



deltami

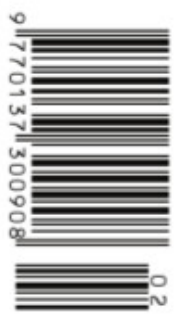
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

nr-6,63-10⁻⁴ - J-S π -3,141592...

NR 2 (537) 2019

CENA 4 ZŁ VAT 5%
PL ISSN 0147-3005 INR IND 35-550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl






Nakład: 3500 egz.

PARKIETAŻE
str. 2



SPIS TREŚCI NUMERU 2 (537)

A jednak się da (IV): odtajniamy transfer utajniony <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 1
Parkietażę <i>Michał Adamaszek</i>	str. 2
Polskie nominacje do Nagrody Nobla z fizyki i chemii do roku 1966 <i>Andrzej Hennel</i>	str. 4
 Zadania	str. 7
 Ziemia, planeta ludzi <i>Magdalena Fikus</i>	str. 8
Porównywanie wież potęgowych <i>Karol Gryszka</i>	str. 9
Zobaczyć niewidoczne <i>Jakub Nalepa</i>	str. 11
Jeszcze w zielone gramy <i>Janusz Krywult</i>	str. 14
Informatyczny kącik olimpijski (124): <i>Wyspa i liczydło</i>	str. 16
Klub 44	str. 17
Prosto z nieba: Nuklearny makaron	str. 22
Niebo w lutym	str. 22
Aktualności Zastosowanie fal grawitacyjnych	str. 24
 Symetria w algebrze <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze zaczynamy nową,
cokwartalną serię *Pół szklanki mocnego kodu*.



Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Kamila Łyczek – z-ca red. nac., Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delt*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
Druk: Drukarnia Greg www.greg-drukarnia.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 4 zł; wcześniejsze egzemplarze 1 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

A jednak się da (IV),

czyli saga kryptologiczna w odcinkach.

Tym razem: odtajniamy transfer utajniony

Łukasz RAJKOWSKI



Rozwiązanie zadania F 969.
Zgodnie z prawem Hooke'a ciało o długości h i powierzchni przekroju poprzecznego S pod wpływem rozciągającej je siły F doznaje względnego wydłużenia

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{F}{YS}$$

Podzielmy długość L rury na n jednakowych odcinków wysokości h . Każdy z tak otrzymanych odcinków rury będzie ściskany ciężarem znajdującym się nad nim części rury, a więc zmiana długości odcinka i – numerujemy od górnego końca rury – wyniesie:

$$\Delta h_i = -h \frac{(i-1)hS\rho g}{YS}$$

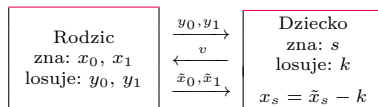
(znak minus, bo chodzi o siłę ściskającą). Całkowitzą zmianę długości otrzymamy, sumując wszystkie Δh_i . Obliczenie sumy szeregu arytmetycznego prowadzi do wyrażenia:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \Delta h_i = -\frac{L^2 \rho g (n^2 - n)}{2n^2 Y}$$

Przechodząc z n do nieskończoności, otrzymujemy:

$$\Delta L \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{L^2 \rho g}{2Y}$$

Dla danych zadania
 $\Delta L = -1,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx -0,2 \text{ mm}$.



Schemat przesyłu informacji między rodzicem i dzieckiem.

Ence-pence w której ręce? – za moich dziecięcych lat przedstawiona formułka, której towarzyszyły często dwie wyciągnięte przez wypowiadającą ją osobę ręce, była zwiastunem jakiejś bardzo przyjemnej (najczęściej słodkiej) niespodzianki. Każda wyciągnięta dłoń skrywała bowiem coś dobrego, jednak jako szkrab i tak poświęcałem chwilę zastanowienia nad jej wyborem, będąc świadomym ryzyka, że niewskazana przeze mnie ręka zawiera bardziej atrakcyjny podarek i powędruje on do mojego brata. Ta dziecięca wyliczanka będzie dla nas punktem wyjścia do rozważań nad problemem pozornie niemającym zastosowania w rzeczywistości. Zapytajmy bowiem, czy dziecko jest w stanie dowiedzieć się, co znajduje się w wybranej przez nie ręce, tak aby spełnione były dwa warunki:

1. dziecko nie dowiaduje się, co znajduje się w drugiej ręce rodzica,
2. rodzic nie dowiaduje się, którą rękę wybrało dziecko.

Powyższe założenia wydają się sprzeczne, a procedura, która miałaby je spełniać, zakrawa o sztuczkę magiczną. Jest to jednak możliwe – stosowny protokół nazywa się *transferem utajnionym*. Pisał o nim Tomasz Kazana w *Delcie* 5/2012. Transfer utajniony jest jednak na tyle ważną „cegiełką” kryptograficzną, że dla pełności naszego cyklu postanowiliśmy przypomnieć go w tym krótkim artykule.

Rozpocznijmy od przedstawienia naszego problemu w bardziej matematycznym języku. Aby biedny rodzic nie musiał utrzymywać przez cały czas rąk w górze, założmy, że przyporządkowuje on wartości dwóm zmiennym: x_0 (lewa ręka) i x_1 (prawa ręka); dla ułatwienia opisu założmy, że wartości te są liczbami naturalnymi. Dziecko wybiera natomiast $s \in \{0, 1\}$. Jego zadaniem jest poznanie wartości x_s bez ujawniania s , natomiast rodzic nie może wyjawiać wartości x_{1-s} .

Pierwszym krokiem protokołu jest stworzenie bazy do szyfrowania z kluczem publicznym, tak jak opisane to zostało w pierwszym odcinku serii, opublikowanym w *Delcie* 10/2018. Rodzic wybiera dwie duże liczby pierwsze p, q tak, aby $n = pq$ było większe od każdej z liczb x_0 i x_1 . Następnie rodzic oblicza $m = (p-1)(q-1)$ i znajduje takie dwie liczby naturalne e i d , że $ed \equiv 1 \pmod{m}$ (tzn. ed daje resztę 1 z dzielenia przez m). Ponadto rodzic losuje liczby y_0 i y_1 i wyjawia dziecku wartość każdej z nich. Dziecko natomiast losuje liczbę k , której nigdy nie ujawni rodzicowi. Zamiast tego przesyła mu wartość $v = (y_s + k^e \pmod{n})$. Na jej podstawie rodzic oblicza $k_0 = ((v - y_0)^d \pmod{n})$ oraz $k_1 = ((v - y_1)^d \pmod{n})$. Zauważmy, że wówczas $k_s = (k^{ed} \pmod{n}) = k$ (po szczegóły odsyłamy do pierwszej części sagi). Jeśli zatem rodzic prześle dziecku wartości $\tilde{x}_0 = x_0 + k_0$ oraz $\tilde{x}_1 = x_1 + k_1$, to dziecko będzie mogło obliczyć wartość $x_s = \tilde{x}_s - k$.

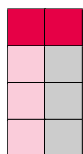
Wiemy już, że w opisany wyżej sposób dziecko poznaje wartość x_s . Jedyna informacja, jaką rodzic dostaje od dziecka, to wartość v . Na jej podstawie rodzic nie jest w stanie powiedzieć niczego o s ze względu na losowy wybór k . Pozostaje wykazać, że dziecko nie jest w stanie obliczyć wartości x_{1-s} . Zauważmy, że

$$(\tilde{x}_{1-s} - x_{1-s})^e \equiv k_{1-s}^e \equiv ((y_s + k^e - y_{1-s})^d)^e \equiv y_s + k^e - y_{1-s} \pmod{n}.$$

Ponieważ y_0 i y_1 były losowane przez rodzica, to z punktu widzenia dziecka liczba $y_s + k^e + y_{1-s}$ jest losowa. Gdyby dziecko potrafiło obliczyć x_{1-s} , to ponieważ zna \tilde{x}_{1-s} – potrafiłoby obliczyć lewą stronę powyższej równości. Rozwiązałoby zatem równanie $a^e \equiv b \pmod{n}$ dla losowo wybranej wartości b . Z pierwszego odcinka sagi wiemy, że zadanie to jest równie trudne, co złamanie szyfru RSA, jeśli zatem wierzymy w bezpieczeństwo tego ostatniego, nie powinniśmy mieć skrupułów w używaniu przedstawionego protokołu transferu ujawnionego. A o tym, że kryptologia opiera się na wierze (lecz również zrozumieniu!) pisaliśmy już w *Delcie* niejednokrotnie. . .

*MOSEK ApS, Kopenhaga

W autorskim tygodniku internetowym *Trapez* [1] Jarosław Wróblewski proponuje serię zadań (nr 75–126) o parkietowaniu prostokątów. Na przykład: czy planszę 15×15 da się szczelnie pokryć klockami o wymiarach 8×1 , 1×8 , 11×1 oraz 1×11 (oczywiście klocki nie mogą na siebie zachodzić). W tego typu zadaniach odpowiedź zazwyczaj brzmi „nie”, a typowa strategia polega na zgadnięciu numeracji lub kolorowania pól planszy i użyciu argumentu w stylu „każdy klocek pokrywa trzy pola zielone, ale liczba pól zielonych na całej planszy jest niepodzielna przez 3”. Spróbujmy jednak ogólniej zastanowić się, jak systematycznie, od podstaw, można zaatakować problem: czy planszę o wymiarach $n \times m$ da się wyparkietować klockami ustalonych typów $a_1 \times b_1, \dots, a_\ell \times b_\ell$.



Przykład parkietażu

Niech (i, j) oznacza pole w i -tym wierszu i j -tej kolumnie. Każde pokrycie planszy możemy zakodować za pomocą zmiennych

$$x_{i,j}^{a \times b} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli pewien klocek typu } a \times b \text{ ma lewy górny róg na polu } (i, j), \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Na przykład pokrycie planszy 4×2 z rysunku obok opisujemy następująco:

$$x_{1,1}^{1 \times 2} = x_{2,1}^{3 \times 1} = x_{2,2}^{3 \times 1} = 1,$$

a wszystkie inne zmienne $x_{i,j}^{a \times b}$ są równe zero.

Zapytajmy teraz, kiedy zestaw zmiennych $x_{i,j}^{a \times b}$ opisuje poprawny parkietaż. Przede wszystkim musimy usunąć wszystkie zmienne

$$x_{i,j}^{a \times b} \text{ dla } i > n + 1 - a \text{ lub } j > m + 1 - b,$$

ponieważ klocek o wymiarach $a \times b$ z lewym górnym rogiem na polu (i, j) wystawałby poza planszę. Po drugie, wszystkie zmienne muszą przyjmować wartości 0 lub 1. W końcu, musimy zagwarantować, że każde pole planszy jest pokryte przez dokładnie jeden klocek. Ten warunek można zapisać następująco:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i'=\max(1, i-a_k+1)}^{\min(i, n-a_k+1)} \sum_{j'=\max(1, j-b_k+1)}^{\min(j, m-b_k+1)} x_{i',j'}^{a_k \times b_k} = 1$$

dla każdego $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Ten nieprzyjemny wzór oznacza po prostu, że spośród wszystkich legalnych położen dostępnych klocków, które potencjalnie mogą zahaczać o pole (i, j) , dokładnie jedno jest faktycznie w użyciu. A zatem zerowydzianka rozwiązania układu nm równań liniowych (1) odpowiadają jednoznacznie parkietażom.

Dla zupełnej jasności rozważmy przykład. Zapiszmy w tym języku problem parkietowania planszy 3×4 klockami typu 1×3 i 2×1 . Mamy 12 równań, z których każde wymienia legalne sposoby pokrycia jednego z pól:

$$(1, 1) \quad x_{1,1}^{1 \times 3} + x_{1,1}^{2 \times 1} = 1$$

$$(1, 2) \quad x_{1,1}^{1 \times 3} + x_{1,2}^{1 \times 3} + x_{1,2}^{2 \times 1} = 1$$

$$(1, 3) \quad x_{1,1}^{1 \times 3} + x_{1,2}^{1 \times 3} + x_{1,3}^{2 \times 1} = 1$$

$$(1, 4) \quad x_{1,2}^{1 \times 3} + x_{1,4}^{2 \times 1} = 1$$

$$(2, 1) \quad x_{2,1}^{1 \times 3} + x_{1,1}^{2 \times 1} + x_{2,1}^{2 \times 1} = 1$$

$$(2, 2) \quad x_{2,1}^{1 \times 3} + x_{2,2}^{1 \times 3} + x_{1,2}^{2 \times 1} + x_{2,2}^{2 \times 1} = 1$$

$$(2, 3) \quad x_{2,1}^{1 \times 3} + x_{2,2}^{1 \times 3} + x_{1,3}^{2 \times 1} + x_{2,3}^{2 \times 1} = 1$$

$$(2, 4) \quad x_{2,2}^{1 \times 3} + x_{1,4}^{2 \times 1} + x_{2,4}^{2 \times 1} = 1$$

$$(3, 1) \quad x_{3,1}^{1 \times 3} + x_{2,1}^{2 \times 1} = 1$$

$$(3, 2) \quad x_{3,1}^{1 \times 3} + x_{3,2}^{1 \times 3} + x_{2,2}^{2 \times 1} = 1$$

$$(3, 3) \quad x_{3,1}^{1 \times 3} + x_{3,2}^{1 \times 3} + x_{2,3}^{2 \times 1} = 1$$

$$(3, 4) \quad x_{3,2}^{1 \times 3} + x_{2,4}^{2 \times 1} = 1$$

Na przykład równanie dla pola (2, 4) czytamy następująco: pole to można przykryć klockiem 1×3 z pola (2, 2) lub klockiem 2×1 z jednego z pól (1, 4) lub (2, 4).

Jak łatwo sprawdzić, prostokąta 3×4 klockami 1×3 i 2×1 pokryć się nie da. Możemy tego faktu dowieść algebraicznie, mianowicie mnożąc równania (2)



Rozwiązanie zadania M 1593.
Skoro $2n - 1$ jest liczbą złożoną, to $2n - 1 = pq$ dla pewnych (niekoniecznie różnych) liczb nieparzystych p, q większych od 1. Niech

$$a_i = 1 \text{ dla } i = 1, 2, \dots, p$$

oraz

$$a_i = 2i - 1 - p \text{ dla } i = p + 1, p + 2, \dots, n.$$

Wówczas $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Jeżeli $1 \leq i \leq j \leq p$, to

$$\frac{a_i + a_j}{\text{NWD}(a_i, a_j)} \leq a_i + a_j = i + j \leq 2p < pq = 2n - 1.$$

Jeżeli $p + 1 \leq i \leq j \leq n$, to $2 \mid \text{NWD}(a_i, a_j)$, skąd

$$\frac{a_i + a_j}{\text{NWD}(a_i, a_j)} \leq \frac{a_i + a_j}{2} = i + j - 1 - p \leq 2n - 1 - p < 2n - 1.$$

Jeżeli $1 \leq i \leq p$, $p + 1 \leq j \leq n$ oraz $(i, j) \neq (p, n)$, to

$$\frac{a_i + a_j}{\text{NWD}(a_i, a_j)} \leq a_i + a_j = i + 2j - 1 - p < 2n - 1.$$

W końcu jeśli $(i, j) = (p, n)$, to

$$\frac{a_i + a_j}{\text{NWD}(a_i, a_j)} = \frac{pq}{q} = p < 2n - 1.$$

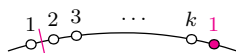


Rozwiązanie zadania M 1591.

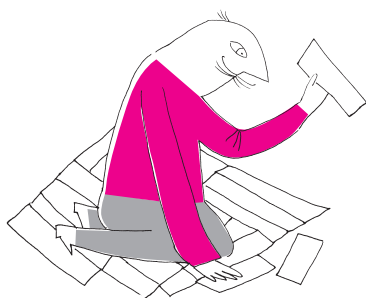
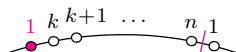
Spośród wszystkich par wyróżnionych punktów o tym samym numerze wybierzmy taką, że między nimi jest jak najmniej innych wyróżnionych punktów (na pewnym z dwóch łuków). Bez straty ogólności przyjmijmy, że wybrana para ma numery 1 (cykliczne przenumerowanie jednocześnie w obrębie punktów obydwu kolorów nie ma wpływu na tezę).

Zauważmy, że wszystkie wyróżnione punkty pomiędzy tymi o numerze 1 są tego samego koloru — w przeciwnym przypadku wśród nich byłyby punkty o tym samym numerze. Przypuśćmy, że są to punkty białe; rozumowanie w przypadku punktów czarnych jest analogiczne. W zależności od położenia punktów o numerze 1 możemy wyróżnić dwa przypadki.

1° Pomiedzy punktami o numerze 1 znajdują się punkty białe o numerach od 2 do k . Wówczas wybierając jeden punkt podziału okręgu na łuki pomiędzy białymi punktami o numerach 1 i 2, a drugi — w taki sposób, aby na obydwu uzyskanych łukach było po n wyróżnionych punktów, uzyskujemy rozcięcie o postulowanej własności.



2° Pomiedzy punktami o numerze 1 znajdują się punkty białe o numerach od k do n . Wówczas wybierając jeden punkt podziału okręgu na łuki pomiędzy białymi punktami o numerach 1 i n (a drugi odpowiednio jak wyżej), uzyskujemy rozcięcie spełniające warunki zadania.



kolejno przez następujące współczynniki:

$$(3) \quad -1, 1, 0, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 1, 0, -1$$

i dodając wszystko stronami. Wtedy otrzymamy

$$0 = -1,$$

co dowodzi, że układ (2) nie ma rozwiązań rzeczywistych (a więc tym bardziej zerojedynkowych!).

Uogólnijmy ostatnie rozumowanie. Układ równań liniowych nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych jedynie wówczas, gdy pewna kombinacja liniowa danych równań daje „oczywistą sprzeczność” postaci „zero z lewej, coś niezerowego z prawej strony”. Nie udowodnimy tego faktu, a jedynie odwołamy się do intuicji i życiowego doświadczenia Czytelników w tym zakresie.

Co to znaczy w szczególnym przypadku układu (1)? Oznaczmy przez y_{ij} współczynnik, przez jaki w naszym dowodzie nierozwiązywalności przemnożymy równanie dla pola (i, j) . Możemy nawet myśleć o tych współczynnikach jako wpisanych w pola planszy: y_{ij} umieszczamy na polu (i, j) . Na przykład współczynniki (3) dla przykładu (2) pojawią się na planszy 3×4 w następującej kolejności:

-1	1	0	-1
1	-1	0	1
-1	1	0	-1

Wtedy (proszę sprawdzić) „oczywista sprzeczność” dla układu (1) polega na tym, że:

- każde dopuszczalne położenie klocka na planszy pokrywa pola o sumie y_{ij} równej zeru,
- suma wszystkich y_{ij} jest niezerowa.

Jest zupełnie Jasne (przez duże J, i to bez lektury całego naszego wywodu), że powyższe warunki dowodzą nieistnienia parkietażu! A zatem odkryliśmy od podstaw jeden z wariantów magicznej metody rozwiązywania tego typu zadań, wspomnianej na początku.

Spójrzmy na to, co tutaj się stało, z jeszcze szerszej perspektywy. Układ równań taki jak (1) jest bardzo szczególnym przypadkiem problemu z zakresu *programowania całkowitoliczbowego* (ang. mixed-integer programming). Wiele trudnych problemów kombinatorycznych można zakodować w tej postaci, wprowadzając zmienne zerojedynkowe opisujące pewne zdarzenia (np. klocek leży na polu) i wyrażając wzajemne ograniczenia (np. klocki nie zachodzą na siebie) w postaci równań i nierówności liniowych, tak jak w (1). Jest to standardowa technika dla wielu tego typu problemów. Rozwiązywanie problemów całkowitoliczbowych, choć możliwe, jest bardzo czasochłonne (w istocie NP-trudne), dlatego możemy na początek zapytać, czy badany problem ma w ogóle rozwiązanie w liczbach rzeczywistych. Ten proces nazywa się *relaksacją*. Powstały problem liniowy można rozwiązać efektywnie, a jeżeli okaże się, że rozwiązania nie ma, to zawsze można podać *certyfikat niespełnialności* (ang. infeasibility certificate), analogiczny do naszej tabeli współczynników y_{ij} . Czytelnikom zainteresowanym tym Olbrzymim (przez duże O) działem optymalizacji proponuję wpisanie wymienionych tu haseł w wyszukiwarce.

Reasumując:

dowód nieistnienia parkietażu przez kolorowanie/numerowanie i inne sprytnie
niezmienniki

to nic innego, jak

certyfikat niespełnialności dla liniowej relaksacji całkowitoliczbowego modelu
parkietowania.

Pod adresem [2] można znaleźć kod źródłowy wraz z komentarzami, pozwalający własnoręcznie eksperymentować z parkietażami przy użyciu ogólnodostępnych pakietów do modelowania i programowania liniowego/całkowitoliczbowego. Można tam znaleźć rozwiązanie zadania o planszy 15×15 ze wstępu.

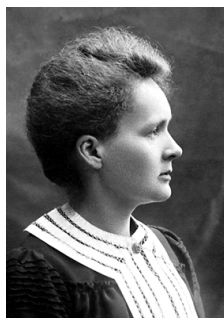
Literatura

- [1] www.math.uni.wroc.pl/~jwr/trapez
[2] github.com/aszek/Delta

Polskie nominacje do Nagrody Nobla z fizyki i chemii do roku 1966

Andrzej HENNEL

Archiwum Noblowskie ujawnia informacje o osobach nominowanych i nominujących po 50 latach. Nominujący dzielą się na stałych i zaproszonych okazjonalnie. Stałymi są m.in. dotychczasowi laureaci oraz członkowie Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk. Okazjonalnymi są przedstawiciele wybranych w danym roku uczelni. Na przykład w 1996 roku profesorowie Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (w tym piszący te słowa) otrzymali prośbę o nominację do Nagrody Nobla z fizyki. Już za niecałe 30 lat dowiemy się, jakie kandydatury zostały zgłoszone i przez kogo. Decyzje Szwedzkiej Akademii pozostają czasem nieodgadnione – na przykład okazało się, że wielki Dymitr Mendelejew był dziewięciokrotnie nominowany w latach 1905–1907 do Nagrody Nobla z chemii... i jej nigdy nie otrzymał.



Maria Skłodowska-Curie (1867–1934). Studiowała i doktoryzowała się na Sorbonie w Paryżu. Była profesorem Sorbony od 1906 roku. Wprowadziła pojęcie promieniotwórczości. Jako jedyna kobieta otrzymała dwukrotnie Nagrodę Nobla: w 1903 roku z fizyki i w 1911 roku z chemii. Jest, jak dotąd, jedyną kobietą pochowaną w paryskim Panteonie.

W tym artykule przedstawiam szczegóły dotyczące „polskich nominacji” z fizyki i chemii od początku istnienia nagrody do 1966 roku. Przez polskie nominacje rozumiem osoby urodzone na ziemiach polskich lub w taki czy inny sposób związane z Polską.

Pierwszą była oczywiście Maria Skłodowska-Curie, która mieszkała w Polsce tylko do 23. roku życia, a potem we Francji i Francuzi też uważają ją za swoją laureatkę. Maria od 1898 roku wraz z mężem Piotrem Curie zajmowała się promieniotwórczością. Razem ogłosili szereg prac, w tym odkrycie nowych pierwiastków – polonu i radu. Nic więc dziwnego, że w 1902 roku zostali nominowani do nagrody Nobla z fizyki.



Karol Stanisław Olszewski (1846–1915). Studiował chemię i fizykę w Krakowie i Heidelbergu, gdzie doktoryzował się. Od 1876 roku profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Matematyk Jean Darboux, profesor Sorbony i członek Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk oraz fizyk Emil Warburg, profesor uniwersytetu w Berlinie nominowali do nagrody odkrywcę promieniotwórczości Henriego Becquerela i państwa Curie. Natomiast fizyk Éleuthère Mascart, profesor College de France i członek Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk nominował samego Piotra Curie.

Nominacja z 1902 roku nie przyniosła sukcesu, rok później czwórka Francuzów postanowiła pominąć Marię przy nominacjach. Wspomniani już Gaston Darboux i Éleuthère Mascart wraz z profesorami Sorbony – fizykiem Gabrielem Lippmannem oraz matematykiem Julesem Poincaré – zaproponowali przyznanie nagrody Piotrowi Curie i Henriemu Becquerelowi.

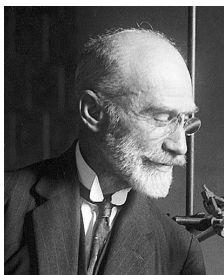
Groził więc niebывały skandal, który ostatecznie rozwiązano za pomocą nominacji dla Marii od członka Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk, profesora Sorbony, lekarza – patologa Charlesa Boucharda. (Szczegółowy opis tej sprawy zamieściłem w artykule: *Maria Skłodowska-Curie i zgrzybiali starcy*, *Gazeta Wyborcza* 1/2018.) Nagroda Nobla z fizyki w 1903 roku została przyznana w połowie Becquerelowi za odkrycie promieniotwórczości naturalnej oraz w połowie państwu Curie za wspólne badania zjawiska promieniowania odkrytego przez Becquerela.



Zygmunt Wróblewski (1845–1888). Studiował fizykę w Kijowie, Berlinie i Heidelbergu. Doktorat uzyskał w Monachium. Od 1882 roku profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego. W 1883 roku, razem ze Stanisławem Olszewskim, stosując kaskadową metodę skraplania gazów, jako pierwsi na świecie skroplili tlen (-183°C) i azot (-195°C). Rekordową temperaturą, jaką osiągnęli to -225°C , co nie wystarczyło do skroplenia helu.

W następnym roku pojawiły się kolejne polskie nominacje. Słynny krakowski eksperyment skroplenia azotu i tlenu w 1883 roku wykonali dwaj profesorowie Uniwersytetu Jagiellońskiego – Karol Olszewski i Zygmunt Wróblewski. Niestety pięć lat później Wróblewski zmarł w wyniku obrażeń po pożarze w laboratorium. Nagroda Nobla pojawiła się dopiero w 1901 roku i tylko Olszewski mógł być do niej nominowany.

Nominacji dla Olszewskiego było w sumie sześć. Jako pierwszy, w 1904 roku, profesor Uniwersytetu Moskiewskiego Nikołaj Umow zgłosił trzy osoby: Karola Olszewskiego, fizyka szkockiego Sir Jamesa Dewara i fizyka niemieckiego Waltera Kaufmanna. Pierwsi dwaj zajmowali się fizyką niskich temperatur, trzeci – promieniami katodowymi. Potem, w 1913 roku, Uniwersytet Jagielloński był zapewne wybrany do nominowania, gdyż trzech profesorów fizycy – Władysław Natanson, August Witkowski, Konstanty Zakrzewski wskazali Karola Olszewskiego wraz z Holendrem Heikem Kamerlinghiem Onnesem. Cztery fizyki



Leon Marchlewski (1869–1946). Studiował i doktoryzował się w Zurychu. Od 1901 roku zatrudniony na Uniwersytecie Jagiellońskim, w latach 1926–1928 jego rektor. Później działał politycznie i był przez 2 kadencje Senatorem Rzeczypospolitej. Jego prace badawcze dotyczyły głównie chemii organicznej, w tym podobieństwa struktur chlorofilu i hemoglobiny oraz własności występujących w przyrodzie cukrów i barwników.



Kazimierz Funk (1884–1967). Studiował w Genewie i Bernie. Doktoryzował się w Bernie. Pracował w Instytucie Pasteura w Paryżu, na Uniwersytecie Berlińskim, w Instytucie Listera oraz w Cancer Hospital Research Institute w Londynie i na Uniwersytecie Columbia w Nowym Jorku. W latach 1923–1928 kierował oddziałem biochemicznym Państwowego Instytutu Higieny w Warszawie. W 1939 roku wyemigrował do USA, gdzie pozostał do końca życia. Od 1940 roku był szefem fundacji Funk Foundation for Medical Research.



Kazimierz Fajans (1887–1975). Studiował w Lipsku i Heidelbergu oraz w Zurychu. Doktoryzował się w Heidelbergu, habilitował się w Karlsruhe i w 1917 roku został profesorem na Uniwersytecie Monachijskim. W 1935 roku opuścił nazistowskie Niemcy. Nie powiodła się (z powodu kampanii antysemickiej) próba powołania go na szefa katedry w Uniwersytecie Lwowskim jako następcy zmarłego Stanisława Tołłoczki. W 1936 roku objął katedrę chemii w Uniwersytecie Michigan w Ann Arbor, gdzie pozostał do końca życia.

Maurycy Rudzki zgłosił samego Olszewskiego, podobnie postąpił kolejny profesor UJ chemik – Karol Dziewoński, który nominował samotnego Olszewskiego do nagrody z chemii.

Mam wrażenie, że gdyby Zygmunt Wróblewski nie zginął w wypadku i dożył 1913 roku, to szansa na nagrodę z fizyki dla trójki: Heike Kamerlingh Onnes – połowa nagrody, i Olszewski z Wróblewskim po ćwiartce byłaby większa. W istniejącej sytuacji sława odkrycia fizyka holenderskiego, który skroplił hel i miał w sumie 23 nominacje z fizyki i chemii w latach 1909–1913, przeważała – i on sam otrzymał nagrodę z fizyki w 1913 roku.

W 1911 roku Jean Darboux, ten sam który w 1903 roku zapomniał o Marii Skłodowskiej-Curie, nominował ją do Nagrody Nobla z chemii. Drugim nominującym był chemik szwedzki Svante Arrhenius, profesor i rektor Uniwersytetu Sztokholmskiego, laureat Nagrody Nobla z chemii. Maria Skłodowska-Curie nagrodę z chemii w 1911 roku otrzymała w uznaniu jej zasług dla postępu chemii poprzez odkrycie pierwiastków radu i polonu, wyodrębnienie radu, badanie natury i związków tego niezwyklego pierwiastka. Na pierwszym dyplomie noblowskim z 1903 roku występuje jako Maria Curie, na drugim z 1911 roku ma już pełne, dwuczłonowe nazwisko.

Kolejnym krakowskim kandydatem, tym razem do Nagrody Nobla z chemii lub fizjologii i medycyny, był wybitny biochemik, profesor (a później rektor) Uniwersytetu Jagiellońskiego – Leon Marchlewski. Był on bratem niesławnej pamięci Juliana Marchlewskiego – premiera rządu Polskiej Republiki Radzieckiej, która szczęśliwie nigdy nie powstała. Leon Marchlewski prowadził ważne badania struktury cząsteczek chlorofilu i hemoglobiny dowodzące jedności świata roślin i zwierząt.

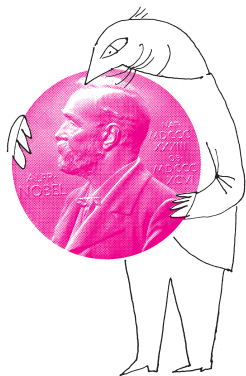
Nominowali go w 1913 roku dwaj chemicy, profesorowie Uniwersytetu Jagiellońskiego – Karol Olszewski i Ludwik Bruner (znany też pod pseudonimem literackim Jan Sten) oraz profesor medycyny na UJ – Julian Nowak. Przy czym Olszewski i Nowak proponowali nagrodę dla Marchlewskiego wspólną z niemieckim chemikiem Wiliamelem Küsterem, a Bruner proponował dołączenie Küstera oraz jeszcze jednego niemieckiego chemika Richarda M. Willstättera. W 1914 roku indywidualną nagrodę z fizjologii i medycyny proponował chemik, profesor Uniwersytetu Lwowskiego – Stanisław Bądryński. Ostatecznie ani Marchlewski, ani Küster nagrody nie dostali, natomiast Willstätter zebrał 28 nominacji w latach 1908–1915 i w 1915 roku otrzymał samodzielnie nagrodę za badania chlorofilu.

W 1914 roku kolejna polska nominacja dotyczyła wybitnego biochemika Kazimierza Funka. Urodził się w Warszawie, tu ukończył gimnazjum i wyjechał na studia do Szwajcarii. Pracę naukową prowadził w wielu ośrodkach w wielu krajach Europy i w USA. Wyodrębnił i zbadał pierwszą odkrytą witaminę, czyli B₁. W 1912 roku wprowadził termin witamina (z łac. *vita* – życie, *amina* – związek chemiczny zawierający grupę aminową).

Wydaje się, że świat naukowy z dużym opóźnieniem docenił znaczenie pionierskich prac Funka nad witaminami, gdyż jego nominacje były rozrzucone w czasie i raczej przypadkowe.

W 1914 roku został nominowany do nagrody z fizjologii i medycyny przez profesora farmakologii Uniwersytetu w Göttingen Wolfganga Heubnera. Nominowane były trzy osoby – poza Funkiem, Christiaan Eijkman z Utrechtu oraz Umetaro Suzuki z Uniwersytetu w Tokio. W 1925 roku znów do nagrody z fizjologii i medycyny nominował Funka i Eijkmana profesor anatomii z Islandzkiego Uniwersytetu w Reykjavíku – Gudmundur Hannesson. W 1926 roku profesor fizyki i chemii Uniwersytetu w Kopenhadze – Sigurd Orla-Jensen nominował samego Funka do nagrody z chemii. I wreszcie w 1946 roku znów do nagrody z chemii nominował samego Funka profesor chemii James W. McBain z Uniwersytetu Stanforda w Kalifornii.

Spośród tych wszystkich osób tylko Eijkman (zebrawszy 28 nominacji w latach 1914–1929) dostał Nagrodę Nobla – w 1929 roku z fizjologii i medycyny za badania witamin.



Wojciech Świętosławski (1881–1968). Studiował i doktoryzował się w Kijowie. Od 1912 roku był docentem na Uniwersytecie Moskiewskim. Od 1919 roku był profesorem Politechniki Warszawskiej. Wykładał również na Uniwersytecie Warszawskim. W latach 1928–1932 był prorektorem i rektorem Politechniki Warszawskiej. W latach 1935–1939 był senatorem RP i ministrem wyznań religijnych i oświecenia publicznego. Lata 1940–1946 spędził w USA na zaproszenie National Bureau of Standards. Po powrocie do Polski pracował na Politechnice i Uniwersytecie Warszawskim; utworzył Instytut Chemii Fizycznej PAN.



Leopold Infeld (1898–1968). Studiował i doktoryzował się na Uniwersytecie Jagiellońskim. Habilitował się w Uniwersytecie Lwowskim. Przez dwa lata pracował u Maxa Borna w Cambridge. Od 1936 roku współpracował z Albertem Einsteinem w Instytucie Studiów Zaawansowanych w Princeton. W latach 1938–1950 był profesorem Uniwersytetu w Toronto. Od 1950 roku pracował na Uniwersytecie Warszawskim, gdzie stworzył Instytut Fizyki Teoretycznej.

Następnym polskim kandydatem do Nagrody Nobla z chemii był urodzony w Warszawie chemik jądrowy Kazimierz Fajans. Wyjechał on po maturze do Niemiec, gdzie studiował, doktoryzował się i habilitował. Z powodu prześladowań z racji żydowskiego pochodzenia w 1935 roku wyemigrował do USA. Do najważniejszych odkryć Fajansa należało odkrycie w 1912 roku (niezależnie od Fredericka Soddy'ego) tzw. reguły przesunięć. Chodziło o przemieszczanie się pierwiastków po układzie okresowym po emisji cząstek alfa lub beta. Ponadto przed wybuchem I Wojny Światowej ze swoim doktorantem Osvaldem Göhringiem odkrył pierwiastek chemiczny o liczbie atomowej 91 i nazwał go *brevium* ze względu na szybki rozpad (łac. brevis – krótki). Młody doktorant Göhring zginął na froncie i sprawa odkrycia pierwiastka 91 przepadła w odmętach wojny. W 1918 roku Otto Hahn i Liza Meitner ogłosili ponowne odkrycie tego samego pierwiastka – pod nazwą *protaktyn*. Kazimierz Fajans ze swoimi osiągnięciami mógł być kandydatem do Nagrody Nobla, jednak jego bezpośredni konkurent Soddy miał jeszcze w dorobku wprowadzenie pojęcia izotopów – i został nominowany trzykrotnie do Nagrody Nobla z chemii przez samego wielkiego Ernesta Rutherforda. Otrzymał ją samodzielnie w 1921 roku. Na polskich stronach w Internecie można przeczytać opowieść o tym, że Kazimierz Fajans miał „prawie na pewno” dostać Nagrodę Nobla z chemii w 1924 roku i niektóre sztokholmskie gazety już to nawet ogłosiły. Jednak Komitet Noblowski miał „za karę” anulować nagrodę z chemii w tym roku. Uważam tę opowieść za fikcję literacką, gdyż sam pomysł „karania” jest dosyć absurdalny. Ponadto, co najważniejsze, brak jest nominacji dla Fajansa w tym okresie. Jedno jest prawdą, że nagrody z chemii w 1924 roku nie przyznano, ale tak się już wcześniej i później zdarzało.

W 1928 roku Uniwersytet Wrocławski został wybrany do składania nominacji do Nagrody Nobla – i wtedy grupa pięciu profesorów chemii: Fritz Arndt, Heinrich Biltz, Walter Herz, Ernst Koenigs oraz Julius Meyer złożyła propozycję przyznania Nagrody z chemii w ramach pierwszego wyboru wybitnemu chemikowi Gustawowi Tammannowi oraz w ramach drugiego wyboru – Kazimierzowi Fajansowi. Żaden z nich nagrody nie otrzymał. Jeszcze jedną próbę podjął w 1934 roku profesor chemii Uniwersytetu Warszawskiego Mieczysław Centnerszwer, zgłosił on do nagrody z chemii samotnego Kazimierza Fajansa – również bezskutecznie. Fajans przeszedł jednak do historii fizyki, gdyż reguły przesunięć w podręcznikach fizyki nazywane są regułami Fajansa–Soddy'ego.

Przez 26 lat polscy chemicy usiłowali doprowadzić do zdobycia Nagrody Nobla z chemii przez profesora Wojciecha Świętosławskiego. W roku 1936 byli to profesorowie Anna Chrzęszczewska z Wolnej Wszechnicy Polskiej oraz Ludwik Szperl i Zygmunt Wojnicz-Sianożęcki z Politechniki Warszawskiej. Po II Wojnie Światowej podjęto pięć dalszych prób. W 1950 roku nominacje złożyli profesorowie Wiktor Lampe i Wiktor Kemula z Uniwersytetu Warszawskiego oraz profesorowie Tadeusz Miłobędzki, Marcei Struszyński i Józef Zawadzki z Politechniki Warszawskiej. W 1957 roku kolejną próbę podjęło trzech profesorów z Uniwersytetu Warszawskiego – Jan Świdorski, Stefan Minc i Wiktor Kemula. W 1958 roku nominację napisał profesor Wiktor Jakób z Uniwersytetu Jagiellońskiego. W 1960 roku nominującymi byli profesor Edmund Trepka z Uniwersytetu Łódzkiego i profesor Józef Hurwic z Politechniki Warszawskiej. I wreszcie w 1962 roku ostatnią próbę podjął profesor Bronisław Zapiór z Uniwersytetu Jagiellońskiego. Wydaje się, że wszystkie te nominacje były niestety istotnie spóźnione. Urodzony na Wołyniu Wojciech Świętosławski, jako docent Uniwersytetu Moskiewskiego i później profesor Politechniki Warszawskiej, prowadził przez wiele lat ważne prace z dziedziny kalorymetrii, dotyczące nowych metod pomiarowych i wprowadzania nowych wzorców. W latach dwudziestych i trzydziestych XX wieku Unia Chemii Czystej i Stosowanej przyjęła szereg jego propozycji. Niestety późniejszy rozwój nauki przyćmił te osiągnięcia. Liczba kandydatów do nagrody z chemii w latach dwudziestych była istotnie mniejsza niż w latach późniejszych. I tak – szansa przepadła.

Stosunkowo mało znanym naukowcem był Bogdan Kamiński (1897–1973), profesor Politechniki Lwowskiej i Uniwersytetu Jagiellońskiego, fizykochemik, specjalista od elektrochemii i fizykochemii zjawisk powierzchniowych. Był on



Marian Danysz (1909–1983).
Studiował na Politechnice Warszawskiej i Uniwersytecie Warszawskim. Od 1954 roku profesor Uniwersytetu Warszawskiego. W latach 1956–1960 wicedyrektor Zjednoczonego Instytutu Badań Jądrowych w Dubnej (ZSRR). W latach 1970–1971 profesor w CERN w Genewie.



Jerzy Pniewski (1913–1989).
Studiował i doktoryzował się na Uniwersytecie Warszawskim. Od 1954 roku profesor Uniwersytetu Warszawskiego. W latach 1975–1981 dziekan Wydziału Fizyki UW.

nominowany do nagrody z chemii w 1958 roku przez Feliksa Polaka, profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego. Ten sam profesor Polak nominował w 1962 roku kolejnego chemika – profesora Politechniki Warszawskiej Tadeusza Urbańskiego (1901–1984), specjalistę od chemii materiałów wybuchowych.

Następnym nominatem był profesor Uniwersytetu Warszawskiego Leopold Infeld, fizyk teoretyk. Jego prace dotyczyły relatywizmu i elektrodynamiki kwantowej. Propozycję nagrody z fizyki dla trzech naukowców złożył w 1964 roku profesor Helmut Hönl z Freiburga Bryzgowijskiego (Niemcy). Pierwszym wskazanym był profesor Hans Bethe z Uniwersytetu Cornell w Ithace (stan Nowy Jork), drugim profesor Richard Feynman z Caltechu (Kalifornijski Instytut Techniczny) i jako trzeci Leopold Infeld. Hans Bethe w latach 1943–1966 otrzymał w sumie 48 nominacji – i w 1966 roku nagrodę dostał. Richard Feynman w latach 1956–1965 też zebrał 48 nominacji i nagrodę też dostał. Infeld Nagrody Nobla nie otrzymał.

Ostatnimi znanymi polskimi nominatami w latach 1962–1965 byli profesorowie Uniwersytetu Warszawskiego – Marian Danysz i Jerzy Pniewski. Byli oni odkrywcami tzw. hiperjąderek (jąder atomowych zawierających hiperony). Ich kandydatury zgłaszane były w następującej kolejności. W 1962 roku kandydaturę samego Danysza zgłosił profesor Jerzy Rayski z Uniwersytetu Warszawskiego. W 1965 roku profesor Victor Weisskopf, dyrektor generalny europejskiego laboratorium CERN w Genewie zgłosił trzy osoby. Jako pierwszy wybór zaproponował wspomnianego już Richarda Feynmana, jako drugi – dwóch fizyków: Mariana Danysza i Nicholasa Kemmera, profesora Uniwersytetu w Edynburgu. W tym samym roku czterech profesorów z Warszawy – Józef Hurwic z Politechniki oraz Leopold Infeld, Leonard Sosnowski i Stefan Piotrowski z Uniwersytetu zgłosiło nominacje dla Mariana Danysza i Jerzego Pniewskiego. Nagrodę Nobla z fizyki w 1965 roku otrzymali łącznie Amerykanie – Richard Feynman i Julian Schwinger oraz Japończyk Sin-Itiro Tomonaga. Ani Danysz, ani Pniewski, ani Kemmer nagród nie otrzymali.

Jak widać, mimo szeregu polskich propozycji nie udało się zdobyć Nagrody Nobla „krajowemu” fizykowi lub chemikowi. Wydaje mi się, że zabrakło tu międzynarodowej akcji poparcia.



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 969. Długość leżącej poziomo rury z PCV wynosi $L = 10$ m. Ile wynosi długość tej rury postawionej pionowo? Gęstość PCV to $\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$, moduł Younga $Y = 3,4 \text{ GPa}$, a przyspieszenie ziemskie $g = 10 \text{ m/s}^2$.
Rozwiązanie na str. 1

F 970. Do połowy XX wieku każda szyna kolejowa była na końcach przyśrubowywana do podłoża (podkładów kolejowych). Oszacuj, z jaką siłą szyna działałaby na śruby mocujące, gdyby miały one zapobiec zmianie jej długości, a temperatura otoczenia zmieniałaby się o $\Delta T = 20 \text{ K}$ w stosunku do temperatury, w jakiej szynę zamontowano. Moduł Younga stali $Y \approx 200 \text{ GPa}$, współczynnik rozszerzalności liniowej stali $\beta \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, a powierzchnia przekroju szyny $S \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$.
Rozwiązanie na str. 20

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1591. Na okręgu wyróżniono n punktów białych oraz n punktów czarnych. Białe punkty są ponumerowane liczbami od 1 do n zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a czarne punkty są ponumerowane liczbami od 1 do n przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wykazać, że ten okrąg można rozciąć na dwa łuki o tej własności, że każdy numer od 1 do n pojawia się dokładnie raz na każdym z nich.
Rozwiązanie na str. 3

M 1592. Dana jest dodatnia liczba całkowita n o tej własności, że $2n - 1$ jest liczbą pierwszą. Wykazać, że w zbiorze dowolnych n różnych dodatnich liczb całkowitych można wskazać takie dwie liczby a i b , że

$$\frac{a+b}{\text{NWD}(a,b)} \geq 2n-1.$$

Rozwiązanie na str. 22

M 1593. Dana jest dodatnia liczba całkowita n o tej własności, że $2n - 1$ jest liczbą złożoną. Skonstruować zbiór n różnych dodatnich liczb całkowitych o tej własności, że dla każdych dwóch elementów tego zbioru a i b zachodzi nierówność

$$\frac{a+b}{\text{NWD}(a,b)} < 2n-1.$$

Rozwiązanie na str. 2



Dane stanowiące podsumowanie setek badań cząstkowych i ich analizę uzyskano dzięki pięciu dużym grantom naukowym i wsparciu przez 7 fundacji. Personalnie firmują je trzej autorzy, którzy: zaplanowali i wykonali badania, przeanalizowali wyniki i napisali: „The biomassdistribution on Earth”, Yinon M. Bar-On, Rob Phillips, and Ron Milo, *PNAS* June 19, 2018 115 (25) 6506-6511.



Ziemia, planeta ludzi

Niebieska planeta, kropka w Kosmosie, jedyna w Układzie Słonecznym pełna życia, wciąż nie doczekała się szczegółowego opisu, który uwzględniałby wszystkie tworzące ją „składniki”. Być może najbliższej takiego sposobu myślenia byli James Lovelock i Lynn Margulis, opisujący Ziemię (od lat 70. XX wieku) jako wielki symbiotyczny organizm, utrzymywany w równowadze dzięki współdziałaniu frakcji „bio” z frakcją „geo.” Lovelock i Margulis stworzyli nawet opis systemu Gaia – „istoty”, z którą człowiek był w dobrych stosunkach, w pewnym sensie nawet przyjaznych. Kuliste żywe planety badał też „Mały Książę” Antoine’a de Saint-Exupéry’ego.

W ostatnich dziesięcioleciach zauważono jednak, że sytuacja Gai staje się krytyczna, ze względu na działalność inwazyjnego gatunku – *Homo sapiens*. Coraz częściej mówi się o kolejnym wymieraniu gatunków, tym razem nie z powodu uderzenia planetoidy, lecz „dzięki” ludziom. Stanowimy 0,01% biomasy Ziemi, a skutki naszych działań coraz bardziej wydają się katastrofalne (por. obrady Kongresu Klimatycznego w Katowicach, 2018 r.). Często przywoływany termin ANTROPOCEN oznacza okres istnienia Ziemi, w którym ludzie zaczęli trwale wpływać na nią w skali globalnej. Im więcej dowiadujemy się o ludzkiej cywilizacji, tym bardziej boimy się skutków jej rozwoju.

Nie byłam świadoma, jak zapewne większość Czytelników, jak bardzo skąpa jest wiedza ilościowa dotycząca składu i rozmieszczenia na naszej planecie konkretnych grup i rodzajów istot żywych. A przecież gdy się chwilę zastanowić, to bez tej wiedzy trudno oceniać i przewidywać perspektywy życia na Ziemi. Ilościowa analiza tego, co składa się na globalną biomasę, jest kluczem do rozumienia struktury i dynamiki biosfery. Mając taką wiedzę, można pokusić się o zrozumienie cyklu krążenia węgla – od form nieorganicznych do składników organicznych i odwrotnie.

Właśnie dokonano pierwszej oceny ilościowej, dość ogólnikowej, tego co stanowi biomasę Ziemi. Przyjęto obliczanie jej w kategorii zawartości węgla (pierwiastek życia), ustalając jako jednostki gigatony, przy czym 1 Gt C = 10^{15} gramów węgla. Oceniono, że sumarycznie na Ziemi węgiel organiczny stanowi 550 Gt C. Z tego 75% przypada na rośliny, głównie lądowe (te to 60%), 15% na mikroorganizmy, 10% w malejących ilościach na grzyby, archeony, pierwotniaki, zwierzęta i wirusy. Oceany stanowią 71% powierzchni Ziemi, ale biomasę w nich ocenia się na 6 Gt C. Poza rozróżnieniem biomasy na lądową i oceaniczną trzeba jeszcze wyróżnić – jako istotne – to, co „żyje” na głębokości do 8 m pod ziemią lub dnem morskim (90% bakterii należy do tej grupy).

Biomasę ludzką (okrutny termin) ocenia się na nieznaczące 0,06 Gt C. Jednak temu, co ludzie zmienili w proporcjach biomasy Ziemi, należy przyjrzeć się uważnie. W stosunku do biomasy ludzi biomasa wirusów jest 3 razy większa, ryb 12 razy, bezkręgowców 17 razy, 200 razy grzybów, 1 200 razy bakterii i 7 500 razy – roślin. Tymczasem to człowiek zaczął bardzo istotnie modyfikować bilans ziemskiej biomasy. Poza opisanymi badaniami ilościowymi, można też jakościowo opisywać skutki działalności człowieka, badając na przykład zmiany liczebności różnych gatunków i rodzajów organizmów żyjących na Ziemi.

Od początków tworzenia ludzkiej cywilizacji (tylko kilkadziesiąt tysięcy lat temu) człowiek zmienił istotnie proporcje w różnych frakcjach biomasy: zmniejszył liczbę dziko żyjących ssaków o 83%; utraciliśmy 80% ssaków morskich, 50% roślin, 15% ryb. Biomasę dzikich zwierząt szacuje się obecnie na 0,007 Gt C, a hodowlanych – 0,1 Gt C. Dzikie ptactwo to 0,002 Gt C, podczas gdy tylko kurczaki hodowlane stanowią 0,005 Gt C. Wiele gatunków wybiłi(śmy) nieodwracalnie – nie snujcie legend o możliwości odtworzenia wymarłych gatunków, bo także zmieniliśmy nieodwracalnie warunki ich środowisk ziemskich. Niestety, niektórzy oceniają naszą działalność jako prowadzącą do szóstego wielkiego wymierania.

Magdalena FIKUS

Porównywanie wież potęgowych

Karol GRYSZKA *

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Zadanie. Używając dowolnych cyfr oraz operacji $+$, $-$, \cdot , $/$, potęgowania i nawiasów, należy zapisać działanie o możliwie największym wyniku. Czas na zapisanie działania to 10 sekund.

Liczba $9 \uparrow 3 = 9^{9^9}$ ma w rozwinięciu 369 693 100 cyfr. Więcej o dużych liczbach i „wykładnikach strzałek” można znaleźć w *Delcie* 3/2008.

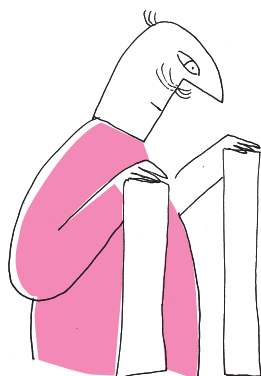
Zwróćmy uwagę, że kolejność wykonywania działań oraz sposób zagnieżdżenia notacji w sobie samej ma znaczenie, np.

$$[[3; 3]; 3] = (3^3)^3 < 3^{3^3} = [3; 3; 3].$$

Prosty przykład normalizacji wieży:
 $[4 \times 3] \approx [10; 154, 127] \approx [10; 10; 2, 188].$

Wszystkie wartości numeryczne zostały uzyskane z wykorzystaniem pakietu WolframAlpha.

Zamiast $\log_{10} x$ w tekście stosowane jest $\log x$.



Drogi Czytelniku, z dużym prawdopodobieństwem zapisałeś coś takiego $9^{9^{\dots^9}}$, czyli *wieżę potęgową*. Działanie $a^{a^{\dots^a}}$ oznaczmy przez $a \uparrow b$, gdzie b oznacza, ile razy liczba a pojawia się w wieży. Możemy rozważyć również wieże, w których kolejne „piętra” nie są taką samą liczbą. Wprowadźmy następującą notację:

$$a_1^{a_2^{\dots^{a_n}}} = [a_1; a_2; \dots; a_n].$$

Przyjmijmy, że wszystkie liczby w wieży, poza ostatnią, muszą być całkowite i niezerowe. Wartość n nazywamy wysokością wieży. Ponadto zastosujemy następujące uproszczenie: jeżeli liczba a pojawia się w wieży k razy pod rząd, to będziemy to oznaczać przez $a \times k$, na przykład:

$$3^{3^{3^3}} = 3 \uparrow 4 = [3; 3; 3; 3] = [3 \times 4], \quad 3^{5^{5^{5^5}}} = [3; 5 \times 4].$$

W tym artykule zajmiemy się takimi właśnie wieżami. Dokładniej, jak już mógł zdradzić tytuł, będziemy starali się wskazać sposób porównywania wież.

Zacniemy od znalezienia ogólnego sposobu na zapisanie wyrażenia $[a_1; a_2; \dots; a_n]$ za pomocą wieży $[10 \times k; y]$, gdzie $k > 0$ jest naturalne, a $y \in [1, 10)$, czyli

$$[a_1; a_2; \dots; a_n] = [10 \times k; y].$$

Przy tym staramy się znaleźć takie y , żeby nie zmieniać wartości wieży, albo (co częstsze) zmienić ją możliwie nieznacznie. Wieżę $[10 \times k; y]$ nazwiemy *znormalizowaną*. Sprowadzanie dwóch wież do takiej postaci pozwala sprawnie porównać ich wartości – wystarczy porównać wysokości wież znormalizowanych oraz, jeśli wysokości są identyczne, ostatnią liczbę w wieży. Na kilku przykładach zaprezentujemy normalizację.

Przykład 1. Rozważmy $[9; 9]$ i znajdziemy takie x , dla którego zachodzi $9^9 = 10^x$. Oczywiście $x = \log 9^9 = 9 \log 9 \approx 8,588$, a więc

$$[9; 9] = [10; 9 \log 9] \approx [10; 8,588].$$

Przykład 2. Weźmy $[9 \times 3]$ i znajdziemy takie x , że zachodzi $9^{9^9} = 10^x$. W tym przypadku $x = 9^9 \log 9 \geq 10$. Kolejnym krokiem jest znalezienie takiego x_1 , że $x = 10^{x_1}$. Oczywiście $x_1 = \log x = 9 \log 9 + \log(\log 9) \approx 8,568$, czyli ostatecznie

$$[9 \times 3] = [10; 10; x_1] \approx [10; 10; 8,568].$$

Przykład 3. Rozważmy wreszcie liczbę $[9 \times 4]$ i postąpmy podobnie jak wcześniej. Mamy kolejno: $[9 \times 4] = 10^x$, $x = [9 \times 3] \log 9$, $x_1 = \log x = 9^9 \log 9 + \log(\log 9)$, $x_1 = 10^{x_2}$, $x_2 = \log x_1 = \dots$. I tu napotykamy kłopot, gdyż liczba x_1 jest sumą dwóch liczb, a nie da się rozbić logarytmu sumy. Zamiast tego spójrzmy na składniki x_1 i zauważmy, że zachodzi $|9^9 \log 9| \gg |\log(\log 9)|$. (Obie strony rozważamy w modułach, gdyż liczba $\log \log 9$ jest ujemna.) Istotnie, $9^9 \log 9 \approx 10^{8,568}$ oraz $\log(\log 9) \approx -0,02$. W takim razie zaniedbajmy ten mały składnik. Wtedy $x_1 \approx 9^9 \log 9$ i ostatecznie $x'_2 = 9 \log 9 + \log \log 9$ oraz

$$[9 \times 4] \approx [10 \times 3; x'_2] \approx [10 \times 3; 8,568].$$

Różnica między najwyższymi piętrami, to jest między x_2 i x'_2 , wynosi $|\log(9^9 \log 9 + \log(\log 9)) - (9 \log 9 + \log(\log 9))| < 10^{-10}$, jest więc relatywnie mała.

Spójrzmy teraz na problem szacowania z nieco innej strony. Najpierw parę narzędzi. Zapiszmy $\log(x+y) = \log(x \cdot (1 + \frac{y}{x})) = \log x + \log(1 + \frac{y}{x})$ i podstawmy $z = y/x$. Następnie rozwińmy drugi składnik w szereg Taylora w punkcie $z_0 = 0$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n \ln 10}.$$

Szereg Taylora pozwala na przedstawienie wartości funkcji f w pewnym punkcie x za pomocą wyrażenia podobnego do wielomianowego. Ustala się pewien punkt bazowy x_0 , i wtedy dla wszystkich x takich, że $|x - x_0| < R$ dla stosownie dobranego R można zapisać:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

gdzie $f^{(n)}$ oznacza n -tą pochodną funkcji f . U nas rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $\log(1+z)$ jest możliwe tylko dla takich z , dla których $|z| < 1$.

Każda wskazówka jest dobra, w tym jednak przypadku pokazanie, że ciąg x_n jest malejący, nie jest natychmiastowe – wymaga dużo ostrożności w obliczeniach i szacowaniach.

Przykład dla $n = 3$:

$$a^{a^{a^a}} < (a^{a^a})^{a^{a^a}} = a^{a^a \cdot a^{a^a}} < a^{a^{a^a a^a}}$$

Wzór Stirlinga pozwala przybliżyć silnie dużych liczb za pomocą wyrażenia potęgowego

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Podstawiając wartości z Przykładu 3., otrzymujemy $z = \frac{\log \log 9}{9^9 \log 9} \approx -5,5 \cdot 10^{-11}$.

Sprawdźmy, jak wygląda analogiczne przybliżenie dla liczby $[9 \times 5]$. W tym przypadku pierwsze przybliżenie stosowane jest do liczb $x = [9 \times 3] \log 9$ oraz $y = \log \log 2$, a więc $z = \frac{y}{x} \approx -[10; -10; 8,568]$. Ta liczba jest mała, więc możemy dokonać następującego przybliżenia (tylko pierwszy wyraz szeregu Taylora): $\log(1+z) \approx \frac{z}{\ln 10}$, i stwierdzić, że te wartości nie różnią się prawie wcale.

Powyższe przykłady dostarczają nam takiej oto strategii w normalizowaniu wież:

1. Aby wyznaczyć następny wykładnik, należy zlogarytmować ten otrzymany w poprzednim kroku (logarytmowanie dziesiętne).
2. Rozsądne jest stosowanie wspomnianych przybliżeń (szczególnie dla wież o wysokości co najmniej 4) – popełniany w ten sposób błąd jest znikomy dla szacowania ostatniego wykładnika.
3. Powtarzane przybliżenia zawsze prowadzą do opuszczania takiego samego składnika: $\log \log 9$, który dla liczb postaci $[9 \times n]$ jest tym mniejszy od reszty, im większe jest n .

Korzystając z powyższej strategii, możemy przekonać się, że dla $n > 2$ zachodzi następująca zależność:

$$(4) \quad [9 \times n] \approx [10 \times (n - 1); 8,568].$$

Czy ostatnia liczba w wieży znormalizowanej jest stała, tj. nie zależy od wysokości wieży? Oczywiście dokładne obliczenia pokazują, że tak nie jest, a otrzymane podobieństwo wynika jedynie ze stosowanych przybliżeń. Czy to więc przypadek, czy reguła? Kwestię tę rozwiązuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Mając dane wieże $[9 \times n]$ i ich postaci znormalizowane $[10 \times (n - 1); x_n]$, rozważmy ciąg liczbowy (x_n) . Granica $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ istnieje.*

Dowód twierdzenia pomijamy, udzielając jednak wskazówki dla Czytelnika Ambitnego – wystarczy wykazać, że ciąg (x_n) jest malejący. Powróćmy do porównywania wież i skomplikujmy nieco zadanie, dopuszczając działanie silni.

Rozważmy wartości $[9 \times 22]!$, $[9 \times 21; 9]$ oraz $[9! \times 14]!$. Wiemy już, że $[9 \times 22] \approx [10 \times 21; 8,568]$, i możemy się przekonać, że $[9! \times 14] \approx [10 \times 14; 6,305]$.

Łatwo teraz porównać te liczby oraz ich silnie. Widać, że strategia zwiększania liczb potęgowanych kosztem obniżania wysokości wieży nie opłaca się. Zauważmy ponadto, że nierówność $[9! \times 21] < [9 \times 22]$ wydaje się na pierwszy rzut oka nieprawdopodobna!

Pozostaje nam jeszcze porównać liczbę $[9 \times 21; 9!] \approx [10 \times 22; 5,539]$ z pozostałymi. W tym celu oszacujemy liczbę $[9! \times 14]!$. Można sprawdzić, że $[a \times (2n - 1)] < [a \times n]^{[a \times n]} < [a \times 2n]$. Stosując wzór Stirlinga, otrzymujemy

$$[9! \times 14]! \approx [10 \times 14; 6,305]! > [10 \times 14]! > [10 \times 27].$$

Składniki $e^{[10 \times 14]}$ oraz $\sqrt{2\pi[10 \times 14]}$ pomijamy, gdyż nie mają one żadnego wpływu na wysokość postaci znormalizowanej.

Jaki jest więc werdykt końcowy? Oto on:

$$[9 \times 21; 9!] < [9! \times 14]! < [9 \times 22]!,$$

przy czym liczba z lewej jest znikoma w porównaniu ze środkową, a liczba środkowa jest znikoma w porównaniu z prawą.

Przedstawimy teraz inną metodę porównywania wież. Nasze rozumowanie przeprowadzimy w sytuacji, gdy bazą nie jest liczba 10, lecz pewna ustalona liczba naturalna $N > 2$. Założmy mianowicie, że dane są dwie liczby A i B :

$$A = [N \times n; y], \quad B = [b_1; \dots; b_n; x],$$

gdzie $x, y > 1$ (zauważmy, że wieże mają taką samą wysokość). Odpowiemy teraz na następujące pytanie: *co musimy wiedzieć o x i y , żeby stwierdzić, że $A < B$ niezależnie od wyboru liczb $b_i \in \{2, \dots, N\}$?* Tak sformułowane pytanie w istocie upraszcza problem; przyjmijmy najgorszy scenariusz, tj. $b_i = 2$ dla wszystkich i .

Twierdzenie 2. Niech $K = \log_2 N$. Jeśli $x > 2Ky$, to $A < B$.

Dowód. Niech $n = 1$. Wtedy łatwo sprawdzić, że $2^x > N^{2y} > N^y$. Rozważmy teraz $n > 1$. Zauważmy, że

Skoro $N > 2$, to

$$y > 1 > \log_N(2 \log_2 N)$$

oraz

$$N^{2y} > N^{y + \log_N(2 \log_2 N)} = 2 \log_2 N \cdot N^y.$$

$$2^x > 2^{2Ky} = N^{2y} > 2 \log_2 N \cdot N^y = 2KN^y.$$

Niech teraz $y' = N^y$ oraz $x' = 2^x > 2KN^y = 2Ky'$. Wtedy

$$[N; N; y] = [N; y'] < [2; x'] = [2; 2; x].$$

Kończy to dowód indukcyjny. □

Przyjrzyjmy się teraz następującemu przykładowi. Wiemy już, że $[9 \times 22] \approx [10 \times 21; 8,568]$. Zgodnie z Twierdzeniem 2. dla $N = 9$ oraz $y = 9$ dowolne $x > 57,1 > 2 \log_2 9 \cdot 9$ gwarantuje to, że niezależnie od doboru b_1, \dots, b_{21} wyrażenie $[b_1; \dots; b_{21}; x]$ będzie większe od $[9 \times 22]$. Tym samym

$$[9 \times 22] < [2 \times 21; 58].$$

Jest to kolejna nieprawdopodobna nierówność! Stosując Twierdzenie 2. dla $N = y = 9!$, możemy się ponadto przekonać, że

$$2 \log_2 9! \cdot 9! = 13\,404\,157,980 \dots$$

$$[9! \times 21] < [9 \times 20; 13\,404\,158] < [9 \times 20; 9^9] = [9 \times 22],$$

a więc raz jeszcze otrzymujemy nierówność wcześniej uzyskaną inną metodą. Twierdzenie 2. niesie za sobą jeszcze więcej. Dla *dowolnego* $n > 0$ zachodzą następujące nierówności:

Druga nierówność to konsekwencja relacji

$$13\,404\,158 < [2 \times 5].$$

- $[9! \times n] < [9 \times (n + 1)]$,
- $[9! \times n] < [2 \times (n - 1); [2 \times 5]] = [2 \times (n + 4)]$.

* takimi z pewnością są uczniowie startujący w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego (do udziału w którym serdecznie zachęcamy).

Więzami okresowymi są wyrażenia

$$[3; 2; 3; 2], [4; 2; 3; 4; 2; 3; 4; 2; 3].$$

Na zakończenie kilka potencjalnych problemów dla Czytelników Dociekliwych i Cierpliwych*.

1. Czy Twierdzenie 1. można uogólnić na przypadek, gdy w wieży wyrazy pojawiają się okresowo?
2. Czy Twierdzenie 2. daje się poprawić tak, aby było stosowne dla wież o *różnych* wysokościach?



Zobaczyć niewidoczne

*Jakub NALEPA**

*Instytut Informatyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach

Każdy z nas może z łatwością wymienić zawody, których wykonywanie naraża ludzi na ciągły stres. Często stres jest związany z tym, że decyzje podejmowane w codziennej pracy wpływają na zdrowie (i życie) innych. Strażak, ratownik medyczny, chirurg, pilot, radiolog... Wszyscy muszą działać szybko, a koszt potencjalnych pomyłek może być dramatycznie wysoki. Warto zauważyć, że proces podejmowania decyzji w praktyce polega na analizie różnych danych (w czasie rzeczywistym), np. w przypadku danych medycznych mogą to być różne rodzaje (*modalności*) obrazów, zawierające różne informacje o pacjencie. Zobaczymy, jak sztuczna inteligencja może ułatwić proces podejmowania takich decyzji.

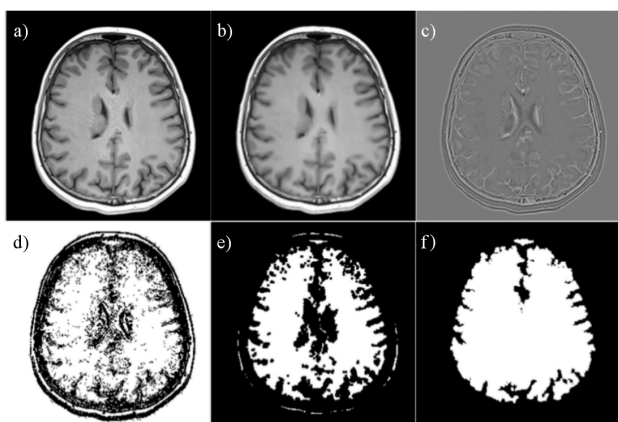
Obraz mówi więcej niż tysiąc słów

Skupmy się na analizie obrazów medycznych wykorzystywanych w onkologii. Celem takiej analizy, która z reguły jest przeprowadzana przez radiologa (lub fizyka medycznego), jest dostrzeżenie pewnych regionów w obrazie, które mogą być wykorzystane do postawienia diagnozy lub oceny tego, jak pacjent reaguje na zastosowany rodzaj leczenia. Bardzo często wykonywany jest *ręczny* opis (obrys) zmiany nowotworowej (w 2D lub w 3D), a następnie wyznaczana jest jej powierzchnia lub objętość. Oczywiście to nie jedyna wielkość liczbową, która może „opisywać” (*kwantyfikować*) zmianę nowotworową i która może zostać wyekstrahowana z sekwencji obrazów medycznych. Obraz mówi więcej niż tysiąc słów – musimy tylko (i aż) wiedzieć, czego i jak szukać.

Bardzo istotną kwestią w analizie obrazów medycznych jest zapewnienie powtarzalności wyników. Wyobraźmy sobie sytuację, w której ten sam obraz jest ręcznie segmentowany przez dwie doświadczone osoby, z których pierwsza oznacza zmianę nowotworową w sposób bardziej „konserwatywny” (tj. stara się jak najdokładniej oznaczyć granicę nowotworu), a druga z osób oznacza nowotwór mniej dokładnie. Ten sam obraz, ten sam nowotwór, a wyniki liczbowe wyraźnie się różnią. . . Dodajmy do tego jeszcze fakt, że pacjent, gdy przychodzi do szpitala (załóżmy w czasie t_0), jest poddawany badaniu obrazowemu. Następnie jest leczony, a kolejne badania obrazowe są przeprowadzane w czasie t_1 i t_2 . Możemy sobie łatwo wyobrazić, że jeśli poszczególne badania będą opisywane przez różne osoby, a przyjęte strategie segmentacji będą inne, to ocena progresu (lub regresu) choroby w czasie od t_0 do t_2 (np. wspomniana objętość nowotworu) może być niemiarodajna lub nawet myląca.

Na pomoc radiologom

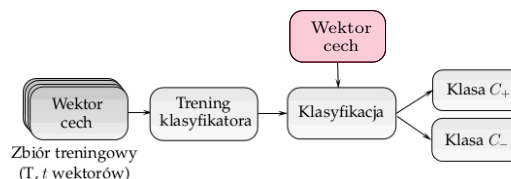
Odpowiedzią na problem opisany powyżej jest automatyzacja wstępnej analizy (segmentacji) obrazów. Oczywiście nie dążymy do zastąpienia pracy radiologa, ale do jej ułatwienia, przyspieszenia i do zapewnienia



Rys. 1. Kolejne kroki przetwarzania obrazu wejściowego rezonansu magnetycznego (a) w przykładowym algorytmie segmentacji mózgu, opartym o techniki przetwarzania i analizy obrazów: (b) wynik dyfuzji anizotropicznej, (c) wynik filtracji obrazu (filtr *Laplacian of Gaussian*), (d) wyekstrahowane „granice” anatomiczne, (e) wynik erozji, (f) wysegmentowany region („maska”) mózgu. Przykład został zaczerpnięty z publikacji [1].

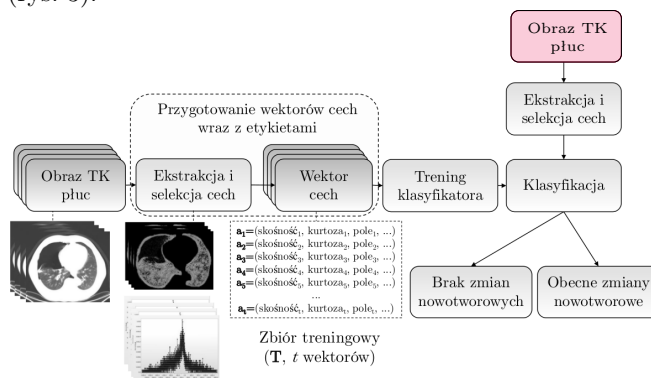
takich warunków, by segmentacja była zawsze wykonywana w ten sam (powtarzalny) sposób. Do segmentacji możemy użyć zarówno tradycyjnych algorytmów opartych o techniki analizy obrazów (przykład kolejnych kroków algorytmu segmentacji mózgu w obrazie rezonansu magnetycznego głowy jest przedstawiony na rysunku 1), jak i metod wykorzystujących uczenie maszynowe (ang. *machine learning*). Drugą grupę algorytmów możemy podzielić na „tradycyjne” techniki uczenia maszynowego (tj. takie, które wykorzystują ręcznie wyekstrahowane cechy) i uczenie głębokie (ang. *deep learning*), w którym cechy ekstrahowane są automatycznie.

Tego rodzaju algorytmy są stosowane do *klasyfikacji* pikseli (lub tzw. wokseli w przypadku trójwymiarowym) do jednej z klas. Jeśli rozważymy problem klasyfikacji dwuklasowej (nazywanej też *binarną*), to pikselowi przypisywana jest etykieta jednej z dwóch klas (np. *zmiana nowotworowa* lub *zdrowa tkanka*). Każdy z pikseli jest opisany przez tzw. *wektor cech*, a przykłady pikseli należących do obu klas tworzą *zbiór treningowy*, który jest użyty w czasie treningu klasyfikatora (w procesie tzw. *treningu nadzorowanego* lub *treningu z nauczycielem* – patrz rysunek 2).

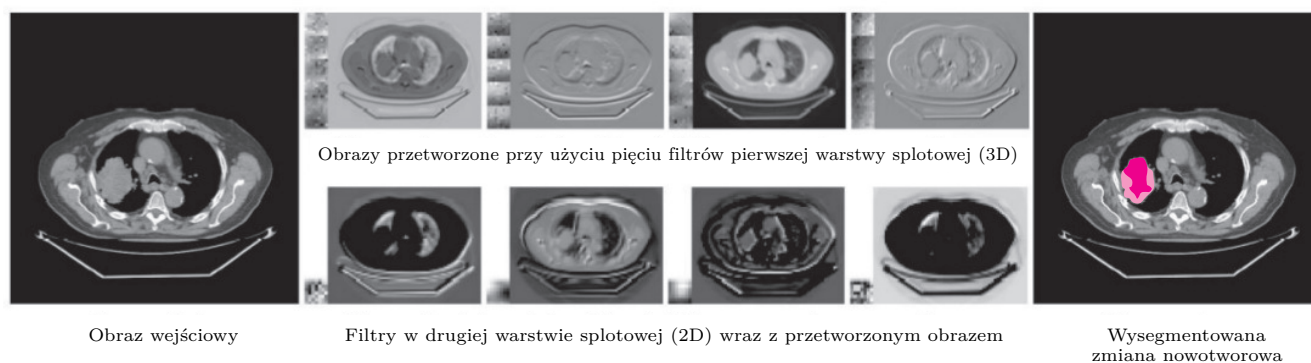


Rys. 2. Klasyfikacja nadzorowana – klasyfikator (przypisujący pikselom etykiety klasy) jest trenowany przy użyciu zbioru treningowego T zawierającego t przykładów i jest wykorzystany do klasyfikacji *nowych danych* (tj. takich, które nie były użyte w czasie treningu) – na rysunku oznaczonych kolorem.

Łatwo zauważyć, że w przypadku cech ręcznie ekstrahowanych musimy je wcześniej zdefiniować. Żeby zdefiniować *dobre* cechy (czyli takie, które pozwolą na wytrenowanie wysokiej jakości klasyfikatora), musimy – ponownie – wiedzieć „czego szukamy”. Intensywność (jasność) pikseli, cechy teksturalne, cechy wyekstrahowane po filtracji obrazu. . . To tylko nieliczne przykłady cech, które mogą opisywać obiekty w obrazie (rys. 3).



Rys. 3. Ręczna ekstrakcja cech opisujących obiekty jest zadaniem *bardzo* trudnym. Jakie cechy? Ile cech? Odpowiedź na te pytania musimy znaleźć przed treningiem naszego klasyfikatora.



Rys. 4. Wytreinowane filtry w warstwach splotowych (2D i 3D) mogą pozwolić na ekstrakcję wcześniej nieznanymi cech z obrazów. Na rysunku widzimy przykłady przetworzonych obrazów. Czy te obrazy przypominają Ci takie, które moglibyśmy otrzymać, stosując standardowe techniki przetwarzania (filtracji) obrazów? Ciemniejszym kolorem zaznaczono część nowotworu, która została poprawnie wysegmentowana przy użyciu sieci głębokiej, a jaśniejszym kolorem zaznaczaliśmy fałszywe negatywy, tj. piksele, które zostały oznaczone przez sieć jako przedstawiające tkankę zdrową, a w rzeczywistości są częścią nowotworu. Ten rysunek został zainspirowany pracą [2].

Liczba cech może być bardzo duża, dlatego często wykonuje się dodatkową *selekcję cech* – wybieramy tylko najważniejsze cechy (tutaj z pomocą mogą przyjść np. algorytmy ewolucyjne).

W ostatnich latach w literaturze pojawia się coraz więcej technik opartych o *automatyczną ekstrakcję cech*. Bardzo dobrym przykładem takich automatycznych ekstraktorów są *głębokie sieci neuronowe* (ang. *deep neural networks*). Zauważmy, że głęboką sieć splotową można podzielić na dwie „części” – ekstraktor cech (zawierający np. warstwy splotowe, ang. *convolutional layers*, czy warstwy tzw. grupowania cech, ang. *pooling*) oraz klasyfikator. Co możemy zyskać, używając takich automatycznych ekstraktorów cech.

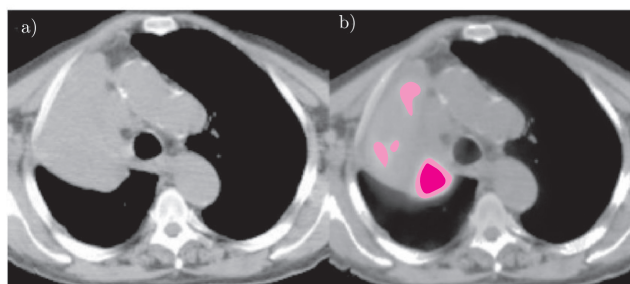
Zobaczyć (i zrozumieć) więcej

Możemy (przynajmniej spróbować) „zobaczyć” to, co niewidoczne gołym okiem. Jeśli mamy wystarczająco duży zbiór (zróżnicowanych) danych treningowych (co w praktyce jest, niestety, rzadkie), to możemy liczyć na to, że po treningu uzyskamy ekstraktor cech, o których moglibyśmy wcześniej nie pomyśleć. Spójrzmy na rysunek 4 – przedstawiamy na nim przykłady filtrów w sieci splotowej (której część ekstrahująca cechy składa się z jednej dwu- i jednej trójwymiarowej warstwy splotowej). Jak widać, część z przetworzonych przez te wytreinowane filtry obrazów przypomina takie obrazy, które moglibyśmy uzyskać, stosując różne (znane) algorytmy filtracji obrazów. Ale nie wszystkie... Konia z rzędem temu, kto wpadłby na zastosowanie właśnie takich filtrów do ekstrakcji cech!

Powyższa sieć (z dołączonymi warstwami klasyfikacyjnymi) została wykorzystana do segmentacji obrazów płuc otrzymanych za pomocą tomografii komputerowej (TK). W obrazach wyszukiwaliśmy zmiany charakteryzujące się tzw. *wysokim wychwytem* znacznika (substancji promieniotwórczej), wprowadzonego do ciała skanowanego pacjenta (ang. *high-uptake lesions*). Co ciekawe, do analizy tego rodzaju zmian wykorzystuje się tzw. *pozytonową tomografię emisyjną* (ang. *positron emission tomography*, PET) – w innym obrazowaniu, na przykład właśnie w TK, takie nowotwory są po prostu... niewidoczne.

Spójrzmy na przykład pokazany na rysunku 5 – charakterystyka nowotworu jest bardzo trudna (lub niemożliwa) do „uchwycenia” w obrazie TK, bez wykorzystania obrazu PET.

Wyniki badań, które zaprezentowaliśmy w pracy [2], okazały się bardzo obiecujące. Głęboka sieć splotowa, wytrenowana przy użyciu obrazów TK, umożliwiła segmentację zmian o wysokim wychwytem w TK (jakość segmentacji zależała od wielkości nowotworu – im większy nowotwór, tym z większą pewnością był segmentowany). Zobaczenie „niewidocznego” (nie tylko w TK, ale też w innych modalnościach) może pomóc w jak najlepszym dostosowaniu rodzaju leczenia (i polepszeniu jakości życia) u pacjentów z chorobami nowotworowymi. Wykorzystajmy to, co widać, i to, co „ukryte” w obrazach medycznych, w efektywnej walce z rakiem.



Rys. 5. Po nałożeniu obrazu PET na obraz TK (b) widać wyraźnie charakterystykę zmian nowotworowych, które nie są widoczne w obrazie TK (a). Przykład został zaczerpnięty z pracy [3].

Literatura

- [1] Walczak, M., Nalepa, J., Kawulok, M., Dudzik, W., and Smolka, B., “Evolutionary cortical surface segmentation,” in [Proc. SPIE RIVP], 1–11 (2018).
- [2] Pawelczyk, K., Kawulok, M., Nalepa, J., Hayball, M. P., McQuaid, S. J., Prakash, V., and Ganeshan, B., “Towards detecting high-uptake lesions from lung CT scans using deep learning,” in [Image Analysis and Processing – ICIAP 2017 – 19th International Conference, Catania, Italy, September 11–15, 2017, Proceedings, Part II], 310–320 (2017).
- [3] Hochhegger, B., Alves, G. R. T., Irion, K. L., Fritscher, C. C., Fritscher, L. G., Concato, N. H., and Marchiori, E., “PET/CT imaging in lung cancer: indications and findings,” *J Bras Pneumol* 41(3), 264–274 (2015).

Jeszcze w zielone gramy

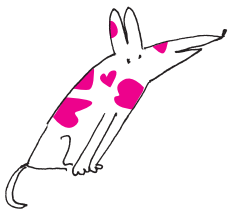
Janusz KRYWULT*

*Zakład Astrofizyki, Instytut Fizyki,
Uniwersytet Jana Kochanowskiego



Jedną z cech decydujących o wspaniałości większości bajek Disneya jest ich „wielowarstwowość” – inaczej odbiera je małe dziecko, inaczej nastolatek, a jeszcze inaczej osoba dorosła; wszyscy jednak mogą się przy nich świetnie bawić i w każdym pozostawiają coś wartościowego. Ciężko oprzeć się temu skojarzeniu podczas zapoznawania się z dwiema edukacyjnymi pozycjami – „W pogoni za nieskończonością” oraz „Wykresy unplugged”. Ich „wspólnym mianownikiem” jest Przemysław Biecek, znany popularyzator wnioskowania opartego na danych (oraz autor *Delty!*). W tworzeniu pierwszej miał również udział Łukasz Maciejewski, a drugiej: Ewa Baranowska i Piotr Sobczyk. W „Pogoni za nieskończonością” towarzyszymy dwójce młodych bohaterów, Becie i Bitowi, w pięknie ilustrowanych przygodach, dzięki którym odkrywają oni różne aspekty nieskończoności. „Wykresy unplugged” to z kolei doskonały trening kreatywności, połączony z nauką podstaw wizualizacji danych. Wszystko ładnie wydane, cieszące oko i – podobnie jak bajki Disneya – dające radość i naukę zarówno małym jak i dużym. Polecamy!

Redakcja



Galaktyki z bliskiego nam Wszechświata wykazują dużą różnorodność budowy. Klasyczna, wprowadzona prawie sto lat temu, klasyfikacja Hubble’a dzieli je na podstawowe typy morfologiczne: galaktyki dyskowe, eliptyczne i nieregularne.

W galaktykach spiralnych, do których zaliczamy Drogę Mleczną, gwiazdy w dysku krążą wokół centralnie położonego jądra, a ich rozmieszczenie w ramionach spiralnych odpowiada za charakterystyczny kształt tych obiektów. Ciągłe zachodzące procesy gwiazdotwórcze zawdzięczają swą aktywność obłokom gazu i pyłu, a populacja młodych gwiazd nadaje tym obiektom kolor niebieski. Natomiast orientacja orbit gwiazd w galaktykach eliptycznych jest prawie izotropowa, nadając im kształt trójosiowych elipsoid. Obiekty te są niemal pozbawione gazowych obłoków i mają szczątkową aktywność gwiazdotwórczą. Dominująca w nich populacja starych gwiazd odpowiada za ich czerwoną barwę.

Niezmiernie ciekawym zagadnieniem jest powstanie i ewolucja galaktyk. Czy galaktyki różnych typów morfologicznych uformowały się na początku istnienia Wszechświata? A może z upływem czasu jedne z nich transformowały się w inne? Niewątpliwie skala czasowa tych zmian, wynosząca miliardy lat, nie pozwala prześledzić tego procesu dla jednego obiektu. Z pomocą przychodzą nam obserwacje odległych galaktyk. Ponieważ Wszechświat rozszerza się, więc obserwując dalsze jego rejony, sięgamy w przeszłość, a galaktyki widzimy jako młodsze od tych z najbliższego nam otoczenia. Tego typu badania – wymagające zebrania olbrzymiego, liczącego co najmniej setki tysięcy obiektów, materiału obserwacyjnego – stały się możliwe dopiero niedawno (m. in. dzięki projektom GAMA dla bliskich galaktyk czy VIPERS sięgającego do połowy obecnego wieku Wszechświata).

Barwa galaktyk

Całe bogactwo informacji o budowie galaktyk dają ich widma. Jednak obserwacje spektroskopowe słabych obiektów wymagają bardzo długich czasów ekspozycji oraz wykorzystania największych teleskopów. Znacznie szybciej obszerny materiał obserwacyjny możemy zebrać z wielobarwnej fotometrii wykonanej w kilku filtrach, np. w klasycznym systemie Johnsona UBVRI. Dysponując tą prostą metodą, jesteśmy w stanie oszacować kolor galaktyki, wyznaczając różnicę jasności obiektu w kilku wybranych filtrach. Umożliwia ona określenie poziomu aktywności gwiazdotwórczej badanych obiektów, a tym samym identyfikację galaktyk dyskowych (niebieskich) i eliptycznych (czerwonych) oraz pozwala szybko sięgnąć w odległe zakątki Wszechświata.

Bimodalność koloru

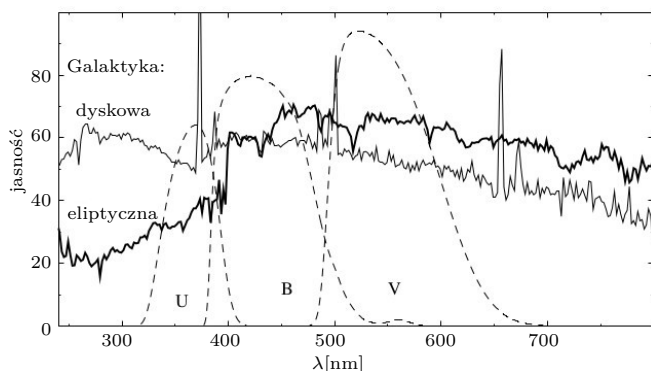
Analiza histogramu koloru galaktyk z bliskiego nam Wszechświata pokazała jego bimodalność. Obserwowany przez nas świat galaktyk podzielony jest na dwa obozy.

Niebieski obszar większego i szerszego maksimum dystrybucji koloru odpowiada galaktykom dyskowym, a węższe maksimum tworzą galaktyki eliptyczne.

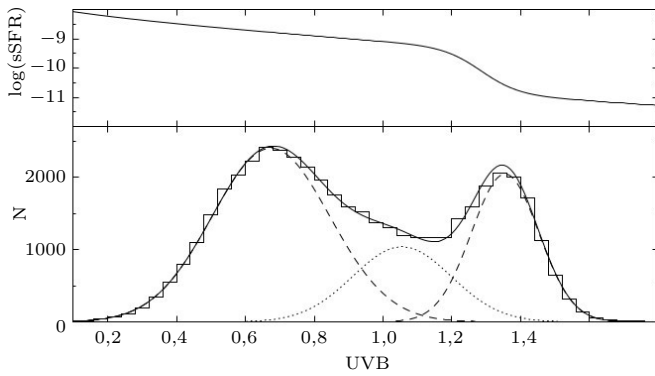
Dalsze badania stwierdzają, że już 8 miliardów lat temu istniał wyraźny podział na galaktyki dwóch głównych typów morfologicznych.

Istnienie dwóch populacji galaktyk rodzi pytania. Jak one powstały i jaki jest związek między nimi?

Jeżeli aktywność gwiazdotwórcza galaktyk dyskowych wskazuje na to, że są one młodsze od eliptycznych, to czy wszystkie galaktyki eliptyczne powstały dawno, w początkowych fazach ewolucji Wszechświata, czy też proces ich powstawania jest ciągły i trwa do chwili obecnej? Na dominację tego drugiego scenariusza



Rys. 1. Przykładowe widmo galaktyki dyskowej i eliptycznej oraz krzywe transmisji filtrów U, B i V. Barwa obiektu jest definiowana jako różnica jasności danego obiektu w dwóch różnych filtrach lub ich kombinacji.



Rys. 2. Histogram koloru galaktyk VIPERSa położonych w zakresie przesunięcia ku czerwieni 0,5–1,0. Skrajnie przerywane linie obejmują kolejno populację galaktyk dyskowych i eliptycznych, a kropkowana – obiekty z zielonej doliny. Górny wykres szacuje aktywność gwiazdotwórczą galaktyk (sSFR) w funkcji koloru.

wskazują symulacje komputerowe formowania się struktur we Wszechświecie. W procesie hierarchicznego scenariusza, w wyniku łączenia się galaktyk dyskowych powstają galaktyki eliptyczne. Model ten wyjaśnia też wzrost liczebności galaktyk eliptycznych w miarę upływu czasu oraz większą masę gwiazdową typowych galaktyk eliptycznych od dyskowych. Jeżeli formowanie się galaktyk eliptycznych zachodzi również w chwili obecnej, to powinna istnieć grupa galaktyk będących w fazie transformacji. Obiekty te powinny mieć mniejszą aktywność gwiazdotwórczą na jednostkę masy gwiazdowej niż galaktyki dyskowe, ale większą niż eliptyczne.

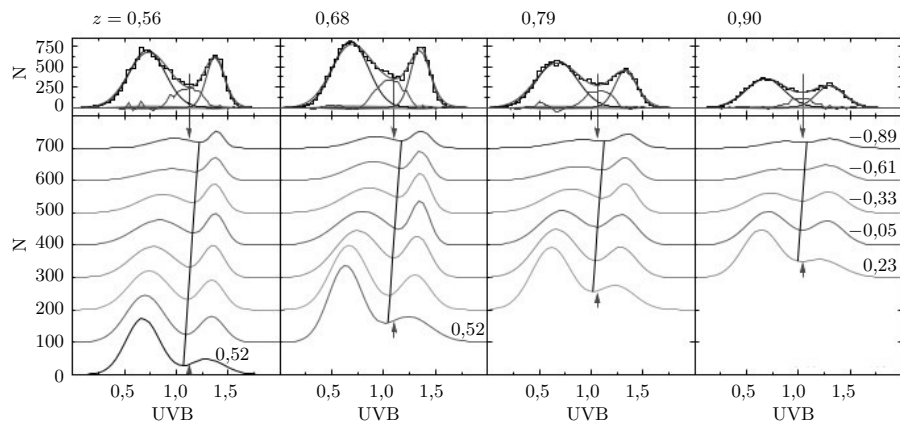
Zielona dolina

Występujące na histogramie koloru dwa maksima wyraźnie identyfikują galaktyki dyskowe i eliptyczne. Spodziewamy się, że między nimi rozciąga się intrygujący obszar obiektów będących w fazie przejściowej, podróżujących z obszaru obiektów dyskowych do eliptycznych, tak zwanych galaktyk z zielonej doliny. Zielona dolina jest wygodnym i prostym sposobem identyfikacji obszaru galaktyk przejściowych, w których zachodzi szybki proces spadku aktywności gwiazdotwórczej i przebudowy fizycznego kształtu galaktyk. Galaktyki dyskowe nie umierają, a przekształcają się w eliptyczne – tracą dyski, a rozkład orbit gwiazd wokół jądra staje się niemal izotropowy. Procesowi temu towarzyszy utrata obłoków

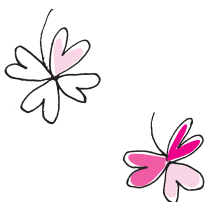
gazu. Wzrasta populacja starych gwiazd i następuje poczerwienienie barwy galaktyk. Tak drastyczna zmiana może zająć w wyniku kolizji galaktyk, łącznie z połączeniem się ich w jeden obiekt. Modele fizyczne i symulacje komputerowe pokazują, że proces ten trwa około miliarda lat. Uwzględniając masy i rozmiary galaktyk, widzimy, że jest on bardzo gwałtowny.

Aktualnym pytaniem jest, w jakim stopniu ta trzecia populacja galaktyk jest jednorodna pod względem zachodzących w nich procesów i własności fizycznych. Histogram koloru wszystkich galaktyk pokazuje nie tylko jego bimodalną strukturę, ale również wyraźną nadwyżkę galaktyk w rejonie zielonej doliny ponad sumę dwóch rozkładów Gaussa. Zajrzyjmy teraz głębiej w ten obszar, w zakresie przesunięć ku czerwieni od $z = 0,5$ do 1, i podzielmy galaktyki pod względem przesunięcia ku czerwieni oraz jasności absolutnych galaktyk. Obraz, który nam się pojawia, uwidacznia, że w każdym z przedziałów rozkład barwy galaktyk jest dobrze opisany sumą dwóch funkcji Gaussa. Wyraźnie też widać zależne od jasności i redshiftu przesunięcia położen lokalnych minimów, maksimów oraz amplitud rozkładów, od których zależy liczebność każdej z populacji. Wskazują one, że z upływem czasu barwa jasnych, a więc masywnych galaktyk, gwałtownie czerwienieje. Odpowiada za to szybki spadek aktywności gwiazdotwórczej spowodowany utratą rezerwuaru gazu, z którego formują się gwiazdy. Tempo transformacji galaktyk dyskowych w eliptyczne jest szybkie i tak też powiększa się ich populacja. Natomiast mniej jasne galaktyki znacznie wolniej przekraczają obszar zielonej doliny.

Różne tempo tych przemian zakłóca czystą bimodalność koloru, gdy analizujemy obiekty w szerokim zakresie jasności absolutnej, a sumowanie poszczególnych dystrybucji prowadzi do wyraźnej liczbowej nadwyżki galaktyk w obszarze zielonej doliny. Nie tworzą one spójnego typu morfologicznego, a są konglomeratem galaktyk o różnych jasnościach i stadiach ewolucji. Wśród jasnych obiektów tego rejonu znajdujemy galaktyki dyskowe, natomiast eliptyczne obserwujemy raczej jako obiekty słabsze. Ciągłe płonie zielone światło dla badań budowy i ewolucji galaktyk nam bliskich i tych z odległych zakątków Wszechświata.



Rys. 3. Rozkład koloru galaktyk w czterech zakresach średniego przesunięcia ku czerwieni (z) dla różnych wartości jasności absolutnej M_B [mag] podanych nad krzywymi.



Informatyczny kącik olimpijski (124):

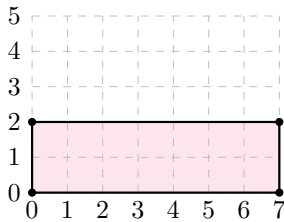
Wyspa i liczydło

Tym razem omówimy dwa zadania: *Wyspę* z IX OIG oraz *Liczydło* z XII OIG.

Wyspa: Dany jest prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, którego lewy-dolny róg ma współrzędne $(0, 0)$, zaś prawy-górny róg ma współrzędne (N, M) . Dla podanego $P \in \mathbb{N}$ ($P \leq \frac{NM}{2}$) chcemy znaleźć taki czworokąt wypukły o polu P , którego wierzchołki mają współrzędne całkowite oraz należą do prostokąta.

Przypadek: $N \mid P$

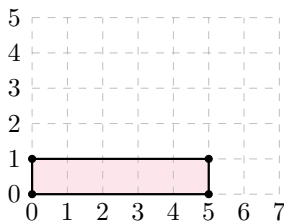
Rozważmy najpierw przypadek, kiedy $N \mid P$. Wtedy możemy zbudować prostokąt, którego wierzchołkami są: $(0, 0)$, $(N, 0)$, $(N, \frac{P}{N})$ i $(0, \frac{P}{N})$. Przykład dla: $N = 7$, $M = 5$, $P = 14$.



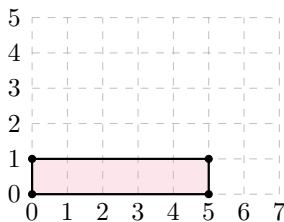
Przypadek: $N \nmid P$

Ten przypadek przeanalizujemy w trzech krokach:

1. Jeśli $P < N$, wtedy możemy zbudować prostokąt, którego wierzchołkami są: $(0, 0)$, $(P, 0)$, $(P, 1)$ i $(0, 1)$. Przykład dla: $N = 7$, $M = 5$, $P = 5$.

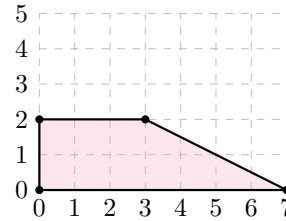


2. Jeśli $N < P < 2N$, wtedy możemy zbudować trapez, którego wierzchołkami są: $(0, 0)$, $(N, 0)$, $(P - N, 2)$ i $(0, 2)$. Przykład dla: $N = 7$, $M = 5$, $P = 10$.



3. Został nam do rozpatrzenia przypadek, kiedy $2N < P$. Niech:

- $P_c = N \lfloor \frac{P}{N} \rfloor$ (największa wielokrotność N nie większa niż P),
 - $H = 2 \frac{P_c}{N}$ (wysokość trójkąta o podstawie N , który ma pole P_c),
 - $R = P - P_c$.
- Wówczas możemy zbudować czworokąt, którego wierzchołkami są: $(0, 0)$, $(N, 0)$, $(N, 2)$ i $(N - R, H)$. Przykład dla: $N = 7$, $M = 5$, $P = 16$. Wtedy $P_c = 14$, $H = 4$ oraz $R = 2$.



Powyższe rozważania pokrywają wszystkie przypadki. Dla każdego z nich udało nam się wskazać czworokąt wypukły o polu P .

Liczydło: Dane są dwie liczby całkowite L i P . W każdym kroku możemy wykonać jedną z dwóch operacji: 1) dodać dowolnie wybraną liczbę całkowitą do L oraz do P (jednocześnie); 2) przemnożyć L lub P przez dowolnie wybraną niezerową liczbę całkowitą. Ile minimalnie operacji należy wykonać, aby obie liczby stały się równe zero?

Zauważmy najpierw, że tylko dla $L = 0$ i $P = 0$ odpowiedzią jest 0. Podobnie, tylko dla $L = P$, gdzie $L \neq 0$, odpowiedzią jest 1 – wystarczy do obu liczb dodać $-L$.

W pozostałych przypadkach odpowiedź będzie większa od 1. Zauważmy, że operacja typu 2) nie pozwala wyzerować niezerowej liczby, więc ostatnia operacja będzie typu 1) i zostanie zastosowana do dwóch równych liczb. Jak zatem wyrównać dwie liczby w minimalnej liczbie ruchów?

Rozważmy przypadek, kiedy jedna z liczb jest wielokrotnością drugiej (bez straty ogólności założmy, że L jest wielokrotnością P):

- jeśli $L \neq 0$, wtedy P mnożymy przez $\frac{L}{P}$. Całkowita liczba operacji wynosi 2,
- jeśli $L = 0$, wtedy do obu liczb dodajemy P i tę o mniejszej wartości bezwzględnej mnożymy przez 2. Całkowita liczba operacji wynosi 3.

Pozostał nam ostatni przypadek, kiedy L nie jest wielokrotnością P oraz P nie jest wielokrotnością L . Wtedy mnożymy L przez P oraz P przez L i otrzymujemy dwie równe liczby. Wówczas odpowiedzią jest 3.

Prosty dowód, że w każdym z powyższych przypadków korzystamy z minimalnej liczby operacji, pozostawiamy Czytelnikowi.

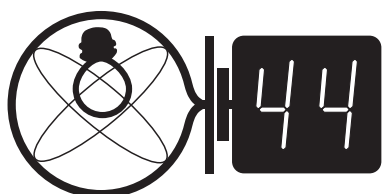
Bartosz ŁUKASIEWICZ

Skrót regulaminu

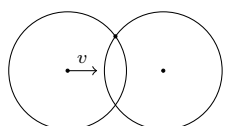
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 672, 673

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*



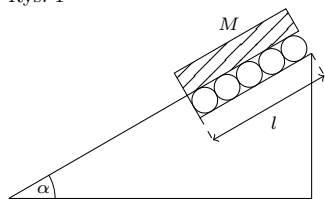
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2019



Rys. 1

672. Na poziomej powierzchni stoi cienka obręcz o promieniu R . Mija ją ze stałą prędkością v taka sama obręcz (rys. 1). Obręcze przylegają do siebie. Znaleźć zależność prędkości górnego punktu „przecięcia” obręczy od odległości między ich środkami.

673. W cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się w stanie równowagi n moli jednoatomowego gazu doskonałego. Tłok może przemieszczać się w cylindrze bez tarcia, cylinder i tłok są izolowane cieplnie od otoczenia. Ciśnienie zewnętrzne wynosi p_1 , temperatura gazu w cylindrze T_1 . W pewnej chwili ciśnienie zewnętrzne wzrasta skokowo do wartości p_2 , a po ustaleniu się stanu równowagi spada skokowo do pierwotnej wartości. Znaleźć i porównać temperatury gazu w skrajnych stanach równowagi.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 10/2018

Przypominamy treść zadań:

664. Jednorodny klocek o masie M i długości l zaczyna poruszać się w dół po nachylonej płaszczyźnie tworzącej z poziomem kąt α . Początkowy odcinek o długości l nachylonej płaszczyzny wypełniają blisko siebie położone rurki o masach m i promieniach $r \ll l$, które mogą obracać się bez tarcia (rys. 2). Znaleźć zależność przyspieszenia klocka od jego przesunięcia wzdłuż płaszczyzny. Klocek nie ślizga się po rurkach.

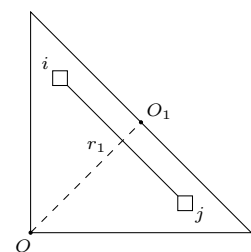
665. Równomiernie naładowaną na powierzchni cienką płytkę z dielektryka w kształcie równoramiennego trójkąta prostokątnego złożono na pół. Wykonana została przy tym praca W przeciw siłom pola elektrycznego. Jaką pracę trzeba wykonać, żeby ponownie złożyć na pół otrzymany trójkąt?

664. Równanie ruchu klocka, gdy jego przesunięcie wzdłuż płaszczyzny wynosi x , ma postać $Ma(x) = Mg \sin \alpha - nT(x)$, gdzie $n = \frac{l-x}{2r}$ jest liczbą rurek stykających się z klockiem, $T(x)$ oznacza siłę tarcia między rurką a klockiem. Ruch obrotowy rurki opisuje równanie $mr^2 \cdot \frac{a(x)}{r} = T(x)r$, stąd $T(x) = ma(x)$. Szukane przyspieszenie dane jest wzorem

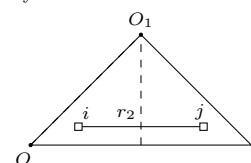
$$a(x) = \begin{cases} \frac{Mg \sin \alpha}{M + m \frac{l-x}{2r}}, & \text{dla } x \leq l, \\ g \sin \alpha, & \text{dla } x > l. \end{cases}$$

665. Niech Q oznacza ładunek płytki, S_1 jej powierzchnię, W_1 energię płytki, czyli sumę energii oddziaływania ładunków na poszczególnych elementach dielektryka. Na rysunku 3 przedstawiono dwa małe elementy płytki o powierzchniach ΔS , odległe od siebie o r_1 . Ładunek każdego elementu wynosi $q = \frac{Q\Delta S}{S_1}$, ich energia oddziaływania $W_{ij} \sim \frac{q^2}{r_1}$. Po złożeniu ładunek płytki pozostaje niezmienny, jej powierzchnia $S_2 = \frac{S_1}{2}$, elementy odpowiadające poprzednio rozważanym mają powierzchnię $\frac{\Delta S}{2}$, a ich odległość wynosi $r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}$ (rys. 4). Energia oddziaływania tych elementów $W'_{ij} = \sqrt{2}W_{ij}$. Całkowita energia złożonego dielektryka wynosi $W_2 = \sqrt{2}W_1$. Praca wykonana przy składaniu dana jest wzorem $W = W_2 - W_1 = (\sqrt{2} - 1)W_1$. Po kolejnym złożeniu wykonana praca wynosi $W_x = W_3 - W_2$, gdzie energia podwójnie złożonego dielektryka $W_3 = \sqrt{2}W_2$. Szukana praca dana jest wzorem:

$$(W_x = (\sqrt{2} - 1)W_2 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}W_1 = \sqrt{2}W.$$



Rys. 3



Rys. 4

* * *

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klubu 44F
po zakończeniu
roku szkolnego 2017/18 (po 661 zadaniach)

Marian Łupieżowiec	–	1–41,20
Tomasz Rudny	–	39,04
Jacek Konieczny	–	29,80
Ryszard Woźniak	–	28,77
Krzysztof Magiera	–	3–28,70
Jan Zambrzycki	–	1–23,13
Aleksander Surma	–	4–20,28
Michał Koźlik	–	4–19,20
Jerzy Witkowski	–	3–16,83
Paweł Perkowski	–	2–14,81
Tomasz Wietecha	–	13–14,79
Jacek Grela	–	13,91
Mateusz Kapusta	–	11,49
Dawid Zapolski	–	10,27
Andrzej Nowogrodzki	–	3–9,78
Jędrzej Biedrzycki	–	9,13
Sławomir Buć	–	5,45
Gerard Jachimowicz	–	5,10
Paweł Kubit	–	4,99
Piotr Bielak	–	1,77
Marek Sulczewski	–	0,44

Po raz pierwszy, odkąd redaguję Klub 44F, zdarzyło się, że zadanie osiągnęło współczynnik trudności $WT = 4$. Mowa o zadaniu **661** z czerwcowego numeru, gdzie należało odpowiedzieć na pytanie, po jakim czasie nic nawinięta na walec – po nadaniu prędkości prostopadłej do nici ciężarkowi na jej końcu – ponownie nawinie się na walec. Może wpływ na to miały letnie upały, chociaż drugie zadanie z czerwca na temat aberracji sferycznej soczewki miało z kolei najniższy współczynnik trudności $WT = 1,6$. Część uczestników tej serii ograniczyła się do rozwiązania tylko jednego zadania, inni nadesłali rozwiązania niepoprawne. W szczególności nietrafny był pomysł, że kulka porusza się po spirali Archimedesesa, która jest złożeniem ruchu po prostej i obrotu po okręgu o nieruchomym środku. W naszym zadaniu środek okręgu przemieszczał się wzdłuż obwodu walca. Należało również uwzględnić fakt, że po całkowitym odwinięciu nici kulka zatacza półokrąg o promieniu równym długości nici i dopiero wtedy zaczyna nawijać się na walec.

Wydaje się, że uczestnicy klubu coraz więcej energii poświęcają na próby znalezienia rozwiązań w różnych źródłach, co chyba nie jest korzystną tendencją, bo to przecież ma być zabawa.

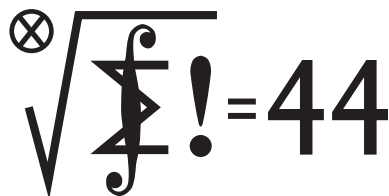
W zadaniu **659** ($WT = 3,1$) pytaliśmy o siłę, z jaką kwadratowa jednorodnie naładowana cienka płytką działa na punktowy ładunek. Ładunek umieszczony został nad środkiem płytki w odległości równej połowie krawędzi płytki, czyli w środku sześcianu, którego jedną ze ścian była płytka. Pozwalało to łatwo obliczyć strumień pola elektrycznego przez powierzchnię płytki i siłę, jaką ładunek działa na płytkę. Wszystkie nadesłane rozwiązania polegały na sumowaniu wkładów do wypadkowej siły od poszczególnych fragmentów płytki, co wymagało wyszukiwania w tablicach odpowiednich całek, i oczywiście takie zęczenie się nie było moim zamiarem. Poprawny wynik otrzymali **Mateusz Kapusta** i **Tomasz Wietecha**. Niektóre rozwiązania polegały na podziale płytki na równoległe cienkie pręty i sumowaniu wkładów. Niestety, pole elektryczne od pręta liczone było z prawa Gaussa, jakby pręt miał nieskończoną długość, podczas gdy odległość ładunku była porównywalna z długością pręta.

Drugie pod względem stopnia trudności okazało się zadanie **647** ($WT = 3,95$), gdzie należało znaleźć gęstość ładunku wewnątrz walca obracającego się ze stałą prędkością kątową w jednorodnym, prostopadłym do walca polu magnetycznym. Trzeba tu było wyznaczyć pole elektryczne w płycie, korzystając z warunku równowagi sił działających na swobodny elektron, a następnie z prawa Gaussa wyznaczyć gęstość ładunku.

Trudne okazało się również zadanie **650** ($WT = 3,74$), gdzie żadne z proponowanych rozwiązań nie uzyskało oceny wyższej niż 0,2. Polegało ono na znalezieniu czasu, po którym jeden relatywistyczny pojazd dogoni drugi, z punktu widzenia kosmonauty znajdującego się w jednym z pojazdów. W rozwiązaniu przedstawionym w majowej *Delcie* błędnie zapisany został niestety wzór na relatywistyczną prędkość względną – z pierwiastkiem w mianowniku!

Pozostałe zadania zostały rozwiązane bezbłędnie przez co najmniej jedną osobę. Za zadanie **652** ($WT = 2,8$ – przyspieszenie metalowej okrągłej płytki spadającej w równoległym do powierzchni Ziemi polu magnetycznym) maksymalną ocenę otrzymał **Dawid Zapolski**, za zadanie **653** ($WT = 2,86$ – parcie na dno w obracającym się naczyniu z wodą) **Tomasz Wietecha**. Pan **Tomasz** rozwiązał bezbłędnie czternaście zadań, **Jan Zambrzycki** siedem, **Mateusz Kapusta**, który niedawno rozpoczął przysyłać swoje rozwiązania, trzy.

Wszystkim, którzy przysłali w tym roku rozwiązania zadań, serdecznie dziękuję.



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2019

Zadania z matematyki nr 775, 776

Redaguje Marcin E. KUCZMA

775. Znaleźć wszystkie czwórki liczb nieujemnych a, b, c, d , które jednocześnie spełniają nierówności

$$a + b \geq c + d, \quad ab + cd \geq (a + b)(c + d), \quad (a + b)cd \geq ab(c + d).$$

776. Sześcian o krawędzi długości k przecinamy płaszczyzną π , położoną w odległości d od środka sześcianu. Jaka jest maksymalna wartość d , przy której płaszczyzna π może mieć z każdą ścianą sześcianu co najmniej jeden punkt wspólny?

Zadanie 776 zaproponował pan Adam Woryna.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2018

Przypominamy treść zadań:

767. Kwadrat o boku długości n , będącej liczbą naturalną, został podzielony prostymi poziomymi i pionowymi na n^2 kwadracików jednostkowych. Powstała siatka utworzona z $2n(n+1)$ odcinków jednostkowych (boków tych kwadracików). Używając czterech barw, należy te odcinki pokolorować (każdy odcinek jednym kolorem) tak, żeby każdy kwadracik jednostkowy miał boki różnych kolorów oraz by każdy bok dużego kwadratu uzyskał jednolity kolor – ale każdy inny. Dla jakich liczb naturalnych $n \geq 1$ jest to wykonalne?

768. Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych $k, m, x \geq 1$ spełniające równanie

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k = (1 + x)^m.$$

767. Przez *linie* będziemy rozumieli odcinki łączące przeciwległe boki danego kwadratu $ABCD$, prostopadłe do nich i przebiegające przez punkty kratowe. Gdy długość boku jest liczbą nieparzystą, żądane pokolorowanie da się banalnie wykonać: malujemy każdą linię (w całości) pojedynczym kolorem; linie równoległe do AB naprzemiennie, dwoma kolorami; linie równoległe do AD też naprzemiennie, dwoma pozostałymi kolorami.

Gdy długość boku jest liczbą parzystą – pokolorowanie, o jakim mowa, też jest wykonalne. Niech $ABCD$ będzie, jak poprzednio, kwadratem o boku długości nieparzystej, z pokolorowaniem opisanym powyżej. Przedłużamy jego boki AB i AD , każdy o jednostkę, otrzymując odcinki AB' i AD' . Niech punkt C' dopełnia kwadrat $AB'C'D'$. Poprzednie pokolorowanie odcinków AB i AD przedłużamy na całe linie AB' i AD' . Bok $B'C'$ malujemy kolorem odcinka DC ; bok $D'C'$ malujemy kolorem odcinka BC .

W niewypukłym sześciokącie $BB'C'D'DC$ sposób malowania odcinków jednostkowych, równoległych do BB' , jest już wymuszony przez postawione warunki – zaczynamy od BB' (który już ma kolor) i malujemy kolejne równoległe odcinki, kończąc na tym, który ma jeden koniec w punkcie C . Podobnie postępujemy z odcinkami jednostkowymi, równoległymi do DD' . Dzięki założeniu o nieparzystości długości BC i DC , kwadracik o wierzchołkach C i C' będzie miał brzeg czterobarwny.

768. Wykażemy, że równanie nie ma rozwiązań, w których $k > 1$ oraz $x > 1$. Z tożsamości

$$1 + x + \dots + x^{2n} = (x+1)(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2}) + x^{2n}$$

wynika spostrzeżenie:

(1) dla $x, n \in \mathbb{N}$ liczby $1 + x + \dots + x^{2n}$ oraz $x+1$ są względnie pierwsze.

Stąd wniosek, że rozważane równanie nie może być spełnione, gdy k jest liczbą parzystą.

Gdy k jest liczbą nieparzystą postaci $4n+1$ ($n \geq 1$, bo rozważamy $k \geq 2$), zapisujemy lewą stronę równania jako iloczyn $(1 + x + \dots + x^{2n})(x^{2n+1} + 1)$. Prawa strona równania, równa $(x+1)^m$, musiałaby się dzielić przez $(1 + x + \dots + x^{2n})$, co nie jest możliwe, znów w myśl uwagi (1).

Gdy natomiast $k = 4n - 1$, mnożymy równanie stronami przez $(x-1)$, otrzymując

$$(2) \quad x^{4n} - 1 = (x-1)(x+1)^m.$$

Lewa strona dzieli się przez $x^4 - 1$, więc i przez $x^2 + 1$. Liczba x nie może być parzysta, bo wówczas liczba $x^2 + 1$ byłaby względnie pierwsza z oboma czynnikami prawej strony (2). Niech więc $x = 2t + 1$. Skoro lewa (więc i prawa) strona (2) dzieli się przez $x^2 + 1$, możemy napisać $(x-1)(x+1)^m = A \cdot (x^2 + 1)$ ($A \in \mathbb{N}$). Po podstawieniu $x = 2t + 1$ wychodzi

$$(3) \quad 2^m t(t+1)^m = A \cdot (2t^2 + 2t + 1)$$

– sprzeczność, bo liczba w nawiasie po prawej stronie (3) jest względnie pierwsza z każdym z czynników lewej strony (3).

Pozostają sytuacje trywialne, gdy k lub x równa się 1. Jeśli $k = 1$, to $m = 1$, zaś $x \in \mathbb{N}$ może być dowolne. A gdy $x = 1$, równanie mówi jedynie, że $k = 2^m - 1$. Tak więc wszystkimi rozwiązaniami równania są trójki (k, m, x) postaci $(1, 1, x)$ lub $(2^m - 1, m, 1)$ ($m, x \in \mathbb{N}$).

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2017/18

Franciszek S. Sikorski	–	1–39,86
Piotr Kumor	–	13–39,63
Marcin Małogrosz	–	2–38,00
Krzysztof Maziarz	–	37,45
Andrzej Kurach	–	36,52
Krzysztof Kamiński	–	2–35,75
Paweł Kubit	–	6–35,69
Paweł Najman	–	7–34,02
Witold Bednarek	–	7–32,46
Michał Koźlik	–	32,23
Marek Spychała	–	2–27,55
Bartłomiej Pawlik	–	27,51
Jerzy Cisło	–	13–27,41
Michał Adamaszek	–	3–27,36
Janusz Wojtal	–	25,24
Jakub Węgrecki	–	24,54
Zbigniew Skalik	–	3–23,90
Janusz Fiett	–	2–23,56
Szymon Kitowski	–	23,49
Piotr Lipiński	–	1–21,84
Jędrzej Biedrzycki	–	19,85
Stanisław Bednarek	–	2–19,37
Kacper Morawski	–	17,91
Marcin Kasperski	–	4–15,33
Mikołaj Pater	–	14,83
Marek Prauza	–	4–13,69

Legenda (przykładowo): stan konta 7–32,46 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 32,46 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2016, 2017 lub 2018.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

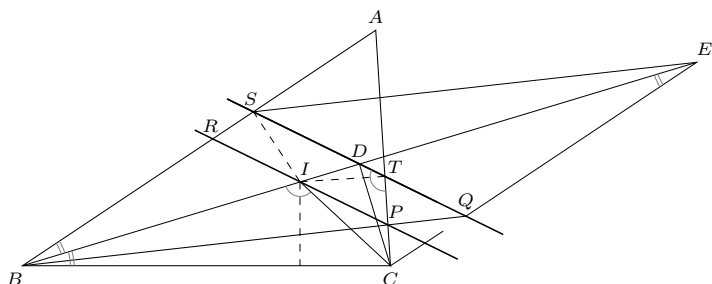
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5),
M. Gałęcki (5), J. Uryga (4),
A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał,
T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk,
K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4),
P. Kumor (13), P. Gadziński (7),
K. Jedziniak, J. Olszewski (19),
L. Skrzypek (4), H. Kornacki,
T. Wietecha (12), T. Józefczyk,
J. Witkowski (5), W. Bednorz,
B. Dyda (5), M. Peczański,
M. Adamaszek, P. Kubit (6),
J. Cisło (13), W. Bednarek (7),
D. Kurpiel, P. Najman (7), M. Kieza (4),
M. Kasperski (4), K. Dorobisz,
A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik,
A. Dzedziej, M. Miodek
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, J. Fiett, Z. Galias, L. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, M. Małogrosz, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, M. Spychała, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Józwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowicz, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Piłkuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawislawski, P. Żmijewski.

Łącznie 2^7 nazwisk(!).



Rozwiązanie zadania F 970.

Poszukujemy wartości siły ściskającej (w przypadku wzrostu temperatury) lub rozciągającej szynę (w przypadku spadku temperatury) o odcinek równy zmianie jej długości wywołanej zmianą temperatury otoczenia. Mamy więc:

$$\beta L \Delta T = \frac{LF}{YS},$$

a więc

$$F = \beta Y S \Delta T.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $F \approx 3,84 \cdot 10^5$ N. Z powodu wielkiej wartości tej siły, koniec szyny był unieruchamiany w kierunkach prostopadłych do jej długości, a pozostawiona niewielka szczelina między jej „sąsiadkami” dopuszczała zmiany długości.

Oto doroczne omówienie wybranych zadań. Alternatywne ciekawe rozwiązania oczywiście były, choć może nie w takiej obfitości, jak zazwyczaj. Przykuwają natomiast uwagę obszernie, bardzo fachowe komentarze do różnych zadań oraz niebanalne uogólnienia. W obrębie miejsca, jakim dysponujemy, nie sposób przedstawić wszystkich szczegółów przeprowadzonych rozumowań i rachunków. Ich uzupełnienie może być atrakcyjnym wyzwaniem dla Czytelników, których omawiane zagadnienia na serio zainteresują. Przypominamy znaczenie skrótów – współczynnik trudności: *WT*; liczba poprawnych rozwiązań: *LPR*.

* * *

Zadanie 746. [$k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$ ciąg rosnący $(a_n): a_n \in \mathbb{N}; \forall i_1, \dots, i_m: a_{i_1} + \dots + a_{i_m}$ nie jest k -tą potęgą; ciąg $(a_n^{1/n})$ ograniczony] (*WT*=1,75; *LPR*=9). Podawano różne przykłady. W kilku pracach powtórzył się przykład: $a_n = 2^n 3^{n+1}$ (dwójkę i trójkę można zastąpić inną parą liczb pierwszych). **Piotr Kumor** zwrócił uwagę, że wzór działa dla każdego k i że można go znaleźć np. w książce T. Andreescu, G. Dospinescu, *Problems from the Book*, z adnotacją, że już znacznie wcześniej zamieścił go *Kwant*. Zwrócił też uwagę na pracę: A. Dubickas, P. Šarka, *Infinite sets of integers whose distinct elements do not sum to a power*, <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL9/Dubickas/dubickas11.pdf>, zawierającą obszerną dyskusję pokrewnych zagadnień.

Zadanie 748. [Czy istnieje macierz 8×8 o wyrazach $0, \pm 1$, sumy wierszy i sumy kolumn wszystkie różne? a macierz 14×14 ?] (*WT*=1,64; *LPR*=11). Macierze $n \times n$ o tej własności istnieją dla każdego n parzystego (różne konstrukcje, niewiele odbiegające od firmowej). Dla nieparzystych n takich macierzy nie ma; **Janusz Olszewski** podał dowód, wcale nie skomplikowany; proponujemy go Czytelnikom jako interesujące rozszerzenie zadania.

Zadanie 749. [$\triangle ABC$; okrąg wpisany (środek I) styczny do AB, AC w punktach $S, T: P \in AC; IP \parallel ST; Q = ST \cap BP \Rightarrow QC \parallel AB$] (*WT*=3,05; *LPR*=7). **T. Choczewski, B. Kubicki, M. Małogrosz** – firmowo. **Janusz Olszewski**, jak zwykle, dał kilka rozwiązań (trzy: z użyciem biegunowych, z użyciem tw. Pascala oraz rachunkowo). Rozwiązania rachunkowe znaleźli też **Z. Skalik, T. Wietecha**.

Odmienne rozwiązanie przedstawił **Jakub Węgrecki**: niech $D = BI \cap ST$, $R = PI \cap AB$; punkt I jest środkiem odcinka RP , więc D jest środkiem odcinka SQ . Budujemy równoległobok $SBQE$ (o środku symetrii D); punkty I, C, D, T leżą na jednym okręgu (bo $\sphericalangle BIC = \sphericalangle CTS$), więc skoro $IT \perp CT$, zatem $BD \perp CD$; wobec tego trójkąty CDB i CDE są przystające i z równości $|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$ wynika, że $EC \parallel AB$; i gotowe, bo $EQ \parallel AB$.

Zadanie 751. [Siatka n^2 trójkąćków jednostkowych tworzących trójkąt o boku n ; węzły siatki ponumerowane; d = liczba trójkąćków o wierzchołkach $i < j < k$, w tej kolejności tworzących trójkę zorientowaną dodatnio; $\min d, \max d = ?$] (*WT*=3,77; *LPR*=1 (2?)). Najtrudniejsze zadanie w omawianym sezonie. Rozwiązanie firmowe polegało na wyróżnieniu „lewej” strony każdego odcinka skierowanego (przez numerację) i zliczaniu obszarów (trójkąćków lub „oceanu”), do których przylegają wyróżnione strony odcinków. Tą metodą zrobił to zadanie **Janusz Olszewski** (bezbłędnie) oraz (w zasadzie, jednak nie dopracowując części rachunkowej) **Paweł Kubit**. Jeszcze trzech autorów uzyskało dobre wyniki, jednak podając uzasadnienia, które można uznać raczej za agitację niż dowody.

Zadanie 753. [$D \in \triangle ABC; E = AD \cap BC; F = BD \cap AC; |AE| + |AF| = |BE| + |BF| \Rightarrow |AC| + |AD| = |BC| + |BD|$] (*WT*=3,24; *LPR*=5). I znów: **Janusz Olszewski**, jako jedyny, znalazł rozwiązanie firmowe. **Szymon Kitowski** także podał perfekcyjne rozwiązanie, operując bardziej zaawansowanym aparatem (własności elips; izogonalność – nie przytaczamy tego rozumowania z uwagi na znacznie większą prostotę rozwiązania firmowego). Rozwiązania rachunkowe: **M. Małogrosz, T. Wietecha, Z. Skalik**. Jeszcze jedna praca zawierała kserokopię (bez podania źródła) treści zadania wraz ze *wskazówką* do rozwiązania firmowego – jednak bez dowodu.

Zadanie 755. [Wielomian $P: P + P'' \geq 2P' \Rightarrow P \geq 0$] (WT=1,91; LPR=15). Dużo dobrych rozwiązań. **Piotr Kumor** zauważył, że – ogólnie – jeśli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną (niekoniecznie różniczkowalną) funkcją o tej własności, że funkcja $g(x) = e^{-x}f(x)$ jest wypukła oraz ma skończoną, nieujemną granicę przy $x \rightarrow \infty$, wówczas g przyjmuje tylko wartości nieujemne; więc f też. Jeśli ponadto f jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f + f'' \geq 2f'$, wówczas wypukłość funkcji g jest automatyczna (banalny rachunek); to, że rozważana w zadaniu funkcja jest wielomianem, nie ma znaczenia (podobną uwagę opatrzył swoją pracę **M. Kasperski**).

Zadanie 758. [Okręgi o promieniach r_1, r_2, r_3 , parami styczne zewnętrznie oraz styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu $R \Rightarrow \sum r_i + 2\sqrt{\sum r_i r_j} \leq 3R$] (WT=3,40; LPR=2). Zadanie zaproponował pan **Witold Bednarek**, wraz z rozwiązaniem, które zostało wydrukowane jako firmowe. Niebanalny pomysłem było w nim wprowadzenie środka ciężkości trójkąta utworzonego przez środki trzech mniejszych okręgów.

Janusz Olszewski podał dowód, z którego wynotujemy dwa kluczowe lematy: dla dowolnych liczb $x, y, z, u, v, w \geq 0$:

$$(1) \quad (y+z)u + (z+x)v + (x+y)w \geq 2\sqrt{xy+yz+zx}\sqrt{uv+vw+wu};$$

dla dowolnego punktu P , leżącego wewnątrz trójkąta ABC (o bokach a, b, c) w odległościach a', b', c' od A, B, C mamy przy oznaczeniach $a'/a = u, b'/b = v, c'/c = w$:

$$(2) \quad uv + vw + wu \geq 1.$$

Nierówność (1) zostawimy jako ciekawe ćwiczenie. Nierówność (2) została uzyskana pomysłowym rachunkiem na wektorach jako wniosek z $(u^{-1}\vec{PA} + v^{-1}\vec{PB} + w^{-1}\vec{PC})^2 \geq 0$. Teza zadania wychodzi, gdy A, B, C to środki mniejszych okręgów, P – środek dużego okręgu, i gdy w (1) przyjmiemy u, v, w z nierówności (2) oraz $x = r_1 = s - a, y = r_2 = s - b, z = r_3 = s - c$, gdzie $2s = a + b + c$.

Piotr Kumor uzyskał rezultat nieco mocniejszy, korzystając ze wzoru Kartezjusza:

$$(3) \quad 2\left(R^{-2} + \sum r_i^{-2}\right) = \left(\sum r_i^{-1} - R^{-1}\right)^2$$

(zachodzącego przy konfiguracji z zadania); wykazał bowiem, że jeśli czwórka liczb dodatnich r_1, r_2, r_3, R spełnia (3), to

$$(4) \quad \sum r_i \leq (6\sqrt{3} - 9)R$$

(szacowania i rachunki nie były proste); ostatnia nierówność implikuje tezę zadania, bo $\sqrt{\sum r_i r_j} \leq (\sum r_i)/\sqrt{3}$.

Z omawianej pracy dowiedzieliśmy się wielu ciekawych rzeczy: gdyby przez R oznaczyć promień małego okręgu, stycznego zewnętrznio do okręgów o promieniach r_i , wzór (3) zachowałby słuszność po zamianie minusa na plus; czwórka okręgów (w jednej lub drugiej z tych konfiguracji) przyjęła się pod nazwą *Soddy circles*; zaś całe zagadnienie doczekało się ogromnej literatury, również z uogólnieniami na wyższe wymiary (proszę wstukać *Soddy circles* do wyszukiwarki...). Jednak w całej tej obfitości nie tak łatwo znaleźć dowód wzoru (3) – tymczasem nie trzeba szukać daleko: pan Kumor wskazał artykuł Michała Kiezy *Czwarty okrąg* w Δ_{10}^6 , z dowodem dla „małego” okręgu

(wzór (3) z plusem); wariant dla „dużego” nietrudno wtedy wyprowadzić, stosując inwersję.

Zadanie 759. [Punkty skupienia ciągu (x_n) ? $x_0 \in (3/2, 2)$; $x_{n+1} = 2^{2-x_n}$] (WT=2,86; LPR=7 (9?)). Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego (analiza funkcji $f \circ f$, gdzie $f(x) = 2^{2-x}$): **M. Adamaszek, J. Olszewski, T. Wietecha, M. Małogrosz, Z. Skalik, W. Bednarek, M. Kasperski** (prace trzech uczestników, wymienionych w pierwszej kolejności, wolne od jakichkolwiek usterek; w innych – pomyłeczki lub drobne luki); i jeszcze dwie prace z większymi lukami, jednak zawierające istotę rozumowania.

Zadanie 760. [Istnieje nieskończenie wiele $x \in \mathbb{R}^+$: $x^{1/2} + x^{-1/2} \in \mathbb{N}$; $x^{1/3} + x^{-1/3} \in \mathbb{N}$] (WT=1,46; LPR=18). Uogólnienie (**P. Kumor**): dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele liczb $x > 0$ takich, że $x^{1/r} + x^{-1/r} \in \mathbb{N}$ dla $r = 1, \dots, n$; dobre są np. wszystkie liczby postaci $x = ((k + \sqrt{k^2 - 4})/2)^{jM}$, gdzie $M = \text{nwd}(1, \dots, n)$, zaś $j, k \in \mathbb{N}$ ($k > 1$) zmieniają się dowolnie.

Zadanie 762. [$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$; jeśli liczba $2^n - 1$ jest bezkwadratowa, to $\text{nwd}(n, 2^n - 1) = 1$, ale nie na odwrót] (WT=2,08; LPR=8). Implikacja w podaną stronę nie była trudna; wszystkie dowody podobne do firmowego. W drugą stronę potrzebny był kontrprzykład. Ten firmowy ($n = 364, 2^n - 1$ podzielne przez 1093^2) opatrzone był sugestią posłużenia się komputerem. Czy było to niezbędne? Jasne, że nie (demagogia); wystarczyło „zgadnąć” (przez objawienie?); a sprawdzenie żądanej własności dało się już wykonać na papierze (choć na maszynie łatwiej).

Jak wielokrotnie bywało, **Piotr Kumor** sypnął ciekawymi informacjami. Tu kluczową rolę grają liczby pierwsze p , dla których $2^{p-1} - 1$ dzieli się przez p^2 ; są to tzw. *liczby pierwsze Wiefericha*; oznaczmy ich zbiór przez \mathcal{W} . Gdy już mamy liczbę $p \in \mathcal{W}$, sensowne jest szukanie n (o żądanej własności) w postaci podwielokrotności lub wielokrotności liczby $p - 1$. Choć mocna jest hipoteza, że zbiór \mathcal{W} jest nieskończony, obecnie (lato 2018) znane są dwa jego elementy: 1093 oraz 3511 – to chyba najkrótszy ciąg w OEIS (A001220); tam, a także w wielu innych miejscach, można znaleźć różne wiadomości o związkach zbioru \mathcal{W} z innymi zagadnieniami arytmetyki (google: *Wieferich primes*).

Janusz Olszewski pokazał (nie używając oznaczenia \mathcal{W}), że omawiana „implikacja odwrotna” zachodzi dla wszystkich liczb n o własności: $\forall p \in \mathcal{W}: 2^n \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Wówczas bowiem jeśli liczba $2^n - 1$ dzieli się przez p^2 dla pewnej liczby pierwszej p (zatem $p \notin \mathcal{W}$), bierzemy najmniejszy wykładnik δ , dla którego $p^2 \mid 2^\delta - 1$ (więc $\delta \mid n$); z twierdzenia Eulera wynika, że $p^2 \mid 2^{p(p-1)} - 1$; zatem $\delta \mid p(p-1)$, więc albo $\delta \mid p-1$, albo $p \mid \delta$. Pierwsza możliwość pociąga podzielność liczby $2^{p-1} - 1$ przez $2^\delta - 1$, więc i przez p^2 (wbrew założeniu $p \notin \mathcal{W}$); druga możliwość daje podzielność $p \mid n$; i koniec, bo $p^2 \mid 2^n - 1$, więc $\text{nwd}(n, 2^n - 1) \geq p$.

Pozostałe kompletne prace: **M. Adamaszek, J. Cisło, M. Kasperski, A. Kurach, M. Miodek, K. Morawski**.

Zadanie 764. [Przykład: $a, b \in \mathbb{N}, \text{nwd}(a, b) = 1$; $x_1 = a, x_{n+1} = b + x_1 \cdot \dots \cdot x_n$; wszystkie x_n złożone] (WT=1,00; LPR=10). Rozwiązania firmowe ($z = b = 4$); tylko **M. Małogrosz** inaczej: $a = 63, b = 2$; wtedy $x_n = c_n^3 + 1$, gdzie $c_n = 2^{2^{n-1}}$; sprawdzić łatwo; ale jak na coś takiego wpaść?...

Prosto z nieba: Nuklearny makaron



Rozwiązanie zadania M 1592.

Oznaczmy $p = 2n + 1$ i rozważmy dowolne liczby całkowite $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$. Zauważmy, że jeśli te liczby mają wspólny dzielnik większy od 1, to możemy każdą z nich przezeń podzielić, zachowując postać tezy zadania. Wobec tego możemy bez straty ogólności założyć, że $\text{NWD}(a_1, \dots, a_n) = 1$.

Jeżeli istnieje i o tej własności, że $p \mid a_i$, to dla pewnego j mamy $p \nmid a_j$. Wówczas $p \nmid \text{NWD}(a_i, a_j)$, więc

$$\frac{a_i + a_j}{\text{NWD}(a_i, a_j)} \geq \frac{a_i}{\text{NWD}(a_i, a_j)} \geq p.$$

Jeżeli żadna z liczb a_i nie jest podzielna przez p , to reszty z dzielenia przez p pewnych dwóch z nich należą do tego samego spośród n zbiorów

$$\{1, p-1\}, \{2, p-2\}, \dots, \left\{\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\right\}.$$

Innymi słowy, istnieją takie $i < j$, że $p \nmid \text{NWD}(a_i, a_j)$ oraz $p \mid a_i - a_j$ lub $p \mid a_i + a_j$. W pierwszym przypadku mamy

$$\frac{a_i + a_j}{\text{NWD}(a_i, a_j)} \geq \frac{a_i - a_j}{\text{NWD}(a_i, a_j)} \geq p,$$

w drugim zaś bezpośrednio

$$\frac{a_i + a_j}{\text{NWD}(a_i, a_j)} \geq p.$$

Niebo w lutym

W lutym Słońce przejdzie od środka gwiazdozbioru Koziorożca do środka gwiazdozbioru Wodnika, przecinając dzielącą je granicę około 17 lutego. Przez miesiąc Słońce zwiększy deklinację od -17° do -8° , zwiększając tym samym wysokość górowania w środkowej Polsce z 21 do 30° , a czas jego przebywania nad widnokregiem wrośnie o prawie 2 godziny, do około 11 godzin.

Podobnie jak w styczniu, ciekawie będzie na niebie porannym, gdzie swoje pętle kreślą planety Jowisz, Wenus i Saturn. Jowisz powoli dąży do czerwcowej opozycji i przez miesiąc przesunie się 4° na wschód,

Kiedy odpowiednio masywne gwiazdy ($M > 8-10 M_\odot$) osiągną dojrzały wiek, eksplodują. Wybuch zaczyna się w rzeczywistości od zapadnięcia się niestabilnego centrum gwiazdy. Jądro, składające się z żelaza, niklu i lżejszych pierwiastków, zostaje zgniecione do ogromnych gęstości, a jego rozmiar zmienia się od kilku tysięcy do kilkunastu kilometrów. W tak dużym ciśnieniu większość protonów zamienia się w neutrony, a energia ucieka w postaci promieniowania i neutrin. W gęstym centrum wybuchającej *supernowej* powstaje *gwiazda neutronowa*.

Powierzchnię gwiazdy neutronowej pokrywa, w zależności od historii obiektu, wodór lub hel. Możliwe jest też, że składa się ona po prostu z żelaza. Grawitacja na powierzchni jest ogromna – setki miliardów większa od tej na Ziemi. Oznacza to, że już na powierzchni materiał gwiazdy podlega ogromnej kompresji. Na głębokości około kilometra gęstość materii jest porównywalna z gęstością jąder atomowych, 10^{14} g/cm³. Co znajduje się jeszcze głębiej? Tego właściwie nie wiemy, ponieważ nie istnieje kompletna teoria opisująca oddziaływania silne wielu ciał (nukleonów, kwarków) w tak ekstremalnych warunkach, a eksperymenty na Ziemi nie dają możliwości odtworzenia takiego stanu materii.

O wiele lepiej potrafimy natomiast opisać materię o gęstościach nieco mniejszych od gęstości jądrowej. Warstwy powierzchniowe *skorupy* gwiazdy neutronowej składają się z sieci krystalicznej atomów żelaza i niklu. Głębiej sieć krystaliczna jest coraz ciaśniejsza, i w wyniku różnych procesów – w szczególności oddziaływania z elektronami przemieszczającymi się w sieci – jądra stają się coraz bardziej *neutronadmiarowe* (protony w jądrach zamieniane są na neutrony). Przy gęstości nieco powyżej 10^{11} g/cm³ neutronów jest tak wiele, że „wyciekają” z jąder na zewnątrz. Materia gwiazdy przy tych gęstościach jest opisywana przez sieć krystaliczną zanurzoną w swobodnym „gazie” neutronów. Tego typu konfiguracja jest energetycznie preferowana – system minimalizuje w ten sposób energię.

Mieszanka kryształ + swobodne neutrony nie musi być jednorodna. Wręcz przeciwnie, z komputerowych symulacji takich układów wynika, że w zależności od gęstości (od 10^{11} do 10^{14} g/cm³) swobodne neutrony preferują skupianie się w formie kul, prętów bądź płyt, tworząc tytułowy makaron: *gnocchi*, *spaghetti*, *lazanie*. Możliwe są też konfiguracje odwrotne – skupiska sieci krystalicznej zawieszane w gazie neutronów. Z oszacowań wynika, że taka materia jest dziesiątki miliardów razy bardziej wytrzymała na złamanie niż stal, jest zatem (teoretycznie) najtwardszą znaną naukowcom formą materii. Z astrofizycznego punktu widzenia różne rodzaje „makaronu” w skorupie gwiazd neutronowych są interesujące między innymi dlatego, że tak trudna do deformacji materia może wytrzymywać długotrwałe odkształcenia, co jest niezbędne do emisji fal grawitacyjnych, np. z rotujących gwiazd neutronowych.

Michał BEJGER

kończąc luty $2,5^\circ$ na północ od gwiazdy θ Ophiuchi. W tym czasie jego jasność przekroczy -2^m , tarcza zaś zwiększy średnicę do $36''$. Około godziny 5 Jowisz świeci na wysokości jakichś 10° nad południową częścią nieboskłonu.

Druga planeta od Słońca przez miesiąc przemierzy cały gwiazdozbiór Strzelca, zaczynając luty 9° na wschód od Jowisza (6° na lewo od niej pokaże się Księżyc w fazie 11%), 5 lutego Wenus przejdzie odpowiednio 3 i 2° na północ od pary mgławic M8 i M20, obok których w zeszłym sezonie znajdował się Saturn z Westą. 6 dni później w podobnej odległości Wenus

minie gromadę kulistą M22, również odwiedzaną w zeszłym roku przez Saturna, po czym w dniach 15–18 lutego przetnie charakterystyczny wianuszek gwiazd z północno-wschodniej części Strzelca, zbliżając się na zaledwie 6' do gwiazdy Albaldah (π Sgr). 18 i 19 lutego Wenus zbliży się na około 1° do Saturna, a 23 lutego – na 1,5° do słabszego od 14^m Plutona, którego – z racji jasnego tła nieba – nie da się dostrzec. Przez miesiąc jasność Wenus spadnie do $-4,1^m$, średnica tarczy zmniejszy się do 16'', zaś faza urośnie do 72%.

Saturn porusza się najwolniej z jasnych planet Układu Słonecznego i w trakcie miesiąca pokona nieco ponad 2,5° pod wspomnianym w poprzednim akapicie wianuszkiem gwiazd, przy czym 2 i 3 lutego przejdzie 25' na południe od σ Sgr. W lutym blask Saturna wyniesie $+0,6^m$, a średnica jego tarczy – 15''. Planeta zacznie miesiąc od mocnego akcentu: 2 lutego zakryje ją cienki sierp Księżyca w fazie 6% (kilkanaście godzin później dojdzie do zakrycia Plutona). W grudniu zeszłego roku zaczęła się trwająca do końca br. seria 15 zakryć Saturna i Plutona przez Księżyc, ale tylko te lutowe da się dostrzec z Europy, a jeszcze tylko następne zakrycie 1 marca zdarzy się na półkuli północnej Ziemi. Pozostałe będą widoczne z półkuli południowej. Podczas zakrycia z 2 lutego w dobrej pozycji znajdzie się Europa Środkowa i Zachodnia oraz północno-zachodnia część Afryki, gdzie do zjawiska dojdzie na ciemnym lub jaśniejącym niebie. W Polsce zakrycie zacznie się około godziny 7, skończy 40 minut później, już po wschodzie Słońca nad większością kraju. Tego samego dnia przypada maksymalna elongacja zachodnia Tytana, który zniknie za Księżycem 5 minut wcześniej.

Na niebie wieczornym w połowie miesiąca zacznie pojawiać się planeta Merkury, która 26 lutego osiągnie maksymalną elongację wschodnią. Niestety, jak to bywa na półkuli północnej, oddali się ona wtedy od Słońca na zaledwie 18°. W dniu maksymalnej elongacji około godziny 19:15 Merkury pokaże się na wysokości ponad 6° nad zachodnim widnokrzem. Do końca lutego średnica planety zwiększy się do 8'', a faza spadnie do 41%. W tym samym czasie jej jasność zmniejszy się do $-0,1^m$. Merkury zbliży się na 45' do gwiazdy λ Aqr 16 lutego, a 2 dni później – na 8' do gwiazdy 82 Aqr i trochę ponad 1° do Neptuna, zaś jeszcze kolejnej doby przejdzie w podobnej odległości od gwiazdy φ Aqr. Jednak gwiazdy i Neptun raczej zginą w zorzy wieczornej, a na pewno ich obserwacji nie ułatwi niskie położenie nad widnokrzem. Okres podobnej widoczności Merkurego powtórzy się jeszcze w czerwcu, gdy osiągnie on elongację o 7° większą. Jednakże zmieniające się wtedy na niekorzystne nachylenie ekliptyki do wieczornego horyzontu spowoduje, że Merkury nie wzniesie się wyżej niż w lutym. Elongacja lutowa i czerwcowe to okresy najlepszej wieczornej widoczności Merkurego w tym roku.

Podczas elongacji wschodniej, czyli widoczności wieczornej, planety wewnętrzne zbliżają się do Ziemi, dążąc do tzw. koniunktacji dolnej, a więc przejścia

między Ziemią a Słońcem (gdzie znajdują się dokładnie na linii łączącej Ziemię ze Słońcem, można być świadkiem przejścia danej planety na tle Słońca). W tym czasie zwiększają one swoje rozmiary kątowe, zaś ich tarcze dążą do nowiu, przechodząc przez kwadrę, a następnie przybierają postać coraz węższego sierpa – i wtedy właśnie, tuż przed (na niebie wieczornym) i tuż po koniunktacji dolnej (już na niebie porannym) – są atrakcyjnym celem dla posiadaczy teleskopów. Szczególnie Wenus, która będzie miała w tym czasie rozmiar bliski 1', i do dostrzeżenia jej sierpa wystarczy najmniejsza nawet lornetka. Podobno są i tacy, co gołym okiem potrafią dostrzec, że Wenus nie jest punktem (pomijam bardzo rzadkie przypadki przejścia Wenus na tle tarczy słonecznej, gdy dla większości ludzi wystarczy tylko odpowiedni filtr blokujący nadmiar światła słonecznego, by dostrzec tarczę Wenus bez pomocy przyrządów optycznych).

Przez cały miesiąc po zmierzchu można obserwować planety Mars i Uran. Planeta Mars w połowie lutego przemieści się z gwiazdozbioru Ryb do Barana, tak samo jak planeta Uran, która uczyni to na początku miesiąca, zegnając tym samym Ryby na ponad 70 lat. Obie planety spotkają się 12 i 13 lutego, zbliżając się na 1°. W trakcie miesiąca Mars osłabnie do $+1,2^m$, zaś średnica jego tarczy skurczy się do 5''. Natomiast jasność Urana w lutym zmniejszy się do $+5,9^m$. Planeta Neptun jest już miesiąc przed spotkaniem ze Słońcem i można ją jeszcze dostrzec tylko na początku lutego, jakieś 2° na zachód od gwiazdy φ Aqr.

Jak już wspomniałem, Księżyc zacznie miesiąc w fazie cienkiego sierpa od zakrycia Saturna. 2 dni później przejdzie przez nów i zacznie pokazywać się na niebie wieczornym, gdzie – ze względu na duże nachylenie ekliptyki – szybko nabierze wysokości. 7 lutego Księżyc w fazie 7% minie Neptuna w odległości 5°. Grubszy o 21% sierp Księżyca przejdzie 7° pod parą planet Mars-Uran 10 lutego i dobę później około godziny 17:25 zakryje gwiazdę 4. wielkości ξ 2 Ceti. 12 lutego Srebrny Glob czeka I kwadra, zaś w nocy z 13 na 14 lutego – przejście przez Hiady i spotkanie z Aldebaranem, najjaśniejszą gwiazdą Byka, do której zbliży się na 2°. 19 lutego przypada pełnia Księżyca w gwiazdozbiorze Lwa i jego spotkanie z Regulusem. Tydzień później Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę w Skorpionie, po czym w ostatnich dwóch dniach miesiąca, już w fazie sierpa, spotka się z Jowiszem.

31 stycznia maksimum swojego blasku osiągnęła miryda R Leo, położona 5° na zachód od Regulusa i jednocześnie 8,5 minuty kątowej na południe od gwiazdy 6. wielkości 19 Leonis. R Leo może być jaśniejsza od $+4,5^m$, jeśli więc zbliży się do tej jasności, w miarę łatwo da się ją dostrzec gołym okiem, a w lornetkach powinno dać się ujrzyć jej barwę. W lutym Lew jest w opozycji do Słońca, a zatem jest on widoczny bardzo dobrze, tymczasem R Leo góruje około północy na wysokości mniej więcej 50°.

Ariel MAJCHER

Zastosowanie fal grawitacyjnych

W rozszerzającym się wszechświecie prędkość v niezwiązanego grawitacyjnie obiektu jest wprost proporcjonalna do odległości D tego obiektu od obserwatora:

$$v = H_0 \cdot D,$$

pod warunkiem, że odległość między obserwatorem a oddalającym się obiektem nie jest przesadnie duża. To oparte na obserwacjach astronomicznych stwierdzenie znane jest pod nazwą prawa Hubble'a i uznawane za jedno z największych osiągnięć astronomii i fizyki XX wieku. Współczynnik proporcjonalności H_0 to stała Hubble'a mówiąca o tym, jak szybko rozszerza się obecnie wszechświat.

Ile jest równa stała Hubble'a? To z pozoru niewinne pytanie doprowadziło do jednej z większych kontrowersji we współczesnej kosmologii, ponieważ odpowiedź na nie brzmi – zależy, kto odpowiada. Coraz dokładniejsze obserwacje i coraz lepsza teoria pozwalają bowiem na rosnącą precyzję wyznaczania stałej Hubble'a różnymi metodami. Najnowsze pomiary wykorzystujące obserwacje odległych supernowych dają wynik $H_0 = 73,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ z niepewnością 2,4%, podczas gdy badania mikrofalowego promieniowania tła prowadzą do rezultatu $H_0 = 67,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ z niepewnością 0,68%. To nie są zgodne wyniki, nawet jeśli uwzględnić niepewności pomiarowe. Dlaczego tak jest? I co można z tym zrobić?

Postać prawa Hubble'a, od której zaczęliśmy nasze rozważania, jest intuicyjnie naturalna, ale w rzeczywistości nie mierzy się prędkości, z jakimi poruszają się odległe obiekty, ale ich przesunięcie ku czerwieni z , czyli względną zmianę częstości charakterystycznych linii widmowych. Prawo Hubble'a przybiera wówczas postać

$$c \cdot z = H_0 \cdot D,$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni. Odległość D występująca w tym prawie również wymaga komentarza. W przypadku obserwacji obiektów bardzo odległych mamy bowiem na myśli przede wszystkim odległość jasnościową, określoną następującym rozumowaniem. Jeśli mamy źródło astronomiczne emitujące równomiernie promieniowanie o mocy L i obserwatora odległego o D od źródła, to moc promieniowania F docierająca do jednostkowej powierzchni tuż przy obserwatorze wynosi

$$F = \frac{L}{4\pi D^2},$$

bowiem cała moc promieniowania rozłoży się równomiernie na sferze o powierzchni $4\pi D^2$. Wnioskujemy stąd, że do wyznaczenia stałej Hubble'a musimy wiedzieć, jakie jest przesunięcie ku czerwieni odległych obiektów astronomicznych oraz jaka jest moc emitowanego przez nie promieniowania.

Pierwszą wielkość zmierzyć jest łatwo. Zadanie pomiaru drugiej spędza sen z powiek pokoleniom astronomów. Być może, że już nie na długo. Nagrodzone Nagrodą Nobla z fizyki odkrycie fal grawitacyjnych wytwarzanych

przez zlewające się układy podwójne czarnych dziur umożliwiło badanie wszechświata zupełnie nowymi metodami [1]. Wyczuwające bardzo subtelne odkształcenia przestrzeni interferometrii LIGO i Virgo pozwalają wykryć charakterystyczne „ćwierkanie”, tj. wzrost częstości obiegu czarnych dziur względem siebie, zanim połączą się one w jeden obiekt. To z kolei pozwala na stosunkowo dokładne wyznaczenie parametrów łączących się czarnych dziur.

Ponieważ płaszczyzna, w której leżą ramiona interferometru Virgo, ustawiona jest pod kątem do ramion pary interferometrów LIGO, można w zasadzie określić tzw. polaryzację fal grawitacyjnych, czyli kierunek, w jakim odkształca się przestrzeń. Piszę tutaj „w zasadzie”, gdyż ten aspekt pomiaru jest jeszcze stosunkowo niedoskonały i charakteryzuje się niepewnościami pomiarowymi rzędu kilkunastu procent. Nie wolno jednak zapominać, że do zestawu dużych interferometrów badających fale grawitacyjne dołączy w przyszłym roku jeszcze jeden – japońska KAGRA, a w kolejnej dekadzie planowana jest budowa nowego obserwatorium LIGO w Indiach. Należy sądzić, że te nowe instrumenty pozwolą na znacznie dokładniejsze wyznaczenie polaryzacji fal grawitacyjnych.

Dlaczego jest to takie ważne? Pomiar mas łączących się czarnych dziur oraz polaryzacji wytwarzanych przez nie fal grawitacyjnych pozwala bowiem na *bezpośrednie* wyznaczenie odległości jasnościowej D do tych obiektów.

Przeszło półtora roku temu społeczność astronomów zelektryzował jeszcze jeden fakt związany z falami grawitacyjnymi. Detekcja sygnału GW170817 była bowiem stowarzyszona z wykryciem błysku promieniowania gamma oraz sygnału optycznego pochodzących z tego samego zakątka wszechświata. Skoro zaś można mierzyć sygnał optyczny związany ze zjawiskami, w których powstają fale grawitacyjne, można w szczególności wyznaczyć na tej podstawie przesunięcie ku czerwieni.

A wtedy droga do dokładnego wyznaczenia parametru Hubble'a będzie już stosunkowo prosta. Tak uzyskany pomiar uwolni się od niepewności prześladowanych dotąd te badania: konieczności konstrukcji i kalibracji tzw. drabiny odległości kosmicznych w przypadku badania odległych supernowych oraz zależności od szczegółów modelu kosmologicznego przy interpretowaniu wyników pomiarów mikrofalowego promieniowania tła. Nie będą już wtedy potrzebne „świece standardowe” – obiekty astronomiczne o znanej skądinąd jasności, przydające się do szacowania odległości – ich rolę przejmą łączące się czarne dziury, nazywane w tym kontekście „syrenami standardowymi” (upodobanie badaczy czarnych dziur do metafor akustycznych niewątpliwie będzie źródłem interesującej terminologii fizycznej).

Wtedy będzie można powiedzieć, że fale grawitacyjne, jakkolwiek fascynujące same w sobie, przydają się do lepszego zrozumienia wszechświata. Być może trzeba będzie już wtedy myśleć, jak je opodatkować.

Krzysztof TURZYŃSKI

[1] Holz D. E., Hughes S. A., Schutz B. F., Physics Today 71 (2018) 12, 34



Symetria w algebrze

Bartłomiej BZDEGA

Niech $A = \{a, b, c, d, e\}$. Rozważmy funkcję $\sigma : A \rightarrow A$, określoną następująco:

$$\sigma(a) = d, \quad \sigma(b) = c, \quad \sigma(c) = e, \quad \sigma(d) = a, \quad \sigma(e) = b.$$

Zwróćmy uwagę, że wśród wartości funkcji σ każdy element zbioru A występuje dokładnie raz. Odwzorowania o tej własności będziemy nazywać *permutacjami zmiennych*. Działają one w naturalny sposób na wyrażeniach algebraicznych, na przykład opisana wyżej σ robi to tak:

$$a^2b + b^2c + c^2d + d^2e + e^2a \quad \longmapsto \quad d^2c + c^2e + e^2a + a^2b + b^2d.$$

Wyrażenia algebraiczne otrzymane z danego poprzez permutacje zmiennych będziemy nazywać jego *symetrycznymi wersjami*. Jeśli wszystkie symetryczne wersje są równe, to wyrażenie nazywamy *symetrycznym*. Dla jasności, wyrażenie $ab + bc + ca$ jest symetryczne, a wyrażenie $ab + bc + cd + da$ nie jest. Pojęcie symetryczności można intuicyjnie rozszerzyć: równanie jest symetryczne, jeśli każda jego symetryczna wersja jest mu równoważna, podobnie nierówność, układ równań itp.

Przez zapis $\tau = (x, y)$ rozumiemy, że $\tau(x) = y$, $\tau(y) = x$ oraz τ jest identycznością na wszystkich pozostałych zmiennych. Taką permutację nazywamy *transpozycją*. Aby sprawdzić symetryczność, można ograniczyć się do transpozycji jednej zmiennej ze wszystkimi pozostałymi, czyli przykładowo dla wyrażenia $ab + bc + cd + da$ byłyby to (a, b) , (a, c) i (a, d) .

Jeśli z symetrycznego równania lub układu równań wywnioskujemy jakąkolwiek własność jego niewiadomych, to spełnione są także własności do niej symetryczne, które można udowodnić w pełni analogicznie. Takie rozumowanie stosujemy w zadaniach 1, 3, 5 i 9.

Wraz z każdym rozwiązaniem symetryczne równanie lub układ ma rozwiązania powstałe przez jego permutacje. Pojawia się to w zadaniach 2, 3 i 7.

Wobec powyższego w zadaniach z algebraiczną symetrią możemy na początku rozwiązania narzucić pewien porządek wśród niewiadomych, gdyż rozwiązania nieuporządkowane dostaniemy poprzez permutacje uporządkowanych. Zabieg ten można prześledzić w zadaniach 4, 6, 7, 8 i 10.

Zadania

Rozwiązać poniższe układy równań w liczbach rzeczywistych.

1.	$\begin{cases} y^2 + z^2 = 3x - 1 \\ z^2 + x^2 = 3y - 1 \\ x^2 + y^2 = 3z - 1 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x^3 = y - z \\ y^3 = z - x \\ z^3 = x - y \end{cases}$	4.	$\begin{cases} y^4 + z^4 = x^7 \\ z^4 + x^4 = y^7 \\ x^4 + y^4 = z^7 \end{cases}$

5. Suma kwadratów dowolnych trzech liczb spośród $a, b, c, d, e > 0$ jest równa sumie sześciątów dwóch pozostałych. Wyznaczyć te liczby.

6. Udowodnić, że $x^t(x - y)(x - z) + y^t(y - z)(y - x) + z^t(z - x)(z - y) \geq 0$ dla $x, y, z \geq 0$ i $t > 0$ (nierówność Schura).

7. Liczby a, b i c są naturalne. Iloczyn dowolnych dwóch spośród nich daje resztę 1 z dzielenia przez trzecią. Wyznaczyć te liczby.

8. Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia $\min\{a, b, c\} - \max\{ab, bc, ca\}$ dla liczb rzeczywistych a, b i c .

9. Liczby rzeczywiste x, y i z spełniają warunki: $|x| \leq |y - z|$, $|y| \leq |z - x|$, $|z| \leq |x - y|$. Dowieść, że jedna z nich jest równa sumie pozostałych.

10. Rozwiązać równanie $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc$ w liczbach naturalnych.

Wskazówki do zadań
 1. Zauważamy, że $x, y, z < 0$. Odejmując stronami drugie równanie od pierwszego, otrzymamy $(x - z)(x + z + 3) = 0$, co daje $x = z$.
 2. Podnosząc pierwsze równanie do sześciam i odejmując od niego stronami trzecie, otrzymamy $(x + y + z)(x + y + z + 3) = 0$.
 3. Przyjmując $x \leq y \leq z$ i odejmując stronami trzecie równanie od drugiego, otrzymamy $(y - z)(y^2 + z^2 + 1) = 0$, więc $y = z$, bo drugi nawias jest dodatni.
 4. Zauważamy, że $x^2 = y^2 + z^2 \geq 0$, więc $x \geq 0$; analogicznie $y \geq 0$ i $z \geq 0$. Zatem, że $x \leq y \leq z$. Wówczas prawe strony równań są uporządkowane niemalejąco, a lewe nierosnąco, więc muszą być wszystkie równe.
 5. Odejmując stronami równości $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^3$ oraz $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^3$ otrzymamy $c^2(1 + 1) + d^2(1 + 1) = e^3 + e^3$, czyli $2c^2 = 2e^3$, więc $c = e$.
 6. Postać równoważna zadanej nierówności: $(z - x)(y - x) - (y - x)(x - z) + x^2(x - z) \geq 0$.
 7. Jest jasne, że $a, b, c > 1$. Można uzasadnić, że $abc |bc + ca + ab - 1$. Ograniczamy się do przypadku, w którym $a \leq b \leq c$. Mamy $bc + ca + ab - 1 > 2abc$, więc musi być $bc + ca + ab = abc$. Dla $a \geq 3$ otrzymujemy sprzeczność, więc $a = 2$.
 8. Jeśli wśród liczb a, b, c występują liczby różne, to $\min\{a, b, c\} - \max\{ab, bc, ca\} > 0$. Rozważmy więc $a, b, c \geq 0$. Można przyjąć $a \leq b \leq c$, wystarczy użyć oszacowania $a^2 \leq bc$.
 9. Podnosząc obustronnie do kwadratu pierwszą nierówność, otrzymamy $(x + y - z)^2 \leq 0$. Trzeba wziąć pod uwagę jeszcze symetryczne wersje i zauważyć, że iloczyn lewych stron wszystkich trzech jest niedodatni, jednocześnie będąc kwadratem liczby rzeczywistej.
 10. Podstawmy $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z$ i zsumujmy obie strony równania przez 2, a następnie przeanalizować ich reszty z dzielenia przez 4.



Maths Beyond Limits

Maths Beyond Limits to dwunastodniowy międzynarodowy obóz matematyczny dla uzdolnionej młodzieży w wieku 15 – 19 lat organizowany przez grupę byłych olimpijczyków, aktualnie studentów Uniwersytetu Warszawskiego i University of Cambridge pod patronatem Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci. Obóz odbywa się w Milówce koło Żywca w przepięknej scenerii Beskidu Śląskiego. Kolejna, czwarta edycja odbędzie się 9 – 21 września bieżącego roku. Wszystkich zainteresowanych zachęcamy do udziału w rekrutacji, która rusza już 1 kwietnia. Dokładne informacje o obozie, a także materiały z poprzednich edycji można znaleźć na naszej stronie internetowej i facebooku.



mathsbeyondlimits.eu



[fb/mathsbeyondlimits](https://www.facebook.com/mathsbeyondlimits)



mathsbeyondlimits@gmail.com