



Nakład: 3500 egz.

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

ISSN 1644-0043
pismo 7 3104592...

Nr 5 (540) 2019

CENA 4 ZŁ VAT 5%

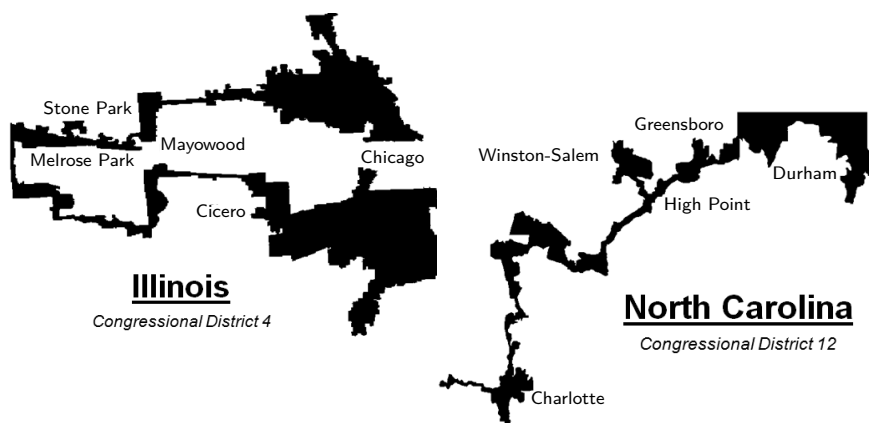
POCZTA POLSKA S.A. | NIP: 142-635-93-91

www.defizmat.edu.pl





ALESSIO FIGALLI
MEDAL FIELDSA 2018
str. 1



W następnym numerze salamandry buszują w JOWach



SPIS TREŚCI NUMERU 5 (540)

| | |
|---|---------|
| Alessio Figalli – Medal Fieldsa 2018 <i>Andrzej Palczewski</i> | str. 1 |
| Informatyczny kącik olimpijski (127): <i>Domino</i> | str. 3 |
| Łączenie jasnej i ciemnej strony Wszechświata <i>Anna Durkalec</i> | str. 4 |
| Geometria na wirującej karuzeli <i>Andrzej Dragan</i> | str. 6 |
| Piękna fizyka: dlaczego $E = mc^2$, a gwiazdy świecą <i>Paweł Artymowicz</i> | str. 8 |
|  Zadania | str. 11 |
|  Nieskończoność: 3. Jak policzyć nieskończone? <i>Michał Korch</i> | str. 12 |
|  Na całe życie <i>Magdalena Fikus</i> | str. 14 |
| A jednak się da (VI): o cyfrowej gotówce <i>Tomasz Kazana</i> | str. 15 |
| Matrymonialna matematyka <i>Magdalena Sieniawska</i> | str. 18 |
| Klub 44 | str. 20 |
| Prosto z nieba: Szanuj przestrzeń! | str. 22 |
| Niebo w maju | str. 22 |
| Aktualności Zrób sobie eksperyment | str. 24 |
|  Najważniejsza nierówność na świecie <i>Bartłomiej Bzdęga</i> | str. 25 |

Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 1 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Alessio Figalli – Medal Fieldsa 2018

Andrzej PALCZEWSKI*

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Oryginalny problem optymalnego transportu został wprowadzony przez Gasparda Monge'a w roku 1781. Polegał na przeniesieniu przy minimalnym wysiłku piasku z miejsca wydobycia do miejsca, gdzie miał być użyty do budowy. W końcu lat 30. XX wieku Leonid Kantorovich przedstawił nieco inne sformułowanie tego zagadnienia i od tamtej pory w literaturze można je znaleźć pod hasłem *Monge–Kantorovich Problem*. W problemie Monge'a–Kantorovicha zakładamy, że koszt transportu rośnie wraz z odległością i transportowaną masą (niekoniecznie liniowo). W jednym z pierwszych modeli opisujących to zagadnienie pokazano m.in., że aby dostarczyć towary z dwóch sąsiednich miast do trzeciego, które jest od nich znacznie oddalone, bardziej opłacalne może być przetransportowanie towarów do wspólnego miejsca, a następnie jednoczesny transport do miasta docelowego.

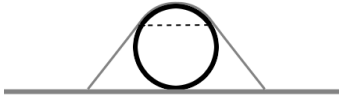
Pytanie o regularność rozwiązań oznacza pytanie o stopień gładkości rozwiązań, czyli jak wiele razy można różniczkować funkcję będącą rozwiązaniem. W teorii równań różniczkowych cząstkowych często okazuje się, że dostatecznie regularne rozwiązania są jednocześnie rozwiązaniami jednoznaczными (czyli jedydnymi istniejącymi).

Alessio Figalli, profesor (Eidgenössische Technische Hochschule) ETH w Zurychu, otrzymał Medal Fieldsa na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Rio de Janeiro za – jak napisano w uzasadnieniu – „wkład w teorię optymalnego transportu i jej zastosowania”. Figalli po ukończeniu liceum klasycznego w Rzymie rozpoczął studia matematyczne w Scuola Normale Superiore w Pizie, gdzie po czterech latach uzyskał dyplom magistra pod kierunkiem Luigiego Ambrosio. Pracę doktorską przygotował w ciągu 18 miesięcy pod wspólnym kierunkiem profesorów Luigiego Ambrosio oraz Cédrica Villaniego (laureata Medalu Fieldsa z 2010 roku). Już w czasie studiów Figalli zainteresował się problemami optymalnego transportu (tego dotyczyła jego praca magisterska), a następnie pogłębiał temat w czasie studiów doktoranckich. Teoria ta, sięgająca swym początkiem czasów rewolucji francuskiej, zajmuje się problemem przeniesienia możliwie najtańszym kosztem pewnej masy rozłożonej (w ogólności niejednorodnie) w zbiorze A do zbioru B . Ponieważ rozkład masy można interpretować jako rozkład prawdopodobieństwa, to zagadnienie transportowe można traktować jako problem odległości między dwoma rozkładami prawdopodobieństwa, gdzie metryką mierzącą tę odległość jest funkcja kosztu transportu. Takie ogólne sformułowanie zagadnienia, pozwalające na dowolne specyfikowanie funkcji kosztów, prowadzi do trudnych problemów matematycznych, a jednocześnie ma bardzo szerokie zastosowanie praktyczne w planowaniu przestrzennym, hydromechanice, biologii, analizie obrazów, ekonomii oraz wielu innych dziedzinach.

Alessio Figalli jest współautorem ponad 150 prac naukowych, trudno więc w krótkim tekście opisać nawet pobieżnie wszystkie jego osiągnięcia. W uzasadnieniu przyznania Medalu Fieldsa na pierwszym miejscu wymieniono prace dotyczące regularności rozwiązań *równania Monge'a–Ampère'a* oraz ich zastosowania do wykazania regularności rozwiązań pewnego modelu meteorologicznego (*semigeostrophic model*) wykorzystywanego do wielkoskalowych prognoz pogody. Model ten, zaproponowany przez meteorologów w latach dziewięćdziesiątych XX wieku, opisuje dynamiki frontów atmosferycznych (Figalli nazwał go „modelem ewolucji chmur”). Sens badania regularności rozwiązań takich modeli związany jest z faktem, że w praktyce często znaleźć można jedynie rozwiązania przybliżone, otrzymane metodą symulacji komputerowych. Takie symulacje oczywiście powinny być zbieżne do prawdziwego rozwiązania, a to można zagwarantować jedynie, gdy rozwiązanie jest jednoznaczne oraz dostatecznie regularne (dostatecznie wiele razy różniczkowalne). Alessio Figalli wspólnie ze współautorem Guido De Philippisem zbadali strukturę rozwiązań równania Monge'a–Ampère'a. Ich wynik ma głębokie matematyczne znaczenie, ponieważ otrzymane przez nich oszacowanie wzmacnia wcześniejszy rezultat Luisa A. Caffarelliego z roku 1900 (w kierunku pełnej nierówności Sobolewa).

Autorzy następnie wykazali, że równanie Monge'a–Ampère'a może być traktowane jako równanie optymalnego transportu gęstości chmur opisywanych modelem meteorologicznym. Pozwoliło to wykazać regularność rozwiązań modelu meteorologicznego i uzasadnić poprawność symulacji komputerowych dla tego modelu.

Drugim osiągnięciem Alessio Figalliego, wymienionym w uzasadnieniu przyznania Medalu Fieldsa, są napisane w 2017 roku prace z Joaquinem Serrą, dotyczące problemów *swobodnej powierzchni*. Problem swobodnej powierzchni występuje w wielu zagadnieniach fizyki i techniki. Swobodne powierzchnie to na przykład powierzchnia kostki lodu rozpuszczającej się w szklance napoju lub powierzchnia falującego morza. Najprościej można sobie wyobrazić swobodną powierzchnię, rozpatrując elastyczną membranę



Weźmy okrągłą ramę i naciągnijmy na nią elastyczny materiał. Następnie nakryjmy tą ramą kulę leżącą na stole tak, żeby kula znalazła się dokładnie na środku tej ramy. Gdy rama znajdzie się na powierzchni stołu, to z boku sytuacja będzie wyglądać tak jak na rysunku. Przerwana szara linia to powierzchnia swobodna – miejsce, w którym materiał traci styczność z kulą. W rzeczywistości ta powierzchnia swobodna jest okręgiem.

Klasyczna nierówność izoperymetryczna daje górne ograniczenie powierzchni zbioru A przez kwadrat długości jego brzegu. Problem sięga swoją historią do starożytnej legendy o tym, jak królowa Dydona uzyskała ziemię pod budowę Kartaginy. W wersji bardziej pasującej do problemu rozważanego przez Figalliego możemy myśleć o trójwymiarowym zbiorze A wypełnionym płynem o pewnej energii wewnętrznej. Ubytek tej energii jest związany z wypływem płynu ze zbioru A , co jest zależne od powierzchni brzegu zbioru A . Informacja o ubytku energii pozwala kontrolować powierzchnię brzegu A .



naciągniętą na okrągłą ramę, którą nakrywamy kulę leżącą na powierzchni stołu. Membrana częściowo dotyka powierzchni kuli, a częściowo wisi w powietrzu. Granica obszaru styku membrany z powierzchnią kuli jest właśnie swobodną powierzchnią. Oczywiście w tym prostym przykładzie swobodna powierzchnia jest okręgiem, którego rozmiar zależy od wymiarów kuli oraz ramy, na której rozciągnięta jest membrana. Dla bardziej skomplikowanych kształtów przeszkody, jaką tu była kula, rozwiązanie nie musi być już tak proste. Zasadnicze jest pytanie o stopień gładkości swobodnej powierzchni. W 1977 roku Luis Caffarelli wykazał, że swobodna powierzchnia jest gładka poza zbiorem punktów osobliwych. Przez następne lata matematycy badali charakter tego zbioru punktów osobliwych. Figalli i Serra znaleźli optymalną charakterystykę tego zbioru (zbyt obszerną, aby ją tu dokładnie przytaczać). W szczególności, w przypadku 3-wymiarowym pokazali, że swobodna powierzchnia jest gładka z wyjątkiem izolowanych punktów osobliwych.

Przywołajmy tu jedną z wcześniejszych prac Alessio Figalliego, napisaną wspólnie z Francesco Maggiem i Aldo Pratellim, dotyczącą wykorzystania teorii optymalnego transportu w dowodzie *nierówności izoperymetrycznych*. Klasyczny problem izoperymetryczny polega na znalezieniu optymalnego kształtu obszaru, którego brzeg minimalizuje napięcie powierzchniowe. Przykładem rozwiązania takiego problemu są bańki mydlane, które ograniczają daną objętość powietrza powłoką o minimalnej powierzchni. Bardziej interesujące jest badanie problemu izoperymetrycznego dla kryształów, gdzie rozwiązanie jest bardziej skomplikowane, ponieważ kryształ przyjmuje kształt minimalizujący energię pochodzącą od oddziaływań między atomami. Otrzymana we wspomnianej pracy nierówność izoperymetryczna pozwala odpowiedzieć na pytanie, jak zmienia się kształt kryształu, kiedy układowi zostanie dodana pewna energia (np. kryształ zostanie podgrzany). Aby uzyskać odpowiedź, należy spojrzeć na zmianę kształtu kryształu jak na problem transportu ze stanu początkowego (o minimalnej energii) do stanu po dodaniu energii. Wynik Figalliego, Maggi i Pratelliego mówi, że zmiana kształtu jest proporcjonalna do pierwiastka z dodanej energii. Ten zaskakująco prosty wynik został uzupełniony o bardzo wartościowy z fizycznego punktu widzenia rezultat, że ta zmiana kształtu jest stabilna, czyli małemu dodatkowi energii odpowiada mała zmiana kształtu. Co więcej, ponieważ uzyskana nierówność izoperymetryczna jest optymalna, więc zmiana kształtu nie może być większa niż to wynika z ich oszacowania.

Alessio Figalli jest matematykiem o niezwykle bogatym doświadczeniu międzynarodowym. Po studiach doktoranckich, które spędził między Scuola Normale Superiore w Pizie a École Normale Supérieure w Lyonie, podjął pracę na uniwersytecie w Nicei oraz w oddziale Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) przy tym uniwersytecie. Po roku przeniósł się na stanowisko profesora w École Polytechnique w Palaiseau pod Paryżem. W latach 2009–2016 pracował na różnych stanowiskach profesorskich na uniwersytecie w Austin (University of Texas at Austin), aby w roku 2016 przyjąć stanowisko profesora zwyczajnego w ETH w Zurychu. Figalli ma bardzo liczną grupę międzynarodowych współpracowników, których chętnie odwiedza, nie odczuwając trudności dalekich podróży lotniczych, a także przyjmując ich wizyty w Zurychu. Promotor jego doktoratu i współautor publikacji, Cédric Villani, podkreślał w jednym z wywiadów, że fakt, iż na edukację matematyczną Figalliego złożyło się doświadczenie wyniesione z wielu ośrodków (z widocznym głównym wpływem szkoły włoskiej i francuskiej), miał znaczący wpływ na jego matematyczne sukcesy. Na zakończenie należy dodać, że współpracownicy Figalliego zgodnie podkreślają jego niezwykłą szybkość i biegłość w pracy nad technicznymi detalami oraz umiejętność sprawnego wyczuwania istoty nowych problemów. Jest on także znany z otwartości i przyjacielskiego stosunku do młodych kolegów i studentów. Wszystkie te cechy czynią z Alessio Figalliego matematyka, którego dalsza kariera rysuje się niezwykle obiecująco.

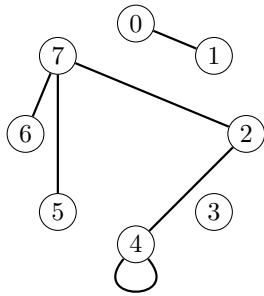
Informatyczny kącik olimpijski (127): Domino

W tym odcinku omówimy rozwiązanie zadania „Domino”, które pojawiło się w 2018 roku w ramach X International Autumn Tournament in Informatics w Szumen, w Bułgarii.

Domino: Zestaw do gry w domino składa się z M kostek ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do M . Kostka o numerze i jest opisana za pomocą nieuporządkowanej pary liczb (a_i, b_i) , gdzie a_i oznacza liczbę kropek narysowanych na jednej połowie, zaś b_i oznacza liczbę kropek narysowanych na drugiej połowie kostki. Wartości a_i i b_i są liczbami całkowitymi z przedziału $[0; N]$. W zestawie nie ma dwóch takich samych kostek.

Trzeba poukładać kostki domina w łańcuchy. Dwie kostki mogą zostać ze sobą zestawione krótszym bokiem, jeśli odpowiednie połowy tych kostek mają tę samą liczbę narysowanych kropek. Naszym zadaniem jest obliczyć, ile minimalnie łańcuchów należy ułożyć, aby każda kostka domina należała do dokładnie jednego łańcucha, oraz podać te łańcuchy.

Rozwiązanie rozpoczniemy od zbudowania grafu G , złożonego z $N + 1$ wierzchołków oraz M nieskierowanych krawędzi. Wierzchołki ponumerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi od 0 do N , każdej liczbie kropek odpowiada jeden wierzchołek. Ponadto, niech istnieje w G krawędź pomiędzy wierzchołkami a_i i b_i dla każdej kostki domina. Przykładowo, jeśli $N = 7$, $M = 6$ oraz dane są następujące kostki domina: $(0, 1)$, $(2, 4)$, $(2, 7)$, $(4, 4)$, $(5, 7)$ i $(6, 7)$, wtedy graf G wygląda jak poniżej:



Możemy teraz wyrazić problem w języku teorii grafów. Dany jest nieskierowany graf. Jaka jest najmniejsza liczba rozłącznych krawędziowo ścieżek, które pokrywają cały graf?

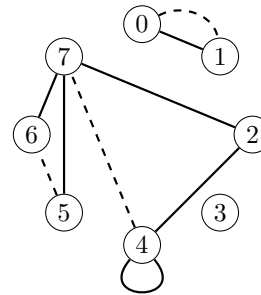
Oczywiste jest, że żadna ścieżka nie będzie przechodziła pomiędzy dwoma różnymi spójnymi składowymi, dlatego każdą spójną składową możemy rozpatrywać osobno. Załóżmy zatem, że rozpatrujemy pewną spójną składową. Zastanówmy się, ile może być w niej wierzchołków o stopniu nieparzystym. Po krótkiej chwili namysłu okazuje się, że wierzchołków o stopniu nieparzystym jest parzysta liczba. Jest tak, ponieważ suma stopni wszystkich wierzchołków jest podwojoną liczbą krawędzi (każda krawędź ma dwa końce). Rozważmy zatem dwa przypadki ze względu na liczbę wierzchołków o stopniu nieparzystym.

0 wierzchołków o stopniu nieparzystym

W tym przypadku każdy wierzchołek ma stopień parzysty. W związku z tym zachodzi warunek konieczny i wystarczający na istnienie w grafie cyklu Eulera (cyklu, który przechodzi przez każdą krawędź dokładnie raz). Popularnym algorytmem do znajdowania cyklu Eulera jest algorytm Fleury’ego. Skoro istnieje cykl Eulera, to wszystkie kostki można ułożyć w jeden łańcuch (ścieżka Eulera).

Co najmniej 2 wierzchołki o stopniu nieparzystym

W tym przypadku jest ich parzysta liczba. Niech k oznacza liczbę wierzchołków o stopniu nieparzystym. Dodajmy do naszego grafu $\frac{k}{2}$ krawędzi łączących wierzchołki o stopniu nieparzystym (każdy wierzchołek o stopniu nieparzystym ma być końcem dokładnie jednej dodanej krawędzi). Dla przykładu opisanego na początku artykułu graf będzie wyglądał następująco (dodane krawędzie zostały oznaczone przerywaną linią):



Otrzymaliśmy multigraf (w multigrafie dwa wierzchołki może łączyć kilka krawędzi), w którym każdy wierzchołek ma parzysty stopień, zatem jest spełniony warunek konieczny i wystarczający na istnienie cyklu Eulera. Znajdźmy więc ten cykl, a następnie usuńmy z niego dodane wcześniej krawędzie. Otrzymane ścieżki opisują kolejne łańcuchy utworzone z kostek domina. W tym przypadku odpowiedzią jest $\frac{k}{2}$.

Optymalność rozwiązania

Pozostało nam jeszcze zastanowić się, czy opisane wyżej rozwiązanie jest optymalne. Zauważmy, że każdy wierzchołek o stopniu nieparzystym musi być początkiem lub końcem jakiegoś łańcucha. Takich wierzchołków jest k , zatem potrzebnych jest przynajmniej $\frac{k}{2}$ łańcuchów. Opisany wyżej algorytm znajduje dokładnie $\frac{k}{2}$ łańcuchów, dlatego jest optymalny.

Złożoność czasowa

Zbudowany przez nas graf ma rozmiar $O(N + M)$. Znajdowanie cyklu Eulera można więc zrealizować w czasie zależnym liniowo od rozmiaru grafu. Całe rozwiązanie działa w czasie $O(N + M)$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Łączenie jasnej i ciemnej strony Wszechświata

* Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Anna DURKALEC*

Wielkie przeglądy nieba ukazują lokalny Wszechświat o strukturze siatki – lub raczej pajęczyny będącej dziełem pijanego pająka. W strukturze tej obszary o dużych zagęszczeniach galaktyk (ogólniej, materii świecącej) przedzielone są tu i ówdzie rejonami całkowitej pustki. Ale Wszechświat nie zawsze tak wyglądał. Obserwacje mikrofalowego promieniowania tła (*cosmic microwave background*, CMB) pochodzącego z okresu około 380 000 lat po Wielkim Wybuchu przedstawiają młody Wszechświat jako *prawie* jednorodny. Naturalnie więc rodzą się pytania. Jak i kiedy wielkoskalowa struktura Wszechświata zaczęła się formować? Jakie czynniki miały największy wpływ na jej ewolucję? Jak ta ewolucja w ogóle przebiegała?

Udzielenie odpowiedzi na te pytania oczywiście nie jest łatwym zadaniem. Zaczniemy od tego, że aby móc prześledzić ewolucję wielkoskalowej struktury Wszechświata, niezbędne są obserwacje wielu galaktyk, od tych najstarszych po współczesne. Ale, wbrew pozorom, to nie w obserwacjach leży nasz największy problem. Systematycznie budowane są coraz większe i coraz bardziej czułe teleskopy, pozwalające obserwować coraz dalsze i coraz starsze galaktyki. Lokalne wielkie przeglądy nieba, katalogujące obserwacje milionów galaktyk, są już faktem. Dzięki nim dysponujemy swoistymi trójwymiarowymi mapami współczesnego Wszechświata. Pozostaje tylko kwestią czasu (i to raczej krótkiego), gdy podobne przeglądy obejmą najwcześniejsze galaktyki. Pierwsze próby mamy zresztą już za sobą. Np. przegląd spektroskopowy VIMOS Ultra Deep Survey (VUDS) objął około 10 000 galaktyk o przesunięciach ku czerwieni $2 < z < 6$, czyli sprzed mniej więcej 10 mld lat.

Ukryta ciemna strona Wszechświata

Wszystko byłoby więc cudownie proste, gdyby nie drugi, ukryty składnik wielkoskalowej struktury Wszechświata. Coś, czego nie jesteśmy w stanie bezpośrednio zaobserwować, ponieważ nie emituje promieniowania elektromagnetycznego. Ciemna materia. Substancja ze wszech miar tajemnicza. Z jednej strony nie jesteśmy w stanie wiele powiedzieć o jej naturze. Tylko tyle, że raczej nie jest zbudowana z barionów. Z drugiej strony, np. dzięki obserwacjom soczewkowania grawitacyjnego, wiemy, że istnieje. Wiemy, że jest czymś, co ma masę i oddziałuje grawitacyjnie. Co więcej, szacuje się, że we Wszechświecie jest jej zdecydowanie więcej niż materii świecącej (aż 5–6 razy więcej!). W kontekście badań wielkoskalowej struktury Wszechświata ta ostatnia cecha jest wyjątkowo frustrująca. Ponieważ trudno badać wielkoskalowy rozkład czegoś, czego nie widać, a o czym wiemy, że prawdopodobnie dominuje nad tym, co widać. To prawie jak układać puzzle, z których połowę zgubiliśmy, a 3/4 pozostałych ktoś złośliwie zamalował na czarno.

Na szczęście dwa składniki wielkoskalowej struktury Wszechświata, jasny i ciemny, nie są niezależne. Według współczesnych modeli kosmologicznych każda galaktyka powstała i ewoluowała wewnątrz tzw. *halo* ciemnej materii (lokalnych zagęszczeń masy). Z czasem, pod wpływem grawitacji, oddzielne halo łączyły się, tworząc coraz większe struktury – według modelu hierarchicznego. Galaktyki, *zanurzone* w ciemnej materii, *podążały* ich śladem.

W teorii więc do opisu rozkładu ciemnej materii we Wszechświecie można wykorzystać to, co *świeci*. Niestety, stosunkowo wcześniej zorientowano się, że galaktyki nie *śledzą* poczynąń ciemnej materii całkowicie bezpośrednio. Zapobiegają temu wszystkie te oddziaływania materii świecącej, którym ciemna materia nie podlega. W rezultacie rozkład galaktyk jest *przesunięty* w stosunku do rozkładu ciemnej materii. Zależność tę nazywamy *biasem*. I wszystko byłoby OK, gdyby nie miał on szeregu nieprzyjemnych właściwości. Po pierwsze bias zmienia się z czasem. We wczesnych etapach ewolucji Wszechświata był zdecydowanie większy niż współcześnie. Po drugie siła biasu zależy od cech fizycznych poszczególnych galaktyk (takich jak ich masa gwiazdowa, jasność

Określenie *lokalne* oznacza, że mowa o obserwacjach naszego lokalnego Wszechświata. Dokładniej chodzi o odległości rzędu $2,5 \cdot 10^9$ lat (co odpowiada przesunięciu ku czerwieni – patrz Δ_{19}^4 – około 0,2).



Rozwiązanie zadania F 976.

W płynnych warstwach, poniżej warstwy skał stałych, zgodnie z twierdzeniem Pascala ciśnienie hydrostatyczne jest stałe. Wynika stąd, że małe ciśnienie wywierane przez wody oceanu musi być kompensowane ciśnieniem grubszej warstwy skał płaszczą pod oceanami, czyli cieńszej warstwy skorupy ziemskiej:

$$H\rho_S = d\rho_W + h\rho_S + (H - h - d)\rho_P,$$

czyli

$$H - h = \frac{\rho_P - \rho_W}{\rho_P - \rho_S} d = 17 \text{ km.}$$



Rozwiązanie zadania F 975.

W odległości r od środka planety siła grawitacji $F(r)$ działająca na masę m będzie równa przyciągnięciu grawitacyjnemu przez punktową masę umieszczoną w środku planety i równą całej masie znajdującej się w kuli o promieniu r . Dla $r < r_c := R - H = 3470$ km mamy więc:

$$F(r) = \frac{4\pi G m \rho_c r^3}{3r^2} = \frac{4\pi}{3} G m \rho_c r,$$

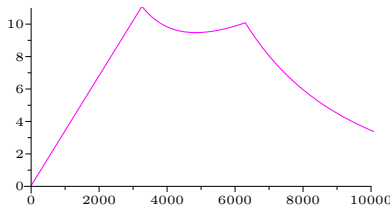
dla $R > r > r_c$:

$$F(r) = \frac{4\pi G m}{3r^2} (\rho_c r_c^3 + \rho_m (r^3 - r_c^3))$$

oraz dla $r > R$:

$$F(r) = \frac{4\pi G m}{3r^2} (\rho_c r_c^3 + \rho_m (R^3 - r_c^3)).$$

Podstawienie danych liczbowych prowadzi do wartości: $F(r_c)/m = 10,66 \text{ m/s}^2$, $F(R)/m = 9,79 \text{ m/s}^2$. Pomiędzy r_c i R , $F(r)/m$ osiąga minimum w $r_0 = 4979$ km, $F(r_0)/m = 9,265 \text{ m/s}^2$. Największa wartość siły grawitacji osiągnana jest więc na głębokości H . Opisany w treści zadania rozkład masy, w grubym przybliżeniu, odpowiada rozkładowi masy we wnętrzu Ziemi. Wykres funkcji $F(r)$ przedstawia poniższy rysunek.



czy kolor). Ogólnie rzecz biorąc, najbardziej masywne i najjaśniejsze galaktyki cechuje też największy bias. Niestety, zaobserwowano jednak, że zależność funkcyjna bias-masa gwiazdowa, bias-jasność, bias-kolor itp. przebiega trochę inaczej na różnych etapach ewolucji Wszechświata. Krótko mówiąc, sprawa jest wielowarstwowo skomplikowana.

Mierzenie jasnej strony i modelowanie ciemnej strony

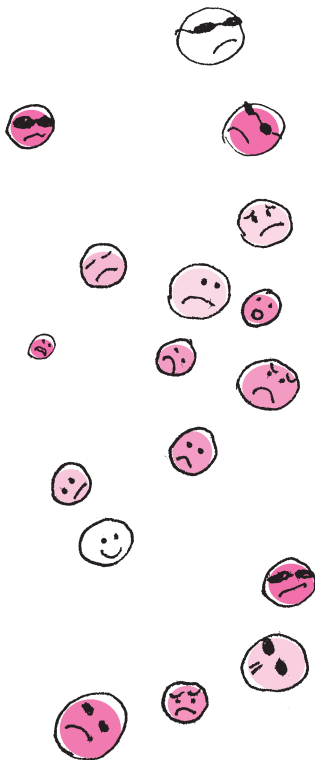
Do problemu trzeba więc podejść metodycznie i skupić się na dokładnym opisie zmian, jakim podlega wartość biasu w zależności od wszystkich tych czynników. W tym celu stosuje się dwuetapową metodę badawczą. Na pierwszym etapie robi się użytek z dostępnych danych obserwacyjnych – dużej liczby galaktyk. Dla nich wykonywane są pomiary dwupunktowej funkcji korelacji. Pomiary takie opisują odstępstwo od losowej wartości prawdopodobieństwa znalezienia dwóch obiektów w danej odległości od siebie i jest stosunkowo powszechnie stosowanym (nie tylko w astronomii) narzędziem statystycznym. W naszym przypadku pozwala zmierzyć, w jakim stopniu dana populacja galaktyk łączy się w skupiska.

Aby mierzyć zachodzące z czasem zmiany stopnia grupowania galaktyk, wykonuje się osobne pomiary funkcji korelacji na próbkach galaktyk o różnych przesunięciach ku czerwieni (np. dla $z = 0, 1, 2, \dots$). W idealnym przypadku wszystkie wykorzystane galaktyki należą do tego samego przeglądu nieba. W przeciwnym razie bezpośrednie porównanie wyników pomiarów bywa kłopotliwe lub w ogóle niemożliwe. Dlaczego? Różne instrumenty pomiarowe (teleskopy), a co za tym idzie różne przeglądy nieba, charakteryzują się innymi kryteriami stosowanymi przy wyborze obserwowanych galaktyk (najczęściej ograniczenia dotyczą jasności czy koloru danej galaktyki). Możliwe jest więc, że gromadzą one populacje galaktyk o zupełnie różnych cechach fizycznych. Niestety, pomiar grupowania galaktyk zależy też m.in. od cech fizycznych galaktyk. Dlatego zależność czasowa, na obserwacji której nam zależy, przy bezpośrednim porównaniu takich wyników może zostać zanieczyszczona innymi zależnościami. Ten sam problem dotyczy prób porównania różnych pomiarów funkcji korelacji wykonanych w zależności od jasności czy masy gwiazdowej galaktyk.

Pomiar funkcji korelacji to jednak nie wszystko. W następnym kroku należy opisać otrzymaną funkcję za pomocą fizycznie uzasadnionych modeli uwzględniających ciemną materię. Jednym z nich jest tzw. model zajęcia halo ciemnej materii (*Halo Occupation Distribution model*, HOD).

Oto jak go stworzyć w czterech prostych krokach: (1) Weź kawałek Wszechświata, opisanego i sparametryzowanego według jednego z modeli kosmologicznych (np. LCDM). (2) W tak przygotowanej formie rozprowadź ciemną materię. W tym celu wykorzystaj, w odpowiednich proporcjach, m.in. funkcję masy i profil rozkładu gęstości halo (np. NFW). Możesz założyć, że hala ciemnej materii są sferycznie symetryczne, albo dodać parametry modyfikujące ich kształt. Poza tym należy zwrócić szczególną uwagę na zależność od przesunięcia ku czerwieni (tj. na jakim etapie ewolucji jest Wszechświat). (3) Następnie rozsyp galaktyki. Ale nie byle jak! Wykorzystaj funkcję zajęcia halo ciemnej materii, która opisuje, jak wiele galaktyk przypada na halo ciemnej materii o danej masie. Zazwyczaj zawiera ona pięć wolnych parametrów. Parametry te opisują właściwości hal ciemnej materii, w których rezydują twoje galaktyki. Dzięki temu, po dopasowaniu modelu do funkcji korelacji, będziesz mógł oszacować wartość biasu. (4) Na końcu dobrze wszystko wymieszaj. Odstaw na parę godzin. Wypij kawę.

Za pomocą parametrów otrzymanych po dopasowaniu tak wykonanego modelu do wcześniej zmierzonych funkcji korelacji można ostatecznie uzyskać informację o biasie charakteryzującym wielkoskalową strukturę Wszechświata – na danym etapie ewolucji i dla galaktyk o danych cechach fizycznych. Tego typu oszacowania są sukcesywnie wykonywane dla coraz liczniejszych i coraz dokładniejszych danych obserwacyjnych dostępnych dla coraz wyższych przesunięć ku czerwieni. A każdy z tych nowych pomiarów zbliża nas do odpowiedzi na pytania o przebieg zmian, jakim podlegała wielkoskalowa struktura Wszechświata od początku jej istnienia aż do teraz.



Geometria na wirującej karuzeli

Andrzej DRAGAN*

*Instytut Fizyki Teoretycznej,
Wydział Fizyki UW

Artykuł jest fragmentem rozdziału 4 książki „Kwantechizm, czyli klatka na ludzi”, której recenzję zamieściliśmy w poprzednim numerze *Delty*.

Ile wynosi suma wewnętrznych kątów w trójkącie? Kwestia ta nurtowała słynnego matematyka Carla Gaussa na tyle, że zadał sobie trud wspinania się na górskie szczyty. Jak wiadomo szczyty są po to, by je zdobywać, jednak błędem alpinistów jest to, że tę piękną metaforę traktują dosłownie. Gauss jednak nie był alpinistą. Chodził po górach nie po to, by „zdobywać szczyty”, lecz po to, by przy użyciu urządzeń geodezyjnych mierzyć sumę kątów w gigantycznych trójkątach utworzonych z trzech odległych alpejskich wierzchołków. Niestety, istniejące w czasach Gaussa urządzenia pomiarowe nie były wystarczająco precyzyjne, by pozwolić mu wykryć jakiekolwiek odstępstwo od standardowego wyniku szkolnego. Obecnie jednak wiemy, że gdyby tylko Gauss dysponował dokładniejszymi miernikami, przekonałby się, że suma kątów w trójkącie różni się od 180° . Geometria przestrzeni ulega bowiem zaburzeniu za sprawą grawitacji, która, jak wkrótce się przekonamy, jest o wiele dziwniejsza, niż by można przypuszczać.

Żeby zrozumieć, jak to możliwe, wykonajmy w myślach prosty eksperyment. Wyobraźmy sobie nieruchomą, okrągłą karuzelę – jedną z takich, jakie bywają w wesołym miasteczku – z konikami, świnkami i samochodzikami. Gdybyśmy chcieli zmierzyć średnicę karuzeli za pomocą krótkiej linijki, moglibyśmy zrobić to, wielokrotnie przykładając linijkę i licząc, ile razy trzeba odłożyć jej długość, by pokryć całą średnicę. Powiedzmy, że uzyskany wynik to pewna liczba x . W podobny sposób moglibyśmy obmierzyć obwód karuzeli, odkładając kolejno linijkę wzdłuż całego okręgu i uzyskując wynik y . Ze szkolnej geometrii wiadomo, że stosunek obwodu koła do jego średnicy to liczba π . I tyle właśnie wyniesie stosunek zmierzonych wartości y/x . Tymczasem, gdy karuzela będzie się kręcić, a my wraz z nią, wynik ten ulegnie zmianie!

Aby zrozumieć, dlaczego stosunek obwodu koła do jego średnicy w obracającym się układzie odniesienia nie jest równy dokładnie π , musimy przywołać zjawisko skrócenia Lorentza, znane z teorii względności. Przypomnijmy, że polega ono na tym, że poruszające się obiekty stają się krótsze w kierunku swojego ruchu. Oznacza to, że linijka przyłożona wzdłuż obwodu i obracająca się wraz z okrągłą karuzelą, stanie się krótsza, a co za tym idzie, trzeba ją będzie przyłożyć więcej razy, żeby pokryć cały obwód. To zaś zwiększy otrzymaną wartość y . Wartość x charakteryzująca średnicę nie ulegnie natomiast zmianie, bo średnica ustawiona jest prostopadłe do prędkości karuzeli. A zatem przykładana do niej linijka nie zmieni swojej długości.

Wniosek jest taki, że gdybyśmy mierzyli obwód i średnicę obracającej się karuzeli w związanym z nią obracającym się układzie odniesienia, to stosunek tych dwóch liczb okaże się większy niż π ! A zatem cała szkolna geometria z hukiem upadnie i nawet klasyczny wzór na obwód koła będzie wymagał korekty. Z podobnymi zjawiskami mamy do czynienia także w innych układach odniesienia, które nie są inercjalne.

Uczona w szkole geometria euklidesowa przestaje obowiązywać w sytuacjach, gdy układ odniesienia, w którym się znajdujemy, nie jest inercjalny. Czyli na przykład wtedy, gdy kręcimy się w kółko. W takiej sytuacji ani stosunek obwodu do średnicy okręgu nie musi być równy π , ani suma kątów w trójkącie nie musi wynosić 180° . I tak dalej. W nieinercjalnych układach odniesienia działają różne pozorne siły, takie jak siła odśrodkowa, a ich obecność stanowi czytelne ostrzeżenie, że należy spodziewać się zaburzenia klasycznej geometrii.

Podobnie zresztą dzieje się z upływem czasu w układach nieinercjalnych. Zegar umieszczony daleko od osi obrotu karuzeli musi starzeć się wolniej, niż zegar znajdujący się bliżej osi, bo porusza się on szybciej względem spoczywającego, inercjalnego obserwatora. Oznacza to, że czas w obracającym się układzie odniesienia spowalnia w miarę oddalania się od osi obrotu. Tego typu galimatias pojawia się w sposób nieuchronny, gdy rozważa się nieinercjalne układy odniesienia.

Zresztą bardzo podobne właściwości ma grawitacja, sprawiając że czasoprzestrzeń zmienia swoją geometrię, czyli po prostu się zakrzywia. A mówiąc dokładniej, grawitacja jest zakrzywieniem czasoprzestrzeni. Przyczyna jest taka, że wpływ

Dla rzeczywistej karuzeli opisany efekt jest praktycznie niemierzalny, ponieważ jej prędkość obrotu jest bardzo mała w porównaniu z prędkością światła. Aby możliwe było zaobserwowanie skrócenia linijki, jej prędkość musiałaby być porównywalna z prędkością światła.



grawitacji jest w niewielkich obszarach nieodróżnialny od wpływu przyspieszenia. Wystarczy wyobrazić sobie jazdę w przyspieszającej w górę windzie – może się wydawać, że przez moment stajemy się ciężsi, jak gdyby grawitacja przybrała na sile.

Czy można na tej podstawie dowiedzieć się czegoś na temat upływu czasu w polu grawitacyjnym? Zauważyliśmy, że brzeg kręcącej się karuzeli porusza się szybciej niż środek, więc w miarę oddalania się od osi obrotu czas będzie spowalniał coraz bardziej i bardziej. Z punktu widzenia obserwatora kręcącego się wraz z karuzelą, działają na niego siły odśrodkowe skierowane na zewnątrz. Można by więc wnioskować, że gdyby grawitacja mogła być skierowana na zewnątrz jakiegoś ciała – czas spowalniałby coraz bardziej w miarę oddalania się od centrum. Jednak dla rzeczywistych ciał grawitacja skierowana jest zawsze do środka, co oznacza, że czas powinien spowalniać w miarę zbliżania się do grawitującego ciała, a nie oddalania się od niego.

W przypadku Ziemi efekt ten, zwany grawitacyjną dylatacją czasu, jest bardzo słaby i nie odczuwamy go na co dzień. (Chociaż w zasadzie nasze stopy starzeją się nieco wolniej niż nasza głowa.) Efekt ten jest jednak na tyle istotny, że trzeba go uwzględnić w algorytmach systemu GPS. Satelity są wystarczająco daleko od nas, by grawitacyjna dylatacja czasu dawała się im we znaki. I gdyby nie uwzględnienie spowolnienia upływu czasu pod wpływem ziemskiej grawitacji, system GPS myliłby się w określaniu naszego położenia nawet o kilkadziesiąt metrów. Inne, bardzo precyzyjne pomiary pozwalają zresztą wykryć grawitacyjną dylatację czasu na Ziemi na różnicach wysokości rzędu zaledwie kilkunastu centymetrów! Czyli da się doświadczalnie stwierdzić, że czubek naszej głowy starzeje się szybciej niż nasza broda!

Ale dopiero w przypadku czarnych dziur, w pobliżu których grawitacja jest ekstremalnie silna, grawitacyjna dylatacja czasu również przyjmuje ekstremalne wartości. W miarę zbliżania się do horyzontu zdarzeń, odczuwalna siła grawitacji staje się dosłownie nieskończona. Co zaś dzieje się z biegnącym tam czasem? Uwaga, uwaga, czas kompletnie się tam... zatrzymuje! Chyba czas się nad tym zatrzymać i chwilę to przetrwać.

Zatrzymywanie się czasu na horyzoncie zdarzeń czarnej dziury prowadzi do zadziwiających konsekwencji. Gdybyśmy znaleźli się w pobliżu czarnej dziury i wrzucili do niej jabłko – zacznie się ono gwałtownie rozpędzać i po krótkim czasie osiągnie prędkość równą połowie prędkości światła. Jednak w tym momencie stanie się coś dziwnego. Jabłko zamiast dalej się rozpędzać, zacznie hamować! Mimo, że grawitacja ciągnie je coraz mocniej ku czarnej dziurze. Stanie się tak dlatego, że jabłko znajdzie się w obszarze ekstremalnej grawitacyjnej dylatacji czasu. Efekt ten zdominuje cały ruch i za sprawą spowalniającego czasu jabłko zacznie stopniowo zwalniać, aż wreszcie zatrzyma się zupełnie tuż przed samym horyzontem zdarzeń! Z perspektywy obserwatora przyglądającego się wszystkiemu z bezpiecznej odległości jabłko nigdy nie przekroczy horyzontu zdarzeń, mimo że będzie do niego przyciągane z ogromną siłą! Zatrzymanie upływu czasu okaże się bowiem dominujące.

No dobra, ale jakim cudem Gauss nabrał wątpliwości co do zasad geometrii euklidesowej na dobrych kilkadziesiąt lat przed odkryciem teorii względności? Którędy przyszło mu to do głowy? No cóż, był on pod wieloma względami wyjątkowym okazem. Już w podstawówce wsławił się niezwykle umiejętnościami matematycznymi. Wieść niesie, że jeden z jego nauczycieli kazał uczniom zsumować wszystkie liczby od 1 do 40, żeby mieć w czasie lekcji chwilę świętego spokoju. Jednak dziewięcioletni Gauss niemal błyskawicznie podał poprawny wynik, co wszystkich wprawiło w konsternację, tym bardziej, że nikt inny nie był w stanie w ogóle podać dobrego wyniku, nawet po długim czasie. Jak to możliwe?

Otóż młody Gaussik zwrócił uwagę na fakt, że $1+40$ to dokładnie tyle samo, co $2+39$, $3+38$, $4+37$ i tak dalej. A zatem suma wszystkich liczb od 1 do 40 to po prostu 41×20 , czyli 820. Czyli niby taki bystry, a mierzył sumę kątów w trójkątach, mimo że każdy głupi wie, że wynosi ona przecież 180 stopni...

Zadanie od Czytelnika

Jeden z naszych Czytelników prosi o pomoc w rozwiązaniu następującego zadania, za rozwiązanie oferując żywą geś lub jej równowartość.



Czy istnieje $x \in (0, 1)$ takie, że liczby

$$2^{\frac{x}{3}} \text{ oraz } 3^{\frac{x}{2}}$$

są jednocześnie wymierne?

Rozwiązania prosimy przysyłać na adres delta@mimuw.edu.pl

Piękna fizyka: dlaczego $E = mc^2$, a gwiazdy świecą

* University of Toronto

Paweł ARTYMOWICZ*

Albert Einstein udowodnił, że energia i masa są tak ściśle powiązane, że można płacić jedną za drugą, a współczynnikiem wymiany jest kwadrat prędkości światła. Czyż jest prostsza i piękniejsza zależność opisująca nasz świat? Dziwne tylko, że absolwent szkoły średniej, a nawet kończący studia fizyki nie potrafią w sposób elementarny udowodnić, że $E = mc^2$. Pora to zmienić. Przytoczę jedno z najprostszych wyprowadzeń. Opowiem też, jak wspaniale astronomia i fizyka pomogły sobie nawzajem w czasach Einsteina. Dzięki temu rozumiemy, jak Słońce nas oświetla i ogrzewa i jak długo jeszcze będzie to robić.

Dowód $E = mc^2$

Równanie Alberta Einsteina oparte na jego Szczególnej Teorii Względności (STW) ma bardzo wiele zastosowań. Pozwoliło Arturowi Eddingtonowi wyjaśnić, skąd gwiazdy biorą energię, którą promieniują. Opiera się o nie także zasada działania wszelkiego rodzaju bomb oraz wszystkich silników spalinowych, zmieniających w reakcji spalania drobną część masy paliwa i utleniacza w energię. Doskonale sprawdza się też w CERN pod Genewą, gdzie energia zamienia się w masę: fizycy produkują tam masę nowych cząstek (w obu znaczeniach słowa „masa”) z energii zmiennego pola magnetycznego, przyspieszającego w akceleratorze cząstki trochę podobnie, jak pulsar wysyła w kosmos swe dwa strumienie promieni gamma i masywnych cząstek (przechodzących jedne w drugie w procesie kreacji i anihilacji).

Oto dowód elementarny, będący jednak w miarę ścisłym eksperymentem myślowym. Dokładnie takim, jakie uwielbiał przeprowadzać Einstein. W świecie bez tarcia i powietrza na szynach stoi wagon o masie M . Para cząstka-antycząstka o całkowitej masie m znajduje się początkowo na lustrze zawieszonym na tylnej wewnętrznej ścianie wagonu. Zachodzi anihilacja, cząstki znikają i pojawiają się fotony, które poruszają się z prędkością światła c od tyłu do przodu wagonu.

Niosą energię E anihilacji masy m oraz pęd $p = E/c$ (to właściwość fotonów znana już z równań elektrodynamiki Maxwella). Po czasie Δt fotony docierają do przedniej ściany, gdzie ich energia E z powrotem zmienia się w masę cząstek m . Emisji fotonów o pędzie p towarzyszy odrzut, ruch wagonu z pędem $-p$. Wagon przemieszcza się w czasie Δt do tyłu z prędkością $-p/M$, czyli $-E/(cM)$, a po uderzeniu fotonów w przednią ścianę zatrzymuje się. Nieruchomy środek masy układu leży w punkcie $x = (Mx_M + mx_m)/(M + m)$. Niech Δ oznacza różnicę między wielkościami na końcu i na początku eksperymentu. Zmiana położenia środka masy jest zerowa:

$$0 = (M + m)\Delta x = \Delta(Mx_M + mx_m) = M\Delta x_M + m\Delta x_m.$$

Współrzędne mas M i m zmieniają się w czasie Δt odpowiednio o: $\Delta x_M = -E/(cM)\Delta t$ oraz $\Delta x_m = c\Delta t$. Dlatego

$$0 = -(E/c)\Delta t + mc\Delta t,$$

czyli $E = mc^2$, c.b.d.o.

Einstein kontra Edison

Dwa lata po opisanu w 1905 roku w dwóch artykułach teorii STW Albert Einstein zdał egzamin habilitacyjny. Członek komisji zapytał kandydata dla żartu, czy umie udowodnić twierdzenie: $E = mc^2$, na co uczonek odpowiedział: „Nie zapamiętałem dowodu. Ale wiem dokładnie, gdzie znaleźć na półce książkę, w której zostało to udowodnione”. Czy to prawdziwa anegdota? Prawie na pewno tak! Einstein zawsze mawiał, że większością informacji nie warto zaprzętać pamięci, można je znaleźć w książkach. Gdy odwiedził po raz pierwszy słynny Uniwersytet Harvarda w Bostonie, w Ameryce budziła emocje kontrowersja wokół długiego kwestionariusza z pytaniami o mało istotne szczegóły z różnych dziedzin wiedzy, który wynalazca Thomas A. Edison dawał kandydatom do pracy w swej spółce, by sprawdzić, czy mają dobrą pamięć. Einstein zapytany o prędkość dźwięku (jedno z pytań testu) albo rzeczywiście nie pamiętał, albo udął że nie wie, by móc jeszcze raz powiedzieć: „Nie przechowuję takich informacji w moim umyśle, są dostępne w podręcznikach”. Polemizując ze słabo wykształconym Edisonem, który ogłosił, że edukacja wyższa jest niepotrzebna, Einstein podkreślił, że tak nie jest: rozwija ona bowiem zdolności i ma nie tylko tę wartość, że uczy faktów, lecz że uczy, jak myśleć.

W najprostszym przypadku, w procesie anihilacji pary cząstka-antycząstka powstaje para fotonów o równych energiach, poruszających się w przeciwnych kierunkach. Ich przeciwnie skierowane pędy sumują się do zera. Jeżeli pierwszy z pary fotonów porusza się do przodu wagonu, to drugi zaczyna poruszać się do tyłu, ale natychmiast odbija się od lustra. Po odbiciu oba fotony poruszają się więc do przodu, a wagon doznaje odrzutu i zaczyna poruszać się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu fotonów. Suma pędów wagonu i fotonów pozostaje równa zero.



Rozwiązanie zadania M 1602.

Przyjmijmy $S_1 = [ABP]$, $S_2 = [DCP]$, $T_1 = [ADP]$, $T_2 = [BCP]$. Zauważmy, że

$$\frac{[ABP]}{[BCP]} = \frac{AC}{CP} = \frac{[ADP]}{[DCP]},$$

wobec czego $S_1 S_2 = T_1 T_2$. Wobec tego przekształcając równoważnie dowodzoną nierówność, mamy

$$\sqrt{S_1 + S_2 + T_1 + T_2} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2},$$

$$S_1 + S_2 + T_1 + T_2 \geq S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2},$$

$$T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2} \geq 0,$$

$$\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2 \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, co kończy dowód.

Uwaga. Równość w udowodnionej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $T_1 = T_2$, czyli gdy $AB \parallel CD$.



Rozwiązanie zadania M 1600.
Korzystając dwukrotnie z warunku zadania, raz dla pary liczb (x, y) , a drugi raz dla $(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$, uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + f(y)}{2} &= \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{f(x) + f(y)}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{2} \cdot f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \cdot f\left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}}{\alpha}\right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\alpha} \\ &= f\left(\frac{x+y}{2}\right). \end{aligned}$$

Przydatne uogólnienie

Energia E w trakcie eksperymentu podróżowała jako bezmasowe promieniowanie (o zerowej energii spoczynkowej), którego pęd p i energia E spełniają

$$E = pc.$$

W ogólności, energia całkowita E to suma energii spoczynkowej mc^2 i energii związanej z pędem (kinetycznej), a w polach sił jeszcze też potencjalnej. Pomijając tę ostatnią, w STW udowadnia się, że dodawanie energii nie jest arytmetyczne, lecz „geometryczne”, tj. że

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2.$$

Uogólniony związek opisuje i cząstki masowe, i bezmasowe o dowolnym pędzie. Jest niesłychanie przydatny nie tylko w świecie atomowym, ale również w astrofizyce wysokich i niskich energii. W granicy małych pędów cząstek materii energia kinetyczna jest dużo mniejsza niż spoczynkowa: $pc \ll mc^2$. To domena mechaniki klasycznej, gdzie pęd definiuje się jako $p = mv$, a prędkość v spełnia $v \ll c$. Równanie upraszcza się wtedy do postaci asymptotycznej, gdzie energie sumują się arytmetycznie:

$$E \rightarrow mc^2 + p^2/2m.$$

[Czy umiecie to wykazać matematycznie? Spróbujcie udowodnić, że im x jest mniejsze, tym lepiej $(1+x)^{1/2}$ jest przybliżane przez $1+x/2$]. Energia kinetyczna przybiera więc postać z fizyki newtonowskiej: $p^2/2m = mv^2/2$.

Astronomia dowodzi Teorię Względności

Teoria Einsteina pola grawitacyjnego jako efektu krzywizny czasoprzestrzeni, opublikowana w wersji ostatecznej w 1916 r. jako Ogólna Teoria Względności (OTW), miała z początku jeszcze więcej sceptyków niż jego STW. Dlatego gdy po wielu kłótniach w komitecie noblowskim Einsteinowi przyznano Nagrodę Nobla za rok 1921, w roku 1922 nagrodzono inne niż STW i OTW. Przez wiele lat traktowano OTW jako nieudowodnioną eksperymentalnie. Można to było zrobić obliczeniowo, tłumacząc niewyjaśnioną dotąd drobną część precesji orbity Merkurego, ale można było też podać bardziej przemawiający i bezpośredni dowód astronomiczny, obserwując przewidywany efekt soczewkowania grawitacyjnego, czyli ugięcia promieni świetlnych w kierunku masywnego Słońca. W czasie całkowitego zaćmienia Księżyc blokuje promienie słoneczne i widać na niebie pobliskie gwiazdy. Powinny one być widoczne w odległości nieznacznie większej od środka Słońca niż w katalogu czy na dokładnej mapie nieba. Pierwsza próba zaobserwowania zjawiska przez asystenta Obserwatorium Berlińskiego Erwina Freundlicha i Williama Campbella z kalifornijskiego Obserwatorium Licka podjęta była już w sierpniu 1914 roku w czasie zaćmienia na Krymie. Nie udało się: Amerykanin napotkał zachmurzenie, a Niemiec został aresztowany jako obywatel wrogiego państwa we właśnie rozpoczętej I wojnie światowej. Do decydującej próby odkrycia soczewkowania grawitacyjnego doszło w czasie całkowitego zaćmienia Słońca w 1919 r. Tym razem próbę obserwacyjną podjął z entuzjazmem znany astrofizyk angielski Artur S. Eddington. Po zapoznaniu się z teorią grawitacji w czasie wojny światowej, kiedy to naukowcy walczących ze sobą państw całkowicie odwrócili się od siebie, powodowani fałszywym uczuciem patriotyzmu, Eddington chciał włożyć swój wkład w jej empiryczne udowodnienie nie tylko jako wspaniałej teorii grawitacji. Chciał też pokazać, że nauka nie zna granic i ideologii. Einstein i Eddington byli osamotnionymi w swych środowiskach pacyfistami, pierwszy w Berlinie nie wziął najmniejszego udziału w wysiłku wojennym ze względu na przekonania, drugi w Cambridge ze względów religijnych. Eddingtonowi groziło wręcz aresztowanie przez rząd angielski. Organizacja ekspedycji i wyjazd do Afryki była więc ze wszelkich względów priorytetem dla dyrektora Obserwatorium w Cambridge. W dżungli, w zatoce Gwinejskiej na wyspie Principe, Eddington wraz z pomocnikami znów napotkali w ciągu pierwszych kilku minut chmury! Lecz w ciągu pozostałych paru minut zachmurzenie minęło. Trudne pomiary nielicznych dobrze naświetlonych klisz fotograficznych dały wkrótce pierwszy wynik pozytywny: Eddington zwracając się na zebraniu Naukowego Towarzystwa Królewskiego z przeprosinami w stronę portretu Newtona, oznajmił, że ustanowiono nową teorię grawitacji.



Rozwiązanie zadania M 1601.
Zauważmy, że skoro

$$\sphericalangle AMK + \sphericalangle ACK = \sphericalangle BML + \sphericalangle BCL = 180^\circ,$$

to na czworokątach $ACKM$ oraz $BCLM$ można opisać okręgi. Wobec tego

$$\sphericalangle MCK = \sphericalangle MAK$$

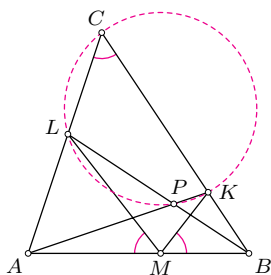
oraz

$$\sphericalangle MCL = \sphericalangle MBL,$$

a zatem

$$\begin{aligned} \sphericalangle KCL &= \sphericalangle MAK + \sphericalangle MBL \\ &= 180^\circ - \sphericalangle APB, \end{aligned}$$

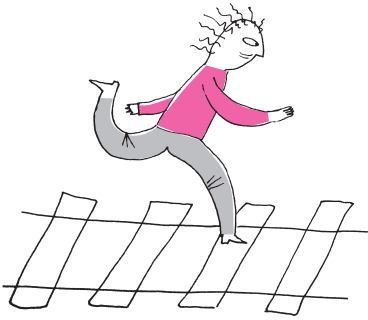
czyli ostatecznie $\sphericalangle KCL + \sphericalangle KPL = 180^\circ$.



Teoria względności odwzajemnia się, wyjaśniając, dlaczego gwiazdy świecą

Gwiazdy były w końcowych dekadach XIX wieku trudnym orzechem do zgryzienia. Na przykład Słońce. Wiadomo było, jaką ma masę i promień, moc promieniowania i temperaturę powierzchni (5770 K). Ale nie wiadomo było poza tym prawie nic, ani z czego nasza gwiazda jest zrobiona (nieznany stan skupienia ani pełen skład chemiczny), ani jak stare jest Słońce, ani co powoduje, że świeci i grzeje. Istniała już matematyczna teoria struktury wewnętrznej gwiazd, przy pewnych założeniach co do ich materiału (materiał barotropowy, a dokładniej gaz politropowy). Wykazano w niej, że musi istnieć olbrzymia różnica (ściślej, gradient) temperatury, ciśnienia i gęstości materiału gwiazdy: bardzo wysokie wartości oszacowane całkiem poprawnie na 10 mln K w centrum, przy zaledwie tysiącach na powierzchni. Inaczej gwiazda by się zapadła. Czy taka temperatura, czyli przeskalowana energia termiczna, mogła wydzielić się w procesie powstawania gwiazdy, która tworzy się z materii rozproszonej, a kończy w małej objętości, w głębokiej studni potencjału grawitacyjnego? W zasadzie tak (hipoteza Kelvina–Helmholtza uwalniania energii grawitacyjnej wskutek kontrakcji). Było jednak kilka wielkich „ale”.

Jeśli powstawanie Słońca i następnie powolne kurczenie się wydzielają energię grawitacyjną zamienianą na światło, Słońce nie może być starsze niż około 20–30 mln lat, a inne, masywne gwiazdy nie mogłyby utrzymać się dłużej niż 30–70 tysięcy(!) lat. To nie było do zaakceptowania ani w biologii ewolucyjnej (już Charles Darwin rozumiał, jak wiele czasu zajmuje ewolucja biologiczna), ani paleontologii, ani w geologii, a zwłaszcza w używającej radioizotopów geochronologii powstałej po odkryciach Henriego Becquerela oraz Marii i Piotra Curie. W samej astronomii zaś czas kontrakcji Kelvina–Helmholtza też przeczył obserwacjom masywnych, pulsujących gwiazd zwanych Cefeidami. Takie gwiazdy promieniają ze znacznie większą mocą niż Słońce i musiałyby kurczyć się tak szybko, że zmieniałyby kolor (temperaturę powierzchni) co najmniej 150 razy szybciej, niż pokazywały obserwacje astronomiczne. Gwoździem do trumny hipotezy K–H okazało się datowanie radioizotopowe skał ziemskich, które „powiększały” wiek Ziemi. W roku 1921 zgodnie mówiono już o ponad miliardzie lat, okresie nareszcie zbieżnym z geologią i teorią ewolucji. No dobrze, ale co grzeje tak długo Ziemię i tak mocno i długo Słońce? Radioaktywność? W przypadku Ziemi to prawidłowa odpowiedź. Dla Słońca to niewystarczające źródło. Pojawiły się głosy, że jest to jakaś podobna energia subatomowa, wyzwalana z wnętrza atomu. Powoływał się na taki mechanizm grzania Słońca w 1919 roku Henry Russell, mówił też o tym Jean Perrin.



W 1920 roku przedstawił konkretne dowody nie kto inny, jak przyjaciel Einsteina Artur Eddington. Według niego hel, jedyny pierwiastek wykryty po raz pierwszy spektroskopowo poza Ziemią, to produkt syntezy wodoru w naszej gwieździe. Eddington użył wzoru $E = mc^2$, by wyjaśnić dokładne pomiary Francisca W. Astona mas pierwiastków chemicznych przy użyciu spektrometru masowego (Nagroda Nobla 1922 r.). Według tych pomiarów cztery jądra wodoru, od których synteza helu startuje, są nieco masywniejsze od produktu końcowego reakcji – jądra atomu helu – o 0,8% (dzisiejsza wartość to 0,71%). Tracona w reakcji termojądrowej część masy (mniej niż 1% masy wodoru) zamieniana jest, jak zrozumiał Eddington, na energię promieniowania i ciepło, utrzymując gwiazdy w równowadze. Gwiazdy świecąc, odrobinę „chudną”. Zasoby wodoru są w nich tak duże, a transformacje pierwiastków tak nieefektywnie powolne, że gwiazdy podobne do naszej mogą przetwarzać wodór przez czas aż około 10 miliardów lat, dzięki czemu ewolucja doszła od jednokomórkowców do nas.

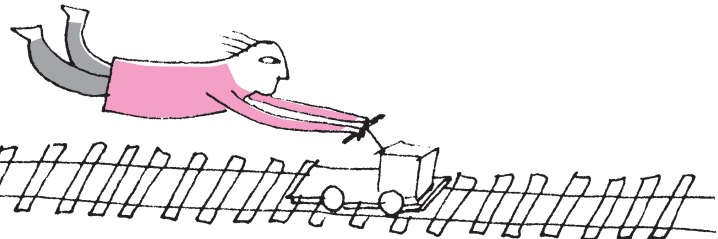
To łatwo wykazać. Masa Słońca, obliczona z okresu ruchu i odległości od Ziemi oraz zmierzonej w laboratorium stałej grawitacji, to $2 \cdot 10^{30}$ kg. Zaniedbując pewną wymianę materiału z resztą gwiazdy i gromadzenie się helu w gorącym jądrze gwiazdy, przyjmijmy, że tylko jądro o masie $1/5$ masy Słońca bierze udział w produkcji energii. Oryginalnie $3/4$ jego masy stanowił wodór, którego 0,7% znika w produkcji helu. $\Delta M \sim (1/5)(3/4)(0,007)2 \cdot 10^{30}$ kg jest zatem szacowanym ubytkiem masy wodoru. Całkowita energia, którą Słońce wyświeca jako normalna gwiazda, to $E = \Delta M c^2 \sim 1,9 \cdot 10^{44}$ J. Przy obecnej mocy promieniowania Słońca: $L \approx 3,9 \cdot 10^{26}$ J/s, energia E zapewnić może wyświecanie stałego strumienia L przez długi czas:

$$t = \frac{E}{dE/dt} = \frac{E}{L} \sim 15 \text{ mld lat.}$$

To górne oszacowanie, gdyż moc Słońca rośnie w czasie. Ma ono obecnie 4,6 mld lat, a stanie się coraz mocniej pulsującym czerwonym olbrzymem za kolejne 5 mld lat, aż zrzuci z siebie połowę masy. Jądro Słońca zostanie odsłonięte jako biały karzeł i zacznie ostygąć. Niedawno zaobserwowano takiego nowo powstałego białego karła, gdzie wyłączyła się właśnie synteza termojądrowa. Ma bardzo wysoką temperaturę (300 tys. K), bliższą na skali logarytmicznej obecnej temperaturze wnętrza Słońca niż jego powierzchni. Ciekawe, co stanie się z Ziemią po przemianie Słońca w białego karła.

Opisanie zasadniczego mechanizmu działania gwiazd przez Eddingtona było jedynie początkiem badań reakcji termojądrowych, czyli inicjowanych przez wysoką temperaturę. Pojawiły się poważne wątpliwości: jak cztery jądra wodoru mogą zbliżyć się dostatecznie do siebie, by utworzyć jądro helu? Mają dodatni ładunek elektryczny i silnie się odpychają. Energia wymagana do ich zbliżenia i zetknięcia odpowiada temperaturze 10^3 razy większej niż istniejąca w środku Słońca. Zgodnie z fizyką klasyczną żaden proton w Słońcu nie może się zbliżyć dostatecznie blisko do innego protonu. W sukurs przyszła wtedy powstająca mechanika kwantowa. W 1928 roku, dwa lata po skończeniu studiów na Uniwersytecie Leningradzkim, Georgij Gamow zaproponował zjawisko tunelowania kwantowego jako podstawę zrozumienia klasycznie niemożliwych reakcji jądrowych. Dwie następne dekady zajęło naukowcom na całym świecie badanie skomplikowanych, wykorzystywanych przez gwiazdy dróg łączenia mniejszych jąder atomowych w większe. A od lat 60-tych aż do końca XX wieku trwało rozwiązywanie tzw. zagadki brakujących neutrin, cząstek produkowanych w czasie syntezy helu. Ale to osobne, ciekawe tematy.

O powstawaniu pierwiastków pisaliśmy w Δ_{84}^5 i Δ_{18}^7 .



Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1600. Dana jest liczba rzeczywista $\alpha \neq 0$. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y równanie

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{\alpha}.$$

Wykazać, że funkcja f spełnia dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y równanie

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Rozwiązanie na str. 9

M 1601. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC , przy czym

$$\sphericalangle AML = \sphericalangle BMK = \sphericalangle ACB.$$

Odcinki AK i BL przecinają się w punkcie P . Wykazać, że punkty C, K, P, L leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie na str. 9

M 1602. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie P . Wykazać, że

$$\sqrt{[ABCD]} \geq \sqrt{[ABP]} + \sqrt{[CDP]},$$

gdzie $[F]$ oznacza pole figury F .

Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 975. Badania sejsmologiczne pewnej planety o promieniu $R = 6370$ km pozwoliły ustalić, że rozkład masy w jej wnętrzu ma symetrię sferyczną, przy czym gęstość warstw powierzchniowych, aż do głębokości $H = 2900$ km, wynosi $\rho_m = 4,44$ g/cm³. Głębsze warstwy mają gęstość $\rho_c = 11,00$ g/cm³. W jakiej odległości od środka tej planety wartość jej siły przyciągania grawitacyjnego jest największa? Wartość stałej grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg².

Wskazówka: Wewnątrz jednorodnej powłoki wypadkowa siła grawitacji jest równa zero, a na zewnątrz powłoka przyciąga tak, jakby cała jej masa była skupiona w jej geometrycznym środku.

Rozwiązanie na str. 5

F 976. Zewnętrzne warstwy Ziemi to tzw. skorupa ziemiska zbudowana ze skał o średniej gęstości $\rho_S = 2,8$ g/cm³ i znajdujący się pod nią płaszcz ziemski o średniej gęstości skał $\rho_P = 3,3$ g/cm³. Poniżej stałych zewnętrznych płyt tworzących powierzchnię Ziemi znajdują się warstwy płynne. O ile mniejsza jest grubość h warstwy skał skorupy ziemskiej pod oceanami od grubości H skorupy lądowej? Średnia głębokość oceanów wynosi $d = 3,7$ km, gęstość wody $\rho_W = 1,0$ g/cm³. Zmiany wartości przyspieszenia ziemskiego można pominąć.

Rozwiązanie na str. 4



mała delta

Nieskończoność: 3. Jak policzyć nieskończone?

Kontynuując naszą przygodę z nieskończonością, spróbujmy wypracować podstawowe narzędzia do jej badania. Przyda nam się w tym celu pewna analogia pomiędzy zbiorami nieskończonymi a tymi skończonymi. Wyobraźmy sobie dwa skończone zbiory osób. Powiedzmy, że elementami pierwszego z nich są: Aldona, Balbina, Cezaria oraz Delfina, a elementami drugiego: Abelard, Baldwin, Cyryl oraz Dezyderiusz. Od razu zauważamy, że te zbiory mają tyle samo elementów. Jak dojść do tego wniosku? Można policzyć elementy w każdym ze zbiorów i w obu przypadkach wyjdzie cztery. A co by było, gdybyśmy nie umieli liczyć do czterech? Czy jest inna metoda pozwalająca na stwierdzenie, że te zbiory mają tyle samo elementów?

Owszem, jest taka metoda – wystarczy ustawić elementy pierwszego zbioru w pary z elementami drugiego zbioru. Na przykład, Aldonę z Abelardem, Balbinę z Baldwinem, Cezarię z Cyrylem i Delfinę z Dezyderiuszem. Skoro udało się takie ustawienie w pary znaleźć, to znaczy, że te dwa zbiory mają taką samą liczbę elementów. I ta metoda ma przewagę nad metodą polegającą na liczeniu elementów obu zbiorów, bowiem możemy ją zastosować także do zbiorów nieskończonych. Chociaż nie jesteśmy w stanie policzyć do nieskończoności, nic nie stoi na przeszkodzie, żeby próbować ustawiać elementy nieskończonych zbiorów w pary. Dlatego matematycy dokładnie tak definiują pojęcie równoliczności zbiorów. Zbiory A i B są równoliczne (co oznaczane jest jako $|A| = |B|$), jeśli elementy zbioru A można ustawić w pary ze wszystkimi elementami zbioru B , tak że każdy z elementów jest w dokładnie jednej parze.



Łatwo można zauważyć, że dokładnie to robiliśmy w pierwszym odcinku rozważań o nieskończoności. Nieskończenie wiele jednoosobowych pokoi hotelu (zwanego hotelem Hilberta), ponumerowanych liczbami naturalnymi (poczynając od zera), ustawialiśmy tam w pary z elementami zbioru gości. W pierwszym przypadku zastanawialiśmy się nad zakwaterowaniem nowego gościa (nazwijmy go gościem -1) w sytuacji, gdy wszystkie pokoje, których jest nieskończenie wiele, są zajęte. Nazwijmy gościa, który jest w pokoju numer n , gościem n . Okazało się, że nowego gościa możemy dokwaterować mimo zajętości wszystkich pokoi, przesuując każdego z dotychczasowych gości do pokoju o numerze o jeden większym. Wtedy pokój zerowy będzie pusty i możemy tam zakwaterować gościa -1 . Rzeczywiście przyporządkowaliśmy w pary elementy zbioru gości $\{-1, 0, 1, 2, \dots\} = \{-1\} \cup \mathbb{N}$ z elementami zbioru pokoi $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$, przyporządkowując gościowi n pokój o numerze $n + 1$. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiory $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ oraz \mathbb{N} są równoliczne, co zapisujemy $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = |\mathbb{N}|$.

W drugim przypadku kwaterowaliśmy dwa nieskończone zbiory gości: kobiet i mężczyzn do pustego hotelu Hilberta. Doszliśmy do wniosku, że jest to możliwe, jeśli będziemy kwaterować ich na zmianę. Nazwijmy kolejne kobiety kolejnymi liczbami naturalnymi $\{0, 1, 2, \dots\}$, zaś kolejnych mężczyzn liczbami całkowitymi ujemnymi $\{-1, -2, -3, \dots\}$. Kwaterując kobiety i mężczyzn na przemian, umieścimy kobiety w pokojach o numerach parzystych, a mężczyzn w pokojach o numerach nieparzystych. Precyzyjnie mówiąc, kobietę n kwaterujemy w pokoju numer $2n$, zaś mężczyznę n (tym razem jest to liczba ujemna) w pokoju $-2n - 1$. Inaczej mówiąc, ustawiliśmy gości, którzy



zostali nazwani liczbami całkowitymi $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\} = \mathbb{Z}$, w pary z pokojami, których numery to liczby naturalne $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. A zatem dowiedliśmy, że $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne. Może być to sprzeczne z intuicją podpowiadającą, że na każdą niezerową liczbę naturalną przypadają aż dwie liczby całkowite. Niemniej jednak w hotelu Hilberta mieszczą się naraz całe dwie grupy gości, z których każda mogłaby sama zapełnić cały hotel Hilberta.

Na koniec pierwszego odcinka zadaliśmy pytanie, co by się stało, gdyby do pustego hotelu Hilberta przyjechało nieskończenie wiele autokarów, a w każdym nieskończenie wielu gości. Czy wtedy także będziemy ich w stanie wszystkich zakwaterować? Przyjrzyjmy się temu problemowi bliżej. Tym razem nazwijmy gości parami liczb naturalnych (n, m) . Pierwsza liczba niech określa numer autokaru, którym gość przyjechał, a druga jego numer siedzenia w autokarze. Wszystkich gości możemy przedstawić więc w następującej nieskończonej tabelce, gdzie kolejne rzędy odpowiadają kolejnym autokarom gości.

| | | | |
|----------|----------|----------|-----|
| $(0, 0)$ | $(0, 1)$ | $(0, 2)$ | ... |
| $(1, 0)$ | $(1, 1)$ | $(1, 2)$ | ... |
| $(2, 0)$ | $(2, 1)$ | $(2, 2)$ | ... |
| ... | | | |

Wszystkich tych gości możemy zakwaterować! Wystarczy, że stworzymy ich listę, przechodząc tę tabelkę kolejnymi skosami idącymi z góry po prawej w dół po lewej. Na pierwszym takim skosie mamy gości $(0, 0)$, na drugim gości $(0, 1)$ i $(1, 0)$. Na trzecim $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ itd. Gości kwaterujemy w pokojach w tej właśnie kolejności, czyli do pokoju 0 – gościa $(0, 0)$, do pokoju 1 – gościa $(0, 1)$, do pokoju 2 – gościa $(1, 0)$ itd. Widzimy, że każdy gość znajdzie się w jakimś pokoju. Przy odrobinie wysiłku można nawet zauważyć, że gość (n, m) znajdzie się w pokoju $\frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$. A zatem umiemy ustawić wszystkich gości, czyli umiemy przyporządkować w pary gości oznaczonych parami liczb naturalnych z pokojami ponumerowanymi liczbami naturalnymi. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiór wszystkich par liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych są równoliczne.

Co zatem można powiedzieć o zbiorze liczb wymiernych \mathbb{Q} , czyli liczb, które dają się zapisać w postaci p/q , gdzie $q \neq 0$ oraz p i q są liczbami całkowitymi? Czy wszystkie elementy tego zbioru można zakwaterować w hotelu Hilberta? Okazuje się, że tak! Dla uproszczenia zajmijmy się najpierw liczbami wymiernymi nieujemnymi. Okazuje się, że zakwaterowanie ich nie różni się specjalnie od poprzedniego rozważanego przypadku – możemy bowiem ustawić wszystkie takie liczby w analogicznej jak poprzednio tabelce, z tym że trzeba wykreślić powtórzenia liczb (np. $1/2 = 2/4$).

| | | | | |
|-------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----|
| $0/1$ | $0/2$ | $0/3$ | $0/4$ | ... |
| $1/1$ | $1/2$ | $1/3$ | $1/4$ | ... |
| $2/1$ | $2/2$ | $2/3$ | $2/4$ | ... |
| $3/1$ | $3/2$ | $3/3$ | $3/4$ | ... |
| ... | | | | |

Następnie możemy postępować podobnie jak poprzednio – kwaterować liczby kolejno z kolejnych skosów. Zatem zbiór liczb wymiernych nieujemnych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Łatwo jednak zauważyć, że cały zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} też ma tę własność – wystarczy kwaterować liczby wymierne nieujemne i ujemne na zmianę. To oznacza, choć znów może się to wydać nieintuicyjne, że $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Dowiedliśmy zatem, niekiedy wbrew intuicji, że zbiory liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych są parami równoliczne. Nasuwa się więc następujące pytanie: czy może w takim razie każde dwa nieskończone zbiory są równoliczne? Próbą odpowiedzi na to pytanie zajmiemy się w następnym odcinku.

Michał KORCH

Na całe życie

Kiedy się rodzimy, mamy ich 30 milionów i tyle ich będzie do końca naszych dni. Mogą zmieniać jedynie kształt. Mogą to być duże, coraz większe krople tłuszczu, otoczone błoną, z jądrem płaskim i przylegającym do błony od wewnątrz. Mogą się te krople zmniejszać, ale ciągle istnieją. Tak żyją komórki tłuszczowe, nasza wyściółka i zapas na gorsze czasy. Żadne odchudzanie nie zmniejszy ich liczby, jedynie może je spłaszczyć...

Ocenia się, iż na całym świecie żyje 640 mln osób otyłych (w 1975 roku było ich 105 mln) i 460 mln ludzi z niedowagą. Człowiek pierwotny był głodny, szczupły i umięśniony. Dzikie zwierzęta są smukłe, zawsze głodne. Dopiero jak je udomowimy, to te nasze świnki, koty, pieski – tyją. Udomowione mają swoją miskę. My dogadzamy sobie w restauracjach, albo w fotelu przed ekranem. Otyłość uznaje się za jedną z głównych plag obecnych czasów. To choroba o podłożu genetycznym – tyjemy, ale to geny decydują o indywidualnej granicy nadmiaru kalorii. Wszystkich tych genów jeszcze nie zidentyfikowano, jest ich na pewno kilkadziesiąt. Żadna pojedyncza pigułka nie spowoduje, że zdrowo i nieodwracalnie schudniemy. W tej sprawie staliśmy się niewolnikami ewolucji i cywilizacji.

Tkanka tłuszczowa (czyli komórki tkanki) wydziela wiele istotnych życiowo substancji, takich jak: cytokiny, czynniki wzrostu, związki regulujące powstawanie naczyń krwionośnych. Stanowi mechaniczną podporę i amortyzuje zawieszane w niej narządy wewnętrzne. Decyduje o termoregulacji. Nie przypuszczano jednak, że niesie także... tłuszczowe komórki macierzyste, nie tak dawno odkryte. W dodatku naprawdę dużo – 1 gram tkanki to 5 tysięcy komórek macierzystych! Należą one do frakcji komórek multipotencjalnych, to znaczy, że mogą się różnicować w wiele typów dojrzałych komórek tej samej klasy: osteocyty i chondrocyty (w hodowli *in vitro* można je różnicować do tkanki kostnej lub chrząstki), adipocyty, kardiomyocyty, β komórki trzustki, hepatocyty. Odsysany tęgim, bogatym ludziom podskórny tłuszcz może być źródłem takich komórek, odpowiednio pobranych i przechowywanych. W licznych badaniach wykazano, że gdy znajdują się w towarzystwie innych komórek i tkanek, mają aktywność przeciwwzapalną i immunosupresyjną, pobudzają procesy naprawy i regeneracji tkanek. Ich otrzymywanie i stosowanie nie budzi etycznych wątpliwości, szczególnie gdy dawca jest jednocześnie biorcą (przeszczep autologiczny). Świetnie znoszą zamrażanie, mogą być długo utrzymywane w hodowli bez utraty cech biologicznych. Przewiduje się zastosowanie tych komórek w leczeniu stanów zapalnych jelit, stwardnienia rozsianego, w terapiach niegojących się tkanek, rekonstrukcji skóry, chrząstek czy kości.

Odkrycie komórek macierzystych w wielu tkankach pobudziło zarówno twórców literatury fantastyczno-naukowej, jak i felietonistów z pism popularnych do proponowania licznych scenariuszy stosowania ich w celach terapeutycznych. Jednak jedna cecha komórek macierzystych i pochodnych – łatwa proliferacja, budzi obawy o możliwość aktywizacji procesów nowotworowych w ich obecności. Badacze wszelkiego rodzaju komórek macierzystych bardzo dokładnie testują to ewentualne zagrożenie i przed nim ostrzegają. Na razie jedyną powszechnie używaną i zaakceptowaną medycznie procedurą jest przeszczepianie macierzystych komórek szpiku, gdzie pierwszym warunkiem powodzenia jest wysoka zgodność tkankowa dawcy i biorcy. Reszta wieści o udanych terapiach należy albo do legend, albo do prób wykonanych niezgodnie z metodą i konsensusem naukowym, a więc nieodpowiedzialnych. Żeby jednak zakończyć optymistycznie – nie ma żadnych wątpliwości, że terapie z zastosowaniem komórek macierzystych, budzące tak ogromne zainteresowanie lekarzy, naukowców i pacjentów, będą w najbliższych czasach rozwijane i akceptowane.

Magdalena FIKUS

Konkurs im. Witolda Wilkosza

Oddział Krakowski Polskiego Towarzystwa Matematycznego ogłasza (z okazji setnej rocznicy powstania PTM) Konkurs im. Witolda Wilkosza na najlepszą studencką pracę popularyzującą matematykę.

Konkurs nosi imię Witolda Wilkosza (1891–1941), profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego, autora książek i pogadarek radiowych popularyzujących matematykę, kuratora Kółka Matematyczno-Fizycznego Uczniów UJ, redaktora serii wydawniczej „Biblioteczka Kółka Mat.-Fiz. U.U.J.”, znanego też z matematycznych dyskusji ze swoim szkolnym kolegą, Stefanem Banachem.

Do konkursu można zgłaszać zarówno prace już opublikowane, zgłoszone do druku, jak i prace przygotowane specjalnie na Konkurs.

Konkurs przeznaczony jest dla studentów (dowolnego kierunku studiów). Udział w konkursie osób posiadających tytuł magistra matematyki dozwolony jest w przypadku zgłaszania do konkursu pracy opublikowanej w 2018 lub 2019 roku, jeśli autor w momencie zgłoszenia pracy do druku nie posiadał jeszcze tego tytułu.

Prace powinny zostać przygotowane w formie opracowania pisemnego. Poza tym zastrzeżeniem, charakter prac oraz zakres popularyzowanej matematyki nie jest w żaden sposób ograniczony.

Zgłoszenie pracy na Konkurs należy przesłać do dnia 30 czerwca 2019 roku drogą e-mailową (prace w plikach z rozszerzeniem pdf) na adres ok.ptm@uj.edu.pl

Wręczenie nagród zaplanowano na 3–7 września 2019 roku, podczas Jubileuszowego Zjazdu Matematyków Polskich w stulecie PTM w Krakowie.

Regulamin Konkursu można znaleźć pod adresem

www2.im.uj.edu.pl/ptm/files/regulamin-wilkosz-100.pdf

A jednak się da (VI), czyli saga kryptologiczna w odcinkach. Tym razem: o cyfrowej gotówce.

Tomasz KAZANA

Za co kochamy gotówkę? Chyba przede wszystkim za anonimowość transakcji. To znaczy: jeśli Aldona oraz Celina podejmą z banku po banknocie stużłotowym; następnie Aldona wyda te pieniądze w sklepiku Bogumiła, a Celina u Dobromira; po czym zarówno Bogumił, jak i Dobromir zdeponują zarobione pieniądze z powrotem w banku, to oczywiście bank w żaden sposób nie będzie w stanie stwierdzić, czy klientką Bogumiła była Aldona, czy też może Celina.

Czy podobną właściwość mogą mieć pieniądze cyfrowe, to znaczy takie, gdzie rolę banknotów przejmą zwyczajne pliki komputerowe?

Pierwsza, bardzo naiwna próba skonstruowania takiego systemu mogłaby wyglądać tak, że bank wypłacający Aldonie pieniądze przekazuje jej po prostu plik `banknot_v1.txt` o treści "100 złotych". Oczywiście takie podejście nie jest mądre, bo przecież taki plik może każdy łatwo sam stworzyć, więc w takim systemie każdy mógłby sam sobie drukować dowolną ilość pieniędzy.

Spróbujmy sytuację poprawić, dodając podpis banku do treści pliku. To znaczy myślimy teraz o pliku:

```
banknot_v2.txt: "100 złotych, podpis cyfrowy banku: ad47gh23hg5ewgh3"
```

Takie podejście nie poprawia niestety znacząco sytuacji. Co prawda nikt sam z siebie łatwo takiego banknotu nie wygeneruje, ale każdy, kto posiada już choćby jeden taki banknot, może go wielokrotnie skopiować i wydawać wiele razy!

To może rozważmy wersję trzecią:

```
banknot_v3.txt: "100 złotych wydane Aldonie (ID = 3287392) dnia  
5 kwietnia 2019, podpis cyfrowy banku:  
38fsu4fhsjk4b4"
```

Przy takim formacie cyfrowych banknotów oczywiście jakiegokolwiek fałszerstwo będzie szybko wykryte, ale – niestety – tracimy nasz główny cel, mianowicie anonimowość transakcji...

Wydaje się, że stojmy pod ścianą. To znaczy, fundamentalne logiczne prawo wyłączonego środka (*tertium non datur*) powiada, że:

albo

(a) w treści pliku banknotu jest zawarta informacja o osobie pobierającej go z banku;

albo

(b) w treści pliku banknotu nie ma tej informacji.

I teraz: w przypadku formatu typu (a) tracimy anonimowość, a w przypadku (b) – jesteśmy zawsze narażeni na niewyrafinowany atak jak wyżej. To znaczy, właściciel banknotu, który nie zawiera informacji o nim, nieważne jak wymyślny byłby format jego zapisu, zawsze może po prostu go skopiować i wydać dwa razy...

A jednak! Zaprezentujemy za chwilę system cyfrowych banknotów, którego nie będzie cechował żaden z dwu powyższych mankamentów. Wysokopoziomowa intuicja stojąca za jego ideą jest taka, że – co prawda w banknocie *jest* zawarta informacja o jego pierwotnym właścicielu – zapisana jednak w taki sposób, że jednokrotnie wydany banknot będzie wymagał nieosiągalnej mocy obliczeniowej, aby wyciągnąć z niego informację o właścicielu, ale już dwie *kopie* wydanego (w nieuprawniony sposób) dwa razy banknotu – łatwo to umożliwią. (Niecóż oczywiście upraszamy. W istocie nie będą to dwie identyczne kopie. Protokół płacenia wymusi pewne wzbogacenie banknotu o – za każdym razem nieco inne – dodatkowe informacje.)

O podpisie cyfrowym pisaliśmy w odcinku pierwszym sagi, patrz: Δ_{18}^{10} .



Opis systemu cyfrowej gotówki

Tym razem treść pliku banknotu będzie składała się z ciągu liczb $B = (t, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)$ oraz podpisu cyfrowego banku ($\sigma = \text{Sign}_{\text{Bank}}(B)$), który uwierzytelnia ten ciąg. (Dla uproszczenia, w treści pomijamy nominał banknotu. Możemy przecież umówić się, że wszystkie cyfrowe banknoty są równoważne i mają np. wartość 1 zł.) Załóżmy, że taki właśnie banknot podjęła z banku Aldona, utożsamiana z identyfikatorem $ID \in N$ (liczbą rzędu kilkuset cyfr).

Liczba t jest tu zupełnie losowa i odgrywa rolę wyłącznie identyfikatora banknotu, natomiast liczby $(x_i, y_i)_{i=1..k}$ nie są byle jakie, ale spełniają następujące specyficzne warunki:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla każdego } i, x_i = \text{Commit}(r_i) \text{ oraz } y_i = \text{Commit}(s_i), \\ \text{gdzie } r_i \text{ jest losowy, byle tylko } r_i \leq \text{ID} \text{ oraz } r_i + s_i = \text{ID}; \\ \text{otwarcia do wszystkich zobowiązań powinny być znane Aldonie.} \end{array} \right\} (*)$$

Teraz opiszemy, jak wygląda *wydanie* takiego banknotu, na przykładzie płatności dokonanej przez Aldonę w sklepiu Bogumiła:

1. Aldona, po spakowaniu i sprawdzeniu zakupów, wyraża gotowość przekazania swojego banknotu Bogumiłowi;
2. Ucieszony Bogumił losuje ciąg k bitów (b_1, \dots, b_k) i oznajmia je Aldonie;
3. Aldona przekazuje Bogumiłowi plik banknotu (czyli wszystkie liczby $t, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ oraz podpis σ) i dodatkowo otwiera część zobowiązań zawartych w banknocie. Konkretnie: (dla każdego i) jeśli $b_i = 0$, to otwiera x_i (wówczas Bogumił poznaje r_i), a jeśli $b_i = 1$, to otwiera y_i , ujawniając wartość s_i .
4. Bogumił sprawdza, czy podpis banku σ jest poprawny oraz czy protokół otwarcia przebiegł prawidłowo. Jeśli tak – to może pożegnać Aldonę i zachować w pamięci komputera jej banknot wraz z dodatkowymi wartościami z otwartych zobowiązań.

A co się stanie, gdy Bogumił zdeponuje ten banknot w banku? Najpierw bank sprawdzi dokładnie to samo, co Bogumił w ostatnim kroku, czyli autentyczność własnego podpisu oraz poprawność otwartych zobowiązań. Jeśli ten test się powiedzie, to bank weryfikuje jeszcze jedną rzecz: upewnia się, że do tej pory nikt jeszcze nie przyszedł z banknotem o identyfikatorze t . Jeśli nie, to zwiększa saldo konta Bogumiła oraz archiwizuje wartość t wraz z całym otrzymanym banknotem. Problem pojawia się, gdy banknot o numerze t już ktoś wcześniej przyniósł, chociażby Dobromir. Oznacza to, że ktoś, niestety, oszukał i wydał swój banknot dwukrotnie. (Zakładamy, że szansa, iż dwa różne banknoty będą miały ten sam losowy identyfikator, jest zaniedbywalna.) Kto? Prawie na pewno uda nam się to zaraz stwierdzić! Wystarczy do tego dodatkowa wiedza, o którą proszony jest płatnik podczas każdej transakcji. Zauważmy, że bank dysponuje teraz dwoma niezależnymi zestawami takiej wiedzy. Jeśli k jest dostatecznie duże, to niemal na pewno (dla choć jednego i) w jednym zestawie ujawniono r_i , a w drugim: s_i . Ale przecież dodanie tych dwóch wartości ujawnia wprost identyfikator oszusta!

Jak widać powyżej, problem oszukiwania jest rozwiązany. A co z anonimowością? Oczywiście jest w miarę jasne, że sam ciąg $t, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k$ oraz tylko jeden zestaw wiedzy dodatkowej nie zdradzają identyfikatora pierwotnego właściciela banknotu. To prawda, ale haczyk jest gdzie indziej. Nigdzie do tej pory nie opisaliśmy, jak wygląda protokół podjęcia banknotu przez Aldonę. Gdyby miało to wyglądać po prostu tak, że bank sprawdza i podpisuje ciąg B wybrany przez Aldonę, to przecież nikt mu nie zabroni zapamiętać sobie tego B na przyszłość. Wówczas, już po wizycie Bogumiła, nie musi więc starać się otwierać zobowiązań zawartych w $(x_i, y_i)_{i=1..k}$, tylko najzwyczajniej może sprawdzić, komu kiedyś przekazał B , aby zidentyfikować Aldonę... Aby nasz system naprawić, musi nastąpić przedziwna sytuacja, w której Aldona jakoś otrzyma od banku poprawną parę $(B, \text{Sign}_{\text{Bank}}(B))$, a z drugiej strony – bank nie będzie wiedział o B ! Ten punkt brzmi jak magia, ale Czytelnik Pamiętający

Commit oznacza zobowiązanie, o którym pisaliśmy w drugim odcinku sagi, w Δ_{18}^{11} . Telegraficzny skrót wiedzy o zobowiązaniach: po opublikowaniu $\text{Commit}(x)$ praktycznie nie jest możliwe odczytanie x . *Otworzyć* zobowiązanie (ujawniając x) może tylko jego autor, przy czym – nie jest w stanie oszukać, czyli wmówić, że w zobowiązaniu znajdował się jakiś $x' \neq x$.

W całym artykule nie rozważamy sytuacji, gdy banknot przechodzi wielokrotnie z rąk do rąk (np. od Bogumiła do Ewy, od Ewy do Faustyny, i dopiero od Faustyny do banku), zanim trafi z powrotem do banku. Zakładamy, że każdy, kto otrzyma banknot od innej osoby, w następnym kroku zdeponuje go w banku. Nawet takie założenie, w połączeniu z przedstawianym protokołem, daje dość wysokie poczucie prywatności.



Telegraficznie o ślepych podpisach: istnieje protokół, w wyniku którego jedna strona może poprawnie (własnym podpisem) podpisać wiadomość m , wybraną przez drugą stronę, a jednocześnie: nie mieć pojęcia, co podpisała.

Telegraficznie o zero-knowledge: okazuje się, że bardzo wiele zdań typu „Znam x , który spełnia własność W ” da się udowodnić drugiej stronie bez ujawniania wartości x !

Bitcoin jest pseudonimowy – patrz Δ_{16}^6 . Prawdziwie anonimowym systemem kryptowalutowym jest np. Zerocash, który również korzysta z dowodów z wiedzą zerową.

Protokół Brandsa korzysta i ze zobowiązań, i z podpisów o dziwnych własnościach, i z protokołów typu zero-knowledge. Tych ostatnich: nie w wersji generycznej, a specyficznie skrojonych dla danego przypadku.

Wiersz został po raz pierwszy zaprezentowany podczas konkursu „Stanford Code Poetry Slam 2.0”, który odbył się 23 stycznia 2015 roku. Tłumaczenie: Tomasz Kazana.

Część Pierwszą Tej Sagi (Δ_{18}^{10}) zna już podobne dziwy, a konkretnie: ślepy podpis.

Niestety, okazuje się, że w naszym przypadku i ślepy podpis to nie jest dokładnie to, o co nam chodzi. Dlaczego? Otóż bank nie chce, bynajmniej, podpisać byle czego. Sytuacja jest nieco subtelniejsza. Bank chciałby podpisać pewien ciąg $B = (t, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_k, y_k)$, ale w taki sposób, że – godząc się, iż wprost niczego o wartościach elementów B się nie dowie – ma przynajmniej gwarancję, że zachodzi warunek (\star). Gdyby tak nie było, to sytuacja naszego systemu byłaby rozpaczliwie dramatyczna – nieuczciwa Aldona mogłaby przecież zażądać od banku ślepego podpisu na ciągu B' takim, że odpowiednie s'_i oraz r'_i spełniają na przykład $s'_i + r'_i = \text{ID}_{\text{Celina}}$ (zamiast $s'_i + r'_i = \text{ID}$), co sprawiłoby, że nie tylko będzie nieuchwytna, ale jeszcze wrobi Bogu ducha winną Celinę!

Aby ostatecznie rozwiązać ten problem, potrzebne będzie odwołanie się do jeszcze jednej części naszej sagi, mianowicie trzeciej (Δ_{19}^1), czyli tej o dowodach z wiedzą zerową (zero-knowledge). Otóż poprawny protokół wygląda tak: Aldona i bank realizują protokół ślepego podpisu dla B (wybranego przez Aldonę), ale bank, zanim ostatecznie (ślepo!) podpisze B , będzie oczekiwał dowodu (z wiedzą zerową!), że to, co podpisuje (choć tego nie widzi i nie zobaczy!), spełnia faktycznie warunek (\star). Szczegóły tego kroku są dość techniczne, wymagają oczywiście znajomości generycznego protokołu zero-knowledge dla języków klasy NP (prezentowanego w Δ_{19}^1), ale także podstawowej wiedzy o tym, czym w zasadzie są te języki i jak dowodzić przynależność do tej klasy. Pozwolę więc sobie tylko zakończyć ten finałowy fragment uwagą: to się naprawdę da zrobić, a dokładne uzupełnienie szczegółów może być bardzo trudną, ale i pouczającą intelektualną przygodą.

Postscriptum

Podkreślmy, że w tym artykule zajmowaliśmy się *prawdziwie* anonimową cyfrową gotówką. Należy sobie uzmysłowić, że ani Bitcoin (ani większość innych kryptowalut), ani tym bardziej standardowy system elektronicznej bankowości nie posiadają cechy anonimowości rozumianej tak, jak określiliśmy to na początku tego tekstu.

Postpostscriptum

Ekspozowany w niniejszym tekście system autor artykułu zobaczył po raz pierwszy w świetnym esej Ronald Cramera, Ivana Damgarda oraz Jespera Buusa Nielsena pt. *On Electronic Payment Systems*. Użyty dokładnie tak, jak opisano go wyżej, nie jest niestety dostatecznie praktyczny (wąskim gardłem jest użycie generycznych dowodów z wiedzą zerową), ma za to duży walor edukacyjny. Protokołem opartym o tę samą ideę i korzystającym z podobnych technik – co prawda bardziej skomplikowanym (sic!), ale za to znacznie szybszym (praktycznym!) – jest natomiast protokół Brandsa. Czytelnik Bardzo Zaawansowany może sięgnąć do cytowanej powyżej pracy, w której znajdują się szczegóły również tego protokołu.

Uzależnienie

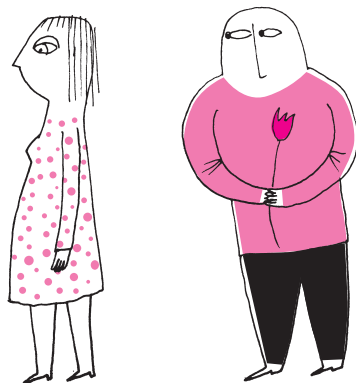
Oishi BANERJEE

```
void uzaleznienie() {
    int umysl = 1;
    while (true) {
        //co zasiejesz, to cię owinie wokół
        //i wspinamy się na szczyty, aby odkryć,
        //że dotykają przepaści
        umysl = umysl + 1;
        if (umysl < 0) {
            break;
        }
    }
}
```

Matrymonialna matematyka

Magdalena SIENIAWSKA*

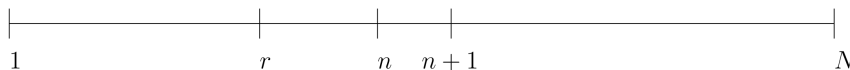
*Doktorantka, Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika, PAN



Kiedy jest najlepszy moment na powiedzenie sakramentalnego „tak”? Czy obecny obiekt westchnień jest osobą, z którą spędzisz resztę życia? Ile związków musi się rozpaść, żeby stworzyć stabilną relację? Pewnie wiele osób zadaje (lub wkrótce zada) sobie takie pytania. Ciężko uwierzyć, że matematyka i algorytmika mogą nam pomóc również w romantycznych rozważaniach i sercowych dylematach. Wszystko sprowadza się przecież do określenia momentu, kiedy należy przerwać szukanie i podjąć decyzję, a ten problem jesteśmy w stanie wymodelować matematycznie.

Zagadnienie jest znane w kręgach matematycznych jako *problem sekretarki*. Nie wiadomo, kto i kiedy jako pierwszy sformułował tę zagadkę, ale swoją popularność zyskała w 1960 roku po publikacji lutowego numeru czasopisma *Scientific American*. Oryginalnie problem był postawiony w następujący sposób: szef biura pilnie potrzebuje sekretarki, w związku z czym ogłasza nabór na to stanowisko. Na ogłoszenie odpowiada N kandydatek, z którymi szef przeprowadza rozmowy kwalifikacyjne. Po każdym wywiadzie rekruter ma dwie opcje: przyjąć kandydatkę i tym samym zakończyć poszukiwania bądź odmówić rekrutowanej osobie i zaprosić następną kandydatkę. Zakładamy, że (np. z racji dużego ruchu na rynku pracy) nie ma możliwości zmiany raz podjętej decyzji. Kiedy jest najlepszy moment na zakończenie rekrutacji, jeśli celem jest wybranie najlepszej kandydatki spośród wszystkich N zgłoszonych?

Intuicyjnie wiemy, że decyzji nie należy podejmować zbyt szybko (wówczas jest duża szansa, że nigdy nie spotkamy najlepszej kandydatki), ani zwlekać zbyt długo (najlepszą kandydatkę możemy wówczas pochopnie odrzucić). Okazuje się, że najbardziej opłaca się szukać właściwej kandydatki dopiero po przesłuchaniu około 37% kandydatek. Skąd akurat taka liczba? Można zauważyć, że najkorzystniejsza strategia polega na podzieleniu rekrutacji na dwie fazy. Najpierw należy zorientować się w kwestii ogólnego poziomu kandydatek, tj. istnieje taka liczba osób r , których aplikacje należy z automatu odrzucić, a same rozmowy kwalifikacyjne traktować jako zbieranie informacji (oczywiście musi być $1 \leq r < N$). Po przeprowadzeniu r wywiadów (pula testowa), w drugiej fazie należy wybrać pierwszą kandydatkę, która będzie lepsza od najlepszej z puli testowej. Jakie r (w wersji asymptotycznej: jaki stosunek r/N , gdy $N \rightarrow \infty$) da nam największe prawdopodobieństwo wybrania najlepszej sekretarki z całej puli? Zauważmy, że w puli zasadniczej jest $N - r$ kandydatek. Wyżej postawiony problem, z matematycznego punktu widzenia, sprowadza się do znalezienia takiego r , dla którego pewien ciąg liczbowy osiąga maksimum. Rozważmy przypadek, gdy najlepsza kandydatka jest na pozycji $n + 1$. W oczywisty sposób, jeśli $n + 1 < r$, to nie jesteśmy w stanie jej znaleźć. Schemat poniżej ilustruje przypadek, gdy najbardziej kompetentna osoba jest w puli zasadniczej.



Aby najlepsza kandydatka została faktycznie wybrana, musi zajść następujące zdarzenie: najlepsza kandydatka w $[1, r]$ jest również najlepsza w $[1, n]$ (którego prawdopodobieństwo oczywiście wynosi r/n). Ten warunek gwarantuje wytrwanie procesu rekrutacji do rozmowy z kandydatką $n + 1$ (czyli najlepszą z całej grupy N osób). Teraz, aby określić prawdopodobieństwo całkowite sukcesu, sumujemy odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe, przy kolejnych założeniach, że najlepsza kandydatka zajmuje pozycję $n + 1 = r + 1, r + 2, r + 3, \dots, N$ (przemnożone przez prawdopodobieństwa warunków, które w tym problemie stale wynoszą $1/N$):

$$\begin{aligned}
 P(\text{sukces}) &= \\
 &= \frac{1}{N} \left[\frac{r}{r} + \frac{r}{r+1} + \dots + \frac{r}{N-1} \right] = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=r}^{N-1} \frac{r}{n} \approx \frac{r}{N} \int_r^N \frac{1}{n} dn = \\
 &= -\frac{r}{N} \cdot \ln \left(\frac{r}{N} \right) = -x \cdot \ln(x)
 \end{aligned}$$

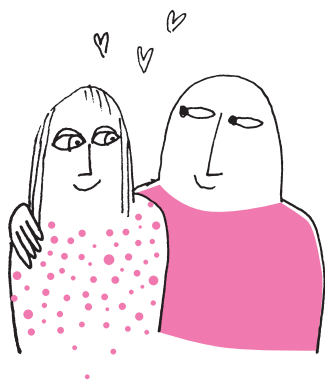
$$P(\text{sukces}) = \frac{1}{N} \left[\frac{r}{r} + \frac{r}{r+1} + \frac{r}{r+2} + \dots + \frac{r}{N-1} \right] \approx -\frac{r}{N} \cdot \ln \left(\frac{r}{N} \right),$$

gdzie \ln jest oznaczeniem logarytmu naturalnego (sposób uzyskania wyniku na marginesie). Teraz wystarczy znaleźć maksimum wyrażenia na $P(\text{sukces})$,

Kolejne linie stanowią wyrażenia równoważne:

$$\begin{aligned}[-x \cdot \ln(x)]' &= 0 \\ -1 \cdot \ln(x) - x \cdot x^{-1} &= 0 \\ -\ln(x) - 1 &= 0 \\ \ln(x) &= -1 \\ x &= e^{-1}\end{aligned}$$

Uwaga: Aby upewnić się, że funkcja $-x \cdot \ln(x)$ na przedziale $[0, 1]$ faktycznie osiąga maksimum w punkcie e^{-1} , należy jeszcze sprawdzić punkty brzegowe.



aby ustalić optymalny stosunek $\frac{r}{N}$. (Szukanie maksimum z użyciem pochodnej przyrównanej do zera – na marginesie.) Z naszych rozważań wynika, że wynosi on e^{-1} , czyli że pula testowa kandydatek powinna zawierać $1/e \approx 37\%$ wszystkich kandydatek. Wówczas szansa na znalezienie najlepszej osoby na stanowisko sekretarki wynosi $-e^{-1} \cdot \ln(e^{-1}) = e^{-1} \approx 37\%$.

W literaturze można spotkać się z różnymi modyfikacjami problemu sekretarki. Wynik będzie inny, jeśli możemy wrócić do początkowo odrzuconych osób albo zadowolimy się najlepszą lub prawie najlepszą kandydatką. Warto zauważyć, że tę matematyczną zagadkę można również rozważyć w sposób czasowy, nie ilościowy. Jeśli na przykład nabór na stanowisko sekretarki trwa dokładnie miesiąc, a nie wiemy, ile dostaniemy CV, to optymalną pulą testową będzie pierwsze 11 dni ($37\% \cdot 30$ dni), niezależnie od ilości rozmów kwalifikacyjnych. Następnie powinniśmy zatrudnić pierwszą osobą lepszą od osób z puli testowej.

Problem sekretarki dzięki swojej prostocie i jednoznacznemu rozwiązaniu znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach życia, także codziennego. Matematyka podpowiada, że powinniśmy postępować zgodnie z regułą 37%, jeśli chodzi np. o wynajem mieszkania. Przeprowadzając się do nowego miasta (np. z powodu wyjazdu na studia), najczęściej nie mamy wiedzy, jaki jest tam rynek nieruchomości. Jeżeli szukamy mieszkania do wynajęcia, warto ustalić sobie limit, np. 30 potencjalnie interesujących lokali, z czego pierwsze 11 potraktować jako wstępne oględziny rynku nieruchomości. Podobnie rzecz ma się z randkami i ślubami, które także można sprowadzić do problemu sekretarki. Umawianie się za pośrednictwem portali randkowych niekiedy przypomina rozmowy rekrutacyjne. Z puli interesujących nas współużytkowników portalu staramy się wybrać „tę najlepszą” lub „tego najlepszego”. Schemat postępowania powinien być podobny: ustalić liczbę spotkań, na jakie jesteśmy gotowi, pierwsze 37% potraktować wyłącznie jako zbieranie informacji, a z puli pozostałych osób wybrać pierwszą lepszą niż kandydaci/-tki z puli testowej.

W przypadku bardziej poważnych decyzji, takich jak ślub i ustakowanie się, także możemy zrobić użytek z problemu sekretarki. Zauważmy, że nie jesteśmy w stanie oszacować, ilu potencjalnych partnerów spotkamy w życiu. W takim przypadku lepiej jest się odnieść do limitu czasowego: z przyczyn biologicznych i prawnych najlepszym czasem na założenie rodziny jest wiek między 18 a 35 lat. Mamy więc w sumie $35 - 18 = 17$ lat na zbieranie informacji i podjęcie decyzji o ustakowaniu się. Z powyższych rozważań wiemy już, że przez pierwsze $37\% \cdot 17$ lat ≈ 6 lat powinniśmy poświęcić wyłącznie gromadzeniu danych. W wieku ok. $18 + 6 = 24$ lat przychodzi moment, gdy musimy być gotowi na podjęcie ostatecznej decyzji.

Problem sekretarki był wielokrotnie testowany na ochotnikach podczas badań psychologicznych i behawiorystycznych. Naukowcy chcieli sprawdzić, czy ludzie intuicyjnie skłaniają się ku zasadzie 37%. Okazuje się, że nie. Z badań wynika, że rodzaj ludzki jest raczej niecierpliwy i przystępuje do podejmowania decyzji już po ok. 31% puli. Na zbyt szybkim podejmowaniu decyzji można stracić, np. gdy na wycieczce szukamy kawiarni. Przedwczesne zdecydowanie się na filiżankę cappuccino może sprawić, że bezsensownie przeplacimy, podczas gdy tańsza kawiarnia jest tuż za rogiem. O ile zapłacenie zbyt wiele za kawę nie jest tragedią, o tyle w przypadku sprzedaży domu czy zamążpójścia zbyt szybko podjęta decyzja może być brzemienna w skutkach. Warto o tym pamiętać, kiedy następnym razem będziemy podejmować decyzję, i być może powstrzymać się przed zbyt szybkim i pochopnym przerwaniem poszukiwań.

Autorka zaznacza, że powyższe rozważania są jedynie ciekawostką matematyczną, nieuwzględniającą wszystkich możliwych scenariuszy i parametrów związanych z prawdziwym życiem. Ostatecznie, jak zauważył Mark Twain: „Są trzy rodzaje kłamstw: kłamstwa, bezczelne kłamstwa i statystyki”.

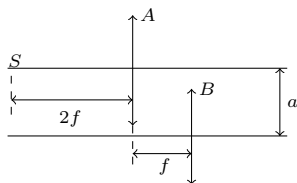
Więcej o informatycznych algorytmach i ich odniesieniu do codziennego życia można przeczytać w książce *Algorytmy. Kiedy mniej myśleć* autorstwa Toma Griffithsa i Briana Christiana.



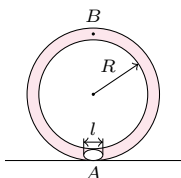
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2019

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
662 ($WT = 2,7$), 663 ($WT = 3,13$)
664 ($WT = 1,7$), 665 ($WT = 2,55$)
z numerów 9/2018 i 10/2018

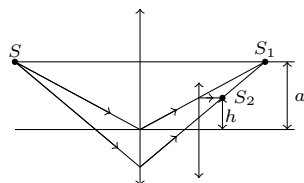
| | | |
|--------------------|-----------|-------|
| Marian Łupieżowicz | Gliwice | 41,74 |
| Tomasz Rudny | Poznań | 40,29 |
| Jacek Konieczny | Poznań | 29,80 |
| Ryszard Woźniak | Kraków | 28,77 |
| Krzysztof Magiera | Łosów | 28,70 |
| Jan Zambrzycki | Białystok | 28,39 |
| Michał Koźlik | Gliwice | 23,96 |
| Tomasz Wietecha | Tarnów | 22,72 |
| Aleksander Surma | Myszków | 22,25 |
| Mateusz Kapusta | Wrocław | 18,53 |



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
767 ($WT = 1,47$) i 768 ($WT = 2,85$)
z numeru 10/2018

| | | |
|------------------------|-----------|-------|
| Piotr Kumor | Olsztyn | 46,39 |
| Marcin Małogrosz | Warszawa | 42,02 |
| Franciszek S. Sikorski | Warszawa | 40,74 |
| Andrzej Kurach | Ryjewo | 40,27 |
| Krzysztof Kamiński | Pabianice | 35,75 |
| Paweł Kubit | Kraków | 35,69 |
| Michał Adamaszek | Kęty | 35,42 |
| Witold Bednarek | Łódź | 35,31 |

Pan Piotr Kumor jest z nami od wielu lat.
Jest intensywnie – co jasno widać
z rocznych omówień Ligi. I właśnie
kończy czternaste okrążenie.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 678, 679

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

678. Dielektryczna kula spolaryzowana jest jednorodnie, to znaczy momenty dipolowe wszystkich cząsteczek są równe i wzajemnie równoległe.

- Znaleźć natężenie pola elektrycznego wewnątrz dielektryka, jeżeli w jednostce objętości znajduje się N cząsteczek, z których każda ma moment dipolowy $p = ql$. Odległość l między ładunkami dipola jest dużo mniejsza od promienia kuli.
- Znaleźć gęstość powierzchniową ładunków indukowanych na powierzchni kuli.

679. Na gładkim lodzie zderzają się sprężyste dwa jednakowe okrągłe kamienie do gry w curling, z których jeden początkowo spoczywa, a drugi porusza się ruchem postępowym. Prosta przechodząca przez środki kamieni podczas zderzenia tworzy kąt $\alpha = \pi/3$ z wektorem prędkości początkowej poruszającego się kamienia. Znaleźć maksymalną część energii układu, która podczas zderzenia przechodzi w energię sprężystej deformacji. Nie ma tarcia między kamieniami.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2019

Przypominamy treść zadań:

670. Znaleźć odległość między źródłem światła S i jego obrazem w układzie optycznym przedstawionym na rysunku 1. Ogniskowe soczewek A i B są jednakowe i równe f .

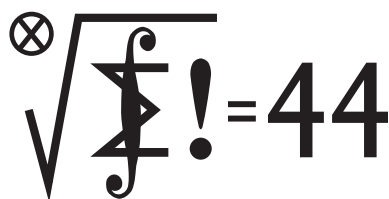
671. Rurkę o średnicy dużo mniejszej od długości zwinęto w pierścieniu o promieniu R . Pierścieniu napełniono wodą, z wyjątkiem niewielkiego odcinka o długości l , gdzie znajduje się kropka oleju, i postawiono pionowo. W chwili początkowej (rys. 2) kropka zaczyna wypływać z punktu A w kierunku punktu B . Znaleźć jej prędkość, gdy mija punkt B . Gęstość wody wynosi ρ_w , oleju $\rho_o < \rho_w$. Długość kropki oleju jest dużo mniejsza od promienia pierścienia. Tarcie zaniedbujemy. Nie zachodzi przesączanie przez olejowy „korek”.

670. Zgodnie ze wzorem soczewkowym $\frac{1}{f} = \frac{1}{2f} + \frac{1}{y_1}$ obraz S_1 (rys. 3) w pierwszej soczewce A powstaje w odległości $y_1 = 2f$ od tej soczewki. Obraz ten jest przedmiotem pozornym dla soczewki B , położonym w $x_2 = -f$. Oznaczając przez y_2 odległość obrazu S_2 od drugiej soczewki po przejściu światła przez układ, otrzymujemy ze wzoru soczewkowego: $\frac{1}{y_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_2} = \frac{2}{f}$, czyli $y_2 = \frac{f}{2}$. Odległość h punktu S_2 od osi optycznej drugiej soczewki wynika ze wzoru na powiększenie: $\frac{h}{a} = \left| \frac{y_2}{x_2} \right| = \frac{1}{2}$. Szukana odległość między przedmiotem S i obrazem S_2 wynosi $d = \sqrt{12,25f^2 + 0,25a^2}$.

671. Kropka oleju i wszystkie cząstki wody poruszają się z jednakowymi wartościami prędkości. Oznaczmy przez v szukaną prędkość kropki w chwili, gdy przechodzi ona przez punkt B . W czasie, gdy kropka oleju przemieszcza się z punktu A do B , porcja wody o tej samej objętości przemieszcza się z B do A , czyli obniża się o $2R$. Energia potencjalna pozostałej masy wody nie zmienia się. Zasada zachowania energii ma postać

$$\frac{((2\pi R - l)\rho_w + l\rho_o)v^2}{2} = l(\rho_w - \rho_o)2Rg,$$

stąd $v^2 = \frac{4l(\rho_w - \rho_o)Rg}{2\pi R\rho_w + l(\rho_o - \rho_w)}$. Ponieważ $l \ll R$, to w przybliżeniu $v \approx \sqrt{\frac{2gl(\rho_w - \rho_o)}{\pi\rho_w}}$.



Zadania z matematyki nr 781, 782

Redaguje Marcin E. KUCZMA

781. Dla ustalonych liczb rzeczywistych $b > a > 0$ oraz parzystej liczby naturalnej $n \geq 2$ wyznaczyć kres górny wartości stosunku A/H , gdzie A i H to (odpowiednio) średnia arytmetyczna i średnia harmoniczna n liczb wybranych dowolnie z przedziału $[a, b]$.

782. Dany jest trójkąt ABC , w którym wysokość opuszczona z wierzchołka C ma długość h . Na każdym odcinku CT , łączącym wierzchołek C z bokiem AB , odkładamy odcinek TP ustalonej długości $d < h$. Uzyskane w ten sposób punkty P tworzą pewną krzywą. Czy – jeśli liczba d jest dostatecznie mała – długość owej krzywej przekroczy długość boku AB ?

Zadanie 782 zaproponował pan Adam Woryna

Rozwiązania zadań z numeru 1/2019

Przypominamy treść zadań:

773. Dana jest liczba nieparzysta $n \geq 3$. W każde pole kwadratowej planszy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb $-1, +1$, tak że suma wszystkich wpisanych liczb wynosi 1. Wyznaczamy sumę liczb w każdym wierszu oraz sumę liczb w każdej kolumnie; dostajemy ciąg $2n$ liczb nieparzystych. Ile maksymalnie może być w tym ciągu liczb ujemnych?

774. Wyznaczyć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych m, n , że nierówność

$$\lfloor (m+n)a \rfloor + \lfloor (m+n)b \rfloor \geq \lfloor ma \rfloor + \lfloor mb \rfloor + \lfloor n(a+b) \rfloor$$

zachodzi dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b .

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | - | - | - | - | - | - | + |
| - | + | + | + | + | - | - | - | - | - | + |
| - | - | + | + | + | + | - | - | - | - | + |
| - | - | - | + | + | + | + | - | - | - | + |
| - | - | - | - | + | + | + | + | - | - | + |
| - | - | - | - | - | + | + | + | + | + | + |
| + | + | - | - | - | - | + | + | + | + | + |
| + | + | - | - | - | - | - | + | + | + | + |
| + | + | + | - | - | - | - | - | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + | + | + | + | + | + |

773. Suma wszystkich wpisanych liczb jest dodatnia, zatem co najmniej jeden wiersz oraz co najmniej jedna kolumna musi mieć sumę dodatnią. W rozważanym ciągu $2n$ sum (wierszy i kolumn) może więc być co najwyżej $2n - 2$ liczb ujemnych.

Dla każdego nieparzystego $n \geq 3$ ta wartość jest osiągalna. Ilustracja przedstawia przykładową realizację, gdy $n = 11$. Opis algorytmu: cały skrajny dolny wiersz oraz całą skrajną prawą kolumnę wypełniamy jedynekami. Po odcięciu tego fragmentu zostaje plansza kwadratowa o boku długości parzystej $n-1$. W jej górnym wierszu umieszczamy, kolejno od lewej, $(n-3)/2$ jedynek oraz $(n+1)/2$ minus jedynek. W kolejnych wierszach (planszy $(n-1) \times (n-1)$) powtarzamy ten układ z przesunięciem (w każdym kroku) o jednostkę w prawo; nadwyżkę wychodzącą poza prawy skraj przenosimy przy tym cyklicznie na skrajne lewe pole.

W pełnej planszy $n \times n$ uzyskujemy przewagę minusów nad plusami we wszystkich wierszach i kolumnach z wyjątkiem ostatniego i ostatniej. Każdy z początkowych $n-1$ wierszy ma sumę -1 , zaś ostatni wiersz ma sumę n , zatem suma całej tabeli wynosi 1. Stąd, ostatecznie, odpowiedź: szukane maksimum wynosi $2n - 2$.

774. Będziemy używać oznaczenia (wychodzącego z mody): $x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$; jest to liczba z przedziału $[0, 1)$. Znane (i łatwe do sprawdzenia) własności tego symbolu:

$$(1) \quad \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \{x\} \geq 1/2, \\ 0 & \text{gdy } \{x\} < 1/2 \end{cases} \quad (\text{dla } x \in \mathbb{R});$$

$$(2) \quad \{x\} + \{-x\} = 1 \quad (\text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}).$$

Niech m, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi podany w zadaniu warunek. Dla $a = b$ przybiera on postać

$$(3) \quad 2\lfloor (m+n)a \rfloor \geq 2\lfloor ma \rfloor + 2\lfloor na \rfloor.$$

To ma zachodzić dla wszystkich liczb $a \in \mathbb{R}$.

Podstawiamy $a = 1/m$ oraz $a = -1/m$ i otrzymujemy

$$2\left\lfloor 1 + \frac{n}{m} \right\rfloor \geq 2 + \left\lfloor \frac{2n}{m} \right\rfloor \quad \text{oraz} \quad 2\left\lfloor -1 - \frac{n}{m} \right\rfloor \geq -2 + \left\lfloor -\frac{2n}{m} \right\rfloor.$$

Oznaczając $1 + \frac{n}{m} = x_0$, mamy więc

$$2\lfloor x_0 \rfloor \geq \lfloor 2x_0 \rfloor \quad \text{oraz} \quad 2\lfloor -x_0 \rfloor \geq \lfloor -2x_0 \rfloor.$$

To znaczy, że dla $x = x_0$ oraz dla $x = -x_0$ lewa strona (1) ma wartość niedodatnią. Zgodnie z własnością (1), ta wartość musi być zerem, co ma miejsce jedynie, gdy $\{x_0\} < 1/2$ oraz $\{-x_0\} < 1/2$. Dla tej liczby x_0 nie jest więc spełniona równość (2), co pokazuje, że x_0 jest liczbą całkowitą, czyli że n dzieli się przez m .

Wracamy do nierówności (3) i zauważamy, że dla $a = 1/(2n)$ jej prawa strona jest dodatnia. Wobec tego i lewa strona musi być dodatnia, skąd $(m+n)a = (m+n)/(2n) \geq 1$, czyli $m \geq n$. Ale n dzieli się przez m . Zatem $m = n$.

Na odwrót, gdy $m = n$, nierówność dana w zadaniu jest spełniona dla wszystkich liczb $a, b \in \mathbb{R}$. By to sprawdzić, oznaczmy $ma = na = A$, $mb = nb = B$; należy pokazać, że

$$(4) \quad \lfloor 2A \rfloor + \lfloor 2B \rfloor \geq \lfloor A \rfloor + \lfloor B \rfloor + \lfloor A+B \rfloor.$$

Przy oznaczeniach $\lfloor A \rfloor = k$, $\{A\} = \alpha$, $\lfloor B \rfloor = l$, $\{B\} = \beta$, zależność (4) jest równoważna następującej:

$$(2k + \lfloor 2\alpha \rfloor) + (2l + \lfloor 2\beta \rfloor) \geq k + l + (k + l + \lfloor \alpha + \beta \rfloor);$$

czyli krócej:

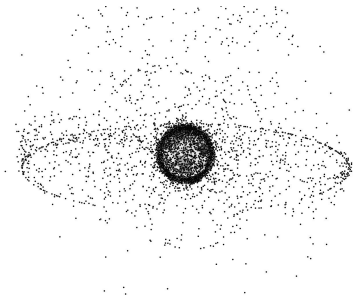
$$(5) \quad \lfloor 2\alpha \rfloor + \lfloor 2\beta \rfloor \geq \lfloor \alpha + \beta \rfloor.$$

Jeśli choć jedna z liczb α, β wynosi co najmniej $1/2$, lewa strona (5) wynosi co najmniej 1 i nierówność (5) zachodzi; a jeśli $\alpha, \beta < 1/2$, wówczas obie strony (5) są zerami.

Ostatecznie szukane pary liczb całkowitych $m, n \geq 1$ to pary równych liczb.

Prosto z nieba: Szanuj przestrzeń!

Czy przestrzeń kosmiczna jest rzeczywiście pusta? Niestety nie. Podobnie jak powierzchnię Ziemi, wodę i powietrze, kosmos wokół Ziemi okupują większe i mniejsze wytwory ludzkiej cywilizacji. Każdy satelita, sonda kosmiczna i załogowa misja wytwarza duże ilości kosmicznych śmieci. Wokół Ziemi krąży obecnie wiele tysięcy satelitów różnego przeznaczenia: telekomunikacyjnych, naukowych i wojskowych. Jednocześnie w przestrzeni okołozemskiej znajduje się ponad pół miliona sztuk śmieci kosmicznych o rozmiarach od 1 cm do 10 cm, które sprawiają, że średnio co roku niszczone jest jeden satelita.



Dwie główne „populacje” śmieci kosmicznych: pierścień obiektów w okolicy orbity geostacjonarnej (*geostationary earth orbit*, GEO) i chmura obiektów na niskiej orbicie okołozemskiej (*low-earth orbit*, LEO).

Najczęściej używanymi orbitami zarówno dla załogowych, jak i bezzałogowych pojazdów kosmicznych są tzw. niskie orbity okołozemskie, które obejmują zakres wysokości (odległości?) wystarczająco małych, by resztkowy opór atmosfery utrzymał tę strefę we względnej czystości (dzięki oporowi powietrza szczątki deorbitują i spalają się podczas spadku na Ziemię). Zmiany i zanik orbit jest znacznie wolniejszy na większych odległościach. Wpływ innych niż Ziemia mas, np. Księżyc, oraz wiatr słoneczny mogą stopniowo doprowadzić do spadku śmieci na Ziemię, ale proces ten jest powolny i może trwać tysiące lat.

Dlaczego ważne jest, by przestrzeń kosmiczna była jak najmniej skalana ludzkością? Oprócz oczywistego stwierdzenia, że nieładnie jest śmiecić, a ładnie starać się zachować naturę taką, jaka jest, kosmiczne szczątki mogą być dla nas niebezpieczne. Szczególnie ciekawym fenomenem związanym z kosmicznymi śmieciami jest *zjawisko Kesslera*. Efekt zbadany teoretycznie przez Donalda Kesslera z NASA w 1978 roku to scenariusz, w którym gęstość obiektów na niskiej orbicie okołozemskiej jest wystarczająco wysoka, aby kolizje między nimi mogły spowodować kaskadę, w której każda następna kolizja generuje coraz więcej śmieci-odłamków, co zwiększa prawdopodobieństwo dalszych kolizji. W efekcie rozmieszczenie szczątków na orbicie może sprawić, że działania w przestrzeni kosmicznej i użycie satelitów w określonych zakresach orbitalnych stanie się niepraktyczne przez dziesiątki lat.

Przestarzałe lub zepsute satelity wychodzące z użycia do niedawna były najczęściej po prostu porzucane z powodów ekonomicznych. Zespoły projektujące nowe satelity są jednak zobowiązane do wdrożenia rozwiązań pozwalających na łatwe deorbitowanie statku kosmicznego pod koniec misji bądź umieszczenie go na orbicie w niestabilnym rezonansie ze Słońcem lub Księżycem, który przyspiesza zanik orbity i umożliwia bezpieczne spalenie się w atmosferze. Na małe śmieci kosmiczne proponuje się natomiast zbudowanie potężnego (o mocy wielu megawatów) lasera naziemnego. Taka „kosmiczna miotła” będzie w stanie wywierać dostatecznie duże ciśnienie promieniowania, by umieszczać śmieci na niestabilnych orbitach i w ten sposób przyczyniać się do sprzątania okolic Ziemi.

Michał BEJGER

Niebo w maju

Nastał piąty miesiąc roku, a wraz z nim trwający przez około 3 miesiące okres tzw. białych nocy astronomicznych, gdy Słońce nie chowa się zbyt głęboko pod widnokrąg i przez całą noc północny horyzont jest rozświetlony. Nasza Gwiazda Dzienna 20 dnia miesiąca przekracza równoleżnik 20° w drodze na północ i od tego momentu do przesilenia letniego 21 czerwca wysokość jego górowania zmieni się już tylko o 3,5 stopnia. W trakcie miesiąca dzień wydłuża się z niecałych 15 godzin do prawie 16,5 godziny i na obserwacje widocznych tylko w nocy ciał niebieskich pozostaje mało czasu, a najślabsze z nich, przez białe noce, są w ogóle niewidoczne.

Pod koniec maja zaczyna się sezon na dwa inne zjawiska: łuku okołohoryzontalnego (więcej o nim na angielskiej stronie: <https://www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm>) oraz tzw. obłoków srebrzystych. Łuk okołohoryzontalny na naszych szerokościach geograficznych jest zjawiskiem rzadkim. Aby do niego doszło, Słońce musi znajdować się wyżej niż 58° nad widnokretem, co u nas zdarza się tylko latem i to tylko w godzinach okołopołudniowych. Drugim warunkiem jest występowanie cienkich chmur, działających jak pryzmat. Wtedy jakieś 46° pod Słońcem pojawia się mała, lecz intensywna tęcza. Jak łatwo policzyć, łuk okołohoryzontalny pojawia się u nas na wysokości kilkunastu stopni nad widnokretem, stąd

jego nazwa. Drugie ze zjawisk ma inny charakter: tutaj po prostu wysoko zawieszony chmury są oświetlane przez światło niezbyt głęboko schowanego Słońca, dzięki czemu widać je nawet w najciemniejszej części nocy.

Maj to miesiąc wiosenny, a zatem ekliptyka jest nachylona korzystnie wieczorem, zaś rano sytuacja staje się niekorzystna. Jest to główny czynnik decydujący o warunkach widoczności ciał niebieskich znajdujących się blisko ekliptyki i jednocześnie blisko Słońca. Szczególnie planet Merkury i Wenus oraz Księżyca w okolicach nowiu. Srebrny Glob przejdzie między nami a Słońcem 4 maja, stąd na początku miesiąca jego dostrzeżenie jest trudne, zwłaszcza że wędruje wtedy z naszej perspektywy pod ekliptyką, co dodatkowo pogarsza sytuację. To samo dotyczy planet Wenus i Uran. Pierwsza z planet dąży do koniunktji górnej ze Słońcem w połowie sierpnia, natomiast druga – do opozycji pod koniec października. 18 maja Wenus minie Urana w odległości 1° , lecz obie planety są w maju niewidoczne.

Nów Księżyca bardzo dobrze koresponduje z corocznym rojem meteorów η -Akwarydów, mających maksimum aktywności w okolicach 6 maja. Niestety na dużych północnych szerokościach geograficznych ich radiant położony jest niekorzystnie – wschodzi niewiele przed Słońcem. W nocy maksimum radiant roju wschodzi około godziny 2:30 i na początku świtu żeglarskiego wznosi się na wysokości jedynie 10° , co bardzo ogranicza liczbę widocznych zjawisk. Dużo lepiej η -Akwarydy prezentują się na półkuli południowej, gdzie trwa jesień i ekliptyka jest rano nachylona pod dużym kątem. Są to szybkie meteory, zderzające się z naszą atmosferą z prędkością 66 km/s. Są zatem bardzo jasne i często zostają po nich efektowne smugi.

Zupełnie inaczej Srebrny Glob zachowuje się po nowiu, gdy przejdzie na niebo wieczorne. Niestety początkowo też jest daleko na południe od ekliptyki i 5 maja, niecałą dobę po nowiu, raczej nie da się go jeszcze dostrzec. Lecz już następnego wieczoru wspaniale zaprezentuje się tuż po zmierzchu, przechodząc w fazie 4% przez gromadę otwartą gwiazd Hiady. Szczególnie blisko Księżyca znajdą się gwiazdy $\delta 1$, $\delta 2$ i $\delta 3$ Tauri. Pierwsze dwie gwiazdy znikną za księżycową tarczą. Polska ma trochę pecha i $\delta 1$ Tauri wyłoni się zza sierpa Srebrnego Globu w okolicach zachodu Słońca, natomiast $\delta 2$ pokaże się ponownie niewiele ponad pół godziny później. Trzecia z gwiazd uniknie zakrycia, choć granica zjawiska przejdzie tuż na południe od granic Polski. Niecałe 3° na lewo od Srebrnego Globu pokaże się Aldebaran, najjaśniejsza gwiazda Byka i jedna z jaśniejszych gwiazd na niebie.

Przez gwiazdozbiór Byka wędruje w maju także planeta Mars, zbliżająca się do wrześniowej koniunktji ze Słońcem. Na początku miesiąca Czerwona Planeta przejdzie 4° na południe od gwiazdy El Nath, tworzącej północny róg Byka. 7 maja 5° pod Marsem przejdzie Księżyc w fazie 9%. Dziewięć dni później planeta wejdzie do gwiazdozbioru Bliźniąt, a trzy dni później przetnie

jasną gromadę otwartą gwiazd M35, przesuując się jakieś $13'$ na północ od jej środka. Następnie Mars minie parę gwiazd η i μ Gem, kończąc maj 1° na południe od Meksutu, czyli ε Gem. W tym czasie jej blask zmniejszy się do $+1,8^m$, a średnica jej tarczy spadnie poniżej $4''$.

W następnych dniach naturalny satelita Ziemi szybko nabierze wysokości i wydłuży czas przebywania na nieboskłonie po zmierzchu, choć ekliptykę przetnie dopiero 10 maja, dwa dni przed I kwadrą. Tej nocy Księżyc dotrze do gwiazdozbioru Raka i w fazie 38% zbliży się na 2° do jasnej gromady otwartej M44. Przez I kwadrę Księżyc przejdzie około godziny 3 polskiego czasu, a tej samej doby pokaże się mniej więcej 3° od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Dwa dni przed pełnią, 16 maja, Księżyc wzejdzie w towarzystwie Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny.

Pełnia przypadnie 18 maja przed północą i zastanie Srebrny Glob na tle gwiazdozbioru Wagi, jakieś 6° na północny wschód od charakterystycznego łuku gwiazd z północno-wschodniej części Skorpiona, z gwiazdami Graffias i Dschubba. Dalej o 8° w tym samym kierunku znajdzie się Antares, najjaśniejsza gwiazda Skorpiona, o nie dającej się pomylić wyraźnej czerwonej barwie.

20 maja, już z fazą zmniejszoną do 95%, naturalny satelita Ziemi spotka się z szykującym się do czerwcowej opozycji Jowiszem. Tuż po wschodzie obu ciał niebieskich, jeszcze przed północą, przedzieli je dystans 3° . W maju Jowisz będzie się poruszał ruchem wstecznym na tle gwiazdozbioru Wężownika, między gwiazdami θ i ξ Ophiuchi. Do końca miesiąca jasność planety zwiększy się do $-2,6^m$, zaś jej tarcza urośnie do $46''$. Niestety obserwacje planety utrudni jej niskie położenie nad widnokreślami. Podczas górowania po godzinie 3 Jowisz wzniesie się na wysokość zaledwie około 15° .

W tym sezonie obserwacyjnym Jowisza i Saturna dzieli jakieś 30° . Szósta planeta od Słońca kreśli pętlę w północno-wschodniej części Strzelca, 5° na wschód od wianuszka gwiazd π , σ oraz $\xi 1$ i $\xi 2$ Sgr. Księżyc dotrze do Saturna 23 maja, z tarczą oświetloną w 82%. Dzień wcześniej przejdzie ponownie pod ekliptykę. Tuż po wschodzie obu ciał niebieskich około godziny 1:30 Księżyc znajdzie się $1,5^\circ$ pod Saturnem. Opozycja Saturna przypadnie w lipcu, miesiąc po opozycji Jowisza. Ostatniego dnia kwietnia planeta zmieniła kierunek ruchu na wsteczny, który zakończy w połowie września. Przesunie się w tym czasie o ponad 6° , zwracając mniej więcej $1,5^\circ$ na południe od gwiazdy $\xi 1$ Sgr. W maju jasność Saturna zwiększy się do $+0,3^m$, zaś jego tarcza urośnie do $18''$.

26 maja Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę, wschodząc niewiele przed świtem i wędrując nisko nad horyzontem, na tle gwiazdozbioru Wodnika. Do końca miesiąca nachylenie ekliptyki o tej porze doby nieco się poprawi, ale nie na tyle, by dało się Księżyc obserwować na krótko przed nowiem.

Ariel MAJCHER

Zrób sobie eksperyment

Jak odkryć nową cząstkę elementarną? Lata doświadczeń przyzwyczyły nas do myśli, że trzeba w tym celu wybudować potężny detektor i zrzeszyć do wspólnej pracy setki, jeśli nie tysiące fizyków. W przypadku zespołu detektora ATLAS przy LHC w CERN-ie zdarza się, że sama lista autorów publikacji naukowej opisującej najnowsze wyniki zajmuje jedną trzecią artykułu. Przekłada się to na ogromne koszty wybudowania i bieżącej obsługi, także naukowej, takiego detektora, więc decyzja o budowie nowego układu eksperymentalnego, np. w postaci akceleratora i stowarzyszonych z nim urządzeń, jest ważną decyzją polityczną. Przykładem może być marcowa decyzja rządu japońskiego o odłożeniu w czasie rozważania wsparcia budowy Międzynarodowego Zderzacza Liniowego (ILC, *International Linear Collider*).

Pomimo bardzo dużego nakładu pracy projektantów i wieloletniego namysłu nad ich konstrukcją współczesne wielkie detektory cząstek elementarnych nie są w stanie zarejestrować wszystkich potencjalnie pojawiających się w ich wnętrzu cząstek elementarnych. Detektory przy LHC mierzą cząstki produkowane w zderzeniach proton-proton (lub zderzeniach ciężkich jonów), o ile cząstki te odchyliły się dostatecznie od wiązki protonów. Tymczasem w niektórych bardzo interesujących propozycjach teoretycznych występują cząstki ciemnej materii o bardzo małej masie. Ich doświadczalna detekcja byłaby bardzo ważna dla zrozumienia tego tajemniczego składnika naszego Wszechświata. Cóż z tego, skoro cząstki te produkowane są przede wszystkim w rozpadach znanych cząstek elementarnych pędzących z ogromnymi prędkościami *wzdłuż* wiązki w detektorze?

Tego rodzaju myśli dręczyły z pewnością niejednego fizyka cząstek elementarnych. Zastanawiał się nad tym także Sebastian Trojanowski, który, uzyskawszy magisterium na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (z autorem tych słów jako opiekunem, który teraz bezwstydnie grzeje się w blasku cudzej sławy) oraz doktorat w Narodowym Centrum Badań Jądrowych pod kierunkiem prof. Leszka Roszkowskiego, wyjechał na staż podoktorski do Uniwersytetu Kalifornijskiego w Irvine. Tam, pod kierunkiem Jonathana Fenga, rozpoczął badania w zespole, w skład którego wchodził także Iftah Galon i Felix Kling.

Owoce tych prac była następująca koncepcja. Wiele cząstek postulowanych przez teoretyków, w tym cząstki ciemnej materii, nie ma ładunku elektrycznego. Oznacza to, że są niemal niewrażliwe na obecność silnych pól magnetycznych, które utrzymują wiązkę protonów w LHC na torze (prawie) kołowym. Gdyby zatem taka neutralna cząstka została wytworzona w punkcie zderzenia protonów, to jej trajektoria byłaby linią prostą stopniowo oddalającą się od wiązki protonów. Można by zatem umieścić na takiej linii jakiś, niekoniecznie duży, detektor cząstek, w nadziei, że te nowe cząstki po rozpadzie znowu będą oddziaływać ze znaną

materią. Powstało jednak pytanie, czy gdzieś w tunelu mieszczącym akcelerator znalazłoby się miejsce na jeszcze jeden niewielki eksperyment.

Jak duży? Feng, Galon, Kling i Trojanowski obliczyli, że w odległości pół kilometra od punktu zderzenia protonów wiązka nowo powstających neutralnych cząstek mogłaby mieć szerokość kilku centymetrów. Dodatkowo szczęśliwy przypadek sprawił, że wiązka ta przechodziłaby przez nieużywany tunel serwisowy poprzednika LHC – akceleratora LEP. Idea zbudowania nowego detektora nie była zatem aż tak szalona, jak to się teoretykom początkowo wydawało. Nie było jednak łatwo przekonać eksperymentatorów do porzucenia swoich zwykłych zajęć i wsparcia projektowania nowego urządzenia, które zostało ochrzczone mianem FASER, od angielskiego *ForwArd Search ExpeRiment*.

Szczęście nie opuszczało twórców FASER-a w jeszcze jednej kwestii. Zbudowanie każdego profesjonalnego układu doświadczalnego wymaga zgromadzenia pewnej liczby części zapasowych na wypadek awarii. W przypadku wielkich i skomplikowanych detektorów ATLAS i CMS tych części trzeba było przygotować szczególnie dużo. Tymczasem detektory okazały się znacznie bardziej niezawodne niż w pesymistycznych scenariuszach, według których skalkulowano zapotrzebowanie na części zapasowe. Część z nich można było zatem przekazać nowo powstającemu eksperymentowi.

W efekcie w lutym FASER uzyskał obietnicę pełnego finansowania od prywatnych amerykańskich fundacji zajmujących się wspieraniem nauki i na początku marca zostały zaaprobowany do zbudowania przez CERN. Obecnie trwa bowiem dwuletnia przerwa, podczas której akcelerator LHC zostanie istotnie ulepszony, aby mogło się w nim zderzać więcej cząstek. W tym samym czasie będzie także powstawał FASER. W końcu 2020 roku wiązka protonów zagości ponownie w akceleratorze i wszystkie detektory, łącznie z FASER-em zaczną zbierać dane, a pierwsze nowe analizy ujrzą światło dzienne w 2021 roku.

Cała ta historia dostarcza kilku morałów. Pierwszy, prześmiewczy: dobra marka to potęga i naukowcy nie cofną się przed niczym, żeby mieć dobrze brzmiący akronim. Drugi, dający nadzieję młodym badaczom: świat idei jest bardzo pojemny i na pewno w nauce jest jeszcze wiele ciekawych pomysłów, na które warto wpaść. I wreszcie trzeci, inspirujący: dobra koncepcja i wytrwałość w jej realizacji to ważne składniki sukcesu.

Krzysztof TURZYŃSKI

- J. L. Feng, I. Galon, F. Kling and S. Trojanowski, “ForwArd Search ExpeRiment at the LHC”, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 035001.
- A. Ariga *et al.* [FASER Collaboration], “Letter of Intent for FASER: ForwArd Search ExpeRiment at the LHC”, arXiv:1811.10243 [physics.ins-det].
- A. Ariga *et al.* [FASER Collaboration], “Technical Proposal for FASER: ForwArd Search ExpeRiment at the LHC”, arXiv:1812.09139 [physics.ins-det].
- A. Ariga *et al.* [FASER Collaboration], “FASER: ForwArd Search ExpeRiment at the LHC”, arXiv:1901.04468 [hep-ex].



Najważniejsza nierówność na świecie

Bartłomiej BZDEGA

Oto najważniejsza nierówność na świecie:

$$x^2 \geq 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

W praktyce stosuje się ją w następujący sposób. Nierówność $A \geq B$, którą chcemy udowodnić, przekształcamy równoważnie do postaci $C \geq 0$ i próbujemy zapisać C jako kwadrat liczby rzeczywistej bądź jako sumę kwadratów liczb rzeczywistych.

Zadania

1. Udowodnić, że dla liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{\frac{yz + zx + xy}{3}} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

2. Wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość wyrażenia

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$$

dla liczb rzeczywistych x i y , niebędących jednocześnie zerami.

3. Udowodnić, że dla liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n zachodzi nierówność

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$

4. Wykazać nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną i kwadratem

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

dla liczb rzeczywistych x_1, x_2, \dots, x_n .

5. Suma liczb dodatnich a, b, c jest równa 1. Udowodnić, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1.$$

6. Liczby dodatnie a, b, c spełniają równość $a + b + c = 1$. Wykazać, że

$$\frac{3a-1}{1-a^2} + \frac{3b-1}{1-b^2} + \frac{3c-1}{1-c^2} \geq 0.$$

7. Udowodnić, że dla liczb nieujemnych a, b i c zachodzi nierówność

$$\sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} + \sqrt{a^3b^3} \leq c^3 + \frac{1}{4}(a+b)^3.$$

8. Niech x_1, x_2, \dots, x_n będą liczbami dodatnimi. Przyjmijmy $x_{n+k} = x_k$ dla całkowitych k . Dowieść, że prawdziwa jest co najmniej jedna z nierówności:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geq \frac{n}{2}.$$

9. Wykazać, że dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geq \frac{1}{2}$, spełniających warunek $xyz = 1$, zachodzi nierówność

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geq x + y + z + 3.$$

10. Dowieść, że liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + cd + da \geq 2(a + b + c + d - 1).$$

11. Dowieść, że dla liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność

$$(a + b + c + d)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 6ab.$$

12. Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$ spełniają warunek $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$. Dowieść, że

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3}.$$

13. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$(a + b + c + d)^3 \leq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + 24(abc + bcd + cda + dab).$$

1. Podnieś nierówność obustronnie do kwadratu, a następnie przekształć do postaci $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$. Te wartości to odpowiednio $\frac{2}{3}$ oraz $\frac{2}{3}$. Rozwiązanie ułatwia spostrzeżenie, że zsumowany ułamek ma dodatni licznik i mianownik, bo $x^2 \pm xy + y^2 = (x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$.
 3. Po obustronnym pomnożeniu przez 2 i przeniesieniu wszystkich wyrazów na lewą stronę nierówności otrzymamy $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \geq 0$. Można wykazać tożsamość $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j - \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j - \sum_{i=1}^n x_i^2$.
 5. Należy najpierw ujednorodnić nierówności: $a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc}(a + b + c) \geq (a + b + c)^2$. Po uproszczeniu podstawiamy nowe zmienne za iloczyn bc, ca i ułatwia dalsze rachunki. Wykazać, że $\frac{1}{2} \left(\frac{1-a}{1} + \frac{1-b}{1} + \frac{1-c}{2} \right) \geq \frac{1+c}{2}$ oraz dwie nierówności analogiczne, następnie dodać wszystkie te trzy nierówności stronami. Dobrym punktem wyjścia jest nierówność $(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} - 2\sqrt{c^3})^2 \geq 0$. Wystarczy wykazać, że prawdziwa jest suma tych nierówności - wtedy prawdziwa jest co najmniej jedna z nich. Ta suma jest równoważna nierówności $\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{1} + \frac{1}{a_i} \right) \geq 2n$, gdzie $a_i = \frac{x_i}{x_i + 1}$.
 9. Przekształć dowodzoną nierówność do postaci $x^2 \pm xy + y^2 \geq (2z - 1)(2z - 1)$. Należy dodać stronami cztery nierówności postaci $(a + b - 1)^2 \geq 0$. Przenieść wszystkie wyrazy na prawą stronę i zapisać w postaci sumy dwóch kwadratów. Dobrym punktem wyjścia jest nierówność $\sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2 \geq 0$. Skorzystać z nierówności $S = a - a^2 + a^3 \geq a + b + c + d$, oraz trzech nierówności analogicznych.

TERMIN: 23–27 SIERPNIĄ 2019 ROKU, MIEJSCE: POD WARSZAWĄ
LX SZKOŁA MATEMATYKI POGLĄDOWEJ

Błędy, iluzje, oszustwa

Z okazji okrągłej
LX Szkoły podczas
jednego dnia wystąpi
plejada gwiazd: sami
medaliści Filca*



BĘDZIE MIĘDZY INNYMI O TAKICH RZECZACH:

- oszustwa w dowodach wielkich twierdzeń i to, że niektóre błędy potrafią być pouczające,
- statystyka i matematyka w naukach społecznych – jak to udajemy, że potrafimy modelować,
- złudzenia optyczne, numeryczne szacowanie błędów i inne oszustwa w fizyce i naukach przyrodniczych,
- sztuczki geometryczne, kombinatoryczne i karciane.

Szkoły są otwarte dla wszystkich związanych z matematyką niezależnie od tego, czy jej uczą, uprawiają ją, piszą o niej, czy się nią pasjonują. Szczególnie mile widziani są młodzi matematycy, którzy uczą bądź chcą uczyć w szkołach wyższych.

Zapraszamy

Zgłoszenia uczestnictwa przyjmowane są do **20.06.2019** poprzez formularz znajdujący się na stronie www.smp.uph.edu.pl

Pytania należy kierować na adres okm@uph.edu.pl



Ośrodek Kultury Matematycznej

* medal Filca jest nagrodą za najlepszy odczyt. Po każdej Szkole medalistę wybierają Słuchacze.