



MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$n = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot f \cdot s$
 $f = 3,141592 \dots$

NR 3 (538) 2019

CENA 4 ZŁ - VAT 5%

PL ISSN 0137-3005 / NRI/ND 05-550-X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

NIESKOŃCZONOŚĆ:
PROBLEMY
STAROŻYTNYCH
str. 11

000 000 000 = 1 googol



SPIS TREŚCI NUMERU 3 (538)

Sumy kwadratów wielomianów <i>Maria Gałuszka</i>	str. 1
Lodowa maszyna ciepła <i>Krzysztof Rejmer</i>	str. 3
Bestiariusz informatyczny (7)	str. 5
A jednak się da (V): protokół Yao <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 6
Witkacy i Fizyka <i>Rafał Demkowicz-Dobrzański</i>	str. 8
∞ Nieskończoność: 2. Problemy starożytnych <i>Michał Korch</i>	str.11
Pół szklanki mocnego kodu. Co ja tu widzę. . . <i>Piotr Krzyżanowski</i>	str.13
🐱 Zadania	str.14
Trzy spojrzenia na teorię gier <i>Aleksandra Kowalska, Paulina Skalik, Kacper Walentynowicz</i>	str.15
Informatyczny kącik olimpijski (125): <i>Liczby prawie pół-pierwsze</i>	str.18
🌀 Kto z kim i kiedy? <i>Magdalena Fikus</i>	str.19
Klub 44	str.20
Prosto z nieba: Pomiary ekspansji Wszechświata	str.22
Niebo w marcu	str.22
Aktualności Błędne koło	str.24
🐻 Twierdzenie o trójzębie <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str.25

W następnym numerze:

Widma spektroskopowe Zbiór domknięty
Klasy abstrakcji Własność Darboux
Linie emisyjne
Ciągłość Oddziaływania fundamentalne
Krzywizna Gaussa Linie absorpcyjne Działanie grupy Podgrupa normalna
Relacja zwrotna Łukowa spójność Redshift Geometria rzutowa
Zbiór otwarty Krzywizna Szereg Rozmaitość różniczkowa
Zbieżność Podgrupa Zbiór Grupa Oddziaływania silne
Relacja symetryczna
Homeomorfizm Orbita Przestrzeń spójna Metryka
Równoliczność Ideal Ciało Relacje Pierścienie
Relacja przechodnia Aksjomat Przestrzeń metryczna Stabilizator
Funkcja nieobliczalna Relacja równoważności
Entropia Oddziaływania elektromagnetyczne
Oddziaływania słabe Oddziaływania grawitacyjne Geometria różniczkowa
Złożoność obliczeniowa

Miesięcznik *Delta – matematika, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 1 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Sumy kwadratów wielomianów

Maria GAŁUSZKA*

* studentka, Wydział Matematyki
i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Suma kwadratów najczęściej kojarzy się nam z twierdzeniem Pitagorasa – słusznie, ale warto wiedzieć, że temat ten ma swoje miejsce również w teorii liczb, gdzie interesuje nas, czy daną liczbę całkowitą można przedstawić w postaci sumy kwadratów innych liczb całkowitych. Intrygujące jest również pytanie, ile składników znajduje się w tej sumie. Osiągnięcia w tym zakresie mieli między innymi Fermat, Euler i Lagrange. Fermat wysnuł hipotezę, że każda liczba pierwsza postaci $4k + 1$ jest sumą dwóch kwadratów, co udowodnił Euler. Istnieje twierdzenie, które podaje, jakie warunki musi spełniać liczba naturalna, aby była sumą dwóch kwadratów.

Twierdzenie 1. *Liczbę naturalną można przedstawić w postaci sumy dwóch kwadratów wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej czynnik pierwszy postaci $4k + 3$ występuje w parzystej potęgce.*

Przykłady:

$$3 \cdot 3 \cdot 5 = 45 = 3^2 + 6^2, \quad 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 392 = 14^2 + 14^2.$$

Niektóre liczby wymagają trzech kwadratów:

$$7 \cdot 3 \cdot 4 = 84 = 2^2 + 4^2 + 8^2, \quad 2 \cdot 5 \cdot 31 = 310 = 15^2 + 9^2 + 2^2.$$

Czytelniku, dlaczego liczby obok nie są sumami dwóch kwadratów liczb całkowitych?

A gdybyśmy chcieli przedstawić dowolną liczbę naturalną jako sumę kwadratów? Czy da się to zrobić dla każdej liczby naturalnej? I czy możemy oszacować liczbę składników w takiej sumie? Okazuje się, że bez zakładania dodatkowych warunków trzy kwadraty to również za mało. W 1770 roku Lagrange udowodnił następujące

Twierdzenie 2 (Lagrange, 1770). *Każda liczba naturalna da się przedstawić w postaci sumy czterech kwadratów liczb naturalnych.*

Oczywiście, twierdzenie Lagrange’a można zmodyfikować na różne sposoby, na przykład zmieniając postać składników. Istnieją odpowiednie twierdzenia związane z przedstawieniem liczby naturalnej jako sumy sześciaków. Jest również teoria związana z twierdzeniem Waringa, w którym pytamy o najmniejszą potrzebną liczbę składników w sumie k -tych potęg, aby móc otrzymać w wyniku dowolną liczbę naturalną. Jednak w naszych dociekaniach zostaniemy przy kwadratach. Jeżeli chodzi o przedstawienie liczby naturalnej jako sumy kwadratów, to właściwie twierdzenie Lagrange’a wyczerpuje temat.

Wątek teorii liczb jest tylko wstępem do rozważań nieco innych. Kto powiedział, że sumy kwadratów możemy rozpatrywać tylko w kontekście liczb? Dlaczego zamiast nich nie możemy wziąć pod uwagę innych obiektów matematycznych – na przykład wielomianów? Problemem przedstawienia wielomianu jako sumy kwadratów innych wielomianów jako pierwszy zajął się David Hilbert. Sformułował on następujące

Nieujemna określoność oznacza, że wielomian przyjmuje tylko wartości nieujemne. Oczywiście, każdy wielomian będący sumą kwadratów wielomianów jest nieujemnie określony.

Pytanie: Czy z nieujemnej określoności wielomianu wynika to, że możemy przedstawić go jako sumę kwadratów wielomianów?

Rozważmy proste wersje tego problemu. Weźmy pod lupę najpierw wielomiany jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych, których zbiór oznaczymy przez $\mathbb{R}[X]$.

Twierdzenie 3. *Niech $W \in \mathbb{R}[X]$ będzie nieujemnie określony. Wówczas $W = W_1^2 + W_2^2$ dla pewnych $W_1, W_2 \in \mathbb{R}[X]$.*

Dowód: Załóżmy, że $W \in \mathbb{R}[X]$ jest nieujemnie określony. Z Zasadniczego Twierdzenia Algebry wynika, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynem wielomianów rzeczywistych pierwszego i drugiego stopnia. Ponieważ W jest nieujemnie określony, więc można go przedstawić jako iloczyn nieujemnie określonych wielomianów drugiego stopnia (Czytelniku, dlaczego?). Można go zatem zapisać w postaci

$$W(X) = c \cdot (X^2 + a_1X + b_1)^2 \cdot \dots \cdot (X^2 + a_nX + b_n),$$

gdzie $c > 0$ oraz wyróżnik każdego kwadratowego czynnika jest niedodatni.



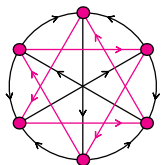
Rozwiązanie zadania M 1596.

Odpowiedź. $n \neq 4$.

Nazwijmy *mistrzowskim* taki n -turniej, w którym każdy jest mistrzem. Udowodnimy, że jeśli istnieje mistrzowski n -turniej, to istnieje mistrzowski $(n+2)$ -turniej.

Niech A_1, A_2, \dots, A_n będą zawodnikami pewnego mistrzowskiego n -turnieju, a B i C takimi dwoma dodatkowymi zawodnikami, że B wygrał z C , a ponadto A_i wygrał z B i przegrał z C dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas $(n+2)$ -turniej powstały przez dołączenie zawodników B i C jest mistrzowski.

Nietrudno sprawdzić, że 3-turniej złożony z zawodników A, B, C takich, że A wygrał z B , B wygrał z C , C wygrał z A , oraz 6-turniej pokazany na poniższym rysunku (punkty oznaczają zawodników, a strzałka z A do B , że A wygrał z B) są mistrzowskie. W połączeniu z konkluzją poprzednich dwóch akapitów prowadzi to do wniosku, że n -turniej mistrzowski istnieje dla każdej liczby nieparzystej $n \geq 3$ oraz dla każdej liczby parzystej $n \geq 6$.



Pozostaje udowodnić, że nie istnieje mistrzowski 4-turniej. Przypuśćmy, że jednak istnieje, i oznaczmy zawodników przez A, B, C, D w taki sposób, że A wygrał z B , C wygrał z D oraz (bez straty ogólności) B wygrał z D . Wówczas, skoro D jest mistrzem, to D musiał pośrednio wygrać z C – jedyna możliwość jest taka, że D wygrał z A , a A wygrał z C . Jednak wówczas ten z zawodników B, C , który przegrał mecz między nimi, nie miał jak wygrać pośrednio z tym drugim – sprzeczność.

Sława przedstawionego wyniku Artina wiąże się z faktem, że odpowiada on na 17. ze słynnej listy 23 problemów Hilberta zaprezentowanej w 1900 roku na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu. Pytanie brzmiało: *Czy każdy wielomian nieujemnie określony może być przedstawiony jako iloraz sum kwadratów wielomianów?* Odpowiedź jest twierdząca, gdyż suma kwadratów funkcji wymiernych jest ilorazem sum kwadratów wielomianów.

Wykorzystując przedstawienie trójmianu kwadratowego w postaci kanonicznej, dostajemy

$$X^2 + a_k X + b_k = \left(X + \frac{a_k}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta^2}, \quad \text{gdzie } \Delta = a_k^2 - 4b_k \leq 0.$$

Stąd

$$W = (p_1^2 + q_1^2) \cdot \dots \cdot (p_n^2 + q_n^2),$$

gdzie $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}[X]$. Dalej korzystamy z tożsamości

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2.$$

Następnie przekształcamy nasz iloczyn zgodnie z powyższą równością, aż będzie on równy sumie kwadratów pewnych wielomianów $W_1, W_2 \in \mathbb{R}[X]$. \square

Naturalnie, pojawia się pytanie, czy analogiczne twierdzenie zachodzi dla wielomianów dwóch zmiennych o współczynnikach rzeczywistych (których zbiór oznaczamy przez $\mathbb{R}[X_1, X_2]$). Okazuje się, że nie, a chcąc udowodnić ten fakt, można posłużyć się kontrprzykładem. Wielomian

$$W(X_1, X_2) = 1 - 3X_1^2 X_2^2 + X_1^2 X_2^4 + X_1^4 X_2^2 \in \mathbb{R}[X_1, X_2],$$

nazywany **wielomianem Motzkina**, był pierwszym przykładem dodatnio określonego wielomianu, który nie jest sumą kwadratów innych wielomianów.

Pojawił się stosunkowo późno, bo dopiero w 1967 roku. Jego dodatnia określoność jest konsekwencją nierówności pomiędzy średnimi – średnią arytmetyczną i średnią geometryczną. Mamy

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \text{dla dowolnych } a, b, c > 0.$$

Podstawiając $a = X_1^4 X_2^2$, $b = X_1^2 X_2^4$, $c = 1$ otrzymujemy

$$W(X_1, X_2) = 1 - 3X_1^2 X_2^2 + X_1^2 X_2^4 + X_1^4 X_2^2 \geq 0.$$

Wykażemy teraz, że W nie jest sumą kwadratów wielomianów. Dla dowodu nie wprost założymy, że W jest sumą pewnych k kwadratów, czyli

$$W = \sum_{i=1}^k W_i^2, \quad W_i \in \mathbb{R}[X_1, X_2].$$

Z tej racji, że stopień wielomianu W jest równy 6, to stopień każdego z wielomianów W_i jest równy co najwyżej 3. Stąd każdy wielomian W_i składa się z wielomianów

$$1, X_1, X_2, X_1^2, X_2^2, X_1 X_2, X_1^3, X_2^3, X_1^2 X_2, X_1 X_2^2$$

z pewnymi rzeczywistymi współczynnikami. Zauważmy, że $X_1^2, X_2^2, X_1^4, X_2^4, X_1^6, X_2^6$ nie występują w jawnej postaci wielomianu W , więc składniki

$X_1, X_2, X_1^2, X_2^2, X_1^3, X_2^3$ nie mogą występować w żadnym z W_i . Stąd

$$W_i = a_i + b_i X_1 X_2 + c_i X_1^2 X_2 + d_i X_1 X_2^2$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a_i, b_i, c_i, d_i . Wtedy jednak $\sum_{i=1}^k b_i^2 = -3$, co daje sprzeczność; wielomianu Motzkina nie można zatem przedstawić w postaci sumy kwadratów wielomianów dwóch zmiennych.

Widzimy więc, że odpowiedź na pytanie Hilberta jest negatywna, choć są również „częściowo pozytywne” wyniki, jak poniższy:

Twierdzenie 4 (Hilbert, 1888). *Niech $W \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ będzie nieujemnie określonym wielomianem stopnia 4. Wtedy W jest sumą trzech kwadratów z $\mathbb{R}[X_1, X_2]$.*

Skoro nie każdy nieujemnie określony wielomian możemy zapisać jako sumę kwadratów innych wielomianów, spróbujmy poszerzyć zakres naszych poszukiwań – zamiast wielomianów zapytajmy o *ilorazy* wielomianów, czyli tak zwane *funkcje wymierne*. W pewnym sensie są one dla wielomianów tym samym, czym liczby wymierne dla liczb całkowitych. Zbiór funkcji wymiernych n zmiennych oznaczamy przez $\mathbb{R}(X_1, \dots, X_n)$. W tym kontekście odpowiedzi na nasze pytania dostarcza poniższe

Twierdzenie 5 (Artin, 1927). *Niech wielomian W będzie nieujemnie określony. Wtedy W jest sumą kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, \dots, X_n)$.*

Po opublikowaniu wyniku Artina pojawiły się inne pytania. Jak dużo kwadratów jest w rozkładzie na sumę? Jeden z wyników w tym zakresie należy do Hilberta.



Rozwiązanie zadania M 1595.

a) Przypuśćmy, że w pewnym n -turnieju jest dokładnie dwóch mistrzów i oznaczymy ich przez A , B w taki sposób, że A wygrał z B .

Niech C będzie zbiorem zawodników, którzy wygrali z A , a \mathcal{B} – zbiorem zawodników, którzy przegrali z A . Skoro B jest mistrzem oraz $B \in \mathcal{B}$, to istnieje zawodnik pokonany przez B , który wygrał z A – wynika stąd w szczególności, że zbiór C jest niepusty.

Ograniczając turniej do meczów rozegranych między zawodnikami ze zbioru C , możemy na mocy poprzedniego zadania wskazać zawodnika C , który jest mistrzem w zbiorze C . Zawodnik C wygrał pośrednio lub bezpośrednio ze wszystkimi pozostałymi zawodnikami w C oraz wygrał bezpośrednio z A , więc wygrał pośrednio ze wszystkimi zawodnikami w \mathcal{B} . To oznacza, że C jest mistrzem w całym turnieju, co przeczy założeniu, że mistrzów jest dokładnie dwóch.

b) Rozważmy turniej, w którym A , B , C są takimi zawodnikami, że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A , a każdy z pozostałych $n - 3$ zawodników przegrał z każdym spośród A , B , C (wyniki meczów pomiędzy tymi $n - 3$ zawodnikami mogą być dowolne). W tym turnieju A , B , C są jedynymi mistrzami (nikt z pozostałych nie wygrał z żadnym z nich) i jest ich trzech.

Twierdzenie 6 (Hilbert, 1893). *Niech wielomian $W \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ będzie nieujemnie określony. Wtedy W jest sumą czterech kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, X_2)$.*

Naturalne jest pytanie, czy możemy wzmocnić to twierdzenie przez zapisanie dodatnio określonego wielomianu jako sumy trzech kwadratów funkcji wymiernych. Odpowiedź jest negatywna i z pomocą jako kontrprzykład ponownie przychodzi nam wielomian Motzkina – tym razem jednak uzasadnienie nie jest elementarne i korzysta z dziedziny zwanej geometrią algebraiczną.

Twierdzenie 7 (Cassels–Ellison–Pfister, 1977). *Wielomian Motzkina nie jest sumą trzech kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, X_2)$.*

Okazuje się, że wielomian Motzkina nie jest w tym sensie wyjątkowy. Jean-Louis Colliot-Thélène pokazał w 1993 roku, że w zbiorze wielomianów stopnia co najmniej 6 te, które można przedstawić w postaci sumy trzech kwadratów funkcji wymiernych, stanowią pomijalny zbiór zarówno z topologicznego, jak i teoriomiarowego punktu widzenia; szczegóły można znaleźć na przykład w artykule Oliviera Benoista: *Writing Positive Polynomials as Sums of (Few) Squares*.

Teraz wróćmy do liczby składników w przypadku dowolnej liczby zmiennych. O tym, jak można ją oszacować dla funkcji wymiernych n zmiennych, mówi poniższe twierdzenie Pfistera.

Twierdzenie 8 (Pfister, 1967). *Niech wielomian $W \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ będzie nieujemnie określony. Wtedy W jest sumą 2^n kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, \dots, X_n)$.*

Nasuwa się kolejne pytanie: czy ograniczenie 2^n może zostać poprawione? Innymi słowy, czy istnieje nieujemnie określony wielomian z $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, który nie jest sumą $2^n - 1$ kwadratów z $\mathbb{R}(X_1, \dots, X_n)$? Dylemat ten został sformułowany przez Albrechta Pfistera zaraz po opublikowaniu dowodu, że liczba składników 2^n jest wystarczająca. Na chwilę obecną wiadomo jedynie, że $n + 1$ to za mało. Jak widać, choć siedemnasty problem Hilberta został rozwiązany już w 1927 roku, to temat związany z tym zagadnieniem jest pełen kwestii nierozstrzygniętych. Do zrobienia wciąż pozostaje wiele, a zaprezentowane tutaj twierdzenia są tylko częścią większej układanki.

Lodowa maszyna ciepła

Krzysztof REJMER

Znane powiedzenie mówi, że istnieją dwie szkoły: otwocka oraz falenicka. Jedna na pewno jest lepsza, druga oczywiście gorsza; sęk w tym, że nie wiadomo, która jest jaka.

Nie inaczej bywa i w fizyce. Można podać wiele przykładów, choćby termodynamikę. Jedni są zafascynowani jej formalizmem matematycznym (czytaj – formami różniczkowymi), drudzy bardziej zachwycają się fizyczną treścią i pomysłowością dowodów korzystających z własności cykli Carnota. Ten artykuł traktuje o specyficznym cyklu Carnota i jeśli jest deklaracją przynależności autora do jakiejś szkoły, to niechybnie będzie nią szkoła z Glasgow. (Jak zatem będzie brzmiał właściwy przymiotnik?)

Z doświadczenia wiemy, że zamarzająca woda zwiększa swoją objętość. Dlatego czasami pękają źle zabezpieczone rury, a w górach woda zamarzająca w skalnych szczelinach kruszy najmocniejsze nawet skały, przyspieszając procesy erozji. Wykorzystamy fakt zmiany objętości cieczy podczas przemiany fazowej do ataku na drugą zasadę termodynamiki, by potem (niczym strażak, który podpała, żeby gasić) dzielnie ją obronić. Zbudujemy zatem cykl pokazany na rysunku na następnej stronie; nazwiemy ów cykl *lodową maszyną ciepłą*.

Cylinder zamknięty ruchomym tłokiem (jak zwykle w tego rodzaju dyskusjach przyjmujemy, że tłok porusza się bez tarcia) wypełniony jest wodą o temperaturze równej temperaturze krzepnięcia. Na zewnątrz tłoka znajduje się powietrze o normalnym ciśnieniu atmosferycznym. Na tłoku (A) stawiamy ciało o masie m . Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym



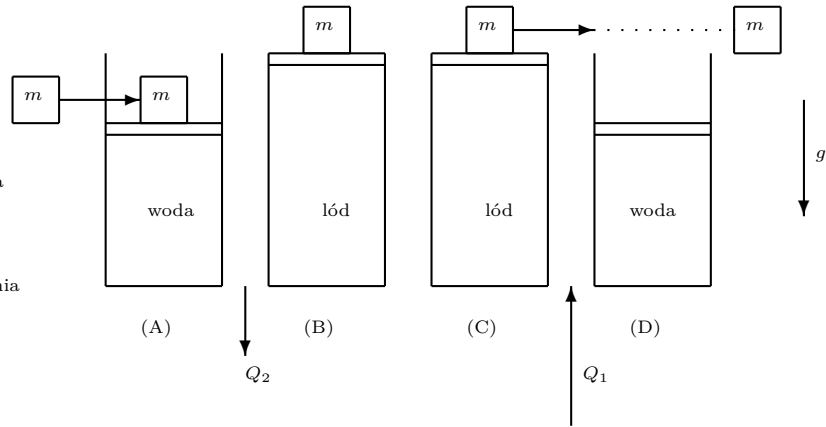
Rozwiązanie zadania M 1594.

Niech A będzie dowolnym zawodnikiem, który wygrał *najwięcej* meczów. Udowodnimy, że A jest mistrzem.

Oznaczmy przez \mathcal{B} zbiór zawodników, którzy przegrali z A , a przez C zbiór zawodników, którzy wygrali z A . Jeżeli zbiór C jest pusty, to A wygrał ze wszystkimi bezpośrednio, więc jest mistrzem.

Przypuśćmy, że istnieje zawodnik $C \in C$, który wygrał z każdym zawodnikiem z \mathcal{B} . Wówczas C wygrał ze wszystkimi zawodnikami pokonanymi przez A oraz z samym A , więc ma na koncie więcej zwycięstw niż A , a to przeczy wyborowi zawodnika A . Wobec tego dla każdego $C \in C$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ o tej własności, że B wygrał z C , a to oznacza, że A jest mistrzem.

o natężeniu g , a więc aby podnieść ciało, należy wykonać pracę. Następnie w temperaturze krzepnięcia odbieramy od wody ciepło. Woda zamarza, zwiększa objętość i podnosi ciało znajdujące się na tłoku (B). Następnie (C) zsuwamy ciało z tłoka (praca związana z poziomym przesuwaniem tego ciała może być dowolnie mała). Na końcu dostarczamy do lodu ciepło, tak by go stopić, temperatura jest w tym procesie stała. Po stopieniu lodu układ znajduje się w stanie początkowym (D), natomiast masa m została podniesiona na wyższy poziom.



Lodowy silnik cieplny. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki praca wykorzystana do podniesienia masy m jest równa różnicy ciepł: $W = Q_1 - Q_2$, gdzie Q_2 jest ciepłem wydzielającym się w trakcie zamarzania wody, a Q_1 jest ciepłem zużytym do stopienia lodu. Przyjmujemy, że układ jest na tyle mały, że możemy zaniedbać niejednorodność ciśnienia w zbiorniku

Druga zasada termodynamiki ma wiele równoważnych sformułowań. W sformułowaniu Kelvina brzmi: *Nie jest możliwy proces, którego jedynym skutkiem byłoby pobranie pewnej ilości ciepła ze zbiornika i zamiana go w równoważną ilość pracy.*

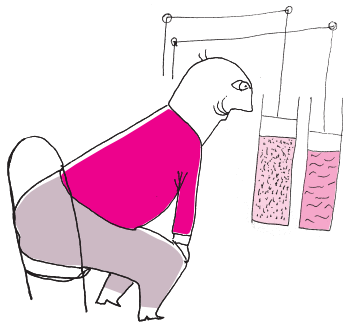
I tak oto natrafiamy na bardzo poważny kłopot. Wymiana ciepła pomiędzy wodą i otoczeniem oraz pomiędzy lodem i otoczeniem zachodzi w temperaturze 0°C , bo taka jest temperatura krzepnięcia wody i topnienia lodu. Efektywnie pobrane ciepło (czyli różnica ciepła pobranego przy topnieniu lodu i oddanego przy zamrażaniu wody) zostaje w całości zamieniona na pracę. Jest to sprzeczne z drugą zasadą termodynamiki w sformułowaniu Kelvina!

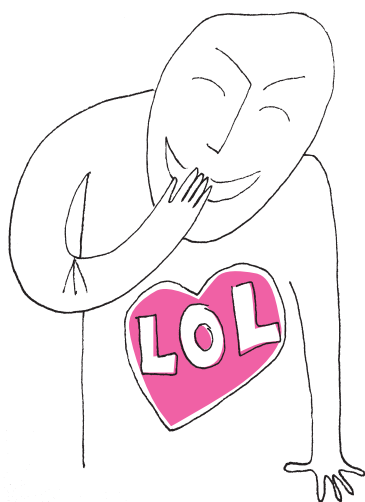
Problem ten rozwiązał brat lorda Kelvina, James Thomson, profesor mechaniki inżynierskiej na Uniwersytecie w Glasgow (lord Kelvin był profesorem fizyki tego Uniwersytetu). Proces zamarzania i proces topnienia przebiegają w innych warunkach. Ze względu na obecność masy m zamarzanie zachodzi przy wyższym ciśnieniu niż topnienie, kiedy na tłoku nie stoi już masa m . Jeśli słuszna jest druga zasada termodynamiki, to oba procesy muszą zachodzić w innej temperaturze. A to oznacza, że temperatura topnienia lodu zależy od jego ciśnienia. Ciało robocze (czyli woda/lód) musi wymieniać ciepło z dwoma termostatami. Pobiera ciepło od termostatu o wyższej temperaturze (topnienie lodu pod niższym ciśnieniem) i oddawać ciepło do termostatu o niższej temperaturze (zamarzanie wody przy podwyższonym ciśnieniu). Tak więc funkcja $p(T)$, czyli ciśnienie w funkcji temperatury dla współistnienia wody i lodu jest funkcją malejącą. Jest to fakt potwierdzony doświadczalnie.

Być może dziś wydaje nam się to trywialne, ale w tamtych czasach choć wiedziano o wpływie ciśnienia na temperaturę wrzenia, jednak nie wiedziano, że wpływa też na temperaturę topnienia. Czyż nie jest zatem piękne, że z faktu zmiany objętości substancji w trakcie przemiany fazowej – na podstawie drugiej zasady termodynamiki w jej historycznym, kelwinowskim sformułowaniu – potrafimy wyprowadzić istnienie związku pomiędzy temperaturą przemiany fazowej a ciśnieniem? Przysłowie mówi, że wszystkie drogi prowadzą do Rzymu. Termodynamicznym Rzymem jest Druga Zasada.

Zauważmy jeszcze jedną rzecz. W sytuacji, w której ciepło jest pobierane przez otoczenie przy innym ciśnieniu i temperaturze niż wtedy, gdy jest od otoczenia odbierane, musimy dwie izotermy połączyć dwiema adiabatami (a zatem otrzymujemy prawdziwy cykl Carnota), które nie były potrzebne w pierwszej, naiwnej (jednoizotermowej) wersji lodowego silnika cieplnego.

W powyższym rozumowaniu pominęliśmy zjawisko ściśliwości i wody, i lodu. Nie jest to jednak bardzo wielki grzech, jeśli tylko masa m nie jest zbyt duża. Zmiana objętości wywołana dodatkowym ciśnieniem pochodzącym od ciężaru ciała mg jest nieznaczna w porównaniu ze zmianą objętości podczas przemiany fazowej.





Bestiariusz informatyczny (7)

W ostatnim już odcinku bestiariusza przedstawimy garść akronimów, poruszając tematy związane ze społecznym odbiorem technologii informacyjnych. Większość z nas nie wyobraża sobie życia bez komputerów i Internetu. W zastosowaniach biznesowych oprogramowanie **CAD** (*Computer-Aided Design*) pomaga w pracy projektantom, systemy zarządzania treścią **CMS** (*Content Management System*) ułatwiają tworzenie serwisów internetowych, a relacyjne bazy danych **RDBMS** (*Relational DataBase Management System*) umożliwiają przechowywanie i wyszukiwanie wszelkiego typu informacji.

W zastosowaniach rozrywkowych potężną gałąź rynku stanowią gry komputerowe. Niektóre ich rodzaje też określamy akronimami, np. strategię czasu rzeczywistego **RTS** (*Real-Time Strategy*), wieloosobowe gry w penetrowanie labiryntów **MUD** (*Multi-User Dungeon*) lub gry sieciowe, w których wcielamy się w bohaterów wirtualnego świata **MMORPG** (*Massively Multiplayer Online Role-Playing Game*).

Rozwój Internetu spowodował, że ludzie zaczęli łączyć się ze sobą na masową skalę: od pierwszych usług udostępniających miejsce na zdalnych komputerach **BBS** (*Bulletin Board System*), przez usługi czatów, jak **IRC** (*Internet Relay Chat*), aż do serwisów społecznościowych **SNS** (*Social Networking Service*), gdzie najważniejsze są treści wytwarzane przez ich użytkowników **UGC** (*User-Generated Content*). W celu przyspieszenia komunikacji tekstowej wytworzył się też internetowy slang zawierający takie wyrażenia, jak **BTW** (*By The Way*), **LOL** (*Laughing Out Loud*) czy **AFAIK** (*As Far As I Know*).

Każdy przedsiębiorca wie, że posiadanie firmowego serwisu internetowego jest w dzisiejszych czasach obowiązkowe. Musi on jednak sprawdzić, czy doświadczenie użytkownika **UX** (*User eXperience*) jest w jego serwisie pozytywne, czy serwis jest zoptymalizowany pod kątem wyszukiwarek **SEO** (*Search Engine Optimization*) i czy nie jest podatny na ataki za pomocą złośliwego kodu **XSS** (*Cross-Site Scripting*).

Coraz bardziej jesteśmy uzależnieni od komunikacji elektronicznej. W sklepie za produkty zabezpieczone etykietami **RFID** (*Radio-Frequency Identification*) możemy zapłacić kartą zbliżeniową **NFC** (*Near-Field Communication*), a coraz więcej zwykłych urządzeń, mimo że jest to ostatnie, czego byśmy od nich wymagali, podłącza się do sieci w ramach koncepcji Internetu rzeczy **IoT** (*Internet of Things*).

W cyfrowym tysiącleciu dużo mówi się o ochronie własności intelektualnej **IP** (*Intellectual Property*) i proponuje różne ustawy mające ukrać „piractwo” sieciowe, tj. **SOPA** (*Stop Online Piracy Act*). Na szczęście coraz łatwiej nabywać cyfrowe treści w powstających serwisach typu **VOD** (*Video On Demand*). Jest też mnóstwo oprogramowania dostępnego na wolnych i otwartych licencjach **FLOSS** (*Free, Libre and Open-Source Software*), rozwijanych i promowanych m.in. przez fundacje wolnego oprogramowania **FSF** (*Free Software Foundation*) i otwartego oprogramowania **OSI** (*Open Source Initiative*).

Niektóre akronimy odnoszą się do oprogramowania, na które jeszcze musimy poczekać. O ile postępy w dziedzinie rozpoznawania tekstu **OCR** (*Optical Character Recognition*) czy wirtualnej rzeczywistości **VR** (*Virtual Reality*) są całkiem dobre, to w pełni automatyczne przetwarzanie języka naturalnego **NLP** (*Natural Language Processing*) lub ogólnie pojęta sztuczna inteligencja **AI** (*Artificial Intelligence*) pozostają nadal pieśnią przyszłości.

Tym odcinkiem kończymy bestiariusz informatyczny. Pojawiło się w nim ponad 200 akronimów dotyczących technologii informacyjnych **IT** (*Information Technology*). Nie pozostaje nam już nic innego, jak uwieńczyć go jeszcze jednym: znakiem końca pliku **EOF** (*End Of File*).

Tomaz IDZIASZEK



W dniach 6–7 kwietnia 2019 roku na Wydziale Fizyki UW odbędzie się V edycja Sympozjum Młodych Naukowców Wydziału Fizyki. Dzięki konferencji studenci I i II stopnia mają możliwość zaprezentowania wyników własnych badań naukowych w zakresie nauk fizycznych i im pokrewnych. Organizatorami Sympozjum są: Studenckie Koło Nanotechnologii „Nanorurki” oraz Wydział Fizyki UW, zaś uczestnikami studenci z całej Polski. Szczegółowe informacje na temat Sympozjum znajdują się na stronie internetowej (smn.fuw.edu.pl), a także na profilu facebookowym (www.facebook.com/SMNFUW/).

Serdecznie zapraszamy do udziału w Sympozjum!

A jednak się da (V),

czyli saga kryptologiczna w odcinkach.

Tym razem: protokół Yao.

Łukasz RAJKOWSKI

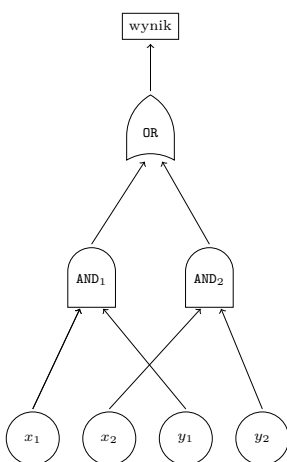
Jedną z drobnych przyjemności w życiu milionera jest porównywanie swojego bogactwa z bogactwem innych milionerów. Czasem nie jest to trywialne zadanie, gdyż afiszowanie się ze stanem swojego konta (nawet przybliżonym) mogłoby zostać uznane za naruszenie krezusowej etykiety. Istnieje co prawda szeroki wachlarz subtelnych wskaźników, w rodzaju rozmiaru posiadłości czy liczby luksusowych aut, jednak te bywają bardzo mylące. Czy jest możliwa wymiana informacji między dwoma bogaczami w taki sposób, by każdy z nich dowiedział się, który z nich jest bogatszy, i byłaby to jedyna informacja o stanie posiadania rozmówcy? Proponujemy Czytelnikowi zastanowienie się nad tym pytaniem przed sformułowaniem problemu ogólniejszego, czyli: czy jest to prawdą dla dowolnej wartości obliczanej na podstawie majątku obu rozmówców (na przykład: czy sumarycznie mają więcej niż miliard?). Oczywiście, tytuł naszej serii artykułów sugeruje twierdzącą odpowiedź na postawione pytanie i tak jest w rzeczywistości, a realizacją poszukiwanego sposobu jest *protokół Yao*.

Warto podkreślić, że w naszych rozważaniach nie dopuszczamy aktywności „wrogich sił trzecich”. Zakładamy, że dwie komunikujące się strony są uczciwe (choć ciekawskie) i dokładnie wykonują ustalony protokół. W literaturze określa się taką sytuację mianem *honest but curious*.

Doprecyzujemy odrobinę nasze rozważania: każdy z dwojga rozmówców (podobnie, jak w poprzednich odcinkach sagi, niech będą to Aldona i Bogumił) skrywa pewną wartość. Dla ułatwienia dalszego opisu, przedstawmy te wartości w postaci binarnej i przechowujmy jako ciągi binarne o ustalonej z góry długości. Niech zatem wartością Aldony będzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, a wartością Bogumiła $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_l)$, gdzie x_i, y_j wynoszą 0 lub 1 dla $i \leq k$ oraz $j \leq l$. Aldona i Bogumił chcą obliczyć $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, gdzie f jest pewną znaną im funkcją, która przyjmuje wartości 0 lub 1 (taką funkcję będziemy nazywać *boolowską*). Jednocześnie każde z nich wymaga, by wszystko, czego dowiedziało się to drugie na podstawie wymienionych informacji, zawierało się w wartości funkcji f . Gdyby na przykład funkcja f była iloczynem swoich argumentów i przyjęła wartość 0, a wśród argumentów Aldony były same 1, to jedyne, czego może się ona dowiedzieć o argumentach Bogumiła to tyle, że znajduje się wśród nich 0.

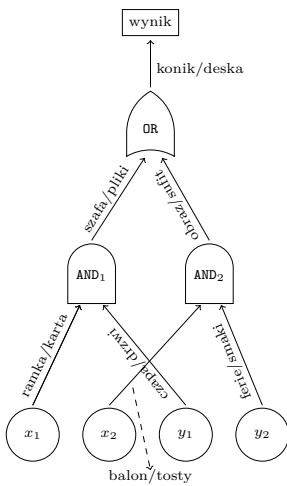
AND			OR			NOT	
in ₁	in ₂	out	in ₁	in ₂	out	in	out
1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1		
0	0	0	0	0	0		

Konstrukcję protokołu Yao rozpoczniemy od przedstawienia funkcji f w postaci *obwodu logicznego*, czyli złożenia dwuargumentowych funkcji AND i OR oraz jednoargumentowej funkcji NOT. Oczywiście działanie tych funkcji przedstawione jest w tabelkach na marginesie. Czytelnikowi Dociekliwemu polecamy zastanowić się, jak każdą funkcję boolowską możemy zamienić na obwód logiczny – uzasadnienie jest ukryte w tym numerze *Delt*y. Kiedy już Aldona i Bogumił ustalą reprezentację rozważanej funkcji w postaci obwodu logicznego, przedstawiają go jako graf skierowany – przykład na rysunku 1. Możemy wyobrazić sobie, że jest to obwód elektryczny: krawędzie to przewody, którymi płynie (bądź nie) prąd, wierzchołki to „bramki”, które wypuszczają (bądź nie) prąd w zależności od obecności prądu na ich „wejściach”. (Przepływ prądu oczywiście reprezentuje bit 1, a brak przepływu – bit 0). Na dole są wierzchołki odpowiadające argumentom – są to „przełączniki”, należące do Aldony lub Bogumiła, a na górze – wierzchołek odpowiadający wynikowi. Idea protokołu Yao (szczegóły zaraz) jest następująca: Aldona koduje w pewnym języku wszystkie możliwe zachowania obwodu i dostarcza Bogumiłowi tyle informacji, że potrafi on odtworzyć „prawdziwe” zachowanie obwodu w tym języku, bez ujawniania swoich argumentów i bez poznawania prawdziwych wartości argumentów Aldony. Precyzyjniej, procedura przebiega tak (realizacja niektórych punktów oznaczonych ♠ jest nietrywialna i będzie wytłumaczona w dalszej części tekstu):

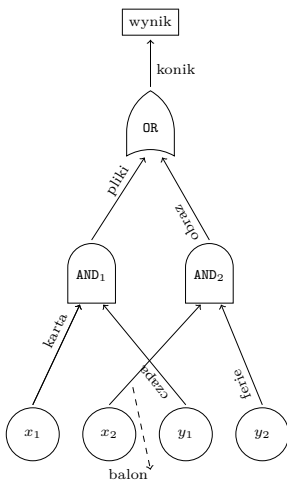


Rys. 1. Przykład obwodu logicznego, dostarczającego odpowiedzi na pytanie: czy Aldona i Bogumił kochają się wzajemnie lub oboje są czytelnikami „Delty”?

- Aldona dla każdej krawędzi wybiera dwa *kryptonimy*: pierwszy koduje przepływ prądu przez daną krawędź, a drugi jego brak (rys. 2). Bogumił do końca protokołu nie będzie w stanie połączyć żadnego kryptonimu z odpowiadającym mu bitem.



Rys. 2. Ustalenie kryptonimów dla przepływu prądu (lub jego braku) w poszczególnych przewodach (pierwszy kryptonim odpowiada zawsze przepływowi prądu).



Rys. 3. Ewaluacja układu przez Bogumiła w „nowym języku”, gdy $x_1 = 0$, $x_2 = y_1 = y_2 = 1$. Dla żadnej krawędzi nie poznaje on kryptonimu odpowiadającego jej „drugiemu” stanowi.

„garblowanie” bramki AND ₁			
in ₁	in ₂	out	$E_{in_1}(E_{in_2}(out))$
ramka	czapa	szafa	naogc
ramka	drzwi	pliki	levss
karta	czapa	pliki	dmbuk
karta	drzwi	pliki	eeabs

Tłumaczenie działania bramki AND₁ na język kryptonimów, a następnie kodowanie każdego kryptonimu wyjścia przy użyciu odpowiednich kryptonimów wejścia i pewnej funkcji szyfrującej E .

W powyższej sytuacji „czarna skrzynka” odpowiadająca bramce AND₁ to {eeabs, dmbuk, naogc, levss}. Jeśli Bogumił poznał tę czarną skrzynkę oraz wie, że kryptonimy wejścia do tej bramki to „karta” i „czapa”, to odkodowuje każdy element czarnej skrzynki przy użyciu tych kryptonimów i stąd otrzymuje kryptonim wyniku. Dla przykładu, jeśli otrzymał w ten sposób {qdhrg, pliki, zzwva, xdcq}, to dowiaduje się, że kryptonim wyniku to „pliki”.

- (b) ♠ Aldona zamienia każdą bramkę na „czarną skrzynkę”, która dla danych kryptonimów wejścia pozwala obliczyć adekwatny kryptonim wyjścia, i nie ponadto. Ten etap nazywany jest „garblowaniem” obwodu.
- (c) Aldona przekazuje Bogumiłowi kryptonimy stanu swoich przełączników oraz wszystkie czarne skrzynki (wraz z informacją, jakim bramkom odpowiadają).
- (d) ♠ Bogumił poznaje hasła odpowiadające temu, czy z jego przełączników płynie prąd, w taki sposób, by Aldona niczego nie dowiedziała się o ich stanie.
- (e) Bogumił ewaluuje obwód w nowym języku (czyli po kolei, „od dołu”, oblicza kryptonimy opisujące przepływ prądu przez kolejne przewody) i oblicza hasło wyniku (rys. 3); przesyła je Aldonie.
- (f) Aldona tłumaczy kryptonim wyniku na prawdziwy wynik i przekazuje go Bogumiłowi.

Przeanalizujemy, w jaki sposób realizowane są założenia tego planu. Punkt (a) nie wymaga szczególnych objaśnień – w praktyce kryptonimami są duże liczby losowe, możemy jednak myśleć o bardziej swojskiej konwencji typu „pies/kot”, „nos/oko” i tak dalej. Punkt (b) potrzebuje większej uwagi. W sukurs przychodzi nam szyfrowanie symetryczne. Przypomnijmy, że jest to podstawowy sposób szyfrowania, w którym do zakodowania i odkodowania wiadomości potrzebny jest ten sam klucz. Przykładem jest szyfr Cezara, w którym kluczem jest liczba pozycji, o jaką przesuwamy w alfabecie każdą literę wiadomości. Warto zwrócić uwagę na pewną własność szyfru Cezara – jeśli spróbujemy odczytać zakodowaną wiadomość (czyli szyfrogram) przy użyciu błędnego klucza, otrzymamy zapewne bezsensowny ciąg liter, przez co dowiemy się, że użyty przez nas klucz był nieprawidłowy. Podobną własność można wymusić na każdym szyfrze symetrycznym – wystarczy umówić się, że przekazywane przez nas wiadomości muszą mieć pewną szczególną własność (na przykład być słowami w pewnym języku, jak w przypadku szyfru Cezara, lub zaczynać się ustalonej długości ciągiem jedynek). Wówczas użycie błędnego klucza z dużym prawdopodobieństwem „wyrzuci” nas poza dopuszczalny zbiór wiadomości, przez co dowiemy się, że coś poszło nie tak. Od naszego szyfru wymagać ponadto będziemy, by znajomość wiadomości i szyfrogramu nie pozwalała na obliczenie klucza. Dyskwalifikuje to niestety szyfr Cezara, jednak na szczęście stosowane szyfry symetryczne najczęściej mają tę własność.

Jak w takim razie może wyglądać „czarna skrzynka”, której potrzebuje Aldona? Wystarczy dla każdej z czterech (lub dwóch, dla bramki NOT) możliwych kombinacji kryptonimów wejścia obliczyć kryptonim odpowiadającego im wyjścia, po czym zaszyfrować je dwukrotnie przy użyciu najpierw kryptonimu wejścia 1, a następnie kryptonimu wejścia 2, a na koniec ustawić wyniki w losowej kolejności. Brzmi skomplikowanie, jednak analiza przykładu przedstawionego na marginesie powinna rozjaśnić wszelkie wątpliwości. Zauważmy, że mając tak uzyskane cztery szyfrogramy oraz dwa konkretne kryptonimy wejścia, Bogumił może obliczyć kryptonim wyjścia – wystarczy, że odkoduje wszystkie szyfrogramy przy użyciu posiadanych kryptonimów wejścia. Dostanie wówczas trzykrotnie „śmieci” oraz jednokrotnie pełnoprawny kryptonim, który jest szukanym kryptonimem wyjścia. Podkreślmy, że w ten sposób nie dowiaduje się on niczego o znaczeniu kryptonimów wejścia! Jeśli zatem Bogumił dostanie wszystkie czarne skrzynki oraz kryptonimy stanu swoich i Aldony przełączników (punkty (c) i (d)), będzie mógł obliczyć kryptonimy wyników kolejnych bramek, nie poznając bezpośrednio rzeczywistego stanu przełączników Aldony (punkt (e)). Czy może on jednak poznać kryptonimy stanu swoich przełączników tak, by nie ujawnić Aldonie ich rzeczywistej pozycji (punkt (d))? Jak najbardziej (choć jest to nietrywialne) – pisaliśmy o tym w poprzednim odcinku naszej serii (Δ_{18}^3), a stosowny protokół to *transfer utajniony*. Wszystkie brakujące elementy układanki są już zatem na swoim miejscu, a Aldona i Bogumił mogą śmiało obliczać wartości funkcji bez obaw o ujawnienie swoich sekretów.

Witkacy i Fizyka

Rafał DEMKOWICZ-DOBRZAŃSKI*

*Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki UW



Rozwiązanie zadania F 971.

Nośnikami prądu w miedzi są swobodne elektrony. Jeśli gęstość elektronów przewodnictwa wynosi n , to prąd

$$I = ne u S,$$

gdzie u oznacza średnią prędkość ruchu elektronów w kierunku zgodnym z przyłożonym polem elektrycznym, a S jest polem przekroju przewodnika. W odcinku przewodnika o długości l wypadkowy pęd p elektronów związany z tym ruchem wynosi:

$$p = nm_e u l S.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$p = \frac{m_e}{e} I l,$$

po podstawieniu danych liczbowych

$$p \approx 5,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

To mniej więcej pęd ziarenka maku poruszającego się z prędkością 0,1 mm/s.



Rozwiązanie zadania F 972.

Koniec przewodnika ma kształt półkuli o promieniu R . Rozkład ładunku na nim będzie taki sam, jak na powierzchni przewodzącej kuli naładowanej do potencjału U . Niech ładunek tej kuli wynosi Q . Mamy:

$$U = \frac{kQ}{R},$$

gdzie

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}.$$

Pole elektryczne na powierzchni kuli wynosi:

$$E = \frac{kQ}{R^2}.$$

Dla uniknięcia przebicia musi zachodzić $E < E_0$. Otrzymujemy więc:

$$R > \frac{U}{E_0} \approx 17 \text{ mm}.$$

Wtedy kiedy wywołanie przebicia jest pożądane, czyli na przykład w piorunochronie, promień krzywizny powinien być jak najmniejszy, dlatego końcówki piorunochronów są zwykle zaokrąglone.

Zanim zaczniesz czytać ten tekst, Drogi Czytelniku, odpowiedz sobie najpierw na pytanie: jakie skojarzenia wzbudza u Ciebie słowo *Witkacy*. Zakładam, że z dużym prawdopodobieństwem szereg następujących w Twoim umyśle skojarzeń jest następujący: dramaturg (zazwyczaj pierwszy do głowy przychodzi dramat „Szewcy”, bo to było w szkole), czysta forma (to też było w szkole, i coś o sztuce, ale o co naprawdę chodzi. . .), narkoman, erotoman (tu jakieś ciekawsze smaczki poznane skądinąd), portrecista (pewnie gdzieś tam się widziało charakterystyczny styl i podpisy na obrazach mówiące o zażytych substancjach odurzających na potrzeby wykonania danego portretu) i na końcu może powieściopisarz (jak ktoś więcej czyta i przeczytał „Pożegnanie jesieni” albo „Nienasyceń”, ewentualnie natknął się na film).

To wszystko dobre skojarzenia, jednak ten obraz Witkacego (Stanisława Ignacego Witkiewicza (1885–1939)) jest niepełny, gdyż Witkacy był również, a może przede wszystkim, filozofem oraz pasjonatem nauki, ze szczególnym uwzględnieniem fizyki i matematyki. W późniejszym okresie swojego życia (lata 30. XX wieku), gdy wypełniał ankiety, w których należało uzupełnić rubrykę „zawód”, wpisywał filozof. Podkreślał też, że gdyby nie jego dokonania na polu filozofii, uważałby całe swoje życie za kompletnie bezwartościowe.

Najważniejszym dziełem filozoficznym Witkacego jest traktat „Pojęcia i twierdzenia implikowane przez pojęcie istnienia”, w którym formułuje swój filozoficzny pogląd i gdzie stara się wyjść poza prześladowający filozofię odwieczny spór pomiędzy tzw. realizmem (gdzie jedyną rzeczywistością jest materia martwa opisywana np. przez prawa fizyki) i idealizmem (gdzie jedyną rzeczywistością są wrażenia bezpośrednie jednostki). Istotę problemu sformułował już w swoim młodzieńczym eseju filozoficznym „O Dualizmie” (napisanym w roku 1902 – kiedy miał 17 lat!), którego fragmenty przytaczamy poniżej:

Od czasu, kiedy nowożytna filozofia weszła pod przewodnictwem Descartes’a na nową drogę, ciągnie się sprawa dualizmu psychofizycznego aż do czasów najnowszych. [. . .]

Tu jest właśnie miejsce, jakby rafa podwodna zamykająca wejście do spokojnych wód wszechpoznania, na której od początku wieków rozbijają się ciężkie okręty logicznych systematów i lekkie łódeczki myślowej intuicji. Miejsce to trudno dokładnie oznaczyć. Jest to ten włoszek graniczny oddzielający podmiot od przedmiotu, ducha od materii, poznawane od poznającego itd. [. . .]

Kierunek analityczny, empiryczno-logiczny chce podmiot określić tym, co jest na zewnątrz niego, jest to poznanie odśrodkowe. Tu należą wszystkie systemy materialistyczne. Drugi kierunek bierze za punkt wyjścia „ja” świadome, jako jedyną rzecz daną bezpośrednio i wszystko, co jest na zewnątrz, warunkuje poznająca istota. [. . .]

W obu wypadkach jest słuszność. Jest to rzecz ciekawa, że jeżeli jakaś prawda dotyczy i nas, i otaczającego nas świata, jest ona dwoistą zależnie od punktu widzenia, z jakiego się dane zjawisko obserwuje. [. . .] Pochodzi to stąd, że układ nasz, z którego żadną miarą wyjść nie możemy, rozbity jest na podmiot i przedmiot, których rzeczywistego stosunku nigdy nie wyjaśnimy, ponieważ nie jesteśmy obojętnymi spektatorami zjawisk, ale jedną ze stron działających. [1]

Z punktu widzenia fizyka najbardziej fascynujące jest to, jak dużo Witkacy wiedział na temat współczesnej sobie fizyki, i to nie tylko na poziomie popularnym, ale również na poziomie zaawansowanym.

Miał też szeroką wiedzę matematyczną – zwłaszcza z rozwijanej w tym czasie teorii mnogości i logiki, będących podstawą prób formalizacji całej matematyki, kulminacją czego było wielotomowe dzieło *Principia Mathematica* Bertranda Russella i Alfreda Whiteheada. Jeśli chodzi o samą logikę, Witkacy był krytyczny w stosunku do neopozytywistycznych nurtów w filozofii rozwijanych przez grupę filozofów skupionych wokół tzw. Koła Wiedeńskiego. Główną tezę głoszoną przez to środowisko było to, że wszelkie problemy filozoficzne wynikają z niewłaściwego użycia języka i że celem filozofii jest stworzenie języka formalnego opartego o ściśle podstawy matematyczno-logiczne. Dzięki temu możliwe będzie uprawianie filozofii bez popadania w pozorne sprzeczności, które wynikają z używania języka potocznego do celów nieodpowiednich dla niego. Witkacy uważał, że fundamentalnych problemów filozoficznych, takich jak relacja *duch vs. materia*, czy mówiąc współcześnie *świadomość vs. opis fizyczny świata*, nie da się zamieścić pod dywan, używając formalnych sztuczek logicznych. Uważał, że filozofia powinna sformułować spójną podstawę pojęciową dla opisu świata (jak mówił Witkacy: ogólną ontologię), w ramach której będzie możliwe rozwijanie nauk przyrodniczych, takich jak fizyka, z pełnym zrozumieniem miejsca formułowanych przez nie praw w ramach całościowego obrazu świata. Podążając w tym kierunku, Witkacy opublikował wiele esejów filozoficznych, w których szczegółowo rozwijał swój pogląd w zestawieniu z najnowszymi osiągnięciami fizyki, takimi jak teoria względności czy mechanika kwantowa (z których większość można znaleźć w: *Nauki Ścisłe i Filozofia i inne pisma filozoficzne (1933–1939)* (PIW, 2014), a celem tego artykułu jest przybliżenie toku rozumowania Witkacego i rozłożenie tego rozumowania na czynniki pierwsze.

Zacznijmy od tego, co Witkacy nazywa poglądem psychologistycznym na świat (tzw. poglądem P). W ramach poglądu P, cały świat sprowadza się do naszych wrażeń (jakości), tj. ciepło, dotyk, kolor, zapach, jasność, ... i ich następstw czasowych. Przedmiot taki jak np. pudełko będzie kompleksem wrażeń aktualnych i potencjalnych, i tylko tym, niczym więcej!:

... to co, nazywam np. pudełkiem, jest tylko pewnym kompleksem jakości wzrokowych, ewentualnie dotykowych, na mocy doznania którego wiem [...] (co jest również następstwem jakości, czuć dotykowych i masykularnych), że doznam innych jakości. Oczekuję tego pod pewnymi warunkami, a oczekiwanie, jak również warunek, jest również, trwaniem pewnych jakości (wyobrażeń, które składają się z różnie ułożonych wspomnień elementarnych i czuć masykularnych, jako też czuć organów wewnętrznych) [2].

Następnie Witkacy formułuje pogląd fizyczny (pogląd F). Pogląd F powstaje przez wyróżnienie spośród naszych wrażeń pewnego *podzbioru* wrażeń

związanych z przestrzennością przedmiotów (to ważne! do tej konstrukcji wybieramy bardzo ograniczony zbiór naszych wrażeń, nie używamy wrażeń dźwiękowych, koloru, ciepła, a jedynie przestrzenności, które abstrahujemy z dotyku i wrażeń wzrokowych – ale nie barwnych!). Następnie na podstawie tych wrażeń i ich zmienności konstruowane są tzw. „niesprowadzałki”, czyli elementarne „rozciągłości w ruchu”, z których następnie budowane są pojęcia fizyczne, tj. pola, fale, cząstki, ... W ramach poglądu F cały świat jest pewną konfiguracją czasowo-przestrzenną „niesprowadzałek”:

Nie ma w przestrzeni nic [...] prócz przedmiotów fizycznych [...] tzn. atomów, elektronów, paczek fal, pól i tym podobnych, a więc ogólnie rzecz biorąc, jakichś martwych rozciągłości w ruchu i „tzw.” sił pomiędzy nimi działających [...] [3].

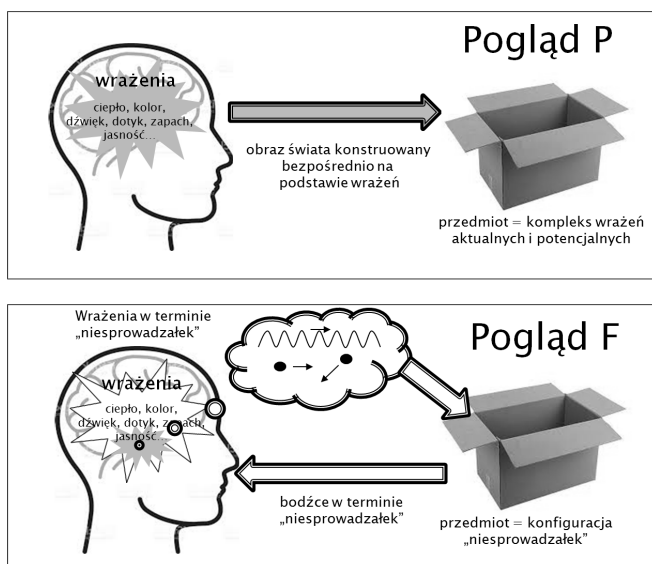
Zauważmy, że w ramach poglądu F tłumaczymy następnie nasze *wszystkie* wrażenia, np. kolor, ciepło itp. poprzez ruchy tychże „niesprowadzałek” (np. dźwięk jako drgania cząsteczek powietrza):

Ze zmiennego świata bezpośrednio danych jakości wyjmuje się pewne z nich (formalne przestrzenne = jakości kształtu) i przez nie stara się „wyrzucić” jakości, które je wypełniają (kolory np.) lub inne, dodając do pojęcia tych przestrzennych jakości jeszcze pojęcie ruchu [...] [4].

Witkacy uważa, że powyższa konstrukcja jest pewnego rodzaju błędnym kołem, gdzie startując z wrażeń bezpośrednio danych, próbujemy ostatecznie te wrażenia usunąć z naszego opisu w ramach abstrakcji, która tak naprawdę jest pewną formą ich przetworzenia:

Pewne związki jakości, z których zostały stworzone pojęcia fizyczne, [...] mają służyć do wytłumaczenia jakości w ogóle jako takiej: drgania hipotetycznych czy realnych rozciągłości [...] mają nam tłumaczyć [...] bezpośrednio dane wrażenia ciepła czy koloru. [...] Jeśli mowa jest choćby o jednej jakości, wydaje się już absolutną niemożliwością wszelka realna spowodalność jej do fizycznego obrazu rozciągłości w ruchu, ponieważ to ostatnie pojęcie implikuje już pojęcie zmiennego kompleksu jakości. [...] nie jest to żadna „niedokładność naszego umysłu”, tylko niemożliwość absolutna, czego nie mogą zrozumieć niektóre zakute empiryczne lby [5].

Głównym zarzutem Witkacego wobec poglądu F jest to, że nie wprowadza on do swojego opisu jawnie pojęcia obserwatora, i tu właśnie dochodzimy do głównej linii rozumowania Witkacego bezpośrednio związanej z fizyką. Witkacy podkreśla, że nawet jeśli ktoś nie przyjmuje powyższej krytyki na podstawie argumentów filozoficznych, to sama współczesna fizyka pokazuje nieadekwatność czystego poglądu F w opisie świata – a chodzi właśnie o rolę obserwatora w formułowaniu praw fizyki.



Pogląd psychologistyczny (P) i pogląd fizyczny (F).

Witkacy zaczyna od skomentowania teorii Newtona jako teorii, w której po raz pierwszy pojawia się pojęcie układu odniesienia (prędkość, która np. w teorii Arystotelesa była pojęciem absolutnym, staje się pojęciem zależnym od obserwatora), ale fakt arbitralnego wyróżnienia klasy układów inercjalnych oraz absolutność przestrzeni i czasu powodują, że rola obserwatora w tej teorii jest znikoma:

W systemie Newtona [...] nie ma fizyki bez obserwatora-operatora i bez mierzenia; ale nie ma też i wielości obserwatorów, jest jeden jedyny teoretyczny, którego ta jedyność sama jakby eliminuje: rozplywa się on w całości Wszechświata, jak jakieś panteistyczne bóstwo [...]. [6]

Wzrost roli obserwatora w opisie fizycznym widać wyraźnie, gdy przechodzimy do teorii względności, a zwłaszcza do ogólnej teorii względności, gdzie dla sformułowania teorii nie jest konieczne arbitralne wyróżnienie klasy układów inercjalnych, a ponadto zarówno czas, jak i przestrzeń stają się pojęciami zależnymi od obserwatora:

Podczas gdy u Newtona [...] byłby właściwie tylko jeden układ odniesienia istotny, a reszta byłaby istniała tylko w stosunku do niego [...], w teorii względności dostajemy ich wielość. [...] Obserwator wszedł w same równania fizyki, zapoczątkowując tym wejściem uoperacyjnienie pojęć zasadniczych. [7]

Kulminacją uświadomienia sobie roli obserwatora w opisie świata jest dla Witkacego fizyka kwantowa. Fizyka kwantowa jest teorią, która do dziś wzbudza najwięcej kontrowersji filozoficznych w związku ze swoimi licznymi interpretacjami, dotyczącymi głównie kwestii tzw. rzeczywistości funkcji falowej. Zauważmy, że nawet w ramach teorii względności, mimo że różni obserwatorzy przypisują różne wartości liczbowe pojęciom fizycznym, takim jak masa, czas, odległość itp., sam zestaw pojęć fizycznych dotyczących danego obiektu

fizycznego, którym wszyscy są w stanie przyporządkować dobrze określoną wartość liczbową, jest stały. W fizyce kwantowej jest inaczej. Nie możemy jednocześnie przypisać dobrze określonych wartości liczbowych wszystkim wielkościom fizycznym odnoszącym się do danego układu. Wybierając sposób mierzenia układów fizycznych, my dopiero określamy, jakim wielkościom fizycznym będzie w ogóle można sensownie przyporządkować jakieś określone wartości liczbowe. Widzimy, że tutaj rola obserwatora jest jakościowo inna niż we wszystkich wcześniejszych teoriach fizycznych. Witkacy z nieukrywaną satysfakcją stwierdza:

Jeszcze jaskrawiej występuje problem obserwatora i operatora w mikrofizyce w związku z eksplicytnym wymaganiami brania pod uwagę tylko tego, co obserwowalne. [...] obserwator nie tylko wślizgnął się tu [...], on po prostu rozsiadł się w odnośnych równaniach jak w fotelach [...]. Musi on być przyjęty jako stały zanawiasowy element konieczny poglądu fizycznego, który przez to traci swój charakter pseudoobiektywności absolutnej [...]. Wróg czystego fizykalizmu, którego pozorne niegdyś pokonanie było złudnym tryumfem materializmu, znajduje się już wewnątrz fortecy. [8]

Widzimy, że tym samym w sporze o interpretację fizyki kwantowej, Witkacy nie stanąłby po stronie Einsteina ani innych fizyków (na przykład David Bohm) próbujących, przez np. teorię parametrów ukrytych, powrócić do znanego z mechaniki klasycznej opisu świata jako czystego poglądu F niezakłóconego niewygodnym faktem, że ktoś ten świat jednak obserwuje.

Na koniec warto podkreślić, że krytyka poglądu F ze strony Witkacego nie jest krytyką samej fizyki, a jedynie jej zbyt uproszczonej interpretacji, o czym świadczy poniższy cytat:

[...] mimo zmienności poglądów fizyki, „leżę przed nią na brzuchu” jako przed taką, ale czemu to ma implikować pogardę dla filozofii [...] i to, zwracam uwagę, pisze człowiek, który chciał być kiedyś teoretycznym fizykiem, studiował matematykę i dotąd jest pełen najwyższego uwielbienia dla tych nauk i dla nauki w ogóle. [9]

I jak tu nie lubić Witkacego?

Literatura

- [1] S. I. Witkiewicz. *O idealizmie i realizmie. Pojęcia i twierdzenia implikowane przez pojęcie Istnienia i inne prace filozoficzne*, PWN, 1977, s. 13–15.
- [2] S. I. Witkiewicz. *Nauki Ścisłe i Filozofia i inne pisma filozoficzne (1933–1939)*, PIW, 2014, s. 20.
- [3] Tamże, s. 227.
- [4] Tamże, s. 31.
- [5] Tamże, s. 29.
- [6] Tamże, s. 263.
- [7] Tamże, s. 260.
- [8] Tamże, s. 262, 264.
- [9] Tamże, s. 40, 43.



mała delta

Nieskończoność: 2. Problemy starożytnych

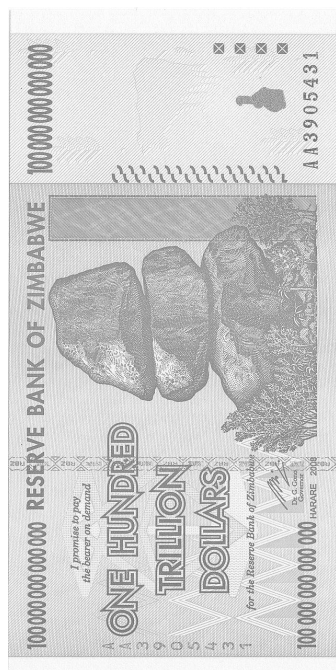
Jednym z naturalnych skojarzeń z nieskończonością są duże, bardzo duże liczby. Tak bardzo, że trudno je sobie wyobrazić, a intuicja nie pomaga. Możemy jednak o nich pomyśleć. Czytając doniesienia o wydatkach z budżetu państwa lub tym bardziej o światowej gospodarce, łatwo pogubić się w milionach, miliardach i bilionach. I chociaż wiemy, że w bilionie $1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$ mieści się aż milion milionów, mało kto jest w stanie to sobie wyobrazić. Wszystkie te liczby wpadają w tę samą kategorię – liczb dużych na tyle, że nie znajdujemy dla nich zastosowania w zwyczajnym codziennym życiu.

Choć i tu granica może być płynna, czego dowodzi przedstawiony na marginesie banknot opiewający na kwotę stu bilionów dolarów Zimbabwe. Warto tu zwrócić uwagę na nieintuicyjne przesunięcie nazewnictwa liczb między polskim i angielskim językiem – polski miliard to angielski billion, a więc angielski trillion to po polsku bilion. Banknot jest wynikiem hiperinflacji w Zimbabwe, która w rekordowym listopadzie 2009 roku wyniosła aż około 80 miliardów procent w skali miesięcznej.

Każdy czytelnik zdaje sobie jednak sprawę, że można myśleć bez trudu o większych liczbach. O ile sto bilionów to 14 zer za jedyneką, o tyle liczbę mającą za jedyneką 100 zer, czyli 10^{100} , zwykło się nazywać googol. Zbieżność nazwy ze znaną firmą nie jest przypadkowa, jej założyciele właśnie tą liczbą się inspirowali, a różnica w nazwie, podobno, jest wynikiem literówki. No dobrze, widać, że googol to duża liczba. Ale jak duża? Co jest większe: googol czy liczba komórek w ciele człowieka? Googol czy liczba atomów w ciele człowieka? Googol czy liczba atomów na kuli ziemskiej? Liczba atomów w Układzie Słonecznym? W naszej galaktyce? W obserwowalnym Wszechświecie? Okazuje się, że na wszystkie te pytania prawidłową odpowiedzią jest: googol jest większy (rzędy wielkości tych liczb szacowane są kolejno na 10^{13} , 10^{24} , 10^{50} , 10^{56} , 10^{67} i 10^{80}).

Ale przecież możemy myśleć o liczbach jeszcze większych. Na przykład o liczbie w postaci jeden i googol zer, czyli liczbie 10^{100} zwanej googolplex. Nie bez przyczyny nie drukujemy jej tu w pełnej dziesiętnej wersji – skoro atomów w obserwowalnym Wszechświecie jest mniej niż googol, nie starczyłoby ich, gdyby na każdym atomie chcieć umieścić jedną cyfrę googolplexa. . . Fakt, że w ogóle o takiej liczbie tu dyskutujemy, można uznać za komplement dla ludzkiego umysłu. A przecież nadal rozważamy tylko pewien skończony początek zbioru liczb naturalnych, nieskończoności tego zbioru dotykając tylko ulotnie poprzez świadomość, że dla każdej liczby naturalnej możemy znaleźć liczbę od niej większą.

Już starożytni greccy matematycy stykali się z tego typu nieskończonością, zwaną czasem nieskończonością potencjalną. Prosta można przedłużyć dowolnie daleko, odcinek można podzielić na dowolnie wiele części – tak mówiono już w ówczesnej matematyce, i tego nie dało się uniknąć. Nikt natomiast ze starożytnych matematyków nie powiedziałby, że prostą można przedłużać w nieskończoność lub że liczb jest nieskończenie wiele. Nie rozważano podziału odcinka na nieskończenie wiele części. Unikano takiej aktualnej nieskończoności jak ognia – była postrzegana jako źródło niechcianej





wówczas w matematyce nieścisłości i paradoksów. Nie rozważano więc istnienia nieskończonych zbiorów.

Chociażby słynny dowód z „Elementów” Euklidesa, o którym powiedzielibyśmy obecnie, że dowodzi istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych, tak naprawdę mówił o tym, że można znaleźć dowolnie wiele takich liczb. Istotnie, jeśli mamy już n liczb pierwszych p_1, p_2, \dots, p_n , to rozważmy liczbę $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Ona nie dzieli się przez żadną z dotychczas znalezionych liczb, więc albo ona sama jest pierwsza, albo dzieli się przez inną, nierozważaną jeszcze liczbę pierwszą q – czyli tak czy inaczej mamy jeszcze jedną liczbę pierwszą.

Problemem były też wielkości, które dziś nazywamy niewymiernymi. Natknęli się na nie Pitagorejczycy, zauważając, że stosunek przekątnej i boku kwadratu nie da się wyrazić stosunkiem liczb naturalnych. Był to nie lada problem, bo ta obserwacja podważała filozoficzne przekonanie, że wszystko jest liczbą, wszystko liczbami (w domyśle naturalnymi) da się opisać. Co więcej, Pitagorejczycy upatrywali w stosunkach niskich liczb naturalnych, sprawdzonych na przykładzie muzyki, harmonii w świecie. Brak harmonii w tak doskonałej figurze jak kwadrat był więc co najmniej zaskakujący. Problem jest jednak bardzo bliski problemowi z nieskończonością, bo po pewnym czasie zorientowano się, że stosunek przekątnej i boku kwadratu można przybliżać stosunkami liczb naturalnych. Notując we współczesny sposób spostrzeżenia Teajtetosa (matematyka z IV wieku p.n.e), napisalibyśmy, że

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Tak więc stosunki w kwadracie da się opisać harmonią małych liczb naturalnych, z tym że nieskończenie wielu. Jeszcze lepiej wygląda analogiczne przedstawienie złotej proporcji – zobaczymy w nim same jedynki. Warto jednak zwrócić uwagę, że do pełnej akceptacji tego typu geometrycznych stosunków jako liczb niezbędne jest lepsze zrozumienie pojęć związanych z nieskończonością, którego ówczesni matematycy nie mieli.

Stąd też słynne paradoksy Zenona z Elei, w których sprzeczność powstaje w wyniku rozważań skończonych części nieskończonych ciągów. Najsłynniejszy jest chyba ten o żółwiu i Achillesie, w którym Achilles ściga żółwia, biegnąc z dwa razy większą prędkością od niego, ale startując 40 metrów za nim. Paradoks orzeka, że Achilles nigdy nie dogoni żółwia, bo zanim przebiegnie do miejsca, gdzie startował żółw, żółw będzie już 20 metrów dalej. Gdy jednak Achilles przebiegnie te dodatkowe 20 metrów, żółw będzie jeszcze o 10 metrów dalej. I tak dalej – rozumowanie możemy prowadzić dowolnie długo. Nie wiemy do końca, jaka była intencja (Zenon z pewnością wiedział, że Achilles dogoni żółwia), która stała za tymi paradoksami, bo znamy je tylko z przekazu Arystotelesa, który cytował je po to, żeby je rozwikłać (na miarę możliwości jego epoki). Na pewno paradoksy te wskazują słabości w rozumieniu i opisywaniu nieskończonych procesów w starożytnej matematyce. Dzisiaj powiedzielibyśmy po prostu, że paradoks sprowadza się do obliczenia sumy szeregu $40 + 20 + 10 + 5 + \dots$ i że wychodzi 80 – i po przebiegnięciu tylu metrów Achilles rzeczywiście żółwia dogoni.

Żeby jednak pojęcia sumy nieskończonego szeregu i granicy nieskończonego ciągu zostały porządnie zrozumiane i zdefiniowane przez matematyków, potrzeba było dwóch dodatkowych tysiącleci. Obecnie pojęcia te należą do kanonu matematyki. Skąd zatem wiemy, że nieskończone zbiory istnieją? Odpowiedź może nie zadowolić części Czytelników. Istnienie nieskończonego zbioru zostało przyjęte po prostu jako jeden z aksjomatów we współczesnej teorii zbiorów. Czy to wystarczające rozwiązanie dla dylematu starożytnych greckich matematyków?

Michał KORCH

Co ja tu widzę...

Piotr KRZYŻANOWSKI*

* Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

W nowej, dziś inaugurowanej, cokwartalnej serii *Pół szklanki mocnego kodu* w każdym odcinku zajmujemy się konkretnym, czasem nietatym problemem. Pokażemy, jak go rozwiązać, pisząc program zajmujący mniej więcej pół strony – co będzie możliwe dzięki wykorzystaniu bardzo mocnych bibliotek i technologii. Nie wnikając w ich detale, chcemy zwrócić uwagę Czytelników (także tych niekoniecznie zainteresowanych programowaniem), jak dużo można osiągnąć, pisząc tak niewiele!

www.tensorflow.org

Zadziwiająco, jak szybko uczenie maszynowe trafiło pod strzechy! Jeszcze nie tak dawno wymagało biegłości w programowaniu, znajomości takich konceptów, jak funkcja aktywacji, rozkład macierzy względem wartości szczególnych, optymalizacja dla funkcji niegładkich itp. Aby wszystko to zadziało, niezbędny też był dostęp do dostatecznie dobrych danych treningowych i morza czasu obliczeniowego... A dziś?

Teraz możemy, w kilku liniach mocnego kodu, wykorzystać gotowe, uprzednio wyuczone moduły – na przykład do rozpoznania, jaki *obiekt* przedstawia zdjęcie. Oczywiście, to wszystko jest możliwe pod warunkiem, że mamy dostęp do dostatecznie mądrego pakietu... Wybierzemy więc potężny Tensorflow od samego Google Brain. Sposób jego instalacji na komputerze jest bardzo dokładnie opisany na stronie domowej projektu (ja skorzystałem z instalacji w wirtualnym środowisku Pythona na Ubuntu). Poniższy kod w Pythonie rozpoznaje obiekt ze zdjęcia (u nas: znajdującego się w pliku `image.jpg`):

```

1 from tensorflow.keras.applications.inception_v3 import InceptionV3, preprocess_input, decode_predictions
2 from tensorflow.keras.preprocessing.image import img_to_array, load_img
3
4 def prepare_image_iv3(filename):
5     import numpy as np
6     img = load_img(filename, target_size=(299, 299))
7     return np.expand_dims(img_to_array(img), axis=0)
8
9 model = InceptionV3()
10 x = preprocess_input( prepare_image_iv3('image.jpg') )
11 preds = model.predict(x)
12
13 for name, label, score in decode_predictions(preds)[0]:
14     print("%0.2f: %s" % (score, label))

```

Na podstawie www.keras.io/applications/



Cabot Tower w miejscowości St. John's, Kanada (plik `image.jpg`).

Więcej o sieci Inception:
arxiv.org/abs/1512.00567 oraz
ai.googleblog.com/2016/03/train-your-own-image-classifier-with.html

Na początku programu (linie 1–2) wybieramy z Tensorflow tylko te funkcje, które będą nam potrzebne. Należą one do modułów pakietu Keras (www.keras.io), który dostarcza interfejs bardzo wysokiego poziomu, m.in. do aplikacji takich, jak InceptionV3. Notabene, inspiracja dla powyższego kodu pochodzi z dokumentacji pakietu. InceptionV3 to wcześniej wytrenowana konwolucyjna sieć neuronowa (Keras daje też dostęp do kilku innych), która przy pierwszym uruchomieniu funkcji zostanie pobrana z internetu – i dalej już cały proces rozpoznawania będzie odbywał się u nas na komputerze, bez korzystania z usług w chmurze obliczeniowej. Sieć neuronowa Inception-v3 została nauczona rozpoznawania obrazów, czyli przypisywania im prawdopodobieństwa przynależności do każdej z 1000 z góry ustalonych klas, w rodzaju: „samochód”, „bikini”, „pies” itp. Podobno poziom trafności jej wskazań jest podobny do osiąganego przez ludzi!

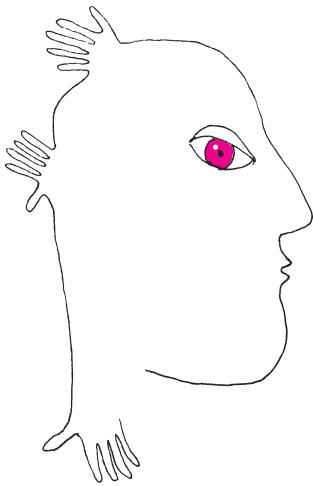
Najważniejszą część programu – rozpoznanie obrazu – składa się zaledwie z trzech linii 9–11:

```

model = InceptionV3()
x = preprocess_input( prepare_image_iv3('image.jpg') )
preds = model.predict(x)

```

Najpierw inicjalizujemy sieć neuronową (z domyślnymi parametrami). Ponieważ będziemy klasyfikować zdjęcia, musimy przygotować je do postaci odpowiedniej dla Kerasa. Mała funkcja pomocnicza `prepare_image_iv3` (linie 4–7) zwraca wstępnie spreparowane zdjęcie z pliku (m.in. nadaje mu odpowiednie rozmiary,



gdyż Inception-v3 oczekuje obrazu o rozmiarach 299×299 pikseli). Następnie zdjęcie poddajemy dalszej obróbce przez `preprocess_input` (normalizując i uśredniając dane). Na końcu – w linii 11 – uruchamiamy sieć, która informuje nas, z jakim prawdopodobieństwem zaliczyłaby rozpoznawane obiekty do każdej z klas.

Wyniki klasyfikacji drukujemy (linie 13–14), przebiegając kolejne elementy listy zwróconej przez funkcję `decode_predictions`; domyślnie zostanie podanych pięć najbardziej prawdopodobnych typowań. Oto wynik dla naszego zdjęcia:

```
0.84: castle
0.02: palace
0.01: monastery
0.01: bell_cote
0.01: church
```

Nieźle, prawda? Program stwierdził, że z prawdopodobieństwem 84% zdjęcie przedstawia zamek, z czym z pewnością zgodziłaby się większość z nas. Jednak nie zawsze będzie tak dobrze, a czasem nawet rezultat będzie całkiem bez sensu. Zachęcam do eksperymentowania: z różnymi zdjęciami i z różnymi klasyfikatorami dostępnymi w Keras!

Ciekawe, że sieć Inception-v3 możemy także douczyć rozpoznawać obrazy według naszych własnych kryteriów (od razu pomyślałem o automatycznym rozpoznawaniu znajomych: coś podobnego potrafi już np. aplikacja Zdjęcia w Windows 10). Jak to zrobić po swojemu – można przeczytać na stronach Tensorflow poświęconych *image recognition*. Co prawda tak rozbudowany kod zajmie trochę więcej niż pół strony, ale można się przy tym sporo dowiedzieć!

Zapewne niektórzy Czytelnicy czują pewien niedosyt, widząc opisy kategorii po angielsku („*castle*” zamiast „*zamek*”). Czemu więc nie przetłumaczyć w automatyczny sposób wyników z języka, w którym Czesław Miłosz wykladał, na język, w którym pisał wiersze – korzystając na przykład z Google Translate?

PS W rzeczywistości obiekt na zdjęciu... niestety nie jest zamkiem (co łatwo sprawdzić w Wikipedii), ale – nie da się ukryć – bardzo *przypomina* zamek. Ja w każdym razie dałbym się nabrać.

Odpowiednie biblioteki i API znajdziesz na stronie cloud.google.com/translate/docs/reference/libraries



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 971. W prostym odcinku miedzianego przewodnika o długości $l = 1$ m płynie prąd $I = 10$ A. Ile wynosi pęd przenoszony przez elektrony? Masa elektronu $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, a jego ładunek $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
Rozwiązanie na str. 8

F 972. Długi pręt z przewodzącego materiału w kształcie walca zakończonego półkulą ma być ładowany do wysokiego napięcia. Jaki powinien być minimalny promień krzywizny R kulistego końca tego pręta, żeby po naładowaniu go do potencjału $U = 50$ kV nie nastąpiło wyładowanie do atmosfery? Powietrze ulega przebiciu (jonizacji) w polu elektrycznym $E_0 = 3$ kV/mm.
Rozwiązanie na str. 8

Przygotował Łukasz BOŻYK

W kolejnych trzech zadaniach przez n -turniej będziemy rozumieli układ rozgrywek, w którym każda para spośród n zawodników ($n \geq 2$) rozegrała dokładnie jeden mecz i nie było remisów.

Powiemy, że zawodnik A jest *mistrzem*, jeśli dla każdego zawodnika C , z którym A przegrał, istnieje zawodnik B , który przegrał z A i wygrał z C . Innymi słowy, mistrz to zawodnik, który wygrał z każdym innym bezpośrednio lub pośrednio.

M 1594. Wykazać, że w każdym n -turnieju istnieje co najmniej jeden mistrz.
Rozwiązanie na str. 3

M 1595. a) Wykazać, że nie ma takiego n -turnieju, w którym jest dokładnie dwóch mistrzów.
b) Wykazać, że dla każdego $n \geq 3$ istnieje n -turniej, w którym jest dokładnie trzech mistrzów.
Rozwiązanie na str. 3

M 1596. Wyznaczyć wszystkie $n \geq 3$, dla których istnieje n -turniej, w którym każdy jest mistrzem.
Rozwiązanie na str. 2

Trzy spojrzenia na teorię gier

Aleksandra KOWALSKA*, Paulina SKALIK**,
Kacper WALENTYNOWICZ***

*Liceum Ogólnokształcące Sióstr
Prezentek w Rzeszowie
**I LO im. Bolesława Chrobrego
w Piotrkowie Trybunalskim
***student, Uniwersytet w Cambridge

Szczegóły na stronie
mathsbeyondlimits.eu. **Rekrutacja
na kolejny obóz rusza 1 kwietnia**
(o uczestnictwie decydują m.in. wyniki
testu).

W dniach 9–21 września 2018 r. odbyła się trzecia edycja międzynarodowego obozu **Maths Beyond Limits**. 60 uczestników z Białorusi, Belgii, Czech, Danii, Estonii, Norwegii, Polski, Rumunii, Słowacji, Szwecji, Ukrainy i Węgier wzięło udział w warsztatach matematycznych prowadzonych przez studentów i pracowników naukowych polskich i zagranicznych uczelni. Mieli oni także okazję do zaprezentowania własnych referatów oraz do uczestnictwa w ogólnorozwojowych zajęciach wieczornych. Ponadto, w czasie obozu odbyły się: mecz matematyczny, zawody Relays (oparte na konkursie Náboj), Puzzle Hunt, a także zajęcia sportowe i integracyjne.

Spojrzenie I – opisowe

Gry, którymi będziemy się zajmować, z pozoru wydają się dosyć nietypowe – nie ma w nich wygranych ani przegranych, a wszyscy gracze wykonują swoje ruchy jednocześnie. Okazuje się jednak, że nawet bardzo uproszczone gry tego rodzaju mogą przedstawiać sytuacje praktyczne – a co dopiero ich bardziej skomplikowane wersje.

Przez **grę** rozumiemy sytuację, w której istnieje pewna skończona liczba graczy i jedynym celem każdego z nich jest zmaksymalizowanie swojej **wypłaty** (wyrażonej np. w zarobionych pieniądzech, zaoszczędzonym czasie itd.). Rozgrywka polega na jednoczesnym wybraniu przez każdego gracza **strategii** (każdy gracz ma swój własny, być może zupełnie unikalny, zestaw możliwych strategii). Następnie gracze otrzymują wypłaty, których wielkość zależy tylko od strategii wybranych przez poszczególnych graczy (zależność wysokości wypłat od strategii jest znana jeszcze przed rozgrywką).

Przykładem takiej gry może być następująca uproszczona sytuacja: dwie firmy, P i Q , sprzedają ten sam produkt. Każda z nich ma do wyboru 2 strategie reklamowe: A i B . Jeśli obie zdecydują się na A , zarobią po 5 mln złotych, jeśli obie wybiorą strategię B – po 3 mln złotych. Jeśli jedna z nich wybierze strategię A , a druga B , to firma, która wybrała strategię B zarobi 7 mln złotych, podczas gdy ta druga – tylko 1 mln złotych. Możemy wytłumaczyć taki rozkład w ten sposób, że strategia B jest nieco bardziej kontrowersyjna od A – jeśli tylko jedna firma ją zastosuje, wyróżni się, zdobywając klientów. Natomiast jeśli obie ją zastosują, konsumenci poczują się przytłoczeni i nie będą skłonni skorzystać z usług żadnej firmy.

	A	B
A	(5, 5)	(1, 7)
B	(7, 1)	(3, 3)

Tabela przedstawia wypłaty graczy.
Wiersze to strategie gracza P , a kolumny
to strategie gracza Q .

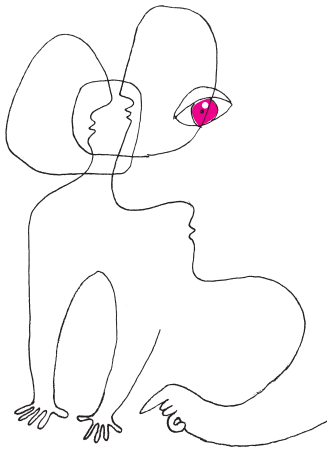
Dla odróżnienia od strategii mieszanych, ruchy, w których wszystkie środki są przeznaczane na jedną strategię, nazywamy **strategiami czystymi**.

Nie w każdej grze można zagrać tak zdefiniowaną strategią mieszaną. Dlatego zwykle przez strategię mieszaną rozumie się sytuację, w której gracz przed ruchem przyporządkowuje pewne prawdopodobieństwa zagraniam każdej czystej strategii po czym losuje, którą z nich zagrać. W takim wypadku wypłatę ze strategii mieszanej definiuje się tak jak poprzednio – jest to po prostu wartość oczekiwana wypłaty uzyskanej w losowym ruchu.

Jednak w rzeczywistości gracze zwykle nie muszą ograniczać się tylko do tych dwóch opcji. Każda z firm mogłaby przecież przeznaczyć pewną część swoich środków na realizację strategii A , zaś część na realizację strategii B . Jeśli przez $f(X, C)$ oznaczymy nieujemną część środków przeznaczoną przez gracza X na realizację strategii C (oczywiście zachodzi $f(P, A) + f(P, B) = 1$ i $f(Q, A) + f(Q, B) = 1$), to wtedy firma P dostałaby wypłatę wynoszącą

$$5f(P, A)f(Q, A) + 1f(P, A)f(Q, B) + 7f(P, B)f(Q, A) + 3f(P, B)f(Q, B).$$

Powyższe przybliży nas do sensu pojęcia **strategii mieszanej**. Dla danego gracza, mającego możliwość zagrania jednej z d strategii, strategią mieszaną nazywamy ciąg liczb x_1, \dots, x_d , z których każda wyraża, jaką część swoich środków ten gracz przeznaczą na zagranie odpowiedniej strategii. Liczby te muszą być nieujemne i sumować się do 1 (w sumie należy przeznaczyć całość środków). W takim przypadku, jeśli w_i oznacza, jak dużą wypłatę otrzyma nasz gracz, zużywając wszystkie swoje środki na i -tą strategię (przyjmujemy, że pozostali gracze już wybrali strategię), to jego wypłata w przypadku zagrania strategii mieszanej wyniesie: $\sum_{i=1}^d x_i w_i$.



W rzeczywistości firmy mają swoje strategie i raczej nie zdarza się, by co chwilę zmieniały długoletni plan działania. Po wielu analizach i eksperymentach dochodzą do wniosku, że ich system jest optymalny przy aktualnej koniunkturze na rynku i raczej nie warto odstępować od pierwotnych założeń. Spojrzenie matematyczne pozwoli nam zrozumieć, dlaczego tak jest.

Spojrzenie II – matematyczne

Równowagą Nasha nazwiemy takie przyporządkowanie strategii (być może mieszanych) każdemu graczowi, że żaden z nich, jeśli jako jedyny zmieni swoją strategię, nie zwiększy swojej wypłaty. Okazuje się, że potrafimy udowodnić istnienie takiej równowagi we wspomnianych grach.

Twierdzenie (o istnieniu równowagi Nasha). W każdej grze, w której liczba graczy jest skończona i każdy gracz ma skończoną liczbę czystych strategii, istnieje równowaga Nasha (być może złożona ze strategii mieszanych).

Dowód. Niech n oznacza liczbę graczy, d_1, \dots, d_n liczbę czystych strategii dla poszczególnych graczy oraz $D = \sum_{i=1}^n d_i$.

Krok 1. Przekształćmy twierdzenie do postaci geometrycznej. Możliwe ruchy k -tego gracza można przedstawić jako zbiór takich punktów przestrzeni d_k -wymiarowej, że: $x_1, \dots, x_{d_k} \geq 0$ oraz $\sum_{i=1}^{d_k} x_i = 1$. Oznaczmy otrzymaną figurę przez F_k .

Połączmy figury F_1, \dots, F_n w jedną, aby móc geometrycznie przedstawiać kombinacje ruchów wszystkich graczy. Potrzebujemy do tego przestrzeni D -wymiarowej. Punkt o współrzędnych x_1, \dots, x_D należy odczytywać po kolei – tj. pierwszych d_1 współrzędnych mówi, jaką strategię mieszaną wybrał pierwszy z graczy, kolejne d_2 współrzędnych mówi o decyzji drugiego gracza itd. W skrócie będziemy zapisywać s_1, s_2, \dots, s_n , gdzie s_k oznacza strategię (być może mieszaną) gracza k . Oznaczmy figurę złożoną z takich punktów przez F .

Zastanówmy się, czym w tym nowym wyobrażeniu jest poszukiwany punkt równowagi. Zdefiniujemy funkcję zmiany zdania h : jeśli $X \in F$ odpowiada wyborowi przez graczy strategii mieszanych s_1, \dots, s_n , to $h(X)$ jest zbiorem kombinacji takich strategii mieszanych s'_1, \dots, s'_n , że dla gracza k optymalną reakcją (tj. maksymalizującą jego wypłatę) na wybranie przez innych graczy strategii $s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n$ jest zagranie strategii s'_k . Z tej definicji funkcji h wynika, że punkt $X \in F$ jest punktem równowagi Nasha wtedy, gdy $X \in h(X)$. Dla funkcji, której wartościami są podzbiory dziedziny, warunek ten jest definicją punktu stałego.

Krok 2. Zbadajmy własności figury F . Okazuje się, że jest ona ograniczona, wypukła i domknięta. Udowodnienie tych trzech własności pozostawiamy Czytelnikowi Dociekliwemu. Podpowiemy, że wystarczy udowodnić te własności dla składników figury F – tj. figur F_1, \dots, F_n , obrazujących możliwe strategie mieszane poszczególnych graczy.

Krok 3. Przypomnijmy twierdzenie Brouwera, mówiące, że każda funkcja ciągła $g : S \rightarrow S$, gdzie S jest figurą wypukłą i zwartą (tj. ograniczoną i domkniętą) ma punkt stały. Chciałoby się zastosować to twierdzenie do funkcji h ; niestety, nie jest to możliwe, gdyż jej wartościami są podzbiory (nie elementy) dziedziny. Szczęśliwie, dla takich wyszukanych funkcji istnieje odpowiednik twierdzenia Brouwera – jest to *twierdzenie Kakutaniego*, a jego założenia (których tu nie przytoczymy) są w naszym przypadku spełnione. Zastosowanie tego twierdzenia kończy dowód – wspomnieliśmy już, że szukany punkt stały jest punktem równowagi Nasha w rozpatrywanej grze. \square

Zachęcamy Czytelnika do spróbowania swoich sił z następującymi zadaniami:

1. Znaleźć równowagi Nasha dla gry wspomnianej na początku artykułu.
2. Rozważyć, czy zawsze istnieje równowaga Nasha składająca się wyłącznie ze strategii czystych.

W przytoczonym przykładzie z firmami P (pierwszy gracz) i Q (drugi): punkt $(1, 0, 0, 1)$ oznacza, że P wybrał czystą strategię A, a Q wybrał B – czyli pierwszy uzyskał wypłatę 1, a drugi 7. Gracz Q nie zmieni swojej strategii przy założeniu, że P nie dokona zmiany. Natomiast P zmieni swoją strategię na B – dlatego $h(1, 0, 0, 1) = \{(0, 1, 0, 1)\}$.

Rozważmy $h\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Każdy z graczy zainwestował połowę środków w strategię A i połowę w B. Wypłata każdego z nich wynosi:

$$5 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 4.$$

Jeżeli P założy, że Q nie zmieni strategii, to zmieni swoją decyzję na strategię czystą B, sądząc, że jego wypłata wyniesie $5 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 5$. Gracz Q myśli w ten sam sposób, stąd

$$h\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \{(0, 1, 0, 1)\}.$$

W rezultacie wypłata żadnego z nich nie wzrośnie.



Już w drugi weekend kwietnia 2019 roku odbędzie się Ogólnopolska Matematyczna Konferencja Studentów, w skrócie „OMatKo!!!”, organizowana kolektywnie przez koła naukowe działające przy Wydziale Matematyki Politechniki Wrocławskiej. „OMatKo!!!” zbierze w jednym miejscu studentów i doktorantów kierunków matematycznych oraz pokrewnych z całej Polski. Celem konferencji jest szerzenie wiedzy z zakresu szeroko pojętej matematyki i jej zastosowań w nieszablonowej formie „studenci – studentom”. Referaty podzielone są na dwa niezależne bloki tematyczne: matematykę teoretyczną i matematykę stosowaną, co umożliwia uczestnikom wybór prelekcji dopasowanych do ich zainteresowań, a także daje szansę na prezentację wyników swoich badań większej liczbie studentów. Nadchodząca edycja przyniesie również zmiany, które dadzą możliwość prezentacji także kołom naukowym. Studenci działający w tych organizacjach będą mogli zaprezentować się oraz opowiedzieć o badaniach i projektach, jakie wspólnie realizują. Mamy nadzieję, że będzie to okazją do pogłębienia lub nawiązania współpracy między uczelniami.

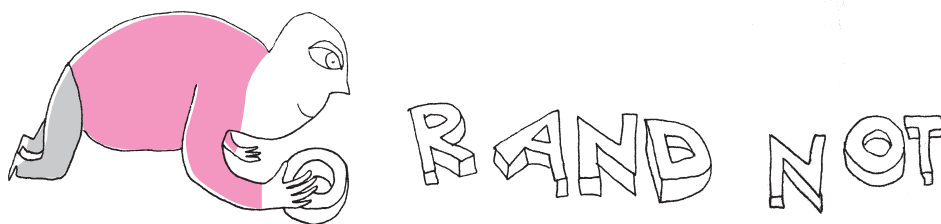
miejsce: Politechnika Wroclawska
termin: 12-14 kwietnia 2019
szczegóły: im.pwr.edu.pl/~omatko
Serdecznie zapraszamy!

Spojrzenie III – praktyczne

Noblista w dziedzinie ekonomii, Robert Aumann powiedział, że „*Wszystko, co się dzieje na świecie, jest grą. Od ewolucji po wojny*”. Każda podjęta przez nas decyzja czyni nas graczem: wybór firmy, której produkt kupimy, przejście przez pasy na czerwonym lub zielonym świetle lub nawet wybór sposobu i towarzystwa do spędzenia wolnego czasu.

Dobrym tego przykładem jest działanie kartelu naftowego – OPEC. Członkowie OPEC stają przed dylematem: ograniczyć wydobycie ropy lub wydobywać jej tyle, ile są w stanie. Najlepszą opcją dla wszystkich jest ograniczenie nieco wydobycia, aby ceny wzrosły. W wyniku tego wszyscy członkowie zwiększą swoje zyski w porównaniu do nieograniczonego wydobycia i sprzedawania ropy za niższą cenę. Jednak z drugiej strony, każdemu członkowi opłaca się sprzedawać jak najwięcej swoich zapasów ropy naftowej, zyskując na dodatkowej sprzedaży. W takim razie: czy zmniejszyć wydobycie, trzymając się ustaleń, czy też tego nie robić? Odejście od współpracy zawsze wydaje się lepszą opcją, ponieważ wtedy gracz, który odstąpił sprzedaje więcej ropy po tej samej cenie. Z drugiej jednak strony, jeśli większość członków wybierze tę opcję, ceny spadną i finalnie wszyscy członkowie kartelu zarobią mniej, niż w przypadku trzymania się ograniczeń przez wszystkich.

Kolejnym przykładem gry, w której gracze postawili na indywidualne korzyści zamiast współpracy, jest zimna wojna. Podczas niej NATO i Układ Warszawski miały do wyboru zbrojenie się lub zaprzestanie tego. Z punktu widzenia każdej ze stron, zaprzestanie zbrojenia, podczas gdy przeciwnik nadal się zbroi, doprowadziłoby do militarnej niższości i możliwej zagłady. Odwrotnie, zbrojenie się, podczas gdy przeciwnik tego nie robił, dawało militarną przewagę. Jeśli obie strony ciągle by się zbroiły, obie ponosiłyby wysokie koszty produkcji i utrzymania arsenału nuklearnego – z drugiej strony ze względu na brak znaczącej przewagi militarnej nie powinny się atakować. Gdyby obie strony zdecydowały się rozbroić, nie byłoby takich kosztów. Na tym polega paradoksalność równowagi Nasha – chociaż obie strony ekonomicznie najlepiej wychodzą na rozwiązaniu pokojowym, to jednak najlepszym dla nich wyborem jest zbrojenie się, właśnie tak, jak miało to miejsce podczas zimnej wojny. Obie strony wkładały ogromne pieniądze w badania wojskowe, budowę i utrzymanie arsenału przez 30 lat, aż do momentu, kiedy gospodarka Związku Radzieckiego była już zbyt niewydolna, aby kontynuować ten proces.



Odpowiedź na pytanie z artykułu o protokole Yao
Jak zamienić każdą funkcję boolowską na obwód logiczny?

Zauważmy najpierw, że każdą „wieloargumentową” funkcję AND można zapisać w postaci złożenia dwuargumentowej funkcji AND, podobnie z „wieloargumentową” funkcją OR (wynika to w jasny sposób z łączności koniunkcji i alternatywy). Dalej, zwróćmy uwagę, że każda funkcja binarna jest zdefiniowana przez zbiór argumentów, dla których przyjmuje wartość 1. Jeśli ten zbiór jest jednoelementowy, to nie ma problemu. Rzeczywiście, jeśli f przyjmuje wartość 1 tylko dla na przykład $(1, 0, 1)$, to szukany obwód logiczny ma postać $\text{AND}(x_1, \text{NOT}(x_2), x_3)$ (co prawda AND jest tu wieloargumentowy, ale już wiemy, że możemy go przepisać jako złożenie AND-ów dwuargumentowych). Jeśli natomiast wspomniany zbiór argumentów ma więcej niż jeden element, to możemy go „rozbić” na zbiory jednoelementowe przy użyciu wieloargumentowej funkcji OR. W ten sposób trójargumentowa funkcja, która przyjmuje wartość 1 tylko wtedy, gdy suma argumentów wynosi 2, ma obwód logiczny postaci

$$\text{OR}\left(\text{AND}(\text{NOT}(x_1), x_2, x_3), \text{AND}(x_1, \text{NOT}(x_2), x_3), \text{AND}(x_1, x_2, \text{NOT}(x_3))\right).$$

Informatyczny kącik olimpijski (125):

Liczby prawie pół-pierwsze

Tym razem omówimy zadanie *Liczby prawie pół-pierwsze*, które pojawiło się na Sobotnim Kole Naukowym (25.11.2017) organizowanym przez Stowarzyszenie Talent w III Liceum Ogólnokształcącym w Gdyni.

Liczby prawie pół-pierwsze: Liczbę p nazywamy prawie pół-pierwszą, jeśli jest iloczynem dwóch liczb pierwszych q_1, q_2 , gdzie $2 \leq q_1, q_2 \leq 10^6$. Liczby $14 = 2 \cdot 7$ i $49 = 7 \cdot 7$ są prawie pół-pierwsze. Natomiast liczby $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ i $2\,000\,000\,014 = 2 \cdot 1\,000\,000\,007$ nie są prawie pół-pierwsze. Dane są dwie liczby całkowite a i b ($2 \leq a \leq b \leq 10^{12}$). Oblicz, ile jest liczb prawie pół-pierwszych na przedziale $[a, b]$.

Rozwiązanie $O((b-a) \cdot \sqrt{b})$

Pierwszy pomysł, który nasuwa się po przeczytaniu treści, polega na przejrzaniu wszystkich liczb całkowitych z przedziału $[a, b]$ i zliczeniu tych, które są prawie pół-pierwsze. Liczba prawie pół-pierwsza zawiera dokładnie dwie liczby pierwsze nie większe niż 10^6 w rozkładzie na czynniki pierwsze. Rozkład na czynniki pierwsze liczby całkowitej x możemy znaleźć w czasie $O(\sqrt{x})$ (przełamyamy potencjalne dzielniki pierwsze z przedziału $[2, \lceil \sqrt{x} \rceil]$). Rozwiązanie działa w czasie $O((b-a) \cdot \sqrt{b})$.

Rozwiązanie $O(b \cdot \log(\log(b)))$

W tym podejściu, podobnie jak wcześniej, dla każdej liczby całkowitej z przedziału $[a, b]$ sprawdzimy, czy jest ona prawie pół-pierwsza.

Zacznijmy od stworzenia takiej tablicy S , że $S[i]$ dla każdego $i \in [2, b]$ oznacza najmniejszy dzielnik pierwszy i . W tym celu wystarczy nieznacznie zmodyfikować sito Eratostenesa. Zamiast zapamiętywać informację, czy liczba jest pierwsza czy złożona, będziemy pamiętali jej najmniejszy dzielnik, będący liczbą pierwszą. Strukturę budujemy w czasie $O(b \cdot \log(\log(b)))$. Wówczas w czasie stałym możemy stwierdzić, że:

- p jest pierwsze, jeśli: $S[p] = p$,
- p jest prawie pół-pierwsze, jeśli: $S[p] \neq p \wedge S[\frac{p}{S[p]}] = \frac{p}{S[p]} \wedge S[p] \leq 10^6$.

Wtedy jej dzielnikami pierwszymi są $S[p]$ i $\frac{p}{S[p]}$.

Po wygenerowaniu S zliczamy liczby prawie pół-pierwsze z przedziału $[a, b]$. Rozwiązanie działa w czasie $O(b \cdot \log(\log(b)))$.

Rozwiązanie $O((b-a) \cdot \log(\log(b-a) + \sqrt{b}))$

Niech $M = 10^6$ oraz $T[i]$ dla każdego $i \in [2, M]$ wskazuje, czy i jest pierwsze ($T[i] = 1$), czy złożone ($T[i] = 0$). Dla pozostałych i niech $T[i] = 0$. T obliczamy za pomocą sita Eratostenesa. Dodatkowo stwórzmy taką tablicę S' , że $S'[i]$ dla każdego $i \in [a, b]$ będzie oznaczało najmniejszy dzielnik pierwszy i . Konstrukcja S' jest następująca. Najpierw przypisujemy $S'[i] = i$ dla każdego $i \in [a, b]$. Następnie dla każdej liczby pierwszej $q \in [2, \lceil \sqrt{b} \rceil]$ przeglądamy jej wielokrotności w przedziale $[a, b]$, czyli liczby $\lceil \frac{a}{q} \rceil \cdot q, (\lceil \frac{a}{q} \rceil + 1) \cdot q, \dots, \lfloor \frac{b}{q} \rfloor \cdot q$, i aktualizujemy ich najmniejszy dzielnik pierwszy. Zauważmy, że wielokrotności 2 w przedziale $[a, b]$ jest co najwyżej $\frac{b-a}{2} + 1$, wielokrotności 3 jest co najwyżej

$\frac{b-a}{3} + 1$ itd. Zatem konstrukcja struktury zajmuje $O((b-a) \cdot \log(\log(b-a)) + \sqrt{b})$ operacji.

Na koniec zliczamy liczby prawie pół-pierwsze z przedziału $[a, b]$, czyli takie $p \in [a, b]$, że:

$$S'[p] \neq p \wedge S'[p] \leq M \wedge T\left[\frac{p}{S'[p]}\right] = 1.$$

Rozwiązanie $O(M \cdot \log(\log(M)))$

Niech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie taką funkcją, że $f(x)$ oznacza liczbę liczb prawie pół-pierwszych na przedziale $[1, x]$. Wówczas liczb prawie pół-pierwszych na przedziale $[a, b]$ jest $f(b) - f(a-1)$.

Opiszemy teraz, jak policzyć $f(x)$ dla $x \in [1, 10^{12}]$. Zacznijmy od wygenerowania ciągu kolejnych liczb pierwszych nie większych niż $M = 10^6$. Oznaczmy ten ciąg jako $P = (p_1, p_2, \dots, p_k)$. Początkowymi wyrazami ciągu są: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ itd. Liczby pierwsze możemy znaleźć za pomocą sita Eratostenesa. Zauważmy, że tylko elementy ciągu P mogą występować w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb prawie pół-pierwszych. Zatem:

$$f(x) = |\{(i, j) : p_i p_j \leq x \wedge 1 \leq i \leq j \leq k\}|.$$

Wartość $f(x)$ możemy policzyć naiwnie, przeglądając wszystkie pary elementów ciągu P . Niestety takie rozwiązanie jest wolne, ponieważ przegląda się $O(k^2)$ par elementów, gdzie $k = 78\,498$ (tyle jest liczb pierwszych nie większych niż 10^6).

Na szczęście możemy to przyspieszyć. Niektóre pary będziemy zliczali „hurtowo”. Dokładniej, dla każdego $i \in [1, k]$ wyznaczmy takie największe $j_i \in [i, k]$, że $p_i p_{j_i} \leq x$. Jeśli takie j_i nie istnieje, to niech $j_i = i - 1$. Wówczas liczby postaci $p_i p_i, p_i p_{i+1}, \dots, p_i p_{j_i}$ są prawie pół-pierwsze. Zaś wszystkich par jest $\sum_{i \in [1, k]} (j_i - i + 1)$. Algorytm przebiega następująco. Najpierw naiwnie znajdujemy j_1 , przeglądając przedział indeksów $[1, k]$. Następnie kolejno wyznaczamy wartości j_2, j_3, \dots, j_k .

Obserwacja: Dla każdego $i \in [2, k]$ zachodzi $j_i \leq j_{i-1}$.

Dowód: Wiemy, że $p_i > p_{i-1}$ oraz $\forall l > j_{i-1} p_{i-1} p_l > x$. Stąd $\forall l > j_{i-1} p_i p_l > x$. Zatem $j_i \leq j_{i-1}$.

Na mocy powyższej obserwacji, szukanie wartości j_i możemy rozpocząć od j_{i-1} i zmniejszać ją dopóki $p_i p_{j_i} > x$. W ten sposób wykonamy $O(k)$ operacji podczas obliczania $f(x)$. Całe rozwiązanie działa w czasie $O(M \cdot \log(\log(M)))$.

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Kto z kim i kiedy?

Kiedy ludzie gatunku *Homo sapiens* migrowali z południowej Afryki, to podążając na północ, spotykali innych homininów, wcześniejszych przybyszów z Afryki osiedlonych na terenach dzisiejszej Europy i Azji. Czy były to także spotkania intymne? Na to pytanie odpowiedź uzyskuje się, badając różnorodność genetyczną współczesnych populacji, albo porównując współczesne sekwencje DNA z sekwencjami przypuszczalnych przodków. Ze względu na okres trwałości DNA nie można oczekiwać, że zbadany zostanie np. genom gatunku *Homo erectus*, który dawno zniknął z powierzchni Ziemi. Trwałość DNA szacuje się różnie, bo w różnych warunkach spoczywały odkrywane szczątki. Większość badaczy podaje granicę 100 tysięcy lat. Do niedawna jedynym oznaczonym archaicznym genomem był neandertalski (30 tys. lat temu), a jak trudne jest badanie podobnie starych szczątków, opowiada najwspanialszy badacz a-DNA (archaicznego DNA), Svante Pääbo. W każdej badanej przez zespół Pääbo próbie (kości) DNA neandertalski stanowił nieznaczną frakcję, toteż końcowy wynik analizy zależał od wirtuozerii badacza, a także wyrafinowania metod laboratoryjnych. Zespół Pääbo uczestniczył również w analizie szczątków człowieka z altajskiej Denisowej Jaskini, w której obok kości neandertalskich odkryto szczątki nowego dla nauki gatunku *Homo denisovan*. Powiedzieć szczątki to za dużo: pierwszej analizie genomu dokonano z małej kostki dłoni. Porównania trzech preparatów sugerują raczej, że nosiciele trzech genomów należeli do tego samego gatunku, *Homo sapiens*, ponieważ dane genetyczne wskazują na ich krzyżowanie się. Tu znalazła się ta dziurka do podglądania archaicznej sypialni!

Z badań genetycznych wysnuto wniosek, że neandertalczycy i ludzie współcześni co najmniej trzy razy krzyżowali się w ciągu ostatnich 100 tysięcy lat. Krzyżowali się też z denisowianami. W Denisowej Jaskini zebrano 135 tysięcy drobniutkich szczątków kostnych (wymiary milimetrowe), z których 95% nie nadawało się do badań taksonomicznych. Z powodu wieku próbek ustalenia dla tej epoki stwarzają paleontologom trudności. I tu z pomocą przyszła rozwijana od niedawna metoda badawcza, nazwana zooarcheologią spektrometrii masowej (ZooMS). Użyto jej do analizy peptydów kolagenu, białka trwałego w archeologicznej skali czasu.

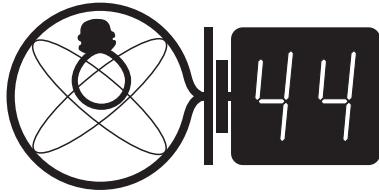
Kolagen jest głównym składnikiem tkanki łącznej, ścięgien, skóry, kości – u ssaków stanowi 25–35% białek ciała. Dziś rozróżnia się 28 typów kolagenów, człowiek ma głównie kolagen typu I. W tkankach występuje jako helisa trzech łańcuchów, złożonych w różnych proporcjach tylko z kilku (3–5) różnych aminokwasów, głównie proliny, hydroksyproliny i glicyny. Między różnymi gatunkami zwierząt występują konkretne różnice w budowie i składzie kolagenu – dzięki czemu znajdowane w wykopaliskach szczątki kości (zawierające określony typ kolagenu) można przypisać różnym zwierzętom. A może także różnym gatunkom ludzi?

Badacze, którzy postanowili odpowiedzieć na to pytanie, wybrali 700–800 próbek kosteczek z Denisowej Jaskini. Przeanalizowali je metodą ZooMS pod kątem rodzaju kolagenu. Znaleźli dowody na przebywanie w jaskini hien, mamutów, reniferów, włochatych nosorożców, ale... nie znaleźli śladów kolagenu hominidów. Po roku uporczywych analiz znaleziono jedną taką próbkę, z której Svante Pääbo oznaczył mitochondrialny DNA. Należała do dziecka, którego matką była neandertalka. Dalsze badania szczątków z Denisowej Jaskini – i w nich DNA jądrowego – doprowadziły do sensacyjnego znaleziska: jedna z próbek zawierała DNA w połowie neandertalski, w połowie denisowiański, co oznacza, że znaleziono kość osobnika z pierwszego pokolenia krzyżówek. (matka neandertalka, ojciec denisowianin). Z dalszych analiz wynikało, że była to 13-letnia dziewczynka.

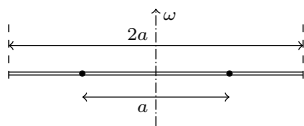
Autorzy pracy piszą: „przez dziesiątki tysięcy lat ten drobny okruch jej ciała pozostawał nietknięty w osadach i tylko nowoczesna technika umożliwiła jego charakterystykę i tchnęła w niego nowe życie”. A morał dla adeptów sztuki odkrywania archaicznego DNA brzmi: czasem na osiągnięcie sukcesu trzeba pracować kilkanaście lat, aby odnaleźć ten mikroskopijny fragment, który nazywamy potem sensacyjnym odkryciem. A można go nie odnaleźć – to jest jak igła w stogu siana.

Skrót regulaminu

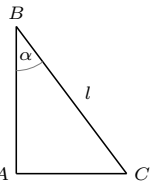
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



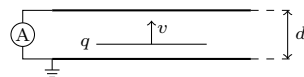
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2019



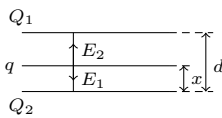
Rys. 1



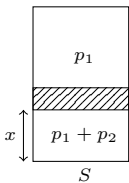
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

666. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że ładunek płytki jest dodatni. Rozważmy sytuację, gdy płytkę naładowaną ładunkiem $q > 0$ jest nieruchoma i znajduje się w odległości x od jednej z okładek (rys. 4). Okładki kondensatora są zwarte drutem i uziemione, zatem napięcie między nimi wynosi zero. Wartości natężeń pola elektrycznego w obszarach zaznaczonych na rysunku wynoszą:

$$E_1 = (q - Q_2 + Q_1)/(2\epsilon_0 S), \quad E_2 = (q + Q_2 - Q_1)/(2\epsilon_0 S),$$

gdzie $Q_1 < 0$ i $Q_2 < 0$ to ładunki na okładkach kondensatora, S jest powierzchnią płytki. Spełniony jest związek $E_1 x = E_2 (d - x)$. Ponieważ potencjał okładek kondensatora wynosi zero, na zewnątrz kondensatora nie ma pola elektrycznego, stąd $q + Q_1 + Q_2 = 0$. Eliminując z powyższych równań E_1 , E_2 i Q_2 , otrzymujemy związek $qx = -Q_1 d$. Przesunięcie płytki o Δx powoduje zmianę ładunku Q_1 o $|\Delta Q| = q \Delta x / d$, czyli przepływ prądu między okładkami kondensatora o natężeniu

$$I = |\Delta Q| / \Delta t = qv / d.$$

Zadania z fizyki nr 674, 675

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

674. Nieważki poziomy pręt o długości $2a$ może obracać się swobodnie wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek (rys. 1). Na pręt nawleczone są dwie jednakowe kulki, które mogą przemieszczać się wzdłuż pręta bez tarcia i odbijać się sprężysto od odbojników na jego końcach. Na początku kulki umocowane są w odległościach $a/2$ od osi obrotu. Pręt rozkręcono do prędkości kątowej ω_0 , po czym kulki jednocześnie oswobodzono. Po jakich torach będą poruszać się kulki? Po jakim czasie pręt wykona pełny obrót? Jaka jest zależność prędkości kątowej pręta od czasu? Rozmiary kulek są dużo mniejsze od długości pręta.

675. Trzy jednakowe naładowane kulki połączone są nieprzewodzącymi niemi, które tworzą trójkąt prostokątny ABC (rys. 2). Kąt ABC jest równy α , bok BC ma długość l . Z jakimi przyspieszeniami zaczną poruszać się kulki po przecięciu nici BC ? Masa kulki jest równa m , ładunek każdej z nich wynosi q . Sił ciężkości nie uwzględniamy.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2018

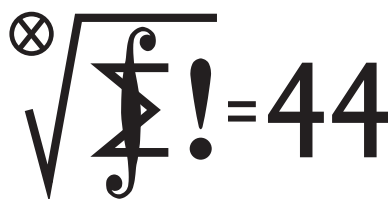
Przypominamy treść zadań:

666. Między okładkami kondensatora płaskiego porusza się ze stałą prędkością v cienka płytkę naładowana równomiernie ładunkiem q . Znaleźć natężenie prądu w obwodzie przedstawionym na rysunku. Odległość między okładkami wynosi d , efekty brzegowe można zaniedbać.

667. W ustawionym pionowo zamkniętym z dwóch stron cylindrze znajduje się mieszanina dwóch gazów doskonałych o masach molowych μ_1 , μ_2 i masach odpowiednio m_1 , m_2 . Wewnątrz cylindra znajduje się tłok o masie M , który jest przepuszczalny tylko dla gazu pierwszego. Początkowo tłok znajduje się przy górnej podstawie cylindra, a następnie zostaje puszczony swobodnie. Ile moli gazu pierwszego znajduje się będzie po ustaleniu się równowagi powyżej tłoka? Temperatura układu jest stała i wynosi T . Tarcie tłoka o ścianki można zaniedbać. Wysokość cylindra (nie uwzględniając grubości tłoka) jest równa l .

667. W stanie równowagi tyle samo cząsteczek gazu pierwszego przenika przez tłok w obie strony. Ponieważ temperatura T w obu częściach cylindra jest taka sama, liczba moli gazu pierwszego w jednostce objętości po obu stronach tłoka musi być jednakowa, zatem jednakowe jest też ciśnienie p_1 gazu pierwszego po obu stronach tłoka. Niech p_2 oznacza ciśnienie gazu nieprzenikającego przez tłok w dolnej części cylindra (rys. 5). Warunek równowagi tłoka ma postać $Mg = p_2 S$, gdzie S jest polem powierzchni tłoka. Korzystając z równania Clapeyrona dla gazu drugiego, otrzymujemy wyrażenie na odległość x tłoka od dolnej podstawy cylindra: $x = m_2 RT / (\mu_2 Mg)$. Oznaczmy liczbę moli gazu pierwszego w górnej części cylindra przez n_1 , a w dolnej przez n_2 . Zachodzi związek $n_1 + n_2 = m_1 / \mu_1$. Spełnione są też równania Clapeyrona: $p_1 (l - x) S = n_1 RT$ oraz $p_1 x S = n_2 RT$. Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy szukaną liczbę moli gazu w górnej części naczynia:

$$n_1 = \frac{m_1}{\mu_1 l} \left(l - \frac{m_2 RT}{\mu_2 Mg} \right).$$



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2019

Zadania z matematyki nr 777, 778

Redaguje Marcin E. KUCZMA

777. W trójkącie ABC bok BC jest najdłuższy. Okrąg wpisany jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach K , L , M . Na prostej KM leży taki punkt P , że odcinki PC oraz KL są równoległe. Dowieść, że prosta AP przechodzi przez środek odcinka KL .

778. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych x, y, z spełniające równanie

$$(x + y + z)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

wraz z warunkiem $\text{NWD}(x, y, z) = 1$.

Zadanie 778 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2018

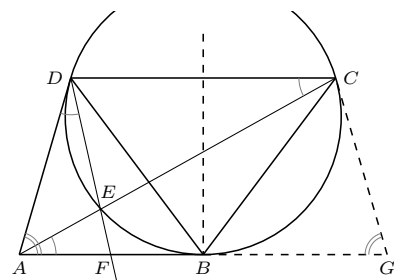
Przypominamy treść zadań:

769. W trapezie $ABCD$ o równoległych podstawach AB i CD zachodzą równości: $|AB| = |AD|$, $|BD| = |BC|$. Okrąg opisany na trójkącie BCD przecina przekątną AC w punkcie E . Dowieść, że prosta DE połowi bok AB .

770. Dla dodatnich liczb całkowitych a_1, \dots, a_m oraz n rozważamy sumę

$$K_n(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{n}\right)^{a_i}.$$

Dla ustalonych liczb całkowitych $m, n \geq 2$ wyznaczyc kres górny zbioru tych wartości wyrażenia $K_n(a_1, \dots, a_m)$, które są mniejsze od 1.



769. Trójkąt BCD jest równoramienny; symetralna boku CD jest osią symetrii tego trójkąta, więc i okręgu na nim opisanego; prosta AB (równoległa do CD) jest styczna do tego okręgu. Skoro $|AB| = |AD|$, zatem prosta AD też jest styczna. Wynikają stąd równości kątów

$$|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle CAB|.$$

Prosta DE przecina AB w punkcie, który nazwiemy F . Niech G będzie punktem symetrycznym do A względem B . Widzimy trapez równoramienny $AGCD$, z równymi kątami: $|\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle AGC|$. Stąd i z wcześniejszej równości (przepisanej jako $|\sphericalangle ADF| = |\sphericalangle GAC|$) wynika podobieństwo trójkątów DAF i AGC . W konsekwencji

$$\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|DA|}{|AF|} = \frac{|AG|}{|GC|} = \frac{|AG|}{|GB|} = 2,$$

co pokazuje, że F jest środkiem odcinka AB .

770. Nie tracimy ogólności, rozważając jedynie niemalejące ciągi (a_1, \dots, a_m) , dzięki czemu wyrazy sumy

$$(1) \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{a_1} + \left(\frac{1}{n}\right)^{a_2} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^{a_m}$$

są uporządkowane nierosnąco. Niech q oraz r oznaczają iloraz i resztę z dzielenia m przez $n-1$. Wykażemy, że ciąg

$$(2) \quad \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n-1}, \underbrace{(2, \dots, 2)}_{n-1}, \dots, \underbrace{(q, \dots, q)}_{n-1}, \underbrace{(q+1, \dots, q+1)}_r =: (b_1, \dots, b_m)$$

jest tym, dla którego suma (1) – pozostając mniejszą od 1 – jest maksymalna. Wynosi ona

$$(3) \quad 1 - \frac{1}{n^q} + \frac{r}{n^{q+1}}.$$

Niech więc $a_1 \leq \dots \leq a_m$ będzie dowolnym ciągiem, dla którego wartość sumy (1) jest mniejsza od 1. Przypuśćmy, że pewien wyraz $(1/n)^k$, z wykładnikiem $k \geq 2$, powtarza się co najmniej n razy. Przyjmijmy, że k jest największym takim numerem. Wykreślamy n składników równych $(1/n)^k$ i zastępujemy je pojedynczym wyrazem $(1/n)^{k-1}$.

Wartość sumy nie uległa zmianie, ale ciąg skrócił się o $n-1$ wyrazów. Dopisujemy więc na końcu $n-1$ ułamek, z wykładnikami tak dużymi, by wartość sumy (1) (która się powiększa!) pozostała mniejsza od 1 – bacząc jedynie, by żaden wyraz (z wykładnikiem $> k$) nie powtórzył się n -krotnie.

Powtarzamy tę modyfikację tak długo, dopóki istnieje blok jednakowych składników $(1/n)^j$, długości co najmniej n , z jakimkolwiek wykładnikiem $j \geq 2$. Mógłby ewentualnie pozostać taki blok dla wykładnika $j = 1$, czyli złożony ze składników równych $1/n$ – ale to też nie jest możliwe, skoro przez cały czas była prowadzona kontrola, by suma nie osiągnęła wartości 1. Stąd wynika, że w dalszym ciągu dowodu można ograniczać uwagę do ciągów (a_1, \dots, a_m) o własnościach:

$$(4) \quad a_1 \leq \dots \leq a_m; \text{ żadna liczba nie powtarza się } n\text{-krotnie.}$$

Ciąg (2) spełnia te warunki. Dla wykazania jego optymalności weźmy pod uwagę dowolny inny ciąg (a_1, \dots, a_m) , także spełniający powyższe warunki, i oznaczmy przez ℓ najwcześniejszy numer, dla którego $a_\ell \neq b_\ell$. Zatem odcinki $(a_1, \dots, a_{\ell-1})$, $(b_1, \dots, b_{\ell-1})$ są identyczne.

Nietrudno zauważyć, że $a_\ell > b_\ell$; w przeciwnym przypadku mielibyśmy $b_\ell > a_\ell \geq a_{\ell-1} = b_{\ell-1}$; to by oznaczało, że $b_{\ell-1} = b_\ell - 1$, $a_\ell = a_{\ell-1}$ i że w ciągu (2) $b_{\ell-1}$ jest wyrazem kończącym blok złożony z $n-1$ równych liczb. Skoro zaś $a_i = b_i$ dla $i < \ell$ oraz $a_\ell = a_{\ell-1}$, mielibyśmy w ciągu (a_i) blok złożony z n równych liczb, wbrew warunkowi (4). Tak więc $a_{\ell-1} = b_{\ell-1} \leq b_\ell < a_\ell \leq a_{\ell+1}$.

Dokonujemy kolejnej modyfikacji ciągu (a_1, \dots, a_m) , zastępując wyraz a_ℓ liczbą b_ℓ . Warunki (4) pozostają spełnione, wartość sumy (1) zwiększa się, zaś nowy ciąg pokrywa się z ciągiem (2) na odcinku (b_1, \dots, b_ℓ) . Po skończeniu wielu takich krokach dochodzimy do ciągu (b_1, \dots, b_m) . To pokazuje, że wartość sumy (1) dla wyjściowego ciągu (a_1, \dots, a_m) była mniejsza niż jej wartość dla ciągu (b_1, \dots, b_m) – czyli liczba dana wzorem (3), która wobec tego jest szukanym kresem górnym.

Prosto z nieba: Pomiary ekspansji Wszechświata

Dwadzieścia lat temu naukowcy zdali sobie sprawę, że Wszechświat nie tylko się rozszerza (to było wiadomo od pierwszej połowy XX wieku, z obserwacji Vesto Sliphera i Edwina Hubble'a), ale że proces ten przyspiesza. Za obserwacje udowadniające ekspansję Wszechświata Saul Perlmutter, Brian Schmidt i Adam Riess dostali w 2011 roku Nagrodę Nobla.

Ekspansja i rozmiar Wszechświata można powiązać poprzez stałą Hubble'a H_0 : prędkość oddalania się galaktyki v jest proporcjonalna do odległości do galaktyki d , $v = H_0 d$. Aby oszacować tempo rozszerzania się, potrzeba dokładnych pomiarów odległości, z czym – jak wiadomo – w astronomii jest zawsze trudno. Przedstawiona wyżej metoda wymaga dokładnie skalibrowanych „świec standardowych”, czyli obiektów/procesów astronomicznych o znanej jasności. Duże odległości wymagają jasnych świec standardowych, np. supernowych typu Ia (związanych z białymi karłami przekraczającymi krytyczną masę Chandrasekhara). Dokładna kalibracja oznacza natomiast zbudowanie wiarygodnej „drabiny odległości”, która używa wielu typów obiektów i metod pomiaru na „zazębiających się” odległościach, od niewielkich skal wewnątrz Galaktyki (używając metody paralaksy) poprzez gwiazdy pulsujące (np. cefeidy) aż do dużych skal, odpowiadających odległościom między galaktykami i gromadami galaktyk.



Druga metoda wykorzystuje cechy mikrofalowego promieniowania tła, wyemitowanego, gdy materia stała się po raz pierwszy w historii przezroczysta dla fotonów. Poprzez dopasowanie modelu kosmologicznego do tych obserwacji można oszacować jeden z jego parametrów, stałą Hubble'a.

Do 2017 roku mieliśmy do dyspozycji te dwie metody pomiaru stałej H_0 – niestety, obie metody dają statystycznie rozbieżne wyniki. Patową sytuację zmieniła nieco detekcja fal grawitacyjnych, wyemitowanych podczas ostatnich chwil układu podwójnego gwiazd neutronowych przez obserwatora LIGO i Virgo sygnału GW170817. Amplituda fal grawitacyjnych jest bezpośrednio związana z odległością do źródła – w przeciwieństwie do „świec standardowych”, „syreny standardowe” układów podwójnych nie wymagają drabiny odległości i kalibracji. Dobra lokalizacja źródła na niebie (wyłącznie za pomocą informacji z detektorów fal grawitacyjnych!) umożliwiła namierzenie źródła emisji elektromagnetycznej – początkowego błysku γ i późniejszej emisji kilonowej – w pobliskiej galaktyce NGC 4993, co z kolei dało pomiar jej przesunięcia ku czerwieni, czyli prędkości ucieczki galaktyki. W ten sposób uzyskaliśmy trzecią, niezależną metodę badania ekspansji Wszechświata.

Obserwatoria grawitacyjne LIGO i Virgo zaczynają właśnie trzecią kampanię obserwacyjną, O3, która potrwa rok. Przewidujemy, że przy obecnej czułości detektory będą wykrywać średnio jedno zjawisko „zapadnięcia się” układu podwójnego czarnych dziur na tydzień i średnio jedno zderzenie się układu podwójnego gwiazd neutronowych na miesiąc. Nie wszystkie te obserwacje będą połączone z emisją elektromagnetyczną, ale w przypadku części z nich na pewno da się zidentyfikować galaktyki, w których się znajdują, czyli uzyskać obserwacje podobne do GW170817 – i rozwiązać problem prawdziwej wartości stałej Hubble'a.

Michał BEJGER

Niebo w marcu

Trzeci miesiąc roku zacznie się dobrą widocznością Merkurego na niebie wieczornym. Pierwsza planeta od Słońca pod koniec lutego oddaliła się od niego na ponad 18° i dąży do koniunktacji dolnej, przez którą przejdzie w połowie marca. Początkowo Merkury, godzinę po zmierzchu, zajmie pozycję na wysokości około 6° nad zachodnią częścią widnokregu. Planeta pozostanie widoczna przez pierwszy tydzień marca, stopniowo słabnąc od $+0,1$ do $+1,8^m$. W tym samym czasie tarcza planety zwiększy średnicę z 8 do $9''$, zmniejszając przy tym fazę z 36 do 12%.

Na pożegnanie zanikający Merkury spotka się z Księżycem w fazie bardzo cienkiego sierpa. Srebrny Glob 6 marca po południu naszego czasu przejdzie przez now i już następnego dnia, dzięki korzystnemu nachyleniu ekliptyki do wieczornego widnokregu, można próbować go dostrzec zaraz po zmierzchu nisko nad zachodnim nieboskłonem. Jednak jest to zadanie dla doświadczonych obserwatorów, gdyż pół godziny po zachodzie Słońca Księżyc znajdzie się na wysokości zaledwie $1,5^\circ$ nad horyzontem, pokazując sierp w fazie 1%. Na pewno przy próbach jego odszukania

przyda się lornetka albo teleskop. Tego dnia jasność Merkurego osłabnie do $+1,8^m$ i w tym momencie raczej nie da się go dostrzec. Dobę później Księżyc będzie dużo łatwiejszy do odnalezienia. Godzinę po zmierzchu pokaże się na wysokości 7° , w fazie 4%. Wtedy planeta Merkury znajdzie się 14° na zachód od Księżyca, świecąc z jasnością $+2,3^m$ na wysokości $1,5^\circ$.

Przed minięciem Merkurego na początku miesiąca, jeszcze przed nowiem, Księżyc spotka się z dwiema planetami Układu Słonecznego: Saturnem i Wenus. W odróżnieniu od nachylenia wieczornego, na niebie porannym na przelomie zimy i wiosny ekliptyka nachylona jest niekorzystnie, stąd wszystkie przebywające blisko niej obiekty wznoszą się niezbyt wysoko ponad linię horyzontu, położone zaś blisko ekliptyki i jednocześnie blisko Słońca obiekty wschodzą tuż przed nim. Pierwszego dnia miesiąca Srebrny Glob wejdzie 2,5 godziny przed Słońcem, a na godzinę przed świtem zdąży się wzniesić na wysokość 10° , pokazując tarczę oświetloną w 24%. Niewiele ponad 3° na wschód od niego znajdzie się wianuszek gwiazd z północno-wschodniej części Strzelca, kolejne 2° dalej w tym samym kierunku – planeta Saturn, zaś jeszcze kolejne 11° dalej – planeta Wenus. Dobę później Księżyc w fazie zmniejszonej do 17% pokaże się między Saturnem a Wenus, natomiast 3 marca 10-procentowy sierp Księżyca na godzinę przed świtem dopiero zacznie wschodzić, docierając na odległość 4° na wschód od Wenus. Całą trójcę z dystansu 25° towarzysztwa dotrzyma planeta Jowisz.

Saturn z Jowiszem powoli oddalają się od Słońca, dążąc do swoich opozycji w czerwcu i lipcu, zatem ich warunki obserwacyjne w marcu powoli się poprawiają. W trakcie miesiąca jasność Jowisza urośnie od -2 do $-2,2^m$, a tarcza planety zwiększy średnicę z 36 do $40''$. Saturn w tym roku zakreśli zygzak niedaleko opisywanego już łuku gwiazd, wśród których są m.in. π , σ , $\xi 1$ i $\xi 2$ Sagittarii. Do końca marca planeta oddali się od niego na 3° , jej jasność utrzyma się na poziomie $+0,6^m$, tarcza zaś urośnie do $16''$. W przeciwieństwie do dwóch poprzednich planet warunki obserwacyjne Wenus w marcu znacznie się pogorszą, choć planeta nadal zachowa dużą odległość od Słońca (pod koniec miesiąca 35°). Jednak tutaj najbardziej ujawni się niekorzystne nachylenie ekliptyki do widnokregu i planeta już w trzeciej dekadzie miesiąca na godzinę przed świtem nie zdąży jeszcze pojawić się na nieboskłonie. Można ją zatem obserwować tylko w pierwszej połowie marca, nisko nad południowo-wschodnim horyzontem, gdzie pokaże tarczę o jasności około $-4,1^m$, średnicy $15''$ i fazie 70-kilka procent.

Księżyc po spotkaniu z Merkurym bardzo szybko poprawi swoją widoczność, wznosząc się każdej kolejnej nocy wyraźnie wyżej i przebywając nad horyzontem długo po zmierzchu, mimo wciąż niezbyt dużej fazy. Zarówno na początku miesiąca, jak i po nowiu ładnie widoczne będzie tzw. światło popielate Księżyca, czyli jego nocna część, oświetlona światłem odbitym od Ziemi. Warto tutaj pamiętać o tym, że faza Księżyca widoczna

z Ziemi i faza Ziemi widoczna z Księżyca uzupełniają się do pełni. Czyli jak dla Ziemi Księżyc jest blisko nowiu, to dla potencjalnych selenonautów w tym samym momencie Ziemia jest bliska pełni. Nasza planeta jest prawie 4-krotnie większa od swego satelity, a także odbija w przestrzeń kosmiczną dużo więcej padającego na nią światła. Stąd Ziemia na niebie księżycowym jest znacznie jaśniejsza od Księżyca na naszym niebie. Nie powinno zatem dziwić, że nocna strona Srebrnego Globu w fazie wąskiego sierpa jest bardzo jasna i łatwo widoczna gołym okiem.

W dniach 9–11 marca naturalny satelita Ziemi odwiedzi planety Uran i Mars. Pierwszego z wymienionych dni Księżyc w fazie 9% pokaże się 9° pod Uranem, 10 marca, w fazie 15%, 7° na lewo od Urana i jednocześnie 13° pod Marsem, 11 marca zaś oświetlenie księżycowej tarczy zwiększy się do 23%, a Mars znajdzie się w odległości 6° , na godzinie 2 względem niej. Obie planety zaczną miesiąc w gwiazdozbiore Barana. Uran zagości w Baranie przez następne kilka lat, natomiast Czerwona Planeta w trzeciej dekadzie marca przejdzie do sąsiedniego Byka i 29 marca minie Plejady w odległości $3,5$ stopnia. Do tego czasu dystans między planetami wzrośnie do prawie 30° . Planeta Uran zbliży się do kwietniowej koniunktacji ze Słońcem, więc będzie dobrze widoczna na ciemnym niebie tylko na początku marca, gdy około godz. 19:30 znajdzie się na wysokości 20° nad zachodnim widnokresem, świecąc z jasnością $+5,9^m$. Potem stopniowo zejdzie niżej, by pod koniec miesiąca zachodzić na początku nocy astronomicznej. Mars podda się wolniej, i na koniec miesiąca o tej samej porze znajdzie się na wysokości prawie 25° . Lecz do tego czasu jego blask osłabnie do $+1,4^m$, czyli sporo poniżej jasności nieodległego Aldebarana o podobnej barwie, zaś tarcza planety skurczy się do średnicy poniżej $5''$.

13 marca Księżyc w fazie 43% pokaże się 5° od najjaśniejszej gwiazdy Byka, po czym dobę później przejdzie przez I kwadrę na pograniczu gwiazdozbiorów Byka, Oriona i Bliźniąt. 19 marca Srebrny Glob oświetlony w 94% minie Regulusa, najjaśniejszą gwiazdę Lwa, w odległości 2° , a 21 marca o godz. 1 przejdzie przez pełnię w gwiazdozbiore Panny. 3 godziny wcześniej Słońce przekroczy równik niebieski w drodze na północ i tym samym na północnej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna wiosna. 22 marca Srebrny Glob wejdzie 7° na lewo od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny, natomiast 27 marca, dobę przez ostatnią kwadrę, minie w odległości dwóch swoich średnic planetę Jowisz. Oświetloną do połowy tarczę Księżyc zaprezentuje na tle zachodniej części gwiazdozbioru Strzelca, prawie dokładnie w miejscu, gdzie swoją pętlę rok temu kreślił Saturn. Planetę z pierścieniami Księżyc minie następnego ranka, przechodząc w podobnej odległości, jak przy Jowiszu, lecz od strony południowej.

Jeśli wszystko zostało po staremu, w nocy z 30 na 31 marca nastąpi zmiana czasu z zimowego na letni. Należy wtedy pamiętać o przesunięciu zegarów o godzinę do przodu.

Ariel MAJCHER

Błądne koło

Na początku roku światło dzienne ujrzała przygotowana w CERN-ie koncepcja nowego zderzacza cząstek elementarnych. Kołowy Zderzacz Przyszłości (ang. *Future Circular Collider*, FCC) planuje się umieścić w tunelu o stukilometrowym obwodzie.

W pierwszym etapie działania, rozpoczynającym się za mniej więcej 20 lat, maszyna miałaby zderzać elektrony z pozytonami przy energii od 91 do 395 GeV. W drugim etapie, planowanym na drugą połowę obecnego wieku, zderzacz zostałby przystosowany do wiązek protonowych i osiągnąłby energię 100 TeV, a zatem około siedmiokrotnie większą od energii, z jakimi zderzały się protony w LHC.

Po co?

Jednym z gwarantowanych wyników naukowych nowego zderzacza będzie lepsze poznanie własności bozonu Higgsa. Wielkim sukcesem programu LHC było odkrycie tej cząstki. Ciągłe też badane są własności oddziaływania bozonu Higgsa z innymi cząstkami, ale dokładność wyznaczenia odpowiednich parametrów obarczona jest dużymi niepewnościami. Tymczasem istnienie nowych cząstek i nowych oddziaływań może się najpierw przejawiać pośrednio – w małych odstępstwach od przewidywań Modelu Standardowego cząstek elementarnych. Dlatego tak ważne jest możliwe dokładne poznanie i zmierzenie prawdopodobieństw różnych procesów, w których udział bierze bozon Higgsa.

Niestety, pozostałe argumenty, jakich CERN używa, odwołując się do opinii publicznej, są mniej subtelne od tych, którymi producenci proszków do prania przekonują nas w telewizyjnych reklamach do zakupu ich produktów.

Wspomina się o badaniu ciemnej materii. Nie ma gwarancji, że ciemną materię tworzą grawitacyjnie związane nowe cząstki elementarne, choć są bardzo dobre powody, by tak przypuszczać (pisałem o tym w Δ_{16}^8). Nawet jeśli tak miałyby być, trudno mieć absolutną pewność, że są to słabo oddziałujące cząstki o masach pozwalających na wytworzenie tych cząstek w nowym zderzaczu. Choćby pobieżny przegląd zaproponowanych przez teoretyków hipotez na temat własności ciemnej materii wskazuje na to, że możliwe masy jej cząstek oraz siły oddziaływania w różnych modelach mogą różnić się o wiele rządów wielkości. Jedną z często dyskusowanych możliwości jest ciemna materia złożona z cząstek zwanych grawitinami, oddziałujących na tyle słabo, że trudno sobie wyobrazić jakikolwiek ziemski eksperyment, w którym mogłyby być zarejestrowane (o grawitinach pisał Marcin Badziak w Δ_{09}^{11}). Sprawy nie ułatwia fakt, że jak dotąd wszystkie wiarygodne eksperymenty, których celem była bezpośrednia detekcja cząstek ciemnej materii, przyniosły negatywne (acz bardzo pouczające) rezultaty. Również obserwacje zjawisk astronomicznych nie wskazały na jakikolwiek proces, w którym ciemna materia byłaby produkowana pośrednio.

Inną zagadką współczesnej fizyki wymienioną w koncepcji nowego zderzacza jest obserwowana asymetria między materią i antymaterią, w szczególności fakt, że we Wszechświecie na każdy barion przypada z grubsza miliard fotonów. Naukowcy wierzą, że nie jest to zadany warunek początkowy dla Wszechświata, ale wynik działania jakichś procesów fizycznych. Jakich? Niektórzy stawiają na tzw. leptogenezę, czyli wytworzenie nadwyżki materii w tych samych oddziaływaniach, które dają początek masie neutrin (istnienie tych oddziaływań to kolejna propozycja teoretyków). Inni sądzą, że był to tzw. proces Afflecka–Dine’a, związany ze skomplikowaną ewolucją Wszechświata do stanu minimum energetycznego. Istnieje wreszcie grupa, która proponuje tzw. bariogenezę elektroslabą, czyli produkcję materii w znanych oddziaływaniach elektroslabych, ale z udziałem nowych cząstek. Wspólną cechą tych wszystkich pomysłów jest to, że są one zbudowane na wielu warstwach teoretycznych spekulacji – jeśli usunąć choć jedną, pomysły stają się trudne do uratowania. Ponadto, żaden z tych pomysłów nie gwarantuje, że proponowane nowe cząstki lub oddziaływania będą mogły zostać zaobserwowane w nowym zderzaczu.

Co z tego?

Szkopuł w tym, że zarówno ciemna materia, jak i zagadka nadwyżki materii nad antymaterią były przywoływane dość często jako uzasadnienie dla LHC. Wskazuje to na pogłębiający się deficyt wielkich, porywających narracji w fizyce cząstek elementarnych. Przypomina to losy badania otaczającej nas przestrzeni kosmicznej. Kultura połowy XX wieku pełna jest fascynacji kosmosem i marzeń o wysłaniu człowieka w jego jak najdalsze zakątki. Fascynacja dużej części społeczeństwa tymi ideami doprowadziła (z pomocą uwarunkowań geopolitycznych) do lądowania na Księżycu, a w schyłkowej fazie dała także obchodzą niekomercyjne loty kosmiczne? Niedofinansowana NASA wyraźnie przegrywa w wyścigu o rozwój technologii ze swoimi bardziej biznesowo nastawionymi konkurentami, a idea załogowego lotu na Marsa podnieca wąskie grono najbardziej wytrwałych entuzjastów.

Tymczasem zadaniem naukowca-przyrodnika uprawiającego badania podstawowe jest coraz lepsze zrozumienie zjawisk zachodzących w przyrodzie i reguł, jakimi się one rządzą. Zbudowanie potężniejszego zderzacza umożliwi fizykom cząstek elementarnych kolejne przesunięcie granic poznania mikroświata i będzie to wartością samą w sobie, niezależnie od odgrzewanych kotletów propagandowych podsuwanych opinii publicznej. Ta ostatnia może się bowiem zorientować, że proponowane argumenty są drugiej świeżości, i uznać cenę nowego urzędzenia, wyrażającą się jedenastocyfrową liczbą euro, za cokolwiek wygórowaną. A wtedy wielka narracja fizyki cząstek elementarnych zapadnie się pod ciężarem niemożliwych do spełnienia obietnic.

Krzysztof TURZYŃSKI

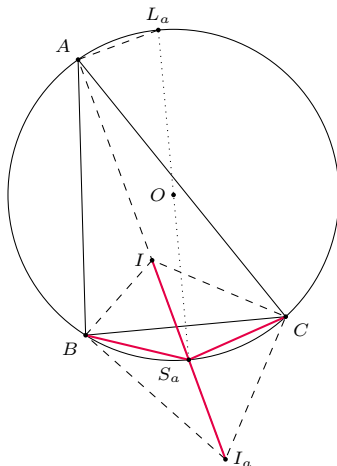
<https://fcc-cdr.web.cern.ch>



Twierdzenie o trójkębie

Bartłomiej BZDEGA

Opiszmy okrąg o na trójkącie ABC . Niech S_a będzie środkiem łuku BC niezawierającego punktu A , zaś L_a – środkiem drugiego łuku BC . Odcinek $L_a S_a$ jest oczywiście średnicą okręgu o , na której leży symetralna odcinka BC . Łuki BS_a i CS_a są równej długości, więc kąty wpisane na nich oparte mają jednakową miarę, czyli prosta AS_a jest dwusieczną kąta BAC . Jeżeli $L_a \neq A$, to $\sphericalangle L_a A S_a = 90^\circ$, więc prosta AL_a jest dwusieczną kąta zewnętrznego A trójkąta ABC .



Oznaczmy przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz miary kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C odpowiednio przez α, β, γ . Wówczas $\sphericalangle BS_a I = \gamma$ oraz $\sphericalangle IBS_a = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, więc $\sphericalangle BIS_a = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \sphericalangle IBS_a$, co daje równość $|IS_a| = |BS_a| = |CS_a|$, znaną pod nazwą *twierdzenie o trójlściu*. Niech I_a będzie środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC , stycznego do odcinka BC . Punkty A, I, I_a leżą na jednej prostej, a ponadto $\sphericalangle IBI_a = 90^\circ$, więc II_a jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie BII_a . To pozwala uzupełnić twierdzenie o trójlściu:

$$|I_a S_a| = |IS_a| = |BS_a| = |CS_a|.$$

Nazywamy to *twierdzeniem o trójkębie*.

Zadania

- Sformułować i udowodnić twierdzenie o trójkębie dla dwusiecznej kąta zewnętrznego.
- Wysokości nierównoramienne, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H . Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH , który zawiera punkt H . Wyznaczyć miarę kąta BAC , jeśli spełniona jest równość $|AH| = |AS|$.
- Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D . Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q . Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I .
- Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $|AB| < |AC|$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Punkt M jest środkiem boku BC . Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD .
- W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku I . Proste AI i BI przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P i Q , różnych od A i B . Punkt F jest takim punktem, że czworokąt $CPFQ$ jest równoległobokiem. Dowieść, że jeśli $I \neq F$, to $\sphericalangle CIF = 90^\circ$.
- Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinków BC, CA, AB w punktach odpowiednio D, E, F . Niech J_a, J_b i J_c będą odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BDF, CDE . Prosta l_a jest symetryczna do prostej BC względem prostej $J_b J_c$, analogicznie określamy proste l_b i l_c . Dowieść, że proste l_a, l_b i l_c przecinają się w jednym punkcie.
- Długości boków pewnego trójkąta różnobocznego stanowią ciąg arytmetyczny. Wykazać, że prosta łącząca środek okręgu opisanego i wpisanego w ten trójkąt jest prostopadła do dwusiecznej pewnego kąta wewnętrznego w tym trójkącie.
- Trójkąt wpisany jest w okrąg o promieniu R i opisany na trójkącie o promieniu r . Odległość między środkami tych okręgów jest równa d . Dowieść, że $d^2 = R(R - 2r)$ (twierdzenie Eulera).

Wskazówki do zadań

- Należy wykazać, że $|BI_a| = |CT_a| = |IT_a| = |IT_a|$ wykonując obliczenia na kątach.
- Prosta HS jest dwusieczną $\sphericalangle AHC$, z czego można otrzymać $\sphericalangle AHS = \frac{\alpha}{2} + \gamma$, a dalej $\sphericalangle HAS = 90^\circ - \beta$. Dodatkowo punkt S leży na symetralnej odcinka BC , więc jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .
- Punkt Q leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC . Stąd można wykazać, że $\sphericalangle QPI = \sphericalangle QDI$.
- Odcinki $L_a D$ i $L_a S_a$ są średnicami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach ADM i ABC .
- Stosując dwukrotnie twierdzenie o trójlściu przekonyujemy się, że prosta PQ jest symetralną odcinka CI . Ponadto trójkąty IPQ i FPQ są przystające, co daje $IF \parallel PQ$.
- Uzasadnić, że punkty J_a, J_b i J_c są środkami łuków EF, FD, DE okręgu opisanego na trójkącie DEF . Punkt F i środek S okręgu wpisanego w trójkąt DEF są symetryczne względem prostej $J_b J_c$ (por. poprzednie zadanie), więc l_a przechodzi przez punkt S .
- Niech $2|BC| = |AB| + |AC|$. Zastosować twierdzenie Ptolemeusza dla czworokąta $ABSC$ oraz twierdzenie o trójlściu, by wykazać, że punkt I jest środkiem odcinka AS_a .
- Niech P będzie rzutem prostokątnym punktu I na odcinek AB . Trójkąty API oraz $L_a B S_a$ są podobne, więc $\frac{|AI|}{|PI|} = \frac{|L_a S_a|}{|BS_a|}$. Po zastosowaniu twierdzenia o trójlściu i przekształceniach otrzymamy $|AI| \cdot |S_a I| = 2Rr$. Z drugiej strony, $|AI| \cdot |S_a I|$ jest potęgą punktu I względem okręgu opisanego na trójkącie ABC , czyli wynosi $d^2 - R^2$.

KATEGORIA
NAUKOWA A+

WSPÓŁPRACA
MIĘDZYNARODOWA

INSTYTUCJONALNA
OCENA
WYRÓŻNIAJĄCA
PKA

PONAD 1200
STUDENTÓW
W 2018 R.

**DLACZEGO
REALIZOWAĆ
STUDIA NA
WYDZIALE
FIZYKI UW?**

CO 35 LAUREAT
STYPENDIUM
MNISW UCZY
SIĘ U NAS

STUDIA
W POŁĄCZENIU
Z PRACĄ
BADAWCZĄ

OGÓLNODOSTĘPNA
PRACOWNIA
I SALE PRACY
WŁASNEJ

NASI BADACZE
REALIZUJĄ
GRANTY ERC