

# deltami

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$   $J \cdot s$   $\pi=3,141592\dots$

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

NR 7 (542) 2019

CENA 4 ZŁ - VAT 5%

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)



Nakład: 3500 egz.

**KRÓTKA HISTORIA  
CIEMNEJ MATERII**  
str. 1

## SPIS TREŚCI NUMERU 7 (542)

Krótką historią ciemnej materii  
*Wojciech A. Hellwing*



Zadania

Przyroda geometrią  
*Krzysztof Rejmer*

Nieoczekiwane zastosowania szeregu  
harmonicznego  
*Karol Gryszka*

A jednak się da (VIII):  
o łganiu w żywe oczy  
*Łukasz Rajkowski*



Towarzyszą życiu od początku  
*Magdalena Fikus*

### Wyniki olimpiad 2018/2019

Informatyczny kącik olimpijski (129):  
*Telekomunikacja*

Bańka jaka jest, każdy widzi  
*Michał Miśkiewicz*

Czy przestępstwa można przewidzieć?  
*Patryk Miziuła*

Klub 44

Prosto z nieba: Kokon czy struga?

Niebo w lipcu

Aktualności

Człowiek, który zrozumiał Wszechświat



Trzy rodzaje indukcji  
matematycznej  
*Bartłomiej Bzdęga*



Aleksander Jędrzejewski  
*Łuk triumfalny w Paryżu*

Zbiory Muzeum Śląskie  
w Katowicach,  
autor reprodukcji:  
Rafał Wyrwich

**Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.  
Druk: Drukarnia Greg [www.greg-drukarnia.pl](http://www.greg-drukarnia.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 1 zł



Strona internetowa (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

# Krótką historia ciemnej materii

Wojciech A. HELLWING\*

\* Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

**Fotografia na okładce:** wizualizacja ewolucji czasowej wielkoskalowej sieci, w jaką układa się ciemna materia.

Na podstawie symulacji P-Millennium i oprogramowania SWIFT (swift.dur.ac.uk)

Ciemna materia i problem wyjaśnienia jej fizycznej natury to jedna z największych zagadek współczesnej nauki. Materia ta, w przeciwieństwie do znanej nam dobrze materii „świecącej” (lub też, jak kto woli, jasnej), pozostaje wciąż nieuchwytna we wszystkich ziemskich eksperymentach. O istnieniu tej tajemniczej formy materii, która nie oddziałuje elektromagnetycznie ani silnie jądrowo, najbardziej przekonani są astronomowie. Bez ciemnej materii prawie nic, co obserwujemy w sferach niebieskich, nie miałoby sensu i nie dało się wyjaśnić za pomocą znanych nam praw fizyki. Może się wydawać, że istnienie niewidocznej ciemnej materii jest pomysłem rodem z powieści science-fiction. Idea, że może istnieć materia, której nasze zwyczajne zmysły nie mogą uchwycić, jest jednak bardzo stara. Przyjrzyjmy się zatem jej historii.

## Historia dawna

Istnieniem materii, której nie da się bezpośrednio obserwować z Ziemi, zajmowali się już starożytni Grecy. Epikur w „Liście do Herodota” sugerował, że istnieje nieskończona liczba światów, „niektóre takie jak nasz, a pozostałe zupełnie inne”. W rozważaniach filozoficznych Epikura, dowodzących, że mogą istnieć odmienne światy, znajdujemy zatem esencję idei ciemnej materii, która jest przeciwieństwem „zupełnie inna” niż ta, z jakiej składa się nasz świat. Co ciekawe, myśl starożytnych mędrców potrafiła pójść dalej. Oto Filolaos z Tarentu, który przynależał do ruchu pitagorejczyków, przedstawił hipotezę istnienia „Antichtonu”, czyli Przeciwności. Przeciwności miałyby orbitować wokół centralnego ognia dokładnie po przeciwnej stronie niż Ziemia. Toteż siłą rzeczy nie mogłyby być z Ziemi dostrzeżone. Dziś powiedzielibyśmy, że Antichton to przykład ciemnej materii.

Pierwszy potężny przełom w dociekaniach na temat tego, co znajduje się w sferach niebieskich, dokonał się dzięki Galileuszowi i jego rewolucyjnemu wynalazkowi – lunecie astronomicznej. Jak wiemy z podręczników historii, uczonego za pomocą swojej lunety nie tylko odkrył istnienie czterech dużych księżyców Jowisza, ale również odkrył istnienie gór, „mórz” i kraterów na powierzchni Księżyca. Wykazał też, że błąda smuga zamglonego światła biegnąca w poprzek nieboskłonu, Droga Mleczna, tak naprawdę składa się z ogromnej liczby słabych gwiazd. Zauważmy, z jak istotnym przełomem mamy tutaj do czynienia. Dzięki nowym technikom obserwacji (luneta) udało się wykazać, że istnieje w niebiosach materia (słabe gwiazdy i księżyce planet), o której nie mieliśmy wcześniej pojęcia. Odkrycia Galileusza i jemu współczesnych uczonych pozwoliły obalić obowiązującą przez tysiąclecia arystotelesowską wizję niezmiennego i doskonałego świata niebios.

## Ciemne obłoki, planety i gwiazdy

Następnym milowym krokiem na drodze do zbadania i wyjaśnienia praw rządzących ruchami ciał niebieskich było opublikowanie w 1687 roku przez Izaaka Newtona jego opus magnum, czyli „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”. Zawarte tam prawo powszechnego ciążenia pozwoliło wyjaśnić pochodzenie

praw ruchu orbitalnego Keplera oraz uzbroiło uczonych w narzędzia, dzięki którym można było wreszcie wyznaczyć masy ciał niebieskich. Wychodząc z założenia, że grawitacja jest naprawdę siłą powszechną, prawie sto lat później John Michell zasugerował, że również światło powinno podlegać jej prawom. Niedługo potem Laplace, opierając się na teorii Newtona, wykazał, że jeżeli tak jest w istocie, to mogłyby istnieć obiekty potencjalnie tak masywne, że ich grawitacja nie pozwalałaby nawet światłu się z nich wydostać. Słynną sugestię Laplace’a uważa się za pierwszą w historii wzmiankę o obiektach, które obecnie nazywamy czarnymi dziurami. W naszych rozważaniach jest jednak istotne, że prawa fizyki dopuszczają istnienie obiektów, które grawitują, a których nie widać. Czyli wypisz, wymaluj mamy tu ciemną materię w pewnej postaci.

W XIX wieku francuski matematyk Urbain Le Verrier badając zaburzenia orbity Urana, postulował, że musi istnieć masywne nieznanne ciało, które swoją grawitacją wpływa na orbitę Urana. Przewidziane przez Le Verriera ciało niebieskie odkrywa już po godzinie obserwacji (jakże precyzyjne były obliczenia Le Verriera i jak bardzo dokładną okazała się teoria Newtona!) Johann Galle. Mowa oczywiście o Neptunie, najdalszej planecie Układu Słonecznego. Neptun był zatem najprawdziwszą ciemną materią! Nieznanym nam obiektem, o którego istnieniu wiedzieliśmy tylko dzięki rejestrowaniu efektów, jakie wywierała jego grawitacja. I chociaż w teleskopie Gallego Neptun objawił się jako zwykła planeta świecąca odbitym słonecznym blaskiem, to jego odkrycie za pomocą porównania obserwacji ruchu znanych nam planet z przewidywaniami, jakie daje teoria grawitacji, utorowało drogę metodzie wnioskowania o ciemnej materii, jaką obecnie powszechnie stosujemy w astronomii.

## Przesłanki z dynamiki

Przenieśmy się teraz do czasów *fin de siècle* i początków XX wieku. Wielcy astronomowie tego czasu badali średnią gęstość materii gwiazdowej w okolicach Słońca oraz w całej Drodze Mlecznej. Jednym z pionierów zastosowania bardzo ważnej, jak zobaczymy później, metody dynamicznej do szacowania masy i gęstości był lord Kelvin. Argument, jaki wysunął, był zarazem

bardzo prosty i bardzo mocny: jeżeli gwiazdy w Drodze Mlecznej można opisać jako gaz cząstek poruszających się zgodnie z siłami grawitacji, to wtedy można wykazać, że istnieje relacja pomiędzy rozmiarami całego grawitującego systemu a dyspersją prędkości gwiazd. Takie pierwsze zastosowanie „teorii gazów” do systemu gwiazdowego Galaktyki dało podwaliny pod współczesne szeroko stosowane metody dynamicznego wyznaczania masy (tj. na podstawie prędkości składników systemu). Podążając śladami Kelvina inni astronomowie, tacy jak Kapteyn, Öpik czy w końcu Oort, wykazali, że ilość ciemnej materii w Galaktyce (tj. głównie w okolicach Słońca i w galaktycznym dysku) nie powinna przekraczać ilości materii świecącej. Astronomowie przy tych badaniach używali bardzo ważnego pojęcia:  $\Upsilon$  – stosunku masy-do-światła (*mass-to-light ratio*).

*Jeżeli znamy związek między jasnością  $L$  a masą gwiazdy  $M$  oraz rozkład wielkości gwiazd w galaktyce, to wiemy, jak wiele powstaje średnio gwiazd o danej masie. Możemy wówczas wskazać, jak wiele masy gwiazdowej średnio przypada na jednostkę jasności. Wygodnym punktem odniesienia jest oczywiście nasze Słońce, które z definicji ma  $\Upsilon_{\odot} \equiv 1M_{\odot}/1L_{\odot}$ , co w jednostkach SI wynosi 5133 kg/W. Zakładając dla danej galaktyki średni stosunek masy do jasności, który najczęściej jest bliski  $\Upsilon_{\odot}$ , ale dla młodych galaktyk wzrasta, i mierząc jasność absolutną galaktyki, możemy oszacować ilość masy świecącej. Podobnie w przypadku gromad galaktyk, gdzie przyjmujemy pewną jasność średnią charakteryzującą większość galaktyk, mnożąc tę wielkość przez liczbę członków gromady, uzyskamy wielkość masy świecącej dla całej gromady. Teraz gdy z innych pomiarów znamy całkowitą masę obiektu, możemy ją podzielić przez znaną jasność. Tak uzyskane ilorazy masy-do-światła dla większości obiektów we Wszechświecie będą większe od ilorazu słonecznego, sugerując istnienie odpowiadających ilości masy nieświecącej.*

Wyliczono, że w Galaktyce  $\Upsilon \sim 2$ . Pamiętajmy, że wówczas uważano, że ciemna materia składa się głównie z wielkiej liczby małych gwiazd oraz różnej maści kosmicznego „gruzu”, tj. planet, komet i asteroid, które świecą zbyt słabo, by je zaobserwować w teleskopach. Stosunek masy-do-światła rzędu 2 był spokojnie do pogodzenia z obrazem, gdzie różnorakie małe obiekty planetarne oraz mgławice gazowe dają wkład do całkowitej masy tego samego rzędu, co obserwowane gwiazdy.

W latach 30. XX wieku Fritz Zwicky, słynny astronom szwajcarski, poczynił obserwacje i spostrzeżenia, które były bardzo ważne dla ugruntowania poglądu, że w większych skalach mamy jednak do czynienia z problemem znacznego braku masy. Zwicky zaadaptował i rozwinął koncepcję lorda Kelvina w zastosowaniu do układu gromady galaktyk w Warkoczu Bereniki (zwanej również Gromadą Coma). Stosując twierdzenie o wirale (tzw. twierdzenie Clausiusa) do gromady galaktyk jako zamkniętego i związanego grawitacyjnie układu, Zwicky wykazał, że około 1000 znanych wówczas galaktyk przynależących do Gromady Coma powinno charakteryzować się dyspersją prędkości 80–100 km/s. Jednak obserwowana wielkość wynosiła prawie 700 km/s. To implikowało, że dla Comy  $\Upsilon \sim 500!$  Dziś wiemy, że oszacowanie Zwicky’ego jest zawyżone prawie 8 razy z uwagi na ówczesne bardzo niedokładne wyznaczenie stałej Hubble’a. Podobne spostrzeżenia poczynił Sinclair Smith, badając gromadę galaktyk w Pannie i wyliczając  $\Upsilon \sim 100$ . Tak wielkie dysproporcje masy-do-światła nie dadzą się wytłumaczyć populacją słabych gwiazd i kosmicznego gruzu. Mamy

więc do czynienia z silną przesłanką, że w skalach większych niż dyski gwiazdowe galaktyk istnieje duża ilość materii nieświecącej, występującej w nieznanym nam postaci. W połowie XX wieku panował jednak pogląd, że ta brakująca masa da się wytłumaczyć, np. poprzez istnienie masywnych obłoków chłodnego gazu (wodoru) w przestrzeniach między galaktykami.

### Krzywe rotacji i rewolucja lat 70. XX wieku

Bardzo ważne sygnały, że brakująca niewidzialna materia raczej nie może występować w postaci obłoków zimnego wodoru, nadeszły w latach 60. i 70. zeszłego stulecia dzięki rozwojowi spektroskopii radiowej. Nowa technika pozwalała rejestrować linię emisyjną na fali 21 cm, którą emitowały obłoki neutralnego wodoru. Porównanie długości tej fali, emitowanej z różnych rejonów obserwowanej galaktyki, pozwoliło, dzięki efektowi Dopplera, na zmierzenie prędkości, z jaką galaktyki spiralne rotują. Co bardzo ważne, obserwacje radiowe obłoków wodoru można prowadzić w znacznie większych odległościach od środka galaktyki, niż ma to miejsce w przypadku emisji światła gwiazdowego. Pionierskie prace Very Rubin i Kenta Forda dotyczące wyznaczania prędkości rotacji pobliskich galaktyk spiralnych wykazały, że dla większości pobliskich galaktyk prędkość rotacji nie spada wraz z odległością od centrum. Był to wynik bardzo zaskakujący. Podobnie jak w przypadku gromad galaktyk, tak i w przypadku rotujących galaktyk można użyć obserwowanej prędkości do wyznaczenia grawitującej masy. Tutaj zakładamy, że gaz i gwiazdy w galaktyce znajdują się na (w przybliżeniu) kołowych orbitach keplerowskich. Prędkość na orbicie kołowej zależy tylko od ilości materii zawartej w kuli mniejszej od promienia danej orbity (patrz  $\Delta_{17}^{11}$ ). Uwzględniając całą materię świecąca w dysku galaktyki, uzyskamy wynik, że prędkość rotacji powinna szybko maleć w miarę oddalania się od środka galaktyki. Tymczasem, jak zmierzli Rubin i Ford, wodor w galaktykach nawet na sporych odległościach od centrów orbitował wciąż z prędkością zbliżoną do prędkości gwiazd na orbitach wewnętrznych. Taką „płaską krzywą rotacji” można było wyjaśnić tylko tym, że w zewnętrznych partiach galaktyk znajdowało się dużo nieświecącej i nieemitującej promieniowania w zakresie radiowym materii. Co więcej, dokładne pomiary sugerowały, że ta dodatkowa materia musi być rozłożona w miarę symetrycznie, to jest w postaci halo/korony. W ten sposób doszliśmy do koncepcji halo ciemnej materii. Obecnie wiemy, że prawie wszystkie galaktyki we Wszechświecie zanurzone są w znacznie większych obłokach ciemnej materii. Gdyby nie było dodatkowej grawitacji od niewidzialnej masy halo, to galaktyki spiralne powinny się rozpadać w krótkim (jak na kosmiczne skale) czasie na rozpierzające się we wszystkie strony gwiazdy.

### Ciemność na wszystkich skalach

Na przełomie lat 70. i 80. w środowisku astronomów popularna była już wiedza o problemach brakującej masy w galaktykach i w gromadach galaktyk. Nie było

jednak powszechnie przyjęte łączenie tych problemów i przyjmowano, że w całym Wszechświecie mamy globalny problem brakującej masy. Dzięki kampaniom obserwacyjnym zakrojonym na coraz większą skalę, które zapoczątkował słynny przegląd nieba wykonany w Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, astronomowie uzyskiwali coraz obszerniejsze i sięgające coraz dalej w przeszłość katalogi galaktyk. Mapy te ukazały, że galaktyki nie są rozłożone losowo w przestrzeni, ale mają silną tendencję do grupowania się. Okazało się również, że galaktyki nie grupują się tylko w zwykłe skupiska (takie jak znane już od dawna gromady galaktyk), ale w znacznie większe struktury, takie jak kosmiczne włókna i ściany, pomiędzy którymi znajdują się wielkie przestrzenie pozbawione galaktyk, które nazwano pustkami. Taką strukturę, w jaką układają się galaktyki w największych skalach, nazywamy dziś Kosmiczną Siecią. By połączyć problemy brakującej masy we wszystkich skalach, potrzebny był ostatni element – rozwój metody, jaką stosowali najpierw Le Verrier, a potem lord Kelvin, Zwicky i Rubin. Mowa tu o metodzie pozwalającej przewidzieć, jak powinna wyglądać struktura galaktyki w największych skalach.

Tutaj jednak analityczne rachunki matematyczne, stosowane z powodzeniem do tej pory, załamywały się, gdyż powstawanie galaktyk zachodzi w skalach, gdzie kosmiczne oddziaływania grawitacyjne stają się nieliniowe. Powoduje to, że precyzyjne rachunki stają się arcytrudne lub wręcz niemożliwe.

W sukurs przyszedł astronomom rozwój komputerów. Nowe narzędzie umożliwiło symulacje numeryczne powstawania galaktyk i formowania się z nich wielkoskalowej struktury Wszechświata. Szybko okazało się, że symulacje bez odpowiedniej ilości ciemnej materii nijak nie chciały wyprodukować układu galaktyk zgodnego z obserwacjami. Tylko te, w których założono obecność sporej ilości ciemnej materii, dawały wyniki zgodne z obserwowanym Wszechświatem. Naukowcy zrozumieli, że problem brakującej masy w galaktykach i gromadach galaktyk tak naprawdę dotyczy całego Wszechświata i wszystkich skal. Tak oto narodziła się współczesna hipoteza kosmicznej ciemnej materii, której grawitacja rządzi nie tylko prawami ruchu gwiazd i galaktyk, ale losami całego Kosmosu. O tym napiszemy w następnym numerze.



## Zadania

Przygotował *Lukasz BOŻYK*

*Triangulację  $n$ -kąta* (niekoniecznie wypukłego) nazywamy podział tego wielokąta na  $n - 2$  trójkąty przy użyciu pewnej liczby nieprzecinających się przekątnych (które mogą mieć wspólne końce).

**M 1606.** Dana jest triangulacja pewnego  $n$ -kąta. Wykazać, że jego wierzchołki można tak pokolorować trzema kolorami, aby każde dwa punkty połączone bokiem lub jedną z narysowanych przekątnych miały różny kolor.

Rozwiązanie na str. 10

**M 1607.** Dana jest triangulacja pewnego  $n$ -kąta o tej własności, że w każdym wierzchołku tego trójkąta schodzi się nieparzysta liczba trójkątów tej triangulacji. Wykazać, że  $n$  jest liczbą podzielną przez 3.

Rozwiązanie na str. 6

**M 1608.** Dana jest triangulacja pewnego  $n$ -kąta, przy czym  $n \geq 4$ . Na czarno malujemy wszystkie trójkąty tej triangulacji, których dokładnie jeden bok jest przekątną danego  $n$ -kąta, a na biało – wszystkie trójkąty tej triangulacji, których wszystkie trzy boki są przekątnymi danego  $n$ -kąta. Wykazać, że liczba czarnych trójkątów jest o 2 większa od liczby białych trójkątów.

Rozwiązanie na str. 10

Przygotował *Andrzej MAJHOFER*

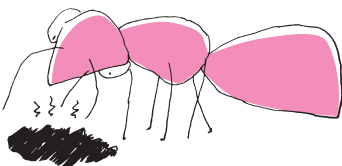
**F 979.** Stosunek częstości kolejnych półtonów muzycznej skali wynosi  $\sqrt[12]{2} \approx 1,059$ . Przyjmijmy, że odbieramy dźwięk jako czysty, jeśli różni się od przypisanej mu częstości o nie więcej niż  $1/16$  tonu. Ile co najmniej musi trwać dźwięk o częstości  $\nu_1 = 880$  Hz śpiewany przez sopranistkę, a ile dźwięk odpowiadający  $\nu_2 = 110$  Hz śpiewany przez głos basowy?

Rozwiązanie na str. 17

**F 980.** Zaobserwowano cząstkę o czasie życia  $\tau = 3 \cdot 10^{-25}$  s. Z jaką dokładnością można wyznaczyć jej masę spoczynkową? Stała Plancka  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Js, prędkość światła  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s.

Rozwiązanie na str. 17

FUJ, CZARNA MATERIA



# Przyroda geometrą

Krzysztof REJMER

Istnieje nieskończenie wiele brył geometrycznych, którymi matematycy nigdy dotąd się nie zajmowali, bo po prostu nie były one dla nich wystarczająco interesujące. Czasem jednak zdarza się, że i niematematyk natrafi na coś, co z pewnych powodów okaże się ważne, a wtedy robi się naprawdę ciekawie.

Tak właśnie było w tym przypadku, gdy uczeni z Uniwersytetu w Sewilli oraz Uniwersytetu Lehigh w Bethlehem (Pensylwania) zajmujący się badaniami nabłonka odkryli nieznanego wcześniej kształt, jaki mogą przyjmować jego komórki, o czym w lipcu 2018 roku poinformowali w *Nature Communications*.

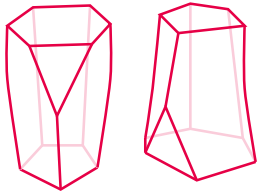
Tkanka nabłonkowa jest wszechobecna w żywych organizmach i spełnia w nich wielorakie funkcje. Wyściela ona jamy ciała oraz jego narządy wewnętrzne, bierze udział w transporcie cząsteczek chemicznych, tworzy skórę, pełni funkcję wydzielniczą w gruczołach dokrewnych, uczestniczy w odbieraniu bodźców z zewnętrznego otoczenia, stanowi część jąder i jajników, gdzie zachodzące w niej podziały prowadzą do powstania plemników oraz komórek jajowych. Niewątpliwym przywilejem odkrywców było nazwanie nowej bryły. Wybrali nazwę *skutoid*, a dlaczego, o tym za chwilę. Najpierw ów skutoid opisujemy. Wyobraźmy sobie graniastosłup o podstawie pięciokąta, któremu odcinamy jeden z wierzchołków w taki sposób, że powstaje dodatkowa trójkątna ściana. Skutoid to bryła bardzo zbliżona do tego, co powstało, przy czym dopuszczamy deformowanie ścian: krawędzie traktujemy tak, jakby były połączone przegubowo i dodatkowo każdą krawędź możemy rozciągać i skracać. Czyli przy deformacji nie zmieniamy własności topologicznych, każda ściana nie zmienia liczby wierzchołków, ale nie musi być już nawet płaską figurą. Skutoid ma zatem osiem ścian: jedną trójkątną, trzy czworokątne, trzy pięcio- i jedną sześciokątną. Ma osiemnaście krawędzi i dwanaście wierzchołków. Przypomnijmy jeszcze wzór Eulera:

$$W + S = K + 2,$$

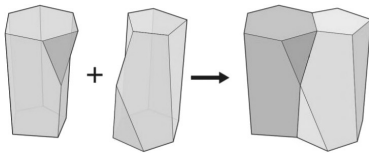
gdzie  $W$ ,  $S$  i  $K$  to odpowiednio liczby wierzchołków, ścian i krawędzi wielościanu. Dokonana w graniastosłupie zamiana I na Y zwiększa  $W$  o 2,  $S$  o 1, a  $K$  o 3, a więc wszystko się zgadza. Naturalnie prawdziwe komórki nie są wielościanami, nie mają ostrych krawędzi ani płaskich ścian, ale możemy je w ten sposób przybliżać.

Długo przypuszczano, że komórki nabłonka przypominają kształtem graniastosłupy lub butelki. Okazuje się jednak, że mogą one być bardziej skomplikowane. Mogą być na przykład skutoidami. Dzięki temu kształtowi daje się z nich ułożyć, niczym z klocków lego, bardzo dobrze upakowaną strukturę. Rysunek 1 pokazuje dopasowanie dwóch skutoidów. Co więcej, można w ten sposób tworzyć zakrzywione i zarazem szczelne powierzchnie. Ma to podstawowe znaczenie dla morfogenezy rozwoju tkanek. Wszystko zaczyna się od jednej komórki, która się dzieli, potem następują kolejne podziały, tkanki różnicują się, tworzą warstwy i narządy. Gdy warstwy skręcają się i wyginają, muszą przy tym zmieniać kształt. Początkowo komórki są pięcio- lub sześciokątnymi graniastosłupami. Gdy tkanka rośnie i zarazem wygina się, jej górna powierzchnia powiększa swoje pole; niektóre komórki odkształcają się, a przy tym mogą być budowane nowe krawędzie i nowe ściany. Niestety zmiana pola powierzchni i ewentualne pojawienie się nowych krawędzi pociąga za sobą pewne wydatki energetyczne. Dopasowanie geometryczne to jeden istotny czynnik, drugim jest zużycie energii, niezbędny jest więc jakiś kompromis pozwalający na stworzenie stabilnego i zakrzywionego kształtu. Symulacje komputerowe pokazują, że wydatki energetyczne są stosunkowo małe, a więc korzystne dla komórek, gdy niektóre z nich przyjmują kształt skutoidów. A zatem tam, gdzie jest krzywizna, tam mogą być również skutoidy. W tytule artykułu popularnonaukowego poświęconego temu odkryciu, zamieszczonego w *New Yorkerze*, jego autor, Alan Burdick, napisał: *wszyscy jesteśmy skutoidami*.

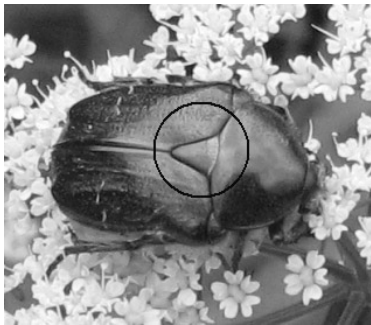
Gómez-Gálvez Pedro i inni:  
*Scutooids are a geometrical solution to three-dimensional packing of epithelia.*  
*Nature Communications*, 9 (1)



Skutoidy



Rys. 1. Dwa doskonale dopasowane skutoidy

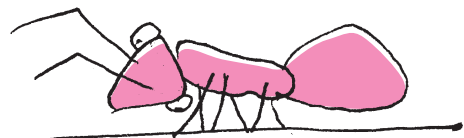


Rys. 2. Scutellum kruszczyca złotawki *Cetonia aurata*.

Bardzo to piękne, ale czy aby na pewno prawdziwe? Pewien niemiecki astrofizyk onegdaj oświadczył: *Symulowalibyśmy gwiazdy nawet wtedy, gdyby one nie istniały.*

Otóż tak, tego rodzaju komórki już odkryto. Okazało się, że skutoidami jest 75% komórek nabłonkowych w gruczołach ślinowych muszki owocowej (*Drosophila melanogaster* – dla genetyków będącej prawdziwym laboratorium) i 50% komórek rozwijających się fałd zarodka owada. Wykryto je również u danio przegowanego (*Danio rerio*), ryby, która dzięki łatwemu rozmnażaniu i szybko przebiegającemu cyklowi życiowemu także jest wdzięcznym obiektem badań.

Winien jestem jeszcze wyjaśnienie dotyczące nazwy tej nowej bryły. Autorzy odkrycia dopatrzili się w niej pewnego podobieństwa do pancerza chrząszczy, a konkretnie do fragmentu grzbietowej części segmentu skrzydłotułowia po łacinie nazwanego *scutellum* (od *scutum* – tarcza), a po polsku *zatarczką*. Jest to niewielki trójkąt widoczny na grzbiecie chrząszcza kruszczyca złotawki, pokazany na rysunku 2.



## Nieoczekiwane zastosowania szeregu harmonicznego

Karol GRYSZKA\*

\* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

**Problem 1.** Do dyspozycji mamy nieograniczoną liczbę prostopadłościennych cegieł o jednakowym rozmiarze i masie. Cegły ustawiamy jedna na drugiej – bez użycia żadnych materiałów klejących. Jak bardzo najwyżej położona cegła może być wysunięta w stosunku do cegły położonej najniżej? Rozkład masy w każdej cegle jest jednorodny.

**Problem 2.** Na jednym z końców kilometrowej rozciągliwej nici siedzi mrówka. Zaczyna poruszać się ze stałą prędkością 1 cm/s w kierunku drugiego końca. Po upływie każdej sekundy nić wydłuża się o jeden kilometr – natychmiastowo i jednorodnie na całej długości. Czy mrówka jest w stanie dotrzeć na drugi koniec nici?

Zanim przedstawimy rozwiązania, przypomnijmy, że *szereg harmoniczny*, suma odwrotności kolejnych liczb naturalnych

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k},$$

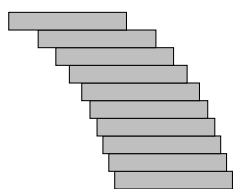
jest *rozbieżny*, czyli jego suma jest nieskończona. Wynika to z następujących oszacowań

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^N - 1} &= \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{N-1}} + \dots + \frac{1}{2^N}\right) > \\ &> \left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^N} + \dots + \frac{1}{2^N}\right)}_{\frac{1}{2}} = \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

Rozbieżność tego szeregu odgrywa kluczową rolę w rozwiązaniach obu problemów.

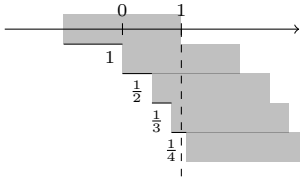
**Rozwiązanie problemu 1.** Chcemy ustawić wieżę, której najwyższa cegła będzie wystawała możliwie daleko. Eksperymentując, na przykład z kostkami domino, możemy zauważyć, że niższe kostki warto wysunąć mniej niż te wyższe; wyższe mają „swobodę”, gdyż muszą utrzymać na sobie mniej kostek (rys. 1).

Przyjmijmy, że każda cegła ma długość 2. Masa cegieł jest rozłożona jednorodnie, tak że środek ciężkości znajduje się dokładnie w połowie długości cegły. Jakie wysunięcie można osiągnąć w ten sposób z czterech cegieł? Odwróćmy kolejność budowania i zacznijmy od cegły najwyższej – niech każda nowa cegła będzie dokładana na **spód** wieży z jej prawej strony.



Rys. 1

„Z prawej strony” oznacza, że lewy koniec podkładanej cegły ma współrzędną większą niż lewy koniec cegły bezpośrednio nad nią.



Rys. 2. Optymalna wieża z pięciu cegieł. Najwyższa cegła znajduje się w całości poza zasięgiem najniższej cegły.

W środku pierwszej cegły zaczepmy poziomą oś liczbową – współrzędne środków więc będziemy obliczać względem tej osi.

Pierwsza dołożona pod spód cegła musi być ustawiona tak, by górna cegła nie wystawała o więcej niż 1 – w przeciwnym przypadku środek ciężkości górnej cegły znajdowałby się poza punktem podparcia i wieża przewróciłaby się. Jak teraz dostawić trzecią cegłę? Środek ciężkości dwóch górnych cegieł ma współrzędną  $\frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$ , jest to współrzędna lewego końca trzeciej cegły, której środek ciężkości ma współrzędną  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

Jeszcze czwarta cegła. Środek ciężkości trzech dotychczas ustawionych cegieł ma współrzędną  $\frac{1}{3}(0 + 1 + \frac{3}{2}) = \frac{5}{6}$ . Czyli środek ciężkości czwartej cegły ma współrzędną  $1 + \frac{5}{6} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$ . Kolejne cegły są wysunięte w prawo o  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  w stosunku do cegły powyżej.

Ustawiamy kolejne cegły w ten sposób i zaprzęgniemy do pracy szereg harmoniczny. Oznaczmy przez  $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Pokażemy ogólny wzór na współrzędną lewego końca  $n$ -tej cegły – a mianowicie jest ona równa  $H_{n-1} - 1$  dla  $n > 1$ . Rozmawianie poprowadzimy indukcyjnie. Przypadek, gdy  $n = 2$ , przeanalizowaliśmy powyżej, założymy zatem słuszność wzoru dla pewnego  $n > 1$ .

Zauważmy na początek, że środek ciężkości  $k$ -tej cegły, dla  $1 < k \leq n$ , ma współrzędną równą  $H_{k-1}$  (każda cegła ma długość 2) oraz środek ciężkości pierwszej cegły ma współrzędną równą 0. Tym samym środek ciężkości wszystkich  $n$  cegieł ma współrzędną równą

$$\frac{1}{n} \left( 0 + \sum_{k=1}^{n-1} H_k \right) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{n} (nH_{n-1} - (n-1)) = H_{n-1} + \frac{1}{n} - 1 = H_n - 1,$$

Wzór

$$\sum_{k=1}^n H_k = (n+1)H_n - n$$

jest prawdziwy dla wszystkich  $n > 0$ . Wykażemy to indukcyjnie. Załóżmy, że powyższa równość jest prawdziwa, wtedy zachodzi następująca:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} H_k &= \sum_{k=1}^n H_k + H_{n+1} = \\ &= (n+1)H_n - n + H_{n+1} = \\ &= (n+1) \left( H_{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) - n + H_{n+1} = \\ &= (n+2)H_{n+1} - (n+1). \end{aligned}$$

Należy jeszcze sprawdzić pierwszy krok indukcji i tożsamość będzie udowodniona.



### Rozwiązanie zadania M 1607.

Pomalujmy każdy trójkąt danej triangulacji na czarno albo na biało w taki sposób, aby trójkąty mające wspólny bok miały różny kolor. Takie kolorowanie można uzyskać rozpoczynając od pomalowania dowolnego trójkąta, a następnie kolorując kolejno trójkąty graniczące bokiem z pomalowanymi dotychczas. Oznaczmy liczby białych i czarnych trójkątów odpowiednio przez  $b$  i  $c$ .

Z warunków zadania wynika, że wszystkie boki danego  $n$ -kąta należą do trójkątów triangulacji tego samego koloru; bez straty ogólności przypuśćmy, że jest to kolor czarny. Tymczasem każda przekątna triangulacji jest bokiem dokładnie jednego trójkąta czarnego i jednego trójkąta białego. Stąd wniosek, że łączna liczba narysowanych przekątnych jest równa  $3b$ , a łączna liczba boków  $n$ -kąta i narysowanych przekątnych jest równa  $3c$ . W konsekwencji  $n = 3(c - b)$ .

gdzie równość  $(*)$  uzasadniona jest na marginesie. Pamiętając, że środek ciężkości  $n$  cegieł wyznacza położenie lewego końca cegły  $(n+1)$ -wszej, otrzymujemy tezę.

Podsumujmy: prawy brzeg najwyższej cegły ma współrzędną 1, lewy koniec każdej kolejnej cegły ma współrzędną równą  $H_{k-1} - 1$ . W szczególności możliwe jest ustawienie takiej wieży, żeby wysunięcie było równe jednej, dwóm lub dziesięciu długościom cegły. W teorii **wysunięcie może być dowolnie duże**. Wysunięcie większe niż 1 uzyskamy już dla 5 cegieł (rys. 2), długości 2 dla 32 cegieł, długości 3 dla 228 cegieł. Ile cegieł jest potrzebnych do wysunięcia długości 4?

**Rozwiązanie problemu 2.** Rozważmy ogólniejszy problem:  $s$  to początkowa długość nici;  $d$  – każdorazowe wydłużenie nici;  $v$  – dystans pokonywany przez mrówkę w ciągu każdej sekundy (między wydłużeniem nici). Zobaczmy, co stanie się w pierwszej sekundzie: mrówka pokonała  $\frac{v}{s}$  części całej nici, która rozciąga się następnie jednorodnie. Po tym rozciągnięciu mrówka nadal ma za sobą taką samą część całej nici. W drugiej sekundzie sytuacja jest podobna – mrówka pokona  $\frac{v}{s+d}$  części nici (o długości  $s+d$ ), a więc łącznie pokona  $\frac{v}{s} + \frac{v}{s+d}$  całej drogi. Zauważmy, że proces rozciągania **nie wpływa** na to, w jakiej części nici znajduje się mrówka. Po trzeciej sekundzie mrówka pokona  $\frac{v}{s} + \frac{v}{s+d} + \frac{v}{s+2d}$  nici. Niech funkcja  $f(n)$  określa część nici przebytą w czasie  $n$  sekund (przed rozciągnięciem). Możemy stwierdzić, że

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v}{s + kd}.$$

Zauważamy jednak, że dla  $k > 0$  zachodzi  $\frac{v}{s+kd} \geq \frac{v}{s+d} \cdot \frac{1}{k}$ , stąd

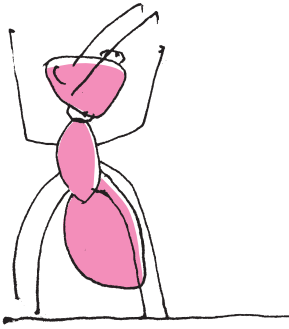
$$f(n) \geq \frac{v}{s} + \frac{v}{s+d} \cdot H_n > \frac{v}{s+d} \cdot H_n.$$

Ponieważ  $H_n$  jest rozbieżny, to istnieje takie  $n$ , dla którego  $H_n > \frac{s+d}{v}$ ; dla takiego  $n$  otrzymujemy  $f(n) > 1$ . A to oznacza, że **mrówka dotarła na drugi koniec nici!**

Zauważmy rzecz niezwykłą – niezależnie od wyboru wartości  $v, s$  oraz  $d$ , mrówka ostatecznie zawsze pokona cały dystans. Potrzebne jest jednak robocze założenie, że mrówka jest nieśmiertelna. Aby się przekonać dlaczego, odpowiedzmy na pytanie: jak długo mrówka będzie musiała kroczyć, aby osiągnąć swój cel?



HURRA!



Problem 2 oraz jego wariant wydają się sprzeczne z intuicją i z tego powodu często określa się je mianem paradoksu – jest on zbliżony w swojej naturze do *paradoksu Achilleśa i żółwia*.

Równanie występujące w rozwiązaniu Problemu 2' jest typu Lagrange'a-d'Alemberta i jego (dość skomplikowane) rozwiązanie pomijamy.

Otóż ma miejsce następujące przybliżenie

$$f(n) = \frac{v}{s} + \sum_{k=1}^n \frac{v}{s+kd} \approx \frac{v}{s} + \frac{v}{d} \ln \left( 1 + \frac{(n-1)d}{s+d} \right).$$

Po przekształceniach otrzymujemy jawny wzór na  $n$  – przybliżony czas marszu mrówki wynosi

$$n = \frac{s+d}{d} e^{\frac{d}{v} - \frac{d}{s}} - \frac{s}{d}.$$

W szczególności, dla danych opisanych w naszym problemie otrzymujemy  $n \approx 2,065 \cdot 10^{43429}$  sekund. To duża (!) liczba – szacowany wiek Wszechświata to około  $4 \cdot 10^{17}$  sekund.

Problem 2 można uogólnić na przypadek, w którym nie tylko mrówka porusza się ze stałą prędkością, ale również nić rozciąga się stale (tj. w każdej chwili ze stałą prędkością). Innymi słowy – przypadek dyskretny omówiony powyżej zamieniamy na problem z czasem ciągłym. Przy czym ostrzegamy: do rozwiązania użyjemy *równania różniczkowego*.

**Rozwiązanie problemu 2'.** Niech  $x(t)$  oznacza pozycję mrówki w chwili  $t$ . Nić zaczepiamy na osi liczbowej tak, że jej nieruchomy koniec jest w punkcie  $x=0$ , drugi zaś koniec przesuwa się wzdłuż dodatniej półosi. Prędkość, z jaką porusza się mrówka, jest równa  $v$  powiększonemu o bieżącą prędkość, z jaką rozciąga się dany kawałek nici. Aktualna długość nici to  $s+td$  i tylko drugi koniec porusza się z prędkością  $d$  – punkt odległy o  $x(t)$  od punktu początkowego mrówki porusza się z prędkością  $d \cdot \frac{x(t)}{s+td}$  proporcjonalną do położenia na nici. Równanie różniczkowe (ostrzegaliśmy) opisujące taką sytuację:

$$x'(t) = v + \frac{dx(t)}{s+td}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$x(t) = (s+td) \cdot \left( A + \frac{v}{d} \ln(s+td) \right),$$

gdzie  $A \in \mathbb{R}$  jest pewną nieznaną stałą. Wyznaczamy ją przez uwzględnienie warunku  $x(0) = 0$ , który znajduje się w opisie problemu. Otrzymujemy  $A = -\frac{v}{d} \ln s$ , a tym samym

$$x(t) = \frac{v}{d} \cdot (s+td) \cdot \ln \left( 1 + t \frac{d}{s} \right).$$

Rozwiązanie problemu polega teraz na znalezieniu takiego  $t$ , dla którego  $x(t) = s+td$ . Korzystając z wyprowadzonego przed chwilą wzoru, możemy wykazać, że

$$t = \frac{s}{d} \left( e^{\frac{d}{v}} - 1 \right).$$

**Oznacza to w szczególności, że dla dowolnego  $v > 0$  oraz dowolnych  $s, d > 0$  mrówka zawsze dotrze na koniec nici.** Jeżeli  $s = 1\text{km}$ ,  $d = 1\text{km/s}$  oraz  $v = 1\text{ cm/s}$ , to  $t \approx 2,807 \cdot 10^{43429}$  sekund. Jest to wynik bardzo zbliżony do tego otrzymanego w przypadku dyskretnym. Co więcej, można zauważyć spore podobieństwo w otrzymanych wzorach przybliżających czas wędrówki.

\*\*\*

Zostawmy chwilowo szereg harmoniczny i przyjrzyjmy się ekspansji Wszechświata. Współczesny model kosmologiczny bazuje na dwóch kluczowych obserwacjach:

- obiekty odległe od Ziemi oddalają się od niej,
- tempo oddalania jest proporcjonalne do odległości od Ziemi.

Te obserwacje to tak zwane *prawo Hubble'a*. Taki model Wszechświata jest zbliżony w opisie do Problemu 2 (również 2') – Wszechświatem jest nić, a jego ekspansja to jej rozciąganie. Zauważmy, że w modelu z nicią tempo rozciągania było proporcjonalne do odległości od jednego z końców nici (tego, z którego zaczynała swój marsz mrówka) – odpowiada to dokładnie prawu Hubble'a. Co w szczególności wynika z rozwiązania problemów 2 i 2' dla podboju Wszechświata? Nie musimy przejmować się tym, że dalsze punkty uniwersum oddalają się coraz szybciej. Mając do dyspozycji odpowiedni statek i dużo czasu, możemy dotrzeć do dowolnego punktu w obserwowalnym kosmosie.

Stała Hubble'a opisuje tempo ekspansji Wszechświata. Jej dokładna wartość nie jest znana, jednak dane z obserwacji odległych obiektów wskazują jej wartość w granicach 67–74 kilometrów na sekundę na każdy megaparsek (parsek to w przybliżeniu 3,2616 lat świetlnych).

Na tym nie kończą się zastosowania rozbieżności szeregu harmonicznego. Można za jego pomocą wykazać istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych (zobacz:  $\Delta_{16}^3$ ) lub dowieść twierdzenia Schura (zobacz:  $\Delta_{16}^3$ ).

## A jednak się da (VIII), czyli saga kryptologiczna w odcinkach. Tym razem: o łganiu w żywe oczy.

Łukasz RAJKOWSKI

W poprzednim odcinku naszej sagi ( $\Delta_{19}^6$ ) przedstawiliśmy miłosną historię Aldony i Bogumiła. Poniżej prezentujemy jej dość dramatyczną kontynuację, widzianą oczami Aldony:

*Aldona ma problem sercowy. Na dyskotecę z okazji ostatniego dnia kolonii poznała chłopaka, Bogumiła. Był całkiem sympatyczny, więc nawet ucieszyła się, gdy zadzwonił do niej kilka dni po zakończeniu wyjazdu. Umówili się na ciastka, przymił jej bardzo ładne kwiatki i tak zaczęli się spotykać. Bogumił wydaje się bardzo porządny, jednak jakaś część serca Aldony wciąż tęsknie wdycha do innego poznanego na koloniach chłopaka, Dobromira, z którym od pewnego czasu koresponduje. Aldona nie jest jeszcze pewna swoich uczuć i nie chciałaby zamykać się na żadną z możliwości, co jest zupełnie zrozumiałe. Problem w tym, że Bogumił zdaje się wiedzieć o jej kontakcie z Dobromirem i być może lada chwila będzie się od niej domagał ujawnienia korespondencji. Aldona jest wielką miłośniczką kryptografii, w związku z czym do komunikacji z Dobromirem używa protokołu szyfrowania RSA. Niestety, Bogumił nie jest w ciemną bitę i wie, że w tym protokole Aldona nie może udawać, że zaszyfrowała inną wiadomość niż w rzeczywistości. Czy istnieje sposób, dzięki któremu Aldona mogłaby umawiać Bogumiłowi, że przesyłane przez nią do Dobromira listy mają treść inną niż naprawdę?*

Protokół, którego potrzebuje Aldona, nosi nazwę szyfrowania wypieralnego (jest to dość karkołomna próba autora tłumaczenia angielskiego terminu *deniable encryption*). Zanim mu się przyjrzymy, wyjaśnijmy najpierw, na czym polega wspomniana w powyższej historii wada szyfrowania RSA. Temu szyfrowaniu poświęcony był pierwszy odcinek sagi, zamieszczony w  $\Delta_{18}^{10}$ , poniżej przedstawiamy skrócone przypomnienie:

Niech  $p, q$  będą dużymi liczbami pierwszymi i niech  $n = pq$ ,  $\phi = (p-1)(q-1)$ . Dobromir losuje liczbę  $e$  (klucz publiczny) względnie pierwszą z  $\phi$  i znajduje  $d$  (klucz prywatny) takie, że  $ed = 1 \pmod{n}$ , a następnie upublicznia  $e$  (podczas gdy  $d$  zachowuje dla siebie). Dla  $m \leq n$  niech  $\text{Enc}(m) = (m^e \pmod{n})$  i  $\text{Dec}(c) = (c^d \pmod{n})$ . Wówczas obliczenie  $\text{Enc}(m)$  (czyli szyfrowanie wiadomości  $m$ ) jest szybkie i proste, ale obliczenie  $m$  na podstawie  $c = \text{Enc}(m)$  (czyli łamanie szyfru) już nie, chyba że znamy  $d$ , gdyż zachodzi  $\text{Dec}(\text{Enc}(m)) = m \pmod{n}$  (czyli  $\text{Dec}$  to funkcja deszyfrująca). Jest to przykład szyfrowania z kluczem publicznym – wszyscy mogą zaszyfrowywać wiadomości, ale tylko wybrańcy mogą je odszyfrowywać.

Zauważmy, że oszalały z zazdrości Bogumił, który nakrył Aldonę na wysyłaniu szyfrogramu (czyli zaszyfrowanej wiadomości)  $c$  do Dobromira, mógłby próbować wymusić na niej ujawnienie treści wiadomości  $m$ . Niestety,

Aldona nie mogłaby udąć, że chciała wysłać inną wiadomość  $m'$  niż w rzeczywistości. Bogumił ma dostęp do klucza publicznego  $e$  i wie, na czym polega szyfrowanie, w związku z czym wystarczy, że sprawdzi, czy  $c = \text{Enc}(m')$  – jeśli nie, dowiaduje się, że  $m' \neq m$  i Aldona próbowała go oszukać, co czyni go jeszcze bardziej sfrustrowanym. Można odnieść wrażenie, że nie sposób skonstruować protokołu szyfrowania z kluczem publicznym, który byłby pozbawiony tego mankamentu – rzecz jasna, gdyby to była prawda, nie pisalibyśmy o tym w ramach naszego cyklu: *A jednak się da!*

Naturalnie, wystarczy nam umiejętność wypieralnego szyfrowania pojedynczego bitu – wszak dowolnie długą wiadomość można rozbić na bity i osobno zaszyfrować każdy z nich. Takie szyfrowanie można przedstawić w postaci dwóch czynności:  $X$  i  $Y$  oraz klucza  $k$ . Dobromir informuje Aldonę, że jeśli chce ona wysłać do niego bit 0, powinna wykonać czynność  $X$ , a jeśli chce wysłać 1 – wykonuje  $Y$ . Klucz  $k$  powinien pozwalać Dobromirowi na rozstrzygnięcie, czy Aldona wykonała  $X$  czy  $Y$ . Oczywiście, aby to szyfrowanie miało sens, bez znajomości  $k$  to rozstrzygnięcie powinno być bardzo trudne. Rozważane szyfrowanie będzie wypieralne, jeśli dla żadnej z tych czynności nie istnieje dowód (niewymagający klucza  $k$ ), że wykonało się właśnie tę czynność. Istotnie, gdyby dla którejś z nich istniał taki dowód (powiedzmy dla  $X$ ), to po wykonaniu  $Y$  Aldona nie mogłaby udawać przed Bogumiłem, że uczyniła  $X$  (gdyż wówczas Bogumił wie, że może domagać się dowodu, a jeśli go nie dostanie, dowiaduje się, że Aldona ma przed nim jakieś sekrety).

**Najpierw przedstawimy protokół, w którym tylko czynność  $X$  będzie pozbawiona wspomnianego „dowodu wykonania”** (czyli Aldona może udawać, że przesłała 0, gdy przesłała 1, ale nie odwrotnie). W tym wypadku  $X$  będzie oznaczać przesłanie Dobromirowi losowego elementu ze zbioru  $\{0, 1\}^t$  (tzn. zbioru ciągów binarnych długości  $t$ ) dla pewnej (dużej) liczby naturalnej  $t$ . Czynnością  $Y$  będzie z kolei wysłanie losowego elementu z pewnego podzbioru  $\mathcal{S}$  zbioru  $\{0, 1\}^t$ . Pojawia się tutaj pewien szkopuł – przecież element z  $\mathcal{S}$  jest również elementem z  $\{0, 1\}^t$ , zatem po wykonaniu  $Y$  Dobromir nie jest w stanie stwierdzić ze stuprocentową pewnością, że nie zostało wykonane  $X$ . Sto procent to faktycznie za dużo, ale jeśli zbiór  $\mathcal{S}$  jest dostatecznie mały w stosunku do  $\{0, 1\}^t$ , to szansa na wybór elementu z  $\mathcal{S}$  przy losowaniu z  $\{0, 1\}^t$  jest pomijalnie mała (mniejsza niż, powiedzmy,  $2^{-100}$ ), w związku z tym czynności  $X$  i  $Y$  mają praktycznie rozłączne skutki. Pojawiło się nam w ten sposób pierwsze naturalne wymaganie wobec zbioru  $\mathcal{S}$ :

(a) stosunek  $|\mathcal{S}|/2^t$  jest bardzo mały.

Kolejne wymagania wobec zbioru  $\mathcal{S}$  są bezpośrednimi konsekwencjami sformułowanych wcześniej własności czynności X i Y prowadzących do uzyskania protokołu szyfrowania („połowicznie”) wypieralnego:

- (b) łatwo generować losowe elementy zbioru  $\mathcal{S}$  bez znajomości klucza  $k$ ,
- (c) bez znajomości klucza  $k$  trudno stwierdzić, czy dany  $x \in \{0, 1\}^t$  należy do  $\mathcal{S}$ ,
- (d) znając klucz  $k$ , łatwo stwierdzić, czy dany  $x \in \{0, 1\}^t$  należy do  $\mathcal{S}$ ,
- (e) bez znajomości klucza  $k$  praktycznie nie sposób udowodnić, że dany  $x$  nienależący do  $\mathcal{S}$  faktycznie nie należy do  $\mathcal{S}$ .

Uff, pozostaje nam teraz „tylko” wskazać taki magiczny (można poetycko napisać: *przezroczysty*) zbiór  $\mathcal{S}$ , spełniający własności (a)–(e). Zwrócimy najpierw uwagę na pewną charakterystyczną własność funkcji Enc przy szyfrowaniu z kluczem publicznym. Jej obliczenie jest proste, natomiast jej odwrócenie bardzo trudne, o ile nie znamy klucza prywatnego. Jeśli potraktować Enc jako funkcję z  $\{0, 1\}^s$  do  $\{0, 1\}^s$  dla pewnej liczby naturalnej  $s$  (możemy tak zrobić, zapisując argumenty i wartości w postaci binarnej), takie funkcje zwykle się nazywają *funkcjami jednokierunkowymi z zapadką* – łatwo obliczać ich wartości i trudno je odwracać (jednokierunkowość bez podpowiedzi (zapadki)).

Okazuje się, że dla każdej funkcji jednokierunkowej  $f: \{0, 1\}^s \rightarrow \{0, 1\}^s$  można wskazać „funkcję trudnego bitu”, tzn. funkcję  $B: \{0, 1\}^s \rightarrow \{0, 1\}$  taką, że  $B(x)$  jest trudne do obliczenia, jeśli znamy tylko wartość  $f(x)$ . Mówi o tym *twierdzenie Goldreicha–Levina*.

Odpowiednie definicje „trudności” są w tym kontekście dość skomplikowane – na potrzeby artykułu ograniczymy się do stwierdzenia, że dla odpowiednio dużych wartości  $s$  z omawianymi tutaj trudnymi zadaniami nie poradzi sobie żaden ziemski komputer.

Ustalmy pewną funkcję jednokierunkową  $f: \{0, 1\}^s \rightarrow \{0, 1\}^s$  z zapadką  $k$  oraz odpowiadającą jej funkcję trudnego bitu  $B$ . Ustalmy liczbę naturalną  $t$ , (dużo) większą od  $s$ . Dla dowolnego ciągu  $y$  z  $\{0, 1\}^s$  rozważmy ciąg z  $\{0, 1\}^t$  powstały przez dołączenie do  $f^{t-s}(y)$  (gdzie „potęgowanie” funkcji oznacza krotność iteracji) „trudnych bitów” z  $y, f(y), f^2(y), \dots, f^{t-s-1}(y)$ , a zbiór tak powstałych ciągów oznaczmy przez  $\mathcal{S}$ , to znaczy

$$\mathcal{S} = \{f^{t-s}(y)|B(y)|B(f(y))|B(f^2(y)) \dots |B(f^{t-s-1}(y))\}: \\ y \in \{0, 1\}^s\},$$

gdzie znak „|” oznacza łączenie ciągów. Zbiór  $\mathcal{S}$  ma wszystkie pożądane własności! Istotnie, jego rozmiar to  $2^s$  (co w porównaniu z  $2^t$  jest bardzo małe, więc spełnione jest (a)), a sposób generowania elementów z  $\mathcal{S}$ , wychodzący od dowolnego elementu  $y$  z  $\{0, 1\}^s$  (i niewymagający klucza  $k$ ), został przedstawiony wyżej (własność (b)). Jeśli dostaniemy dowolny  $x \in \{0, 1\}^t$ , to aby stwierdzić, czy jest to element z  $\mathcal{S}$ , musielibyśmy sprawdzić, czy jego ostatnie  $t - s$  bity są „trudnymi bitami” dla  $x, f(x), \dots, f^{t-s-1}(y)$

dla pewnego  $y \in \{0, 1\}^s$ , o którym wiemy jedynie, ile wynosi  $f^{t-s}(y)$  (jest to pierwsze  $s$  bitów  $x$ ). Zgodnie z definicją „trudnego bitu”, bez znajomości  $k$  jest to zadanie trudne (zatem spełniona jest własność (c)), a znając  $k$  – łatwe (co oznacza (d)). Ponadto, nie znając  $k$ , praktycznie nie można udowodnić, że dany  $x$  spoza  $\mathcal{S}$  faktycznie do niego nie należy – ponownie, jak poprzednio, należałoby obliczyć odpowiednie „trudne bity” i uzasadnić, że się nie zgadzają z „ogonem”  $x$ , a tego bez klucza zrobić nie umiemy, co uzasadnia ostatnią własność (e). Przypomnijmy jednak, że nasz sukces jest niestety połowiczny – Aldona może udawać tylko „w jedną stronę”.

### Teraz czas na przedstawienie czynności X i Y, z których obie są pozbawione „dowodu wykonania”

(no dobrze – tak szczerze mówiąc, jedna z nich będzie go pozbawiona z *dużym prawdopodobieństwem*). Polega on na odpowiednim „zamaskowaniu” kłopotliwej sytuacji, której doświadczyliśmy poprzednio. Teraz Aldona wybiera liczbę naturalną  $n$  i losuje  $i \leq n$ . Następnie losuje  $x_1, x_2, \dots, x_{2i-1}$  ze zbioru  $\mathcal{S}_i$  oraz (jeśli  $i < n$ )  $x_{2i+1}, \dots, x_{2n}$  ze zbioru  $\{0, 1\}^t$ . Czynność X polega na wylosowaniu  $x_{2i}$  ze zbioru  $\{0, 1\}^t$ , a czynność Y – na wylosowaniu  $x_{2i}$  ze zbioru  $\mathcal{S}$ . Oczywiście Dobromir – podobnie jak poprzednio – może bez problemu sprawdzić, co chciała przesłać Aldona. Ponadto, jeśli Aldona zrobiła X, może śmiało wmawiać Bogumiłowi, że zrobiła Y – wystarczy, że będzie twierdzić, że  $x_{2i}$  było wylosowane z  $\{0, 1\}^t$  (czego i tak nie byłaby w stanie udowodnić), oraz pokaże mu, jak wygenerowała  $x_{2i-1}$  (co będzie dowodem, że należy ono do  $\mathcal{S}$ ). Co, jeśli Aldona zrobiła Y i chce przekonać Bogumiła, że było to X? Wtedy może mu powiedzieć, że zarówno  $x_{2i}$ , jak i  $x_{2i-1}$  były wylosowane z  $\{0, 1\}^t$ , i pokaże, jak wygenerowała  $x_{2i-2}$  z  $\mathcal{S}$ . W takim przypadku Bogumił również nie jest w stanie wykryć szwindlu. Czy aby na pewno? Zauważmy, że Aldona może nieszczęśliwie wylosować  $i = 1$  i wówczas, jeśli zrobiła Y i chce wmówić Bogumiłowi, że było inaczej, to twierdziłaby, że wszystkie liczby  $x_1, \dots, x_{2n}$  były wylosowane z  $\{0, 1\}^t$  – taka sytuacja nie jest jednak dopuszczalna przez protokół. Wydawać by się mogło, że nie jest to problem – przecież to Aldona jest „stroną losującą”, więc jeśli wylosuje  $i = 1$ , może śmiało powtórzyć losowanie. Dla jednego bitu takie oszustwo mogłoby przejść, ale (jak to w kryptografii) zakładamy, że przeciwnik (tutaj, niestety, Bogumił) „zna system” i w końcu zorientowałby się, że protokół nie jest taki, jak mówimy (tzn. nigdy nie wylosowaliśmy  $i = 1$ , chociaż po dłuższym czasie powinno to się zdarzyć). W tej sytuacji należy po prostu uznać, że nasze rozwiązanie nie jest idealne i z grubsza „raz na  $n$ ”, niestety, próba oszustwa wychodzi na jaw.

Rzecz jasna, opisane tu uczuciowe rozterki miały jedynie dodać całej historii kolorytu. Mamy jednak nadzieję, że Czytelnikom łatwo będzie uwierzyć w znaczenie przedstawionej idei dla bezpieczeństwa w cyberprzestrzeni.

# życie na ży 100



## Rozwiązanie zadania M 1606.

Rozpoczynamy od pomalowania trzema kolorami wierzchołków dowolnego trójkąta triangulacji. Po usunięciu tego trójkąta wielokąt zostanie podzielony na co najwyżej trzy mniejsze, z których każdy ma pomalowany dokładnie jeden bok. W każdym z uzyskanych wielokątów pomalujemy trzeci wierzchołek trójkąta, którego jeden bok jest już pokolorowany (można to zrobić jednoznacznie) i podobnie jak wcześniej – usuńmy ten trójkąt. Wówczas ponownie otrzymamy mniejsze wielokątne części z pomalowanym dokładnie jednym bokiem. Pozostaje kontynuować ten sposób postępowania do momentu pomalowania wszystkich wierzchołków.



## Rozwiązanie zadania M 1608.

Pomalujmy na szaro wszystkie trójkąty, których dokładnie jeden bok jest przekątną danego  $n$ -kąta i oznaczmy przez  $b$ ,  $c$ ,  $s$  odpowiednio liczby białych, czarnych i szarych trójkątów.

Skoro  $n \geq 3$ , to nie istnieje trójkąt, którego wszystkie boki są także bokami danego  $n$ -kąta, więc każdy z  $n - 2$  trójkątów został pomalowany dokładnie jednym kolorem, czyli

$$b + c + s = n - 2.$$

Każdy czarny trójkąt ma dokładnie dwa boki będące bokami danego  $n$ -kąta, a każdy szary trójkąt ma dokładnie jeden taki bok. Stąd

$$2c + s = n.$$

Pozostaje zauważyć, że

$$\begin{aligned} c - b &= 2c + s - (b + c + s) = \\ &= n - (n - 2) = 2. \end{aligned}$$

CHOROBA. Zakażenie drogą kropelkową jest szybkie i proste. Po 10–12 dniach pojawiają się wysoka gorączka, objawy zaziębienia, utrata apetytu. Po kilku dalszych dniach występuje przez 3 dni guzłkowata wysypka; właśnie wtedy chory przestaje zakażać. Objawy mijają po 2–3 tygodniach, ale... aż u 40% chorych zdarzają się powikłania, które mogą kończyć się utratą wzroku, wrzodami w jamie ustnej, poważną biegunką, utratą słuchu, zapaleniem mózgu, nawet śmiercią. Najczęściej powikłania dotyczą dzieci poniżej 5 lat, na 1000 chorych umiera 1–2. Niedawno z odrą skojarzono **podostre stwardniające zapalenie mózgu** (SSPE, zapadalność 1 na 1400 nieszczepionych chorych), które może wystąpić 10–20 lat po pierwotnym zachorowaniu i jest śmiertelne.

Nie istnieje żaden LEK przeciw odrze. W nieszczepionej populacji jedna osoba zakaża 12–18. Przed wprowadzeniem

## Towarzyszą życiu od początku

Dziś nie będzie ani lekko, ani śmiesznie. Problem zachorowań dzieci i dorosłych na odrę zrobił się (dosłownie) śmiertelnie poważny. Temat wiąże się bezpośrednio z ruchami antyszczepionkowymi. Przedstawię tylko dane, bez argumentacji. Na jakąkolwiek rzeczową debatę o tym brak tu miejsca. Zaczniemy od podstawowych faktów.

WIRUSY to mikroskopijne cząstki infekcyjne, składające się z DNA lub RNA otoczonymi powłoką białkową. Nie mogą „żyć” poza komórką gospodarza, ponieważ brak im genów kodujących podstawowe enzymy metabolizmu. Wychodząc z własnej informacji genetycznej, są w stanie powielać własne geny i sterując gospodarzem, korzystając z jego metabolizmu, wyprodukować kolejne pokolenia wirusów. Genomy najprostszych to 4 geny, najbardziej złożonych – około 200. Najprostsze znane bakterie, które żyją samodzielnie, mają w genomie około 400 genów. Z punktu widzenia rodzaju gospodarza rozróżniamy wirusy zwierzęce, roślinne, bakteryjne. W 1935 roku udało się, ku zdziwieniu badaczy, wykryształować roślinny wirus, co na wiele lat pozwoliło zadawać podstępne pytanie: czy wirus to twór żywy, żyjący...?

Wirusy potrafią też modyfikować drogi metaboliczne gospodarza, hamując procesy „zdrowej” komórki. Są też takie, które integrując swój genom z genomem gospodarza, trwają tam w formie utajonej i często nadają zainfekowanej komórce cechy nowotworowe. Mamy wiele kłopotów z wirusami chorobotwórczymi, ale też dzięki prostocie budowy wirusów uzyskano w badaniach dużo, bardzo dużo bardzo pożytecznych informacji, także o podstawowych funkcjach samych komórek. A ponieważ wiele wirusów zakaża bardzo różne typy komórek, to od lat trwają także próby przekształcenia wirusów w wektory wnoszące wybrane geny (terapeutyczne) do komórek eukariotycznych.

Cykl życia wirusów jest krótki (liczy się w godzinach), a tempo mutacji wysokie.

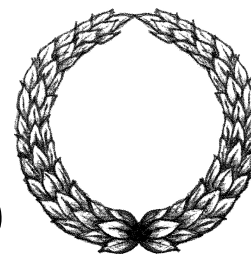
Skąd się wirusy wzięły? Jaka była ich ewolucja? Najbardziej przemawia mi do wyobraźni hipoteza koewolucji wirusów (bo o ich pochodzeniu można tylko spekulować). Zgodnie z nią w sąsiedztwie źródeł pokarmu niegdyś (4 mld lat temu?) małe fragmenty informacji genetycznej zdolne do samoreplikacji (replikony) zamykały się w pęcherzykach lipidowych, które stopniowo, pochłaniając związki pokarmowe, rosły do rozmiarów i funkcji pre-komórek. Możliwe także, że w środowisku pre-komórek znajdowały się pęcherzyki lipidowe z replikonami, co umożliwiałoby ich wspólną ewolucję. W większości genomów komórek eukariotycznych (także ludzkich) znajduje się odcinki dziś nieaktywnych sekwencji niegdyśiejszych wirusów. Zostawiły swój ślad, nieszkodliwy, więc ewolucja ich nie wyeliminowała.

Genom WIRUSA ODRY to jednoniciowy RNA, zakaża jedynie ludzi i naczelne, infekcja rozpoczyna się od limfocytów. Do komórek wchodzi tylko RNA wirusa, po czym wewnątrz komórki dochodzi do pełnej syntezy nowych wirusów. Od każdego ze szczepów (od A do H) chroni jedna, uniwersalna szczepionka, ponieważ mają wspólny serotyp (serotyp – odmiana mikroorganizmu charakteryzująca się antygenami znajdującymi się na jego powierzchni). Współczesny wirus odry prawdopodobnie oddzielił się od byłego wirusa w VII wieku n.e.

szczepionki w 1963 roku w Stanach Zjednoczonych chorowały rocznie 4 mln osób, a 500 umierało. Wirusolodzy uważali, że jest to jeden z wirusów, którego moglibyśmy się pozbyć z Ziemi (jak wirusa ospy). Niestety w wyniku aktywności ruchów antyszczepionkowych odra wróciła. W Polsce w pierwszym kwartale 2019 liczba zachorowań wzrosła niemal ośmiokrotnie w stosunku do roku 2018. W Europie w 2018 roku odnotowano 82 596 zachorowań, to najwyższa liczba od ponad dekady, 15-krotnie wyższa w porównaniu do 2016 roku.

Mam też dobrą wiadomość: przy prawidłowej dawce szczepionka zabezpiecza na całe życie; bardzo rzadko towarzyszą szczepieniu niepożądane, krótkotrwałe skutki uboczne. Urodzeni przed 1960 rokiem na pewno szczepieni nie byli.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)



## XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

W XIV Olimpiadzie Matematycznej Juniorów (dawniej Gimnazjalistów), adresowanej do uczniów gimnazjum oraz szkół podstawowych, wzięło udział 11 592 uczniów z 1486 szkół (w tym 7189 uczniów z 924 szkół podstawowych). W zawodach II stopnia wzięło udział 1753 uczniów z 877 szkół (w tym 923 uczniów z 498 szkół podstawowych). W zawodach III stopnia wzięło udział 257 uczniów ze 166 szkół (w tym 132 uczniów z 93 szkół podstawowych).

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów postanowił przyznać 126 uczniom tytuł laureata I, II lub III stopnia, w tym 63 uczniom z 45 szkół podstawowych.



### Laureaci I stopnia

(maksymalna suma punktów na trzecim etapie):

Kosma Jan Kasprzak, Korneliusz Obarski, Witold Sikora,  
Piotr Andrzej Kuc

### Laureaci I stopnia (pozostali):

Anna Weronika Bajorek, Antoni Buraczewski,  
Michał Jan Ciapka, Maciej Curulak, Jan Gwiazda,  
Natalia Hajderek, Michał Piotr Lipiec, Jan Paweł Pezda,  
Grzegorz Sambor Ryn, Konstanty Smolira,  
Daniela Danuta Spurtacz, Maksymilian Wdowiarz-Bilski,  
Jan Adam Zakrzewski

### Laureaci II stopnia:

Zofia Magdalena Adamowska, Jakub Bartecki,  
Piotr Krzysztof Borodako, Mateusz Boryczka,  
Emanuel Czernik, Mateusz Krzysztof Gabzdyl,  
Ignacy Gębuś, Marianna Gołębiwska, Jakub Izdebski,  
Paweł Jastrzębski, Jan Koliński, Adam Tomasz Konior,  
Jan Paweł Kowalczyk, Tymoteusz Kucharek,  
Michał Franciszek Kwiatkowski, Miłosz Kwiatkowski,  
Piotr Jan Łaba, Hai An Mai, Jakub Amadeusz Mościcki,  
Olga Marta Palikowska, Paweł Karol Pielasa,  
Gabriela Pietras, Krzysztof Jan Pietrusiak,  
Mikołaj Jan Przepiórski, Mateusz Marek Rajs,  
Jakub Michał Rudzik, Robert Soboński,  
Michał Marek Stawarz, Jerzy Tomasz Szempliński,  
Hubert Mikołaj Szymański, Maciej Szymański,  
Jarowit Stanisław Śledziński, Jakub Ignacy Tyrąła,  
Marek Zbysiński

### Laureaci III stopnia:

Łukasz Mateusz Besuch, Bartłomiej Bychawski,  
Maja Zuzanna Bzowska, Marcel Jerzy Chwiałkowski,  
Kamil Dalidowicz, Marta Zyta Dawidowska,

Marcin Jan Dudziak, Cezary Gabriel Galiński,  
Marcin Giembicki, Łukasz Głogowski,  
Bartosz Piotr Głowacki, Bartosz Jaźwiec,  
August Piotr Jeziorny, Stanisław Marcin Karpiejczyk,  
Igor Donat Klimczak, Bartłomiej Kojacz,  
Agata Krawczyk, Zofia Róża Kuśmierowska,  
Stanisław Paweł Lada, Bartłomiej Jan Lech,  
Augustyn Majtyka, Marek Makochon,  
Michał Szymon Mańka, Piotr Jan Marszałik,  
Krzysztof Michał Michalak, Weronika Matylda Mierzanowska,  
Jan Możański, Miłosz Muszyński,  
Weronika Myśliwiec, Adam Łukasz Naskręcki,  
Tue Anh Nguyen, Barbara Nowak, Urszula Obirek,  
Stanisław Antoni Pańkowski, Antoni Jerzy Parus,  
Krzysztof Andrzej Piechota, Jan Dominik Piotrowski,  
Tymon Olaf Piwowarski, Lidia Podoluk,  
Mateusz Prokopowicz, Mateusz Paweł Przebieracz,  
Tomasz Puczel, Dominika Ewa Radaszewska,  
Karolina Helena Radzio, Mikołaj Jerzy Rams,  
Michał Redmer, Patryk Nikodem Rogalski,  
Krzysztof Salata, Bartłomiej Jan Sitnik,  
Natalia Urszula Siwek, Anna Smólko,  
Franciszek Paweł Sobota, Adam Socha,  
Adam Stachelek, Antoni Staniewski,  
Barbara Anna Staszewska, Igor Staszekiewicz,  
Szymon Strzałek, Adela Szczurek, Michał Jan Szyfelbein,  
Dominika Szymczak, Emilia Śliwka, Hubert Wach,  
Jadwiga Wiatr, Emilia Anna Wiśniewska,  
Maciej Wiśniewski, Stanisław Tadeusz Wiśniewski,  
Mateusz Zbigniew Wójcicki, Michał Wójcik,  
Krzysztof Wyborski, Marcin Wykpiś, Jacek Załęski,  
Bartosz Zawistowski, Michał Rafał Zimmiewicz,  
Cyprian Adam Ziółkowski

Komitet Główny OMJ pragnie serdecznie podziękować Fundacji mBanku, Instytutowi Matematycznemu PAN oraz Szkole Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie za wsparcie organizacji Olimpiady, a także Fundacji mBanku, Panu Franciszkowi Hutten-Czapskiemu, Panu Cezaremu Smorszczewskiemu oraz redakcji czasopisma *Delta* za ufundowanie nagród dla laureatów OMJ.



# LXX Olimpiada Matematyczna

W zawodach I stopnia LXX Olimpiady Matematycznej wzięło udział 1324 uczniów. Do zawodów stopnia II zakwalifikowano 598 uczniów, a do zawodów stopnia III – 141.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 5 kwietnia br. postanowił przyznać 39 tytułów laureata. Nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia otrzymali następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):

## Nagrody pierwszego stopnia:

**Juliusz Banecki (36)** – Gdańskie Liceum Autonomiczne,  
**Tomasz Ślusarczyk (36)** – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie,  
**Justyna Jaworska (35)** – XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie.

## Nagrody drugiego stopnia:

**Radosław Żak (31)** – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie,  
**Adam Dankowiakowski (30)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Jan Dobrakowski (30)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Maciej Dziuba (30)** – II Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Końskich.  
**Jan Fornal (30)** – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie,  
**Paweł Gadziński (30)** – V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej,  
**Kamil Galewski (30)** – I Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim,  
**Kosma Kasprzak (30)** – XXXVIII Dwujęzyczne Liceum Ogólnokształcące im. Jana Nowaka-Jeziorańskiego w Poznaniu,  
**Mateusz Nowak (30)** – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie,  
**Iwo Pilecki-Silva (30)** – Liceum Ogólnokształcące Nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu,  
**Aleksandra Kowalska (29)** – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie.

## Nagrody trzeciego stopnia:

**Mikołaj Tymon Bárdos (28)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Patryk Barłowski (24)** – IV Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie,  
**Cezary Botta (24)** – VIII Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Poznaniu,  
**Dominik Bysiewicz (24)** – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Krośnie,  
**Dominik Chmura (24)** – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie,  
**Daniel Goc (24)** – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie,

**Mikołaj Grzebieluch (24)** – II Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Końskich,  
**Miłosz Kasak (24)** – XX Liceum Ogólnokształcącego im. Zbigniewa Herberta w Gdańsku,  
**Tomasz Kiełbasa (24)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Aleksander Misztal (24)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Krzysztof Olejniczak (24)** – Liceum Ogólnokształcące Nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu,  
**Łukasz Orski (24)** – Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu,  
**Rafał Pyzik (24)** – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie,  
**Mateusz Scharmach (24)** – III Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni,  
**Bartłomiej Sikorski (24)** – I Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki w Starachowicach,  
**Michał Szwej (24)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Jakub Wornbard (24)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Jakub Dobrowolski (23)** – XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie,  
**Stanisław Hauke (23)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Piotr Sawicki (23)** – XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie,  
**Piotr Zygmunt (23)** – Publiczne Liceum Ogólnokształcące Uniwersytetu Łódzkiego w Łodzi,  
**Katarzyna Kępińska (22)** – VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach,  
**Marcin Pawłowski (22)** – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

## Nagrody czwartego stopnia:

**Adam Barański (20)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Filip Konieczny (20)** – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie,  
**Wojciech Misiak (20)** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Nagrodę imienia Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie zadania z finału LXX Olimpiady Matematycznej otrzymali:

**Justyna Jaworska** (zadanie 1) – XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie,  
**Aleksander Misztal** (zadanie 4) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,  
**Iwo Pilecki-Silva** (zadanie 5) – Liceum Ogólnokształcące nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu,  
**Radosław Żak** (zadanie 5) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Zadania oraz pełną wersję komunikatu można znaleźć na stronie [www.om.edu.pl](http://www.om.edu.pl).

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali finalistom w przygotowaniach do zawodów.



## LXVIII Olimpiada Fizyczna

W roku 2018/19 odbyła się kolejna, LXVIII Olimpiada Fizyczna. Ostatni jej stopień miał miejsce w Warszawie w dniach 6–9 kwietnia 2019 roku. Pierwszego dnia zawodnicy rozwiązywali zadanie doświadczalne, polegające na wyznaczeniu oporu właściwego materiału rurki (była to rurka aluminiowa), używając silnego magnesu oraz cewki i oscyloskopu. Cewka i oscyloskop służyły do pomiaru siły elektromotorycznej indukowanej w rurce podczas opadania magnesu. Trudność polegała na powiązaniu oporu właściwego materiału rurki z prędkością spadania magnesu w rurce. Związek ten można znaleźć, rozpatrując zmiany energii w układzie, ale nie jest to proste.

Następnego dnia zawodnicy mieli do rozwiązania trzy zadania teoretyczne. Najmniej banalne zadanie dotyczyło ruchu trzech małych ciał we własnym polu grawitacyjnym przy założeniu, że ciała te cały czas znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Pełną treść zadań oraz ich rozwiązania można znaleźć na stronie Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej ([www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl)).

Jak co roku zadania były trudne. Wprawdzie do ich rozwiązania wystarcza znajomość praw fizyki znanych ze szkoły, ale jednak konieczne jest znacznie głębsze rozumienie procesów fizycznych, niż to jest wymagane na egzaminie maturalnym. Przydaje się też biegłość rachunkowa.

Nagrodami w Olimpiadzie Fizycznej były bony podarunkowe oraz książki. Pierwszych pięciu laureatów otrzymało zaproszenia do udziału w Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej, która odbędzie się w Izraelu w lipcu tego roku. Ponadto pięciu uczniów, którzy w tym roku nie zdają matury, weźmie udział w Europejskiej Olimpiadzie Fizycznej na Łotwie.

W zawodach finałowych Olimpiady uczestniczyło 74 uczniów ze wszystkich rejonów Polski, tytuły laureatów przyznano 24 osobom. Oto ich lista w porządku zajętych miejsc:

1. **Juliusz Banecki**, Gdańskie Liceum Autonomiczne w Gdańsku
2. **Adam Wątroba**, IV LO im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie
3. **Tomasz Ślusarczyk**, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
4. **Piotr Sawicki**, XIII LO w Szczecinie
5. **Jakub Wornbard**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
6. **Oliwier Urbański**, Szkoła Podstawowa nr 28 im. Kornela Makuszyńskiego w Poznaniu
7. **Marcin Augustynowicz**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
8. **Grzegorz Komorowski**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
9. **Szymon Kuś**, Pijarskie LO Królowej Pokoju w Łowiczu
10. **Wojciech Kolesiński**, XIII LO w Szczecinie
11. **Wojciech Niedziółka**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
12. **Michał Żelasko**, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
13. **Michał Maszkowski**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
14. **Michał Umiński**, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
15. **Piotr Masajada**, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu
16. **Łukasz Jakubowski**, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
17. **Antoni Puch**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
18. **Tomasz Twardoch**, ZSO nr 7, XIII LO w Szczecinie
19. **Piotr Kamiński**, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
20. **Kamil Iwanowski**, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
21. **Krzysztof Druciarek**, XIII LO w Szczecinie
22. **Dawid Zapolski**, Liceum Akademickie w Toruniu
23. **Filip Nikolow**, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
24. **Wiktor Zdrojewski**, VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy

## LXII Olimpiada Astronomiczna

Laureaci (według zajętych miejsc)

- I. **Mateusz Kapusta**, 2 klasa III LO Wrocław
- II. **Wojciech Kolesiński**, 3 klasa XIII LO Szczecin
- II. **Antoni Skoczypiec**, 1 klasa V LO Kraków
- IV. **Aleksander Lenart**, 2 klasa I LO Krosno
- IV. **Kamil Ciebiera**, 3 klasa LO im. JP II Rzeszów
- VI. **Piotr Masajada**, 3 klasa XIV LO Wrocław
- VI. **Krzysztof Zakrzewski**, 3 klasa XIV LO Warszawa

Finałiści (w kolejności alfabetycznej)

- **Daniel Ciołek**, 3 klasa I LO Radzyń Podlaski
- **Paweł Drabarek**, 3 klasa II LO Szczecin
- **Jakub Garwoła**, 3 klasa III LO Lublin

- **Arkadiusz Hess**, 3 klasa I LO Przemyśl
- **Kornel Howil**, 2 klasa XIII LO Szczecin
- **Jakub Kappes**, 2 klasa LO Polit. Ł. Łódź
- **Agnieszka Makulska**, 3 klasa XIV LO Warszawa
- **Szymon Nachlik**, 2 klasa ZSO nr 1 Racibórz
- **Michał Napiórkowski**, 2 klasa XIII LO Szczecin
- **Julia Osęka**, 3 klasa Lic. Autonomiczne Gdańsk
- **Piotr Płonka**, 3 klasa ZSE i M. Bielsko-Biała
- **Bartosz Salwiczek**, 3 klasa I LO Kołobrzeg
- **Maciej Szczęśniak**, 2 klasa VI LO Radom
- **Kamil Szydłowski**, 3 klasa Lic. UMK Toruń

Strona internetowa Olimpiady Astronomicznej:  
[www.planetarium.edu.pl/oa.htm](http://www.planetarium.edu.pl/oa.htm)

# XXVI Olimpiada Informatyczna



W dniach 9–12 kwietnia 2019 roku w Warszawie odbyły się zawody finałowe XXVI Olimpiady Informatycznej. Zostało do nich zakwalifikowanych 95 zawodników. W ciągu dwóch dni zawodów uczestnicy mieli do rozwiązania w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Komitet Główny przyznał tytuły laureata I, II i III miejsca zawodnikom, którzy w zawodach finałowych uzyskali, odpowiednio, co najmniej 400, 300 i 200 punktów, i wyróżnił zawodników, którzy w finale zdobyli co najmniej 150 punktów. Poniżej publikujemy listę tych zawodników (w nawiasach liczba zdobytych punktów oraz szkoła). Lista wszystkich finalistów jest dostępna na stronie [oi.edu.pl](http://oi.edu.pl).



## Laureaci I miejsca

1. **Marek Skiba** (531, I LO, Lublin)
2. **Jakub Wasilewski** (510, XIV LO, Warszawa)
3. **Mikołaj Stępiński** (450, XIV LO, Warszawa)
4. **Mieszko Grodzicki** (449, VI LO, Radom)
5. **Michał Staniewski** (422, XIII LO, Szczecin)
6. **Tymoteusz Wiśniewski** (421, XIV LO, Warszawa)
7. **Adam Górkiewicz** (417, LO nr XIV, Wrocław)

## Laureaci II miejsca

8. **Kacper Harasimowicz** (393, III LO, Gdynia)
9. **Mateusz Cegiełka** (385, XIV LO, Warszawa)
10. **Michał Grzymek** (376, LO nr XIV, Wrocław)
11. **Arkadiusz Czarkowski** (375, III LO, Gdynia)
- 12–13. **Krzysztof Boryczka** (374, V LO, Bielsko-Biała)
- Bartłomiej Waclawik** (374, V LO, Kraków)
14. **Jan Strzeszyński** (357, Oddziały Gimnazjalne w XIV LO, Warszawa)
15. **Jakub Bachurski** (356, XIV LO, Warszawa)
16. **Tomasz Nowak** (333, XIII LO, Szczecin)
17. **Piotr Kępczyński** (317, XIV LO, Warszawa)
18. **Kacper Solecki** (312, LO nr XIV, Wrocław)

## Laureaci III miejsca

19. **Paweł Pawłowski** (295, Prywatne Liceum im. Królowej Jadwigi, Lublin)
20. **Mikołaj Poliński** (289, LO nr III, Wrocław)
21. **Janusz Partyka** (288, XIV LO, Warszawa)
22. **Szymon Dominikowski** (280, XIV LO, Warszawa)
23. **Kacper Szczepański** (279, III LO, Gdynia)
24. **Juliusz Korab-Karpowicz** (274, III LO, Bielsko-Biała)
25. **Adrian Górecki** (273, XIV LO, Warszawa)
26. **Franciszek Malinka** (265, LO nr XIV, Wrocław)
27. **Hubert Zięba** (257, V LO, Kraków)
- 28.–29. **Mateusz Maciej Masłowski** (254, III LO, Gdynia)
- Michał Mgeładze-Arciuch** (254, III LO, Gdynia)
30. **Kacper Michno** (252, V LO, Kraków)
- 31.–33. **Mateusz Opala** (246, LO nr XIV, Wrocław)
- Paweł Pilarski** (246, XIV LO, Warszawa)
- Antoni Wiśniewski** (246, XIV LO, Warszawa)
34. **Kamil Jonak** (243, XIV LO, Warszawa)

35. **Łukasz Orlikowski** (237, III LO, Gdynia)
36. **Mateusz Olszewski** (236, I LO, Suwałki)
37. **Paweł Kowalski** (230, III LO, Gdynia)
38. **Jan Wańkowicz** (225, I LO, Legnica)
39. **Aleksandra Kowalska** (219, Publiczne LO Sióstr Prezentek, Rzeszów)
40. **Antoni Puch** (218, XIV LO, Warszawa)
41. **Grzegorz Kwacz** (215, XVIII LO, Warszawa)
42. **Jan Kwiatkowski** (214, I LO, Lublin)
- 43–44. **Antoni Długosz** (207, Oddziały Gimnazjalne w XLII LO, Kraków)
- Michał Leszczyński** (207, II LO, Białystok)
45. **Tomasz Buczyński** (205, V LO, Kraków)
46. **Bartłomiej Czarkowski** (204, Gimnazjum nr 24 przy III LO, Gdynia)
47. **Maksymilian Grochowski** (203, XIV LO, Warszawa)
48. **Marcin Mordecki** (200, III LO, Gdynia)

## Finaliści z wyróżnieniem

- Dominik Wawszczak** (191, XIV LO, Warszawa)  
**Jan Klimczak** (189, I LO, Lublin)  
**Jan Wojtach** (186, I LO, Białystok)  
**Adam Morawski** (179, LO nr III, Wrocław)  
**Grzegorz Kopania** (176, XIV LO, Warszawa)  
**Mateusz Ładysz** (176, I LO, Białystok)  
**Jonasz Aleszkiewicz** (170, XIV LO, Warszawa)  
**Michał Woźny** (169, V LO, Kraków)  
**Patrycja Krzyna** (168, I LO, Lublin)  
**Jakub Zacharczuk** (163, II LO, Białystok)  
**Krzysztof Olejniczak** (160, LO nr III, Wrocław)  
**Franciszek Biel** (159, VI LO, Radom)  
**Grzegorz Gruza** (154, XIV LO, Warszawa)  
**Filip Konieczny** (151, III LO, Tarnów)  
**Krzysztof Rymski** (150, XIV LO, Warszawa)



## Informatyczny kącik olimpijski (129): Telekomunikacja

W tym odcinku omówimy rozwiązanie zadania „Telekomunikacja”, które pojawiło się na drugim etapie Zawodów Drużynowych XIII Młodzieżowej Olimpiady Informatycznej.

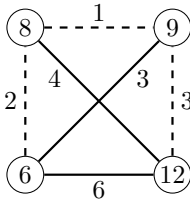
**Telekomunikacja:** W pewnym państwie znajduje się  $n$  miast ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do  $n$ . W każdym mieście znajduje się jedna wieża telekomunikacyjna. Wieża w  $i$ -tym mieście jest przystosowana do nadawania i odbierania fal na częstotliwości  $f_i$  herców. Dotychczas wszystkie miasta komunikowały się bardzo chaotycznie, dlatego postanowiono to uporządkować. Bezpośrednia komunikacja ma być ograniczona do wybranej sieci połączeń. Sieć ma składać się z  $n - 1$  połączeń pomiędzy miastami oraz ma być spójna (innymi słowy ma tworzyć drzewo). Wartością połączenia pomiędzy miastami  $u$  i  $v$  nazywamy największy wspólny dzielnik liczb  $f_u$  i  $f_v$ . Król chce wybrać taką sieć, aby suma wartości połączeń była maksymalna. Pomóż mu i podaj tę wartość.

### Wstęp

Zacznijmy od opisanego zadania jako problemu grafowego. Dany jest graf pełny  $G = (V, E)$ , gdzie:

- $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,
- $E = \{(u, v) : u, v \in V \wedge u \neq v\}$ .

Wagę krawędzi  $(u, v) \in E$  jest  $\text{NWD}(f_u, f_v)$ . Chcemy znaleźć sumę wag krawędzi maksymalnego drzewa rozpinającego. Przykładowo, jeśli mamy cztery miasta, w których wieże nadają z częstotliwościami:  $f_1 = 8$ ,  $f_2 = 9$ ,  $f_3 = 12$ ,  $f_4 = 6$ , to graf wygląda następująco (linie ciągle oznaczają krawędzie maksymalnego drzewa rozpinającego, a suma wag tych krawędzi wynosi  $4 + 3 + 6 = 13$ ):



Niech  $M = \max_{u \in V} f_u$ .

### Rozwiązanie $O(n^2 \cdot \log(M))$

W pierwszym kroku tego rozwiązania zbudujemy wyżej opisany graf, który ma  $n$  wierzchołków i  $\frac{n(n-1)}{2}$  krawędzi. Wagę dowolnej krawędzi  $(u, v) \in E$  możemy obliczyć za pomocą algorytmu Euklidesa, który działa w czasie  $O(\log(f_u + f_v))$ . Zatem cały graf zbudujemy w czasie  $O(n^2 \cdot \log(M))$ .

Znajdowanie minimalnego drzewa rozpinającego to znany problem, który może zostać rozwiązany za pomocą jednego z algorytmów: Prima, Kruskala lub Borůvki. Do znalezienia maksymalnego drzewa rozpinającego wykorzystamy zmodyfikowany algorytm Kruskala. Na początku mamy las drzew, gdzie każdy wierzchołek stanowi osobne drzewo. Następnie przeglądamy wszystkie krawędzie w kolejności nierosnących wag. Jeśli rozpatrywana krawędź łączy dwa różne drzewa, to dodajemy ją do drzewa rozpinającego. Sprawdzanie, czy dwa wierzchołki należą do różnych drzew, możemy zrealizować za pomocą struktury zbiorów rozłącznych. Czas wykonania  $\frac{n(n-1)}{2}$  operacji (dla każdej krawędzi) na  $n$ -elementowym zbiorze wierzchołków wynosi  $O(n^2 \cdot \log^*(n))$ , gdzie  $\log^*$  oznacza logarytm iterowany, czyli liczbę operacji logarytmowania potrzebną do uzyskania

wyniku nie większego od 1. Algorytm wybierze  $n - 1$  krawędzi, które tworzą maksymalne drzewo rozpinające. Całkowity czas działania algorytmu wynosi  $O(n^2 \cdot \log(n))$  (dominujące jest sortowanie krawędzi po wadze). Jeśli wykorzystamy sortowanie przez zliczanie, to otrzymamy czas  $O(M + n^2 \cdot \log^*(n))$ . Dowód poprawności algorytmu pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie (dowód jest analogiczny do dowodu algorytmu Kruskala).

### Rozwiązanie $O(n + M \cdot \log(M) \cdot \log^*(M))$

W tym rozwiązaniu nie będziemy jawnie konstruowali grafu, natomiast postaramy się szybko znajdować krawędzie maksymalnego drzewa rozpinającego. Zauważmy, że  $\text{NWD}(f_u, f_v) \leq \min(f_u, f_v)$  dla dowolnych  $u, v \in V$ . Zatem krawędzie incydentne z wierzchołkiem  $u \in V$  mogą mieć co najwyżej wagę  $f_u$ . Na mocy obserwacji połączmy w drzewa wierzchołki o tej samej częstotliwości. Niech  $S_x = \{u \in V : f_u = x\}$ . Teraz, dla każdego naturalnego  $x \in [1; M]$  wierzchołki  $S_x$  łączymy w drzewo. Wystarczy np. do wybranego wierzchołka podłączyć pozostałe, tworząc  $|S_x| - 1$  nowych krawędzi o wadze  $x$  każda. W dalszej części rozwiązania możemy uwzględnić tylko reprezentantów otrzymanych drzew, ponieważ każdy wierzchołek w drzewie ma taki sam zestaw wag krawędzi. Wówczas nie ma dwóch wierzchołków o tym współczynniku.

W zmodyfikowanym algorytmie Kruskala przeglądamy krawędzie w kolejności nierosnących wag. Zatem dla każdego  $d$  od  $M$  do 1 znajdziemy wierzchołki, które mogą być połączone krawędzią o wadze  $d$ . Są to wierzchołki z etykietami:  $d, 2d, 3d, \dots, \lfloor \frac{M}{d} \rfloor d$  (wielokrotności  $d$  nie większe niż  $M$ ). Chcemy wszystkie te wierzchołki uspołnić (być może pomiędzy niektórymi wierzchołkami są już krawędzie wygenerowane wcześniej). Wystarczy, że wybierzemy jeden wierzchołek i podłączymy do niego te wierzchołki, które należą do innego drzewa.

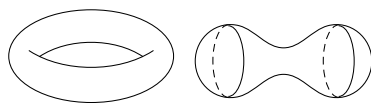
Dla każdego  $d$  rozpatrzmy  $\lfloor \frac{M}{d} \rfloor$  wierzchołków. Zatem w sumie rozpatrzmy  $O(M \cdot \log(M))$  wierzchołków. Do sprawdzania spójności wykorzystujemy strukturę zbiorów rozłącznych. W celu szybkiego sprawdzania, czy istnieje wierzchołek z daną etykietą, wystarczy na początku zliczyć wystąpienia w czasie  $O(n + M)$ . Stąd całkowita złożoność wynosi  $O(n + M \cdot \log(M) \cdot \log^*(M))$ .

Bartosz ŁUKASIEWICZ

# Bańka jaka jest, każdy widzi

Michał MIŚKIEWICZ\*

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Każdy widział kiedyś bańki mydlane. Nie ma co ukrywać, są one okrągłe. Tylko dlaczego?

Nie wiadomo, czemu to pytanie miałoby służyć, ale zastanówmy się chwilę. Czy gdyby się postarać, to czy można wydmuchać bańkę-torus, czyli bańkę w kształcie dętki rowerowej? A jeśli już bańka musi mieć kształt sfery, to czy może być to sfera zdeformowana, na przykład zwięzona w talii? Doświadczenie mówi, że nie – ile bańka nie jest za ciężka, to już chwilę po wydmuchaniu przybiera kształt idealnie okrągłej sfery. Zobaczmy więc, jaka matematyka (i oczywiście fizyka) za tym stoi.

Przy dmuchaniu bańki wtlaczamy do niej powietrze o ciśnieniu wyższym niż atmosferyczne. Równanie Younga–Laplace’a stwierdza, że w dowolnym punkcie  $A$  powierzchni bańki zachodzi wzór

$$\Delta p(A) = \sigma H(A),$$

gdzie  $\sigma$  jest napięciem powierzchniowym (współczynnikiem zależnym od parametrów materiału; w przypadku bańek mydlanych możemy przyjąć, że jest ono stałe na całej powierzchni),  $\Delta p(A)$  oznacza różnicę ciśnień po obu stronach bańki w punkcie  $A$ , a  $H(A)$  oznacza *średnią krzywiznę* powierzchni w tym punkcie. Zgodnie ze znanym ze szkoły prawem Pascala, ciśnienie jest stałe na zewnątrz bańki i stałe w jej wnętrzu, a więc różnica  $\Delta p$  tak naprawdę nie zależy od wyboru punktu. To samo tyczy się zatem średniej krzywizny.

Pozostaje wyjaśnić, czym ta średnia krzywizna jest. Żeby ją określić, potrzebujemy oprzeć naszą powierzchnię  $\mathcal{M}$  na płaszczyźnie  $xy$  tak, by jej punkt  $A$  dotykał początku układu współrzędnych (rys. 1). Następnie wybieramy funkcję kwadratową dwóch zmiennych, czyli funkcję postaci  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ , której wykres najlepiej przybliża  $\mathcal{M}$  w otoczeniu  $A$ , i definiujemy średnią krzywiznę jako

$$H(A) := a + c.$$

Średniej krzywizny nie należy mylić z krzywizną Gaussa, którą definiuje się w podobny sposób jako  $G(A) := -(b^2 - 4ac)$ .

Nazwa *średnia* bierze się stąd, że gdybyśmy przecięli  $\mathcal{M}$  jakąś płaszczyzną zawierającą oś  $z$  i dla powstałej na przecięciu krzywej obliczyli krzywiznę w punkcie  $A$ , to  $H(A)$  równa się średniej wartości wszystkich uzyskanych w ten sposób pomiarów. Można powiedzieć nieściśle, że im większa krzywizna, tym bardziej powierzchnia zagina się do wewnątrz.

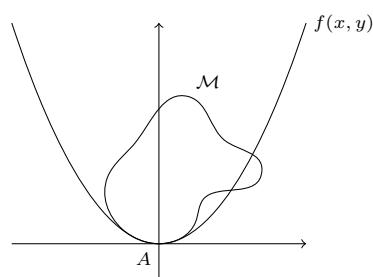
Przykładowo, jeśli sferę o promieniu  $R$  położyć w wyżej opisany sposób, to dolna półsfera jest wykresem funkcji  $g(x, y) = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . W otoczeniu zera najlepiej przybliża ją funkcja kwadratowa  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2R}$ , więc średnia krzywizna wynosi  $1/R$ . Oczywiście nie ma znaczenia, który punkt obraliśmy jako punkt podparcia, więc sfera ma stałą średnią krzywiznę równą  $1/R$ .

W latach pięćdziesiątych XX wieku Aleksandr Aleksandrow wykazał, że jest to jedyna zamknięta (czyli ograniczona, domknięta i pozbawiona brzegu, który ma na przykład półsfera) powierzchnia o tej własności:

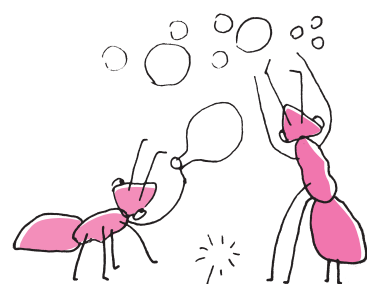
**Twierdzenie (Aleksandrow).** *Jeśli spójna i zamknięta powierzchnia  $\mathcal{M}$  w przestrzeni trójwymiarowej ma taką samą średnią krzywiznę  $H$  w każdym swoim punkcie, to jest sferą o promieniu  $1/H$ .*

Twierdzenie to wyjaśnia okrągłość bańek. Rzeczywiście, powierzchnia pojedynczej bańki jest ograniczona i spójna, a z praw Pascala i Younga–Laplace’a wynika, że w każdym punkcie ma tę samą średnią krzywiznę. Z twierdzenia Aleksandrowa wnioskujemy więc, że musi być to sfera.

Ponieważ powierzchnie o stałej średniej krzywiznie są interesujące same w sobie, naszkicujemy teraz dowód twierdzenia. Będzie on oparty na następującym fakcie, którego uzasadnienie odłożymy na później.



Rys. 1



Więcej (i trochę inaczej) o krzywiznach można przeczytać w artykule Jerzego Konarskiego w  $\Delta_{19}^4$ .

**Rozwiązanie zadania F 979.**

Niech  $t$  oznacza czas trwania dźwięku. Częstota  $\nu$  dźwięku nasze ucho rozpoznaje na podstawie liczby rejestrowanych pełnych drgań  $n$  mieszczących się w czasie  $t$ , inaczej:  $n$  równe jest całkowitej części iloczynu  $\nu t$ . Dokładność określenia częstoty  $\Delta\nu \approx 1/t$ . Jeśli różnica częstoty ma odpowiadać nie więcej niż 1/16 tonu (czyli 1/8 półtonu), to

$$\frac{\nu + \Delta\nu}{\nu} \leq (2^{1/12})^{1/8} = 2^{1/96}.$$

Mamy więc  $\Delta\nu/\nu < 0,0073$ , czyli  $t > 1/(0,0073\nu)$ . Otrzymujemy dla  $\nu_1 = 880$  Hz,  $t_1 > 0,157$  s, a dla  $\nu_2 = 110$  Hz,  $t_2 > 1,255$  s. Tłumaczy to „powolność” arii basowych w porównaniu z partiami sopranu.

**Rozwiązanie zadania F 980.**

Czas  $\tau$  życia stanu ogranicza dokładność  $\Delta E$ , z jaką można wyznaczyć jego energię:

$$\tau \Delta E \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Masa spoczynkowa  $m$  cząstki równoważna jest energii  $E = mc^2$ . Tym samym masę spoczynkową cząstki o czasie życia  $\tau$  można wyznaczyć z dokładnością

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \geq \frac{h}{4\pi\tau c^2}.$$

Dla  $\tau = 3 \cdot 10^{-25}$  s oszacowanie to daje

$$\Delta m \geq 2 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 1,1 \text{ GeV}/c^2.$$

**Lemat 1.** Jeśli powierzchnia  $\mathcal{M}$  spełnia założenia twierdzenia Aleksandrowa i ma środek ciężkości w punkcie  $S$ , to jest symetryczna względem każdej płaszczyzny przechodzącej przez  $S$ .

Twierdzenie Aleksandrowa jest natychmiastowym wnioskiem z powyższego lematu. Istotnie, weźmy dowolny punkt  $A \in \mathcal{M}$  różny od  $S$ . Pokażemy, że  $\mathcal{M}$  pokrywa się ze sferą  $\mathcal{M}'$  o środku  $S$  i promieniu  $|AS|$ . Dla każdego punktu  $B \in \mathcal{M}'$  można znaleźć płaszczyznę przechodzącą przez  $S$ , względem której punkty  $A$  i  $B$  są symetryczne, a więc z symetrii  $\mathcal{M}$  wynika  $B \in \mathcal{M}$ . To pokazuje zawieranie  $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ , ale skoro  $\mathcal{M}$  jest spójną powierzchnią, to  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{M}'$  muszą być równe. Jak obliczyliśmy wcześniej, promień musi wynosić  $1/H$ , by zgadzała się krzywizna.

Naszkicujemy zaraz uzasadnienie Lematu 1, ale najpierw przedstawimy dwa pomocnicze fakty. Rozważmy sytuację, w której dwie powierzchnie  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  są umieszczone jak  $\mathcal{M}$  na rysunku 1, przy czym w pewnym otoczeniu początku układu współrzędnych  $A$  powierzchnia  $\mathcal{M}_1$  znajduje się nad  $\mathcal{M}_2$  (z możliwymi punktami styku, na przykład w  $A$ ). Wówczas odpowiadające im funkcje kwadratowe  $f_1, f_2$  są związane relacją  $f_1 \geq f_2$ , z której w szczególności odczytujemy  $H_1(A) \geq H_2(A)$ . Nierówność ta jest zresztą zgodna z intuicją: „większe zakrzywienie do wewnątrz = większa krzywizna”. Uzasadniliśmy w ten sposób

**Lemat 2 (słaba zasada maksimum).** Jeśli dane są powierzchnie  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  o stałej średniej krzywiznie  $H_1, H_2$ , przy czym  $\mathcal{M}_1$  znajduje się nad  $\mathcal{M}_2$  oraz  $H_1 < H_2$ , to powierzchnie te nie mogą się stykać w punktach wewnętrznych.

Do dowodu Lematu 1 będzie jednak potrzebna tak zwana *silna zasada maksimum*, która stwierdza, że również w przypadku  $H_1 = H_2$  powierzchnie nie mogą się stykać, chyba że są jedną i tą samą powierzchnią; ponadto użyteczny będzie analogiczny wynik w przypadku, gdy punkt styku leży na brzegu obu powierzchni.

**Lemat 3 (silna zasada maksimum).** Dane są dwie różne powierzchnie  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  o tej samej stałej średniej krzywiznie, przy czym  $\mathcal{M}_1$  znajduje się nad  $\mathcal{M}_2$ . Wówczas:

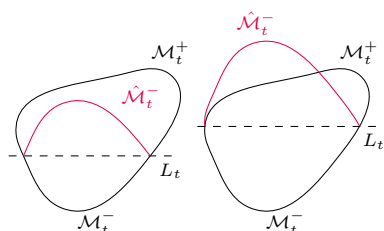
- powierzchnie te nie mogą się stykać w punktach wewnętrznych,
- jeśli  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  mają brzeg i stykają się w punkcie brzegowym, to nie mogą mieć w tym punkcie tej samej płaszczyzny stycznej.

Uzasadnienie wymagałoby wprowadzenia narzędzi równań różniczkowych cząstkowych i w związku z tym wykracza poza możliwości niniejszego artykułu. Czytelnik być może zechce uwierzyć mi na słowo, że idea dowodu nie odbiega znacząco od tego, co już zauważyliśmy przy Lemacie 2. Tymczasem przejdziemy do geometrycznej części rozumowania.

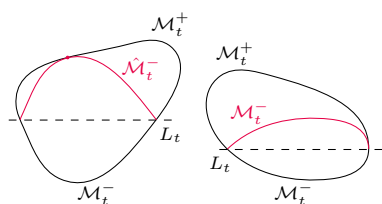
*Dowód Lematu 1.* Zauważmy, że jeśli powierzchnia  $\mathcal{M}$  ma jakąś płaszczyznę symetrii, to jej środek ciężkości automatycznie musi leżeć na owej płaszczyźnie. Wystarczy więc, że znajdziemy płaszczyznę symetrii w każdym możliwym kierunku. Dla uproszczenia zapisu skupimy się na szukaniu płaszczyzny symetrii równoległej do płaszczyzny  $xy$ , a więc wśród rodziny  $L_t = \{(x, y, t) : x, y \in \mathbb{R}\}$  parametryzowanej przez  $t \in \mathbb{R}$ . Dla każdego innego kierunku dowód wygląda analogicznie.

Poniższe rozumowanie nosi obecnie nazwę *metody ruchomych płaszczyzn*, a to dlatego, że będziemy przesuwac płaszczyznę  $L_t$  (poprzez zmianę parametru  $t$ ) tak długo, aż znajdziemy płaszczyznę symetrii.

Wprowadźmy pewne oznaczenia. Dla ustalonego  $t$  niech  $\mathcal{M}_t^+, \mathcal{M}_t^-$  będzie częścią  $\mathcal{M}$  znajdującą się odpowiednio nad i pod płaszczyzną  $L_t$ . Ponadto część  $\mathcal{M}_t^-$  odbitą względem  $L_t$  oznaczymy przez  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  – z nadzieją na równość  $\hat{\mathcal{M}}_t^- = \mathcal{M}_t^+$ , która kończyłaby dowód. Przeanalizujemy, jak ta konfiguracja zależy od  $t$ . Dla odpowiednio małych wartości  $t$  płaszczyzna  $L_t$  przebiega poniżej  $\mathcal{M}$ , w rezultacie  $\mathcal{M}_t^-$  i  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  są puste. Następnie dla pewnego zakresu  $t$



Rys. 2.  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  w dwóch fazach ruchu – tuż przed i tuż po krytycznym momencie

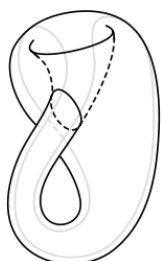


Rys. 3. Dwie możliwości  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  w krytycznym momencie

powierzchnia  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  znajduje się pod  $\mathcal{M}_t^+$ ; od teraz interesować nas będzie największa wartość  $t$ , dla której ma to miejsce.

Przypuśćmy, że w tym krytycznym momencie  $t$  powierzchnie  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  i  $\mathcal{M}_t^+$  się nie pokrywają. Zauważmy, że mają tę samą stałą średnią krzywiznę  $H$  oraz wspólny brzeg, mianowicie przecięcie  $\mathcal{M} \cap L_t$ . Ponadto  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  cały czas znajduje się poniżej  $\mathcal{M}_t^+$ , jest to jednak ostatni taki moment – rysunek 3 ilustruje dwie możliwości, jak może on wyglądać (zachęcam Czytelnika do uzasadnienia, że innych możliwości nie ma). W pierwszym przypadku  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$ ,  $\mathcal{M}_t^+$  mają wewnętrzny punkt wspólny, co jest wykluczone przez Lemat 3(a); w drugim zachodzi zgodność płaszczyzn stycznych w którymś z punktów brzegowych, co z kolei przeczy Lematowi 3(b).

Sprzeczność ta pokazuje, że dla tej szczególnej wartości  $t$  powierzchnie  $\hat{\mathcal{M}}_t^-$  i  $\mathcal{M}_t^+$  istotnie muszą się pokrywać, a więc  $L_t$  jest szukaną płaszczyzną symetrii  $\mathcal{M}$ . Jak już zauważyliśmy wcześniej, w takim przypadku  $L_t$  przechodzi przez środek ciężkości  $S$ , natomiast wybrany kierunek nie miał znaczenia dla dowodu.  $\square$



Rys. 4. Immersja butelki Kleina w  $\mathbb{R}^3$

Z ciekawymi problemami w matematyce często jest tak, że ich rozwiązanie stanowi bardziej początek niż koniec historii. Tak było i w tym przypadku – wprowadzona przez Aleksandrowa metoda ruchomych płaszczyzn znalazła zastosowanie w przeróżnych zagadnieniach, niekoniecznie w kontekście powierzchni o stałej średniej krzywiznie. Natomiast klasyfikacja takich powierzchni jest nadal aktywnie uprawianą dziedziną badań. Jednym z odgałęzień tej dziedziny jest dopuszczenie możliwych samoprzecięć, czyli rozważanie tak zwanych *powierzchni immersyjnych* (przykładem jest tzw. *butelka Kleina*). Rodzina możliwych rozwiązań tego typu okazuje się bogatsza, choć nie jest łatwo się o tym przekonać. Dopiero w 1984 Henry Wente skonstruował różny od sfery „immersyjny przykład” powierzchni o stałej, średniej krzywiznie – był to torus z samoprzecięciami.

## Czy przestępstwa można przewidzieć?

Patryk MIZIUŁA\*

\* deepsense.ai

Walka z przestępczością jest jednym z podstawowych zadań każdej władzy, od jej skuteczności zależy jakość życia obywateli. Nic więc dziwnego, że rozmaite instytucje publiczne starają się zaprzęgać do tego celu metody statystyczne i uczenie maszynowe. Opowiem tu pokrótce, jak wygląda w praktyce „maszynowe” przewidywanie przestępstw i czy daje zadowalające rezultaty. Skupię się na miastach Ameryki Północnej, ponieważ tam tego typu systemy są najbardziej rozwinięte. Aby uniknąć rozważań natury prawnej, przestępstwem będę dla uproszczenia nazywał każde złamanie prawa, niezależnie od tego, czy formalnie kwalifikuje się jako czyn zabroniony, wykroczenie czy przestępstwo.

### Co dokładnie chcemy przewidzieć?

Kiedy myślimy o przewidywaniu przestępstw, wielu z nas przychodzi na myśl film „Raport mniejszości”, oparty na opowiadaniu Philipa Dicka o tym samym tytule. Nazwisko przyszłego przestępcy było tam grawerowane na drewnianej kulce, a jej kolor określał typ niecnego czynu. Oczywiście w prawdziwym świecie możemy zapomnieć o tak dużej dokładności naszych prognoz. Warto natomiast spojrzeć na sprawę w sposób ilościowy – próbować przewidzieć, w jakich obszarach będzie miało miejsce najwięcej przestępstw, np. w ciągu tygodnia albo nawet miesiąca. Jeśli tam właśnie wyślemy dodatkowe patrole, być może zapobiegniemy największej liczbie przestępstw.

Jakie obszary się rozważa? Północnoamerykańskie miasta są formalnie podzielone na rewiry policyjne o takich rozmiarach, aby jeden funkcjonariusz mógł patrolować jeden rewir na piechotę. Prognozą może być wybranie „najgorszych” (o największej przestępczości) rewirów. Często też nakłada się na miasto regularną prostokątną siatkę o oczku o rozmiarach rzędu 100 m × 100 m (dosyć zgodną z układem ulic) i wskazuje „najgorsze” komórki. Można również nie narzucać żadnego odgórnego podziału i pozwolić algorytmom znaleźć nieregularne „najgorsze” obszary wedle ich uznania.

Jak zmierzyć jakość naszych przewidywań? W związku z niewielką liczbą policjantów wybrane fragmenty

miasta muszą być jego małą częścią (łącznie ok. 1%), tak aby do każdego z nich rzeczywiście można było skierować patrol. Dlatego nie ma sensu np. sprawdzanie, jaki procent przestępstw „trafił się”, gdyż wartość takiej funkcji możemy zwiększać przez wskazywanie coraz większych obszarów. Przykładem funkcji wolnej od tej wady jest tzw. wskaźnik dokładności prognozowania dany wzorem

$$\frac{n/N}{a/A},$$

gdzie:

- $n$  to łączna liczba przestępstw popełnionych w wybranych obszarach,
- $N$  to liczba przestępstw popełnionych w całym mieście,
- $a$  to łączna powierzchnia wybranych obszarów,
- $A$  to powierzchnia miasta.

Musimy jednak przyjąć dolne ograniczenie dla  $a$ , inaczej algorytm zapewne wskaże obszar o powierzchni rzędu 1 m<sup>2</sup>, który policji do niczego się nie przyda.

### Czym się kierować?

Amerykańskie miasta za darmo udostępniają w Internecie aktualne pełne wykazy popełnionych przestępstw wraz z datami i współrzędnymi. Możemy zatem swobodnie pracować z kompletnymi danymi historycznymi. To komfortowa sytuacja. W tym miejscu należy wspomnieć, że polska policja, niestety, nie jest uprawniona do ujawniania tego typu danych.

Czym jeszcze możemy się kierować przy przewidywaniu przestępstw? Co może wpływać na przyszłe przestępstwa, ale nie być „zakodowane” w danych historycznych? Moim zdaniem tylko przyszłe wydarzenia. Ale czy można je przewidzieć łatwiej niż same przestępstwa? Niektórzy decydują się na użycie w swoich modelach dodatkowych danych demograficznych: struktury narodowości, wieku, wykształcenia, zarobków itp. w poszczególnych częściach miasta. Istnieją prace próbujące wyłuskać przydatne informacje ze zdjęć z Google Maps czy z wiadomości na Twitterze. Korzysta się też z prognoz pogody. Podstawowym źródłem informacji pozostają jednak dane historyczne.

### Jak to zrobić?

Kiedy zastanawiamy się, w jaki sposób przewidywać przyszłe przestępstwa, pierwszy pomysł brzmi: po prostu zliczmy historyczne przestępstwa w poszczególnych rewirach czy komórkach i wskaźmy te z najgorszą przeszłością. Co ciekawe, tak proste (i pesymistyczne) podejście może być skuteczne! Pozwoliło ono zespołowi *deepsense.ai* wygrać w 2017 roku konkurs na najlepszą prognozę przestępstw w mieście Portland w stanie Oregon.

W naszym algorytmie stworzonym na potrzeby konkursu nieco podrasowaliśmy powyższą ogólną ideę. Historyczne przestępstwa należy ważyć: przestępstwo popełnione wczoraj jest „ważniejsze” od mającego miejsce kilka lat temu, przestępstwo popełnione rok temu o tej samej

porze jest „ważniejsze” od popełnionego w innym miesiącu poprzedniego roku. Jeśli przestępstwo zostało popełnione metr od (sztucznej) granicy rewiru/komórki, być może pociągnie za sobą kolejne tuż za tą granicą. Na pytanie, jak istotne są takie efekty starzenia się, sezonowości i „promieniowania” przestępstw, odpowiedzieliśmy w sposób charakterystyczny dla uczenia maszynowego: pozwoliliśmy algorytmowi samemu skalibrować ich znaczenie.

Oczywiście z sukcesami przewiduje się przestępstwa również przy użyciu bardziej wyrafinowanych metod statystycznych. Opowiem tutaj o jednej z nich. Skupmy się na włamaniach. Charakteryzują się one dwiema cechami: są bardzo rzadkie (ok. 20 tygodniowo w Portland) oraz włamywacze często wracają do poprzednio okradzionego mieszkania lub odwiedzają jego najbliższą okolicę (ponieważ znają już teren). Podobnie „zachowują się” wstrząsy sejsmiczne: są rzadkie oraz pierwszemu wstrząsowi towarzyszą zwykle wstrząsy wtórne. Dlatego przeszczepia się metody sejsmologiczne na grunt przewidywania włamań.

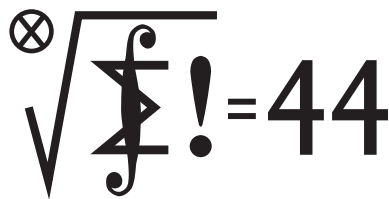
Trzęsienia ziemi modeluje się za pomocą tzw. samonapędzających się czasoprzestrzennych procesów punktowych. Działają one tak, że domyślne prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia (wstrząsu) w danym miejscu w danej chwili jest niskie, ale jeśli już zdarzenie nastąpi, prawdopodobieństwo, że powtórzy się za chwilę w tym samym miejscu, znacznie wzrasta. Przy tworzeniu modelu trzeba uważać, żeby nie napędzał się za bardzo, inaczej „wybuchnie” – będzie wskazywał, że w danym miejscu zdarzenie nastąpi w każdej przyszłej chwili. Opierające się na tego typu metodach systemy przewidywania włamań charakteryzują się wysoką jakością.

### Czy to naprawdę działa?

Automatyczne systemy przewidywania przestępstw funkcjonują w wielu amerykańskich miastach, zostały również wdrożone m.in. w aglomeracjach Wielkiej Brytanii, Holandii czy Chin. Spełniają tam swoją rolę – redukują przestępczość. Na przykład po uruchomieniu takiego systemu liczba włamań w mieście Santa Cruz w Kalifornii spadła o 20%. Tego typu rozwiązania bywają jednak przyjmowane przez policjantów niechętnie. Myślę, że przede wszystkim dlatego, że nie obejmują wszystkich sytuacji. Nie nadają się np. w przypadku, kiedy wszyscy wiedzą, że sprawcą włamań czy zniszczeń mienia w okolicy jest dopiero co wypuszczony na zwolnienie warunkowe recydywista i złapanie go na gorącym uczynku jest tylko kwestią czasu i włożonych sił.

Miejmy nadzieję, że ścisła współpraca instytucji publicznych ze statystykami i osobami parającymi się uczeniem maszynowym pozwoli na zwiększenie skuteczności systemów przewidujących przestępstwa i bardziej entuzjastyczne używanie ich przez policjantów. I miejmy też nadzieję, że ceną za to nie będzie inwigilacja obywateli przypominająca tę z „Raportu mniejszości”.

# Klub 44



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 771 ( $WT = 2,91$ ) i 772 ( $WT = 1,57$ ) z numeru 12/2018

|                        |           |       |
|------------------------|-----------|-------|
| Marcin Małogrosz       | Warszawa  | 48,12 |
| Michał Adamaszek       | Kęty      | 44,23 |
| Franciszek S. Sikorski | Warszawa  | 40,74 |
| Witold Bednarek        | Łódź      | 39,79 |
| Paweł Najman           | Kraków    | 38,58 |
| Paweł Kubit            | Kraków    | 38,09 |
| Jerzy Cisło            | Wrocław   | 37,86 |
| Krzysztof Kamiński     | Pabianice | 37,32 |
| Michał Koźlik          | Gliwice   | 35,73 |

Oto i dzień Weteranów Klubu 44 M. Pan Marcin Małogrosz – po swej trzeciej ukończonej kolejce – jest Weteranem trzydziestym dziewiątym. Zaś pan Michał Adamaszek (Weteran od dawna) właśnie zalicza czwartą kolejkę.

**777.** Punkt przecięcia prostych  $CA$  i  $KM$  oznaczmy przez  $N$ , a punkt przecięcia prostych  $AP$  i  $KL$  – przez  $S$ . Przyjmijmy ponadto oznaczenia:  $x = |AL| = |AM|$ ,  $y = |BM| = |BK|$ ,  $z = |CK| = |CL|$  (więc  $x < y$ ,  $x < z$ );  $w = |AN|$ . Dzięki równoległości  $CP \parallel LK$  mamy podobieństwa  $\triangle NCP \sim \triangle NLK$ ,  $\triangle ACP \sim \triangle ALS$ , z których wynikają proporcje

$$\frac{|CP|}{|LK|} = \frac{|NC|}{|NL|} = \frac{w+x+z}{w+x}, \quad \frac{|CP|}{|LS|} = \frac{|AC|}{|AL|} = \frac{x+z}{x}.$$

Zadanie sprowadza się do wykazania, że  $|LK| = 2 \cdot |LS|$ , czyli że

$$\frac{w+x+z}{w+x} = \frac{x+z}{2x}.$$

Twierdzenie Menelausa (dla trójkąta  $ABC$  przeciętego prostą  $KM$ ) daje równość

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CN|}{|NA|} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{w+x+z}{w} = 1.$$

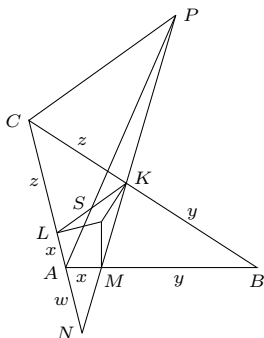
Z niej kolejno wyznaczamy

$$w = \frac{x(z+x)}{z-x}, \quad w+x = \frac{2xz}{z-x}$$

i otrzymujemy

$$\frac{w+x+z}{w+x} = 1 + \frac{z}{w+x} = 1 + \frac{z-x}{2x} = \frac{x+z}{2x}.$$

czyli to, o co chodziło.



## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Rozwiązania zadań z numeru 3/2019

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

**777.** W trójkącie  $ABC$  bok  $BC$  jest najdłuższy. Okrąg wpisany jest styczny do boków  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  odpowiednio w punktach  $K$ ,  $L$ ,  $M$ . Na prostej  $KM$  leży taki punkt  $P$ , że odcinki  $PC$  oraz  $KL$  są równoległe. Dowieść, że prosta  $AP$  przechodzi przez środek odcinka  $KL$ .

**778.** Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych  $x, y, z$  spełniające równanie

$$(x+y+z)^2 = 2(x^2+y^2+z^2)$$

wraz z warunkiem  $NWD(x, y, z) = 1$ .

**778.** Z tożsamości

$$(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 = 2(x^2+y^2+z^2) + 4xy$$

wynika, że zadane równanie jest równoważne następującemu:

$$(1) \quad (x+y-z)^2 = 4xy.$$

Jest też równoważne każdemu z dwóch równań uzyskanych przez cykliczne przestawienie zmiennych w (1). Jeśli więc liczby całkowite  $x, y, z$  spełniają warunki zadania, to iloczyny  $xy, yz, zx$  są nieujemne, co oznacza, że liczby  $x, y, z$  są wszystkie nieujemne lub wszystkie niedodatnie.

Weźmy przypadek, gdy  $x, y, z \geq 0$ . Ze związku (1) (oraz warunku, że  $x, y, z$  nie mają wspólnego dzielnika  $> 1$ ) wynika, że  $x = a^2, y = b^2$  dla pewnej pary liczb całkowitych  $a, b \geq 0$ , względnie pierwszych. Przepisujemy (1) jako  $a^2 + b^2 - z = \pm 2ab$ , czyli  $z = (a \pm b)^2$ .

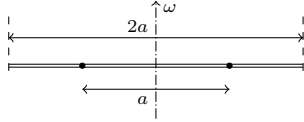
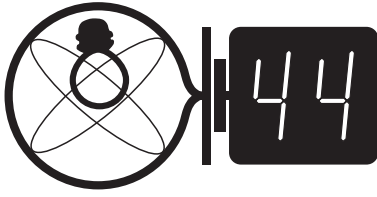
Uwzględniając pominięty przypadek, gdy  $x, y, z \leq 0$ , widzimy, że trójka  $(x, y, z)$  ma postać

$$(2) \quad (\pm 1) \cdot (a^2, b^2, (a \pm b)^2);$$

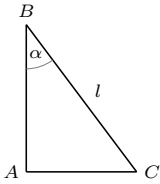
$$a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad NWD(a, b) = 1.$$

Na odwrót, jeśli trójka liczb całkowitych  $x, y, z$  ma taką postać (więc  $x = \varepsilon a^2, y = \varepsilon b^2, z = \varepsilon(a + \varepsilon' b)^2$ ;  $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$ ), wówczas spełnione jest równanie (1) (równoważne wyjściowemu), zaś liczby  $x, y, z$  są względnie pierwsze. Wzór (2) przedstawia więc ogólne rozwiązanie postawionego zagadnienia. [Można sformułować tę odpowiedź w formie bardziej symetrycznej, pisząc, że liczby  $x, y, z$ , po ewentualnej jednoczesnej zmianie znaku, są kwadratami trzech względnie pierwszych liczb całkowitych, z których jedna jest sumą dwóch pozostałych].

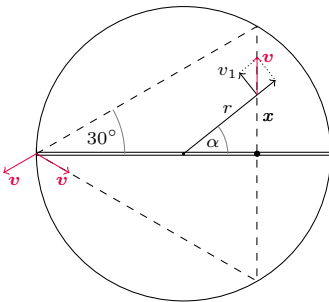
Przypominamy treść zadań:



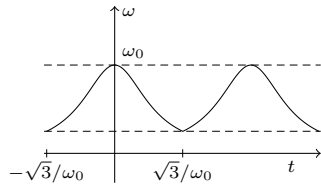
Rys. 1



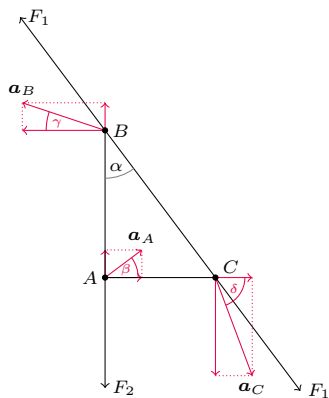
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

**674.** Nieważki poziomy pręt o długości  $2a$  może obracać się swobodnie wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek (rys. 1). Na pręt nawleczone są dwie jednakowe kulki, które mogą przemieszczać się wzdłuż pręta bez tarcia i odbijać się sprężysto od odbojników na jego końcach. Na początku kulki umocowane są w odległościach  $a/2$  od osi obrotu. Pręt rozkręcono do prędkości kątowej  $\omega_0$ , po czym kulki jednocześnie oswobodzono. Po jakich torach będą poruszać się kulki? Po jakim czasie pręt wykona pełny obrót? Jaka jest zależność prędkości kątowej pręta od czasu? Rozmiary kulek są dużo mniejsze od długości pręta.

**675.** Trzy jednakowe naładowane kulki połączone są nieprzewodzącymi niciami, które tworzą trójkąt prostokątny  $ABC$  (rys. 2). Kąt  $ABC$  jest równy  $\alpha$ , bok  $BC$  ma długość  $l$ . Z jakimi przyspieszeniami zaczną poruszać się kulki po przecięciu nici  $BC$ ? Masa kulki jest równa  $m$ , ładunek każdej z nich wynosi  $q$ . Sił ciężkości nie uwzględniamy.

**674.** Dzięki symetrii początkowych położenia i prędkości, kulki przez cały czas znajdować się będą w punktach symetrycznie położonych względem osi obrotu oraz będą miały symetryczne prędkości. Ponieważ pręt jest nieważki, nie występują siły prostopadłe do niego, leżące w płaszczyźnie poziomej. Nie ma tarcia, wobec tego wzdłuż pręta na kulki również nie działają żadne siły i między kolejnymi zderzeniami z końcami prętów kulki poruszają się względem Ziemi ruchem jednostajnym prostoliniowym (rys. 3) z prędkością  $v = \omega_0 a/2$ . Podczas zderzenia z odbojnikiem składowa pędu kulki prostopadła do pręta nie zmienia się. Zderzenie jest sprężyste, zatem kąty padania i odbicia są sobie równe i wynoszą  $\pi/6$ . Torom ruchu każdej z kulek jest trójkąt równoboczny o boku  $l = a\sqrt{3}$ . Pręt wykona pełny obrót w czasie  $T = 3l/v = 6\sqrt{3}/\omega_0$ . Prędkość kątowa pręta dana jest wzorem  $\omega = v_1/r$ , promień  $r$  spełnia równanie  $r^2 = a^2/4 + x^2$ , gdzie  $x = vt$ , a  $v_1$  jest składową prędkości  $v$  prostopadłą do promienia. Z rysunku 3 widać, że zachodzi związek  $v_1/v = a/(2r)$ . Szukana zależność prędkości kątowej pręta od czasu dana jest wzorem

$$\omega = \frac{\omega_0}{(1 + \omega_0^2 t^2)} \quad \text{dla } -\sqrt{3}/\omega_0 \leq t \leq \sqrt{3}/\omega_0.$$

W chwili  $t = \sqrt{3}/\omega_0$  następuje zderzenie z odbojnikiem i cykl się powtarza (rys. 4).

**675.** Wprowadźmy prostokątny układ współrzędnych  $XY$  jak na rysunku 5. Ponieważ kulki  $A$  i  $C$  połączone są nicią, mają wzdłuż osi  $X$  jednakowe przyspieszenia. Na układ tych kulek działają siły  $F_1$  i  $F_2$ .  $F_1$  jest siłą oddziaływania elektrycznego między kulkami  $B$  i  $C$ ,  $F_2$  jest wypadkową siły Coulomba między kulkami  $A$  i  $B$  oraz siły naprężenia nici  $AB$  i nie ma składowej wzdłuż osi  $X$ . Równanie ruchu układu wzdłuż osi  $X$  ma postać:

$$2ma_x = F_1 \sin \alpha,$$

stąd rzuty przyspieszeń kulek  $A$  i  $C$  na oś  $X$  są równe

$$a_x^A = a_x^C = a_x = \frac{kq^2}{2ml^2} \sin \alpha,$$

gdzie  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Analogicznie dla układu kulek  $A$  i  $B$ , również połączonych nicią,

$$a_y^A = a_y^B = a_y = \frac{kq^2}{2ml^2} \cos \alpha.$$

Wartość przyspieszenia kulki  $A$  jest równa:

$$a^A = \sqrt{(a_x^A)^2 + (a_y^A)^2} = \frac{kq^2}{2ml^2}.$$

Wektor  $a^A$  tworzy z osią  $X$  kąt  $\beta$  taki, że  $\text{tg } \beta = a_y^A/a_x^A = \text{ctg } \alpha$ . Równanie ruchu kulki  $B$  w kierunku osi  $X$  ma postać  $ma_x^B = F_1 \sin \alpha$ . Stąd:

$$a^B = \frac{kq^2}{2ml^2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha} \quad \text{i} \quad \text{tg } \gamma = \frac{1}{2} \text{ctg } \alpha.$$

Analogicznie dla kulki  $C$  otrzymujemy:  $a_y^C = F_1 \cos \alpha/m$ ,

$$a^C = \frac{kq^2}{2ml^2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha} \quad \text{i} \quad \text{tg } \delta = 2 \text{ctg } \alpha.$$

## Prosto z nieba: Kokon czy struga?

W sierpniu 2017 roku detektory LIGO i Virgo zarejestrowały fale grawitacyjne powstałe podczas zderzenia się dwóch gwiazd neutronowych. Gwiazdy neutronowe to bardzo gęste obiekty o masie porównywalnej do masy Słońca, ale o średnicy przeciętnego miasta ( $\sim 10$  km), a przez to gęstsze od jąder atomowych. Zderzenie nastąpiło w odległości „jedyń” 130 milionów lat świetlnych od naszej Galaktyki (40 milionów parseków), w konstelacji Hydry.

Poza emisją fal grawitacyjnych zaobserwowano również emisję światła, co potwierdziło naukowe teorie, które były przedmiotem dyskusji przez dziesiątki lat – wskazujące na związek zderzeń gwiazd neutronowych z potężnymi i tajemniczymi eksplozjami: błyskami gamma. Po zapadnięciu się układu podwójnego ogromna ilość materii zostaje wyrzucona w przestrzeń, tworząc gorącą chmurę. Astronomowie obserwowali to zdarzenie w całym spektrum elektromagnetycznym, od promieni gamma (zarejestrowany został wspomniany wcześniej tzw. krótki błysk gamma) przez promieniowanie rentgenowskie do światła widzialnego i fal radiowych. Dwieście dni po zderzeniu połączone obserwacje z radioteleskopów w Europie, Afryce, Azji, Oceanii i Ameryce Północnej potwierdziły istnienie strugi promieniowania radiowego (*dżetu radiowego*) wylaniającego się z pozostałości po kosmicznej kolizji.

Obserwatorzy spodziewali się, że część materii zostanie wyrzucona w formie dżetu prostopadle do płaszczyzny orbity układu, ale nie było oczywiste, czy ów dżet przebiję się przez otaczającą materię. Istnieją bowiem dwa konkurencyjne scenariusze: w pierwszym przypadku dżet nie może się przebić i zamiast tego generuje rozszerzającą się wokół pozostałości „bańkę” (kokon), w drugim dżet skutecznie penetruje otoczkę, a następnie rozprzestrzenia się dalej w przestrzeni kosmicznej w postaci wąskiej strugi. Tylko bardzo czułe obserwacje radiowe o bardzo wysokiej rozdzielczości pozwalają na weryfikację tych hipotez. Kluczową techniką jest interferometria wielkobazowa (*Very Long Baseline Interferometry*, VLBI), która pozwala łączyć dane z radioteleskopów umieszczonych w różnych miejscach na świecie: wykorzystano trzydzieści trzy radioteleskopy z europejskiej sieci VLBI (łącznie teleskopy z Hiszpanii, Wielkiej Brytanii, Holandii, Niemiec, Włoch, Szwecji, Polski, Łotwy, RPA, Rosji i Chin), e-MERLIN w Wielkiej Brytanii, Australian Long Baseline Array w Australii i Nowej Zelandii oraz Very Long Baseline Array w USA.

Obraz stworzony przez połączenie danych globalnej sieci obserwatoriów ma rozdzielczość porównywalną z rozdzielczością, z jaką widzielibyśmy człowieka na powierzchni Księżyca, obserwując go z Ziemi. W tej samej analogii, rozszerzająca się bańka miałaby rozmiar ciężarówki, dużo większy niż przebijający się z sukcesem dżet. Obserwacje wskazują zatem raczej na ten drugi scenariusz.

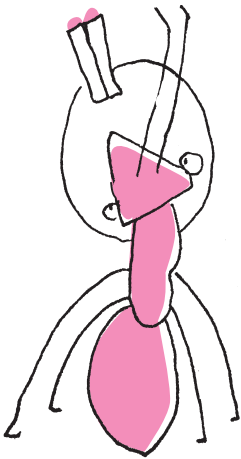
Astronomowie ustalili, że dżet zawiera tyle energii, ile wyprodukowały wszystkie gwiazdy w naszej Galaktyce w ciągu jednego roku. Energia ta jest zawarta w obszarze o średnicy mniejszej niż jeden rok świetlny. W nadchodzących latach zostanie odkrytych wiele podobnych zderzeń gwiazd neutronowych; połączenie obserwacji fal grawitacyjnych i elektromagnetycznych pozwoli jeszcze lepiej badać procesy zachodzące podczas i po tych niezwykle katastrofach.

Michał BEJGER

## Niebo w lipcu

Zaczęła się druga połowa 2019 roku. Lipiec to pierwszy miesiąc z wyraźnie skraccjącymi się dniami i wydłużającymi nocami. W trakcie miesiąca Słońce przejdzie przez gwiazdozbiór Bliźniąt, kończąc lipiec w środku gwiazdozbioru Raka, obniżając przy tym deklinację z 23 do 18°. Wskutek tego dzień skróci się o ponad godzinę, do 15,5 godziny ostatniego dnia miesiąca. Na początku lipca nasza planeta przechodzi przez aphelium, a więc najdalej od Słońca położony punkt

swojej orbity, w związku z czym jego średnica kątowna jest najmniejsza w całym roku i Księżycowi najłatwiej je zasłonić. Również ilość docierającego ze Słońca promieniowania jest najmniejsza. Jednakże 5 mln km (o tyle zmienia się odległość Ziemi od Słońca w ciągu roku) to na tyle niewielki ułamek wielkiej półosi orbity naszej planety, że różnica ta nie ma wpływu na pory roku; liczy się tylko nachylenie osi obrotu Ziemi w kierunku Słońca. Gdy do Słońca nachylony jest biegun północny





Ziemi, wtedy mamy wiosnę i lato, gdy południowy – jesień i zimą.

Pod koniec lipca kończy się w Polsce sezon na zjawiska łuku okołohoryzontalnego i obłoków srebrzystych. Obszar widoczności pierwszego z nich przesuwają się na południe, drugiego – na północ. W lipcu wyraźnie pogarsza się nachylenie ekliptyki do wieczornego zachodniego widnokładu i jednocześnie tak samo poprawia się jej nachylenie do wschodniej części nieboskłonu przed świtem. Stąd w drugiej połowie lata i jesienią planety wewnętrzne wieczorem widoczne są słabo, albo wcale, nawet jeśli są w swoich maksymalnych elongacjach, a rano – odwrotnie: można je obserwować nawet kilka-kilkanaście dni po ich spotkaniach ze Słońcem, zwłaszcza jeśli są nad ekliptyką.

W lipcu planety wewnętrzne są albo za blisko Słońca, albo nachylenie ekliptyki jest niekorzystne i wszystkie giną w zorzach wieczornych i porannych. Widoczne są za to wszystkie planety zewnętrzne. Jowisz jest miesiąc po opozycji, Saturn zaś znajdzie się 9 lipca po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce, a zatem obie planety są bliskie swoich maksymalnych jasności i rozmiarów, świecąc przez całą albo większą część nocy, kreśląc pętle w odległości jakichś 30° od siebie. Obie planety poruszają się ruchem wstecznym. Jowisz wędruje przez gwiazdozbiór Wężownika i w lipcu pokona w ten sposób ponad 2°, gdyż zwalnia już swój ruch względem gwiazd tła, szykując się do zmiany kierunku ruchu w pierwszej połowie sierpnia. Niewiele mniej przesuwa się w lipcu Saturn, poruszając się teraz z maksymalną prędkością kątową przez wschodnią część Strzelca. Do końca miesiąca Saturn zbliży się na około 40' do świecącej blaskiem +3,8<sup>m</sup> gwiazdy o Sgr. Jasność Jowisza do końca lipca spadnie do -2,4<sup>m</sup>, a jego tarcza skurczy się do 43'', natomiast Saturn świeci z jasnością +0,1<sup>m</sup>, mając tarczę o średnicy 18''.

Księżycy obu planet można obserwować przy użyciu lornetek i teleskopów. W przypadku Jowisza są to cztery tzw. księżycy galileuszowe: Io, Europa, Ganimedes i Kallisto (wg wzrastającej odległości od planety macierzystej). Wszystkie mają jasności między 4,8 a 5,8 magnitudo i gdyby nie bliskość bardzo jasnego Jowisza, mogłyby być widoczne gołym okiem. Okresy orbitalne wynoszą odpowiednio: Io – 1,8 dnia (ziemskiego), Europa – 3,6 dnia, Ganimedes – 7,2 dnia, Kallisto – 16,7 dnia. Jak łatwo zauważyć, są one w rezonansie ze sobą, a ich konfiguracje zmieniają się całkiem szybko. Io oddala się maksymalnie na 2' od Jowisza (3 średnice planety), Europa – na 3,5' (5 średnic), Ganimedes – na 5,5' (ponad 7 średnic), a Kallisto – na 10' (14 średnic). W przypadku Saturna jego największy księżyc Tytan jest wyraźnie jaśniejszy od pozostałych księżyców, świecąc blaskiem +8,5<sup>m</sup>, pozostałe są o co najmniej 1,5<sup>m</sup> słabsze. Tytan oddala się od Saturna maksymalnie na 3', czyli na 10 średnic swojej planety macierzystej, i wtedy jest dostrzegalny przez lornetkę. Jednak w ostatnich latach, ze względu na lato na północnej półkuli Saturna, jego północna część jest nachylona w naszym kierunku. Stąd księżycy Saturna nie chowają się za tarczę planety, a sam Tytan nie zbliża się bardziej do Saturna niż na 1' (4 średnice planety), okrążając ją raz na 16 dni.

Ostatnie dwie planety można obserwować w drugiej części nocy. Neptun także porusza się ruchem wstecznym na tle gwiazdozbioru Wodnika, na północny wschód od gwiazdy 4. wielkości  $\varphi$  Aquarii. Do końca miesiąca Neptun zbliży się do niej na 1°, sam świecąc blaskiem +7,9<sup>m</sup>. W najciemniejszej części nocy planeta zajmuje pozycję na wysokości około 20° nad południowo-wschodnią częścią nieboskłonu. Planeta Uran swoją pętlę kreśli na tle gwiazdozbioru Barana, niecałe 50° na północny wschód od Neptuna. Uran porusza się w lipcu ruchem prostym, kreśląc swą pętlę około 11° pod Hamalem, najjaśniejszą gwiazdą konstelacji. W tym sezonie obserwacyjnym w bezpośredniej bliskości Urana nie ma gwiazd o porównywalnej lub większej jasności, które mogłyby ułatwić odnalezienie planety, której blask wynosi +5,8<sup>m</sup>. Na razie Uran wznosi się nisko, mniej więcej 10° około północy, lecz w sierpniu jego warunki obserwacyjne znacznie się poprawią.

Oczywiście wszystkie widoczne planety będzie odwiedzał Księżyc. Naturalny satelita Ziemi zacznie miesiąc od nowiu i całkowitego zaćmienia Słońca 2 lipca. Zjawisko zajdzie jednak daleko od Polski, na południowym Pacyfiku. W kolejnych dniach Księżyc przemieści się na niebo wieczorne, gdzie pokaże się nisko nad horyzontem, wznosząc się nieco wyżej dopiero pod koniec miesiąca. Już 5 lipca sierp Księżyca w fazie 12% dotrze na 6° do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa, natomiast 9 lipca przejdzie przez I kwadrę i jednocześnie 7° na północ od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny. Cztery dni później, przy fazie zwiększonej do 91%, Księżyc minie Jowisza w odległości 1,5°, a 15 i 16 lipca spotka się z Saturnem. Również 15 lipca Księżyc w fazie 99% pokaże się 6° na zachód od Saturna, dobę później, w fazie 100% pojawi się 7° na wschód.

Warto zapamiętać szczególnie tę drugą datę, gdyż tego dnia Srebrny Glob zahaczy o cień Ziemi i da się to dostrzec z Polski. Niestety, nie będzie to zaćmienie całkowite, lecz częściowe, o dość dużej fazie, bo 65%. Zaćmienie zacznie się od wejścia Księżyca w półcień Ziemi jeszcze przed jego wschodem w naszym kraju, lecz najciekawsza część zjawiska będzie widoczna z Polski w całości. Zaćmienie częściowe zacznie się około godziny 22, a faza maksymalna nastąpi 1,5 godziny później, pół godziny przed górowaniem Księżyca. Oprócz Saturna w dalszej odległości towarzyszący Księżycowi dotrzyma Altair, najjaśniejsza gwiazda Orła. Faza częściowa skończy się około 1 w nocy.

Księżyc powędruje dalej i 20 lipca, w fazie zmniejszonej do 85% zbliży się na 7° do Neptuna, a 5 dni później przejdzie przez ostatnią kwadrę i jednocześnie spotka się z Uranem, zbliżając się doń na 8°. Na cztery dni przed końcem miesiąca sierp Księżyca w fazie 30% znajdzie się 10° pod Plejadami, zaś dobę później, w fazie zmniejszonej do 21%, przejdzie 1,5° od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka. Natomiast jeszcze kolejnego ranka jego cienki już sierp (13%) dotrze na niecały stopień do gwiazdy  $\zeta$  Tauri, czyli południowego rogu Byka.

*Ariel MAJCHER*

## Człowiek, który zrozumiał Wszechświat

Kiedy fizycy teoretycy obliczają prawdopodobieństwo oddziaływania cząstek, mogą zamiast cząstki znikającej podczas tego oddziaływania rozważać pojawiającą się antycząstkę o energii i składowych pędu przeciwnego znaku niż odpowiednie wielkości opisujące znikającą cząstkę – wynik wyjdzie ten sam.

Przy zderzeniach cząstek w akceleratorach produkowanych jest wiele cząstek potomnych. Nawet zwięzły opis własności tych cząstek zajmuje całą książkę. A jednak w tym gąszczu danych można dostrzec pewne prawidłowości. Podobnie jak pierwiastki można pogrupować z uwagi na ich własności w układ okresowy, także i cząstki elementarne można ułożyć myślowo w powtarzalną strukturę, wykorzystując dział matematyki zwany teorią grup. Struktury te nazywa się fachowo multipletami. Masę cząstek w ramach jednego multipletu można określić, znając inne własności oddziaływania tych cząstek.

Niezależnie od wewnętrznej budowy cząstek zasady teorii grup pozwalają na określenie relacji pomiędzy oddziaływaniem różnych cząstek w ramach tak wyodrębnionych multipletów. W ten sposób można przewidzieć, jakie są oddziaływania określonych cząstek, zanim jeszcze cząstki te zostaną odkryte. W szczególności niektóre cząstki są „dziwne” – zarówno dosłownie, jak i w nomenklaturze fizyków cząstek – gdyż żyją znacznie dłużej niż inne, bo rozpadają się wskutek oddziaływań słabych.

Cząstki oddziałujące silnie zbudowane są z kwarków. Ściślej rzecz biorąc, i wykluczając przypadki egzotyczne, cząstki te mogą być układami trzech kwarków lub układami kwark-antykwar. Samo słowo „kwark” jest mistrzowskim przykładem udanego słowotwórstwa naukowego – jest krótkie i dynamiczne, zaciekawia, a zarazem erudytom może kojarzyć się z trudno czytającą się zwykłemu zjadaczowi literatury powieścią Jamesa Joyce’a.

W przyrodzie występują różne rodzaje kwarków. Najpowszechniejsze są kwarki górny i dolny: w uproszczeniu, proton to układ dwóch kwarków górnych i dolnego, a neutron – dwóch dolnych i górnego. Każdy kwark może istnieć w jednym z trzech stanów, nazwanych pocieszenie kolorami. Umożliwia to kwarkom oddziaływanie między sobą. Teorią opisującą oddziaływania kwarków jest chromodynamika kwantowa.

Znając oddziaływania cząstek zderzających się z niewielkimi energiami, można przewidywać prawdopodobieństwo oddziaływania cząstek o znacznie większych energiach. Podobnie znajomość oddziaływań przy wielkich energiach pozwala przewidywać zachowanie cząstek niskoenergetycznych.



Murray Gell-Mann  
(autor zdjęcia: Joichi Ito, CC BY 2.5  
[commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2508061](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2508061))

Neutrino mają bardzo małe masy, tak maleńkie, że nie potrafimy ich zmierzyć, możemy tylko podawać wywiedzione z doświadczeń górne ograniczenia. Eleganckim wyjaśnieniem tego faktu jest możliwość, że w oddziaływaniach zapewniających masy neutrin biorą udział bardzo ciężkie cząstki, co znacznie zmniejsza prawdopodobieństwo takiego oddziaływania – a w konsekwencji także i masę neutrin.

Podane wyżej wyliczenie osiągnięć nie zostało przygotowane jako bryk z historii dwudziestowiecznej teorii cząstek elementarnych... Wielu fizyków marzyłoby o choćby jednym wyniku tej rangi, tymczasem wszystkie one są rezultatem pracy naukowej jednego człowieka.

Murray Gell-Mann, jeden z nielicznych uczonych, do którego można na serio zastosować tytuł niniejszej notki, zmarł w maju tego roku w wieku 89 lat.

*Krzysztof TURZYŃSKI*



# Trzy rodzaje indukcji matematycznej

Bartłomiej BZDEGA

Dodając obustronnie  $n + 1$  do równości  $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ , dowodzimy implikacji

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{T(n)} = \frac{1}{2}n(n + 1) \Rightarrow \underbrace{1 + 2 + \dots + (n + 1)}_{T(n+1)} = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2).$$

Zwróćmy uwagę, że druga równość jest analogiczna do pierwszej, z tą jedynie różnicą, że każde  $n$  zostało zastąpione przez  $n + 1$ . To tłumaczy nazwy  $T(n)$  i  $T(n + 1)$ , które zostały tym równościom nadane.

Zauważmy, że  $T(1)$  jest równością prawdziwą:  $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ . Wyżej udowodniona implikacja dla  $n = 1$  ma postać  $T(1) \Rightarrow T(2)$ , zatem i równość  $T(2)$  jest prawdziwa. Następnie biorąc  $n = 2$ , wnioskujemy prawdziwość  $T(3)$  i tak dalej, przez cały zbiór liczb naturalnych. To oznacza, że  $T(n)$  jest zdaniem prawdziwym dla każdego naturalnego  $n$ .

Powyższe rozumowanie jest przykładem dowodu przez indukcję. Ogólniej, *zasada indukcji matematycznej* mówi, że jeśli chcemy wykazać prawdziwość jakiegoś stwierdzenia  $T(n)$  dla wszystkich liczb naturalnych  $n \geq n_0$  (zwykle  $n_0 = 1$ ), to wystarczy udowodnić  $T(n_0)$  (baza indukcji), a następnie dla wszystkich naturalnych  $n \geq n_0$  dowieść, że  $T(n) \Rightarrow T(n + 1)$  (krok indukcji; stwierdzenie  $T(n)$  nazywamy tu założeniem indukcyjnym, a  $T(n + 1)$  – tezą indukcyjną).

Przedstawiamy poniżej jeszcze dwa rodzaje indukcji. Indukcję o głębokości  $d > 1$  stosujemy w zadaniach 3 i 8, a silną indukcję w zadaniach 9 i 10.

**Indukcja o głębokości  $d$ .** Bazą indukcji stanowią stwierdzenia  $T(n_0), T(n_0 + 1), \dots, T(n_0 + d - 1)$ , a w kroku indukcyjnym dowodzimy implikacji  $T(n) \wedge T(n + 1) \wedge \dots \wedge T(n + d - 1) \Rightarrow T(n + d)$  dla  $n \geq n_0$ .

**Silna indukcja.** Bazą jest stwierdzenie  $T(n_0)$ , a krokiem indukcyjnym  $T(n_0) \wedge T(n_0 + 1) \wedge \dots \wedge T(n - 1) \Rightarrow T(n)$  dla  $n > n_0$ .

**Zadania.** (Uwaga. Przyjmujemy, że 0 nie jest liczbą naturalną.)

- Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Udowodnić przez indukcję, że:
  - $3^n + 4^n < 5^n$  dla  $n \geq 3$ ,
  - $12 \mid 7^n + 6n - 1$ .
- Udowodnić nierówność Bernoulliego:  $(1 + x)^n > 1 + nx$  dla wszystkich liczb rzeczywistych  $x \geq -1$  i liczb naturalnych  $n$ .
- Wiadomo, że  $a_1 = 5, a_2 = 13$  oraz  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$  dla  $n \geq 1$ . Wykazać, że  $a_n = 2^n + 3^n$  dla wszystkich naturalnych  $n$ .
- Dowieść, że  $n \geq 1$  różnych okręgów dzieli płaszczyznę na co najwyżej  $n^2 - n + 2$  obszarów.
- Nazwijmy L-ką figurę złożoną z trzech kwadratów jednostkowych, w kształcie litery L. Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Udowodnić, że szachownicę o wymiarach  $2^n \times 2^n$  z jednym usuniętym polem można rozciąć na L-ki.
- Udowodnić małe twierdzenie Fermata:  $p \mid n^p - n$  dla każdej liczby pierwszej  $p$  i liczby naturalnej  $n$ .
- Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Dowieść, że istnieje  $n$ -cyfrowa wielokrotność liczby  $2^n$ , w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 1 i 2.
- Wykazać, że dla  $n \geq 7$  możemy tak umieścić w wierzchołkach  $n$ -kąta foremnego różne liczby od 1 do  $n$ , by wartość bezwzględna różnicy liczb z każdego dwóch sąsiednich wierzchołków była kwadratem liczby naturalnej.
- Na stole leży  $n \geq 1$  stosów monet, po jednej w każdym. W danej chwili możemy połączyć dwa dowolnie wybrane stosy w jeden. Jeśli połączymy stos  $a$  monet ze stosem  $b$  monet, to zapisujemy iloczyn  $ab$ . Te czynności wykonujemy aż do uzyskania jednego stosu  $n$  monet. Dowieść, że suma zapisanych iloczynów wynosi  $\frac{1}{2}n(n - 1)$ .
- Każdą liczbę naturalną pomalowano pewnym kolorem w taki sposób, że jeśli  $a, b \geq 2$  są liczbami naturalnymi, to liczby  $a + b$  i  $ab$  mają ten sam kolor. Dowieść, że wszystkie liczby naturalne większe od 4 mają ten sam kolor.

Uwaga. Wskazówki dotyczą tego, jak przeprowadzić krok indukcyjny. Trzeba jednak pamiętać, że nie wolno pominąć bazy indukcji! (a) Założenie indukcyjne  $3^n + 4^n > 5^n$  należy obszernie pomnożyć przez 5. Otrzymamy wtedy nierówność, z której łatwo wydedukować tezę indukcyjną:  $3^{n+1} + 4^{n+1} > 5^{n+1}$ . (b) Z założenia indukcyjnego  $12 \mid 7^n + 6n - 1$  wynika, że  $7^n = 12a - 6n + 1$  dla pewnego  $a \in \mathbb{N}$ . Mamy odpowiednio, że  $12$  jest dzielnikiem  $7^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 7 \cdot 7^n + 6(n+1) - 1 = 7 \cdot (12a - 6n + 1) + 6(n+1) - 1 = 84a - 42n + 7 + 6n + 6 - 1 = 84a - 36n + 12 = 12(7a - 3n + 1)$ . Trzeba pomnożyć obie strony założenia indukcyjnego  $1 + (n+1)x \geq 1 + nx$  przez liczbę dodatnią  $1 + x$ , następnie wystrczy odpowiednio, że  $1 + (n+1)x \geq 1 + nx$  dla  $x \geq -1$ . Używamy indukcji o głębokości 2. Założenie indukcyjne  $a_n = 2^n + 3^n \wedge a_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$  należy wykorzystać we wzorze rekurencyjnym z treści zadania w celu otrzymania tezy indukcyjnej  $a_{n+2} = 2^{n+2} + 3^{n+2}$ . Należy zauważyć i uzasadnić, że jeśli mamy  $n$  okręgów na płaszczyźnie, to po doysowaniu i jeszcze jednego liczbę  $2^n$  obserwujemy wzrost o co najwyżej  $2^n$ . Podzielmy szachownicę o wymiarach  $2^{n+1} \times 2^{n+1}$  z usuniętym polem na 4 szachownice  $2^n \times 2^n$ , z których jedna ma usunięte pole. Aby móc zastosować założenie indukcyjne, potrzebujemy by wszystkie cztery je miały. W tym celu pierwszą L-kę należy wyciąć odpowiednimi sposobem  $2^{n+1} \times 2^{n+1}$  szachownicy. Należy wykorzystać wzór dwumianowy Newtona dla wyrażenia  $(n+1)^p$  oraz fakt, że  $\binom{n}{k} \mid n!$  dla  $k = 1, 2, \dots, d - 1$ . Niech  $a_n$  będzie poszukiwaną  $n$ -cyfrową wielokrotnością liczby  $2^n$ . Szukaną wielokrotnością  $2^{n+1}$  jest jedna z liczb:  $10^n + a_n$  lub  $2 \cdot 10^n + a_n$ . Będziemy rozpatrywać jedynie takie numery n-kątów, w których  $n - 1$  i  $n$  są przypisane sąsiednim wierzchołkom. Krok indukcyjny o głębokości 3 polega na dodaniu trzech wierzchołków z liczbami  $n + 3, n + 2$  i  $n + 1$  pomiędzy tymi dwoma. Jeśli w ostatnim ruchu połączone stos  $a$  monet ze stosem  $b$  monet ( $a + b = n$ ), to na mocy założenia indukcyjnego suma napisanych iloczynów wynosi  $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2$ . Dla  $n$  parzystych ten sam kolor mają liczby  $n + 2 + \frac{n}{2}$  i  $2 + \frac{n}{2}$ . Dla  $n$  nieparzystych – liczby  $n, 3(n - 1) + \frac{n-2}{2}$ .

Wskazówki do zadań

# CREDO

## Łowcy promieniowania kosmicznego w Krakowie



**CREDO**  
JOURNEY

[www.credo.science](http://www.credo.science)

Wszelki świat kryje wiele tajemnic. Naukowcy na całym świecie starają się między innymi odpowiedzieć na pytanie, czym jest ciemna materia i ciemna energia, które wspólnie stanowią ponad trzy czwarte materii-energii obserwowanego Wszechświata. Czym dokładnie jest czasoprzestrzeń, w której się znajdujemy? Wreszcie, czy to, co wydarzyło się przed milionami lat, do dzisiaj ma wpływ na ludzi żyjących obecnie?

Dzięki globalnemu i dostępnemu dla każdego modelowi projektu Cosmic Ray Extremely Distributed Observatory (**CREDO**) każdy może teraz zostać członkiem zespołu badawczego i zdobywać odpowiedzi na te pytania. **Nie trzeba być profesjonalnym uczonym, aby włączyć się do tego projektu badawczego.** Co zatem trzeba zrobić, by wziąć w nim udział? To proste. Wystarczy zainstalować aplikację **CREDO detektor** w telefonie wyposażonym w system Android. Pozwoli ona na wykorzystanie telefonu jako detektora promieniowania kosmicznego.

**Jak to działa?** Pomiar przeprowadzony przy użyciu telefonów rejestruje czas detekcji cząstki. Następnie czasy te są porównywane w celu wykrycia odchyleń od normy. Wysokoenergetyczne cząstki docierają do Ziemi z kosmosu losowo, a ich rozkład powinien być jednorodny. Jednak w 1983 roku udało się zaobserwować pierwszą anomalię: sieć detektorów promieniowania kosmicznego w ciągu pięciu minut zarejestrowała 32 przypadki wielkiego pęku atmosferycznego, podczas gdy spodziewano się tylko jednego. Możliwe, że takie zdarzenia są częstsze, niż myślimy, jednak ze względu na ograniczoną liczbę detektorów do tej pory były niewykrywalne. Wiemy, że wysokoenergetyczne promieniowanie nie pozostaje bez wpływu na organizmy żywe, ale jaki ma dokładnie wpływ na nas? Czy ma związek z niektórymi chorobami, a może z mutacjami?

Jak widać liczba pytań bez odpowiedzi pozostaje duża, dlatego tak ważne jest zachęcenie do udziału w projekcie jak największej liczby osób, które niekoniecznie muszą być naukowcami. Poza udziałem w grupie badawczej, **CREDO** oferuje bezpośredni dostęp do wykwalifikowanej kadry naukowej, materiałów badawczych, spotkań oraz paneli dyskusyjnych, np. podczas spotkań **CREDO Week**. Już we wrześniu tego roku po raz kolejny odbędzie się wydarzenie dla nauczycieli i uczniów, tym razem w formie warsztatów – **CREDO workshop**.

Program obejmuje między innymi pracę na detektorze, który docelowo ma trafić do szkół średnich, a także szereg otwartych wykładów.

**Szkoły oraz samych nauczycieli chętnych do udziału w wydarzeniu zapraszamy do kontaktu przez adres e-mail: [contact@credo.science](mailto:contact@credo.science).**

Katarzyna Smalcerz

1. Instytut Teleinformatyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki, Politechnika Krakowska
2. Instytut Fizyki Jądrowej im. H. Niewodniczańskiego, Polska Akademia Nauk