczcy na określonej liczbie pasm wprowadzamy działanie składania warkoczcy. Intuicyjnie można je rozumieć jako przedłużenie jednego warkoczcy drugim poprzez związanie pasm. Wyobraźmy sobie dwa identyczne walce z warkoczami wewnątrz o ustalonej liczbie pasm. Przyjmijmy, że końce pierwszego warkoczcy i początki drugiego występują dokładnie w tych samych miejscach na podstawach. Zestawiamy te walce tak, aby wskazane punkty się spotkały, i skleamy pasma na styku. Mamy więc walec o podwójnej długości ze zwiazanymi dwoma warkoczami. Znow mamy twór spełniający definicję warkoczcy geometrycznego, a tym samym wynik działania, co widać na rysunku 2.

Nietrudno zauważyć, że takie określenie spełnia aksjomaty grupy: zachodzi łączność, mamy warkocz neutralny o prostych pasmach i dla każdego warkoczcy możemy wskazać warkocz do niego odwrotny – odbicie lustrzane.

Zauważmy również, że permutacją indukowaną przez złożenie warkoczcy jest złożenie odpowiednich permutacji. Przykładowo, na rysunku 2 pierwszy z warkoczcy indukuje permutację $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, zaś drugi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Ich złożenie to $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, czyli permutacja wyniku. Warto również zwrócić uwagę na to, że złożenie powyższych permutacji w odwrotnej kolejności da inny wynik. To pokazuje, że złożenie warkoczcy $\sigma * \tau$ nie będzie tym samym co $\tau * \sigma$.

Zapiszmy to słowami!

Aby usystematyzować opis warkoczcy, wprowadza się tak zwane *warkoczce elementarne*, czyli „cegiełki” budulcowe każdego warkoczcy. Precyzyjniej, warkoczem elementarnym σ_i nazywamy warkocz, w którym występuje tylko jedno przeplecenie: $(i + 1)$ -sze pasmo przecina i -te (przechodząc ponad nim), a pozostałe pasma pozostają proste (rys. 3). Jego odwrotnością σ_i^{-1} jest warkocz elementarny, w którym i -te pasmo przechodzi ponad $(i + 1)$ -szym. Odpowiednio „rozluźniając” sploty, możemy podzielić dowolny warkocz na segmenty, w których występuje tylko jedno przełożenie pasm odpowiadające konkretnemu warkoczowi elementarnemu (przykład na rysunku 4). Każdy warkocz możemy zatem przedstawić jako złożenie (połączenie) warkoczycy elementarnych. Taki opis (który nazywamy *słowem*) niestety nie jest jednoznaczny. Zastanówmy się, czy warkocz z rysunku 5 „bardzo” się zmienia, jeśli zamiast początkowego przełożenia pasm trzeciego i czwartego (od dołu) wykonać je najpierw na paśmie pierwszym i drugim? Biorąc pod uwagę giętkość i ciągłość, zmiana nie będzie istotna.

Jak zatem sprawdzić, kiedy różne słowa opisują ten sam warkocz? Problem ten rozstrzyga twierdzenie zaproponowane przez Artina i Magnusa. Wyróżnia ono trzy typy niejednoznaczności zapisu warkoczcy:

- Złożenie warkoczycy elementarnych $\sigma_i * \sigma_i^{-1}$ oraz $\sigma_i^{-1} * \sigma_i$ jest równoważne warkoczowi neutralnemu.
- Jeśli w warkoczach elementarnych σ_i oraz σ_j przeplecenia występują na niezależnych pasmach, tzn. $|i - j| > 1$, wówczas warkocz $\sigma_i * \sigma_j$ jest równoważny warkoczowi $\sigma_j * \sigma_i$ (przykład na rysunku 6).
- W przypadku gdy przeplecenia w warkoczach elementarnych σ_i oraz σ_j mają jedno wspólne pasmo (czyli $j = i \pm 1$), to warkocz $\sigma_i * \sigma_j * \sigma_i$ jest równoważny $\sigma_j * \sigma_i * \sigma_j$, co widać na rysunku 7.

Wspomniane twierdzenie orzeka, że jeśli dwa słowa kodują ten sam warkocz, to jedno z nich można uzyskać z drugiego poprzez zastosowanie operacji (a)–(c).

Niestety twierdzenie to nie daje algorytmicznej formuły na rozwiązanie tego zadania.

Problem słów – algorytmy

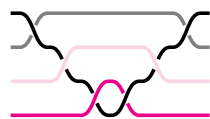
Przedstawione algorytmy są dalekie od optymalnych dla komputera i w praktyce raczej ustępują miejsca innym.



Rys. 8. Warkocze: β (z lewej) i γ_1 (z prawej)



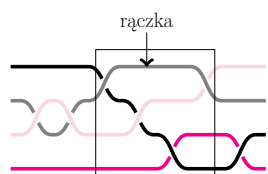
Rys. 9. Warkocz α_1



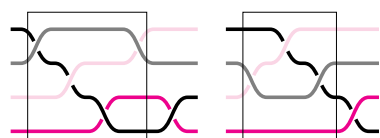
Rys. 10. Warkocz α_1 po naciągnięciu pasm



Rys. 11. Postać normalna warkocza β



Rys. 12. Warkocz zawierający rączkę



Rys. 13. Rączka (na trzecim paśmie) przed (po lewej) i po redukcji (po prawej)

Czasem codzienność wymusza od nas syzyfową pracę rozplątywania różnych rzeczy, chociażby kabli. W przypadku warkoczy orzeczenie, czy być może skomplikowana płatanina rzeczywiście coś splotła czy nie, jest zagadnieniem z kombinatorycznej teorii grup zwanym *problemem słów*. W dalszej części przyjrzymy się metodom rozstrzygania go. Ograniczymy naszą uwagę do *warkoczy czystych*, czyli takich, które indukują permutację identycznościową (tzn. nie zmieniają układu końców). Innych warkoczy nie ma sensu rozpatrywać, ponieważ nie mogą być równoważne z neutralnym.

W 1926 roku ukazał się artykuł Emila Artina „Theorie der Zöpfe”, w którym przedstawił on algorytm „czesania” (porządkowania kolejności przepleceń) warkoczy. Weźmy warkocz czysty β o n pasmach i rozczesmy go w następujący sposób:

1. Tworzymy kopię warkocza β i usuwamy z niej pierwsze pasmo od góry, zastępując je prostym. Otrzymany w ten sposób warkocz nazywamy γ_1 (rys. 8).
2. Rozważmy złożenie $\alpha_1 = \beta * \gamma_1^{-1}$ (rys. 9). Gdybyśmy zabrali pierwsze od góry pasmo z α_1 , to pozostałe pasma moglibyśmy rozplatać. W tej sytuacji, posługując się operacjami (a)–(c), możemy doprowadzić α_1 do równoważnej postaci, w której w każdym przepleceniu bierze udział pierwsze pasmo (rys. 10). Nasz wyjściowy warkocz możemy zapisać jako $\beta = \alpha_1 * \gamma_1$. Wówczas w jego pierwszej części (α_1) w każdym przepleceniu bierze udział pierwsze pasmo i nie bierze ono udziału w żadnym przepleceniu pozostałej części warkocza.
3. Procedurę opisaną w krokach 1 i 2 powtarzamy dla warkocza γ_1 .
4. Po odpowiedniej liczbie powtórzeń otrzymujemy rozkład $\beta = \alpha_1 * \dots * \alpha_{n-1}$, w którym każdy z segmentów α_i jest „wyczesany” (tzn. w jego przepleceniach bierze udział tylko i -te pasmo od góry, rys. 11).

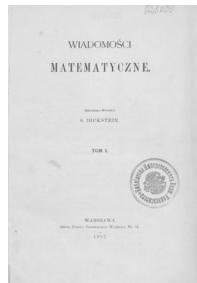
Tak uzyskany „wyczesany” rozkład nazywamy *postacią normalną*. Dla każdego warkocza istnieje dokładnie jeden „wyczesany” warkocz, w którym wszystkie α_i są zredukowane zgodnie z relacjami. Jak łatwo się domyślić, badany warkocz jest równoważny neutralnemu wtedy i tylko wtedy, gdy po czesaniu jest neutralny (ma proste pasma).

Przyjrzymy się teraz drugiej metodzie rozstrzygania problemu słów w grupie warkoczy, zaproponowanej przez Patricka Dehornoya w 1997 roku. *Redukcja rączek* polega na wskazaniu podwarkoczy określonego typu, tzw. rączek, które stopniowo opuszczane za pomocą pewnego odwzorowania (homomorfizmu) rozplatają warkocz, a tym samym pozwalają na sprawdzenie jego neutralności. Formalnie, *rączką* nazywamy podwarkocz postaci $\sigma_i^e * x * \sigma_i^{-e}$, gdzie $e = \pm 1$, a x złożony jest tylko z generatorów $\sigma_j^{\pm 1}$ przy $j < i$, rysunek 12 tłumaczy nazwę. Podobnie jak poprzednio, będziemy rozpatrywać warkocze czyste. Przesuwając się od początku warkocza po lewej znajdujemy pierwszą rączkę i opuszczamy ją (rys. 13). W otrzymanym warkoczu również szukamy rączki itd., aż do wyczerpania dostępnych rączek. W zależności od tego, czy końcowy warkocz jest neutralny czy też nie, dostajemy odpowiedź. Nie ma obawy, że zmienimy warkocz w trakcie przeprowadzania redukcji, ponieważ korzystamy tylko z operacji dozwolonych (wskazanych przez twierdzenie Artina i Magnusa). Z algorytmicznego punktu widzenia sytuacja również jest dobra, ponieważ algorytm redukcji nigdy się nie zapętli.

Imponujący warkocz podskakuje w rytm przytupów – wybór krawata to nie błaha sprawa. Sprzedawca pokazuje kolejno różne modele, jednak matematyk nieustannie obserwuje zwinnie tworzone węzły, do Windsora kolejno dołącza four-in-hand, eldredge i Shelby... Wreszcie kupuje siedem z nich – nie tylko dla urozmaicenia dni, ale i zabawy. Skoro da się opisać warkocze, to czemu by nie spróbować z węzłami?

Początki Warszawskiej Szkoły Matematycznej

* Uniwersytet Warszawski,
Oddział Warszawski PTM



Wiadomości Matematyczne



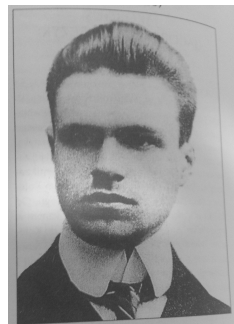
Samuel Dickstein (1851–1939)



Waclaw Sierpiński (1882–1969)



Stefan Mazurkiewicz (1888–1945)



Zygmunt Janiszewski (1888–1920)

Urszula FORYŚ*

Warszawscy matematycy postanowili, że w 2018 roku będą świętować stulecie Warszawskiej Szkoły Matematycznej. W roku 2018 cały naród świętował odzyskanie niepodległości, ale dlaczego ten właśnie rok uznajemy za rok powstania WSM? Otóż w tym czasie ukazał się drukiem artykuł, autorstwa Zygmunta Janiszewskiego, „O potrzebach matematyki w Polsce”, który został uznany za manifest całego pokolenia matematyków i jednocześnie zainicjował polską szkołę matematyki.

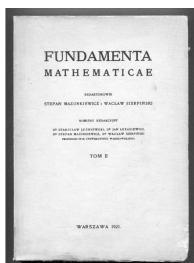
Do manifestu wrócimy, zadajmy jednak na początku pytanie, jak to się stało, że „garstka zapaleńców” była w stanie stworzyć „coś z niczego”, a na dodatek to coś okazało się wyjątkowe i wyniosło polską naukę na światowe wyżyny. W latach niewoli Polacy na różne sposoby starali się dążyć do niepodległości, a po nieudanych powstaniach najwłaściwszą drogą wydawała się tzw. „praca u podstaw”. Można to hasło rozumieć na różne sposoby, w szczególności na swój własny sposób rozumiał je Samuel Dickstein, którego uznajemy za nieformalnego ministra nauki polskiej na przełomie XIX i XX wieku. Wykształcony w Warszawie, w Szkole Głównej, a następnie w Cesarskim Uniwersytecie Warszawskim, Dickstein był wyjątkowo skutecznym działaczem na rzecz rozwoju polskiej nauki, a w szczególności matematyki. Wśród jego licznych zasług wymieńmy kilka: stworzył *Kasę pomocy dla osób pracujących na polu naukowym im. J. Mianowskiego*, a także współtworzył czasopisma *Prace Matematyczno-Fizyczne* i *Wiadomości Matematyczne*. Z jego inicjatywy w 1905 roku powstało *Koło Matematyczno-Fizyczne*, które było pierwszą organizacją zawodową zrzeszającą polskich matematyków, fizyków i astronomów. Rok później został pierwszym przewodniczącym Rady Naukowej *Towarzystwa Kursów Naukowych* (wykłady prowadzili m.in. Waclaw Sierpiński i Stefan Mazurkiewicz, późniejsi współtwórcy WSM), a w kolejnym roku – wiceprezesem *Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, któremu w 1914 roku ofiarował swój unikatowy księgozbiór, stanowiący podstawę zbiorów Matematycznego TNW (w 1937 r. księgozbiór liczył ponad 10 tysięcy tomów i 11 tysięcy czasopism). Dickstein był też członkiem wielu innych towarzystw naukowych, w tym Polskiego Towarzystwa Matematycznego, a w kadencji 1923–1926 był jego prezesem.

Tytaniczna praca Dicksteina została doceniona przez reaktywowany w 1915 roku Uniwersytet Warszawski – został profesorem honorowym UW, a w 1923 doktorem *honoris causa*. Dzięki tej właśnie pracy u progu niepodległości Polska miała wielu doskonale wykształconych matematyków, którzy pracowali na najwyższym światowym poziomie. Tak więc odradzające się polskie uczelnie mogły zatrudnić świetną kadrę matematyczną. Cofnijmy się jednak nieco w czasie i przenieśmy do Lwowa. To właśnie na tamtejszym uniwersytecie zaborcy pozwolili na wznowienie nauczania po polsku, co przyciągało zarówno wykładowców, jak i studentów. To tam spotkali się nasi trzej główni bohaterowie, pochodzący z Warszawy: Waclaw Sierpiński, Stefan Mazurkiewicz i Zygmunt Janiszewski. W 1910 roku Sierpiński objął kierownictwo II Katedry Matematyki na Uniwersytecie Lwowskim. Jego doktorantem był Mazurkiewicz, który w 1913 roku otrzymał stopień doktorski. W tym samym roku habilitował się Janiszewski. Wszyscy trzej oprócz spraw naukowych żywo interesowali się przyszłością polskiej nauki, w tym oczywiście matematyki. Żywo dyskutowali o tych sprawach, w szczególności w kontekście własnych doświadczeń zagranicznych. Najpewniej idee przedstawione przez Janiszewskiego w „manifestie” ukształtowały się właśnie pod wpływem tamtych dyskusji.

W 1915 roku nastąpiła reaktywacja Uniwersytetu Warszawskiego, powstały dwie katedry matematyki – kierownictwo zaproponowano Mazurkiewiczowi i Janiszewskiemu. Mazurkiewicz swoją katedrę objął, natomiast Janiszewski zaciągnął się do Legionów Polskich, dając patriotyzmowi pierwszeństwo przed



Zachowały się tylko dwa zdjęcia Janiszewskiego!



Oryginalny drugi zeszyt czasopisma *Fundamenta Mathematicae*



Budynek przy ul. Oczeni 3 (Narodowe Archiwum Cyfrowe, sygn. 1-N-3284-1)



Biblioteka przy ul. Oczeni 3 (Narodowe Archiwum Cyfrowe, sygn. 1-N-3284-8)

Artykuł został przygotowany na podstawie materiałów zebranych na wystawę zorganizowaną w Senacie RP z okazji Jubileuszowego Roku Matematyki, którym to rokiem Senat ustanowił rok 2019 na wniosek Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Dziękuję za pomoc prof. Stanisławowi Domoradzkiemu, jak również za udostępnione materiały dr. Walerianowi Piotrowskiemu.

matematyką. Na własne życzenie pełnił służbę szeregowca w artylerii, co dobrze odzwierciedla jego życiową postawę. Po zakończeniu kampanii karpackiej został przeniesiony do Królestwa, do Jeżowa, a następnie do Lwowa, gdzie wziął udział w tworzeniu Polskiej Organizacji Wojskowej. Jego wojskowa kariera zakończyła się w 1916 roku, kiedy to wraz z innymi odmówił złożenia przysięgi wierności rządowi austriackiemu. Do końca wojny ukrywał się pod zmienionym nazwiskiem. W tym czasie uczył bezpłatnie dorosłych, zorganizował i prowadził ochronkę dla uzdolnionych dzieci z biednych rodzin. Kiedy Kasa im. Mianowskiego rozpisała konkurs na opracowania dotyczące potrzeb nauki w Polsce, Janiszewski był jednym z tych, którzy przedstawili swoją wizję – i to jego artykuł zatytułowany „O potrzebach matematyki w Polsce” został opublikowany w czasopiśmie *Nauka Polska* (1918, t. 1, str. 14–18). W tym samym roku Janiszewski objął katedrę na UW.

Oddajmy teraz głos Janiszewskiemu: „Najważniejszą potrzebą matematyki u nas obecnie jest: jednostki o wybitnych zdolnościach matematycznych zachować dla matematyki”. I dalej czytamy: „Widzę szereg zdolnych, twórczych jednostek, marnujących się wskutek trudności materialnych. [...] Takie jednostki należy *wyszukiwać*, nie czekając na ich zgłoszenie się”. W tym celu zaproponował powołanie specjalnej komisji, której zadaniem byłoby odpowiednie gospodarowanie stypendiami, jak również działalnością wydawniczą, która mogłaby stanowić źródło dochodów owych „jednostek o wybitnych zdolnościach matematycznych”. W ten sposób przeszedł do sprawy wydawnictw naukowych: „W myśl powyższego projektu należałoby założyć u nas czasopismo ściśle naukowe, poświęcone wyłącznie jednej z tych gałęzi matematyki, w których mamy pracowników wybitnych, prawdziwie twórczych i licznych”. I tak się też wkrótce stało. Janiszewski, Mazurkiewicz i Sierpiński założyli czasopismo *Fundamenta Mathematicae* – pierwsze specjalistyczne czasopismo matematyczne, początkowo poświęcone wyłącznie teorii mnogości i jej zastosowaniom. Wydania pierwszego zeszytu w 1920 roku Janiszewski niestety nie doczekał – na początku roku zmarł z powodu powikłań po hiszpance.

Wróćmy jednak do artykułu. Kolejne, bardzo trafne spostrzeżenie Janiszewskiego zawiera się w słowach: „Matematyk nie potrzebuje wprawdzie do swej pracy żadnych laboratoriów, żadnych kunsztownych i kosztownych środków pomocniczych, potrzebuje jednak odpowiedniej atmosfery matematycznej, styczności ze współpracującymi. [...] Tu atmosferę odpowiednią może wytworzyć dopiero zajmowanie się wspólnymi tematami. Konieczni prawie dla badacza są współpracownicy. Odsobniony najczęściej zamiera”. Taką właśnie atmosferę współpracy starał się stworzyć Mazurkiewicz, który był „duszą” seminariów matematycznych odbywających się co piątek w Warszawie. W latach trzydziestych seminaria znalazły swoją siedzibę w nowym budynku Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego przy ul. Oczeni 3.

Wśród innych pomysłów Janiszewskiego znalazł się też taki: „sprawą wielkiego znaczenia dla wydajności nauki byłoby *planowe uprzywilejowywanie jednego działu nauk* w każdym z naszych uniwersytetów, np. biologicznych w jednym, matematycznych w innym itd., naturalnie, dbając odpowiednio i o nauki pokrewne z uprzywilejowanymi.” Tak się jednak nie stało, choć zdarza się, że jedne nauki mają w danym ośrodku pozycję silniejszą niż inne, ale z pewnością nie wynika to z planowych działań. Zresztą w dzisiejszym świecie bardzo istotne są działania interdyscyplinarne, a zespoły interdyscyplinarne mogą działać tylko w ośrodkach, które stawiają na rozwój różnych nauk.

W końcowej części tego znamienitego artykułu autor postuluje: „Otóż, jeśli nie chcemy zawsze pozostawać w tyle, [...] Musimy stworzyć taką kuźnię u siebie! [...] Chcąc zdobyć sobie odpowiednie stanowisko w świecie naukowym, przyjdźmy z własną inicjatywą.” Dzięki tej właśnie inicjatywie powstała Warszawska Szkoła Matematyczna i takich śmiałych inicjatyw życzę wszystkim Czytelnikom!

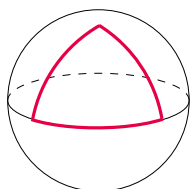
Twierdzenia geometrii euklidesowej we Wszechświecie

* Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
w Lublinie, Oddział Lubelski PTM

Witold MOZGAWA*

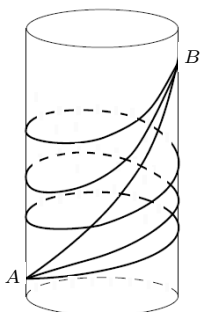
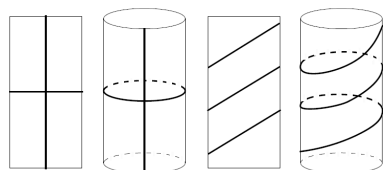
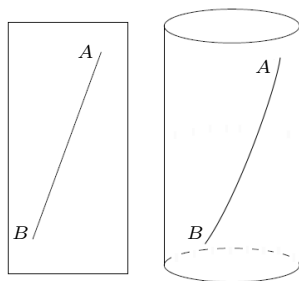
W artykule rozważymy geometryczny problem, do którego sformułowania użyjemy motywacji astronomicznych. Załóżmy, że chcemy sprawdzić, czy najbliższa naszej intuicji szkolna geometria, zwana geometrią euklidesową, opisuje Wszechświat. Naturalną próbą odpowiedzi będzie eksperymentalne sprawdzenie, czy twierdzenia tej geometrii zachodzą w otaczającej nas przestrzeni. Na przykład możemy zbadać, czy suma kątów wewnętrznych trójkąta utworzonego przez punkt na Ziemi i dwa punkty na różnych odległych gwiazdach wynosi 180° . Jednakże wszystkie takie sprawdzenia tego i innych twierdzeń geometrii euklidesowej możemy wykonać jedynie w pewnym otoczeniu Ziemi, którego

promień jest wyznaczony zasięgiem naszych teleskopów. Przyjmujemy, że nasze sprawdzenia dały wynik pozytywny, i zakładamy, że Ziemia nie zajmuje wyróżnionego miejsca we Wszechświecie. Otrzymujemy stąd, że **wszystkie twierdzenia geometrii euklidesowej są spełnione dla każdego punktu przestrzeni w jego otoczeniu o pewnym skończonym promieniu**. Czy możemy stąd wnioskować, jaka jest geometria Wszechświata? Odpowiedź na to pytanie jest nieoczekiwana. Jeśli ograniczymy nasze rozważania do dwóch wymiarów, by lepiej zrozumieć otrzymaną odpowiedź, to – poza płaszczyzną – istnieją jeszcze cztery typy diametralnie różnych przestrzeni posiadających tę własność.



Na początek rozważmy przykład negatywny, tj. przykład przestrzeni, która nie ma zadanej przez nas własności. Ponieważ żyjemy na powierzchni kuli ziemskiej, to pierwszym kandydatem jest sfera, czyli powierzchnia kuli, na której zbadamy prawdziwość twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych trójkąta. Nie wiemy jednak, czym są proste w tej przestrzeni niezbędne do utworzenia trójkąta. W takich przypadkach możemy zaadaptować określenie Archimedesesa, który stwierdził, że linie proste w przestrzeni to te, które są lokalnie najkrótsze spośród wszystkich linii łączących dwa dane punkty. Łatwo można się przekonać, że rolę prostych na powierzchni sfery grają okręgi wielkie, czyli takie, które otrzymujemy przez przecięcia sfery płaszczyznami przechodzącymi przez jej środek. Wtedy trójkątem sferycznym możemy nazywać figurę utworzoną z łuków okręgów wielkich. Każdy taki trójkąt ma sumę kątów wewnętrznych większą od 180° i ta suma zmienia się wraz z wielkością trójkąta, ale jest zawsze większa niż suma kątów wewnętrznych w trójkącie euklidesowym. Oznacza to, że powierzchnia sfery nie ma zadanej przez nas własności. Z tego rozumowania wynika przy okazji, że nie jest możliwe skonstruowanie dokładnej mapy nawet małego fragmentu powierzchni Ziemi.

Przejdziemy teraz do opisu cylindra, czyli jednej z czterech przestrzeni, które są obiektem naszego zainteresowania. Cylindrem nazywamy nieskończoną powierzchnię zakreśloną przez prostą obracającą się dookoła innej, ustalonej i równoległej do niej prostej. Linie prostą, którą obracamy, nazywamy tworzącą cylindra. Na cylindrze rozważamy geometrię, której punktami będą punkty cylindra, zaś odległością pomiędzy dwoma punktami będzie długość najkrótszej krzywej leżącej na cylindrze, która łączy te punkty. Nie wiemy jednak, jakie są to krzywe, ale chcemy je wyznaczyć, gdyż zgodnie z określeniem Archimedesesa będą to linie proste w geometrii na cylindrze.



W celu opisu tej geometrii wykorzystamy pewną metodę przedstawienia cylindra, która jest oczywista i dobrze znana – przecinamy cylinder wzdłuż tworzącej i otrzymany nieskończony pas rozwijamy na płaszczyznę. Odwrotnie, cylinder otrzymujemy z pasa o równoległych brzegach, wyciętego z płaszczyzny poprzez utożsamienie punktów jego brzegu. Jak widać, takie procedury nie zmieniają długości żadnych krzywych, wobec tego przyjmujemy, że obrazy na cylindrze odcinków prostych leżących w pasie będą odcinkami prostych na cylindrze.

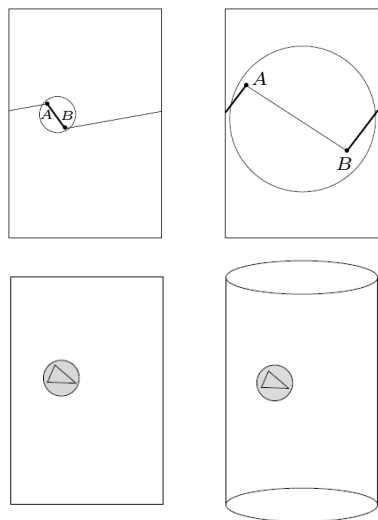
Odcinki prostych na płaszczyźnie możemy łączyć w całe proste. Postępując tak samo na cylindrze, otrzymujemy trzy różne typy prostych. Z rysunków widzimy, że tworzące są jednym z typów prostych na cylindrze, okręgi prostopadłe do tworzących to drugi typ prostych i, na koniec, najciekawszy typ prostych dają linie śrubowe.

Łatwo zauważyć, że te proste mają inne własności niż linie proste w geometrii euklidesowej. Jedną z najciekawszych jest ta, że przez dwa dane różne punkty A i B na cylindrze przechodzi więcej niż jedna prosta, ale odcinek tylko jednej z nich minimalizuje długość wszystkich krzywych łączących te punkty.

Należy także pamiętać, że odległością pomiędzy tymi punktami jest najmniejsza z długości odcinków różnych prostych na cylindrze łączących te punkty. Wynika stąd wprost, że geometria na cylindrze nie jest euklidesowa, gdyż na płaszczyźnie przez dwa dane różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Ponadto

na cylindrze istnieją zamknięte linie proste – okręgi prostopadłe do tworzących, zaś na płaszczyźnie wszystkie linie proste są niezamknięte.

Na zakończenie uzasadnimy, że na cylindrze w każdym kole o pewnym promieniu geometria jest identyczna z geometrią na płaszczyźnie. Kolem na cylindrze będziemy nazywać figurę, która po rozcięciu cylindra wzdłuż tworzącej nieprzecinającej tej figury przechodzi na zwykłe koło.



Pozostaje zrozumieć, jak się mierzy odległość na cylindrze, który jest reprezentowany przez rozwinięty pas. Na rysunkach przedstawiono sytuacje, gdy odcinek łączący punkty A i B ma długość równą odległości pomiędzy tymi punktami i gdy ma długość różną od tej odległości. Odcinki zaznaczone grubszą linią są odcinkami realizującymi odległość pomiędzy punktami na cylindrze. W drugim przypadku powodem różnicy jest fakt, że kawałek prostej zaznaczonej cieńszą linią nie daje odcinka najkrótszego, a najkrótszym odcinkiem jest odcinek złożony z dwóch odcinków, które po sklejeniu utworzą właściwy najkrótszy odcinek.

Rozważmy koło o środku w dowolnym punkcie cylindra i o średnicy mniejszej niż połowa szerokości pasa, z którego jest wykonany cylinder. Jeśli rozetniemy cylinder wzdłuż tworzącej, która nie przecina koła, to dla każdych dwóch punktów z koła ich odległość jest równa długości łączącego je odcinka leżącego w kole. Otrzymujemy więc na cylindrze w dowolnym miejscu koło, w którym zachodzą wszystkie twierdzenia geometrii euklidesowej.

Oznacza to, że nawet jeśli sprawdzimy, że wszystkie twierdzenia geometrii euklidesowej zachodzą w największym możliwym do zbadania otoczeniu Ziemi, to nie możemy stąd wnioskować o globalnej naturze geometrii Wszechświata.

Pozostałe trzy geometrie w przypadku dwuwymiarowym to geometrie na torusie, wstędze Möbiusa i butelce Kleina. Rozważając ten problem w przypadku trójwymiarowym, otrzymujemy osiemnaście różnych typów geometrii odpowiadających na nasze pytanie.

Artykuł powstał na podstawie książki V.V. Nikulina i I.R. Szafarewicza „Geometria i grupy”, Wyd. Nauka, Moskwa 1983.



Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1612. Dana jest liczba całkowita $n \geq 5$. Wykazać, że elementy zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ można tak pokolorować na czerwono i niebiesko, że suma czerwonych liczb jest równa iloczynowi niebieskich liczb.

Rozwiązanie na str. 12

M 1613. Wyznaczyć największą liczbę naturalną, która jest wspólnym dzielnikiem liczb $n^2 + 2$ oraz $n^3 + 3$ dla pewnej liczby naturalnej n .

Rozwiązanie na str. 22

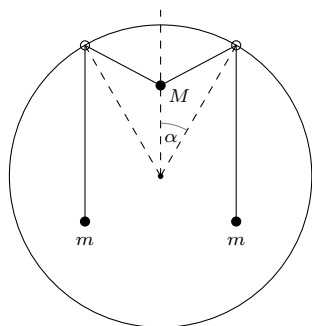
M 1614. Dany jest stos n kart oznaczonych liczbami $1, 2, \dots, n$ ułożonych w losowej kolejności. Wielokrotnie wykonujemy następującą operację: Jeśli karta na górze stosu ma numer k , to odwracamy kolejność wierzchnich k kart. Wykazać, że w końcu na górze pojawi się karta o numerze 1.

Rozwiązanie na str. 22

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 983. Dwa jednakowe, nieważkie pierścienie ślizgają się bez tarcia po pionowej, kołowej obręczy. Przez pierścienie przewleczono wiotką, nierozciągliwą i nieważką nić. Na końcach nici umocowano dwa ciężarki, każdy o masie m , a w jej środku ciężarek o masie M . W stanie równowagi pierścienie znajdują się w odległości kątowej $\alpha = 30^\circ$ od najwyższego punktu obręczy. Jaki jest stosunek mas m/M ? Między nicią i pierścieniami nie występuje tarcie.

Rozwiązanie na str. 10



F 984. Bimetaliczną płytkę otrzymano w wyniku zgrzania pasków dwóch różnych metali, każdy o długości $l_0 = 10$ cm i grubości $d = 0,5$ mm. Jeden z końców płytki został sztywno zamocowany. O ile przesunie się jej drugi koniec po ogrzaniu płytki o $\Delta T = 100$ K? Współczynniki rozszerzalności temperaturowej metali wynoszą $\alpha_1 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ i $\alpha_2 = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Rozszerzalność temperaturowa oznacza zmianę rozmiarów liniowych ciała według prawa: $l = l_0 (1 + \alpha \Delta T)$.

Rozwiązanie na str. 24

Co my tam i tu robiliśmy?

Istnieje taka gałąź biologii molekularnej, która obecnie przynosi ważne odkrycia prawie co miesiąc. I nie są to badania żyjących obecnie, bogatych w osobniki, gatunków zwierząt, roślin, mikroorganizmów. Szeroko o tym kierunku badań traktuje świeżo wydana książka Davida Reicha: „Kim jesteśmy, skąd przyszedliśmy... Kopalny DNA i nowa nauka o przeszłości człowieka”. Wersja oryginalna ukazała się w języku angielskim w 2018 roku; dzięki czujności wydawnictwa CiS i tłumaczowi, Piotrowi Szwajcerowi, polski czytelnik ma już ułatwiony dostęp do kopalni najbardziej aktualnej wiedzy w omawianym temacie.

Do niedawna oceniano, że największa ekspansja *Homo sapiens* z Afryki do Europy nastąpiła 45 tys. lat temu. Ale dane te ulegają coraz częstszym korektom. W styczniu 2018 roku w tygodniku *Science* opisano „najstarsze szczątki *H. sapiens* znalezione poza Afryką” (w jaskini na terenie Izraela), datowane na 177–194 tysiące lat temu. A ostatnio w *Nature*, drugim prestiżowym tygodniku naukowym, szczegółowo przeanalizowano dwie czaszki z greckiej jaskini Apidima (znalezione jeszcze w latach 70. ubiegłego stulecia), z których jedna, jak obecnie się uznaje, pochodząca sprzed 210 tysięcy lat, ma cechy anatomiczne czaszki człowieka współczesnego. Greckie znalezisko cofa pojawienie się człowieka współczesnego na terenach dziś uznawanych za Europę o 165 tysięcy lat.

Zastanawiam się, czy polecać lekturę Reicha Czytelnikowi ciekawemu genetycznych odkryć, ponieważ jest to tekst dość trudny, choć formułowany atrakcyjnie, lokujący się między podręcznikiem akademickim a wywodem popularno-naukowym. Powiedzieć atrakcyjnie to na pewno za mało. Lektura wymaga cierpliwości i uzupełniania wiedzy w miarę rozwoju tekstu. Dlatego zasygnalizuję najważniejsze wnioski:

- Wiemy z badań archeologicznych i genetycznych, że wszystkie gatunki człowieka to gatunki aktywnych migrantów. Dystanse, które przemierzali na piechotę wielokrotnie na przestrzeni tysięcy lat, to miliony kilometrów przez Azję, obie Ameryki, wyspy południowo-wschodniej Azji, Australię. Czasem zapewne korzystali z łodzi, przybrzeżnie. Geny Denisowian, ułatwiające metabolizm tlenowy (zachodnia Syberia), odnajduje się dziś w genomie Tybetańczyków! Ludzie migrując, nieśli ze sobą umiejętności wytwarzania narzędzi kamiennych, ozdób, rzeźb, malowideł naskalnych – czyli nową kulturę i cywilizację.
- Bywało i tak, że *H. sapiens* w miejscu, do którego przywędrował, napotykał na inne grupy *Homo*. Dzięki badaniom Davida Reicha i Svante Pääbo (on pierwszy oznaczył genom Neandertalczyka) wiemy, że grupy rozdzielone terytorialnie różniły się sekwencjami genów. Na skutek krzyżowania się najeźdźców z zastaną populacją w genomach potomków nastąpiły zmiany, ponieważ: w trakcie rozmnażania płciowego potomek otrzymuje chromosomy ojcowskie i matczyne, ale jeszcze, żeby „nie było za prosto”, wymieniają się one fragmentami – te fragmenty to ślad zastępowania genetycznego. Dają możliwość stwierdzenia pochodzenia różnych fragmentów DNA od różnych grup etnicznych genealogicznie poprzedzających badanego osobnika.
- W ostatnich latach dramatycznemu przyśpieszeniu i obniżeniu ceny uległy procedury badania DNA (sekwencjonowanie), które pozwalają na analizę nawet znikomych ilości DNA ludzkiego (< 1%) w preparacie archaicznego, kopalnego DNA, zawierającego głównie inne niż DNA składniki. Ludzki DNA jest nieznaczącym zanieczyszczeniem, ale to jego właśnie szukamy. Z pozostałości kostnych najwięcej DNA można uzyskać z zębów, kości skroniowej i ucha wewnętrznego. Tylko w pracowni Reicha takich ludzkich sekwencji genomowych oznaczono do końca 2017 roku blisko 500. Warto przypomnieć, że **pierwsza** sekwencja genomu ludzkiego, ogłoszona w 2004 roku, była osiągnięciem tego stulecia!

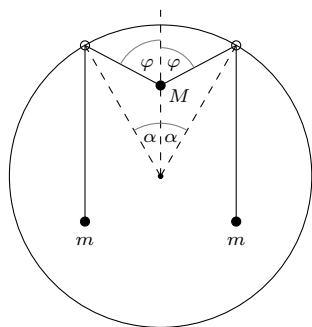
Z książki i danych przedstawionych przez Reicha wynika, że ludzie: – zawsze migrowali, bo zawsze intrygowało ich, co znajduje się za pasmem gór, rzeką, jeziorem, morzem. Ta cecha odkrywcy (niektórzy nazywają ją „genem”) przyśpieszała rozwój fizyczny i intelektualny ludzi, ich postęp cywilizacyjny, – zawsze krzyżowali się z grupami, które zastawali w nowej lokalizacji.

A wnioski powinniśmy wyciągać i my, współcześni: na włoskiej Lampeduzie, wyspach greckich, wybrzeżu Hiszpanii. W Polsce też.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



Rozwiązanie zadania F 983.
Niech φ oznacza kąt między pionem i odcinkami nici „trzymającymi” masę M .



Aby układ pozostawał w równowadze, siły działające na masę M , masy m i na każdy z pierścieni muszą się równoważyć. Nici porusza się bez tarcia wewnątrz pierścieni, a więc siła naciągu każdej z nici „trzymających” masę M równa jest ciężarowi masy m . Zrównoważenie ciężaru masy M wymaga spełnienia warunku: $Mg = 2mg \cos \varphi$, a równowaga sił „ciągnących” każdy z pierścieni: $mg \sin \alpha = mg \sin (\varphi - \alpha)$. Drugi z warunków, po podstawieniu wartości funkcji sinus i cosinus kąta $\alpha = 30^\circ$ oraz skorzystaniu z tożsamości $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ prowadzi do równania $4 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi - 2 = 0$. Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest $\cos \varphi = 1/2$. Ostatecznie otrzymujemy więc $m/M = 1$.

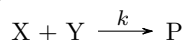
Matematyczne spojrzenie na reakcje chemiczne

* Politechnika Gdańska,
Oddział Gdański PTM

Agnieszka BARTŁOMIEJCZYK*

Modelowanie matematyczne jest pewnego rodzaju sztuką opisywania świata – zarówno w skali mikro, jak i makro – za pomocą równań matematycznych (równań różniczkowych, różnicowych czy stochastycznych). Opis mikroskopowy może dotyczyć zachowania pojedynczych molekuł (cząsteczek), natomiast obiektem opisu makroskopowego jest to, co widzimy „gołym okiem”, m.in. przemiany zachodzące w wyniku reakcji chemicznych. Mogą to być zmiany właściwości fizycznych danych substancji (np. stan skupienia, barwa, gęstość) lub chemicznych (np. zapach, smak, toksyczność). Przypomnijmy zatem, czym jest reakcja chemiczna. Jest to zachodząca w czasie przemiana jednej substancji w drugą. W wyniku reakcji chemicznej, w której bierze udział pewna substancja (zwana substratem), powstaje nowa substancja (zwana produktem), na ogół o odmiennych właściwościach fizycznych i chemicznych opisujących zachowanie wobec innych substancji. Takie przemiany zachodzą zarówno w naszym organizmie (np. trawienie pokarmów), jak i w otaczającym nas świecie (rdzewienie przedmiotów, kisenie ogórków, pieczenie ciasta).

Reakcję chemiczną zapisujemy jako równanie chemiczne, które w przejrzysty sposób informuje nas, jakie substraty wzięły w niej udział i jaka ich ilość jest niezbędna do otrzymania danego produktu. Krótko mówiąc, jest to zapis przebiegu pewnego procesu chemicznego. Przykładem reakcji chemicznej jest synteza dwóch substratów X i Y, w wyniku której powstaje produkt P:

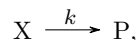


Zakładamy tutaj, że reakcja przebiega w jednym kroku, czyli że nie ma produktów pośrednich, jej szybkość opisuje parametr k , a strzałka wskazuje kierunek przebiegu reakcji. Jeśli rozważymy reakcję odwrotną (mówiąc językiem chemicznym – reakcję analizy, rozkładu), to z substancji złożonej otrzymamy co najmniej dwa produkty.

Te proste reakcje chemiczne, a dokładniej zmiany stężeń odpowiednich reagentów (czyli substratów i produktów), można zapisać w języku matematyki za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych. Są to tzw. równania kinetyczne oparte na prawie działania mas, zwanym od nazwisk autorów – norweskich chemików, prawem Guldberga i Waagego. Prawo to mówi, że szybkość reakcji chemicznej jest proporcjonalna do iloczynu stężeń reagentów. Do opisu przemian zachodzących w czasie (np. reakcji chemicznych) matematycy wykorzystują pojęcie pochodnej, które dobrze charakteryzuje szybkość zmian pewnej wielkości, np. temperatury, ciśnienia czy nawet rozwoju choroby. Pochodna informuje, jak szybko zmienia się dana wielkość, jednocześnie umożliwiając przewidywanie zmian stężenia danej substancji czy też wzrostu liczby zachorowań na daną chorobę. Ogólnie możemy więc zapisać, że

$$\text{tempo zmian} = \frac{\text{zmiana ilości}}{\text{długość przedziału czasu}}$$

I tak na przykład szybkość zmian w czasie stężenia substancji X, która rozpada się ze stałą prędkością k ($k \neq 0$), tj.



zapisujemy matematycznie (w postaci równania różniczkowego) jako

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t),$$

gdzie $x(t)$ oznacza stężenie substratu w chwili t . Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$x(t) = x_0 e^{-kt},$$

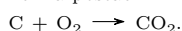
gdzie x_0 jest stężeniem początkowym. Na rysunku obok przedstawiamy rozpad w czasie substancji X dla trzech różnych stężeń początkowych. Jak widzimy, stężenie maleje wykładniczo w czasie do 0.

Zauważmy, że reakcję chemiczną rzędu pierwszego ($X \rightarrow P$) opisuje liniowe równanie różniczkowe, natomiast reakcję drugiego rzędu postaci $X + Y \xrightarrow{k} P$ odzwierciedla układ nieliniowych równań różniczkowych

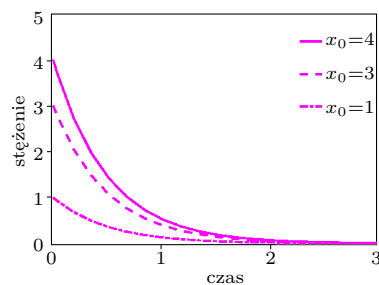
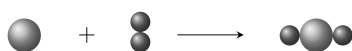
$$\frac{dx}{dt} = -kx(t)y(t), \quad \frac{dy}{dt} = -kx(t)y(t),$$

gdzie $x(t)$ i $y(t)$ oznaczają stężenia odpowiednich substratów w chwili t .

Przykładowy zapis (opis makroskopowy) równania chemicznego reakcji spalania węgla ma postać



Opis mikroskopowy powstawania dwutlenku węgla



Rys. 1. Zmiany stężeń substratu X w czasie dla $k = 2$



Rozwiązanie zadania M 1612.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, czyli $n = 2k + 1$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 2$, to na niebiesko malujemy liczby $1, k - 1, k$ oraz $2k$, a na czerwono – wszystkie pozostałe. Wówczas suma czerwonych liczb jest równa

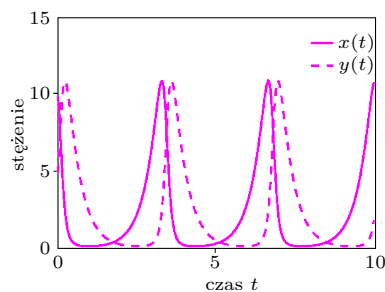
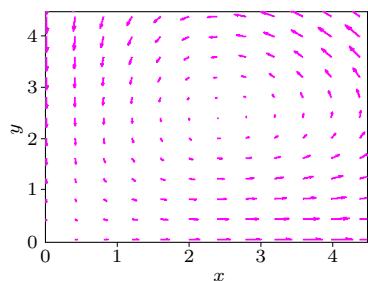
$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (2k + 1) - (1 + k + 2k) &= \\ &= \frac{1}{2}(2k + 1)(2k + 2) - 3k - 1 = \\ &= 2k^2, \end{aligned}$$

czyli jest równa iloczynowi niebieskich liczb.

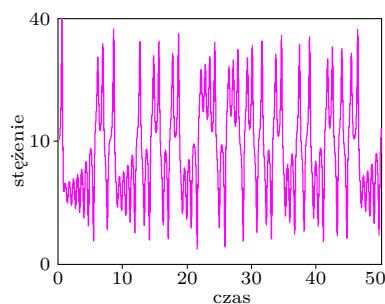
Jeśli zaś n jest liczbą parzystą, czyli $n = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 3$, to na niebiesko malujemy liczby $1, k - 1$ oraz $2k$, a na czerwono – wszystkie pozostałe. Wówczas suma czerwonych liczb jest równa

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + 2k - (1 + k - 1 + 2k) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2k(2k + 1) - 3k = \\ &= 2k(k - 1), \end{aligned}$$

czyli jest równa iloczynowi niebieskich liczb.

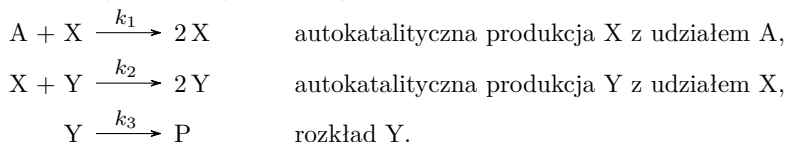


Rys. 2. Przykładowe pole wektorowe (u góry) oraz zmiany stężeń reagentów X i Y w czasie t (u dołu)



Rys. 3. Przykładowe rozwiązania chaotyczne (nieregularne)

Kolejny przykład dotyczy bardziej złożonych reakcji chemicznych opisywanych za pomocą układu dwóch równań zwyczajnych. Jest to model Lotki, dzięki któremu można matematycznie wyjaśnić pojawianie się oscylacji w reakcjach chemicznych. Początkowo Alfred Lotka (1880–1949) – amerykański biofizyk, zaproponował model, w którym występowały gasnące oscylacje stężeń w czasie. Dopiero 10 lat później, tj. w roku 1920, Lotka zmodyfikował tak swój układ, aby w reakcjach chemicznych występowały oscylacje niegasnące. Opisany przez Lotkę schemat hipotetycznych reakcji chemicznych, z których każda jest nieodwracalna, ma postać

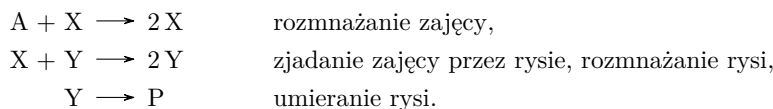


Zgodnie z prawem działania mas szybkości zmian stężeń reagentów X i Y można zapisać (w języku matematyki) jako układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (k_1 a - k_2 y(t))x(t), \\ \frac{dy}{dt} &= (k_2 x(t) - k_3)y(t), \end{aligned}$$

gdzie $x(t)$ i $y(t)$ oznaczają odpowiednio stężenia reagentów X i Y w chwili t . Układy autokatalityczne mogą posiadać stany stacjonarne, tj. stany, w których żadne zmienne nie ulegają zmianie pomimo upływu czasu. Matematycznie znajdujemy takie stany przez przyrównanie wszystkich pochodnych do zera i rozwiązanie odpowiednich równań algebraicznych.

W 1926 roku włoski matematyk Vito Volterra (1860–1940) opracował model dynamiki populacji analogiczny do modelu reakcji chemicznych (modelu Lotki). Wówczas $x(t)$ oznacza zagęszczenie ofiar (np. zajęcy) i $y(t)$ – zagęszczenie drapieżników (np. rysie), a odpowiednie reakcje chemiczne można interpretować jako



Wówczas, przyjmując $m_1 = k_1 a$, $m_2 = m_3 = k_2$ i $m_4 = k_3$, otrzymamy znany model drapieżnik-ofiara, zwany modelem Lotki–Volterry, tj.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (m_1 - m_2 y(t))x(t), \\ \frac{dy}{dt} &= (m_3 x(t) - m_4)y(t). \end{aligned}$$

Badając rozwiązania układu Lotki (Lotki–Volterry), obserwujemy zachowanie oscylacyjne (wokół dodatniego stanu stacjonarnego) układu reakcji chemicznych zilustrowane na rysunku obok.

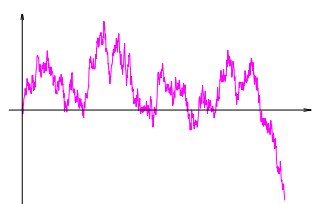
Zrozumienie struktury i mechanizmu działania reakcji chemicznych jest niezbędne do zrozumienia funkcjonowania wielu procesów biologicznych i chemicznych. Jest również konieczne do zrozumienia powstawania wielu chorób (w szczególności nowotworowych), a tym samym skutecznej walki z nimi. Poznanie mechanizmów reakcji chemicznych stanowi więc bardzo ciekawy kierunek badań, nie tylko dla chemików, ale również dla matematyków. Jednym z przykładów układu chemicznego, w którym obserwujemy bardziej skomplikowane zachowania – oscylacje chaotyczne – jest reakcja Bielousowa–Żabotyńskiego. Reakcja ta (a w zasadzie cała grupa reakcji BZ) polega na utlenianiu kwasu cytrynowego bromianem potasu w obecności katalizatora, w wyniku czego obserwuje się okresowe lub chaotyczne zmiany stężeń reagentów, co skutkuje odpowiednio regularnymi lub nieregularnymi zmianami barwy roztworu. Co ciekawe, rodzaj występującej dynamiki reakcji BZ zależy również od prędkości pompowania do reaktora odpowiednich substratów. Z kolei uwzględnienie zmian przestrzennych w reakcjach chemicznych prowadzi do równań różniczkowych cząstkowych (np. równań kinetycznych z dyfuzją), zaś opóźnienie między zainicjowaniem sprzężenia zwrotnego i jego efektem – do równań różniczkowych z opóźnieniem. A ponieważ reakcje biochemiczne często zachodzą w wyniku przypadkowych zderzeń cząsteczek reagentów, stosujemy podejście stochastyczne. Ta różnorodność narzędzi matematycznych daje możliwość lepszego poznania mechanizmów rządzących światem mikro i makro.

Białostockie korzenie matematyki stosowanej

* Politechnika Białostocka, Wydział Informatyki, Oddział Białostocki PTM

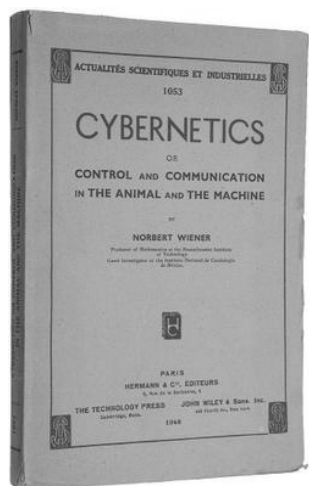


Norbert Wiener



Proces Wienera to jednowymiarowy ruch Browna, czyli proces stochastyczny z ciągłym czasem, z przyrostami o rozkładach normalnych. Takie procesy pojawiają się w ekonomii, finansach, biologii, fizyce, elektronice.

Filtr Wienera to urządzenie (fizyczne lub wirtualne), które eliminuje szum z sygnału poprzez porównanie zakłóconego sygnału i pożądanego sygnału pozbawionego szumu.



„Cybernetyka, czyli sterowanie i komunikacja w zwierzęciu i maszynie” to najbardziej znana książka Wienera. Możliwe, że roczne studia zoologiczne miały tu jakiś wpływ.

Zbigniew BARTOSIEWICZ*

Gdyby Leo Wienera nie ciągnęło tak bardzo w świat, jego syn Norbert, wybitny matematyk i twórca cybernetyki, mógłby urodzić się w Białymstoku, tak jak Leo. Matka Norberta, Bertha Kahn, urodziła się co prawda w USA, ale jej ojciec – Henry Kahn – pochodził z Hesse w Niemczech (1231 km od Białegostoku). Zarówno Kahnowie, jak i Wienerowie byli europejskimi Żydami z interesującymi rodowodami. Leo Wiener wymieniał słynnego filozofa żydowskiego Majmonidesa (1135–1204) jako jednego ze swych przodków.

Tak więc Norbert Wiener przyszedł na świat 26 listopada 1894 roku nie w Białymstoku, tylko w Columbi, w stanie Missouri, gdzie jego ojciec Leo był profesorem języków germańskich i romańskich na tamtejszym uniwersytecie. Wkrótce Leo stracił swą posiadłość i przeniósł się do Bostonu, gdzie został wykładowcą języków słowiańskich, w tym polskiego, na Uniwersytecie Harvarda. Nieco później na tymże uniwersytecie czternastoletni Norbert studiował przez rok zoologię. Chciał studiować medycynę, ale uznano, że był za młody. Nie były to jednak jego pierwsze studia. Wcześniej ukończył trzyletnie studia matematyczne w Tufts College, zaczynając je w wieku 11 lat. Studia zoologiczne szybko się zakończyły, bo młody Wiener miał problemy z zajęciami laboratoryjnymi. Norbert przerzucił się na filozofię, a dokładniej na logikę matematyczną. W roku 1912 ukończył studia magisterskie, a rok później, w wieku 19 lat, obronił rozprawę doktorską poświęconą strukturalizmowi algebraicznemu w logice relacji. Potem przez pewien czas wykładał filozofię na Uniwersytecie Harvarda, pracował jako inżynier w General Electric i jako dziennikarz w Boston Herald. W końcu trafił do słynnego dziś MIT, czyli Massachusetts Institute of Technology, gdzie spędził resztę swego życia, wykładając matematykę i wymyślając różne nowe rzeczy. Jego praca naukowa w zakresie matematyki dotyczyła m.in. analizy harmonicznej (np. twierdzenie Paleya–Wienera). Współpracował m.in. z Antonim Zygmundem, światowym autorytetem w tej dziedzinie, któremu pomógł w emigracji do USA w czasie drugiej wojny światowej. Zajmował się też teorią procesów stochastycznych (proces Wienera, równanie Wienera) oraz analizą funkcjonalną (koncepcja przestrzeni zwanej dziś przestrzenią Banacha, wymyślona niezależnie przez Banacha i Wienera).

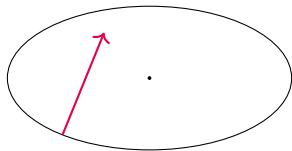
Od lat czterdziestych XX wieku zainteresowania Wienera przesunęły się w kierunku matematyki stosowanej: teorii systemów, teorii sterowania, teorii sygnałów, teorii informacji i cybernetyki, za której twórcę jest uważany. Filtr Wienera pozwalał na redukcję szumu obecnego w sygnale. Był używany przez alianców w czasie drugiej wojny światowej do sterowania artylerią przeciwlotniczą, która skutecznie niszczyła niemieckie pociski V1. Cybernetyka według Wienera to nauka badająca złożone systemy techniczne, biologiczne i społeczne oraz sztuka sterowania takimi systemami. Istotnym aspektem takiego systemu są sprzężenia zwrotne. Chociaż różne działy cybernetyki istniały wcześniej, zasługą Wienera było zebranie tych działów w jedną całość i odpowiednie nazwanie. W latach pięćdziesiątych pojawiła się sztuczna inteligencja (AI – *Artificial Intelligence*), mająca wiele punktów wspólnych z cybernetyką, która zdominowała tę ostatnią i obecnie przeżywa renesans dzięki powiązaniom z informatyką. Zmianę zainteresowań Wienera z matematyki czystej do stosowanej dobrze oddaje tematyka 17 rozpraw doktorskich, których był promotorem. Do roku 1940 dominowały tematy związane z analizą matematyczną i równaniami różniczkowymi. Od roku 1956 tematy nawiązywały do teorii systemów (np. Amar Bose, „Teoria systemów nieliniowych”).

Istotną rolę w edukacji Norberta Wienera odegrał jego ojciec Leo. To on był jego pierwszym nauczycielem. Uczył go zarówno matematyki, którą znał i lubił, jak i języków obcych. Leo był wymagającym nauczycielem, świadomym, że uczy małego geniusza, i oczekującym genialnych rozwiązań stawianych przez siebie problemów. Odcisnęło się to na psychice Norberta, który przez wiele lat miał zaniżone poczucie własnej wartości, szczególnie jeśli chodzi o dokonania matematyczne.

Norbert Wiener zmarł na zawał serca 18 marca 1964 roku w Sztokholmie (758 km od Białegostoku).



Elijah Polak



Funkcjonał $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ osiąga minimum w punkcie $(0, 0)$, w środku elipsy. Kierunek najszybszego spadku $-\nabla f(x, y)$ dla punktu (x, y) leżącego na elipsie nie prowadzi do punktu $(0, 0)$. Elipsa jest *poziomicą* funkcjonału f . We wszystkich jej punktach f przyjmuje tę samą wartość. Wektor $-\nabla f(x, y)$ jest prostopadły do poziomicy.

Algorytm Polaka-Ribière'a

minimalizacji funkcjonału f :
Wybierz punkt startowy x_0 ; oblicz:

$$d_0 := -\nabla f(x_0);$$

$$\alpha_0 := \arg \min f(x_0 + \alpha d_0);$$

$$x_1 := x_0 + \alpha_0 d_0;$$

dla $k \geq 1$ wykonaj cykl operacji:

$$d_k := -\nabla f(x_k);$$

$$\beta_k := \frac{d_k^T (d_k - d_{k-1})}{d_{k-1}^T d_{k-1}};$$

$$s_k := d_k + \beta_k s_{k-1};$$

$$\alpha_k := \arg \min f(x_k + \alpha s_k);$$

$$x_{k+1} := x_k + \alpha_k s_k.$$

Przy pewnych warunkach ciąg (x_k) dąży do punktu \bar{x} , w którym funkcjonał f ma minimum (lokalne lub globalne).

Korzystałem z następujących źródeł:
L. Montagnini "Harmonies of Disorder:
Norbert Wiener: A Mathematician-
Philosopher of Our Time", Springer 2017;
S.M. Ulam "Przygody matematyka",
Warszawa 1996;
M.J. Mikoś, Leo Wiener z Białegostoku,
pionier slawistyki w Ameryce Północnej,
hdl.handle.net/11320/7224;
biografie Elijaha Polaka w: J.O. Royset,
Preface, J. Optim. Theory Appl. 169
(2016) 713–718 i "Optimization and
Control with Applications", Eds. L. Qi,
K. Teo, X. Yang, Springer 2005;
Mathematics Genealogy Project.

Leo Wiener urodził się w roku 1862 w Białymstoku – mieście Żydów, Polaków, Niemców, Rosjan i innych nacji, tworzących wielokulturowy tygiel. To tu 3 lata wcześniej przyszedł na świat Ludwik Zamenhof – najsłynniejszy białostoczczanin, twórca języka Esperanto. Leo również miał talent do języków – znał ich ponoć trzydzieści. Miał też zamiłowanie do matematyki. Do gimnazjum uczęszczał w Mińsku i Warszawie. W Warszawie rozpoczął też studia medyczne, które szybko zamienił na inżynierię w Berlinie. W 1882 roku wyruszył w podróż statkiem do Ameryki Środkowej, ale utknął w Nowym Orleanie. Po kilku latach fizycznej pracy został nauczycielem języków i matematyki w Kansas City, a potem profesorem języków germańskich i romańskich w Uniwersytecie Missouri w Columbii. Tam ożenił się z Berthą Kahn. Tam też urodził się ich pierwszy syn, Norbert.

W odróżnieniu od Norberta Wienera, Elijah Polak – wybitny przedstawiciel matematyki stosowanej – urodził się Białymstoku, 11 sierpnia 1931 roku. Podobnie jak Norbert też w rodzinie żydowskiej. Przeżył obozy zagłady w Dachau, Auschwitz, Gros Rosen i Buchenwaldzie. Po wojnie pracował w Polsce jako pomocnik kowala, a potem jako sprzedawca ubrań we Francji. W roku 1949, razem z matką, która też przeżyła zagładę, wyjechał do Australii. Tam ukończył studia pierwszego stopnia na Uniwersytecie Melbourne. Przeniósł się potem do USA, gdzie na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley skończył studia magisterskie i obronił doktorat (1961 r.). Promotorem jego doktoratu był Charles Desoer, który sam zrobił doktorat na MIT. Co prawda nie u Wienera, jednak na pewno musiał go tam spotkać.

Polak uzyskał stopień doktora z elektrotechniki (*electrical engineering*), ale tematyka doktoratu (sterowanie optymalne) była na tyle bliska matematyce, że rozprawa i jej autor zostali umieszczeni w bazie *Mathematics Genealogy Project* (MGP), rejestrującej rodowody matematyków. MGP to (skierowany) graf, którego wierzchołkami są matematycy (ze stopniem doktora) i którego krawędzie łączą doktorantów z ich promotorami. W MGP można odtworzyć rodowód matematyczny Polaka. Zawikłana ścieżka prowadzi od Polaka, przez Desoera i kilku fizyków matematycznych, do Siméona Denisa Poissona, który był też moim przodkiem matematycznym. Z kolei przodkowie Poissona to Joseph Louis Lagrange i nauczyciel Lagrange'a Leonhard Euler – jedno z największych nazwisk w matematyce, zarówno czystej, jak i stosowanej.

Poczynając od doktoratu, działalność naukowa Polaka związana jest z optymalizacją, szczególnie od strony numerycznej. Optymalizacja to szukanie ekstremów funkcjonałów, czyli funkcji o wartościach rzeczywistych, często zadanych na przestrzeniach nieskończenie wymiarowych (np. w problemach sterowania optymalnego). Metody analityczne szukania ekstremów korzystają z twierdzenia Fermata: jeśli funkcja różniczkowalna f ma lokalne ekstremum (minimum lub maksimum) w punkcie \bar{x} , to jej gradient ∇f (wektor pochodnych cząstkowych) jest w \bar{x} równy 0. Znalezienie punktów, w których ∇f się zeruje, nie jest proste, zwłaszcza dla większej liczby zmiennych. W praktyce szuka się więc rozwiązań przybliżonych, korzystając z algorytmów numerycznych i komputera. Optymalizacja jest więc dziedziną leżącą na pograniczu matematyki stosowanej i informatyki. Najprostszy algorytm gradientowy szukania minimum funkcjonału wykorzystuje fakt, że kierunek $-\nabla f(x)$ jest kierunkiem najszybszego spadku wartości funkcjonału w punkcie x . Ale zwykle kierunek najszybszego spadku nie prowadzi do celu, czyli do punktu, w którym funkcjonał przyjmuje wartość najmniejszą. Nie jest też najlepszym kierunkiem, tzn. nie generuje najkrótszej drogi do celu. Można go poprawić, stosując różne modyfikacje bazujące na macierzy pochodnych cząstkowych drugiego rzędu (czyli hesjanie) lub na wartościach gradientu w innych punktach. Elijah Polak jest współtwórcą algorytmu Polaka-Ribière'a, z zastosowaniem metody gradientów sprzężonych, gdzie takie modyfikacje się właśnie stosuje. Jest to jeden z najważniejszych algorytmów optymalizacji numerycznej.

Jesienią 1964 roku Polak przebywał na stażu naukowym w MIT. Nie spotkał tam jednak Wienera, gdyż ten już nie żył od kilku miesięcy. Później spędził dwa lata w Paryżu i wielokrotnie odwiedzał Londyn. O ile mi wiadomo, nie był w Polsce, w szczególności nie odwiedził Białegostoku. Elijah Polak jest obecnie emerytowanym profesorem elektrotechniki i informatyki w Uniwersytecie Kalifornijskim.

Trójkąt Sierpińskiego gra o życie

Karol GRYSZKA*

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie,
Oddział Krakowski PTM

Tytuł niniejszego artykułu jest zestawieniem dwóch pozornie odległych pojęć matematycznych. Pierwszym z nich jest *trójkąt Sierpińskiego* – jeden z najlepiej rozpoznawalnych fraktali. Drugim jest *gra w życie* – automat komórkowy opisany w 1970 roku przez Johna Conwaya.

Konstrukcja trójkąta Sierpińskiego została podana przez Wacława Sierpińskiego w 1915 roku, choć już wcześniej obserwowano mozaiki i inne wzory o podobnym kształcie. Ten fraktal powstaje w następujący sposób: dowolny trójkąt (u Sierpińskiego równoboczny) dzielony jest na cztery mniejsze identyczne trójkąty, z których środkowy jest usuwany; na pozostałych trzech trójkątach cały proces dzielenia i usuwania środkowej części powtarza się w nieskończoność. Powstała „na końcu” figura to właśnie trójkąt Sierpińskiego. Na rysunku poniżej przedstawionych jest pierwszy sześć etapów konstrukcji, gdy początkowy trójkąt jest równoboczny.



Tytułowy trójkąt można opisać również w bardziej finezyjny sposób. Niech A, B oraz C będą trzema niewspółliniowymi punktami. Trójkątem Sierpińskiego o wierzchołkach w tych punktach nazywamy zbiór S_{ABC} wszystkich punktów postaci $uA + vB + wC$, spełniających warunki:

- $u, v, w \in [0, 1]$,
- $u + v + w = 1$,
- jeśli weźmiemy rozwinięcia **dwójkowe** liczb u, v i w , czyli $u = 0, u_1 u_2 \dots_{(2)}$, $v = 0, v_1 v_2 \dots_{(2)}$, $w = 0, w_1 w_2 \dots_{(2)}$, to $u_i + v_i + w_i = 1$ dla wszystkich $i \geq 1$.

Przykłady rozwinięć dwójkowych liczb niecałkowitych: $\frac{1}{2} = 0, 1_{(2)}$, $\frac{1}{3} = 0, (01)_{(2)}$, $\sqrt{2} = 1, 0110101000001001 \dots_{(2)}$. Zauważmy, że środek ciężkości trójkąta ABC nie należy do S_{ABC} , z drugiej strony każdy punkt odcinka AB należy do S_{ABC} (dlaczego?).

Trójkąt Sierpińskiego ma wiele zaskakujących związków z innymi obiektami matematycznymi, takimi jak trójkąt Pascala, gra w chaos, L-systemy, iterowane systemy funkcji czy popularna łamigłówka „Wieże Hanoi”. My przedstawimy jego związek z grą w życie.

Gra w życie jest algorytmem opisanym następującymi regułami:

- gra rozgrywa się na nieskończonej płaskiej planszy, podzielonej na identyczne kwadratowe komórki; w szczególności każda komórka **sąsiaduje** z ośmioma komórkami dookoła niej,
- każda komórka znajduje się w jednym z dwóch stanów: jest albo żywa, albo martwa,
- gra odbywa się w turach (układ ewoluuje); w każdej turze tworzony jest nowy układ (generacja) komórek na podstawie poprzedniej tury,
- gdy martwa komórka uzyska dokładnie trzech żywych sąsiadów, staje się żywa w kolejnej generacji – tak powstaje nowe życie,
- żywa komórka posiadająca dokładnie dwóch lub trzech sąsiadów przeżywa do następnej generacji; w przeciwnym razie staje się martwa.

Powyższe reguły pozwalają na tworzenie ogromnej liczby bardzo ciekawych wzorów. Na rysunku poniżej przedstawiony jest prosty przebieg gry dla układu trzech żywych komórek (oznaczone czarnym kolorem).

0	1	1	1	0
0	2	1	2	0
0	3	2	3	0
0	2	1	2	0
0	1	1	1	0

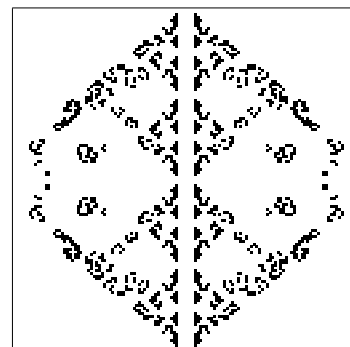
0	0	0	0	0
1	2	3	2	1
1	1	2	1	1
1	2	3	2	1
0	0	0	0	0

Liczby w kwadratach oznaczają liczbę żywych sąsiadów danej komórki. W tym przykładzie generacje ewoluują okresowo – czyli w którejś z tur powtarza się układ, który wystąpił już wcześniej. Generacja jest zaś stała, gdy w kolejnych ewolucjach układy żywych i martwych komórek są identyczne (rysunki na marginesie).

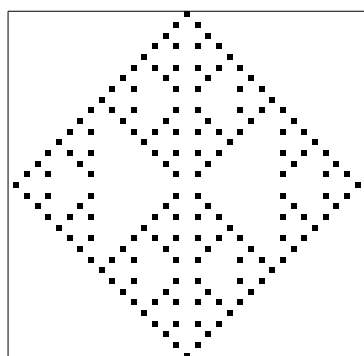
Gra w życie jest szczególnym przypadkiem automatu komórkowego – przykładem ogromnej klasy algorytmów komputerowych, które zostały również sformalizowane w języku matematyki.

Bogactwo różnych schematów, układów okresowych i wielu obrazów wygenerowanych w grze w życie sprawia, że mający prawie pół wieku algorytm nadal jest popularny (istnieje choćby cała grupa ludzi, którzy tworzą coraz ciekawsze konstrukcje z użyciem współczesnych programów symulujących grę – jednym z takich programów jest *golly*, dostępny w internecie na stronie golly.sourceforge.net) i nie zaskoczyły słowa Johna Conwaya – twórcy gry wielokrotnie przyznawał, że nie lubi własnego pomysłu.

Co łączy trójkąt Sierpińskiego z grą w życie? Otóż ten fraktal można wygenerować w grze Conwaya. Ścisłej – nie sam fraktal, a jedynie jego zarys, który oddaje przybliżoną strukturę jednego z etapów jego konstrukcji. Tę strukturę można otrzymać, gdy początkowym stanem będzie długa „kreska” (czyli długi rząd żywych komórek). Wtedy pewna generacja takiego układu będzie przypominać fraktal.



Dużo lepsze rezultaty otrzymamy, gdy stanem początkowym będzie kilka-kilkadziesiąt tysięcy komórek ustawionych w jednej linii. Film www.youtube.com/watch?v=40SW6kfAnPI pokazuje, że „wystarczy” około 15 000 komórek, aby otrzymać wyraźny obraz fraktala. Własne eksperymenty można prowadzić również we wspomnianym wcześniej programie *golly*.



Spójrzmy na przykład po prawej stronie. Nie jest oczywiste, że rysunek odzwierciedla fraktal (a w istocie – dwie jego kopie zestawione podstawami) – wzór powstał z generacji złożonej ze 130 komórek ustawionych w linii poziomej i jest efektem 65 ewolucji. Duże odstępstwo od właściwego kształtu, szczególnie w okolicy prawego i lewego końca rysunku, wynika z małej skali generacji początkowej (mało żywych komórek).

Reguły gry Conwaya można modyfikować według uznania. Klasyczne zasady zmiany stanu komórek (opisane wcześniej) oznacza się przez B3S23. Zapis interpretujemy następująco: B3 oznacza warunek rodzenia się nowej komórki (rodzi się, gdy ma dokładnie 3 żywych sąsiadów; *is born*); S23 to warunek przeżywalności (2 lub 3 żywych sąsiadów gwarantuje przeżycie; *survives*). Zastosujmy inną regułę B3S02 do stanu początkowego 66 żywych komórek ułożonych w linii prostej. Efekt takiej gry okazuje się odzwierciedlać trójkąt Sierpińskiego w stopniu znacznie dokładniejszym niż reguła B3S23. Rysunek obok przedstawia efekt po kilkudziesięciu generacjach, który jest jednocześnie stanem stałym – każda kolejna generacja jest identyczna z tą widoczną na rysunku.

Niezwykłe jest powiązanie dwóch odległych od siebie obiektów w matematyce. Dostrzeżenie takiego powiązania jest wspaniałym doświadczeniem. Jest nim niewątpliwie połączenie fraktali z automatami komórkowymi. Trójkąt Sierpińskiego może więc grać w życie – i to dosłownie. Przetrwaj bowiem jako generacja ewoluująca okresowo (w regule B2S23) albo jako generacja stała (reguła B3S02).

Czy funkcja może być brudna, czyli kilka słów o programowaniu funkcyjnym

* Usługi Umysłem,

z inicjatywy Oddziału Poznańskiego PTM *Marcin BORKOWSKI**

Każdy czytelnik *Delty* wie, że jednym z podstawowych pojęć w matematyce jest *funkcja*. Matematycy nie tylko odmieniają to słowo przez wszystkie przypadki (może z wyjątkiem wołacza), ale również tworzą od niego słowa pochodne (mamy wszak równania *funkcyjne* czy analizę *funkcjonalną*).

Część czytelników *Delty* wie również, że programiści nie pozostają matematykom dłużni – *funkcje* zrobili w programowaniu doprawdy zawrotną karierę i są obecne w zdecydowanej większości języków programowania. Spróbujemy wyjaśnić, czym różni się „funkcja” matematyka od „funkcji” programisty.

Formalna definicja funkcji, doskonale znana studentom I roku matematyki, opiera się na teorii mnogości. Funkcja jest po prostu dość specyficznym rodzajem zbioru, a mianowicie relacją (czyli pewnym zbiorem par uporządkowanych) lewostronnie całkowitą i prawostronnie jednoznaczną. Pozwolimy sobie pominąć definicje, które czytelnikom *Delty* mogą być znane, a nam są zbędne.

Oczywiście, jak to zwykle bywa, definicje swoje, a życie swoje. Gdy podслушamy rozmowy matematyków, okaże się, że *funkcja* to dla nich nie specjalnie spreparowany zbiór odpowiednich par, ale prawie żywa istota, która może wykonywać różne czynności. Oto jedna funkcja *rośnie*, gdy

inna *maleje*. Niektóre funkcje *osiągają* swoje kresy, inne zaś *uciekają* do nieskończoności. Mało tego, zdarza się nawet, że funkcja *znika* w jakimś punkcie! Sposobów myślenia o funkcjach jest wiele. My skupimy się na jednym z nich, który jest chyba najbliższy praktyce programistycznej (co nie znaczy, że z nią *tożsamy*). Otóż funkcję możemy rozumieć jako model *czynności obliczania* czegoś – mówiąc językiem szkolnym, jako „wzór”.

Z takim rozumieniem funkcji matematycy mają jednak kłopoty. Po pierwsze, nie każdą funkcję można opisać wzorem. Jest tak choćby dlatego, że „wzorów” jest przeliczalnie wiele, a rodziny funkcji o dziedzinach i przeciwdziedzinach nieskończonych są nieprzeliczalnie. Gdybyśmy nawet ograniczyli rozważania tylko do funkcji dających się opisać wzorem (czego matematycy z różnych powodów nie chcą robić), nie rozwiąże to wszystkich problemów. Świetnie to widać na przykładzie *porównywania* funkcji. Zapytajmy w szczególności, czy funkcje o wzorach $f(x) = (x + 1)^2$ i $g(x) = x^2 + 2x + 1$ są równe, innymi słowy, czy symbole f i g oznaczają tę samą funkcję. Matematyk powie oczywiście, że tak – ale przecież te wzory nie są identyczne! Co gorsza, nierzadko zdarza się, że jest bardzo trudno orzec, czy dwa (różnie wyglądające) wzory opisują tę samą funkcję. Formalnie, jest to problem nierozstrzygalny. Intuicję tego pojęcia ma

każdy, kto kiedykolwiek musiał dowodzić bardziej złożonych tożsamości trygonometrycznych lub wyliczać trudniejsze całki.

Coś, co dla matematyków jest kłopotliwe, dla programistów jest za to całkiem naturalne. Ponieważ program komputerowy to właśnie sformalizowany opis obliczania czegoś, koncepcja *funkcji* (czy *wzoru*) prawdopodobnie znakomicie nadaje się do opisu programów, prawda? Istotnie, większość języków programowania posiada *funkcje*, które – przynajmniej na pierwszy rzut oka – bardzo przypominają te znane z matematyki. W niektórych językach, na przykład w C, wykonanie programu oznacza właśnie wykonanie pewnej specjalnej funkcji „głównej”. Przyjmują jakieś argumenty, zwracają jakieś wartości, często mają swoje specjalne nazwy. . . Może więc jednak (wbrew obiegowej opinii studentów informatyki) faktycznie programowanie to po prostu kawałek matematyki?

Cóż, okazuje się jednak, że sprawy nie wyglądają tak prosto. Podstawowym problemem jest to, że obiekty matematyczne są niezmiennie w czasie. Jeżeli funkcji o wzorze $f(x) = (x + 1)^2$ damy liczbę 4, to odda nam liczbę 25 – tak samo dzisiaj, jak i jutro czy za sto lat. Programy komputerowe (jak wszyscy pewnie tego doświadczyliśmy) potrafią się niekiedy zachować całkiem inaczej, mimo że użytkownik wykonuje dokładnie te same czynności!

Dlaczego tak jest? Jednym z powodów jest fakt, że – mimo tak samo brzmiącej nazwy – *funkcja* programisty jest jednak (mimo niewątpliwego podobieństwa) czymś innym niż *funkcja* matematyka.

Na czym polega różnica? Zamiast podawać formalne definicje, spójrzmy na przykłady. Nasze funkcje zapiszemy w języku Lua, który – z uwagi na swoją prostotę – świetnie nadaje się do naszych rozważań. Na początek coś, co bardzo przypomina funkcje znane z matematyki.

```
f = function(x)
    return (x+1)^2
end
```

Powyższy zapis oznacza, że symbol *f* będzie nazwą funkcji jednoargumentowej, która dla argumentu *x* zwraca wartość wyrażenia $(x+1)^2$ – jest to więc odpowiednik funkcji *f* z naszych poprzednich rozważań. Na razie jest dobrze, funkcja w programie dokładnie odpowiada funkcji w matematyce.

Skomplikujmy nieco sprawę i rozważmy taką funkcję:

```
h = function(x)
    return math.pi + x
end
```

Jak nietrudno zgadnąć, dla argumentu *x* wynoszącego na przykład 1 powyższa funkcja zwróci wartość (mniej więcej) 4.14159. Zauważmy, że nadal mamy matematyczny odpowiednik funkcji *h*, czyli funkcję daną wzorem $h(x) = \pi + x$. Jest jednak pewien haczyk. Prawie jak w znanym dowcipie o liczbie π i pociągu. . . Jak wiemy, π jest znaną stałą matematyczną i zmienna *math.pi* w Lua ma wartość równą w przybliżeniu π . Jest jednak ona tym, czym jest – *zmienną* właśnie (język Lua, w odróżnieniu od na przykład C, nie ma pojęcia stałej). Nic nie stoi więc na przeszkodzie, aby przed wywołaniem funkcji *h* (czyli nakazaniem

komputerowi jej wykonania) napisać na przykład *math.pi = 22/7*. Formalnie, jest to *instrukcja przypisania* wartości 22/7 zmiennej *math.pi*. Wówczas okaże się, że wywołanie *h(1)* da wynik (mniej więcej) 4.142857.

Zatrzymajmy się na chwilę, żeby zrozumieć, co się stało. Dwukrotne wywołanie *tej samej* funkcji z *tym samym argumentem* dało *różne* wyniki! To nie do pomyślenia w matematyce. Dowcipnisie mogą argumentować, że w czasach Archimedesesa faktycznie π wynosiło 22/7. W naszym programie wydarzyło się to z tego powodu, że funkcja *h* w trakcie swoich obliczeń bierze pod uwagę nie tylko wartości argumentów, ale również *stan* całego systemu (który może być różny w różnych chwilach). W przypadku funkcji *h* kluczowym elementem tego stanu jest wartość zmiennej *math.pi*. Inni dowcipnisie mogą powiedzieć, że jak to, wystarczy dodać zmienną *pi* jako dodatkowy parametr funkcji i problem znika. Teoretycznie tak, ale w praktyce jest z tym sporo problemów. W szczególności takie używanie funkcji byłoby skrajnie niewygodne, w bardziej skomplikowanych sytuacjach musiałyby one mieć po kilkanaście argumentów.

Gdy się nad tym zastanowić, komputer obliczający jedynie funkcje „matematyczne” byłby całkiem bezużyteczny – wykonanie każdego programu za każdym razem dawałoby identyczny wynik. My zaś potrzebujemy właśnie programów, które dają różne wyniki w zależności od sytuacji – chcemy oglądać *różne* strony internetowe, drukować *różne* dokumenty i wyliczać *różne* rzeczy. Dlatego wszystkie użyteczne programy biorą pod uwagę stan systemu (mogą to być dane wprowadzone przez użytkownika, zawartość dysku komputera w czasie działania programu, informacje dostępne „w internecie”, czyli na innych komputerach, czy na przykład data i godzina uruchomienia programu). Co więcej, bardzo wiele programów ten stan zmienia – zapisuje coś w pamięci lub na dysku, albo wysyła „do internetu”. O funkcjach, które zmieniają stan, mówi się, że mają *efekty uboczne*. Nazwa ta może być myląca, bo niektóre funkcje wywołuje się wyłącznie po to, aby zmienić stan!

Czy to źle? Zależy, jak patrzeć. Jak właśnie zobaczyliśmy, odczytywanie i zmiana stanu wydaje się konieczna, aby programy mogły być użyteczne. Musimy za to jednak zapłacić pewną cenę. *Funkcje czyste* (bo tak programiści nazywają funkcje, które ani nie korzystają ze stanu, ani go nie zmieniają) są czasami łatwiejsze do napisania, zwykle o wiele łatwiejsze do przetestowania, a przede wszystkim pozwalają uniknąć niektórych pomyłek. Programiści nauczyli się przez ostatnie kilkadziesiąt lat, że wszystko, co ułatwia ich pracę i pomaga popełnić mniej błędów, jest na wagę złota. Stopień skomplikowania współczesnych systemów informatycznych jest tak duży, że znacząca część pracy nad nimi to szukanie i naprawienie usterek, które prędzej czy później (a raczej prędzej) się pojawiają. Jednym ze sposobów jest właśnie takie zaprojektowanie systemu, żeby jak największa jego część składała się z funkcji czystych, a konieczne operacje na stanie były wyizolowane w osobnej, niewielkiej jego części. W ostatnich latach taka metoda, zwana *programowaniem funkcyjnym*, zrobiła się modna w świecie programistycznym, a narzędzia pozwalające na jej stosowanie pojawiły się w bardzo wielu językach programowania. Koniec końców okazuje się, że idee matematyczne jednak potrafią się przydać do czegoś pożytecznego. . .

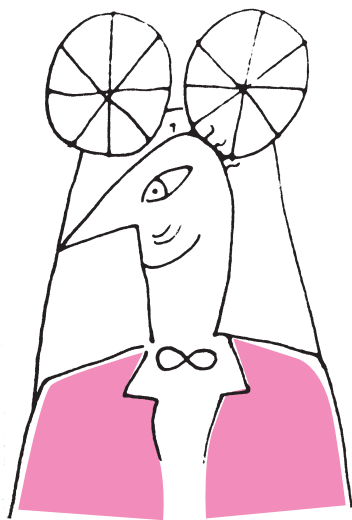
Matematyka pomogła zaprojektować kopalnię

* Politechnika Wroclawska,
Oddzial Wroclawski PTM

Krzysztof SZAJOWSKI*

W pierwszej połowie XX wieku znaczący postęp prac nad matematycznymi modelami zjawisk losowych doprowadził do powstania wyodrębnionego działu matematyki wykorzystującego zaawansowane metody algebry i analizy matematycznej. Tematów badawczych dostarczały pytania stawiane przez specjalistów różnych dziedzin. Abstrahowanie od szczegółowych cech badanych zjawisk w procesie modelowania matematycznego niejednokrotnie prowadziło do zbliżonych opisów różnych zagadnień. Dzisiaj mówimy o zastosowaniach rachunku prawdopodobieństwa, które opierają się teorią procesów stochastycznych i statystyką. Jednolity model matematyczny stawał się także narzędziem do wykorzystania przy badaniu zagadnień, do analizy których nie wykorzystywano wcześniej metod matematycznych. Po II wojnie światowej na terenie Polski jedną z mocno rozwijanych gałęzi gospodarki był przemysł pozyskiwania surowców mineralnych. Modernizowano istniejące kopalnie, powstawały też nowe. Wydobywano węgiel kamienny, węgiel brunatny, miedź, siarkę. Przemysłowe wydobywanie surowców wymagało racjonalnego projektowania – zarówno przy modernizacji, jak i tworzeniu nowych zakładów wydobywczych. Konstrukcja takich obiektów przemysłowych w oparciu o znane, funkcjonujące rozwiązania nie jest najczęściej możliwa ze względu na unikalny charakter miejsca, zadań i celów. Nakłady zaś są znaczne, a to zmusza do ograniczenia ryzyka wynikającego z niewłaściwego doboru struktury systemu eksploatacyjnego i jego elementów.

J. Battek, S. Gładysz, J. Sajakiewicz,
Zarys teorii pracy systemów maszynowych z transportem ciągłym i nieciągłym, Górnictwo. Niezawodność systemów maszynowych. Referaty na II Konferencję Naukową., Prace Naukowe Instytutu Górnictwa Politechniki Wrocławskiej, 10, 1973, 3–30.



H. Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*, w opracowaniu A. Zgorzelskiej. Wydawca: Centrum Hugona Steinhausa, Politechnika Wroclawska, Oficyna Wydawnicza ATUT, Wrocław 2010.

Wybrane fragmenty wspomnień i artykuły wraz z omówieniem są zawarte w: A. Antkowiak, M. Kaczmarza, K. Szajowski, *Design of engineering systems in Polish mines in the second half of the 20th century*, Annales Societatis Mathematicae Polonae, Series VI, Antiquitates Mathematicae, 11, 2017, 251–300.

Na potrzebę opracowania teorii pracy systemów maszynowych z transportem ciągłym zwrócono uwagę w początkach lat sześćdziesiątych XX wieku po pierwszych doświadczeniach w pracy dużych kopalń odkrywkowych węgla brunatnego w Polsce („Turów”, „Adamów”). Zastosowano tam taśmowy transport urobku. Dopyływ informacji ze świata na temat analogicznych badań był mocno opóźniony. Znane były kierunki prac prowadzonych przez matematyków nad modelowaniem zjawisk losowych, a polscy matematycy chętnie podejmowali tę tematykę. Skupieni we Wrocławiu matematycy mieli w swoim gronie zarówno takich, którzy prowadzili badania podstawowe, jak i otwartych na podejmowanie zadań modelowania matematycznego, wymagającego wiedzy z wielu dziedzin matematyki. Dla oceny i planowania efektywności systemów inżynierskich ważne są rezultaty dotyczące modelowania zjawisk losowych zmiennych w czasie. Na tych podstawach teoretycznych rozwijała się teoria niezawodności i obsługi masowej, której metody w tym czasie były analizowane i rozwijane we Wrocławiu.

Modele teoretyczne w celu praktycznego sprawdzenia i zastosowania wymagają dopasowania (kalibracji) do modelowanej rzeczywistości. Zwykle oznacza to wykorzystanie zapisów z historii eksploatacji analizowanego systemu lub systemów analogicznych. Umiejętności inżynierów pozwalały na przeprowadzenie badań, w wyniku których oceniano ważne parametry przedsięwzięcia. Jednakże ten zakres badań rzadko pozwala na prognozę zachowań w przyszłości i nie daje możliwości śledzenia wpływu modyfikacji systemu na przyszłe jego zachowanie. W przypadku energetyki jej problemy były przedmiotem zainteresowania wszystkich.

Jaki wpływ na komfort życia przeciętnego człowieka może mieć błędne zrealizowanie systemu inżynierskiego, można prześledzić w kilku fragmentach wspomnień Hugona Steinhausa, gdzie opisuje on dyskusję we wrocławskim środowisku naukowym, również wśród profesorów matematyki, powiązaną z reportażami publikowanymi w „Życiu Warszawy” w 3 kwartale XX wieku.

Górnictwo i produkcja energii elektrycznej jest bardzo ważnym elementem gospodarki. Deficyt dostarczanych mocy znacznie obniża komfort życia. Toteż zainteresowanie efektywnością inwestycji w tym sektorze było wyjątkowe. Widoczne w postaci braku energii kłopoty skutkowały poszukiwaniem ich przyczyny. Ekspert Banku Inwestycyjnego, dr Włodzimierz W. Bojarski dość łatwo zdefiniował przyczynę – brak rytmicznych dostaw paliwa do elektrowni. Wyciągnął stąd wniosek, iż w zwiększeniu niezawodności systemu dostaw węgla z kopalni do elektrowni są potencjalne rezerwy, i skorzystanie z nich to sposób na podniesienie efektywności sektora energetycznego. Nad metodą

Właściwe podejście do poszukiwania słabych ogniw w złożonych systemach jeszcze nie zostało sformułowane. Dopiero uczeń Steinhausa zaproponował, jak oceniać wpływ poszczególnych elementów systemu na jego gotowość i niezawodność: Z.W. Birnbaum, *On the importance of different components in a multicomponent system*, Multivariate Analysis, II (Proc. Second Internat. Sympos., Dayton, Ohio, 1968), 581–592, Academic Press, New York 1969.

S. Gładysz, J. Battek, J. Sajkiewicz, Proces awarii i wydajność systemu taśmociągów, IV Krajowy Zjazd Górniczy, Tychy 1965, 1966, 30–72.

Głęboką analizę tematyki badawczej tego seminarium przeprowadził Władysław Szczotka: W. Szczotka, *Fenomen steinhausowskiego Seminarium Matematyki Stosowanej. Zarys koncepcji*, Annales Societatis Mathematicae Polonae, Series VI, Antiquitates Mathematicae, 12, 1, 2019, 197–228.

A. Antkowiak, *Analysis of the efficiency of complex systems*, Mathematica Applicanda, 45, 2, 2018, 127–152.

I. Ushakov, *Reliability: Past, present, future.*, Recent Advances in Reliability Theory. Statistics for Industry and Technology, N. Limnios and M. Nikulin, 3–21, 2000.

I. Frenkel, L. Khvatskin, A. Lisnianski, A., *Reliability: Past, present, future.*, Safety, Reliability and Risk Analysis: Theory, Methods and Applications, 1, 2009, 483–488.

Norma PN-EN 61165:2006, w której podano wytyczne stosowania procesów Markowa do analizy niezawodnościowej. Przedstawione w niej metody są odpowiednie do modelowania strategii obsługi systemów o różnych strukturach i obliczania wskaźników niezawodności tych systemów.

matematycznego modelowania systemu transportu w kopalniach odkrywkowych Dolnego Śląska pracowało przedsiębiorstwo Poltegor, które wzmocniło swój potencjał, angażując do trudnych zagadnień pracowników naukowych uczelni dolnośląskich. Do tego zespołu zaproszeni zostali między innymi Stanisław Gładysz, Jerzy Battek oraz Jan Sajkiewicz. Szczegóły tej współpracy zawarte są w licznych raportach i pracach opublikowanych w czasopiśmie branżowych. Ekspertyzy te nie zawierały jednak szczegółowych analiz, które pokazywały elementy stanowiące „słabe ogniwa” systemu. Brakowało dostatecznie szczegółowego modelu matematycznego systemu inżynierskiego związanego z transportem w kopalni, który wskazywałby kierunki działań poprawiających niezawodność systemu.

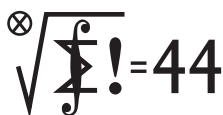
We Wrocławiu matematycy prezentowali nowe wyniki na seminarium w bibliotece Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego, w tym czasie mieszczącej się w budynku Wydziału Inżynierii Sanitarnej Politechniki Wrocławskiej. Hugo Steinhaus pisał w swoich wspomnieniach pod datą 12 XII 1963 roku o referacie Gładysza na temat analizy niezawodności systemu KTZ (Koparka-Taśmociąg-Zwałowarka).

W związku z problemem braku ciągłości w dostawach paliwa do elektrowni poproszono matematyków o pomoc w wykonaniu analizy funkcjonalnej złożonego systemu. Stworzono adekwatny model matematyczny systemu technicznego uwzględniający awarie, proces włączania i możliwości odnowy. Zdefiniowano charakterystyczne stany systemu, a opis działania sprowadzał się do probabilistycznego ujęcia przebywania w poszczególnych stanach. To pozwalało na przeprowadzenie analizy wydajności. Narzędziem modelowania były procesy markowskie z czasem ciągłym i skończoną liczbą stanów, służące do analizy niezawodności i wydajności zespołu połączonych urządzeń w systemie transportu nadkładu i węgla. Mimo upływu czasu taki sposób wykorzystania matematyki w technice wciąż jest aktualny. Także w dzisiejszych pracach związanych z projektowaniem i utrzymaniem takich obiektów inżynierskich, jak kopalnie, porty, stacje przeladunkowe widać potrzebę modelowania niezawodności i wydajności systemu. Znaczenie tych metod łatwo dostrzec na tle rozwoju metod matematycznych prezentowanych w analizach historycznych.

Wnioski z przytoczonej historii są następujące. Prowadzone ponad pół wieku temu badania niezawodności zespołu KTZ w kopalniach doprowadziły, między innymi, do wyodrębnienia różnych rodzajów węzłów przepływowych wynikających z połączenia równoległego przenośników taśmowych. Z opracowanej metodologii korzystają również współcześni inżynierowie. Transport kruszywa w kopalniach jest niezwykle ważny. Według analiz firm zajmujących się produkcją maszyn górniczych aż 50% kosztów jest ponoszonych właśnie na transport. W dobre coraz wyższych standardów ekologicznych kopalnie są zmuszane do zredukowania szkodliwych dla środowiska działań. Pozwala na to wymiana transportu samochodowego na przenośniki taśmowe. Ich zaletami są m.in. ciągłość odstawy urobku, łatwość automatyzacji, możliwość pokonywania dużych odległości w urozmaiconym terenie, wysoka wydajność, bezpieczeństwo pracy, możliwość pracy w różnych warunkach klimatycznych i w różnym terenie. Jednak ich eksploatacja jest bardzo kosztowana. Konieczne są częste naprawy i czynności konserwacyjne związane z taśmą przenośnika, która charakteryzuje się małą odpornością na działanie szkodliwych czynników środowiskowych, chemicznych i mechanicznych. Ważnym zagadnieniem jest zatem optymalny dobór czasu napraw, aby zminimalizować ich częstotliwość i ponoszone koszty, ale mimo wszystko zapewnić bezawaryjną pracę i ograniczyć długość przestoju.

Dobre rozwiązania są standaryzowane. Przenośniki taśmowe są złożonym urządzeniem, stąd można rozpatrywać ich niezawodność w aspekcie całościowym, analizować je jako system połączonych segmentów i monitorować liczbę awarii. Wtedy w łatwy sposób (choć niezbyt optymalny) można zarządzać czasem napraw lub konserwacji – gdy empiryczna intensywność awarii zmieni swój charakter z funkcji stałej na funkcję rosnącą, można przypuszczać, że należy w najbliższym czasie przeprowadzić prace konserwacyjno-naprawcze. Innym sposobem jest dokładniejsza analiza matematyczna czasów awarii i napraw z wykorzystaniem procesów Markowa, proponowana przez normę międzynarodową.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2019

Zadania z matematyki nr 785, 786

Redaguje Marcin E. KUCZMA

785. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o środku O ; przy tym $|BC| = |CD|$. Przekątne AD i CE są prostopadłe, zaś przekątne AD i BE przecinają się w takim punkcie P , że $|AP| = |AO|$. Wykazać, że trójkąt BCP jest równoboczny.

786. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele czwórek różnych liczb naturalnych (a, b, c, d) o tej własności, że każdy z iloczynów ab, bc, ac, bd, cd jest o 1 większy od kwadratu pewnej liczby naturalnej.

Zadanie 786 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2019

Przypominamy treść zadań:

781. Dla ustalonych liczb rzeczywistych $b > a > 0$ oraz parzystej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyznaczyć kres górny wartości stosunku A/H , gdzie A i H to (odpowiednio) średnia arytmetyczna i średnia harmoniczna n liczb, wybranych dowolnie z przedziału $[a, b]$.

782. Dany jest trójkąt ABC , w którym wysokość opuszczona z wierzchołka C ma długość h . Na każdym odcinku CT , łączącym wierzchołek C z bokiem AB , odkładamy odcinek TP ustalonej długości $d < h$. Uzyskane w ten sposób punkty P tworzą pewną krzywą. Czy – jeśli liczba d jest dostatecznie mała – długość owej krzywej przekroczy długość boku AB ?

781. Rozważamy średnie A i H liczb $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Weźmy dowolną liczbę $c > 0$ i zauważmy, że

$$(1) \quad \frac{A}{H} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{c} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{c}{x_i} \right) \leq \\ \leq \frac{1}{4n^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{c} + \frac{c}{x_i} \right) \right)^2$$

– skorzystaliśmy z nierówności $4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2$ dla liczb $\alpha = \sum x_i/c$, $\beta = \sum c/x_i$.

Dla $x \in [a, b]$ mamy nierówność $(x - a)(x - b) \leq 0$, którą przepisujemy w postaci

$$x + \frac{ab}{x} \leq a + b$$

i dalej, dzieląc przez \sqrt{ab} :

$$(2) \quad \frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{x} \leq \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Kontynuujemy szacowanie (1), przyjmując $c = \sqrt{ab}$ i korzystając z (2):

$$\frac{A}{H} \leq \frac{1}{4n^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{x_i} \right) \right)^2 \leq \frac{1}{4n^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right)^2 = \\ = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

Liczba n jest z założenia parzysta. Gdy $x_i = a$ dla połowy spośród wskaźników $i = 1, \dots, n$, zaś $x_i = b$ dla pozostałej połowy, wówczas we wszystkich szacowaniach zachodzi równość. Zatem liczba $(a+b)^2/4ab$ jest maksymalną wartością stosunku A/H .

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 775 ($WT = 1,41$) i 776 ($WT = 2,88$) z numeru 2/2019

Witold Bednarek	Łódź	43,07
Jerzy Cisło	Wrocław	42,92
Paweł Najman	Kraków	41,10
Paweł Kubit	Kraków	40,81
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	40,74
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,73
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Janusz Fielt	Warszawa	31,23

782. Odpowiedź: nie. Uzasadnienie: długość krzywej to kres górny długości linii łamanych w nią wpisanych. Weźmy więc dowolną łamaną, wpisaną w rozważaną krzywą (utworzoną dla pewnego parametru $d \in (0, h)$); jej wierzchołki P_0, P_1, \dots, P_n leżą (w takim porządku) na owej krzywej, przy czym $P_0 \in AC$, $P_n \in BC$. Przedłużenia odcinków CP_i docierają do boku AB w punktach T_i . Ustalmy $i > 0$ i spójrzmy na czworokąt $P_{i-1}T_{i-1}T_iP_i$, którego boki $P_{i-1}T_{i-1}$ oraz T_iP_i mają długość d . Przyjmijmy, że punkt P_i jest nie mniej oddalony od prostej AB niż punkt P_{i-1} (gdy jest przeciwnie, zamieniamy role wskaźników $i-1$ oraz i). Niech punkt Q_i uzupełnia równoległobok $P_{i-1}T_{i-1}T_iQ_i$. Skoro półproste $T_{i-1}P_{i-1}$, T_iP_i spotykają się (w punkcie C), odcinek T_iP_i przecina odcinek $P_{i-1}Q_i$. Trójkąt $P_iQ_iT_i$ jest równoramienny, jego osią symetrii jest

symetralna odcinka P_iQ_i . Punkt P_{i-1} leży po tej stronie owej symetralnej co punkt P_i – zatem bliżej punktu P_i niż punktu Q_i . Tak więc $|P_{i-1}P_i| < |P_{i-1}Q_i| = |T_{i-1}T_i|$.

Taka nierówność zachodzi dla wszystkich $i = 1, \dots, n$, wobec czego łamana $P_0P_1 \dots P_n$ jest krótsza niż bok AB . Biorąc kres górny długości wszystkich takich łamanych, wpisanych w rozważaną krzywą, stwierdzamy, że jej długość nie przekracza długości boku AB .

[Korzystając ze wzoru całkowego na długość krzywej (najwygodniej we współrzędnych biegunowych ze środkiem C), nietrudno się przekonać, że długość badanej krzywej jest ściśle malejącą funkcją parametru $d < h$. Dla $d = 0$ ta krzywa to odcinek AB ; dla $0 < d < h$ jej długość jest więc ostro mniejsza niż $|AB|$.]

Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2019

Zadania z fizyki nr 682, 683

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

682. Na nieruchomym, poziomym walcu o promieniu R leży walec o promieniu r , również poziomo (rys. 1). Oś walców są wzajemnie prostopadłe. Przy jakim stosunku promieni równowaga górnego walca będzie trwała? O jaki maksymalny kąt można przy tym odchylić od poziomu górny walec? Współczynnik tarcia między walcami jest równy μ .

683. W obwodzie przedstawionym na rysunku 2 opór zewnętrzny R jest dużo większy niż opór wewnętrzny ogniwa: $r \ll R$. Podłączenie woltomierza o oporze R_V powoduje zmianę napięcia między punktami A i B . Jaka powinna być relacja między oporami R i R_V , aby to zaburzenie było jak najmniejsze?

Rozwiązania zadań z numeru 5/2019

Przypominamy treść zadań:

678. Dielektryczna kula spolaryzowana jest jednorodnie, to znaczy momenty dipolowe wszystkich cząsteczek są równe i wzajemnie równoległe.

- Znaleźć natężenie pola elektrycznego wewnątrz dielektryka, jeżeli w jednostce objętości znajduje się N cząsteczek, z których każda ma moment dipolowy $p = ql$. Odległość l między ładunkami dipola jest dużo mniejsza od promienia kuli.
- Znaleźć gęstość powierzchniową ładunków indukowanych na powierzchni kuli.

679. Na gładkim lodzie zderzają się sprężyste dwa jednakowe okrągłe kamienie do gry w curling, z których jeden początkowo spoczywa, a drugi porusza się ruchem postępowym. Prosta przechodząca przez środki kamieni podczas zderzenia tworzy kąt $\alpha = \pi/3$ z wektorem prędkości początkowej poruszającego się kamienia. Znaleźć maksymalną część energii układu, która podczas zderzenia przechodzi w energię sprężystej deformacji. Nie ma tarcia między kamieniami.

678. W wyniku polaryzacji ładunki cząsteczek dielektryka rozsunęły się (rys. 3). Wewnątrz kuli o środku w punkcie O_1 znajdują się ładunki ujemne, wewnątrz kuli o środku w punkcie O_2 ładunki dodatnie. Gęstość objętościowa ładunków $\rho = Nq$. Odległość między środkami kul jest równa l . Natężenie pola w dowolnym punkcie w obszarze, w którym kule nachodzą na siebie, jest sumą wektorową natężeń od obu kul (rys. 4).

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi r_i^3 \rho}{3r_i^2} = \frac{\rho r_i}{3\epsilon_0}, \quad \text{gdzie } i = 1, 2.$$

Wypadkowe pole jest jednorodne, ma wartość $E = \rho l / (3\epsilon_0)$ i zwrot przeciwny do wektora \mathbf{p}

$$\mathbf{E} = -N\mathbf{p} / (3\epsilon_0).$$

Ponieważ $l \ll R$, gdzie R jest promieniem kuli, szukana gęstość ładunków powierzchniowych dana jest wzorem (rys. 3):

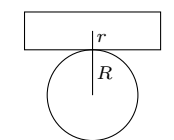
$$\sigma = \rho l \cos \Theta = Np \cos \Theta.$$

679. Rozłóżmy prędkość v poruszającego się kamienia na składowe:

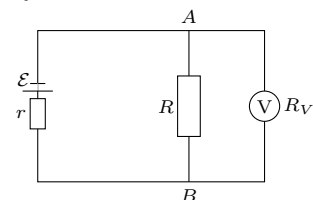
$v_1 = v \cos \alpha = v/2$ wzdłuż prostej p przechodzącej przez środki obu kamieni podczas zderzenia i prostopadłą do niej $v_2 = v \sin \alpha = v\sqrt{3}/2$ (rys. 5). Gdy deformacja jest maksymalna, prędkości kamieni w kierunku p wyrównują się. Oznaczając ich wartość przez v_3 , mamy z zasady zachowania pędu $mv_1 = 2mv_3$, gdzie m jest masą kamienia, stąd $v_3 = v_1/2$. Zasada zachowania energii ma postać:

$$m(v_1^2 + v_2^2)/2 = mv_3^2/2 + m(v_3^2 + v_2^2)/2 + E_s,$$

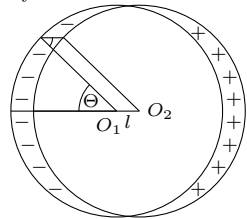
gdzie E_s jest maksymalną energią sprężystej deformacji, a jej wartość $E_s = mv^2/16$. Całkowita energia układu $E = mv^2/2$, stąd $E_s/E = 1/8$.



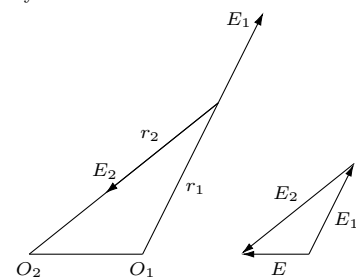
Rys. 1



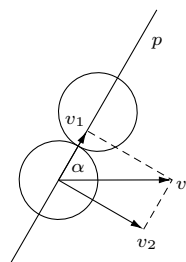
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.



Rozwiązanie zadania M 1613.
Odpowiedź: 17.

Zauważmy, że dowolny wspólny dzielnik liczb $n^2 + 2$ oraz $n^3 + 3$ dzieli również liczbę

$$n(n^2 + 2) - (n^3 + 3) = 2n - 3$$

i w konsekwencji także liczbę

$$4(n^2 + 2) - (2n + 3)(2n - 3) = 4n^2 + 8 - 4n^2 + 9 = 17.$$

Pozostaje zauważyć, że dla $n = 10$ mamy $a = 102 = 6 \cdot 17$ oraz $b = 1003 = 59 \cdot 17$.

A magnetar-powered X-ray transient as the aftermath of a binary neutron-star merger, Y. Xue i inni, Nature 568, 198–201 (2019).
(www.nature.com/articles/s41586-019-1079-5)



Rozwiązanie zadania M 1614.

Zauważmy, że jeśli liczba $k \neq 1$ raz pojawi się na górze stosu, to aby pojawiła się tam ponownie, wcześniej musi się tam znaleźć liczba większa od k .

W szczególności n pojawi się na górze co najwyżej raz. Jeśli to nastąpi, to $n - 1$ pojawi się później co najwyżej raz, jeżeli nie, to $n - 1$ również pojawi się w ogóle co najwyżej raz. Po ewentualnym wystąpieniu $n - 1$ liczba $n - 2$ pojawi się co najwyżej raz itd. To oznacza, że w pewnym momencie na górze musi pojawić się liczba 1.

Niebo we wrześniu

Dziewiąty miesiąc roku jest kolejnym, w którym dnia szybko ubywa. Na początku września **Słońce** góruje wciąż bliżej zenitu niż horyzontu, przebywając na nieboskłonie przez ponad 13,5 godziny, lecz do jego końca wysokość ta zmniejsza się o około 11° , do mniej więcej 36° , a dzień skróci się poniżej 12 godzin. Słońce przetnie równik niebieski w drodze na południe, rozpoczynając na naszej półkuli Ziemi astronomiczną jesień 23 września o godzinie 9:50 naszego czasu. Jednak ze względu na refrakcję atmosferyczną faktyczna równonoc nastąpi u nas 2–3 dni później.

We wrześniu w dalszym ciągu będą niewidoczne planety typu ziemskiego. **Merkury i Mars** na początku

Prosto z nieba: Narodziny magnetara

W sierpniu 2017 roku astronomowie „grawitacyjni” (skupieni w zespołach LIGO i Virgo) zaobserwowali pierwszą bezpośrednią detekcję fal grawitacyjnych emitowanych podczas połączenia się dwóch gwiazd neutronowych w układzie podwójnym. Wydarzenie to, oznaczone GW170817, było początkiem astronomii wieloaspektowej z udziałem detektorów fal grawitacyjnych, ponieważ falom grawitacyjnym towarzyszyły fale elektromagnetyczne, m.in. błysk gamma. Dokładna lokalizacja sygnału na niebie dostarczona przez LIGO i Virgo umożliwiła ponad 70 teleskopom obserwacje poświaty zdarzenia w świetle optycznym, promieniach rentgenowskich, radiowych i innych.

Z zarejestrowanych fal grawitacyjnych wiemy, że w wyniku połączenia gwiazd neutronowych powstał obiekt o masie około $2,7 M_\odot$. Niestety, detektory LIGO i Virgo nie były dostatecznie czułe, by zarejestrować, to co stało się bezpośrednio po zderzeniu. Nie wiadomo zatem, czy w efekcie powstała masywna gwiazda neutronowa, czy też lekka czarna dziura. Astronomowie zyskali jednak dowód, że ta podklasa błysków gamma (tzw. krótkie błyski) jest związana z układami podwójnymi gwiazd neutronowych. Od tego momentu zaczęto jeszcze uważniej poszukiwać tego typu sygnałów.

Okazuje się, że prawdziwe skarby można odnaleźć umiejętnie przeczesując dane archiwalne. Niedawna praca chińsko-amerykańskiego zespołu astronomów opisuje detekcję sygnału rentgenowskiego XT2, zaobserwowanego przez teleskop kosmiczny Chandra 22 marca 2015 roku. Błysk został znaleziony w tzw. głębokim południowym polu Chandra (*Chandra Deep Field South*), miejsca na niebie o mniejszej niż średnia gęstość wodoru neutralnego w kierunku patrzenia, co pozwala na dokładniejsze obserwacje rentgenowskie.

Sygnał, który jest związany z galaktyką oddaloną o 6,6 miliarda lat świetlnych (dla porównania, sygnał GW170817 zarejestrowano z odległości zaledwie 130 milionów lat świetlnych), ujawnia ekscytujące następstwo połączenia się gwiazd neutronowych: narodziny pojedynczej gwiazdy neutronowej z potężnym polem magnetycznym – magnetara.

Nowo narodzony i szybko wirujący magnetar na krótko rozblysnął i świecił w promieniach X przez około 30 minut. Następnie w miarę strat energii rotacyjnej emisja słabła przez kolejne 6,5 godziny, ostatecznie zanikając z widoku teleskopu Chandra. Takie zachowanie jest zgodne z modelami masywnej i obdarzonej dużym polem magnetycznym gwiazdy neutronowej. Zagadką pozostaje, jaką masę ma ten magnetar. Informacja ta ma istotne znaczenie dla modeli jądrowych bardzo gęstej materii.

XT2 leży na obrzeżach swojej galaktyki, co często obserwowane jest w przypadku krótkich błysków gamma. Oszacowana częstość występowania tego typu zjawisk jest zgodna z częstością wyliczoną w oparciu o obserwację GW170817.

Michał BEJGER

miesiąca przejdą przez koniunkcję górną ze Słońcem. Po niej Merkury przeniesie się na niebo wieczorne, dążąc do maksymalnej elongacji wschodniej pod koniec października, wynoszącej 25° . Niestety, niekorzystne nachylenie ekliptyki do zachodniego widnokregu spowoduje, że planeta zginie w blasku Słońca.

Druga z wymienionych planet przeniesie się na niebo poranne, gdzie nachylenie ekliptyki do widnokregu jest bardzo dobre. Ale tak, jak dużo czasu zajmuje Słońcu dogonienie Czerwonej Planety, tak samo wolno oddala się ona od Słońca po koniunkcji i pokaże się dopiero w drugiej połowie października.

Planeta **Wenus** we wrześniu znajduje się niedaleko Słońca, po koniunkcji górnej w połowie sierpnia, po której przeniosła się na niebo wieczorne. Do końca miesiąca planeta zdąży zwiększyć elongację tylko do 12° , zachodząc niedługo po Słońcu, i pozostanie niewidoczna.

Dużo lepiej przedstawia się sytuacja **planet zewnętrznych**. Choć pierwsze dwie z nich są już sporo po swoich opozycjach i można je obserwować tuż po zmierzchu, nisko nad południowo-zachodnim widnokregiem, ostatnie dwie są widoczne przez prawie całą noc, i do tego wędrują znacznie wyżej. Najtrudniej będzie obserwować Jowisza, znajdującego się w gwiazdozbiornie Wężownika. W trakcie miesiąca na początku nocy astronomicznej jej wysokość nad horyzontem zmniejszy się z około 8 do 5° , jasność z $-2,2$ do -2^m , zaś tarcza planety skurczy się z 39 do $36''$.

Jowisz we wrześniu porusza się ruchem prostym i do końca miesiąca zbliży się na 26° do Saturna, który o tej samej porze jest tuż po przejściu przez południk lokalny i jego wysokość nad widnokregiem wynosi około 14° . Przez miesiąc jasność planety spadnie do $+0,5^m$, a jej tarcza skurczy się do $17''$. **Saturn** zmieni kierunek ruchu na wsteczny 18 września, stąd jego pozycja względem gwiazd w trakcie miesiąca zmieni się tylko o $7'$. Planeta dokona zwrotu 1° na południe od charakterystycznego łuku gwiazd w północno-wschodniej części głównej figury Strzelca.

W przeciwieństwie do opisanych dotychczas planet, ostatnie dwie są widoczne bardzo dobrze. **Neptun** 10 września znajdzie się w opozycji względem Słońca, a zatem można go obserwować przez całą noc. Planeta góruje około północy na wysokości ponad 30° . Jej jasność wynosi $+7,8^m$, stąd do jej dostrzeżenia potrzebna jest lornetka lub nieduży teleskop.

2019 rok jest kolejnym z serii, gdy Neptuna łatwo zidentyfikować dzięki bliskiemu sąsiedztwu znacznie jaśniejszych od niego gwiazd. W tym sezonie obserwacyjnym taką gwiazdą jest φ Aquarii, świecąca blaskiem obserwowanym $+4,2^m$. Planeta zacznie miesiąc niecałe $8'$ na północny wschód od niej, by 6 września minąć ją w odległości zaledwie $13''$! Niestety stanie się to w ciągu dnia. Przed świtem Neptun zbliży się do φ Aqr na mniej więcej $44''$, zaś wieczorem oddali się od niej już na $28''$. W połowie tej odległości, prawie dokładnie na linii łączącej gwiazdę z planetą, znajdzie się Tryton, najjaśniejszy i największy księżyc Neptuna. Ma on jasność $+13,5^m$, a zatem do jego odnalezienia potrzebny jest teleskop o średnicy lustra przynajmniej 20 cm. Do końca września Neptun oddali się od φ Aqr na prawie $40'$.

Uran przez opozycję względem Słońca przejdzie pod koniec października, ale już porusza się ze wschodu na zachód, na tle gwiazdozbiornu Barana, niecałe 50° na północny wschód od Neptuna. Uran góruje jakieś 3 godziny po Neptunie, na wysokości ponad 50° , i jeszcze przez kilka lat będzie najbardziej na północ wysuniętą planetą zewnętrzną Układu Słonecznego.

W 2024 roku wyprzedzi go Jowisz, ale tylko na 2 lata. Planeta Saturn minie Urana w roku 2032, gdy obie planety dotrą w okolice punktu Raka, lecz przejdzie pod nim. We wrześniu 2019 r. Uran do końca miesiąca pojaśnieje do $+5,7^m$. Niestety w jego najbliższej okolicy nie ma jasnych gwiazd. Łatwe do zobaczenia gwiazdy Barana znajdują się od 8 do 10° nad nim.

Oczywiście wszystkie planety w którymś momencie odwiedzi **Księżyc**. Srebrny Glob 30 sierpnia przeszedł przez nów, a 6 września znajdzie się w I kwadrze. Wieczorem ekliptyka jest nachylona niekorzystnie, a zatem początkowo Księżyc nie pokaże się wyżej niż kilkanaście stopni nad widnokregiem. W okolicach I kwadry naturalny satelita Ziemi spotka się z Jowiszem i 5 września zbliży się doń na niecałe 7° . W prawie identycznej odległości, lecz pod Księżycem, znajdzie się gwiazda Antares, najjaśniejsza gwiazda Skorpiona, a $5-6$ stopni na zachód – łuk gwiazd z Graffias i Dschubą. Kolejnego dnia Księżyc przesunie się mniej więcej o 7° na wschód od Jowisza. Następnie 8 września, już w fazie 75% , Srebrny Glob minie Saturna. W Polsce oba ciała zbliżą się na niecałe 3° .

Księżyc powędruje dalej i 13 września przejdzie przez pełnię. Tej nocy mniej więcej 1° na północ od niego znajdują się trzy gwiazdy 4. i 5. wielkości konstelacji Wodnika: ψ_1 , ψ_2 i ψ_3 , które jednak zginą w silnej lunie księżycowej. Tak samo jak znajdujące się wtedy jakieś $4,5^\circ$ na północ od niego gwiazda φ Aqr i planeta Neptun – co potwierdza opozycję ostatniej planety od Słońca.

18 września faza Księżyca spadnie do 87% . Tej nocy dotrze on do Urana, zbliżając się na około 5° . W dniach 20 i 21 września Srebrny Glob minie Aldebarana, najjaśniejszą gwiazdę Byka. Niestety przez Hiady Księżyc przejdzie za dnia. Pierwszego z wymienionych dni zaprezentuje on tarczę oświetloną w 70% i zbliży się do Aldebarana na około 7° . Dobę później, oświetlony w 61% , znajdzie się już 5° na wschód od niego.

22 września Srebrny Glob przejdzie przez ostatnią kwadrę, wędrując wtedy na pograniczu gwiazdozbiornów Oriona, Byka i Bliźniąt, około 3° od wspomnianego już punktu Raka. W kolejnych dniach Księżyc powędruje ku Słońcu, przechodząc przez nów wieczorem 28 września. Można go obserwować prawie do samego nowiu, w czym pomaga duże nachylenie ekliptyki do widnokregu. Bardzo ładnie widoczne będzie tzw. światło popielate. Trzy dni przed nowiem Księżyc w fazie 19% spotka się ze słynną gromadą otwartą M44, towarzysząc jej w odległości 3° . Dobę później jeszcze cieńszy, 10-procentowy sierp Księżyca zbliży się na 4° do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Po czym 27 września, 1,5 doby przed nowiem, na godzinę przed świtem tarcza Księżyca w fazie zaledwie 4% pokaże się na wysokości ponad 10° . Srebrny Glob znajdzie się prawie w połowie drogi między dwiema najjaśniejszymi gwiazdami Lwa: Regulusem na zachodzie i Denebolą na wschodzie.

Ariel MAJCHER

Podejrzone kaskady

Kiedy wysokoenergetyczna cząstka przechodząca przez gęsty ośrodek dielektryczny zderzy się z którąś z cząstek budujących ten ośrodek, może powstawać wiele nowych cząstek, m.in. fotonów, elektronów i pozytonów, które tworzą swoistą kaskadę cząstek. Taka kaskada może mieć kilka centymetrów długości i jest stosunkowo szybka, gdyż tworzące ją cząstki niejednokrotnie poruszają się z prędkościami przewyższającymi prędkość światła w tym ośrodku. Pozytony szybko anihilują, pozostawiając w kaskadzie ujemnie naładowane elektrony. Występuje wówczas tzw. zjawisko Czerenkowa, czyli emisja promieniowania elektromagnetycznego przez naładowane cząstki ponadświetlne. Z punktu widzenia detekcji fal elektromagnetycznych o długościach przewyższających 10 cm, w szczególności fal radiowych, kaskada cząstek „wygląda” jak wielki pojedynczy ładunek, co oznacza, że fale radiowe emitowane przez pojedyncze cząstki kaskady wzajemnie się wzmacniają (mówiąc fachowo, są spójne). Pozwala to na bardzo wydajne rejestrowanie w zakresie radiowym efektów oddziaływania wysokoenergetycznych cząstek z materią.

Opisany wyżej proces nosi nazwę zjawiska Askaryana i został po raz pierwszy opisany 55 lat temu. Trzydzieści lat temu po raz pierwszy zobaczono to zjawisko w lodzie, po naświetleniu bryły lodu wiązką z akceleratora SLAC. W kolejnym roku nastąpiła pierwsza detekcja zjawiska Askaryana w lodzie w warunkach „polowych”, tj. w lodowcu antarktycznym.

Było to dziełem zespołu eksperymentu ANITA (*Antarctic Impulse Transient Antenna*) [1]. Układ doświadczalny to zespół anten radiowych przymocowanych do balonu wypełnionego helem i krążącego nad lodowym kontynentem w naturalnym wirze mas powietrza na wysokości około 35 km. Pierwszy układ doświadczalny przeleciał nad Antarktydą w latach 2006–2007 i zarejestrował 16 kaskad. Jedna z nich wydała się badaczom nieco podejrzana – rekonstrukcja jej parametrów wskazywała na to, że biegła ona w górę. Oznaczałoby to, że wywołująca ją cząstka również musiała poruszać się w górę, czyli musiałaby przebiec w poprzek kuli ziemskiej. Szkopuł w tym, że nie znamy cząstek o takiej własności. Najślabiej ze wszystkich cząstek oddziałują neutrino, ale ich prawdopodobieństwo interakcji z ziemską materią rośnie z kwadratem energii neutrino. O ile dla niskoenergetycznych neutrino słonecznych czy atmosferycznych nasz glob jest w zasadzie przezroczysty, to neutrino wywołujące obserwowane w detektorze ANITA kaskady mają energie miliardy razy większe i po prostu muszą „utknąć” we wnętrzu kuli ziemskiej. Można by przypuszczać, że ANITA zarejestrowała fale radiowe, które odbiły się od jakiejś niejednorodności w lodzie, ale wtedy zmieniłaby się polaryzacja tych fal, a tego zjawiska nie zaobserwowano.

Był to jednak pojedynczy przypadek. Naukowcy przeszli szybko nad nim do porządku dziennego. Jednak po opracowaniu danych z trzeciego przelotu, jaki odbywał się na przełomie lat 2014–2015, do kolekcji obserwowanych kaskad biegnących pod górę doszła druga (i 19 „normalnych”) [2]. Sprawdzono, że neutrino wywołujące podejrzone kaskady nie mogły pochodzić ze znanych supernowych lub błysków gamma. Czym zatem są te dwa podejrzone przypadki?

Uczciwa odpowiedź brzmi – nie wiadomo. Jeśli jednak puścimy wodze fantazji [3], możemy wyobrazić sobie, że mamy do czynienia z oddziaływaniami jakichś nowych, nieznanymi jeszcze cząstek. Może są to cząstki ciemnej materii „schwyte” we wnętrzu Ziemi? A może to wygenerowane podczas Wielkiego Wybuchu bardzo słabo oddziałujące cząstki? Czy zatem jesteśmy w trakcie przełomowego odkrycia, czy też, jak wiele razy wcześniej, podniecamy się fluktuacją statystyczną lub niezidentyfikowanym błędem systematycznym?

Krzysztof TURZYŃSKI



Rozwiązanie zadania F 984.

Po podgrzaniu o ΔT bimetaliczna płytka wygnie się w łuk, a jej zewnętrzne powierzchnie będą łukami o długościach $l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T)$ oraz $l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta T)$ odpowiadającymi kątom φ (miara łukowa) i okręgom o promieniach, odpowiednio, R i $R + 2d$, a więc:

$$l_0(1 + \alpha_1 \Delta T) = R\varphi$$

oraz

$$l_0(1 + \alpha_2 \Delta T) = (R + 2d)\varphi.$$

Równania te spełniają:

$$\varphi = \frac{l_0(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}{2d}$$

oraz

$$R + 2d = \frac{2d(1 + \alpha_2 \Delta T)}{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}.$$

Przesunięcie końca płytki wynosi

$$h = (R + 2d)(1 - \cos \varphi) / \cos \varphi.$$

Ostatecznie:

$$h = \frac{2d(1 + \alpha_2 \Delta T)(1 - \cos \varphi)}{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T \cos \varphi} \approx \frac{(1 + \alpha_2 \Delta T)(\alpha_2 - \alpha_1)l_0^2}{2d},$$

gdzie ze względu na bardzo małą wartość kąta φ , dla otrzymania przybliżonej równości zastosowano przybliżenie $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $h \approx 8$ mm.

- [1] P. W. Gorham *et al.*, *New Limits on the Ultra-high Energy Cosmic Neutrino Flux from the ANITA Experiment*, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 051103
- [2] P. W. Gorham *et al.*, *Observation of an Unusual Upward-going Cosmic-ray-like Event in the Third Flight of ANITA*, Phys. Rev. Lett. **121** (2018) 161102
- [3] L. A. Anchordoqui *et al.*, *The pros and cons of beyond standard model interpretations of ANITA events*, arXiv:1907.06308



W poszukiwaniu trójkąta równobocznego

Bartłomiej BZDEGA

Trójkąt równoboczny jaki jest, każdy widzi – ma trzy boki jednakowej długości i trzy kąty miary 60° . Aby wykazać, że dany trójkąt jest równoboczny, wystarczy dowieść jednego z następujących warunków:

- trzy jego boki mają jednakową długość,
- pewne dwa jego boki są jednakowej długości i pewien jego kąt ma miarę 60° ,
- pewne dwa jego kąty mają miarę 60° .

W zadaniach 1–6 dowodzimy, że pewien konkretny trójkąt jest równoboczny. Pozostałe zadania również dotyczą trójkątów równobocznych, ale w bardziej zakamuflowany sposób – w każdym z nich jest ukryty trójkąt równoboczny, którego odnalezienie lub dorysowanie ułatwi rozwiązanie.

Zadania

1. Trójkąty BPC i CQD są równoboczne i leżą na zewnątrz równoległoboku $ABCD$. Udowodnić, że trójkąt APQ też jest równoboczny.
2. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Punkty K i L są środkami odcinków odpowiednio BD i EF . Dowieść, że trójkąt AKL jest równoboczny.
3. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Punkt M jest środkiem odcinka AF . Wykazać, że trójkąt BCM jest równoboczny.
4. Punkty A , B i C leżą kolejno na prostej ℓ . Punkty A_1 i C_1 leżą po tej samej stronie prostej ℓ , przy czym trójkąty ABC_1 i A_1BC są równoboczne. Punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio AA_1 i CC_1 . Udowodnić, że trójkąt BMN jest równoboczny.
5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ i punkt O wewnątrz niego, przy czym zachodzą równości: $|AO| = |BO|$, $|CO| = |DO|$ i $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle COD| = 120^\circ$. Dowieść, że środki odcinków AB , BC i CD są wierzchołkami trójkąta równobocznego.
6. Na bokach trójkąta ABC , na zewnątrz niego, zbudowano trójkąty równoboczne BCD , CAE i ABF . Środkami tych trójkątów są odpowiednio punkty P , Q i R . Dowieść, że trójkąt PQR jest równoboczny (twierdzenie Napoleona).
7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABC| = 60^\circ$. Na boku BC tego trapezu leży taki punkt E , że $|EB| = |CD|$. Wykazać, że $|BD| = |AE|$.
8. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnić, że suma pól trójkątów ABS , CDS i EFS jest równa sumie pól trójkątów BCS , DES i FAS .
9. W czworokącie wypukłym $ABCD$ mamy $|\sphericalangle DAB| = 30^\circ$. Wykazać, że $|AC| \leq |BC| + |CD| + |DB|$.
10. W czworokącie $ABCD$ wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku D mają miarę 20° . Wykazać, że $|AB| + |BC| + |CA| \geq |AD|$.
11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$. Punkt M jest środkiem boku AB . Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q , że $|AP| = |PQ| = |QB|$. Wykazać, że $|\sphericalangle PMQ| = 90^\circ$.
12. W trójkącie ABC mamy $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$. Punkty D , E i F leżą na bokach odpowiednio BC , CA i AB , przy czym proste AD , BE i CF są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC . Udowodnić, że $|\sphericalangle DFE| = 90^\circ$.
13. Trójkąt ABC , w którym $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości $|AD| = |BD|$ oraz $|AB| = |CD|$. Udowodnić, że $|\sphericalangle ACD| \geq 30^\circ$.
14. Wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC wybrano taki punkt P , dla którego wartość wyrażenia $|AP| + |BP| + |CP|$ jest najmniejsza (punkt Fermata–Torricellego). Wykazać, że $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPA| = 120^\circ$.

Wskazówki do zadań
 1. Trójkąty ABP , QDA i QCP są przystające (bkb).
 2. Po podzieleniu sześciokąta $ABCDEF$ na 24 przystające trójkąty równoboczne można zauważyć, że odcinki AL , AK , KL są dłuższymi przystającymi przystającymi trójkątami.
 3. Punkty C i M leżą na okręgu o średnicy EF , więc $|\sphericalangle ECM| = |\sphericalangle EFM| = 60^\circ$, analogicznie $|\sphericalangle EBM| = 60^\circ$.
 4. Obracając trójkąt C_1BC wokół punktu B o 60° , otrzymamy trójkąt ABA_1 . Obrazem punktu N w tym obrocie jest punkt M , więc $|BM| = |BN|$.
 5. Obracając trójkąt AOC o 120° wokół punktu O , otrzymamy trójkąt BOD . Zatem te trójkąty są przystające oraz proste AC i BD przecinają się pod kątem 60° . Trójkąt CAF jest podobny do trójkąta QAR w skali $\sqrt{3}$ (bkb).
 6. Trójkąt QAR w skali $\sqrt{3}$ (bkb).
 7. Przedłużmy ramiona trapezu do przecięcia się w punkcie P . Wówczas trójkąty ABP i CDF są równoboczne, dalej dowodzimy, że trójkąty ABE , APC i BPD są przystające (bkb).
 8. Przedłużmy odcinki AB , CD i EF , otrzymując trójkąt równoboczny. Suma pól trójkątów ABS , CDS i EFS stanowi $\frac{3}{4}$ pola tego trójkąta.
 9. Niech B' będzie punktem symetrycznym do B względem prostej AD . Wówczas trójkąt ABB' jest równoboczny oraz $|BC| + |CD| + |DB| = |BB'| + |CB'| = |AB'|$.
 10. Niech wielokąt $DABCA'$ będzie siatką tego czworokąta po rozcięciu wzdłuż krzywizny AD i usmęczeniu ścian ABC . Wówczas trójkąt ADA' jest równoboczny.
 11. Niech punkt K będzie symetrycznym do Q względem M . Wówczas trójkąt AKP jest równoboczny.
 12. Zbudujmy równoboczny trójkąt BCK na zewnątrz trójkąta ABC . Wtedy $CF \parallel BK$. Korzystając z twierdzenia o dwusiecznej oraz podobieństwa trójkątów ACF i AKB , wykażemy, że FE jest dwusieczną kąta AFC .
 13. Wybierzmy taki punkt K , by czworokąt $BACK$ był prostokątem. Wtedy trójkąt CDK jest równoboczny. Z nierówności kąta trójkątnego mamy $|\sphericalangle ACD| \geq |\sphericalangle ACK| - |\sphericalangle KCD| = 30^\circ$.
 14. Obróćmy trójkąt APC o 60° wokół punktu A , w kierunku zgodnym z orientacją trójkąta ABC . Otrzymamy trójkąt $AP'C'$, przystający do APC . Trójkąt $AP'P$ jest równoboczny, więc $|AP| + |BP| + |CP|$ jest równość, która jest najkrótszą, jaką się wierzchołki są współliniowe.



V DZIEŃ POPULARYZACJI MATEMATYKI

12 września 2019

10.00 - 17.00

**Gmach Wydziału MiNI
Politechnika Warszawska
Koszykowa 75**

<http://dpm.mini.pw.edu.pl>

wykłady
warsztaty
pokazy
wystawy
gry
zabawy



Wydział Matematyki
i Nauk Informatycznych
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Politechnika
Warszawska

[2019]!
JUBILEUSZOWY
ROK MATEMATYKI

