



Nakład: 3500 egz.

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $J \cdot s$ $\pi=3,141592\dots$

NR 4 (539) 2019

CENA 4 ZŁ - VAT 5%

PL ISSN 0187-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

ZŁOŻONOŚĆ
OBLICZENIOWA

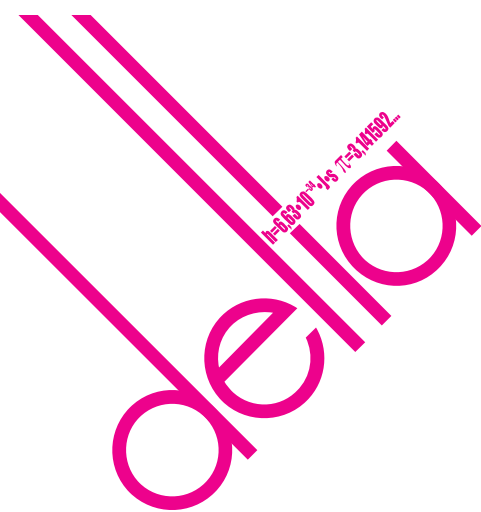
ZBIÓR

ENTROPIA

PIERŚCIEN

RELACJE

CO TO JEST?






SPIS TREŚCI NUMERU 4 (539)

Co to jest:

Zbiór	str. 1
Równoliczność	str. 1
Relacje	str. 2
Zbieżność	str. 2
Ciągłość	str. 3
Homeomorfizm	str. 4
Geometria rzutowa	str. 5
Przestrzeń metryczna	str. 6
Zbiór domknięty i zbiór otwarty	str. 7
Geometria różniczkowa	str. 8
Przestrzeń spójna	str.10
Grupa	str.11
Pierścienie	str.12
Funkcja nieobliczalna	str.13
Złożoność obliczeniowa	str.13
Oddziaływania fundamentalne	str.17
Entropia	str.17
Widmo spektroskopowe gwiazd	str.19
Przesunięcie ku czerwieni – redshift	str.19

Ponadto:

 Zadania	str. 4
Informacyjny kącik olimpijski (126): <i>Klocki z numerami i piłeczki na podłodze</i>	str.14
 Po nas choćby potop <i>Magdalena Fikus</i>	str.15
Aktualności	
Nienewsy	str.16
O kwantach, względności, hipnozie, przemijaniu i tym podobnych	str.18
Klub 44	str.20
Prosto z nieba: Podglądanie supernowej	str.22
Niebo w kwietniu	str.22
Najdroższa! <i>Romeo Montecchi</i>	str.24
 Zbiory i odwzorowania <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str.25

Droga Czytelniczko, Drogi Czytelniku!

Rzut oka na poniższy spis treści wystarczy, aby stwierdzić, że niniejszy numer *Delty* jest dość niecodzienny (lub raczej: niecomiesięczny). Postanowiliśmy poświęcić go prezentacji podstawowych pojęć poznawanych na pierwszych latach studiów przez adepta którejkolwiek z nauk widniejących na sztandarach naszego czasopisma (głównie matematyki, choć astronomia, fizyka i informatyka również są reprezentowane!). Mamy nadzieję, że Czytelnicy, dla których będzie to pierwsze zetknięcie z tymi fundamentalnymi terminami, wyrobią sobie trafne intuicje, przez co kolejne spotkania z wspomnianymi dziedzinami (na studiach czy w podczas lektury naszych artykułów) będą dużo przyjaźniejsze. Postaraliśmy się też, aby Czytelnicy doskonale obcy z przedstawionymi pojęciami również dowiedzieli się czegoś nowego, a przynajmniej poznali pouczające sposoby opowiadania o tych zagadnieniach. Wszystkim życzymy rozwijającej lektury!

Redakcja

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia,

informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wyszkołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 1 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Nagrodę Dziekanów za najlepszy artykuł Deltę w roku akademickim 2017/2018
otrzymał Michał Tarnowski za tekst *Przez eter do teorii względności*
zamieszczony w numerze 6(529)/2018.

Co to jest?

Zbiór

Zbiór to najbardziej podstawowe pojęcie matematyki. Ze zbiorami mamy do czynienia właściwie we wszystkich dyscyplinach matematycznych. Choć każdy Czytelnik na pewno intuicyjnie rozumie słowo „zbiór” (np. jako kolekcję lub zestaw utworzony z pewnego rodzaju elementów), to pojęcie to nie ma formalnej definicji.

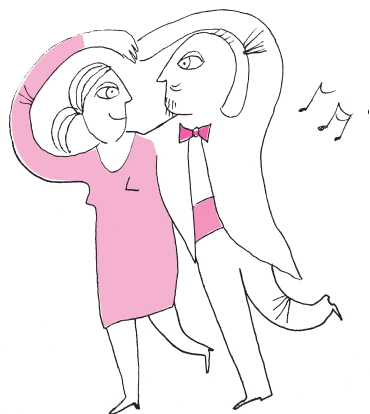
Do zdefiniowania dowolnego terminu zawsze potrzebujemy użyć jakiegoś innego pojęcia. Podczas studiów matematycznych każdy student usłyszy, że przestrzeń metryczna to zbiór, w którym zdefiniowano funkcję odległości o odpowiednich własnościach. Słyszy też, że grupa to zbiór, na którym zdefiniowano operację mnożenia spełniającą określone warunki. Zbiór jest **pojęciem pierwotnym**, nie ma więc swojej definicji – nie ma innego pojęcia, na którym tę definicję można by oprzeć. Każdy Czytelnik zna jednak wiele przykładów zbiorów, takich jak zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ czy też zbiór wszystkich egzemplarzy tego numeru *Deltę*. Jest też specjalny zbiór, w którym nie ma żadnych elementów, nazywany zbiorem pustym i oznaczany \emptyset .

Zbiory jednak nie mają nieograniczonej dowolności w swoim istnieniu. Muszą spełniać **aksjomaty**, czyli zdania opisujące ich podstawowe własności (stanowiące w pewnym sensie definicję tego pojęcia). Na przykład jeden z aksjomatów mówi, że jeśli dwa zbiory mają takie same elementy, to te zbiory są sobie równe (inaczej mówiąc, patrzymy wtedy na jeden i ten sam zbiór). Inny aksjomat postuluje, że dla każdego zbioru istnieje zbiór jego podzbiorów. Łatwo można wysnuć wniosek, że podzbiorów zbioru n -elementowego jest 2^n – wyjaśnienie w Kąciku Młodego Olimpijczyka na stronie 25.

Zauważmy także, że nie wszystkie koncepty, którym chcemy przypisać własność zbioru, istnieją. Na przykład nie istnieje „zbiór wszystkich zbiorów”. Widać, że w szczególności taki zbiór musiałby być swoim elementem, co już jest niepokojące. Załóżmy mimo wszystko istnienie „zbioru wszystkich zbiorów” i rozważmy jego podzbiór A złożony ze wszystkich zbiorów, które nie są własnymi elementami. Zastanówmy się, czy A należy do samego siebie. Jeśli tak, to A nie należy do A , bo nie spełnia warunku definiującego ten zbiór. Jeśli nie, to A należy do A , bo ten warunek spełnia. Ale to jest sprzeczność.

Michał KORCH

Równoliczność



Biorąc dwa skończone zbiory, można na dwa sposoby sprawdzić, że mają tyle samo elementów. Albo policzyć elementy w każdym z nich, albo też ustawić w pary elementy pierwszego zbioru z elementami drugiego. Tylko ta druga metoda może być zastosowana także do nieskończonych zbiorów. Mówimy, że dwa zbiory są **równoliczne**, jeśli elementy tych zbiorów można „ustawić w pary”, to znaczy elementy jednego z tych zbiorów połączyć we wzajemnie jednoznaczny sposób z elementami drugiego z nich. Nietrudno dowieść, że zbiór liczb całkowitych, a nawet zbiór liczb wymiernych są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych – i to jest najmniejsza z możliwych nieskończoności. Już Cantor zauważył, że nie jest to prawdą dla zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. Można dowieść, że liczb rzeczywistych nie da się ustawić w pary z liczbami naturalnymi. Mamy więc tu do czynienia z inną, większą nieskończonością. Co więcej, twierdzenie Cantora stanowi, że zbiór podzbiorów dowolnego zbioru nigdy nie jest równoliczny z tym zbiorem (jest w pewnym ściśle określonym sensie większy). A zatem, zaczynając od zbioru liczb naturalnych i iteracyjnie rozważając zbiór wszystkich podzbiorów kolejnych konstrukcji (na mocy twierdzenia Cantora), dostajemy nieskończoną serię coraz większych nieskończoności. A to też nie jest koniec. Można stworzyć nieskończoność jeszcze większą od każdej ze skonstruowanych w ten sposób.

Michał KORCH

Relacje



Rozwiązanie zadania F 974.

Pomiary Dulonga i Petita były wykonywane w temperaturach bliskich temperatury pokojowej – badali oni pierwiastki, które w tej temperaturze występują w stanie stałym, to znaczy, że ich atomy tworzą regularną sieć krystaliczną. W temperaturze pokojowej główny wkład do ciepła właściwego pochodzi od drgań sieci krystalicznej. W temperaturze T energia drgań każdego z atomów wynosi $6kT/2 = 3kT$, to znaczy: po $kT/2$ na każdy ze stopni swobody (zmiana energii potencjalnej i kinetycznej drgań w każdym z trzech kierunków przestrzennych; $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K jest stałą Boltzmana). Takie samo rozumowanie prowadzi do wniosku, że dla związku chemicznego w stanie stałym każdy z atomów też da wkład $3kT$ do energii wewnętrznej kryształu. Wniosek: w stanie stałym ciepło molowe związku o m atomach w cząsteczce wynosi w przybliżeniu $3mR$ (prawo Koppa–Neumanna). Dla FeO , $c_p \approx 6R$.

Mając dane dwa zbiory A i B , **relacją** zdefiniowaną pomiędzy tymi dwoma zbiorami matematycy nazywają po prostu podzbiór zbioru wszystkich par elementów, w których pierwszy jest ze zbioru A , a drugi ze zbioru B . Inaczej mówiąc, element ze zbioru A i element ze zbioru B mogą być w danej relacji lub w niej nie być. Relacje często występują na świecie, np. *posiadanie psa* jest relacją pomiędzy zbiorem wszystkich ludzi a zbiorem wszystkich psów. Człowiek o imieniu Dionizy jest w tej relacji z psem Dingiem wtedy i tylko wtedy, gdy Dingo jest jego pupilem.

Szczególnie interesujące wydają się relacje zdefiniowane na jednym zbiorze, czyli gdy $A = B$. Na przykład relacja \leq zdefiniowana na liczbach rzeczywistych. Liczba a jest w relacji \leq z liczbą b , jeśli a nie jest większe od b . Innym przykładem jest relacja *koloru* zdefiniowana na zbiorze wszystkich samochodów, gdzie dwa samochody są w tej relacji, jeśli są tego samego koloru. Jeszcze inny przykład to relacja *małżeństwo* zdefiniowana na zbiorze wszystkich ludzi.

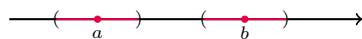
Można badać cechy poszczególnych relacji. Powiemy, że dana relacja jest **zwrotna**, jeśli każdy element jest w relacji z samym sobą. Z wyżej wymienionych przykładów relacja \leq oraz relacja koloru mają tę cechę (ale małżeństwo już nie). Relacja jest **symetryczna**, jeśli z tego, że element a jest w relacji z elementem b , wynika, że element b jest w relacji z elementem a . Widzimy, że relacja koloru oraz małżeństwo są przykładami takich relacji, zaś relacja \leq nie jest. I w końcu, relacja jest **przechodnia**, jeśli z tego, że a jest w relacji z b i b jest w relacji z c , wynika, że a jest w relacji z c . Jasne jest, że \leq oraz relacja tego samego koloru są przykładami tego typu relacji.

Relacja, która jest równocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia, nazywana jest **relacją równoważności**. Taka właśnie jest relacja koloru. Takie relacje mają wyjątkową cechę: generują podział danego zbioru na rozłączne podzbiory, których każde dwa elementy są w relacji. W wypadku relacji koloru jest to podział wszystkich samochodów na zbiory samochodów w poszczególnych kolorach: żółte, czerwone, niebieskie itd. Tak utworzone podzbiory matematycy nazywają **klasami abstrakcji**. Zauważmy również, że każdy podział rozważanego zbioru generuje na nim relację równoważności, w której dwa elementy są w relacji, o ile znajdują się w tej samej części podziału. Tę równoważność pomiędzy relacjami równoważności i podziałami matematycy nazywają **zasadą abstrakcji**.

Michał KORCH



Zbieżność



Rys. 1. Gdyby a, b były granicami pewnego ciągu, to w każdym z kolorowych przedziałów musiałyby znaleźć się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, a to jest sprzeczność.

Zbieżność to jedno z najważniejszych pojęć analizy matematycznej, odnoszące się najczęściej do ciągów i funkcji (oraz rozmaitych obiektów matematycznych skonstruowanych przy ich użyciu, np. szeregów czy ciągów funkcyjnych). Tu zajmujemy się zbieżnością ciągów liczbowych. Mówimy, że ciąg liczbowy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny, jeśli istnieje taka liczba a , że dowolnie blisko niej znajdują się *prawie wszystkie* (czyli wszystkie poza skończoną liczbą) wyrazy ciągu. Innymi słowami, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ możemy odrzucić skończoną liczbę początkowych wyrazów ciągu, tak by wszystkie pozostałe należały do przedziału $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, to mówimy, że **ciąg jest zbieżny do a** , i oznaczamy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Z tej definicji w łatwy sposób wynika na przykład, że ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę (rys. 1).

Przykładem ciągu zbieżnego jest ciąg $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$, który jest zbieżny do zera. Ciągi, które nie są zbieżne, nazywamy **rozbieżnymi**. Rozbieżny jest np. ciąg o wyrazach $a_n = (-1)^n$; istotnie, nie może on spełniać definicji zbieżności – żaden przedział długości 1 (co odpowiada $\varepsilon = \frac{1}{2}$) nie zawiera prawie wszystkich wyrazów tego ciągu.

Warto wspomnieć o szczególnym przypadku ciągów, które nie są zbieżne – o ciągach rozbieżnych do nieskończoności (nazywanych również ciągami zbieżnymi do granicy niewłaściwej). Są to ciągi spełniające następujący warunek: dla dowolnej liczby M można odrzucić skończenie wiele wyrazów ciągu, tak by

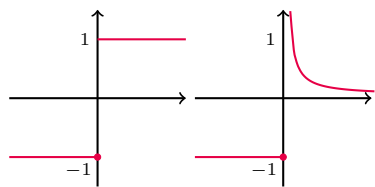
wszystkie pozostałe były większe od M . Rozbieżny do nieskończoności jest oczywiście ciąg $a_n = n$, a także ciąg o wyrazach $a_n = n + (-1)^n$.

Pojęcie zbieżności pozwala zdefiniować sumę nieskończenie wielu liczb, czyli **szereg**. Dodawanie jest działaniem dwuargumentowym, w jednym kroku umiemy dodać tylko dwie liczby, więc aby dodać nieskończenie wiele liczb, trzeba by wykonać nieskończenie wiele kroków, a tego zrobić nie umiemy. I tu z pomocą przychodzi nam granica ciągu. Sumę nieskończenie wielu wyrazów $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, zapisywaną skrótowo jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, definiujemy jako granicę sumy ciągu $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, zwanego **ciągami sum częściowych**. Możemy zatem wyznaczyć sumę wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazach q^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, dla $q \neq 1$ suma częściowa ma postać $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (wzór ten łatwo udowodnić, mnożąc obie strony równości przez $(1-q)$). Dla $|q| < 1$ granica ciągu S_n jest równa $\frac{1}{1-q}$, dla $q > 1$ jest nieskończona, a dla $q \leq -1$ nie umiemy określić szukanej sumy (bo ciąg S_n nie ma granicy). Warto dodać na koniec, że sumując wyrazy ciągu zbieżnego do zera, możemy uzyskać sumę nieskończoną – sztandarowym przykładem jest **szereg harmoniczny**, czyli suma $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + \dots$

Rozbieżność do nieskończoności sumy $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ nie jest oczywista, ale dowód tego faktu nie jest szczególnie trudny. (Można go znaleźć w Δ_{16}).

Marta SZUMAŃSKA

Ciągłość



Rys. 2. Wykresy funkcji f_1 i f_2

Ciągłość funkcji – na początku odwołamy się do intuicyjnego rozumienia tego pojęcia, by następnie je uściślić. Jeśli funkcja rzeczywista określona na przedziale jest ciągła, to jej wykres jest „w jednym kawałku” (można go narysować bez odrywania ołówka od kartki). Funkcje

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1/x & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

nie są ciągłe – w obu przypadkach $x_0 = 0$ jest argumentem, w którym wykres funkcji „rozrywa się”; jest to tzw. punkt nieciągłości funkcji. Funkcja ciągła nie może mieć punktów nieciągłości, czyli w każdym punkcie swojej dziedziny musi być ciągła. Pozostaje ściśle określić, co to wszystko znaczy. Ciągłość funkcji w punkcie można wyrazić w języku zbieżności ciągów: *funkcja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in D_f$, jeśli dla każdego ciągu o wyrazach $x_n \in D_f$ zbieżnego do x_0 ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x_0)$* . Łatwo teraz sprawdzić formalnie, przyjmując $x_n = 1/n$, że funkcje f_1 i f_2 nie są ciągłe w zerze – ciągi o wyrazach $f_1(1/n) = 1$ (ciąg stały) oraz $f_2(1/n) = n$ nie są zbieżne do $f_1(0) = f_2(0) = -1$.

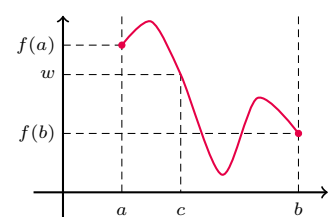
Gdy już wiemy, czym są funkcje ciągłe, zauważmy, że jest ich mnóstwo w otaczającym nas świecie – przyjrzyjmy się tylko funkcjom zależnym od czasu: temperatura w nagrzewającym się piekarniku zmienia się w sposób ciągły, ciśnienie w punkcie pomiarowym również, prędkość samochodu, nawet takiego z super mocnym silnikiem i hamulcami, nie może zmieniać się skokowo.

Warto podkreślić, że o ciągłości funkcji można mówić tylko w punktach jej dziedziny. Gdybyśmy przyjęli, że dziedziną funkcji f_1 i f_2 jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, to byłyby one ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny, a więc byłyby funkcjami ciągłymi (mimo, że ich wykresy składają się z dwóch „kawałków”). Podobnie funkcja tangens jest ciągła, mimo iż jej wykres ma nieskończenie wiele składowych.

Istnieją funkcje, które nie są ciągłe w żadnym punkcie swojej dziedziny; sztandarowym przykładem jest funkcja Dirichleta, która przyjmuje wartość 0 dla wszystkich argumentów wymiernych i 1 dla wszystkich niewymiernych.

Funkcje ciągłe są bohaterami wielu ważnych twierdzeń matematycznych. Jedno z nich orzeka, że funkcja ciągła określona na przedziale posiada **własność Darboux**, czyli przyjmuje wszystkie wartości pośrednie: dla dowolnych a, b w tym przedziale oraz w leżącego między $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $c \in [a, b]$, dla którego $f(c) = w$ (rys. 3). Funkcje o własności Darboux nie muszą być jednak ciągłe. Istnieją takie ekstremalne przykłady funkcji, dla których obraz dowolnego przedziału jest całą prostą rzeczywistą! Taka funkcja oczywiście spełnia własność Darboux i oczywiście nie może być ciągła (dlaczego?). Czytelniku, czy potrafisz skonstruować takiego potwora?

Marta SZUMAŃSKA



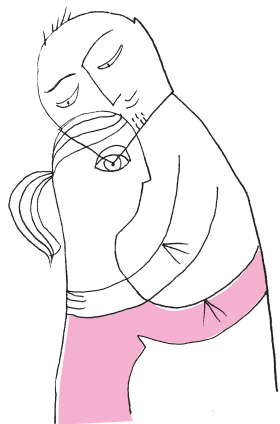
Rys. 3. Ilustracja własności Darboux

Własność Darboux pozwala na przykład stwierdzać istnienie rozwiązań rozmaitych skomplikowanych równań, bez rozwiązywania ich. Na przykład, żeby udowodnić, że istnieje (choćby jeden) x , dla którego spełniona jest równość $-x^2 + \sin(\pi x) \cos^2(\pi x) = \log_2(1+x) - 1$, wystarczy zauważyć, że ciągła funkcja

$$f(x) = -x^2 + \sin(\pi x) \cos^2(\pi x) - \log_2(1+x) + 1,$$

przyjmuje wartości $f(0) = 1$ i $f(1) = -\log_2 2 < 0$, zatem dla pewnego $x \in (0, 1)$ funkcja przyjmuje wartość zero i ten właśnie x jest rozwiązaniem naszego równania.

Homeomorfizm



Formalnie: homeomorfizm to różnowartościowe przekształcenie ciągle jednej przestrzeni metrycznej na drugą, którego odwrotne przekształcenie też jest ciągle. Odcinek $[0, \pi]$ i półokrąg są homeomorficzne, bo jeśli $h(t) = (\cos t, \sin t)$, to h ma wszystkie postulowane własności.

Homeomorfizmy to przekształcenia zachowujące różne własności zbiorów (obiektów geometrycznych). Znaczy to, że pewne cechy obiektu są zachowywane przy „ściskaniu” lub „rozciąganiu”, bez sklejania lub rozcinania, dziurawienia itp. Kulę (np. zrobioną z plasteliny) można w ten sposób przekształcić w sześciąt, więc kula i sześciąt są homeomorficzne. Kula nie jest homeomorficzna z trójkątem (bo jest za chudy) ani preclem. Za to precel jest homeomorficzny z kubkiem:



Zbiór liczb niewymiernych (ze zwykłą metryką $\rho(x, y) = |x - y|$) i zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie są homeomorficzne. Prosta to jeden „kawalek”, bez żadnych dziur, w odróżnieniu od dziurawego zbioru liczb niewymiernych. Formalnie: funkcja ciągła określona na zbiorze liczb rzeczywistych, przyjmująca wartość $\sqrt{2}$ i wartość $\sqrt{5}$ musi też przyjąć wartość $2 \in (\sqrt{2}, \sqrt{5})$, która liczbą niewymierną nie jest.

Również zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych nie są homeomorficzne choć oba mają nieskończenie wiele „dziur” – nie są równoliczne.



Na zakończenie zadanie. Przyjmijmy, że kształty obok są wykonane z dowolnie ściśliwej plasteliny. Należy znaleźć takie jej rozciąganie i ściskanie (bez rozcinania i sklejania ani zaklejania otworów), które z jednego kształtu pozwoli otrzymać drugi. Odpowiedź można znaleźć w *Deltoïdzie 25* („Zabawy z plasteliną”, Δ_{11}^1) dostępnym na stronie *Delty*.

Michał KRYCH



Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1597. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równość

$$(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1}) = 1.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $a + b$.

Rozwiązanie na str. 12

M 1598. Różne niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równości

$$a^2 + \frac{1}{a} = b^2 + \frac{1}{b} = c^2 + \frac{1}{c}.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $a + b + c$.

Rozwiązanie na str. 22

M 1599. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą oraz $f(x) = x^2 + x + p$. Przypuśćmy, że liczba $f(x)$ jest pierwsza dla każdej dodatniej liczby całkowitej x nie większej od $\sqrt{p/3}$. Wykazać, że liczba $f(x)$ jest pierwsza dla każdej dodatniej liczby całkowitej x nie większej od $p - 2$.

Rozwiązanie na str. 15

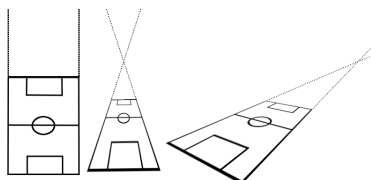
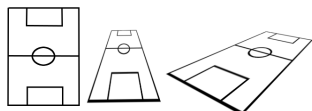
Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 973. Ze stacji kosmicznej wyrzucono dwa nieszczęsne pojemniki z tlenem. Pojemniki mają równe pojemności, ale w pierwszym z nich temperatura i ciśnienie resztek gazu są dwa razy większe niż w drugim. Resztki tlenu ulatniają się przez tak samo niedomknięte zawory (pozostawiają takie same otwory w pojemnikach). Jaki jest stosunek szybkości utraty gazu z tych pojemników? Rozwiązanie na str. 18

F 974. W 1819 roku Pierre Louis Dulong i Alexis Therese Petit na podstawie pomiarów stwierdzili, że molowe ciepła właściwe c_p pierwiastków w stanie stałym są w przybliżeniu równe $c_p \approx 3R$, gdzie $R \approx 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ oznacza stałą gazową. Jak można wyjaśnić tę prawidłowość (prawo Dulonga–Petita)? Uogólnij to prawo na przypadek związków chemicznych i na tej podstawie wyznacz przybliżoną wartość molowego ciepła właściwego tlenku żelaza FeO. Rozwiązanie na str. 2



Geometria rzutowa



▽ Przytoczony opis pochodzi z książki „Femme fatale. Trzy opowieści o królowej nauk” Witolda Sadowskiego.

Szersze omówienie można znaleźć w książce „Co to jest matematyka?” Richarda Couranta i Herberta Robbinsa.

Czyli *plaszczynę rzutową* można traktować jak zwykłą płaszczyznę, do której dołączono punkty w nieskończoności. Nieco formalniej: rozważmy płaszczyznę $z = 0$ (czyli wszystkie punkty postaci $(x, y, 0)$) i oznaczmy ją przez π . Punkt $S = (0, 0, 1)$ leży nad tą płaszczyzną.

Każdy punkt płaszczyzny π utożsamimy z prostą przechodzącą przez ten punkt i punkt S . Jasne jest, że nie wykorzystaliśmy wszystkich prostych przechodzących przez S – a mianowicie prostych równoległych do płaszczyzny π . Zauważmy jeszcze, że punktom prostej ℓ leżącej na π odpowiadają te proste przechodzące przez punkt S , które leżą na płaszczyźnie wyznaczonej przez punkt S i prostą ℓ . Niewykorzystana prosta to prosta przechodząca przez S i równoległa do ℓ – nazwiemy ją punktem w nieskończoności prostej ℓ i oznaczmy przez ℓ_∞ . W takim razie prostym równoległym ℓ_1, ℓ_2 leżącym na π odpowiada ta sama prosta ℓ_∞ przechodząca przez S . Proste równoległe (stały się płaszczyznami) przecinają się teraz w nieskończoności wzdłuż prostej ℓ_∞ . Płaszczyzna rzutowa może być potraktowana jako zbiór wszystkich prostych przechodzących przez S . Rozsądnie jest określić odległość punktów, czyli prostych przechodzących przez S , jako kąt między tymi prostymi.

Można płaszczyznę rzutową opisać inaczej: rozpatrzmy przekształcenie $\phi(x, y, z) = (xy, yz, zx, x^2 - y^2)$ (z przestrzeni \mathbb{R}^3 w \mathbb{R}^4), które ograniczymy jedynie do punktów sfery o promieniu 1 i środku $(0, 0, 0)$ – więc punktów, dla których $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

„**Geometria rzutowa** to dział matematyki zajmujący się opisem tego, co nie zmienia się w figurach geometrycznych, gdy patrzymy na nie z różnych punktów widzenia. Innymi słowy: zróbmy zdjęcia figury z różnych stron i badajmy tylko to, co jest wspólne dla wszystkich zdjęć. Spoglądając z różnych stron na przykład na boisko piłkarskie, możemy stwierdzić, że raz wydaje nam się bliżej nieokreślonym czworokątem, raz trapezem, a z lotu ptaka – prostokątem.

Skoro odległości ani równoległość prostych nie zostają zachowane dla różnych zdjęć, to, jak łatwo się domyślić, w geometrii rzutowej nie ma miejsca dla twierdzenia Talesa ani Pitagorasa. Z drugiej strony, widzimy, że proste pozostają prostymi, a punkty punktami. A zatem właśnie o prostych, punktach i ich położeniu mówi geometria rzutowa.

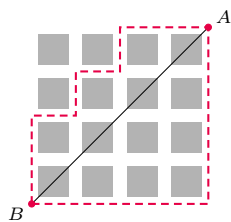
Wydawać by się mogło, że płaszczyzna rzutowa nie powinna istotnie różnić się od euklidesowej. Aby się przekonać, czy tak jest w istocie, powróćmy na boisko piłkarskie. Spójrzmy na zdjęcie, na którym wygląda ono jak trapez. Z łatwością spostrzeżemy, że przedłużenia linii bocznych boiska przecinają się w jednym punkcie. Spójrzmy teraz na zdjęcie z lotu ptaka. Tutaj przedłużenia linii bocznych... wcale się nie przecinają. Nie można jednak sensownie mówić o położeniu prostych, jeśli nie da się stwierdzić, czy się przecinają, czy nie. Jedyne rozsądne rozwiązanie to dodanie do płaszczyzny tzw. punktów horyzontu. Jest to zupełnie naturalne właśnie dla naszej geometrii widzenia: przecież idąc torami kolejowymi, widzimy, że szyny łączą się w jednym punkcie na horyzoncie. Teraz już możemy spokojnie powiedzieć, że także na zdjęciu z lotu ptaka linie boczne boiska przecinają się. No tak, ale powinny przecież przecinać się w jednym punkcie, tak samo jak na zdjęciu z trapezem. Znowu jedyne rozsądne rozwiązanie to utożsamienie dwóch przeciwległych punktów horyzontu, które od tej pory traktować będziemy jako jeden punkt. W ten sposób zakończyliśmy konstrukcję płaszczyzny rzutowej. (Należy jeszcze uzupełnić, że punkty horyzontu leżą na jednej prostej, którą trzeba dodać).” ♥

Każda prosta przechodząca przez punkt $(0, 0, 0)$ przebija opisaną sferę w dwóch punktach. Jeśli jednym z nich jest (a, b, c) , to drugim jest $(-a, -b, -c)$. Można się przekonać, że $\phi(x, y, z) = \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, y, z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ albo $(-x, -y, -z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Można więc utożsamić prostą przechodzącą przez punkty $(0, 0, 0)$ oraz (x, y, z) z punktem $\phi(x, y, z)$ (leżącym w czterowymiarowej przestrzeni). Niech zbiór A składa się z tych punktów sfery, których współrzędne spełniają warunki: $|z| \leq \frac{1}{2}$ i $y \geq 0$, a A_0 z tych punktów zbioru A , dla których $y > 0$. Na zbiorze A_0 przekształcenie ϕ jest różnowartościowe. Natomiast $\phi(-x, 0, -z) = \phi(x, 0, z)$, więc przekształcenie ϕ przekształca punkty $(-x, 0, -z)$ i $(x, 0, z)$ na ten sam punkt (skleja je). Przekształcenie ϕ skleja „końcowe” punkty pasa A z „przekręceniem”. Powstały twór to wstęga Möbiusa. Jej brzeg to jedna linia (dzięki „przekręceniu”). Przekształcenie ϕ odwzorowuje zbiór A oraz zbiór złożony ze wszystkich punktów sfery, dla których $|z| \leq \frac{1}{2}$, na ten sam zbiór. Zbiór tych punktów sfery, dla których $z \geq \frac{1}{2}$, można w naturalny sposób utożsamzić z kołem. Możemy więc powiedzieć, że płaszczyzna rzutowa powstaje przez sklejenie brzegami koła ze wstęgą Möbiusa.

W artykułach „Dobble” (Δ_{18}^6) oraz „Naprawdę ciekawa gra” (Δ_{14}^4) można przeczytać o przyjemnym zastosowaniu płaszczyzny rzutowej, a jeszcze więcej w „Czy widział ktoś płaszczyznę rzutową?” (Δ_{11}^6). Wszystkie wspomniane artykuły można znaleźć na naszej stronie www.deltami.edu.pl.

Michał KRYCH

Przestrzeń metryczna



Jeżeli każdej parze elementów danego zbioru (nazwijmy go M) przypiszemy odległość, zwaną także *metryką* (oznaczamy ją przez ϱ), to powstanie **przestrzeń metryczna** (M, ϱ) .

Zauważmy, że w otaczającym nas świecie spotykamy inne sposoby mierzenia odległości niż sugerowany przez Euklidesa. Faktyczna odległość, jaką trzeba pokonać w mieście z punktu A do B , na ogół ma niewiele wspólnego z odcinkiem łączącym te punkty (na rysunku obok szare kwadraty można postrzegać jak budynki, a biała przestrzeń to ulice między nimi). Nawet podróżując samolotem, nie przemieszczamy się nigdy po najkrótszej trasie – nie istnieją podziemne międzykontynentalne tunele. Dodatkowo piloci są zobowiązani do poruszania się tzw. korytarzami, a nie np. wzdłuż okręgu przechodzącego przez Warszawę i Nowy York, którego środkiem jest środek kuli ziemskiej.

Odległość przypisana każdej parze elementów ze zbioru M nie może być bylejaką, musi spełniać następujące warunki:

- $\varrho(a, b) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$,
- $\varrho(a, b) = \varrho(b, a) \geq 0$ dla dowolnych punktów $a, b \in M$ (*symetria*),
- $\varrho(a, b) + \varrho(b, c) \geq \varrho(a, c)$ dla dowolnych punktów $a, b, c \in M$ (*nierówność trójkąta*).

Postulaty te są dosyć naturalne: odległość między a i b wynosi zero tylko wtedy, gdy a, b są równe; odległość od a do b jest równa odległości od b do a ; odległość od a do c nie jest większa od sumy odległości od a do b i od b do c . Przykłady przestrzeni metrycznych:

- M to zbiór liczb rzeczywistych, a odległość dwóch liczb to wartość bezwzględna ich różnicy.
- M to zbiór punktów płaszczyzny, a metryka $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, czyli „zwykła” (Euklidesowa) odległość. Nazwa „nierówność trójkąta” w tym wypadku oznacza, że suma dwóch boków trójkąta jest nie mniejsza od trzeciego boku (mimo że w przypadku równości trudno mówić o trójkącie).
- M to zbiór punktów płaszczyzny oraz $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. To tzw. *metryka miejska*. Przemierzając się z punktu (x_1, y_1) do punktu (x_2, y_2) w mieście, w którym każde dwie ulice są albo równoległe, albo prostopadłe, przebywamy w jednym kierunku drogę $|x_1 - x_2|$, a w prostopadłym $|y_1 - y_2|$. Całkowita odległość to suma długości tych tras. Przykładowe najkrótsze trasy między punktem A i B , w tej właśnie metryce, zostały przedstawione na rysunku przerywaną linią.
- M to zbiór punktów płaszczyzny, a $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.
- Podzbiór dowolnej przestrzeni metrycznej jest przestrzenią metryczną – mnóstwo przykładów za darmo.
- Przestrzenią metryczną jest wstęga Möbiusa (jako podzbiór przestrzeni trójwymiarowej), na której

można zdefiniować wiele sposobów mierzenia odległości. Metryką między punktami na tej wstędze może być np. długość najkrótszej (w zwykłym sensie) trasy między nimi, poprowadzonej po powierzchni tej wstęgi.

- Niech M będzie dowolnym zbiorem. Przyjmując, że odległość punktu od siebie równa jest 0, a odległość różnych punktów to 1, dostajemy tzw. *przestrzeń dyskretną*.
- Niech M oznacza zbiór wszystkich funkcji ograniczonych o wartościach rzeczywistych (których dziedziną jest X). Odległość $\varrho(f, g)$ między funkcjami f i g definiujemy jako najmniejsze ograniczenie górne (*kres górny*) zbioru złożonego ze wszystkich liczb postaci $|f(x) - g(x)|$, gdzie $x \in X$. Np. niech $X = [-3, 3]$, wtedy $\varrho(x^2 + 1, x^2) = 1$, $\varrho(x + 3, x - 2) = 5$, $\varrho(x^2, x - 2) = 14$.
- Niech M oznacza zbiór złożony ze wszystkich funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$, których wartościami są liczby rzeczywiste. Definiujemy metrykę $\varrho(f, g)$ jako pole powierzchni $|f - g|$ nad przedziałem $[a, b]$.

W górach „odległość” podaje się zazwyczaj jako przewidywany czas przejścia trasy – 500 metrów spaceru po płaskim jest dużo „bliżej” niż 500 metrów spaceru pod górę. Zauważmy, że taka górską odległość nie definiuje metryki. Nie jest prawdą, że wejście na Gubałówkę zajmie nam tyle samo czasu, co zejście z niej tą samą trasą (nie zachodzi warunek **B**).

Metryki z punktów 2, 3, 4 są *równoważne*, co oznacza, że stwierdzenie $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(p_n, p) = 0$ nie zależy od tego, którą z nich mamy na myśli. To samo dotyczy analogicznie zdefiniowanych metryk w przestrzeniach wielowymiarowych. Jeśli rozważymy metryki z punktów 8 i 9 w zbiorze funkcji ciągłych na przedziale $[0, 2]$, to jest już inaczej. Niech $f_n(x) = nx$, gdy $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 2 - nx$, gdy $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$, oraz $f_n(x) = 0$, gdy $\frac{2}{n} \leq x \leq 2$. Mamy $\varrho(f_n, 0) = \frac{1}{n}$ – to pole trójkąta o wysokości 1 i podstawie $\frac{2}{n}$.

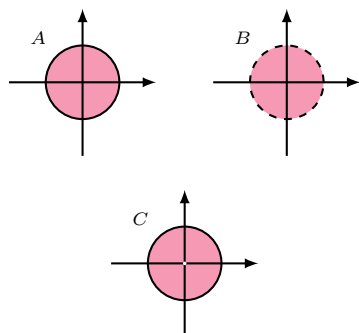
Stąd wynika, że w sensie metryki z przykładu 9. granicą ciągu (f_n) jest funkcja tożsamościowo równa 0. Natomiast odległością funkcji f_n od funkcji tożsamościowo równej zero w sensie metryki z przykładu 8. jest liczba 1, więc ciąg (f_n) nie jest zbieżny do funkcji zerowej względem tej metryki. Można wykazać, że w tej przestrzeni ciąg (f_n) granicy w ogóle nie ma.

W przestrzeniach metrycznych prawdziwe są różne twierdzenia o ciągach zbieżnych i funkcjach ciągłych. Można je dowodzić tylko raz, zamiast w każdym przypadku osobno. W istocie rzeczy nie zostały one wymyślone, lecz odkryte. Pojawiały się w dowodach różnych twierdzeń, np. o istnieniu rozwiązań równań algebraicznych, funkcyjnych, różniczkowych – i w końcu podano definicję ogólną.

Przestrzeniami metrycznymi są także *butelka Kleina*, *przestrzenie rzutowe*, *przestrzenie Lobaczewskiego* i wiele, wiele innych.

Michał KRYCH

Zbiór domknięty i zbiór otwarty



Przypuśćmy, że (X, ρ) jest *przestrzenią metryczną*, czyli zbiorem X , w którym możemy mierzyć odległość między punktami tego zbioru. W przestrzeni metrycznej możemy zdefiniować pojęcie zbioru otwartego i domkniętego. Zaczniemy od przykładu podzbiorów płaszczyzny ze zwykłą, szkolną metryką euklidesową. Rozważmy trzy podzbiory: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$.

Widzimy, że zbiór A różni się od zbiorów B i C tym, że „nic nie brakuje na brzegu”. Uściślenie „niczego nie brakuje” jest następujące: jeżeli ciąg punktów p_1, p_2, \dots zbioru A jest *zbieżny* do punktu p płaszczyzny, to punkt p również należy do zbioru A . Zbiory B i C nie mają tej własności. W zbiorze C na przykład ciąg punktów $(1, 0), (\frac{1}{2}, 0), \dots, (\frac{1}{n}, 0), \dots$ jest zbieżny do punktu $(0, 0)$, ale ten do zbioru C nie należy. W przypadku zbioru B każdy punkt płaszczyzny należący do okręgu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$ jest *granicą* pewnego zbieżnego ciągu punktów zbioru B , ale do zbioru B nie należy. Powiemy, że zbiór A jest domknięty, a zbiory B i C domknięte nie są.

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że podzbiór $U \subseteq X$ jest **domknięty** w przestrzeni X , jeżeli dla każdego zbieżnego ciągu punktów zbioru U jego granica także należy do U .

Definicja. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że podzbiór $U \subseteq X$ jest **otwarty** w przestrzeni X , jeżeli zbiór $X \setminus U$ jest domknięty.

W powyższym przykładzie zbiór A jest domknięty, ale nie jest otwarty, zbiór B nie jest domknięty, ale jest otwarty, zaś zbiór C nie jest ani otwarty, ani domknięty na płaszczyźnie euklidesowej.



Rozważmy podzbiór płaszczyzny ze zwykłą metryką euklidesową. Zbiór E jest otwarty (przerywana linia nie należy do tego zbioru) – dla każdego punktu z tego zbioru można dobrać odpowiedni promień tak, żeby kula w tym punkcie w całości była zawarta w zbiorze E . Zbiór D nie jest otwarty (zawiera punkty na brzegu) – kula o środku na brzegu tego zbioru i dodatnim promieniu nie będzie zawarta z tym zbiorze.

Rozważmy przestrzeń Y składającą się z punktów prostej rzeczywistej o współrzędnych $\frac{1}{n}$, dla każdej liczby naturalnej n . Odległość między punktami $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{m}$ to po prostu moduł ich różnicy $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$. Ta przestrzeń, mimo że odległości między jej punktami są dowolnie małe, także jest dyskretna. Dla dowolnego punktu $\frac{1}{n}$ kula o środku w $\frac{1}{n}$ i promieniu mniejszym od $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ nie zawiera punktów przestrzeni Y , poza środkiem kuli, czyli punktem $\frac{1}{n}$.

Niech $(X, \rho_1), (X, \rho_2)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Metryki ρ_1, ρ_2 nazywa się równoważnymi, jeżeli granice dowolnych ciągów są identyczne z użyciem obu tych metryk.

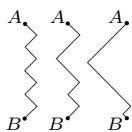
W dowolnej przestrzeni metrycznej (X, ρ) możemy zdefiniować pojęcie kuli o środku w punkcie x i promieniu r – jest to po prostu zbiór punktów przestrzeni X odległych od x o ściśle mniej niż r . Zauważmy, że podzbiór $U \subseteq X$ przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest otwarty, jeżeli dla każdego punktu $x \in U$ istnieje takie r , że kula o środku w punkcie x i promieniu r jest zawarta w U .

Rozważmy jeszcze następujące dwa przykłady. Niech X będzie zbiorem punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych. Na zbiorze X rozważmy metrykę euklidesową. Zauważmy, że w tej przestrzeni metrycznej dowolne dwa punkty są odległe co najmniej o 1, a więc ciągi zbieżne to takie, które są stałe od pewnego miejsca. Wynika z tego, że każdy podzbiór tej przestrzeni metrycznej jest domknięty, zatem każdy podzbiór jest też otwarty. Przestrzeń metryczna o tej własności, że każdy jej podzbiór jest domknięty lub równoważnie każdy jest otwarty, nazywa się **dyskretną**. W przestrzeni dyskretniej w szczególności każdy jednopunktowy podzbiór jest otwarty – dla każdego punktu możemy więc znaleźć taką kulę, że nie ma w niej punktów innych niż jej środek. Stąd nazwa tej przestrzeni: możemy żartobliwie powiedzieć, że każdy punkt przestrzeni ma zapewnioną dyskrecję – nie ma dowolnie bliskich sąsiadów.

Na koniec zauważmy, że jeżeli ρ i ρ' są *równoważnymi metrykami* na zbiorze X , to rodziny domkniętych podzbiorów przestrzeni metrycznej (X, ρ) i (X, ρ') są te same. Ta uwaga sugeruje, że pojęcie domkniętości i otwartości zależy od struktury ogólniejszej od metryki – tak jest w istocie, ale to już jest inna opowieść.

Agnieszka BOJANOWSKA

Posłowie: Zbiór, który nie jest domknięty



Optymalne trasy z punktu A do B , gdy wiatr wieje prosto z B do A przy dodatkowych założeniach opisanych obok. Każda z tych tras jest tak samo dobra.

*Do określenia tej bliskości potrzebujemy pojęcia *metryki* opisanego na stronie 6. Można przyjąć metrykę opisaną w punkcie 9. tamtego artykułu.

Wyobraźmy sobie, że przyszło nam żeglować po jeziorze pod wiatr. Oczywiście nierozsądnie jest ustawić się dziobem żaglówki w stronę wiatru – wtedy na pewno nie popłyniemy we właściwą stronę – ale jak pokazuje teoria (i praktyka), rozwiązaniem jest konsekwentne halsowanie (tj. żeglowanie zygzakiem) pod odpowiednim kątem do wiatru. Ten kąt zależy od wielu czynników (m.in. konstrukcji żaglówki) i nie będziemy się zajmować jego wyznaczeniem. Zakładając, że nasza łódź jest niesamowicie zwrotna, a my – wytrawni żeglarze – potrafimy ją obsłużyć tak, że zwroty nie zabierają w ogóle czasu i nie powodują wytracania prędkości, to optymalną trasą takiego halsowania jest każda z linii łamanych przedstawionych na marginesie. Czyli zakładamy, że żaglówka płynie stale pod ustalonym kątem pod wiatr – tj. tym najlepszym kątem, który pozwala najszybciej dopłynąć do celu.

Tym razem ta sama żaglówka znalazła się na rzece. Rzeka płynie w przeciwnym kierunku niż wieje wiatr i prąd pcha nas w tę stronę, w którą chcemy popłynąć. Nurt rzeki ma to do siebie, że na środku rzeki jest najsilniejszy, a im bliżej brzegów, tym słabszy. Ponownie, żeby maksymalnie wykorzystać siłę wiatru, będziemy halsować. Z kolei, żeby wykorzystać sprzyjający prąd, będziemy trzymać się jak najbliżej środka rzeki.

Zastanówmy się, jaka trasa spośród wszystkich łamanych będzie najlepsza. Rzecz jasna im bliższa jest ona środkowi, tym lepiej. I nic nie stoi na przeszkodzie, żebyśmy wybrali łamaną znajdującą się dowolnie blisko* środkowi tej rzeki. Z drugiej strony dla każdej łamanej trasy zawsze istnieje „lepsza”, czyli bliższa środkowi. Ale z trzeciej strony nie może to być po prostu odcinek na środku rzeki, bo wtedy żaglówka w ogóle nie skorzysta z siły wiatru (tak jak przy halsowaniu na jeziorze). Okazuje się, że wśród różnych łamanych nie istnieje najlepsza w rozważanym sensie, tj. w zbiorze czegoś „brakuje”, zbiór nie jest **domknięty** w zbiorze wszystkich tras pomiędzy punktem A i B .

Kamila ŁYCZEK

Geometria różniczkowa

Geometria różniczkowa zajmuje się własnościami zbiorów opisanych przy użyciu funkcji różniczkowalnych (zwykle wielu zmiennych). Zbiory można opisywać m.in. przy użyciu układów równań lub za pomocą parametryzacji. Na przykład układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y^2 + (z - 1)^2 = 1 \end{cases}$$

opisuje w trójwymiarowej przestrzeni \mathbb{R}^3 część wspólną sfery o promieniu 2 z walcem obrotowym o promieniu przekroju 1. Ta część wspólna jest linią o kształcie ósemki krzyżującej się ze sobą w punkcie, w którym walec jest styczny do sfery (rys. 1). Zbadajmy, jak wygląda ta ósemka (jest to tzw. krzywa Vivianiego) w okolicy tego skrzyżowania. W tym celu opiszmy ją parametrycznie jako drogę przebytą przez punkt o współrzędnych

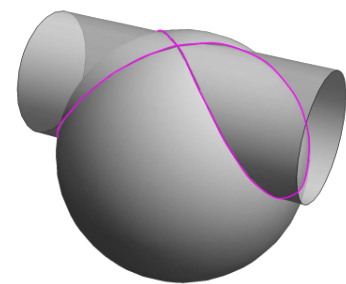
$$p(t) = (2 \sin t, \sin 2t, 1 + \cos 2t), t \in \mathbb{R}.$$

Dwa kolejne przejścia przez wierzchołek następują dla $t = 0$ oraz dla $t = \pi$. Rozpatrzmy wektor prędkości

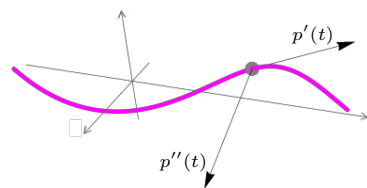
$$p'(t) = [2 \cos t, 2 \cos 2t, -2 \sin 2t]$$

poruszającego się punktu w chwili t . Ponieważ $p'(0) = [2, 2, 0]$ i $p'(\pi) = [-2, 2, 0]$, widzimy, że wędrujący po ósemce punkt przechodzi przez wierzchołek pod kątem $\pi/4$ do osi walca, raz z jednej, raz z drugiej strony; zatem ósemka krzyżuje się ze sobą w wierzchołku pod kątem prostym. Czytelniku, spróbuj obliczyć kąt przecięcia w ósemce wyznaczonej przez walec o innym promieniu.

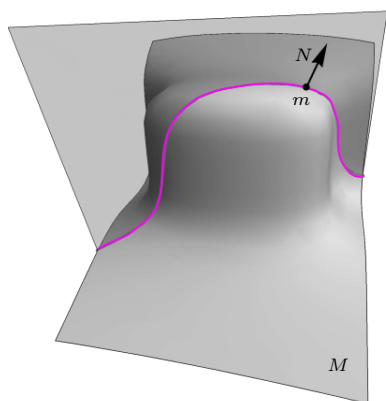
Pochodna parametryzacji $p'(t)$ jest wektorem prędkości, druga pochodna $p''(t)$ to wektor przyspieszenia. W sytuacji, gdy punkt porusza się wzdłuż krzywej z szybkością równą 1 (czyli długość wektora $p'(t)$ jest równa 1), punkt nie zwalnia i nie przyspiesza, więc jego wektor przyspieszenia $p''(t)$ jest prostopadły do wektora prędkości i opisuje zmianę jego kierunku (rys. 2). Długość wektora



Rys. 1



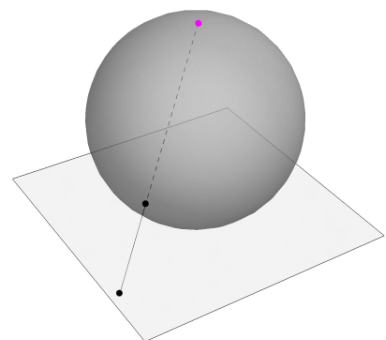
Rys. 2



Rys. 3

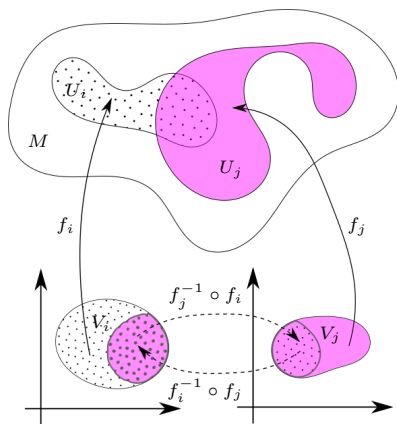
przyspieszenia nazywa się wtedy **krzywizną danej krzywej w punkcie** $p(t)$. Im ta długość jest większa, tym ostrzej krzywa zakreca. Linia prosta ma w każdym punkcie zerową krzywiznę, a okrąg ma w każdym punkcie krzywiznę równą odwrotności promienia.

Rozpatrzmy teraz powierzchnię M w przestrzeni trójwymiarowej \mathbb{R}^3 i punkt m na niej oraz wybierzmy wektor N prostopadły do M w punkcie m . Dysponując pojęciem krzywizny krzywej, możemy zdefiniować krzywiznę powierzchni. Mianowicie, możemy rozpatrzeć wszystkie przekroje powierzchni M płaszczyznami zawierającymi punkt m i wektor N . Dla każdego z tych przekrojów możemy obliczyć jego krzywiznę w punkcie m oraz przypisać jej znak plus, jeśli jej wektor przyspieszenia jest skierowany zgodnie z N , oraz znak minus w przeciwnym przypadku (rys. 3). Okazuje się, że gdy będziemy obracać płaszczyznę przekroju wokół wektora N , to krzywizna przekroju będzie się zmieniać między dwiema skrajnymi wartościami (noszą one nazwę krzywizn głównych). Iloczyn tych dwóch krzywizn nazywa się **krzywizną Gaussa powierzchni** w punkcie m . Na przykład krzywizna Gaussa walca w dowolnym punkcie jest równa 0, a krzywizna sfery o promieniu r jest równa $1/r^2$. Krzywizna Gaussa ma ciekawą własność (udowodnioną przez Carla Gaussa): nie zmienia swojej wartości przy przekształceniu powierzchni zachowującym długości krzywych leżących na tej powierzchni. Oznacza to na przykład, że sfery (po rozcięciu) nie da się bez zmiany odległości przekształcić na kawałek płaszczyzny. Carl Gauss był tak dumny ze swojego twierdzenia, że nadał mu nazwę *theorema egregium* (twierdzenie chwalebne).



Rys. 4

Do opisu krzywych wystarcza jeden parametr, do opisu powierzchni potrzeba dwóch parametrów. Na przykład położenie punktu na sferze o środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i promieniu r można opisać parametrycznie za pomocą dwóch parametrów (długości geograficznej ϕ i szerokości geograficznej θ , wzorem $p(\phi, \theta) = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta)$), jednak żadnemu z biegunów $(0, 0, r)$ oraz $(0, 0, -r)$ nie da się przypisać jednoznacznie pary współrzędnych. Można sparametryzować sferę bez jednego punktu za pomocą tzw. **rzutu stereograficznego** (w biegunie $(0, 0, r)$ zapalamy żarówkę, a każdy punkt sfery rzuca cień na płaszczyznę styczną do sfery w przeciwnym biegunie $(0, 0, -r)$, rys. 4). Całą sferę jedną parametryzacją objąć się nie da.



Rys. 5

Uogólnieniem krzywych i powierzchni są różniczkowe dowolnego wymiaru, które lokalnie wyglądają jak przestrzeń \mathbb{R}^n , ale nie muszą być zawarte w żadnej konkretnej przestrzeni \mathbb{R}^m . **Różniczkowość wymiaru n** to zbiór pokryty podzbiórami U_j , z których każdy posiada parametryzację $f_j : V_j \rightarrow U_j$ za pomocą funkcji różniczkowalnej n zmiennych określoną na otwartym podzbiórze V_j przestrzeni \mathbb{R}^n (rys. 5). Przy tym parametryzacje nachodzących na siebie podzbiórów U_i, U_j powinny być zgodne w tym sensie, że przekształcenie $f_i^{-1} \circ f_j : f_j^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ jest zadane funkcjami różniczkowalnymi. Na przykład dla sfery S można jako kawałki U_i wybrać sześć półsfery opisanych nierównościami

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y, z) \in S : x > 0\}, & U_2 &= \{(x, y, z) \in S : x < 0\}, \\ U_3 &= \{(x, y, z) \in S : y > 0\}, & U_4 &= \{(x, y, z) \in S : y < 0\}, \\ U_5 &= \{(x, y, z) \in S : z > 0\}, & U_6 &= \{(x, y, z) \in S : z < 0\}, \end{aligned}$$

a jako ich parametryzacje przyjmując rzuty wzdłuż odpowiednich osi, np.

$$f_1 : V_1 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < r^2\} \rightarrow U_1$$

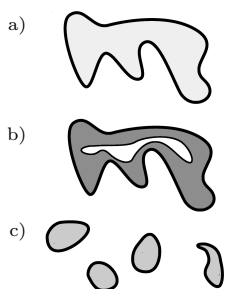
określić wzorem

$$f_1(y, z) = (\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}, y, z).$$

Równie dobrze można użyć dwóch parametryzacji sferycznych lub dwóch rzutów stereograficznych. Takie podejście daje szersze możliwości. Na przykład za pomocą powyższej konstrukcji zastosowanej do trzech podzbiórów U_j można opisać płaszczyznę rzutową, która nie jest powierzchnią orientowalną (zawiera wstęgę Möbiusa).

Jerzy KONARSKI

Przestrzeń spójna

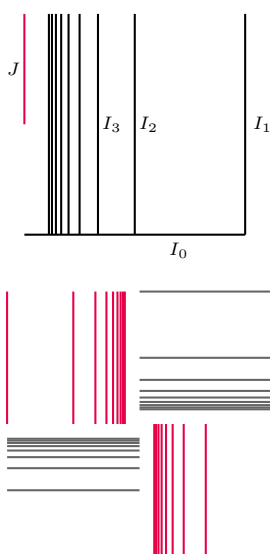


Rysunek c) przedstawia niespójny podzbiór \mathbb{R}^2 (z metryką euklidesową).

Przestrzeń metryczna *dyskretna* (opisana na stronie 7), która ma więcej niż jeden punkt, nie jest spójna. Każde dwa rozłączne, niepuste podzbiory są jej rozkładem na kawałki. Można powiedzieć nawet więcej – przestrzeń dyskretna rozpada się na jednopunktowe kawałki – jak szyba samochodu po poważnej kolizji.

Definicja. Przekształcenie $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \rho')$ jest **ciągłe**, jeżeli dla każdego ciągu x_1, x_2, \dots punktów przestrzeni X , zbieżnego w metryce ρ do punktu x_0 ciąg punktów $f(x_1), f(x_2), \dots$ przestrzeni Y jest zbieżny w metryce ρ' do punktu $f(x_0)$.

Twierdzenie. Jeżeli $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \rho')$ jest przekształceniem ciągłym, zaś (X, ρ) przestrzenią spójną, to obraz $f(X)$ jest przestrzenią spójną w metryce ρ' . Wnioskiem z tego twierdzenia jest własność Darboux funkcji ciągłych opisana na stronie 3.



Pojęcie spójności przestrzeni metrycznej to uściślenie intuicji, że przestrzeń jest „w jednym kawałku”.

Definicja. Przestrzeń metryczna (X, ρ) jest **spójna**, jeżeli nie istnieją niepuste domknięte podzbiory A i B takie, że ich część wspólna jest zbiorem pustym $A \cap B = \emptyset$, zaś ich suma jest całą przestrzenią $A \cup B = X$.

Zbiory A i B to są właśnie te „kawałki”, na które rozpada się przestrzeń X . Zauważmy, że gdy przestrzeń nie jest spójna i jest sumą swoich niepustych, domkniętych i rozłącznych podzbiorów, to każdy z tych podzbiorów jest także otwarty.

Przykład 1. Zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} na prostej z metryką $\rho(x, y) = |x - y|$ nie jest spójny, bowiem można go przedstawić w postaci sumy

$$\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq \sqrt{2}\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q \geq \sqrt{2}\}.$$

Przykład 2. Podobnie zbiór liczb niewymiernych nie jest spójny, bo można go przedstawić na przykład w postaci

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \geq 0\}.$$

Bardzo ważne przykłady przestrzeni spójnych dostarcza następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Następujące przestrzenie metryczne z metryką prostej euklidesowej są spójne dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$: odcinek otwarty (a, b) , odcinek domknięty $[a, b]$, domknięty jednostronnie $[a, b)$, $(a, b]$, półproste $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ i cała prosta \mathbb{R} . Są to jedyne spójne podzbiory prostej euklidesowej.

Jak zachowują się przestrzenie spójne, gdy będziemy je przekształcać? Jeżeli przekształcenie może zginać, rozciągać, ale nie rozrywać, to z przestrzeni „w jednym kawałku” otrzymamy również przestrzeń w „jednym kawałku”, czyli spójną.

Przekształcenia, które nie „rozrywają”, nazywamy **ciągłymi**. „Rozrywanie” to oderwanie punktu granicznego od ciągu punktów do niego zbieżnego. Definicja przekształcenia ciągłego przestrzeni metrycznej znajduje się na marginesie.

Rozważmy teraz odcinek $[0, 1]$ ze zwykłą metryką. Jeżeli na punkty tego odcinka będziemy patrzeć jak na czas, to na przekształcenie odcinka w przestrzeń X możemy patrzeć jak na szlak przebyty w czasie od 0 do 1 w przestrzeni X . Jeżeli X jest przestrzenią metryczną z metryką ρ , a przekształcenie jest ciągłe, to mówimy, że mamy **drogę** w przestrzeni metrycznej (X, ρ) . Obraz 0 jest początkiem, a obraz 1 końcem tej drogi. Przestrzenie, w których od jednego do drugiego punktu możemy przejść pewną drogą, są tak ważne, że mają swoją nazwę.

Definicja. Przestrzeń metryczna (X, ρ) nazywa się **łukowo spójna**, jeżeli dla dowolnych punktów $x, y \in X$ istnieje droga o początku w punkcie x i końcu w punkcie y .

Niech (X, ρ) będzie podzbiorem płaszczyzny ze zwykłą metryką euklidesową. Możemy powiedzieć w pewnym uproszczeniu, że podzbiór ten jest łukowo spójny, jeżeli dla każdych dwóch jego punktów można narysować, nie odrywając ołówka od papieru, krzywą łączącą je i zawartą w X .

Obraz drogi jest przestrzenią spójną i nietrudno się domyślić, że prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie. Jeżeli przestrzeń metryczna (X, ρ) jest łukowo spójna, to jest spójna.

To twierdzenie nietrudno uzasadnić. Jeżeli bowiem $A \cup B = X$ byłoby rozkładem przestrzeni X na dwa „kawałki”, to weźmy punkt $x \in A$ oraz $y \in B$. Wiemy, że istnieje droga o początku w punkcie x i końcu w punkcie y . Ale rozkład X na rozłączne i niepuste domknięte podzbiory A i B dawałby rozkład obrazu drogi od x do y , co jest niemożliwe, bo obraz drogi jest przestrzenią spójną.

Nie każda przestrzeń spójna jest łukowo spójna. Rozważmy przykład podzbioru płaszczyzny, który jest jakby grzebieniem o nieskończenie wielu zębach zbiegających do granicznego zęba. Tego granicznego zęba jednak brakuje – jest tylko jego kawałek (oznaczony na rysunku literą J), nieprzymocowany do grzebienia. Cała przestrzeń jest jednak spójna – ten kawałek nie odpadnie, choć nie ma drogi, która łączy punkt odcinka J z jakimkolwiek punktem grzebienia, który do odcinka J nie należy. To jest jakby spójność „na magnes”. Magnes tworzą zbieżne ciągi, które „przyciągają” swoją granicę.

Jeszcze lepiej zjawisko to ilustruje spójna przestrzeń, przypominająca znak polskiego lotnictwa, powstała z nieskończenie wielu patyczków (patrz obok).

Agnieszka BOJANOWSKA

Grupa

Jeśli $X = \{1, \dots, n\}$, to S_X jest zbiorem permutacji n -elementowego zbioru; oznaczamy go jako S_n .

Zainteresowanemu Czytelnikowi polecamy *Wstęp do teorii grup* Czesława Bagińskiego.

Te „naturalne własności” sprowadzają się do trzech:

- $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$,
- $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1_G$,
- $1_G \cdot g = g \cdot 1_G = g$ dla wszystkich $g_1, g_2, g_3, g \in G$.

Nie wymagamy, by $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$. Faktycznie, już dla $n \geq 3$ istnieją permutacje $g_1, g_2 \in S_n$ takie, że $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$ (czy Czytelnik umie je znaleźć?). Grupy spełniające warunek $g_1 g_2 = g_2 g_1$ dla wszystkich elementów g_1, g_2 nazywamy *przemiennymi*.

- Jasiu, ile to pięć razy siedem?
- A jaka jest struktura grupy, psze Pani?

Izomorfizm grup G i H to bijekcja $\varphi: G \rightarrow H$ taka, że zachodzi $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$ dla wszystkich $g_1, g_2 \in G$. Wspomniany izomorfizm np. dla $p = 5$ można łatwo wskazać: jest to funkcja $\varphi: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_5^*$ zadana wzorem $\varphi(i) = 2^i \pmod{5}$. Konkretniej mówiąc: $(\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3)) = (1, 2, 4, 3)$. Liczba 2 zwana jest *generatorem* grupy \mathbb{Z}_5^* .

Czytelnik Uważny powinien sprawdzić, że $\{1_G\}$ jest podgrupą, i zauważyć analogię pomiędzy grupami prostymi a liczbami pierwszymi.

Grupa S_3 działa na wierzchołkach trójkąta równobocznego ABC , permutując je. Działanie to można utożsamić z „geometrycznym” działaniem przez odbicia względem symetrycznych boków trójkąta oraz obroty względem środka ciężkości. Na wierzchołkach tego trójkąta działa również na przykład grupa \mathbb{Z}_3 – działanie $k \in \mathbb{Z}_3$ na wierzchołku x to jego (wspomniany już) obrót o kąt $k \cdot 120^\circ$.

Ustalmy zbiór X , np. $X = \{1, 2, \dots, 2019\}$. Niech S_X oznacza zbiór funkcji odwracalnych z X w X . Funkcje z S_X można składać i odwracać, nie wychodząc poza S_X . W zbiorze S_X istnieje też funkcja identycznościowa. Tytułowe *grupy* są abstrakcyjnym sposobem wyrażenia powyższych własności zbioru S_X .

Grupa to zbiór G wraz z *działaniem mnożenia*, czyli funkcją $G \times G \rightarrow G$ oznaczaną $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$, elementem neutralnym $1_G \in G$ oraz działaniem odwracania $g \rightarrow g^{-1}$. Działania mnożenia i odwracania oraz element neutralny są częścią definicji grupy i wymagamy, by spełniały one wszystkie naturalne własności z przykładu S_X (patrz margines).

Przykładowo, zbiór S_X , w którym „mnożenie” to składanie funkcji, odwracanie to odwracanie funkcji, a jedynka to funkcja identycznościowa, jest grupą. Zbiór $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ze zwykłym mnożeniem i odwracaniem także jest grupą, podobnie zbiór $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Zbiór $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ z mnożeniem i dzieleniem *nie* jest grupą, bo odwrotność liczby całkowitej zwykle nie jest liczbą całkowitą. Jeśli p jest liczbą pierwszą, to zbiór $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$ z mnożeniem modulo p jest grupą, bo z algorytmu Euklidesa wynika, że dla każdej liczby $a \in \{1, \dots, p-1\}$ istnieją liczby całkowite r, s takie, że $ar + ps = 1$; reszta z dzielenia r przez p jest odwrotnością a . Grupą jest także zbiór \mathbb{Z} , w którym „mnożenie” to dodawanie, zaś „odwrotność” to $a \mapsto -a$. Podobnie, zbiór $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ z dodawaniem modulo n jest grupą. Notabene, twierdzenie o generatorze z teorii liczb mówi, że grupa \mathbb{Z}_p^* jest *izomorficzna* z grupą \mathbb{Z}_{p-1} . Wreszcie, jeszcze bardziej egzotyczne grupy pojawiają się w kryptografii (patrz „Krzywe eliptyczne w kryptografii”, Δ_{18}^8).

Podgrupa grupy G to podzbiór $H \subset G$ taki, że działania wykonywane na elementach z H dają w wyniku element z H . Formalnie mówiąc, dla każdego $h_1, h_2 \in H$ zachodzi $h_1 \cdot h_2 \in H$ oraz $h_1^{-1} \in H$. Jedno z podstawowych twierdzeń teorii grup mówi, że każda grupa G jest podgrupą S_X dla odpowiednio dużego zbioru X . Definicja grupy nie odchodzi więc zbyt daleko od przykładu S_X . Jeśli H jest podgrupą G , to zbiór G/H powstaje z G przez utożsamienie elementów g i hg dla każdego $g \in G, h \in H$. Prawdziwy jest następujący elegancki wzór: $|G/H| = |G|/|H|$, a zatem licznosc podgrupy jest zawsze dzielnikiem licznosci grupy.

Specjalną klasą podgrup są **podgrupy normalne**. Podgrupa $H \subset G$ jest normalna, jeśli zachodzi $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$ dla każdego $g \in G, h \in H$. Ten dziwny warunek pozwala wprowadzić na zbiorze G/H strukturę grupy. W każdej grupie G podgrupami normalnymi są G i $\{1_G\}$. Grupy, które nie mają innych podgrup normalnych, nazywane są *prostymi*, np. grupa \mathbb{Z}_p jest prosta (gdyż rozmiar podgrupy musi być dzielnikiem rozmiaru grupy), a grupa \mathbb{Z} nie jest. W XX wieku sklasyfikowano wszystkie grupy proste. Tworzą one 18 „rodzin” i 26 „nieoczekiwanych” grup sporadycznych. Te ostatnie święcą dziś triumfy w matematycznych modelach teorii strun, w ramach tzw. *moonshine theory*.

Dlaczego jednak grupy pojawiają się w innych gałęziach matematyki i fizyki? Okazuje się, że grupy dobrze obrazują (odwracalne) działania na obiektach. Grupa S_X w naturalny sposób *działa* na zbiorze X : jeśli weźmiemy element $x \in X$ oraz $f \in S_X$, to możemy otrzymać nowy element $f(x)$.

Jak poprzednio, tworzymy z tego abstrakcyjną definicję: **działanie grupy G na zbiorze X** jest to odwzorowanie $G \times X \rightarrow X$, zapisywane jako $(g, x) \mapsto g \cdot x$, takie że $1_G \cdot x = x$ oraz $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$.

To właśnie działania grup czynią grupy tak interesującymi i wszechobecnymi obiektami w matematyce. Żeby zobaczyć to lepiej, rozważmy przypadek, gdy X ma dodatkową strukturę, np. gdy niektóre pary elementów X połączymy, otrzymując graf $\Gamma = (X, E)$. W tej sytuacji możemy zadać następujące pytania:

- Które elementy $g \in S_X$ spełniają warunek $g \cdot \Gamma = \Gamma$? Zbiór takich elementów nazywamy **stabilizatorem** Γ . Stabilizator jest naturalnie podgrupą S_X . Oznaczamy go G_Γ .
- Które grafy można otrzymać z Γ przez permutowanie wierzchołków? Zbiór takich grafów nazywamy **orbitą** Γ przy działaniu G i oznaczamy $G \cdot \Gamma$.
- Jeśli popatrzymy na zbiór \mathcal{M} wszystkich możliwych grafów o wierzchołkach X , to ile jest orbit? Zbiór orbit oznaczamy przez \mathcal{M}/G .

Warto sprawdzić, że jedyne grafy ze stabilizatorem równym S_X to graf pełny oraz graf pusty. Zachodzi też równanie $|G_\Gamma| \cdot |G \cdot \Gamma| = |G|$. Wynika stąd, że im większa orbita, tym mniejszy stabilizator, a ponadto: liczby $|G_\Gamma|$, $|G \cdot \Gamma|$ są dzielnikami G . Znacznie bardziej skomplikowane jest sprawdzenie, ile jest orbit, czyli ile elementów ma zbiór \mathcal{M}/G . Tym niemniej czasem można powiedzieć coś o orbitach, mając bardzo niewiele danych:

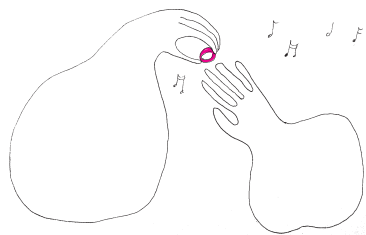
Lemat. Jeśli p jest pierwsza, grupa G ma p^k elementów i działa na zbiorze \mathcal{M} , który ma niepodzielną przez p liczbę elementów, to istnieje element stały, tzn. $\Gamma \in \mathcal{M}$ taki, że $g \cdot \Gamma = \Gamma$ dla wszystkich $g \in G$.

Dowód. Faktycznie, \mathcal{M} jest sumą orbit, a rozmiar każdej orbity dzieli $|G| = p^k$. Jeśli żadna orbita nie jest jednoelementowa, to rozmiar każdej jest podzielny przez p , zatem i $|\mathcal{M}|$ jest podzielna przez p . Sprzeczność. A więc istnieje Γ takie, że $G \cdot \Gamma = \{\Gamma\}$. \square

Zamiast grafów można podobnie analizować inne obiekty. Jeśli będziemy patrzeć na przestrzenie liniowe, to otrzymamy teorię reprezentacji, jeśli na ciała (patrz poniżej), to teorię Galois, itd. Wreszcie, aby lepiej zrozumieć same grupy, warto badać działania grup na grupach.

Joachim JELISIEJEW

Pierścień



Kolejnym fundamentalnym pojęciem algebraicznym są pierścienie. Zostały one wprowadzone pod koniec XIX wieku z nadzieją na pomoc w udowodnieniu Wielkiego Twierdzenia Fermata. Jak wiadomo, zostało to uczynione dopiero w 1995 roku, więc przez długi czas nadzieja ta była płonna.

Modelowym przykładem pierścienia jest zbiór liczb całkowitych \mathbb{Z} . Formalnie, **pierścień przemienny** R to zbiór z działaniami dodawania, odejmowania i mnożenia, przy czym spełnione są naturalne własności: R z dodawaniem i odejmowaniem jest grupą, jest rozdzielność mnożenia względem dodawania, a mnożenie jest łączne i przemienne i posiada jedynekę.

Inne przykłady pierścieni przemiennych to \mathbb{Q} lub \mathbb{R} z naturalnymi działaniami. Przykład z innej półki: jeśli X jest przestrzenią metryczną (patrz str. 6) lub ogólniej przestrzenią topologiczną, to zbiór $C(X, \mathbb{R})$ wszystkich ciągłych funkcji z X do \mathbb{R} jest pierścieniem przemiennym.

Ideał w pierścieniu przemiennym A jest to podgrupa $I \subset A$ taka, że $a \cdot i \in I$ dla wszystkich $a \in A$ oraz $i \in I$. Ten warunek gwarantuje, że w zbiorze A/I da się sensownie mnożyć; tzn. że A/I jest pierścieniem przemiennym. W tym sensie ideał odpowiada podgrupie normalnej. Ideał $I \subsetneq A$ jest **maksymalny**, jeśli nie istnieje ideał $J \subsetneq A$ taki, że $I \subsetneq J$. Każde A posiada przynajmniej dwa ideały: A oraz $\{0\}$. Mówimy, że A jest **ciałem**, jeśli nie posiada żadnych innych ideałów, np. \mathbb{Q} , \mathbb{R} są ciałami, lecz \mathbb{Z} nie jest ciałem.

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną i $x \in X$, to podzbiór

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$$

jest ideałem maksymalnym. Co więcej, jeśli X jest zwartą przestrzenią (dla przestrzeni metrycznej zwartość oznacza, że każdy ciąg zawiera podciąg zbieżny), są to jedyne ideały maksymalne w $C(X, \mathbb{R})$. Zatem jeśli ktoś roztargniony zgubi swoją ulubioną przestrzeń topologiczną X , ale będzie pamiętać, jaki jest pierścień B funkcji ciągłych na tej przestrzeni, to może zrekonstruować X . Mianowicie, punktami X będą ideały maksymalne w B , a zbiory domknięte to zbiory ideałów maksymalnych postaci $V(E) = \{\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \supseteq E\}$, gdzie $E \subset B$ jest podzbiorem.

W latach pięćdziesiątych Alexandre Grothendieck zaproponował, by tę operację „odzyskiwania” X z B przeprowadzać dla dowolnego pierścienia B ; niekoniecznie pochodzącego od X . Doprowadziło to do powstania *teorii schematów*, która ostatecznie miała wielki udział m.in. w dowodzie Wielkiego Twierdzenia Fermata. Po stu latach pierścienie miały swój rewanż!

Joachim JELISIEJEW

W pierścieniu \mathbb{Z} jedyne ideały są postaci $n\mathbb{Z} = \{n \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Ideał $n\mathbb{Z}$ jest maksymalny, jeśli $|n|$ jest liczbą pierwszą.



Rozwiązanie zadania M 1597.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a + \sqrt{a^2 + 1} &= \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1} + b} = \\ &= \sqrt{b^2 + 1} - b, \\ b + \sqrt{b^2 + 1} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1} + a} = \\ &= \sqrt{a^2 + 1} - a. \end{aligned}$$

Dodając stronami te dwie równości, uzyskujemy $a + b = - (a + b)$, czyli $a + b = 0$.

Łatwo sprawdzić, że liczby a , b spełniające założenia zadania rzeczywiście istnieją (np. $a = b = 0$), więc znaleziona wartość 0 istotnie jest osiągalna.

Funkcja nieobliczalna

Programowanie to czynność dość czasochłonna, a także wymagająca pewnej wprawy i podstawowej wiedzy o technikach programowania. Stąd większość komputerów jest fabrycznie wyposażona w zestaw podstawowych programów, a wiele firm tworzy i sprzedaje nowe dodatkowe programy dla chcących poszerzyć możliwości swojego komputera bez konieczności samodzielnego programowania. Niemniej należy sobie zdawać sprawę, że za każdą aplikacją stoi program komputerowy, który ktoś kiedyś napisał w jednym ze specjalistycznych języków programowania.

Więcej o maszynie Turinga przeczytać można w Δ_{13}^1 . Przykład funkcji nieobliczalnej (problem stopu) pokazaliśmy w Δ_{17}^4 .

Złożoność obliczeniowa

Przykładami takich problemów są: „czy dana liczba naturalna jest liczbą pierwszą?”, „czy dany graf nieskierowany, ma cykl Hamiltona?”, „czy z danych dwóch słów pierwsze jest podstwem drugiego?”.

Precyzyjnie, $g(n) = \Theta(n)$, jeśli istnieją $C, D \in \mathbb{N}$ oraz $K \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n \geq K$ zachodzi $Cn \leq g(n) \leq Dn$.

Precyzyjnie, $g(n) = O(n)$, jeśli istnieją $C \in \mathbb{N}$ oraz $K \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n \geq K$ zachodzi $g(n) \leq Cn$.

Dość egzotyczny, ale bardzo ciekawy sposób mierzenia trudności to *złożoność wyglądzona*, o której pisaliśmy w Δ_{18}^1 .

Komputery to urządzenia bardzo nietypowe. Same jako takie nie mają sprecyzowanego, jasno zdefiniowanego zadania, do wykonywania którego zostały zaprojektowane. Zadania, które wykonuje komputer, mogą się w czasie zmieniać, a ich określenie odbywa się poprzez pisanie *programów komputerowych*. Owe programy formułuje się w specjalnym języku (Pascal, C/C++, Java, Python itp.), a następnie zleca komputerowi do wykonania.

Skoro definiujemy komputer jako urządzenie elastyczne (zdolne do przedefiniowania się), naturalne jest pytanie o zakres jego wszechstronności. To znaczy: jak bardzo skomplikowane problemy daje się zapisać jako odpowiedni program komputerowy? Wydawałoby się, że odpowiedź mocno zależy od typu komputera oraz wyboru języka programowania. Być może zaskakująco, okazuje się, że wcale nie. To znaczy: dane zadanie zwykle albo da się rozwiązać przy użyciu niemal dowolnego komputera i języka programowania (niezależnie, czy dysponujemy starym Atari i językiem BASIC, czy najnowszym PC-tem i Pythonem), albo nie da się po prostu wcale. Wynika to z tego, że generalnie wszystkie komputery i języki programowania realizują ten sam model, tak zwaną (teoretyczną) maszyną Turinga. Innymi słowy: różnią się efektywnością (czasem) wykonania, a nie zbiorem problemów, które *da się* przy ich użyciu rozwiązać.

Co więcej, panuje powszechne przekonanie, że same prawa fizyki sprawiają, że żadna maszyna nigdy nie będzie w stanie realizować modelu silniejszego niż model Turinga. Czyli że każde zagadnienie nierozwiązywalne przez maszynę Turinga (tytułowa *funkcja nieobliczalna*) jest po prostu zadaniem niemożliwym do rozwiązania przez żaden komputer: ani obecnie istniejący, ani żaden z przyszłości.

No, chyba że odkryjemy i ujarzmimy jakieś nowe cudowne zjawisko fizyczne. W to jednak naprawdę nikt nie wierzy, bo nawet komputer kwantowy może być symulowany (bardzo nieefektywnie) przez maszynę Turinga.

Tomasz KAZANA

Jak mierzyć trudność problemów? Trudność albo, inaczej mówiąc, ich skomplikowanie, złożoność. To nie jest łatwe pytanie. Aby móc na nie chociaż nieco sensownie odpowiedzieć, skupimy się tu na tzw. *problemach decyzyjnych*, czyli takich, na które odpowiedź zawsze brzmi „tak” lub „nie”. Żeby określić, jak złożone są te problemy, przyjmuje się zasadę, że problem jest tak trudny, jak jego najlepsze rozwiązanie. Innymi słowy mówimy, że złożoność problemu jest równa złożoności najlepszego algorytmu, który go rozwiązuje.

Jak jednak określić złożoność algorytmu? Pierwszy sposób mierzenia, który przychodzi nam do głowy, a mianowicie czas działania, ma duże wady. Zależy on bardzo od tego, na jak szybkim komputerze działa algorytm i od tego, jak duże są dane wejściowe (np. czy liczba, którą badamy, ma 10 cyfr, czy też 1 000 000). Rozwiązaniem pierwszej z tych wad jest mierzenie czasu nie w sekundach, ale w liczbie operacji wykonanych przez dany algorytm – ona nie zależy już od tego, na jakim sprzęcie wykonujemy algorytm. Z drugą wadą trudniej sobie poradzić. Najbardziej popularnym rozwiązaniem jest tzw. *pesymistyczna złożoność czasowa*. Mówimy, że dany algorytm ma pesymistyczną złożoność czasową $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, jeśli maksymalna liczba operacji, którą wykonuje dla danych wejściowych o rozmiarze n , to $f(n)$. Zazwyczaj nie interesuje nas dokładna wartość f , wiemy, że przykładowo $f(n) = 3n^2 + 5n + 17$, tylko raczej to, jak f zachowuje się dla dużych danych, czyli dużych n . W naszym przypadku powiemy, że f jest proporcjonalne do n^2 dla dużych n , i zapiszemy $f(n) = \Theta(n^2)$. Często przy badaniu złożoności nie umiemy poznać dokładnego zachowania algorytmu, a jesteśmy w stanie jedynie ustalić pewne górne oszacowanie na liczbę operacji, które ten algorytm wykonuje. Wówczas używamy tak zwanej notacji O , piszemy na przykład, że $f(n) = O(n^3)$, co oznacza, że dla dużych n funkcja f jest proporcjonalna do n^3 lub od niej mniejsza.

Wypada przy okazji wspomnieć, że pesymistyczna złożoność czasowa to najpopularniejszy sposób mierzenia złożoności programów, ale dalece nie jedyny. Dość często używa się *średniej złożoności czasowej*, która to dla $n \in \mathbb{N}$ zwraca średnią liczbę operacji, jakie algorytm wykonuje dla danych wejściowych rozmiaru n . Nieraz bada się też inne parametry algorytmu, często zamiast liczby wykonywanych operacji rozważa się rozmiar pamięci, której używa dany algorytm. Wówczas mówimy o *złożoności pamięciowej*; znów może być ona pesymistyczna, średnia albo jeszcze inna. Można też iść dużo dalej, istnieje cały dział informatyki teoretycznej, **złożoność obliczeniowa**, który zajmuje się próbą zrozumienia, jak złożone są różne problemy. Jest tam wiele fascynujących tematów i pytań, które wciąż czekają na rozwiązanie.

Wojciech CZERWIŃSKI

Informatyczny kącik olimpijski (126):

Klocki z numerami i piłeczki na podłodze

W tym odcinku omówimy rozwiązania dwóch zadań z pierwszego etapu XIII Młodzieżowej Olimpiady Informatycznej.

Klocki z numerami: Danych jest n klocków z zapisanymi na nich numerami. Ciąg $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ opisuje numery zapisane na kolejnych klockach. Mówimy, że kolekcja klocków jest imponująca, jeśli każdy naturalny numer x występuje x razy albo nie występuje wcale. Imponującymi kolekcjami są $(3, 2, 2, 3, 3)$ i $(4, 4, 1, 4, 4)$, zaś nie są: $(1, 2, 3, 4)$ i $(2, 2, 3, 3)$. Możemy zmienić numer dowolnego klocka na dowolny inny numer. Ile minimalnie zmian numerów należy dokonać, aby otrzymać imponującą kolekcję?

Rozwiązanie $O(n^2)$

Nasze rozważania rozpoczniemy od prostej obserwacji:

W ostatecznym ponumerowaniu żaden klocek nie będzie miał numeru większego niż n .

Na mocy powyższej obserwacji możemy ograniczyć się do numerów nie większych niż n , gdyż tylko takie numery będą w ostatecznym ponumerowaniu. Zliczmy, dla każdego $1 \leq i \leq n$, liczbę klocków z numerem i (niech w_i oznacza tę wartość). Teraz problem możemy opisać następująco. Mamy n numerów, a i -ty numer ma wartość w_i . Intuicyjnie, wartość numeru oznacza, ile już klocków z tym numerem mamy. Naszym celem jest wybrać najbardziej wartościowy podzbiór numerów sumujących się do n . Wówczas liczba klocków, które należy przenumerować, to n pomniejszone o znaną wartość podzbioru.

Otrzymany problem jest podobny do problemu plecakowego (numery są przedmiotami). Z jedną różnicą, chcemy zapelnąć plecak „po brzegi”, tzn. wybrać podzbiór, którego numery sumują się do n . Opiszemy teraz, w jaki sposób znaleźć taki podzbiór.

Piłeczki na podłodze: Danych jest n punktów na płaszczyźnie, ponumerowanych od 1 do n , i -ty punkt ma współrzędne (x_i, y_i) . Naszym zadaniem jest pokolorować te punkty (każdy punkt na czerwono albo niebiesko). Chcemy, aby odległość pomiędzy najbliższymi dwoma punktami w tym samym kolorze była jak największa.

Rozwiązanie $O(n^2 \cdot \log(n))$

Stwórzmy graf pełny $G = (V, E)$, gdzie:

- $V = \{1, 2, \dots, n\}$ – zbiór n wierzchołków,
- $E = \{(u, v) | 1 \leq u < v \leq n\}$ – zbiór $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi nieskierowanych.

Niech i -temu punktowi odpowiada i -ty wierzchołek. Wagą krawędzi (u, v) niech będzie kwadrat odległości pomiędzy u -tym i v -tym wierzchołkiem, tj. $w(u, v) = (x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2$. Na potrzeby tego rozwiązania wprowadźmy nowe pojęcie: d -porządek, czyli takie przyporządkowanie kolorów wierzchołkom, że waga krawędzi pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami w tym samym kolorze wynosi przynajmniej d . Naszym zadaniem jest znaleźć takie największe d , dla którego istnieje d -porządek.

Zauważmy, że d -porządek jest również d' -porządkiem dla $d' < d$. Zatem wartość d możemy znaleźć za pomocą wyszukiwania binarnego. Pozostało nam więc opisać algorytm, który dla ustalonego d sprawdzi, czy istnieje d -porządek. Zbudujmy graf $G' = (V, E')$, gdzie $E' = \{(u, v) | (u, v) \in E \wedge w(u, v) < d\}$. Otrzymaliśmy

Niech $T[j]$, dla $0 \leq j \leq n$, oznacza wartość najbardziej wartościowego podzbioru o sumie numerów równej j . Początkowo $T[0] = 0$ oraz $T[j] = -\infty$ dla $1 \leq j \leq n$. Następnie przeglądamy kolejne numery, które mogą tworzyć finalny podzbiór (numery od 1 do n). Załóżmy, że rozpatrujemy numer i o wartości w_i . Chcemy policzyć nowe wartości tablicy T (z uwzględnionym i -tym numerem), oznaczmy te wartości przez T' . Wówczas:

$$T'[j] = \max(T[j], \underbrace{T[j - i] + w_i}_{\text{jeśli } T[j - i] \neq -\infty})$$

($T[j]$ oznacza przypadek, kiedy do podzbioru o sumie j nie bierzemy i -tego oraz wyższych numerów, zaś $T[j - i] + w_i$ oznacza przypadek, kiedy i -ty numer włączamy do podzbioru). Po obliczeniu T' , przepisujemy wartości T' do T .

Dla każdego z n przedmiotów przeglądamy $n + 1$ elementową tablicę T , zatem otrzymujemy rozwiązanie w złożoności czasowej $O(n^2)$.

graf G' z grafu G poprzez usunięcie krawędzi o wadze większej lub równej d . Nie musimy uwzględniać tych krawędzi, ponieważ ich końce mogą być pokolorowane na ten sam kolor. G będzie d -porządkiem, jeśli G' będzie grafem dwudzielnym. Aby sprawdzić, czy G' jest dwudzielny, należy sprawdzić, czy każda spójna tego grafu jest dwudzielna. Sprawdzenie, czy spójna jest dwudzielna, rozpoczynamy od wybrania dowolnego wierzchołka i pokolorowania go na czerwono. Następnie przeszukujemy graf (np. za pomocą algorytmu DFS) i odwiedzonym wierzchołkom przypisujemy kolor przeciwny do koloru poprzednika. Jeśli natrafimy na krawędź, która łączy dwa wierzchołki z przyporządkowanym tym samym kolorem, to wiemy, że graf nie jest dwudzielny. Jeśli natomiast nie wystąpi żadna kolizja, to znaczy, że graf jest dwudzielny.

Liczba krawędzi w G jest rzędu $O(n^2)$. Zatem algorytm wyszukiwania binarnego wykona $O(\log(n))$ faz. W każdej fazie budujemy graf rozmiaru $O(n^2)$ i w czasie liniowym od jego rozmiaru sprawdzamy, czy graf jest dwudzielny. Całkowita złożoność czasowa to $O(n^2 \log(n))$.

Bartosz LUKASIEWICZ

Po nas choćby potop

Wieczór dla dorosłych – Centrum Nauki Kopernik. Trójce naukowców zaproponowano wspólną rozmowę. Co myśleliście o rozwoju waszej nauki 30 lat temu (gdy w nieznaną ruszał Okrągły Stół)? Co się stało w rzeczywistości i jaka będzie wasza nauka za kolejnych 30 lat? Fizyk, archeolog i biolog molekularny.

Łukasz Turski (fizyk) mówi o własnej pozycji naukowej 30 lat temu. Był w tym czasie w Stanach Zjednoczonych, interesował się wkładem fizyków w modelowanie procesów krystalizacji, a w szczególności powstawania płatków śniegu o blisko sześciokrotnej symetrii. Wraz z kolegami badał powstawanie struktur szkła. Słuchamy z niedowierzaniem, bo ta tematyka wydaje się raczej marginalną w obliczu wieloletnich odkryć tajemnic cząstek i pól, ale Łukasz Turski przyzwyczaił swoich słuchaczy do niestandardowych idei. Twierdzi, że komputery „wzięły udział” tylko w nielicznych twórczych rozwiązaniach w nauce. Nie chce mówić o falach grawitacyjnych i cząstkach elementarnych (bo wiedza o nich jest powszechna). Aleksander Bursche (archeolog) mówi o tamtych latach jako latach inwazyjnego podglądania tajemnic przeszłości (Indiana Jones z przysłowiową łopatką). Podstawowa wiedza o strukturze materiału genetycznego (DNA, RNA, białka) była 30 lat temu dostępna, podkreśla Magdalena Fikus, choć nie przewidywano, jak wiele luk w tej wiedzy trzeba będzie uzupełnić, poznając zasady regulacji aktywności genów. Na stołach laboratoryjnych dojrzewały metody inżynierii genetycznej, modyfikacji genów wybranych organizmów, projekty terapii genowej. Konieczne stało się znaczne ulepszenie metod analizy chemicznej cząsteczek informacji genetycznej.

W przyszłość właściwie cała trójka, choć w różnych słowach i emocjach, spogląda dziś raczej pesymistycznie. Prognozy globalne, zarówno dla zmian w geografii fizycznej Ziemi, jak i jej sytuacji politycznej, nie są proste i uniknięcie wielu zagrożeń wymaga bardzo racjonalnego i globalistycznego działania. Niestety pogłębił się społeczny odwrót od nauki, nastąpiła odmowa zaufania do niej. Przykłady można mnożyć: stosunek do GMO, do szczepień ochronnych, do potrzeby rozwoju odnawialnej energii, negacja wiarygodności pracy klimatologów, obniżanie poziomu edukacji, a w zakresie politycznym – wzrost tendencji populistycznych i zagrożeń terrorystycznych.

O przyszłości „za lat 30” trudno mówić. Mój ulubiony przykład przewidywania rozwoju nauki to propozycje odkrywców laserów, którym we wniosku patentowym nakazano poczynić przypuszczenia, do czego się przydadzą. Napisali, że do korekcji błędów w maszynopisach. Wiedza przewidywalna nie jest nauką.

Łukasz Turski mówi, że wszystkie obecne cywilizacyjne kłopoty wiążą się z brakiem pomysłów na tanie, nie zanieczyszczające atmosfery źródła energii, na nowe tanie i innowacyjne materiały. Aleksander Bursche twierdzi, że czasy obecne charakteryzują się niebywałym, nieodwracalnym niszczeniem przedmiotów i budowli z przeszłości, z jednej strony przez wojny i rebelie, z drugiej przez masy rabusiów kopiących wszędzie i poza jakąkolwiek kontrolą. Magdalena Fikus, ciesząc się z postępów medycyny molekularnej, martwi się wysoką, za wysoką, ich ceną, a także umacniającymi się tendencjami do modyfikacji genetycznej gatunku ludzkiego. We wszystkich dziedzinach należy postulować radykalne wzmocnienie debaty filozoficznej i etycznej, o ogólnospołecznym zasięgu, w kierunku ogólnej zadumy: co możemy, co chcemy i co powinniśmy dla przyszłości globu i *Homo sapiens* czynić. Zgodnie myślimy, że bez zasadniczych i szybko realizowanych zmian nadchodzącego kryzysu możemy nie opanować.

Pięć lat temu opisywałam w *Delcie* Muzeum Nasion na Spitzbergenie, które w wiecznej zmarzlinie miało „na zawsze” zabezpieczyć całe dziedzictwo roślinne na wypadek planetarnego kryzysu. W domyśle: wojny, trzęsienie ziemi. Właśnie ukazał się raport naukowców o tym, że zmiany klimatu w kierunku ocieplenia już niedługo obejmą Spitzbergen w takim stopniu, że zagrożą trwałości nasiennych zasobów. Armagedon na progu. . .

Magdalena FIKUS



Rozwiązanie zadania M 1599.

Przypuśćmy, że $f(x)$ jest liczbą złożoną dla pewnego $x \leq p-2$ i oznaczmy przez n najmniejszą taką dodatnią liczbę całkowitą, że $f(n)$ jest liczbą złożoną.

Z założeń zadania wynika, że $n > \sqrt{p/3}$, czyli $p < 3n^2$.

Oznaczmy przez q najmniejszy dzielnik pierwszy liczby $f(n)$. Zauważmy, że

$$q^2 \leq f(n) = n^2 + n + p < 4n^2 + n < (2n+1)^2,$$

wobec czego $q \leq 2n$, czyli istnieje liczba całkowita k o tej własności, że

$$0 \leq k \leq n-1 \text{ oraz } q \in \{n-k, n+k+1\}.$$

Wówczas

$$f(n) - f(k) = (n-k)(n+k+1)$$

jest liczbą podzielną przez q , więc skoro q dzieli $f(n)$, to również $f(k)$ jest liczbą podzielną przez q . Pozostaje zauważyć, że

$$n-k < n < p < f(k)$$

oraz

$$n+k+1 < p+k < f(k),$$

więc $q \neq f(k)$, a co za tym idzie – $f(k)$ jest liczbą złożoną. Jednak $k < n$, więc stoi to w sprzeczności z wyborem liczby n .

Nienewsy

Badania naukowe to najczęściej żmudna, niepoetyczna praca – daleka od jednorazowych olśnień, którym towarzyszy okrzyk „Eureka!”. Z tego względu trudno jest im błysnąć choć na chwilę w mediach społecznościowych czy w nagłówkach gazet. A przecież wiele takich działań podejmowanych przez naukowców wartych jest uwagi i namysłu. Dlatego w tym odcinku proponuję subiektywny przegląd mało ekscytujących wiadomości.

RHIC Już ponad osiemnaście lat działa Zderzacz Relatywistycznych Ciężkich Jonów (*Relativistic Heavy Ion Collider*). Urządzenie znajduje się w Brookhaven National Laboratory w stanie Nowy Jork, a jego dotychczasowe osiągnięcia związane są ze zderzaniem jonów złota rozprędzonych prawie do prędkości światła. Za jego pomocą udowodniono, że w takich zderzeniach powstaje bardzo gorąca materia o bardzo egzotycznych własnościach. Gorąca – bo osiągane lokalnie temperatury sięgają bilionów stopni Celsjusza, a przynajmniej tak twierdzą fizycy cząstek elementarnych, gorsząc ekspertów od fizyki statystycznej przeliczaniem na inne jednostki średniej energii kinetycznej cząstek. Bardzo egzotyczna – bo w takim stanie kwarki i gluony potrafią oswobodzić się na maleńką chwilę ze swego uwięzienia w protonach i neutronach, tworząc tzw. plazmę kwarkowo-gluonową. Najnowsza odsłona programu eksperymentalnego RHIC ma ulepszone detektory cząstek oraz nowy system chłodzenia wiązki ciężkich jonów, zapobiegający przypadkowym zderzeniom w nieodpowiednich, czyli oddalonych od detektorów miejscach.

BESIII W lutym zespół eksperymentu *Beijing Spectrometer III* działającego przy Pekińskim Zderzaczu Elektronów i Pozytonów (BEPCII) poinformował o zarejestrowaniu dziesięciomiliardowego przypadku, w którym elektron, zderzając się z pozytonem, produkuje cząstkę J/ψ , odkrytą w 1974 roku przez Samuela Tinga i Burtona Richtera. Cząstki takie składają się z kwarka i antykwarka powabnego (*charm*), a ich własności sprawiają, że badanie procesów ich rozpadu przynosi wiele interesujących informacji na temat różnych powstających wówczas egzotycznych cząstek. Wśród wartej uwagi menażerii możliwych produktów rozpadu J/ψ znajdują się hipotetyczne *glueballe* (nie utrwaliła się jeszcze powszechnie przyjęta polska nazwa tych cząstek, a dosłowne tłumaczenie prowadzi do dość koślawego rezultatu), składające się z samych gluonów, czy bariony zbudowane z więcej niż trzech kwarków i antykwarków (takich jak odkryty w 2013 roku przez BESIII i Belle pierwszy potwierdzony tetrakwark $Z_c(3900)$).

ILC Gdy Czytelnicy *Delty* pochylają się nad tym tekstem, zapewne wiadomo już, jaki będzie los pomysłu, by w Japonii wybudować Międzynarodowy Zderzacz Liniowy (*International Linear Collider*). Początkowo idea ta zyskała poparcie rządu japońskiego, który zlecił Radzie Naukowej Japonii sporządzenie szczegółowego raportu na temat potencjału nowego urządzenia. Przedstawiony w grudniu 2018 r. dokument pochlebnie wypowiada się o szansach uzyskania ciekawych wyników fizycznych, zauważa jednak,

że Kraj Kwitnącej Wiśni nie obfituje w specjalistów od budowy wielkich akceleratorów, a zakres współpracy międzynarodowej nie jest łatwy do przewidzenia.

LUNA Już ówczesny wiek działa w Gran Sasso Podziemne Laboratorium Astrofizyki Jądrowej (*Laboratory for Underground Nuclear Astrophysics*). Jednym z jego ostatnich dokonań było dokładne zbadanie procesu, w którym bombardowane protonami jądra neonu przekształcają się w jądra sodu, procesu ważnego dla zrozumienia ewolucji czerwonych olbrzymów. Choć może się to wydać zaskakujące, takich danych wcześniej nie było, a wykonanie pomiarów głęboko pod ziemią było kluczowe ze względu na niewielkie tło cząstek promieniowania kosmicznego, zatrzymywanego w przypadku LUNA przez grubą warstwę skał otaczających detektory.

Kosmiczny Teleskop Hubble’a Jesteśmy przyzwyczajeni do przepięknych zdjęć z głębi kosmosu dostarczanych przez ten instrument. Tymczasem jest on z powodzeniem stosowany do eksploracji naszego najbliższego (w skali kosmicznej) otoczenia. W lutym tego roku ogłoszono na łamach *Nature* odkrycie siódmego księżycy Neptuna, nazwanego roboczko Konikiem Morskim – skalnej kruszyny o średnicy nieco ponad 30 km. Poprzednie sześć księżyców tej najbardziej odległej od Słońca planety naszego Układu odkryto 30 lat temu dzięki misji *Voyager 2*. Współodkrywca najnowszego satelity, Mark Showalter z Instytutu SETI (*Search for Extraterrestrial Intelligence*), użył do tego celu zdjęć wykonanych przez Kosmiczny Teleskop Hubble’a w poprzedniej dekadzie; w swoim dorobku Showalter ma także znalezienie niewielkich satelitów Saturna (Pan, w szczelinie między pierścieniami), Urana (Mab i Kupid) oraz Plutona (Kerberos i Styks).

Borexino W ubiegłym roku zespół eksperymentu mającego na celu detekcję neutrin słonecznych o niskich energiach opublikował w *Nature* wyniki ponad dziesięcioletnich badań. Dzięki położeniu pod grubą warstwą skał (po sąsiedzku z eksperymentem LUNA) i bardzo wysokiej czystości materiału, z którego jest wykonany, detektor Borexino może wykrywać neutrina z szeregu reakcji jądrowych zachodzących w Słońcu. Zgromadzone dotąd dane pozwalają na potwierdzenie zjawiska oscylacji neutrin w materii słonecznej (tzw. proces Mikheyeva–Smirnova–Wolfensteina) bez odwoływania się do jakichkolwiek danych z innych eksperymentów. W skład zespołu wchodzi również badacz z Uniwersytetu Jagiellońskiego.

LVD W Detektorze o Wielkiej Objętości (*Large Volume Detector*) ciągle cisza. To akurat dobrze, bo zarejestrowanie sygnału neutrin zapowiadałoby rychłe nadejście potencjalnie śmiertcionośnych cząstek gamma z jakiejś pobliskiej supernowej, np. wybuchającej Betelgezy. Wobec kruchości życia na Błękitnej Planecie, na które czyha tyle ziemskich i kosmicznych niebezpieczeństw, cieszymy się nawet drobnymi postępami fizyki.

Krzysztof TURZYŃSKI

M. R. Showalter *et al.*, *Nature* **566** (2019) 350
The Borexino Collaboration, *Nature* **562** (2018) 505

Oddziaływania fundamentalne

Powszechnie znana podręcznikowa odpowiedź na pytanie, ile jest oddziaływań fundamentalnych, brzmi: cztery. Przypomnijmy jakie:

Elektromagnetyczne są odpowiedzialne za wiele zjawisk, które możemy obserwować na co dzień: przyciągające się magnesy, iskry czy wyładowania atmosferyczne. Pole elektryczne odpowiada również za wiązanie elektronów w atomach i wiązania chemiczne pomiędzy atomami, czyli trzyma w kupie cząsteczki chemiczne, z których jesteśmy zbudowani. Oscylacje pola elektromagnetycznego rozchodzą się jako fale, które w zależności od długości mają zwyczajowo różne nazwy, od fal najdłuższych, czyli radiowych, poprzez mikrofały, promieniowanie podczerwone, widzialne, nadfiolet, promieniowanie Röntgena aż po promieniowanie gamma.

Grawitacyjne również znamy z życia codziennego – każdy odczuwa przyciąganie Ziemi. Grawitacja rządzi ruchem planet wokół gwiazd, ruchem gwiazd powiązanych w galaktyki, gromadami galaktyk itp. W 2015 roku po raz pierwszy bezpośrednio zaobserwowano fale będące zaburzeniem pola grawitacyjnego, których istnienie przewidywała ogólna teoria względności Einsteina. Warto podkreślić, że to promieniowanie ma zupełnie inną naturę niż wszystkie wyżej wymienione zakresy promieniowania elektromagnetycznego, dlatego jego detekcja otwiera nowy rozdział w obserwacjach astronomicznych (patrz teksty Michała Bejgera Δ_{16}^4 , Δ_{17}^{12} , Δ_{18}^{11}).

Silne odpowiadają za wiązanie kwarków w bariony i mezony. Dwa najbliższe bariony to proton i neutron, czyli składniki jąder atomowych. W uproszczeniu można sobie wyobrazić, że każdy z nich składa się z trzech kwarków. Za wiązanie protonów i neutronów w jądrach również odpowiadają oddziaływania silne, które nazwę

swą zawdzięczają temu, że muszą przewyżczać elektrostatyczne odpychanie dodatnio naładowanych protonów, czyli muszą być od nich silniejsze. Mają za to niewielki zasięg, i dlatego układ okresowy ma tylko kilka wierszy – jąder powyżej pewnego rozmiaru nie obserwuje się.

Słabe są najbardziej zagadkowe. Opisane wcześniej oddziaływania odpowiadają za wiązania w jakiejś konkretnej skali (silne – jądrowej, elektromagnetyczne – atomowej, grawitacyjne – astronomicznej). Słabe takiej funkcji nie spełniają, a procesy z ich udziałem mają zawsze charakter chwilowy, gdyż, w odróżnieniu od pozostałych oddziaływań, są przenoszone przez bardzo ciężkie i nietrwale cząstki masywne. Pełnią jednak kluczową rolę, ponieważ odpowiadają za przemiany cząstek elementarnych w inne cząstki, które nie mogą zachodzić inaczej niż za pośrednictwem oddziaływań słabych, czego efektem są między innymi przemiany promieniotwórcze pierwiastków.

Fizycy od lat dążą do zredukowania tej listy i szukają teorii unifikującej wszystkie oddziaływania. Jak na razie udało się opisać w naprawdę jednolity sposób oddziaływania elektromagnetyczne i słabe jako przejaw jednego – elektroslabego (teoria Weinberga-Salama). Więcej na ten temat oraz o zmaganiach z dołączeniem do unifikacji oddziaływań silnych można przeczytać w cyklu Piotra Chankowskiego ($\Delta_{16}^{1, \dots, 6}$, Δ_{17}^2). Grawitacja ciągle wydaje się najbardziej odróżniać od pozostałych sił, ale to już temat na inną opowieść.

Szymon CHARZYŃSKI

Entropia

Drugą zasadę termodynamiki kojarzymy z nieodwracalnością procesów fizycznych, „strzałką czasu”, entropią i jej nieuchronnym wzrostem.

Intrygującym zagadnieniem jest powiązanie nieodwracalnych procesów, którym podlegają makroskopowe układy (i o których mówi druga zasada), z równaniami ewolucji czasowej (na przykład równaniami Newtona), które nie wyróżniają kierunku czasu. W badaniu tego problemu i zrozumieniu związanych z nim „paradoksów” kluczową rolę odgrywa statystyczny charakter drugiej zasady. Czy można więc „na palcach” pokazać nieuchronny wzrost entropii i nieodwracalność?

Rozpatrzmy izolowany układ wielu (N_1) cząstek o ustalonej całkowitej energii E_1 (oraz innych parametrach, takich jak objętość). Na poziomie mikroskopowym taki stan realizowany może być na wiele (X_1) sposobów (na przykład poszczególnym cząstkom mogą być przypisane różne wartości energii, z jedynym warunkiem, aby ich suma wynosiła E_1). Zakładamy tu, że X_1 jest jednoznaczna funkcją E_1 . Przyjmijmy za „daną” definicję entropii $S_1(E_1) = \log(X_1)$. Taka definicja gwarantuje, że całkowita entropia niezależnych układów jest równa sumie tychże entropii. To dlatego, że $\log(X_1 X_2) = \log(X_1) + \log(X_2)$. Oczywiście, logarytm jest funkcją rosnącą, zatem duża ilość dostępnych stanów mikroskopowych oznacza dużą entropię. Rozpatrzmy teraz dwa takie układy, scharakteryzowane odpowiednio przez (E_1, X_1) oraz (E_2, X_2) . Doprowadzając je do kontaktu, pozwalamy na wymianę energii przy warunku zachowania jej całkowitej wartości: $E = E_1 + E_2$. Całkowita liczba dostępnych stanów mikroskopowych wyniesie teraz

$$(1) \quad X(E) = \sum_{E'_1} X_1(E'_1) X_2(E - E'_1) = \sum_{E'_1} e^{S_1(E'_1) + S_2(E - E'_1)}.$$

O strzałce czasu pisał Piotr Szymczak w Δ_{19}^1 .



**Rozwiązanie zadania F 973.**

Ilość gazu wypływającego w jednostce czasu (szybkość utraty gazu) przez niedomknięty zawór wynosi $I = \rho v S$, gdzie ρ jest gęstością gazu, v jest średnią prędkością wypływających cząstek, a S powierzchnią otworu. Na podstawie równania stanu gazu stwierdzamy, że gęstość gazu w pojemniku pod ciśnieniem p , w temperaturze T jest proporcjonalna do p/T . Średnia energia kinetyczna cząsteczek gazu jest proporcjonalna do temperatury T , a więc średnia wartość prędkości jest proporcjonalna do \sqrt{T} . Na tej podstawie stwierdzamy, że:

$$I = \rho v S \propto \frac{p}{\sqrt{T}}$$

(znak \propto oznacza proporcjonalność). W warunkach określonych w zadaniu z pierwszego z pojemników tlen ulatnia się więc $\sqrt{2} \approx 1,414$ raza szybciej niż z drugiego, mimo że, jak łatwo sprawdzić, początkowo w obu pojemnikach znajdowały się takie same ilości gazu.

Wynika stąd, że $X(E) > X_1(E_1)X_2(E_2)$ (ponieważ $X_1(E_1)X_2(E_2)$ jest jednym ze składników sumy), a więc entropia wzrosła. W sytuacji, gdy liczba cząstek w układzie jest odpowiednio duża, wyrażenie po prawej stronie jest zdominowane przez największy z wyrazów go tworzących (odpowiadający maksimum wyrażenia w wykładniku). Dostajemy wówczas

$$(2) \quad S(E) \approx S_1(E_1^*) + S_2(E - E_1^*),$$

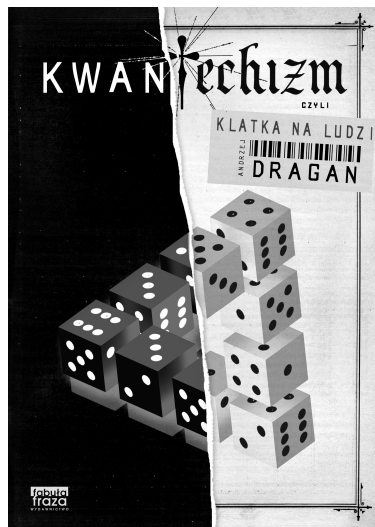
gdzie E_1^* odpowiada maksimum wyrażenia po prawej stronie powyższego równania. Ukazuje to drugą zasadę jako zasadę ekstremum: gdy dwa układy doprowadzimy do kontaktu, pozwalając na ich oddziaływanie, nowy stan równowagi będzie taki, by entropia osiągała maksymalną możliwą wartość. Wybierając (losowo) jeden spośród $X(E)$ stanów, mamy oczywiście pewną szansę, że trafimy na przypadek, gdzie E_1 istotnie różni się od E_1^* , ale dla dużej liczby cząstek ($N = N_1 + N_2$) prawdopodobieństwo takiego trafu jest znikomo małe. Dzieje się tak dlatego, że przybliżenie, którego użyliśmy, pisząc wzór (2) i wybierając tylko wiodący wyraz w równaniu (1), jest tym lepsze, im większa wartość wykładnika, który z kolei jest rzędu N . Dla typowo spotykanych wartości N ($N \approx 20^{23}$) przybliżenie zastosowane w wyrażeniu (2) jest z praktycznego punktu widzenia niezwykle dokładne. Zauważyć można, że powyższe spojrzenie w ogóle nie rozpatruje ewolucji układu. Przyjmuje jedynie, że przy pomiarze stanu układu dostajemy z równymi (albo zbliżonymi) prawdopodobieństwami różne wyniki. W ujęciu, w którym śledzimy ewolucję układu, stwierdzilibyśmy, że układ niezależnie od stanu początkowego spędza przytłaczającą większość czasu w stanach odpowiadających maksimum entropii (czyli takich, że $E_1 = E_1^*$).

Paweł JAKUBCZYK

O kwantach, względności, hipnozie, przemijaniu i tym podobnych

Recenzja

Dwie fundamentalne teorie fizyczne: teoria względności i mechanika kwantowa są zaskakujące dla kogoś, kto spotyka się z nimi po raz pierwszy, i pełne są pozornych paradoksów. Są więc wdzięcznym tematem artykułów i książek popularnonaukowych, których powstało już wiele. Książka Andrzeja Dragana pt. „Kwantechizm, czyli klatka na ludzi”, mimo że poświęcona jest głównie teorii względności i mechanice kwantowej, nie jest kolejnym wcieleniem standardowych opowieści o paradoksie bliźniąt i dualizmie korpuskularno-falowym. To, co wyróżnia tę pozycję spośród innych, to wysuwająca się miejscami na pierwszy plan subiektywna, niestandardowa interpretacja wiedzy zgromadzonej w podręcznikach. Autor stara się przekazać Czytelnikowi nie tylko fakty, które same w sobie są zaskakujące, ale dzieli się swoimi intuicjami, własnym sposobem myślenia i wizualizowania sobie tych faktów. Książka zawiera również omówienie pewnych bardzo świeżych odkryć z pogranicza teorii względności i mechaniki kwantowej, obszaru ciągle jeszcze słabo rozpoznanego, w którym wciąż prowadzone są pionierskie badania. Czytelnik otrzymuje więc relację z pierwszej linii frontu od jednego z pionierów tych badań.



Kolejnym wielkim walorem książki są liczne dygresje pokrywające szerokie spektrum tematów wykraczających nie tylko poza fizykę, ale całkiem poza nauki ścisłe. Autor szczerze przyznaje, że nie w każdej z dziedzin, o których pisze, jest ekspertem („Nie znam się, to się wypowiem” – to tytuł jednego z rozdziałów), co może złagodzić ewentualny sprzeciw ekspertów w tych dziedzinach (np. teorii ewolucji, biologii molekularnej, uczeniu maszynowym) wobec pewnej nonszalancji i powierzchowności w formułowaniu tez. Swoją opowieść o nauce autor przeplata anegdotami, żartami i elementami autobiograficznymi. Nie unika również manifestowania swojego emocjonalnego stosunku do tematów, o których pisze, i swoich osobistych przekonań. Nieuchronną konsekwencją tego faktu jest to, że znajdują się zapewne Czytelnicy uważający niektóre zawarte w książce tezy za prowokacyjne. Sądzę, że jeżeli autor chce do czegoś prowokować, to przede wszystkim do myślenia. Wezwanie do zdrowego krytycyzmu i sceptycznego podejścia do autorytetów jest jednym z głównych przesłań tej książki.

Szymon CHARZYŃSKI

Widma spektroskopowe gwiazd

Światło, które dociera do nas z gwiazd (i szerzej – galaktyk), ma dokładnie tę samą właściwość. Mimo że dla naszych oczu wydaje się być białe, tak naprawdę składa się z wielu różnych barw. Wykorzystując narzędzia zwane spektroskopami, astronomowie potrafią rozbijać blask gwiazd na jego składowe i mierzyć, ile światła dociera do nas od każdego koloru. Takie „rozbite” światło nazywamy **widmem spektroskopowym**. Obserwacje widm zawierają bardzo dużo informacji nie tylko o gwiazdach, ale także o ich otoczeniu. W związku z tym są szeroko wykorzystywane w astronomii.

Jak wyglądają widma gwiazd i galaktyk w zakresie promieniowania widzialnego? Jak tęcza, ale taka, w której niektóre kolory są jaśniejsze, a niektóre zupełnie „wycięte”. Położenie jasnych i ciemnych obszarów zmienia się w zależności od rodzaju gwiazdy lub galaktyki. Dlaczego? Każdy pierwiastek układu okresowego świecąc, tworzy w widmie serię jasnych linii o różnych kolorach (emituje

Widmo spektroskopowe światła widzialnego – szerzej znane jest jako... tęcza. Na pozornie białe światło słoneczne składa się cała paleta barw – od czerwonego do fioletowego. Ale czym tak naprawdę są te kolory? To sposób, w jaki nasz mózg interpretuje różne długości fali promieniowania elektromagnetycznego (światła). Czerwony kolor to najdłuższe fale, jakie potrafi rejestrować nasze oko, a fioletowy to te najkrótsze.

fotony tylko o określonych długościach fali) – tzw. **linie emisyjne**. Ten sam pierwiastek, pochłaniając światło, pozostawi czarne linie w tych samych miejscach widma – tzw. **linie absorpcyjne**. Najważniejsze jest jednak to, że położenie linii emisyjnych (i absorpcyjnych) w widmie jest unikalne i niezmiennie dla każdego z pierwiastków. Oznacza to, że linie emisyjne reprezentujące wodór nigdy nie będą wyglądały jak te dla helu, który nigdy nie będzie wyglądał jak węgiel czy żelazo itd. Dlatego w zależności od położenia linii emisyjnych astronomowie są w stanie dokładnie określić skład chemiczny każdej z obserwowanych gwiazd. Z kolei na podstawie analizy linii absorpcyjnych można wyznaczyć skład chemiczny gazu znajdującego się w jej otoczeniu (pomiedzy nami a gwiazdą). Ale to nie wszystko, dzięki intensywności linii emisyjnych mogą też zmierzyć temperaturę i gęstość materiału, z jakiego zbudowana jest gwiazda. A dzięki szerokości tych linii określić, jak szybko się obraca.

Anna DURKALEC

Przesunięcie ku czerwieni – redshift

Efekt Dopplera dla fal dźwiękowych jest łatwo obserwowalny, np. dla jadącej na sygnale karetki pogotowia. Gdy pojazd się do nas zbliża, ton syreny jest wysoki (krótsza fala), po czym zmienia się na niższy (dłuższa fala), gdy pojazd zaczyna się oddalać.

Ziemia krąży wokół Słońca z prędkością ok. 107 000 km/h. Ale to jeszcze nic! Andromeda zbliża się do naszej galaktyki z prędkością około 396 000 km/h.

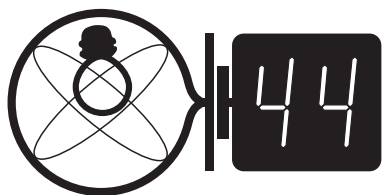
Już od XIX wieku wiadomo, że każdy pierwiastek układu okresowego emituje i absorbuje światło tylko na określonych długościach fali (patrz artykuł powyżej). Astronomowie zauważyli jednak, że dla gwiazd i galaktyk linie widmowe często są **przesunięte** w stosunku do tych laboratoryjnych, mimo że odległości pomiędzy poszczególnymi liniami pozostają niezmiennie. Dla większości galaktyk przesunięcie to następuje w kierunku dłuższych długości fali, czyli w stronę koloru czerwonego. Dlatego zjawisko to nazwano **przesunięciem ku czerwieni (redshift)**. W astronomii często jest oznaczane literą *z*.

Skąd bierze się to przesunięcie? Zapewne słyszałeś o efekcie Dopplera – zmianie częstotliwości fali (jednocześnie długości fali) zależnej od tego, czy jej źródło oddala się, czy zbliża do obserwatora. Światło rozprzestrzenia się jako fala, więc ulega temu zjawisku. Gdy źródło oddala się od obserwatora, fala świetlna ulega rozciągnięciu, przez co odbierana jest jako bardziej czerwona oraz bardziej niebieska, gdy obiekt się zbliża. W normalnych warunkach, na co dzień, nie jesteśmy w stanie rozpoznać tych różnic, ponieważ prędkość światła jest zbyt duża w stosunku do prędkości źródeł światła i odległości, jakie fala świetlna ma do pokonania.

Wszechświat jest jednak ogromny, a odległości pomiędzy obiektami astronomicznymi i ich prędkości są niewyobrażalnie duże. Dlatego zmiana długości fali (koloru) może być znacząca i łatwa do zmierzenia. Oczywiście, taki pomiar nie sprowadza się do stwierdzenia, że gwiazda jest bardziej czerwona (lub niebieska) niż powinna. To, co astronomowie mierzą, to przesunięcie linii emisyjnych i absorpcyjnych w widmach spektroskopowych w stosunku do ich laboratoryjnych położzeń. Dzięki temu jesteśmy w stanie dokładnie obliczyć prędkość gwiazd względem Ziemi. Pomiar taki jest niesamowicie precyzyjny i pozwala zaobserwować nawet najmniejsze zmiany prędkości, spowodowane np. istnieniem egzoplanet krążących wokół gwiazdy.

Pomiary przesunięcia ku czerwieni wykorzystuje się również przy większych odległościach. Wykonane pomiary redshiftu dla galaktyk pokazały, że te oddalają się od nas w zawrotnym tempie, co związane jest z rozszerzaniem się Wszechświata. Im galaktyka bardziej odległa, tym szybsza jest jej ucieczka; w rezultacie – coraz silniejsze jej przesunięcie ku czerwieni (większy/silniejszy redshift). Jego pomiar pozwala nam więc określać, z jakiego okresu ewolucji Wszechświata dociera do nas światło obserwowanej galaktyki. Na przykład przesunięcie ku czerwieni galaktyk znajdujących się w naszym najbliższym otoczeniu to $z = 0$, podczas gdy dla najdalszej zaobserwowanej galaktyki – GN-z11 – wynosi ono $z = 11,1$. To oznacza, że obserwujemy ją taką, jaka była zaledwie kilkadziesiąt milionów lat po Wielkim Wybuchu.

Anna DURKALEC



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2019

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 676, 677

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

676. Między zwartymi drutem okładkami nienaładowanego kondensatora płaskiego znajduje się punktowy ładunek q . Powierzchnia okładek jest bardzo duża, efekty brzegowe możemy zaniedbać. Odległość ładunku od jednej z okładek jest równa $d/3$, gdzie d jest odległością między okładkami. Jaki ładunek przepłynie przez przewodnik zwierający okładki, gdy ładunek q zostanie przesunięty w miejsce wewnątrz kondensatora, odległe o $d/3$ od drugiej okładki?

677. Oszacuj, jaki musi być minimalny promień planety, aby mogła ona utrzymać atmosferę składającą się głównie z tlenu i azotu, jeśli temperatura powierzchni planety $T = 300$ K. Średnia gęstość planety $\rho = 4 \cdot 10^3$ kg/m³.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2018

Przypominamy treść zadań:

668. Nauczyciel, zwrócony twarzą do tablicy, obserwuje klasę dzięki odbiciu światła od powierzchni szkieł jego okularów. Nauczyciel widzi dwa obrazy ucznia, który siedzi w odległości 5 m od niego. Jeden obraz znajduje się w odległości 5 m, drugi w odległości $\frac{5}{n}$ m od nauczyciela. Po odwróceniu do klasy nauczyciel widzi przez okulary obraz tego samego ucznia w odległości 2,5 m. Wyznaczyć współczynnik załamania szkła, z którego wykonane są soczewki okularów.

669. Do naczynia w kształcie cylindra o polu przekroju poprzecznego S wlano wodę, w której pływa kawałek lodu z kulką ołowianą wewnątrz. Objętość lodu razem z kulką jest równa V . Nad wodę wystaje $\frac{1}{n}$ część tej objętości. Jak zmienia się poziom wody w naczyniu po stopieniu lodu? Gęstości wody, lodu i ołowiu wynoszą odpowiednio ρ_W, ρ_L, ρ_O .

668. Szukany współczynnik załamania możemy znaleźć ze wzoru na zdolność skupiającą soczewki okularów: $D = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, gdzie R_1 i R_2 są promieniami krzywizny powierzchni soczewki. Są one dodatnie, gdy powierzchnia soczewki jest wypukła, i ujemne, gdy powierzchnia jest wklęsła. Odległość ucznia od soczewki jest stała i wynosi $x = 5$ m. Gdy nauczyciel patrzy na ucznia przez okulary, widzi jego obraz pozorny w odległości $y = -2,5$ m, stąd $D = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{5}$ m. Soczewki okularów są rozpraszające.

Gdy nauczyciel jest odwrócony do tablicy, jeden z obrazów odległy o y_1 powstaje w wyniku odbicia od powierzchni soczewki bliższej oka. Zdolność skupiająca takiego zwierciadła wynosi $D_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y_1}$. Musimy rozważyć dwa przypadki:

- a) $y_1 = -5$ m, $D_1 = 0$, powierzchnia soczewki jest płaska,
b) $y_1 = -\frac{5}{7}$ m, $D_1 = -\frac{6}{5}$ m, powierzchnia jest wypukła, czyli $\frac{1}{R_1} = \frac{3}{5}$ m.

Drugi obraz obserwowany przez nauczyciela odwróconego do tablicy, odległy od niego o y_2 , powstaje

w wyniku przejścia światła przez soczewkę, odbiciu od powierzchni o zdolności skupiającej D_2 dalszej od oka i ponownym przejściu przez soczewkę. Zdolność skupiająca takiego układu wynosi

$$2D + D_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y_2}.$$

Rozważamy ponownie dwa przypadki:

- a) $y_2 = -\frac{5}{7}$ m, $D_2 = -\frac{4}{5}$ m, $\frac{1}{R_2} = -\frac{2}{5}$ m,
b) $y_2 = -5$ m, $D_2 = \frac{2}{5}$ m, $\frac{1}{R_2} > 0$.

Przypadek b) musimy odrzucić, bo soczewka szklana dwuwypukła nie może być rozpraszająca. W przypadku a) soczewka jest płasko-wklęsła wykonana ze szkła o współczynniku załamania $n = 1,5$.

669. Parcie P na dno naczynia nie zmienia się po stopieniu wody, bo nie zmienia się ciężar zawartości naczynia, a ścianki cylindra są pionowe:

$$P = \rho_W g H_1 S = \rho_W g H_2 S + V_O (\rho_O - \rho_W) g,$$

gdzie H_1 i H_2 oznaczają wysokości słupa wody w naczyniu przed i po stopieniu lodu, V_O jest objętością ołowiu. Różnica wysokości poziomów wody wynosi

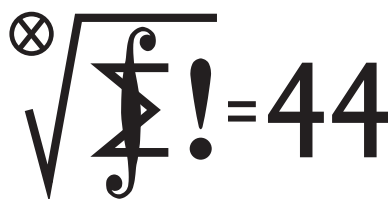
$$(1) \quad h = H_1 - H_2 = \frac{V_O (\rho_O - \rho_W)}{S \rho_W}.$$

Ponieważ gęstość ołowiu jest większa od gęstości wody, poziom wody w naczyniu obniży się. Objętość ołowiu możemy znaleźć z warunku równowagi sił działających na pływający lód:

$$(2) \quad (V - V_O) \rho_L + V_O \rho_O = \frac{V \rho_W (n - 1)}{n}.$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy szukany wynik:

$$h = \frac{V (\rho_O - \rho_W) (\rho_W (1 - \frac{1}{n}) - \rho_L)}{S (\rho_O - \rho_L) \rho_W}.$$



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2019

Zadania z matematyki nr 779, 780

Redaguje Marcin E. KUCZMA

779. W pola planszy kwadratowej wpisujemy liczby całkowite (w każde pole jedną liczbę) tak, by liczby wpisane w dowolne dwa przyległe pola były równe lub różniły się o 1 (pola przyległe mają wspólny bok). Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć największą liczbę m taką, że przy każdym wypełnieniu planszy $n \times n$, zgodnym z podanym warunkiem, pewna liczba pojawia się na co najmniej m polach planszy.

780. Ciąg x_0, x_1, x_2, \dots jest określony wzorami: $x_0 = 1$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \sqrt{2n})$ lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

Zadanie 780 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2018

Przypominamy treść zadań:

771. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f' \left(\frac{a+b}{2} \right) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

dla każdej pary różnych liczb rzeczywistych a, b , których różnica jest liczbą całkowitą.

772. Niech $M_n = 2^n - 1$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Udowodnić, że następujące dwa warunki są równoważne:

- (i) $2^n \equiv 2 \pmod{n}$; (ii) $2^{M_n} \equiv 2 \pmod{M_n}$.

771. Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ uzyskujemy z podanego równania (po podstawieniu $a = x - 1$, $b = x + 1$) równość

$$(1) \quad 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1).$$

Wynika z niej, że funkcja f' jest różniczkowalna.

Możemy więc zróżniczkować (1) stronami, otrzymując

$$(2) \quad 2f''(x) = f'(x+1) - f'(x-1).$$

W równości (1) zastępujemy x przez $x+1$ oraz $x-1$:

$$2f'(x+1) = f(x+2) - f(x),$$

$$2f'(x-1) = f(x) - f(x-2);$$

równość (2) (pomnożona przez 2) przybiera postać

$$(3) \quad 4f''(x) = f(x+2) - f(x) - f(x) + f(x-2).$$

Widać stąd, że i funkcja f'' ma pochodną.

Różniczkujemy (3) stronami:

$$(4) \quad 4f'''(x) = f'(x+2) - 2f'(x) + f'(x-2).$$

W równaniu danym w założeniach podstawiamy $a = x$, $b = x+4$, następnie $a = x-4$, $b = x$ i wreszcie $a = x-4$, $b = x+4$, otrzymując kolejno

$$4f'(x+2) = f(x+4) - f(x),$$

$$4f'(x-2) = f(x) - f(x-4),$$

$$8f'(x) = f(x+4) - f(x-4).$$

Równość (4) (pomnożona przez 4) daje w efekcie

$$16f'''(x) = (f(x+4) - f(x)) - (f(x+4) - f(x-4)) + (f(x) - f(x-4)) = 0.$$

Uzyskana równość zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

To znaczy, że f jest wielomianem stopnia najwyżej drugiego.

I na odwrót, każdy taki wielomian $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ spełnia równanie dane w założeniu zadania (i to nawet dla każdej pary różnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$) – co łatwo sprawdzić.

772. Dla $n = 1$ oba warunki są spełnione. Dalej przyjmujemy $n \geq 2$. Zapiszmy liczbę $M_n - 1$ jako

$$(5) \quad M_n - 1 = qn + r; \quad q, r \in \mathbb{Z}; \quad 0 \leq r < n.$$

Wobec określenia $M_n = 2^n - 1$ mamy kongruencję $2^n \equiv 1 \pmod{M_n}$, którą podnosimy do potęgi q : $2^{qn} \equiv 1 \pmod{M_n}$; stąd po pomnożeniu przez 2^r (i uwzględnieniu (5)):

$$(6) \quad 2^{M_n - 1} \equiv 2^r \pmod{M_n}.$$

Jeśli zachodzi warunek (i), to n jest dzielnikiem liczby $2^n - 2$, równej $M_n - 1$, czyli w równości (5) jest $r = 0$. Ze związku (6) dostajemy $2^{M_n - 1} \equiv 1 \pmod{M_n}$; pomnożenie przez 2 daje warunek (ii).

Na odwrót, jeśli zachodzi warunek (ii), to daną w nim kongruencję $\pmod{M_n}$ dzielimy stronami przez 2 (to dozwolone, bo M_n jest liczbą nieparzystą), otrzymując $2^{M_n - 1} \equiv 1 \pmod{M_n}$. W połączeniu z (6) dostajemy

$$(7) \quad 2^r \equiv 1 \pmod{M_n}.$$

Ale $2^r \leq 2^{n-1} < M_n$, więc kongruencja (7) jest równością, skąd $r = 0$. To znaczy, w myśl (5), że n dzieli liczbę $M_n - 1 = 2^n - 2$, i mamy warunek (i).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
765 (WT = 1,78) i 766 (WT = 2,44)
z numeru 9/2018

Piotr Kumor	Olsztyn	42,07
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Marcin Małogrosz	Warszawa	38,00
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	35,69

Prosto z nieba: Podglądanie supernowej

Supernowa to zjawisko kataklizmiczne, związane ze śmiercią pewnych rodzajów gwiazd. Jak wskazuje nazwa, jest „czymś więcej” niż *nova*, którą to nazwą astronomowie oznaczają nowy obiekt na nieboskłonie (np. nowe karłowate to układy podwójne, w których następuje akrecja na powierzchnię białego karła, co powoduje wybuchy znacznie zwiększające jasność układu). Supernowa jako obiekt badań została wprowadzona do astronomii przez Waltera Baade i Fritza Zwicky’ego w 1931 roku.

Supernowe powstają dzięki dwóm podstawowym mechanizmom. Pierwszym z nich jest wywołanie fuzji jądrowej w zdegenerowanej gwiazdzie (białym karle, który przekracza masę Chandrasekhara i eksploduje). W drugim przypadku jądro masywnej gwiazdy przestaje produkować wystarczająco wiele promieniowania, i ulega kolapsowi grawitacyjnemu, uwalniając grawitacyjną energię potencjalną. Eksplodujące białe karły należą do typu I (gdyż składają się z helu, tlenu, węgla i cięższych pierwiastków), natomiast kolapsy masywnych gwiazd mogą wywoływać – w zależności od składu gwiazdy – supernowe typu I i II.

W szczególności, ciekawym typem kolapsującej masywnej gwiazdy jest supernowa typu Ic, w świetle której nie obserwuje się ani wodoru, ani helu. Zarówno teoretyków, jak i obserwatorów od lat gnębiło pytanie, które gwiazdy są – w żargonie astronomicznym – progenitorami (protoplastami) supernowymi typu Ic. Według teoretyków, gwiazdy te należą do bardzo masywnych – co najmniej 30 razy masywniejszych niż Słońce, i nawet po stracie części ich materiału pod koniec życia pozostają bardzo duże i jasne.

Głównym problemem jest oczywiście to, że trzeba mieć obserwacje danej gwiazdy przed jej wybuchem. Postęp w tej dziedzinie staje się możliwy dopiero teraz, gdy dysponujemy dostatecznie głębokimi i obszernymi katalogami. Przesiewając dane archiwalne teleskopu satelitarnego Hubble’a i analizując dane z obserwacji przy użyciu teleskopu Kecka (Hawaje, USA), zespołom astronomów z Caltech i Uniwersytetu Kalifornijskiego udało się „namierzyć” przyszłą supernową Ic. Astronomowie obserwowali do tej pory wiele supernowych typu Ic, ale były one zbyt daleko, aby teleskop Hubble’ego mógł je dokładnie zbadać. Do czasu: supernowa skatalogowana jako SN 2017ein pojawiła się w okolicy centrum pobliskiej galaktyki spiralnej NGC 3938, odległej od nas w przybliżeniu 65 milionów lat świetlnych. Wybuch zdarzył się względnie blisko i był bardzo jasny (około 5–10 razy jaśniejszy od innych supernowych typu Ic), co znacznie ułatwiło odnalezienie progenitora. Okazuje się, że obiekt potencjalnie odpowiedzialny za wybuch jest niebieską i wyjątkowo gorącą gwiazdą.

Progenitor jest najprawdopodobniej pojedynczą jasną gwiazdą o masie między 45 a 55 M_{\odot} . Drugą hipotezą jest masywny układ podwójny, w którym jedna z gwiazd waży od 60 do 80 M_{\odot} , a druga około 48 M_{\odot} . W tym scenariuszu gwiazdy krążą blisko siebie, wchodząc w interakcje. Bardziej masywna gwiazda zostaje pozbawiona warstw wodoru i helu przez pobliskiego towarzysza, i ostatecznie eksploduje jako supernowa. Możliwość istnienia masywnego systemu podwójnego gwiazd jest traktowana jako bardziej egzotyczna.

Astronomowie zastrzegają, że nie będą w stanie potwierdzić w 100% tożsamości źródła, dopóki supernowa nie zgaśnie, za około dwa lata. Dzięki obserwacjom teleskopu Hubble’a lub prawie już gotowego do wystrzelenia teleskopu Jamesa Webba będzie można wtedy stwierdzić, czy kandydat na progenitora zniknął, czy też znacznie przygasł. Badacze będą także w stanie oddzielić światło supernowej od światła gwiazd w jej otoczeniu, aby lepiej oszacować jasność i masę obiektu.

Michał BEJGER

Dla uproszczenia obserwatorzy sklasyfikowali typy supernowych według cech ich krzywych blasku i linii absorpcyjnych różnych pierwiastków chemicznych, które pojawiają się w ich widmach. Główną cechą jest obecność lub brak linii wodoru. Jeżeli widmo supernowej zawiera linie wodoru (np. serię Balmera w widzialnej części widma), to taka supernowa jest klasyfikowana jako typ II, w przeciwnym razie jako typ I. W każdym z tych dwóch typów znajdują się dodatkowe podklasy, w zależności od widoczności innych pierwiastków lub od kształtu krzywej blasku.



Rozwiązanie zadania M 1598.
Przyjmijmy oznaczenie

$$d = a^2 + \frac{1}{a} = b^2 + \frac{1}{b} = c^2 + \frac{1}{c}$$

i rozważmy wielomian

$$P(x) = x^3 - dx + 1. \text{ Skoro}$$

$$P(a) = P(b) = P(c) = 0$$

oraz liczby a, b, c są różne, to są one różnymi pierwiastkami wielomianu P . Stąd na mocy wzorów Viéte’a uzyskujemy

$$a + b + c = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że liczby a, b, c spełniające założenia zadania rzeczywiście istnieją, np.

$$a = 2, \quad b = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1, \quad c = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1,$$

więc znaleziona wartość 0 istotnie jest osiągalna.

Niebo w kwietniu

Kwietniowe noce są coraz krótsze, zatem na obserwacje gwiazd i innych niewidocznych w dzień ciał niebieskich zostaje coraz mniej czasu. Na początku kwietnia Słońce w środkowej Polsce pojawia się na nieboskłonie około godziny 6:18 (po zmianie czasu na letni) i schodzi z niego o godzinie 19:15; natomiast ostatniego dnia miesiąca wschód Słońca następuje kwadrans po godzinie 5, a zachód

– po godzinie 20. Jak łatwo policzyć, przez miesiąc dnia przybywa o ponad 2 godziny.

Podobnie jak w marcu, wieczorem nachylenie ekliptyki do widnokregu jest duże, natomiast nad ranem – małe; stąd bardzo dobrze widoczne są znajdujące się blisko niej ciała niebieskie będące na wschód od Słońca. Tymczasem

na niebie porannym jest odwrotnie: planety, nawet jeśli są w swoich maksymalnych elongacjach, wschodzą tuż przed albo zaraz po wschodzie Słońca, tak samo jak Księżyc przed nowiem.

I tak też zdarzy się tym razem: nów Księżyca przypada 5 kwietnia i 5 maja, I kwadra – 12 kwietnia, pełnia – 19 kwietnia, ostatnia kwadra zaś – 26 kwietnia. Stąd na początku i na końcu miesiąca noce są bezksiężycowe, natomiast po nowiu, już na następny dzień, 45 minut po zmierzchu Księżyc w fazie 2%, 36 godzin po spotkaniu ze Słońcem, pokaże się na wysokości 2°. Byłoby jeszcze lepiej, gdyby w tym momencie Księżyc znajdował się z naszej perspektywy nad ekliptyką, a nie pod. Tego wieczora Księżyc przejdzie 5° na południe od Urana, jednak siódma planeta Układu Słonecznego nie przebieje się przez zorzę wieczorną. Niewidoczny jest także Neptun, który miał spotkanie ze Słońcem w zeszłym miesiącu.

W następnych dniach naturalny satelita Ziemi szybko zwiększy początkową wysokość i długość przebywania na nocnym nieboskłonie. Zwłaszcza przed I kwadrą bez kłopotów da się dostrzec ciemną, nocną stronę Księżyca, czyli tzw. światło popielate. Srebrny Glob spotka się z planetą Mars 8 i 9 kwietnia. Pierwszego z wymienionych dni jego faza urośnie do 14%, a Mars znajdzie się 5° od Księżyca, na godzinie 1 względem niego. Dobę później Księżyc wyprzedzi już Czerwoną Planetę, zwiększając fazę do 22%. Wieczorem oba ciała Układu Słonecznego przedzieli dystans 10°. Po drodze Księżyc przejdzie przez znaną gromadę otwartą gwiazd Hiady. Wieczorem 9 kwietnia Księżyc pokaże się 2° na północny wschód od Aldebarana, zaś jeszcze przed swoim zachodem zbliży się mocno do widocznej przez lornetkę gromady otwartej gwiazd NGC 1647, przechodząc 40' od jej środka. Dobę później Księżyc w fazie 28% przejdzie 40' na południe od gwiazdy 3. wielkości ζ Tauri, stanowiącej południowy róg Byka.

Sam Mars w kwietniu wędruje przez gwiazdozbiór Byka, cały czas dążąc do wrzeźniowej koniunktacji ze Słońcem. Od zeszłorocznej opozycji minęło już ponad 8 miesięcy, i Czerwona Planeta już nie jest najjaśniejszym obiektem w swojej okolicy. Zwłaszcza na tle gwiazdozbioru obfitującego w jasne gwiazdy, jakim jest Byk. W trakcie miesiąca blask Marsa zmniejszy się z +1,4 do +1,6^m, przy tarczy wielkości zaledwie 4'', a więc ponad 6-krotnie mniejszej niż w lipcu i sierpniu ubiegłego roku. W tym czasie jego elongacja, czyli odległość kątowna od Słońca, zmniejszy się z 50 do 40°, zaś wysokość nad widnokregiem na początku nocy astronomicznej (21:15 na początku kwietnia i 22:30 pod jego koniec) – z 30 do 15°.

Początek miesiąca zastanie Marsa 3,5 stopnia od drugiej bliskiej gromady otwartej gwiazd w Byku, Plejady. 5 kwietnia planeta minie gwiazdę 4. wielkości 37 Tauri w odległości około 20'. Tydzień później przejdzie między parą nieco jaśniejszych gwiazd κ i ν Tauri, zbliżając się do drugiej z nich na 15'. Następnie Mars minie Hiady (w charakterystycznym kształcie litery V), zbliżając się na 3,5 stopnia do najbardziej na północ wysuniętej jasnej gwiazdy ε Tau. Aldebaran, najjaśniejsza gwiazda Byka, znajdzie się 3° dalej w tym samym kierunku. Planeta minie kolejną gwiazdę 4. wielkości τ Tauri 18 kwietnia, po czym w dniach 25 i 26 kwietnia przetnie gromadę otwartą gwiazd, o oznaczeniu katalogowym NGC 1746 i jasności

łącznej 6^m. Na przelomie kwietnia i maja Mars utworzy trójkąt równoramienny z rogami Byka, czyli gwiazdami El Nath (róg północny, jasność +1,6^m, czyli porównywalnie z Marssem) i wspomianej już ζ Tauri, zbliżając się do obu gwiazd na około 5°, a na początku maja przetnie łączącą je linię.

I kwadra zastanie Księżyc na tle gwiazdozbioru Bliźniąt, około 7° pod Polluksem, najjaśniejszą, choć oznaczaną grecką literą β , gwiazdą tej konstelacji. Kolejnej nocy faza Księżyca urośnie do 62% i dotrze on do środka gwiazdozbioru Raka, zahaczając o znaną, widoczną gołym okiem jako mgielka, gromadę otwartą gwiazd M44. Niestety w Polsce Srebrny Glob przejdzie około 10' na południe od najjaśniejszych gwiazd gromady. Jej zakrycie będą mogli obserwować mieszkańcy południowej części Afryki.

W dniach 14–15 kwietnia Księżyc w fazie, odpowiednio, 73 i 83% spotka się z Regulusem, najjaśniejszą gwiazdą Lwa. W Polsce Księżycowi zabraknie do Regulusa za każdym razem po około 8°. Całkowicie oświetlona tarcza Srebrnego Globu 19 kwietnia przejdzie 7° na północ od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny.

Naturalny satelita Ziemi powędruje dalej i w nocy z 21 na 22 kwietnia zawita na chwilę do gwiazdozbioru Skorpiona. Do tego czasu oświetlenie jego tarczy zmniejszy się do 92%, a tuż pod nim znajdzie się charakterystyczny łuk gwiazd z północno-zachodniej części konstelacji, z gwiazdami Graffias (β Sco, +2,5^m) i Dschubba (δ Sco, +2,3^m). Zwłaszcza pierwsza z gwiazd jest atrakcyjnym celem dla posiadaczy niedużych teleskopów, czy nawet większych lornetek, gdyż jest to układ podwójny, w którym drugi składnik, o jasności +4,9^m, znajduje się 13'' od jaśniejszej gwiazdy.

23 i 24 kwietnia Księżyc ma zaplanowane spotkanie z Jowiszem. Pierwszej z wymienionych nocy tarcza Księżyca w fazie 85% dotrze na 6° do największej planety Układu Słonecznego, zaś kolejnej nocy, w fazie zmniejszonej do 77%, znajdzie się już 7° na wschód od niej. Jednocześnie Księżyc około drugiej w nocy zakryje jasną gromadę otwartą gwiazd M21 i przejdzie tuż na północ od mgławicy M20. Jowisz na początku czerwca przejdzie przez opozycję względem Słońca, by 10 kwietnia zmienić kierunek swojego ruchu względem gwiazd na wsteczny. W kwietniu jasność Jowisza urośnie do –2,4^m, a jego tarcza do 43''.

Kolejne dwa dni Srebrny Glob spędzi w pobliżu planety Saturn. Księżycowa tarcza pokaże wtedy fazę 68 i 58% (ostatnia kwadra o północy naszego czasu z 26 na 27 kwietnia), świecąc około 6° od Saturna. Planeta z najokazalszymi pierścieniami również zbliży się do opozycji, przez którą przejdzie w lipcu. W kwietniu jej blask przekroczy 0,5^m, a tarcza średnicę 17''.

Na koniec miesiąca, 28 kwietnia Księżyc w fazie 40% spotka się z gwiazdami Nashira i Deneb Algiedi, czyli dwiema dość jasnymi gwiazdami z północno-wschodniej części Koziorożca, ale aż do majowego nowiu jego warunki obserwacyjne pozostaną bardzo słabe, zwłaszcza że przebywa wtedy pod słabo nachyloną ekliptyką, co dodatkowo pogarsza jego widoczność.

Promieniujące co roku w kwietniu Lirydy wypadają kilka dni po pełni Księżyca i są niewidoczne, ginąc w jego łunie.

Ariel MAJCHER

Przedstawione w ramach kody tworzą macierz Hilberta: kwadratową tablicę liczb $H_{ij} = 1/(i + j - 1)$ (red.).

Wbudowana funkcja Octave hilb ma niemal identyczną implementację jak mhillb (red.).

Najdroższa!

Romeo MONTECCHI*

Julio, od kiedy się poznaliśmy, nie potrafię przestać myśleć o Tobie. . .

Ty wiesz, że przed Tobą były inne, że spędziłem długie lata w związku z Octawą, nie zważając na to, że ona wciąż była zapatrzona w muskularnego MATLAB-a. Nie, nie żałuję tych lat, kiedy ona powoli uczyła mnie wektoryzacji kodu i sprawiła, że w końcu zerwałem z nałogiem nadużywania pętli w programach:

```
1 function H = mhillb(n)
2   H = zeros(n);
3   for i = 1:n
4     for j = 1:n
5       H(i,j) = 1/(i+j-1);
6     end
7   end
8 end
```

Kod w Octave bez wektoryzacji: dwie pętle.
Czas wykonania (dla $n = 2048$): 16,1 s.

```
1 function H = mhillbv(n)
2   H = zeros(n);
3   row = 1:n;
4   for i = 1:n
5     H(i, :) = 1.0 ./ row;
6     row = row+1;
7   end
8 end
```

Kod w Octave zwektoryzowany: jedna pętla.
Czas wykonania (dla $n = 2048$): 0,06 s, to jest 270 razy szybciej.

Przeżywałem piekielne katusze, widząc, jak MATLAB imponował jej (i nie będę Cię oszukiwał, Ukochana – mnie też) tym, że potrafił sam skompilować nasze wielokrotnie zagnieżdżone pętle, wykorzystując kompilator JIT (*just in time*). I był przy tym taki niedostępny, co – o, serce nierozsądne! – tym bardziej przyciągało ich oboje. . .

```
1 function H = mhillb(n)
2   H = zeros(n);
3   for i = 1:n
4     for j = 1:n
5       H(i,j) = 1/(i+j-1);
6     end
7   end
8 end
```

Kod w MATLAB-ie bez wektoryzacji, identyczny z pierwszym.
Czas wykonania (dla $n = 2048$): 0,08 s, to jest 200 razy szybciej.

```
1 function mhillb(n)
2   H = zeros(n,n);
3   for i = 1:n
4     for j = 1:n
5       H[i,j] = 1/(i+j-1)
6     end
7   end
8 end
```

Kod w Julii bez wektoryzacji.
Czas wykonania (od drugiego wywołania, dla $n = 2048$): 0,04 s, to jest 400 razy szybciej.

I to właśnie wtedy nagle Ty pojawiłaś się w moim życiu; i od pierwszej chwili wiedziałem, że nic już nigdy nie będzie takie, jak dawniej. Nasze dusze są niczym dwie połówki jednego owocu. Zawsze mogę napisać Ci to, co mam w głowie, a Ty natychmiast zrealizujesz nasze nawet najbardziej zapętlone pomysły. Wszystkie obliczenia wydają się proste w te dni, gdy jesteśmy razem, a do osiągnięcia szczytu wydajności wystarcza nam zwykle kilka magicznych słów. Choć wiem, że skrywasz w sobie tajemne kompilacje,

o których wolałabyś nie mówić, codziennie cieszy mnie Twoja prostota i radość z prowadzenia błyskawicznych rachunków. Uwielbiam Twoje subtelne, niewymuszone deklaracje typów! Ascetyczną elegancję! I to, że – jak ja, jak Octava, jak wielu innych z nas – wybrałaś życie w wolnym świecie wolnego oprogramowania.

Tęsknię i niecierpliwie czekam na kolejne spotkanie. Tam gdzie zawsze, przy klawiaturze – OK?

Twój R.

Ale za to wiemy, że w każdym z systemów (Octave, MATLAB-ie, Julii) można napisać *jeszcze szybszy* kod generujący macierz Hilberta.

Od redakcji: Powyższy manuskrypt, nadesłany w dwunastym dniu wiosny – zapewne omyłkowo na adres *Delty* – publikujemy bez skrótów, choć przyznajemy, że czasem używane przez zakochanych frazy są dla nas niezbyt zrozumiałe, zapewne wskutek nadmiernej afekcji autora. Niestety, do tej pory nie udało się zweryfikować ze stuprocentową pewnością, kim jest autor powyższego listu, gdyż – wedle posiadanych przez nas danych – z Akademią w Weronie nie jest związana żadna osoba o nazwisku Montecchi (choćaj wynajęci przez nas eksperci potwierdzają, że sam list jest autentyczny). Natomiast, z pomocą dobrze poinformowanych źródeł, udało się nam potwierdzić nie tylko tożsamość Julii, w wersji 1.0, ale nawet ustalić jej adres: www.julialang.org. Jednak aby zaoszczędzić na kosztach przesyłki (wszak honoraria ekspertów mocno nadwątliły nasz budżet), zdecydowaliśmy się opublikować list na łamach niniejszego popularnego periodyku, wierząc, że w ten sposób też dotrze do adresatki.



Zbiory i odwzorowania

Bartłomiej BZDEGA

Aby wykazać, że zbiory A i B mają tyle samo elementów, wystarczy połączyć te elementy w pary (a, b) , gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Jeżeli każdy element zbioru A i każdy element zbioru B występuje w nich dokładnie raz, to $|A| = |B|$. Fakt ten nazywamy *zasadą bijekcji*.

Bywa, że każdy element zbioru A sparujemy z innym elementem zbioru B , ale być może w zbiorze B znajdują się dodatkowo elementy, które nie zostały dobrane w pary. W tej sytuacji $|A| \leq |B|$. Jest to dobra metoda szacowania liczby elementów zbioru A , o ile znamy $|B|$. Stosujemy ją w zadaniach 5, 8 i 11.

Ciąg binarny to taki, w którym mogą występować tylko zera i jedynki. Na użytek niniejszego artykułu będziemy – ogólniej – nazywać tak każdy ciąg, którego wyrazy mogą przyjmować tylko dwie z góry określone wartości.

Każdy podzbiór $P \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ możemy utożsamić z n -elementowym ciągiem binarnym, w którym na i -tym miejscu stoi 1, gdy $x_i \in P$; w przeciwnym razie na i -tym miejscu stoi 0. Z tego wynika, że podzbiorów zbioru n -elementowego jest tyle, co ciągów binarnych długości n , czyli 2^n . Ponadto ciągów binarnych długości n , zawierających dokładnie k jedynek jest tyle, co k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego, czyli $\binom{n}{k}$. Ciągi binarne pomagają rozwiązać zadania 6, 7 i 8.

Zadania

- Liczba n jest nieparzysta. Dowieść, że zbiór $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ ma tyle samo n -elementowych podzbiorów o parzystej sumie elementów, co n -elementowych podzbiorów o nieparzystej sumie elementów.
- Żadne trzy przekątne n -kąta wypukłego nie przecinają się w jednym punkcie. Ile jest punktów przecięcia się przekątnych wewnątrz tego wielokąta?
- Jeden punkt czerwony oraz $n \geq 3$ punktów niebieskich leży na wspólnym okręgu. Których wielokątów jest więcej: posiadających wyłącznie niebieskie wierzchołki, czy tych, które posiadają jeden czerwony wierzchołek, a pozostałe niebieskie?
- Tramwaj 80-osobowy zatrzymywał się na 18 kolejnych przystankach: P_1, P_2, \dots, P_{18} . Udowodnić, że można wskazać takie $i, j \in \{1, 2, \dots, 18\}$, że $i < j$ oraz żaden z pasażerów nie jechał z przystanku P_i do P_j .
Uwaga. Zakładamy, że do tramwaju 80-osobowego zmieści się co najwyżej 80 osób, choć praktyka być może pokazuje coś innego.
- Zbiory A_1, A_2, \dots, A_k są podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Każdy z nich zawiera co najmniej dwa elementy, a każde dwa mają co najwyżej jeden element wspólny. Wykazać, że $k \leq \binom{n}{2}$.
- W wierzchołku prostokąta, którego boki mają długości wyrażające się liczbami naturalnymi m i n , znajduje się pchła. Każdy skok pchły ma długość 1 i jest równoległy do jednego z boków. Na ile sposobów pchła może się dostać do przeciwległego wierzchołka najkrótszą drogą?
- Ustalmy całkowite $n > 0$ i $m \geq 0$. Ile rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych ma równanie $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$?
- Nazwijmy n -kąta *miodowymi*, jeśli można go rozciąć na sześciokąty foremne o boku 1. Dowieść, że liczba różnych (nieprzystających) n -kątników miodowych nie przekracza 2^n .
- Dowieść, że dla ustalonego naturalnego n równania $x^2 + y^2 = n$ i $x^2 + y^2 = 2n$ spełnia tyle samo par liczb całkowitych (x, y) .
- Ustalmy liczbę naturalną n . Ile ciągów (a_0, a_1, a_2, \dots) o wyrazach w zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$ spełnia równość $n = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + \dots$?
- Przypuśćmy, że pchła z szóstego zadania podróżuje niekoniecznie najkrótszą drogą, ale w każdym punkcie może się znaleźć najwyżej raz. Dowieść, że liczba różnych możliwych dróg pchły nie przekracza 2^{mn} .
- Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Spośród wierzchołków $(2n + 1)$ -kąta foremnego wybieramy trzy, które wyznaczają trójkąt rozwartokątny. Na ile sposobów można to zrobić?

1. Każdy podzbiór n -elementowy A parzystej sumy elementów można sparować z jego dopełnieniem w zbiorze $\{1, 2, \dots, 2n\}$, które również ma n elementów. Każdy z tych parzystych n -kątników n -kąta należy dobrać w parę z czwórka $(nieuporzadkowaną)$ wierzchołków n -kąta, które są końcami tych przekątnych. Dla $k \geq 3$ każdy k -kątnik $(k + 1)$ -kątnym wierzchołkiem parzysty z $(k + 1)$ -kątem n -kątnym wierzchołkiem czerwonym, powstającymi przez dołączenie tego wierzchołka. Bez pary pozostałych jedynych wierzchołków. Bez pary pozostałych jedynych wierzchołków z czerwonym wierzchołkiem, zatem wielokątów z czerwonym wierzchołkiem jest więcej.

4. Weźmy pod uwagę tylko tych pasażerów, którzy jechali z P_i do P_j dla $i \leq j < 9$. Każdy z nich siedział w tramwaju pomiędzy przystankiem P_9 a P_{10} .

5. Przypiszmy każdemu ze zbiorów A_1, A_2, \dots, A_k dowolny jego dwuelementowy podzbiór. Przypisane podzbiory muszą być różne i są podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

6. Najkrótsza droga to taka, w której pchła skacze tylko w dwóch kierunkach, prawo (w prawo) i w górę (w prawo) i w pewnej kolejności. Ciąg skoków pchły jest zatem ciągiem binarnym, w którym n razy występuje „prawo” i m razy „góra”. Każde rozwiązanie równania $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ należy sparować z ciągiem binarnym $x_1 x_2 \dots x_n$ z wielokąta ma miarę 120° albo 240° , więc ciąg jego kątów jest ciągiem binarnym.

9. Sposób parowania otrzymamy dzięki tożsamości $(x - y)^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + y^2)$.

10. Zapiszmy jednoznacznie $a_i = 2b_i + c_i$, gdzie $b_i, c_i \in \{0, 1\}$. Ciągi (b_i) i (c_i) odpowiadają rozwiązaniem dwójkowym liczb B i C , które spełniają równość $2B + C = n$.

11. Droga przebyta przez pchłę dzieli prostokąt na dwie części – nazwijmy je A i B . Każda z nich jest z pewnej części kątów kwadratowych o wymiarach 1×1 . Zbiór czarnych kwadratów 1×1 jest podzbiorem zbioru wszystkich $m \times m$ kwadratów 1×1 .

12. Dla różnych wierzchołków A i B danego $(2n + 1)$ -kąta rysujemy strzałkę z A do B , jeśli wędrując po jego obwodzie zegarem, przejdziemy tym samym odcinkiem n bokach. Z każdego wierzchołka wychodzi n strzałek i tyle samo do każdego wchodzi. Każdy trójkąt wyznaczony przez wierzchołki A, B, C jest rozwartokątny, o ile wierzchołek C jest wzdłuż jednej z strzałek i odwrócić – każde dwie strzałki wychodzące z wspólnego wierzchołka oznaczają trójkąt rozwartokątny.

Wskazówki do zadań

Matematykę tworzą ludzie

Marian Rejewski Bolzano Bernard
Maryam Mirzakhani Jerzy Różycki
Stefan Mazurkiewicz Emmy Noether
Zofia Kowalewska
Henryk Zygałski Alessio Figalli
Stephen Kleene Wacław Sierpiński
Claude Shannon Alfred Tarski Jan Śniadecki
John von Neumann Immanuel Kant Sophie Germain
Roman Sikorski Helena Rasiowa Ronald Rivest
Adi Shamir David Hilbert David Chaum
Donald Knuth Andrew Wiles Blaise Pascal
Eratostenes
Karl Weierstrass Kurt Gödel Stephen Cook
Alan Turing Archimedes Pitagoras Stefan Banach
Samuel Eilenberg Charles Hoare Terence Tao Cédric Villani
Carl Friedrich Gauss Tales z Miletu
Isaak Newton Zygmunt Janiszewski
John Forbes Nash Karol Borsuk
Hugo Steinhaus Pierre Simon de Laplace Dan Boneh
Pierre de Fermat
Leonhard Euler Stanisław Leśniewski
Andrzej Mostowski Grigorij Perelman
[Miejsce dla Ciebie]