



delta

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $J \cdot s$ $\pi=3,141592\dots$

NR 11 (534) 2018

CENA 4 ZŁ VAT 5%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35550 X
MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl



Nakład: 3500 egz.

**Klasyczne
i kwantowe
czarne dziury**
str. 1

W następnym numerze piszemy o tym, czego nie wiemy.



SPIS TREŚCI NUMERU 11 (534)

Klasyczne i kwantowe czarne
dziury: uwagi astrofizyka
Marek Abramowicz str. 1

Czy czarne dziury to ciemna
materia?
Łukasz Wyrzykowski str. 5



Zadania str. 7

Kwazi-cząstki – model
standardowy
kwaziwszechświata
Jacek Szczytko str. 8

Jak proste problemy stały się
trudne
Michał Włodarczyk str. 10

Nie takie sztuczne neurony
Dominik Krzemiński str. 12

Jak definiować ciągi
rekurencyjne?
Filip Mazowiecki str. 14

A jednak się da (II), czyli
saga kryptologiczna
w odcinkach. Tym razem: bez
zobowiązań
o zobowiązaniach.
Łukasz Rajkowski str. 16

Bestiariusz informatyczny (6)
Tomasz Idziaszek str. 18

Informatyczny kącik
olimpijski (121):
Egzamin str. 19

Migawka informacyjna:
Rok 2058 str. 20

Klub 44 str. 21

Prosto z nieba:
Ewolucja kilonowej str. 22

Niebo w listopadzie str. 22

Aktualności
Chłód ciemnej materii str. 24



Kroimy kostkę
Joanna Jaszewska str. 25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216, p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2019 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Klasyczne i kwantowe czarne dziury: uwagi astrofizyka

Marek ABRAMOWICZ*

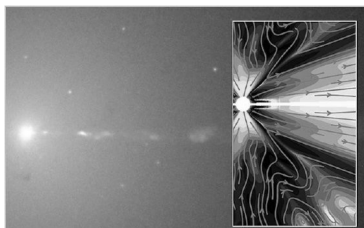
Klasyczne, astrofizyczne czarne dziury

* *Professor Emeritus:*
Physics Department,
Göteborg University, Szwecja
Na niepełnym etacie:
Centrum M. Kopernika PAN, Warszawa
Slezká univerzita, Opava, Czechy

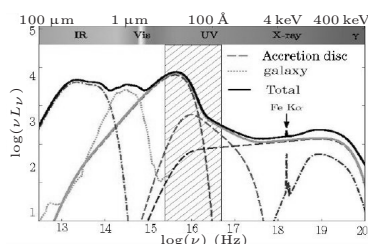
ZWARTOŚĆ OBIEKTÓW ASTROFIZYCZNYCH

Czarne dziury: $\mathcal{X}_{\text{BH}} = 1$
Słońce: $\mathcal{X}_{\odot} = 10^{-6}$
★ neutronowe: $\mathcal{X}_{\text{NS}} = 3 \cdot 10^{-1}$
Galaktyka: $\mathcal{X}_{\text{GAL}} = 10^{-7}$

ASTROFIZYCZNE BADANIA CZARNYCH DZIUR



Zdjęcie z teleskopu Hubble'a galaktyki eliptycznej M87, w której centrum tkwi supermasywna czarna dziura o masie $7 \cdot 10^9 M_{\odot}$. Akrecja materii na tę czarną dziurę jest źródłem jasności (mocy) przewyższającej wielokrotnie jasność samej galaktyki. Akrecja napędza także strzelającą z centrum strugę materii, jej prędkość zbliżona jest do prędkości światła. Magnetohydrodynamiczne symulacje akrecji i strugi pokazane są w okienku po prawej.



Rysunek powyżej pokazuje zasadę dopasowania obserwowanego widma z widmem obliczonym w modelach teoretycznych. Widmo pochodzi od dysku akrecyjnego, samej galaktyki, pyłu i rozrzedzonego gazu („korony”) oraz innych składników.

Teoria akrecji na czarne dziury jest bardzo szczegółowo zgodna z obserwacjami.

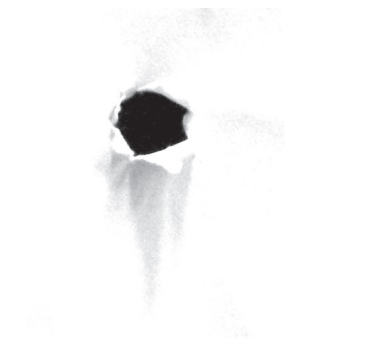
Astrofizyka nie daje przesłanek do kwestionowania einsteinowskiej, klasycznej, teorii czarnych dziur.

Czarne dziury są najbardziej niezwykłą teoretyczną przepowiednią wynikającą z równań ogólnej teorii względności Alberta Einsteina. Dwie ich cechy budzą ogromne wątpliwości teoretyków: istnienie centralnej osobliwości oraz istnienie horyzontu zdarzeń. Żadna z nich nie została zweryfikowana obserwacyjnie. Z drugiej strony teoretycy nie potrafią uzgodnić stanowiska, czy osobliwości i horyzont powodują poważny kryzys w fizyce. Natomiast obserwatorzy są o wiele mniej sceptyczni. W ciągu ostatniego czterdziestolecia astrofizycy zgromadzili ogromną ilość bardzo dokładnych obserwacji dotyczących konkretnych obiektów na niebie, które z racji swej „zwartości” mogą być czarnymi dziurami. Dla obiektu o promieniu R i masie M , którego kształt niewiele różni się od sfery, zwartość \mathcal{X} definiowana jest jako R_G/R , gdzie promień grawitacyjny R_G to $2GM/c^2$.

Astrofizycy wyznaczają z obserwacji zwartość obiektu, i jeśli okazuje się, iż $\mathcal{X} \approx 1$, to uważają ten obiekt za dobrego kandydata na czarną dziurę. Rzecz jasna, jest to pewnego rodzaju nadużycie, ponieważ nie zwartość, lecz właśnie istnienie horyzontu jest definiującą własnością czarnej dziury. Obserwacje używające fal elektromagnetycznych, to znaczy radiowych, podczerwonych, optycznych, nadfioletowych, rentgenowskich i gamma, nie mogą, z przyczyn fundamentalnych, dowieść istnienia horyzontu. Często mamy bardzo mocne przesłanki na istnienie horyzontu, ale nigdy nie mamy na to dowodu. Należy jednak z całą mocą podkreślić, że – jak dotąd – nie ma ani jednej obserwacji, która byłaby sprzeczna z przewidywaniami ogólnej teorii względności dotyczącymi czarnych dziur. Nie ma zatem żadnych obserwacyjnych przesłanek sugerujących konieczność rewizji klasycznej, einsteinowskiej, teorii czarnych dziur.

Astrofizycy odkryli dwa rodzaje czarnych dziur: *gwiazdowe*, o masach od kilku do kilkudziesięciu mas Słońca (masa Słońca: $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ g) oraz *supermasywne*, o masach $10^6 M_{\odot} \leq M \leq 10^{10} M_{\odot}$. Odkryte gwiazdowe czarne dziury tworzą układy podwójne ze „zwykłą” gwiazdą. Supermasywne czarne dziury rezydują w centrach galaktyk. W środku naszej Galaktyki jest to SgrA*, czarna dziura o masie $4 \cdot 10^6 M_{\odot}$. Gwiazdowe i supermasywne czarne dziury pochłaniają (akreują) rotującą materię ze swego sąsiedztwa. Materia, spadając po ciasnych spiralach nagrzewa się i świeci. Procesy akrecyjne są już stosunkowo dobrze poznane (choć nie do końca). W szczególności potrafimy teoretycznie wyliczać, często bardzo dokładnie, własności promieniowania struktur akrecyjnych. Wiemy, które z nich zależą silnie od grawitacji, natomiast słabo od procesów dysypacyjnych zachodzących w materii. To daje nam wgląd w geometrię czasoprzestrzeni czarnych dziur. W ten sposób zgromadziliśmy solidną, imponującą, obserwacyjną wiedzę o czarnych dziurach.

Ale nowe obserwacyjne możliwości badania czarnych dziur są jeszcze bardziej imponujące! Od trzech lat interferometry LIGO i Virgo rejestrują fale grawitacyjne powstałe podczas zderzeń i zlewania się par czarnych dziur. W zeszłym roku działający od kilku lat zespół radioteleskopów tworzących globalną sieć EHT (Event Horizon Telescope), poprawił zasadniczo swe parametry i rozpoczął obserwacje SgrA*, supermasywnej czarnej dziury w centrum Galaktyki, z rozdzielczością kątową porównywalną z rozmiarami tego obiektu. LIGO/Virgo oraz EHT otwierają zupełnie nową epokę w historii fizyki. Po raz pierwszy w dziejach będzie możliwe obserwacyjne testowanie zjawisk kwantowej grawitacji. Praktycznym na to sposobem stanie się obserwacyjne sprawdzanie, czy niektóre z konkretnych obiektów w zasięgu LIGO/Virgo lub



LATA DWUDZIESTE,
LATA TRZYDZIESTE

W latach dwudziestych i na początku lat trzydziestych, kiedy święciła tryumfy nowa fizyka, panował ogromny optymizm co do przyszłości – nauki, sztuki, kultury i cywilizacji. Myślano, że Europejczycy i Amerykanie wywzłowili się raz na zawsze z barbarzyńskich aspektów swej historii – wojen, nacjonalizmów, populizmu, zabobonów i przesądów. Hitlera uważano z początku za nieszkodliwego pajaca. Ale on i jemu podobni potrafili jednak uwieść nie tylko niewykształconego suwerena, lecz także wybitnych intelektualistów. Uwieść chamskim wrzaskiem z pierwszych stron dzienników i odwiecznymi kłamstwami o wstawaniu z kolan, o piędzi, chwale i rubieży, o ojcach, dziadach i sztandarach, o bohaterach i ofiarach. Brz...

Gdyby ktoś twierdził, że ta uwaga jest niestosowna w felietonie dotyczącym kwantowej grawitacji, niech wie, że się myli. *Wir müssen wissen!* W roku 1986 opublikowałem w giedroyciowej *Kulturze* obszerny esej historyczny o „Hitlerowskiej ustawie o szkołach wyższych”, opisując, jak ustawa rządu kanclerza Adolfa Hitlera, „przywracająca niemieckim uczelniom narodowy charakter”, zdruzgotała w ciągu zaledwie kilku lat niemiecką matematykę i fizykę, obie wówczas najlepsze w świecie, kwitujące.



Występowanie w formule Hawkinga jednocześnie stałych c , G , \hbar świadczy o tym, że łączy ona grawitację i kwanty.

EHT są czarnymi dziurami, czy też ich „kwantowymi alternatywami”. To nie jest sprawa odległej przyszłości, to stanie się niebawem. Technologia i know-how istnieją już dzisiaj.

Teorie współczesnej fizyki

Fundamentem, na którym stoi cała współczesna fizyka, są dwie teorie – mechanika kwantowa oraz ogólna teoria względności Alberta Einsteina, czyli teoria grawitacji. Obie powstały w pierwszych dziesięcioleciach XX wieku i zupełnie odmieniły nasze rozumienie rzeczywistości – nasze koncepcje na temat czasu i przestrzeni, determinizmu, a nawet na temat roli świadomości w świecie materii. Jeszcze większą rewolucją, o niewyobrażalnych dziś konsekwencjach dla fizyki, kultury i technologii, będzie przyszła unifikacja obu teorii – sformułowanie kwantowej teorii grawitacji. „Niewyobrażalnych konsekwencji” nie sposób, rzecz jasna, przewidzieć. To mogą być, na przykład, podróże „na skróty” w czasoprzestrzeni, w tym także wehikuly czasu, wykorzystanie energii próżni, makroskopowa teletransportacja...

Rzeczywistość w najmniejszej skali cząstek elementarnych, atomów i molekuł zdominowana jest przez efekty kwantowe, które są ze swej natury probabilistyczne i wynikają z faktu, iż materia nie jest ciągła, lecz składa się z niepodzielnych porcji – kwantów. Teoria grawitacji Alberta Einsteina, czyli ogólna teoria względności, objaśnia rzeczywistość w dużej skali – tam, gdzie dominuje oddziaływanie grawitacyjne, opisywane jako efekt zakrzywienia ciągłej (nieskwantowanej) czasoprzestrzeni. Dotyczy to struktury i ruchu planet, gwiazd, galaktyk i całego Wszechświata, a także budowy skał, domów i maszyn, gdzie ważne są również wiązania chemiczne, opisywane kwantowo przez oddziaływania elektromagnetyczne. Chemia jest głównym językiem biologii, która opisuje wiele aspektów budowy i życia organizmów – w tym organizmu człowieka. W poznanym fizycznym świecie obie teorie opisują wszystko, o czym wiemy, od najmniejszych do największych istniejących obiektów. Ich poprawność jest imponująca – została potwierdzona w ogromnej ilości pomiarów, eksperymentów i obserwacji, a także w działaniu maszyn i urzędzeń.

Sukces nie jest jednak zupełny, ma bowiem zasadniczą skazę – te dwie podstawowe teorie fizyki nie są kompatybilne. Opisują rzeczywistość odrębnie, we właściwych sobie zakresach stosowności, ale gdy próbujemy stosować je naprawdę łącznie, napotykamy podstawowe teoretyczne trudności, których dziś nikt nie potrafi przezwyciężyć. Często obrazują to paradoksalne sprzeczności, niemożliwe dziś do rozwikłania. Mamy nadzieję, że wszystkie te trudności i paradoksy usunie kwantowa teoria grawitacji – jeszcze nieodkryta „teoria wszystkiego”, uogólniająca i łącząca kwanty z grawitacją. Kwantowa grawitacja i teoria wszystkiego to palący nierozwiązany problem, największe wyzwanie współczesnej fizyki.

Próby, nigdy jak dotąd udane, stworzenia teorii wszystkiego są także domeną teoretycznych spekulacji, całkowicie oderwanych od doświadczeń. Dopiero w ostatnich latach otworzyły się możliwości obserwacyjnego testowania przynajmniej niektórych z tych spekulacji. Otóż, choć nie ma jeszcze teorii kwantowej grawitacji, fizycy spekulują, jakie mogłyby być tej teorii przewidywania dotyczące konkretnych zjawisk i obiektów – w tym czarnych dziur. Najsłynniejszym przykładem jest tu promieniowanie Hawkinga. Stephen Hawking założył, iż pewne postulaty zarówno teorii Einsteina, jak i mechaniki kwantowej są tak bardzo fundamentalne, iż będą zapewne obowiązywać także w kwantowej teorii grawitacji. Za takie uznał istnienie horyzontu zdarzeń czarnych dziur oraz zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Następnie sprawdził, co z nich obu łącznie wynika. Pokazał (wykonując skomplikowany rachunek, w którym przyjął jeszcze dodatkowe założenia), że czarne dziury nie są całkiem czarne, ale emitują promieniowanie termiczne z temperaturą daną wzorem $T = \hbar c^3 / 8\pi G k M$. Tutaj \hbar jest podstawową w mechanice kwantowej stałą

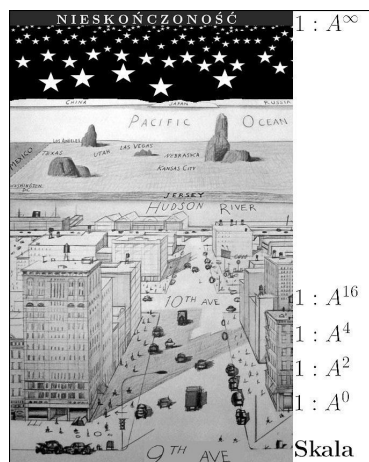
KONFOREMNA KOMPAKTYFIKACJA

To jest ważny temat, ale poboczny w stosunku do głównej myśli tego felietonu. Dlatego objaśniam go tylko na marginesie tej i następnej strony. Konforemna kompaktifikacja jest elegancką metodą, używaną od dawna przez matematyków i artystów. Do teorii Einsteina wprowadził ją Brandon Carter, a upowszechnił Roger Penrose. Pozwala na tworzenie pożytecznych i poglądowych map czasoprzestrzeni.

Okładka *New Yorkera* z 29 marca 1976 roku przedstawia słynny rysunek Saula Steinberga „View of the World from 9th Avenue”. Rysunek jest przykładem stosowania konforemnej kompaktifikacji w sztuce. Zasada jest dokładnie taka sama, jak w przypadku diagramów Cartera–Penrose’a, opisanych na stronie następnej.



Rzecz polega na odpowiednim skalowaniu: skala zmniejsza się wraz z odległością od środka mapy, gdzie ma wartość 1 : 1, dążąc w nieskończoności do wartości 1 : ∞. W ten sposób na skończonej mapie można pokazać nieskończony obszar – to jest właśnie „kompaktifikacja”. Natomiast „konforemność” oznacza, iż deformując odległości, skalowanie nie deformuje kątów (kształtów). Widok z 9-tej Alei aż do nieskończoności pokazany jest na rysunku poniżej.



Plancka, c i G najważniejszymi stałymi teorii Einsteina – to znaczy prędkością światła i stałą grawitacji, k stałą Boltzmanna – podstawową w termodynamice statystycznej, wreszcie M jest masą czarnej dziury.

Promieniowanie Hawkinga

$T = \hbar c^3 / 8\pi G k M$ jest temperaturą nierotującej i elektrycznie nienaładowanej czarnej dziury. Najbardziej ogólne rozwiązanie równań pola Einsteina dopuszcza czarne dziury z momentem pędu J i ładunkiem elektrycznym Q – czarna dziura może mieć tylko te trzy własności (M, J, Q) , jest nimi całkowicie i kompletnie określona. Muszą one spełniać nierówność,

$$(1) \quad M^2 - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 G} - \left(\frac{Jc}{MG}\right)^2 \geq 0.$$

Przez ϵ_0 oznaczyliśmy przenikalność elektryczną próżni. Często we wzorach zastępuje się moment pędu czarnej dziury J przez jej „spin” zdefiniowany jako $a = J/(Mc)$.

Położenie „zewnątrznego” r_+ i „wewnętrznego” r_- horyzontu zdarzeń dane jest wzorem,

$$(2) \quad r_{\pm} = \frac{G}{c^2} \left[M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 G} - \left(\frac{Jc}{MG}\right)^2} \right].$$

Z tego wzoru wynika, że jeśli nierówność (1) nie jest spełniona, to nie ma rzeczywistych rozwiązań równania (2) – a zatem, nie ma horyzontu, choć jest osobliwość. W tym przypadku mamy do czynienia z „nagą osobliwością”. Graniczny przypadek, to znaczy równość we wzorze (1) definiuje przypadek „maksymalnej czarnej dziury”. Dla takich mamy $r_+ = r_- = GM/c^2$.

Dla rotujących ale nienaładowanych czarnych dziur definiuje się geometryczne wielkości na horyzoncie:

$$\text{grawitacja: } \kappa = \frac{c^2(r_+ - r_-)}{2(r_+^2 + a^2)},$$

$$\text{rotacja: } \Omega = \frac{a}{r_+^2 + a^2},$$

$$\text{powierzchnia horyzontu: } A = 4\pi(r_+^2 + a^2).$$

Zauważmy, że dla maksymalnej czarnej dziury (z $a = M$) mamy $r_+ = r_-$, to znaczy $\kappa = 0$. James Bardeen udowodnił, że żadne oddziaływanie nie może rozkręcić czarnej dziury do maksymalnego stanu $a = M$ w skończonym czasie – zatem κ nie może być zredukowane w skończonym czasie do zera. Do stwierdzenia, że pole horyzontu czarnej dziury nie może maleć, doprowadziły prace Demetrios Christodoulou i kilku innych fizyków. Jacob Bekenstein, jeszcze jako doktorant Johna Archibalda Wheelera w Princeton, zauważył, iż wzór na zmianę energii czarnej dziury,

$$dE = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ,$$

jest bardzo podobny do wzoru opisującego drugie prawo termodynamiki,

$$dE = T dS + \Omega dJ.$$

W pierwszym członie po prawej w obu przypadkach różniczka związana jest z wielkością niemającą (entropia S albo pole horyzontu A), natomiast jej mnożnik Lagrange’a jest wielkością nieredukowalną do zera (temperatura T albo grawitacja na horyzoncie κ). Bekenstein znalazł skalowanie $A \rightarrow S$ oraz $\kappa \rightarrow T$,

$$\text{temperatura: } T = \kappa \left(\frac{1}{2\pi c}\right) \left(\frac{\hbar}{k}\right),$$

$$(3) \quad \text{entropia: } S = S_{\text{BH}} = A \left(\frac{c^3}{4G}\right) \left(\frac{\hbar}{k}\right)^{-1} = A \left(\frac{k}{4\ell_P^2}\right),$$

gdzie $\ell_P = \sqrt{G\hbar/c^3} = 10^{-33}$ cm oznacza długość Plancka. Indeks „BH” nie jest skrótem pochodzącym od „black hole”, lecz od „Bekenstein–Hawking”.

DIAGRAMY CARTERA-PENROSE' A

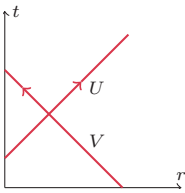
Równanie ruchu sygnałów świetlnych, poruszających się w kierunku od i do centrum na ustalonym promieniu r we współrzędnych sferycznych, można zapisać jako,

$$(4) \quad r = +ct + r_0^+, \quad r = -ct + r_0^-.$$

Stałe r_0^+ oraz r_0^- określają położenie sygnału w chwili $t = 0$, czyli „numerują” poszczególne sygnały. Wprowadzimy oznaczenia $U = r_0^+$ oraz $V = r_0^-$. W jednostkach, w których długość mierzy się w sekundach świetlnych, a czas w sekundach, prędkość światła ma wartość $c = 1$. Równania (4) przyjmują postać,

$$U = r + t, \quad V = r - t.$$

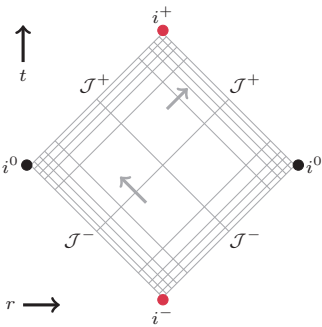
U, V definiują współrzędne „zerowe”, wyznaczone przez trajektorie sygnałów świetlnych w czasoprzestrzeni. Pokazane jest to na rysunku poniżej.



Konforemnej kompaktyfikacji dokonuje się za pomocą przekształcenia,

$$u = \text{tg}^{-1} U + \text{tg}^{-1} V, \\ v = \text{tg}^{-1} U - \text{tg}^{-1} V.$$

Teraz całą czasoprzestrzeń bez grawitacji widać na skończonej mapie.



Brzeg tego „diagramu Cartera-Penrose'a” (diagramu CP) stanowią nieskończoności:

i^- *czasowa nieskończoność przeszłości*. Zaczynają się historie materii i obserwatorów (poruszających się wolniej niż światło).

i^+ *czasowa nieskończoność przyszłości*. Kończą się historie materii i obserwatorów

J^- *zerowa nieskończoność przeszłości*. Zaczynają się historie sygnałów świetlnych.

J^+ *zerowa nieskończoność przyszłości*. Kończą się historie sygnałów świetlnych.

i^0 *nieskończoność przestrzenna*. Nieosiągalna dla materii, światła i obserwatorów.

To bardzo piękne skalowanie. Zauważmy, że choć każde z osobna – temperatura i entropia czarnej dziury – zależą od stałych \hbar, k , to ich kombinacja TdS_{BH} , równa klasycznej, niekwantowej, czysto geometrycznej wielkości $(\kappa/8\pi)dA$ od tych stałych nie zależy. Wyobraźmy sobie elementarne kwantowe komórki $[2\ell_P \cdot 2\ell_P]$. Na powierzchni horyzontu można je ułożyć na $W = e^{A/4\ell_P^2}$ sposobów. To intuicyjnie wyjaśnia wzór (3) na entropię – można go bowiem zapisać w boltzmannowskiej formie,

$$S_{\text{BH}} = k \log W, \quad \text{gdzie } W = e^{A/4\ell_P^2}.$$

Hawking początkowo był bardzo przeciwny idei Bekensteina. W ważnej pracy „The Four Laws of the Black Hole Mechanics”, napisanej wspólnie z Bardeenem i Carterem w roku 1974, poświęcił cały akapit na argumentację, iż pola powierzchni czarnej dziury NIE można uważać za entropię. Ale przekonał się w końcu do entropii Bekensteina – i wtedy zrozumiał, że czarne dziury rzeczywiście powinny promieniować!

Wykazał istnienie promieniowania za pomocą dość skomplikowanego rachunku w kwantowej teorii pola (różni obserwatorzy wykrywają różne stany próżni), ale wyjaśnił też rzecz poglądowo – jako wynik kwantowej, spontanicznej kreacji wirtualnych par (cząstka+antycząstka). W swym bardzo znanym popularnym artykule w „Scientific American” tak to opisał. Całkowita energia pary jest równa zero, gdyż energia nie może powstać z niczego. Zatem jedna z wirtualnych cząstek ma energię dodatnią, a druga ujemną. Daleko od horyzontu takie pary powstają na czas bardzo krótki, a potem anihilują bez śladu. Niedaleko horyzontu możliwe jest wchłonięcie cząstki o ujemnej energii przez czarną dziurę. Na zewnątrz horyzontu pozostaje zatem cząstka o dodatniej energii, to znaczy kwant promieniowania Hawkinga. Całkowita energia jest zachowana, ponieważ w wyniku absorpcji cząstki o ujemnej energii masa czarnej dziury ulega zmniejszeniu (masa i energia są równoważne, $E = Mc^2$).

Czy promieniowanie Hawkinga jest rzeczywistym efektem, a jego wzór na temperaturę jest poprawną formułą przyszłej kwantowej teorii grawitacji? Wielu fizyków sądzi (bo przecież nikt tego dziś nie może wiedzieć na pewno), że tak jest istotnie. Ale nie wszyscy się z tym zgadzają. Promieniowanie Hawkinga nigdy nie zostało zaobserwowane – ani bezpośrednio, ani poprzez żadne jego pośrednie efekty. Jego temperatura jest odwrotnie proporcjonalna do masy czarnej dziury. Dla najmniejszej „astrofizycznej” czarnej dziury, o masie $\sim 10M_{\odot}$, wynosi ona $T \sim 10^{-7}$ K, czyli mniej niż temperatura kosmicznego promieniowania tła. Astrofizyczne czarne dziury są zimniejsze niż ośrodek, w którym są zanurzone – na pewno więc od tego ośrodka nie promieniają. Mogłyby promieniować czarne dziury o masach mniejszych niż $\sim 10^{25}$ g. Takie czarne dziury zmniejszałyby swoją masę skutkiem promieniowania, stając się coraz gorętsze i promieniując coraz więcej – w końcu kończyłyby życie wybuchem. Czas życia czarnej dziury jest proporcjonalny do sześciastu jej masy, przy czym czarna dziura o masie około 10^{15} g ma czas życia równy obecnemu wiekowi Wszechświata. Takie pierwotne mini-czarne dziury, jeśli powstały niedługo po Wielkim Wybuchu, powinny teraz właśnie kończyć życie w eksplozji, jako punktowe błyski w promieniach gamma. Obserwujemy różnego typu błyski gamma, ale nie takie, które mogłyby pochodzić od takich eksplozji promieniowania Hawkinga. Ale czy pierwotne czarne dziury rzeczywiście powstały we wczesnym Wszechświecie? Tego nikt nie wie. Moim zdaniem najsilniejszym argumentem za ich powstaniem i istnieniem są FRB – silne, krótkie błyski w falach radiowych, dochodzące do nas z najbardziej odległych rejonów Wszechświata. Jedynym spójnym wytłumaczeniem tego zjawiska są, moim zdaniem, zderzenia pierwotnych czarnych dziur z gwiazdami neutronowymi.

Z promieniowaniem Hawkinga mamy także bardzo poważny problem teoretyczny: **paradoks informacyjny czarnych dziur**, przez wielu postrzegany jako nieusuwalna sprzeczność między mechaniką kwantową a ogólną teorią względności. Jest to materiał na odrębny tekst.

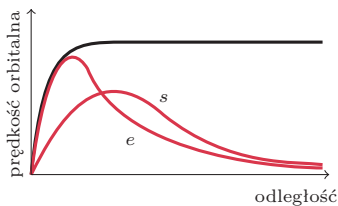
Czy czarne dziury to ciemna materia?

Łukasz WYRZYKOWSKI*

* Obserwatorium Astronomiczne UW

Czym jest Ciemna Materia? Jest jedną z największych i najdłużej opierających się rozwiązaniu zagadek Wszechświata. Pytanie dotyka naukowców z szerokiego wachlarza dziedzin, od fizyków cząstek elementarnych, przez astrofizyków, po kosmologów badających najdalsze zakamarki kosmosu.

Pierwsze przesłanki o jej istnieniu pojawiły się już w latach 30. XX wieku, gdy zmierzono prędkości gwiazd naszej Galaktyki. Gdyby Galaktyka składała się tylko z gwiazd, które widzimy, to powinna rotować wolniej na dużych odległościach od środka. Jednakże obserwuje się mniej więcej stałą prędkość rotacji gwiazd w dysku Drogi Mlecznej. Podobnie sytuacja wygląda w innych galaktykach. Oznacza to, że w galaktykach tych istnieje dodatkowa, niewidoczna masa, tworząca rozległe tzw. halo, w którym zanurzony jest dysk i centrum galaktyki. Obecność masywnego halo wokół galaktyki obserwuje się też w zjawisku silnego soczewkowania grawitacyjnego, gdy światło odległej galaktyki dociera do nas po liniach zakrzywionych przez obecność masywnej galaktyki po drodze. Halo galaktyk są bardzo rozległe, sięgając kilka razy dalej niż rozmiar dysku galaktyki, a często łącząc się z halo sąsiednich galaktyk, tworząc swoistą sieć Ciemnej Materii ciągnącą się przez cały Wszechświat.



Zależność jasności galaktyk od obecności ciemnej materii. Linie kolorowe wskazują, jak zmalałaby obecnie obserwowana jasność (czarna linia) bez ciemnej materii w przypadku galaktyki eliptycznej (e), a jak galaktyki spiralnej (s).

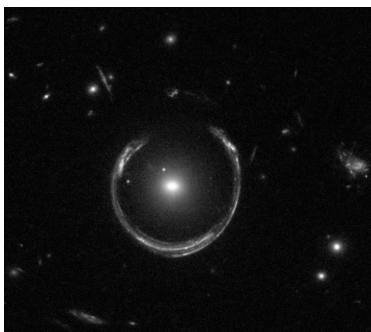
Jednak czym właściwie jest ta Ciemna Materia – nie wiemy! Pomysłów jest kilka: fizycy szukają w akceleratorach śladów dodatkowych masywnych cząstek elementarnych. Jak na razie bez powodzenia. Astronomowie z kolei poszukiwali obiektów gwiazdopodobnych o masach od masy Jowisza do dziesiątek Słońc, zbudowanych z Ciemnej Materii. Aby wykryć takie nieświecące obiekty, zastosowali technikę mikrosoczewkowania grawitacyjnego, zasugerowaną w 1986 roku przez Bohdana Paczyńskiego, polskiego astronoma, wychowanka Uniwersytetu Warszawskiego, pracującego w Princeton w USA. Metoda ta jest podobna do silnego soczewkowania, używanego do wykrycia halo ciemnej materii wokół galaktyk, z tą różnicą, że tu źródłami światła są gwiazdy, a soczewki poruszają się na tyle szybko, że samo zjawisko soczewkowania jest tymczasowe i trwa zwykle od kilku dni do kilku lat.

Polski projekt *Optical Gravitational Lensing Experiment* (OGLE), używający warszawskiego teleskopu zlokalizowanego w Chile, przez ponad 25 lat prowadzi nieprzerwanie obserwacje najbardziej gęstych części nieba, gdzie zjawiska mikrosoczewkowania występują najczęściej. Analiza danych z lat 1996–2009 wykluczyła jednak obecność w halo Drogi Mlecznej obiektów zbudowanych z ciemnej materii o masach mniejszych niż masa kilku Słońc.

Pozostało jeszcze do sprawdzenia, czy przynajmniej część ciemnej materii nie zawiera się w dużych czarnych dziurach, o masach pomiędzy 10 a 100 Słońc. Do tej pory znamy jedynie kilkadziesiąt takich czarnych dziur w naszej Galaktyce. Zostały one wykryte dzięki ich towarzyszom – gwiazdom, których materia opada na czarną dziurę, wyrwana przez silne pole grawitacyjne czarnej dziury, tworząca świecący w falach rentgenowskich dysk, zanim kompletnie zniknie pod horyzontem zdarzeń, spod którego nawet światło nie może się wydostać. Metoda mikrosoczewkowania grawitacyjnego pozwala wykryć obiekty słabe lub kompletnie ciemne, takie jak planety, brązowe karły czy czarne dziury, gdy przechodzą one na tle odległej gwiazdy. Zakrzywienie czasoprzestrzeni przez masę ciemnej soczewki powoduje, że do obserwatora docierają promienie z gwiazdy źródła, które w normalnej sytuacji do nas by nie dotarły. Gdy obserwator, soczewka i źródło tworzą idealną linię, wzmocniony obraz odległej gwiazdy pojawia się w postaci pierścienia, którego grubość zależy od rozmiaru tarczy gwiazdy, natomiast promień zależy od masy soczewki (M_L) oraz kombinacji odległości źródła (D_S) i soczewki (D_L):

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^2} \frac{D_S - D_L}{D_S D_L}}$$

Symbol θ_E oznacza kątowy rozmiar na niebie powstałego pierścienia, zwanego pierścieniem Einsteina, mimo że słynny astrofizyk zupełnie nie wierzył

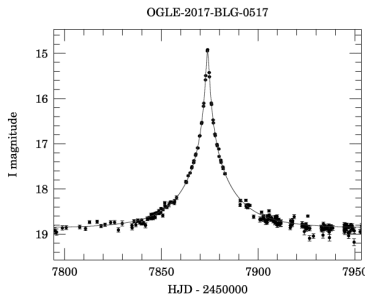


Zdjęcie tzw. pierścienia Einsteina wykonane przez Teleskop Hubble'a. Pole grawitacyjne widocznej w centrum galaktyki LRG 3-757 zakrzywia czasoprzestrzeń w taki sposób, że światło innej, położonej znacznie dalej, galaktyki widzimy w postaci pierścienia.

w możliwość wykrycia takiego zjawiska. Sceptycyzm Einsteina wynikał z tego, że rozmiary pierścienia w naszej Galaktyce to tysięczna część sekundy łuku (milisekunda), czyli kilka milionowych części stopnia. Po prawdzie, do tej pory takiego pierścienia nie udało się jeszcze bezpośrednio zaobserwować w przypadku gwiazd! Jednakże mimo braku wystarczającej rozdzielczości zjawisko soczewkowania światła może być zaobserwowane na dwa sposoby. Fotometryczne soczewkowanie polega na rejestracji sumarycznego pojaśnienia odległej gwiazdy w czasie, gdy soczewka przesuwa się na jej tle. Powstające obrazy uzyskują coraz większą sumaryczną jasność, gdy soczewka zbliża się w swoim ruchu do linii łączącej źródło i obserwatora. Powstała krzywa zmian blasku gwiazdy w czasie nosi nazwę krzywej Paczyńskiego, gdyż to właśnie Bohdan Paczyński jako pierwszy obliczył, jak będzie wyglądało soczewkowanie przez poruszającą się ciemną soczewkę. Krzywa Paczyńskiego opisana jest następującym wzorem:

$$A(u) = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}},$$

gdzie u jest odległością na niebie pomiędzy pozycją źródła a soczewką, podaną w jednostkach pierścienia Einsteina (θ_E). Przykładowe zjawisko zaobserwowane przez projekt OGLE, wraz z dopasowanym modelem Paczyńskiego, jest pokazane obok.



Zjawisko mikrosoczewkowania grawitacyjnego wykryte przez projekt OGLE. Czarne punkty to pomiary sumaryczne jasności soczewkowanych obrazów, ciągła linia to model Paczyńskiego. Ze strony ogle.astrouw.edu.pl/ogle4/ews/2017/blg-0517.html

Drugim efektem jest soczewkowanie astrometryczne. Oprócz sumarycznego pojaśnienia źródła obserwuje się też jego przesunięcie na niebie, a dokładniej, przesunięcie środka obrazów.

Rozmiar przesunięcia środka światła jest funkcją \vec{u} , czyli parametru odległości kątowej źródła od soczewki (podobnie jak w odchyłce fotometrycznej), a jej kierunek zależy teraz od kierunku wektora tej odległości. Co jednak najważniejsze, rozmiar odchyłki pozycji centrum światła obrazów jest proporcjonalny do rozmiaru pierścienia Einsteina, θ_E :

$$\delta(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{u^2 + 2} \theta_E.$$

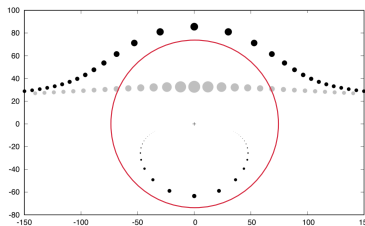
Wynika z tego, że im cięższa soczewka, tym łatwiej dostrzec zmianę pozycji źródła. Niestety, nawet dla masywnych galaktycznych czarnych dziur, o masie 6 i więcej mas Słońca, θ_E jest rzędu kilku milisekund łuku.

Pomiar takiego odchylenia środka światła został wykonany do tej pory jedynie raz, za pomocą Teleskopu Kosmicznego Hubble'a, który obserwował przejście białego karła na tle odległej gwiazdy (adsabs.harvard.edu/abs/2017Sci...356.1046S, www.scientificamerican.com/article/for-first-time-einsteins-relativity-used-to-weigh-a-star/). Obserwowany karzeł znajduje się bardzo blisko Słońca, w odległości jedynie 5,5 parseka. Jak pamiętamy, rozmiar pierścienia Einsteina zależy nie tylko od masy, ale też od odległości do soczewki i źródła. W tym przypadku θ_E wynosiła aż około 30 milisekund, a zaobserwowana odchyłka wyniosła 2 milisekundy łuku.

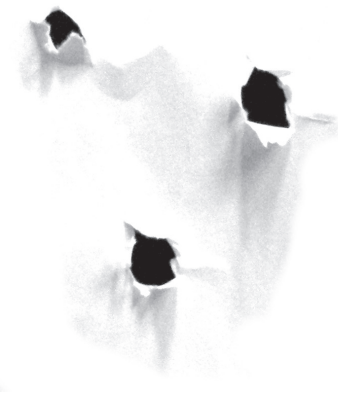
Gdyby udało nam się wyznaczyć rozmiar pierścienia Einsteina we wszystkich tych tysiącach zjawisk mikrosoczewkowania, które występują na niebie i są wykrywane przez polski projekt OGLE i inne obserwatoria, moglibyśmy pomierzyć masy i odległości soczewek, a dzięki temu odróżnić soczewkujące gwiazdy (najczęstsze) od soczewkujących gwiazd neutronowych i czarnych dziur. Masa soczewki dana jest wzorem:

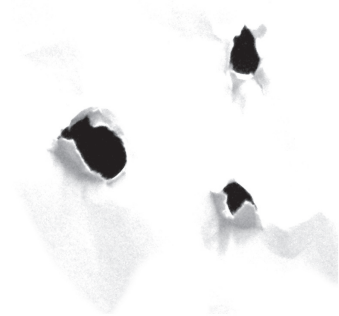
$$M = \frac{\theta_E}{\kappa \pi_E} = \frac{\theta_E^2}{\kappa \left(\frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right)},$$

gdzie κ jest stałą równą 8,144 milisekund/ M_\odot , natomiast π_E jest tzw. paralaksą mikrosoczewkową, czyli różnicą w odległości źródła (D_S) i soczewki (D_L) w jednostkach pierścienia Einsteina. Dla przykładu, dla najbardziej typowego źródła w centrum Galaktyki $D_S = 8$ kpc, soczewce znajdującej się w połowie odległości ($D_L = 4$ kpc), masę „czarnodziurową”, około $6M_\odot$, uzyskujemy, gdy pierścień Einsteina wynosi około 2,5 milisekund łuku.



Pozycja obrazów (ciemne kółka) oraz środka światła (szare kółka) dla zmieniającej się względnej pozycji źródła względem soczewki. Pierścień Einsteina pokazany jest jako kolorowy okrąg. Rysunek wykonała Zofia Kaczmarek, studentka astronomii na UW.





O ile wykrycie zjawisk soczewkowania jest obecnie wykonywane rutynowo przede wszystkim przez polski projekt OGLE (ogle.astrouw.edu.pl), to już do zmierzenia odchyłki pozycji źródła na niebie musimy użyć danych kosmicznej misji Gaia (gaia.esac.esa.int/).

Gaia jest europejską misją kosmiczną, działającą od 2014 roku, której głównym zadaniem jest pomiar pozycji gwiazd i ich zmian w czasie. Projekt Gaia 25 kwietnia 2018 roku opublikował dane z półmetka misji, czyli pierwszą dokładną mapę odległości dla 1,7 miliarda gwiazd Drogi Mlecznej, otrzymanych na podstawie pomiarów zmian pozycji gwiazd wywołanych zmianą kąta patrzenia na gwiazdę (zjawisko paralaksy). Dane te po raz pierwszy pozwolą zmapować ramiona spiralne i centrum Galaktyki, wykryć pozostałości po rozerwanych galaktykach jako strugi gwiazd, utworzyć mapy rozkładu pyłu w Galaktyce itd. Jednakże do zmierzenia efektu mikrosoczewkowania potrzebne będą dane końcowe misji, w których będzie można zmierzyć subtelne dodatkowe przemieszczenie źródeł wywołane mikrosoczewkowaniem. Astrometria z Gai w połączeniu z fotometrią z obserwacji naziemnych z OGLE oraz samej Gai, pozwoli na rozpoznanie soczewek wywołanych przez czarne dziury i na wyznaczenie ich parametrów, takich jak masa, prędkość czy odległość od Słońca.

Wykrycie dziesiątek czarnych dziur pozwoli po raz pierwszy na porównanie ich cech z oczekiwaniami teoretycznymi. Może okazać się, że znajdziemy dużą liczbę bardzo masywnych czarnych dziur, o masach 30 czy 60 mas Słońca, których obfitości nie uda się wytłumaczyć zwykłymi procesami gwiazdowymi. Mogą to być czarne dziury, powstałe w bardzo młodym Wszechświecie jeszcze przed powstaniem pierwszych gwiazd, kiedy to zgęstki ciemnej materii były tak duże, że zapadały się i tworzyły tzw. pierwotne czarne dziury. Możliwe, że to właśnie takie czarne dziury zaobserwowano w pierwszych detekcjach fal grawitacyjnych w 2016 roku. Potrzebujemy jednak dużo większej próbki czarnych dziur, a najlepiej na tyle pobliskich w naszej Galaktyce, aby móc odróżnić „zwykłe” gwiazdowe czarne dziury od tych pierwotnych, zbudowanych z ciemnej materii. Jest szansa, że właśnie mikrosoczewkowanie grawitacyjne i misja Gaia to umożliwią już za kilka lat.

Badania nad ciemną materią za pomocą misji Gaia wspiera grant Harmonia Narodowego Centrum Nauki nr 2015/18/M/ST9/00544.



Zadania

Przygotował Hugo STEINHAUS*

M 1582. Udowodnij, że liczba $3^{105} + 4^{105}$ jest podzielna przez 13, 49, 181, 379, a nie jest podzielna przez 5 ani 11.

Rozwiązanie na str. 8

M 1583. Podziel sześcian na sześć przystających czworościanów.

Rozwiązanie na str. 12

M 1584. Wykaż, że $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots + \sqrt{n}}}}} < 2$ dla każdego naturalnego n .

Rozwiązanie na str. 11

* Polecamy znakomite 100 zadań i Jeszcze 105 zadań Hugona Steinhausa.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

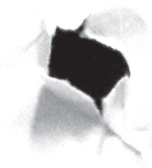
F 963. Oszacuj, jaki byłby najkrótszy czas trwania dnia, który moglibyśmy przeżyć stojąc na Ziemi?

Promień Ziemi $R \approx 6400$ km, przyspieszenie Ziemskie $g \approx 10$ m/s².

Rozwiązanie na str. 16

F 964. Oszacuj, jaka jest najmniejsza odległość r od Ziemi, w jakiej Księżyc mógłby obiegać Ziemię po orbicie kołowej bez utraty skał ze swojej powierzchni (tzn. pyłu i kamieni pokrywających jego powierzchnię i związanych z resztą Księżyca tylko siłami grawitacji)? Przyjmij, że Księżyc, tak jak to jest obecnie, jest zwrócony do Ziemi zawsze tą samą stroną, tzn. prędkości kątowe obiegu i obrotu własnego Księżyca są równe. Masa Księżyca M_K jest w przybliżeniu 81 razy mniejsza od masy Ziemi M_Z . Promień Księżyca $R_K \approx 1740$ km.

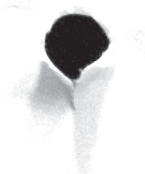
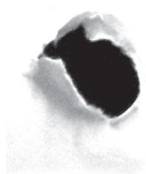
Rozwiązanie na str. 21



Kwazi-cząstki – model standardowy kwaziwszechświata

*Inżynieria nanostruktur, Wydział Fizyki,
Uniwersytet Warszawski

Jacek SZCZYTKO*



Rozwiązanie zadania M 1582.

Na „tak”: gdy n jest nieparzyste,
 $a^n + b^n$ dzieli się przez $a + b$,
i wystarczy zauważyć, że
 $3^{105} + 4^{105} = (3^3)^{35} + (4^3)^{35} =$
 $= (3^5)^{21} + (4^5)^{21} = (3^7)^{15} + (4^7)^{15}$,
a więc $3^{105} + 4^{105}$ dzieli się
przez $3^3 + 4^3 = 91 = 7 \cdot 13$,
przez $3^5 + 4^5 = 1267 = 7 \cdot 181$
oraz przez $3^7 + 4^7 = 18751 = 49 \cdot 379$.

Na „nie”: liczba ta zarówno modulo 5,
jak modulo 11 przystaje do 2.

Zauważmy bowiem, że
 $4^3 \equiv -1 \pmod{5}$ i $3^5 \equiv -1 \pmod{5}$,
podobnie
 $4^3 \equiv -2 \pmod{11}$ i $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$.

Skoro $4^3 \equiv -1 \pmod{5}$, to
 $4^{105} \equiv (-1)^{35} \pmod{5} \equiv -1 \pmod{5}$;
podobnie z $3^2 \equiv -1 \pmod{5}$ wynika
 $3^{104} \equiv (-1)^{52} \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$,
a więc $3^{105} \equiv 3 \pmod{5}$, skąd
 $(3^{105} + 4^{105}) \equiv (3 - 1) \pmod{5} = 2 \pmod{5}$.

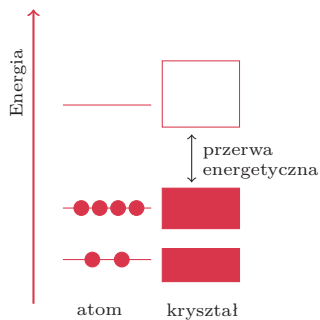
Analogicznie, skoro $4^3 \equiv -2 \pmod{11}$,
więc $4^{15} \equiv (-2)^5 \pmod{11} =$
 $= -32 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$,
stad $4^{105} \equiv 1^7 \pmod{11} = 1 \pmod{11}$;
podobnie z $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$ mamy
 $3^{105} \equiv 1^{21} \pmod{11} = 1 \pmod{11}$;
wobec tego $(3^{105} + 4^{105}) \equiv$
 $\equiv (1 + 1) \pmod{11} = 2 \pmod{11}$.

Żyjemy we Wszechświecie, w którym stałe fizyczne, kolejne generacje cząstek elementarnych, wartość ładunku elementarnego itp., są ściśle określone, przy czym w zasadzie nie wiemy, dlaczego przyjmują taką wartość, a nie inną. Najlepiej znany przykład to tzw. stała struktury subtelnej $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137,036}$ bezwymiarowa wielkość charakteryzująca siłę oddziaływania elektromagnetycznego naładowanych cząstek. W każdym systemie jednostek jest taka sama, a jej niewielka zmiana (rzędu kilku procent) sprawiłaby, że reakcje jądrowe syntezy węgla (z trzech jąder He) i tlenu (z węgla i helu) by ustały, co, oczywiście, doprowadziłoby do braku pierwiastków, z których mogłaby się utworzyć materia organiczna – czyli my. Obserwacja ta stanowi sedno tzw. zasady antropicznej, która głosi, że stałe fizyczne naszego Wszechświata mają dokładnie takie wartości, aby mogło zaistnieć życie. W teorii wielu (wszech)światów oznacza to, że w Wielkim Wybuchu powstały, być może, i inne wszechświaty, z innymi stałymi fizycznymi i innymi wymiarami przestrzennymi, ale nie ma ich kto badać, gdyż tylko nasz ma parametry umożliwiające powstanie życia. A do innych wszechświatów nie mamy dostępu. Czyżby?

A gdybyśmy mieli możliwość zbadania wszechświata cząstek o ułamkowym ładunku elementarnym? Cząstek o ujemnej masie? Elektronów bezmasowych? Ciężkich fotonów? Monopoli magnetycznych? Egzotycznych cząstek niebędących ani fermionami, ani bozonami? Moglibyśmy testować prawa fizyki egzotycznych wszechświatów i obserwować zjawiska, które na co dzień nie występują w przyrodzie, np. całkiem bezpieczną anihilację dodatnich i ujemnych elektronów w trój- dwu- albo jednowymiarowej przestrzeni.

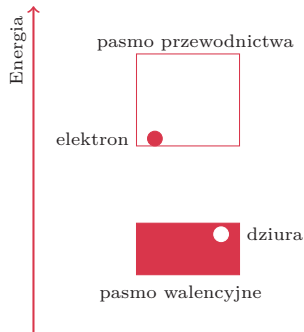
Może troszeczkę przesadziłem z tymi „innymi prawami fizyki” – tych nie zmienimy, ale możemy zmienić elementarne cząstki budujące nasz hipotetyczny wszechświat i zobaczyć, w jaki sposób mogą wchodzić w interakcje. Musimy zatem przejść do „innego wszechświata” – będzie nim kryształ. Zwykły kryształ – może być metal, półprzewodnik, izolator – byleby atomy układały się w periodyczną strukturę przestrzenną, byleby można było go jakoś pobudzić (światłem, temperaturą, napięciem, polem magnetycznym itp.) i byleby można to pobudzenie jakoś śledzić, badać. Kryształ niepobudzony będziemy traktowali jak próżnię, a elementarne wzbudzenia takiego kryształu będą naszymi cząstkami elementarnymi, które będą wchodziły w interakcje i które pozwolą na testowanie zwiariowanych teorii fizycznych. Oczywiście, nie są to prawdziwe cząstki elementarne (choć wolałbym się nie wdawać w dyskusję znaczenia słowa „prawdziwy”), tylko jakby-cząstki, więc mówimy o nich kwazi-cząstki. Ich właściwości będą zależały od wielu rzeczy, ale przede wszystkim od rodzaju materiału, który badamy i od jego wymiarowości. Tak, możemy badać kwazi-wszechświaty trójwymiarowe, jak nasz, ale i dwu-, jedno- i zerowymiarowe.

Weźmy, na przykład, elektron w kryształach krzemu. Każdy atom krzemu ma czterech sąsiadów, z którymi uwspólnia elektrony walencyjne, tworząc kowalencyjne wiązania chemiczne zgodnie z regułą oktetu. Taki kryształ – w którym elektrony obsadzają dozwolone stany i wypełniają wszystkie miejsca na powłoce walencyjnej – jest właśnie naszą kwazi-próżnią. Ale krzem, jako pierwiastek chemiczny, ma więcej „miejsc” na swoje elektrony – chodzi o stany wzbudzone, normalnie puste (czyli nieobsadzone elektronami), ale które pod wpływem jakiegoś zaburzenia mogą zostać przez chwilę obsadzone. Astronomowie używają takich stanów wzbudzonych np. do badania, czy w danej gwiazdzie są „linie widmowe krzemu” – te linie widmowe są właśnie efektem przechodzenia elektronów pomiędzy różnymi powłokami atomu krzemu. Okazuje się, że w kryształach te puste powłoki też tworzą miejsce dla wzbudzonych elektronów. W odróżnieniu od pojedynczego atomu kryształ ma tych miejsc bardzo dużo, tak, że nie mówimy już o „poziomach”, ale o „pasmach”. I tu niespodzianka – elektron, który zostanie przeniesiony do takiego pustego pasma (zwanego pasmem przewodnictwa) z pasma zapełnionego, w którym tworzył wiązania (zwanego pasmem walencyjnym), porusza się w kryształach krzemu tak, jakby kryształu nie było! Jakby nie było 10^{22} w cm^3 atomów, z którymi



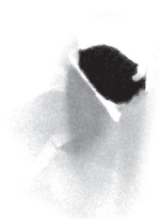
mógłby się zderzać, nie było 10^{22} w cm^3 innych elektronów, na które mógłby wpadać – nic, próżnia, elektron swobodny!

Elektron zachowuje się jak fala materii (fala de Broglie'a) i okazuje się, że ośrodek periodyczny, jakim jest kryształ, tylko w niewielkim stopniu modyfikuje jego właściwości w porównaniu z elektronem swobodnym. Elektrony o różnej energii mają różną długość fali i w zasadzie największy wpływ sieć krystaliczna ma na elektrony, których długość fali jest wielokrotnością odległości pomiędzy atomami. Niemniej nawet te elektrony w kryształach możemy traktować jak cząstki swobodne, poruszające się bez rozprożeń. Elektron w paśmie przewodnictwa jest właśnie „elementarnym wzbudzeniem” kryształu. Jaką cenę musimy zapłacić za taki prosty model? Po pierwsze, nasz elektron ma inną masę niż elektron swobodny (oznaczymy tę masę m_0): w zależności od materiału może to być masa $1000m_0$ albo $0,001m_0$ a czasami nawet 0 (grafen!). W przypadku krzemu jest to około $0,2m_0$. Po drugie, jeśli został wzbudzony z pasma walencyjnego, to po pewnym czasie do niego powróci – emitując nadmiar energii, np. w postaci fotonu albo jeszcze fononu (o fononach za chwilę). Czyli zanihiluje – wyemituje jakoś swoją energię i po procesie anihilacji zostanie znowu „kwazi-próżnia”, czyli pusty kryształ. OK, to z czym on zanihiluje, co to za „antycząstka”, która pożarła nasz elektron? To jest anty-elektron, czyli tzw. „pusty” stan, opuszczony na chwilę przez elektron. Jeśli puste pasmo porównać do pustej butelki, a elektron do kropli wody, to pełne pasmo możemy utożsamić z butelką napelnioną po korek, z której „odlano” kropelkę, taki kwazi-bąbelki. Otóż ten pusty stan – który nazywa się dziura – także może swobodnie po kryształach podróżować. Tyle tylko, że tak jak bąbelki w butelce, zachowuje się odwrotnie niż pozostałe elektrony-kropelki. Jak włączymy pole elektryczne, to elektron poleci w stronę ładunku dodatniego, a dziura – w kierunku ujemnego (bo wszystkie elektrony z pasma walencyjnego poleciały w stronę dodatniego – to jak przechylenie butelki z bąbelkiem). Dziura więc jest kwazi-cząstką o dodatnim ładunku elektrycznym. Wszystko się zgadza – ujemny elektron, anihilując z dodatnią dziurą, pozostawia pusty, nienaładowany kryształ. Ale zaraz – jeśli w naszym kwazi-wszechświecie pojawił się ładunek dodatni i ujemny, to może powstanie i kwazi-wodór, składający się z dwóch ładunków? I rzeczywiście – elektrony i dziury tworzą takie stany związane – nazywają się one ekscytonami (kolejna kwazi-cząstka!). Przypominają nie tyle wodór, co pozytonium – układ elektronu i pozytonu, który po pewnym czasie może zanihilować. Ale ekscytony mogą tworzyć podstawę naszego kwazi-układu okresowego: mogą tworzyć cząsteczkę bi-ekscytonu (dwa ekscytony), zjonizowanego ekscytonu (tzw. trionu) itd. Taki ekscyton można w pewnych warunkach silnie sprzęć ze światłem, tworząc tzw. polaryton – stan mieszany fotonu i ekscytonu, który w odpowiednio dużej koncentracji polarytonów z kolei może przejść do fazy kondensatu Bosego-Einsteina... Ufff. Ważne jest to, że to działa, że możemy budować z kwazi-cząstek elementarnych, takich jak elektron i dziura, coraz bardziej skomplikowane obiekty.



Niektóre egzotyczne stany materii wynikają np. z obecności elektronów o zerowej masie – takiego elektronu w kryształach nie da się zatrzymać, musi poruszać się z „prędkością światła dla elektronu” (dziwnie brzmi) – w grafenie jest ona tylko 300 razy mniejsza od prędkości światła. I znowu – możemy na stole laboratoryjnym testować ultrarelatywistyczną fizykę, wyrafinowane teorie fermionów Majorany – wszystko dzięki kwazi-cząstkom.

Sam kryształ – rozumiany jako sieć atomów – też nie jest tylko biernym ośrodkiem. W kryształach możemy wzbudzić atomy do drgań – wystarczy podnieść temperaturę. Znowu – elementarne wzbudzenie możemy traktować jak kwazi-cząstkę, która będzie mogła się poruszać po kryształach. Taka cząstka to fonon – może oddziaływać z elektronami, dziurami, podgrzewać ekscytony albo pomagać im osiągnąć równowagę termodynamiczną. Jest analogiem „nośnika oddziaływania”, kwazi-bozonem. Dodatkowo innego rodzaju wzbudzenia – magnetyczne, pomiędzy zlokalizowanymi momentami magnetycznymi w atomach tworzących kryształ, mogą być źródłem magnonów (fal spinowych), skyrmionów, a nawet monopoli magnetycznych! Budując kryształy z kryształów – tzw. struktury fotoniczne – możemy badać ciężkie fotony, czyli światło, które ma masę i da się nawet na chwilę „zatrzymać”.





Warto na koniec dodać, że charakter kwazi-cząstek można kontrolować przez zmianę wymiaru przestrzeni, w której je badamy. Jeśli zmusimy elektrony i dziury do ruchu tylko w jednej płaszczyźnie, np. wytwarzając bardzo cienką, kilkunanometrową warstwę kryształu, wtedy mamy do czynienia z kwazi-wszechświatem dwuwymiarowym (tzw. studnią kwantową), jeśli tę warstwę pokroimy jak makaron, dostaniemy obiekty jednowymiarowe (druty kwantowe), a jak dalej posiekamy ten makaron na drobne kawałeczki, dostaniemy kropki kwantowe – obiekty zerowymiarowe (kwazi-zerowymiarowe), które można traktować jak sztuczne atomy. Zastosowania? Np. lasery półprzewodnikowe to studnie kwantowe, w których dokonujemy skuteczniejszej anihilacji elektronów i dziur; kropki kwantowe były niedawno hitem nowoczesnych luminoforów w telewizorach.

Nasze możliwości są w zasadzie nieograniczone. Badaniami tego typu zjawisk zajmuje się fizyka ciała stałego i nanotechnologia, zastosowania sięgają urządzeń półprzewodnikowych, optycznych, przetwarzania informacji – także kwantowej, bo komputery kwantowe też można zaprojektować z kwazi-cząstek. Badania trwają, przecież jest tyle kwazi-wszechświatów do odkrycia!

Jak proste problemy stały się trudne *Michał WŁODARCZYK**

* doktorant, Instytut Informatyki,
Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Dawno, dawno temu, wierzono, że fundamentalne zasady rządzące światem są proste. Kiedy dziedzina nauki, zwana obecnie informatyką, dopiero raczkowała, naukowcy byli przekonani, że dla każdego problemu obliczeniowego można znaleźć efektywny algorytm, o ile poświęci się na to wystarczająco dużo czasu, kredy oraz kawy. Pojęcie „efektywnego algorytmu” oznaczało początkowo algorytm o czasie działania proporcjonalnym do rozmiaru danych wejściowych, ale i algorytmy o złożoności obliczeniowej $\mathcal{O}(n^2)$ czy $\mathcal{O}(n^3)$ były do zaakceptowania.

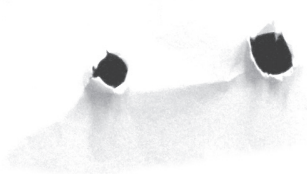
Pojawiły się jednak problemy, których pomimo wielu lat badań i hektolitrów wypitej kawy nikt nie umiał rozwiązać lepiej, niż generując wszystkie potencjalne rozwiązania i wybierając najlepsze z nich. Czas działania takich algorytmów jest zazwyczaj wykładniczy, zatem dla dużych danych działają one zdecydowanie wolniej niż te o złożoności wielomianowej. Do trudnych problemów należały:

- **Pokrycie Wierzchołkowe:** mając dany graf, znajdź najmniejszy podzbiór wierzchołków, stykający się z każdą krawędzią.
- **Cykl Hamiltona:** mając dany graf, rozstrzygnij, czy istnieje cykl odwiedzający każdy wierzchołek dokładnie raz.
- **Spełnialność Formuł (SAT):** mając daną formułę logiczną, złożoną ze zmiennych przyjmujących wartości prawda/fałsz oraz operatorów AND, OR, NOT, rozstrzygnij, czy można przypisać zmiennym takie wartości, aby formuła była prawdziwa.

Naukowcy zaczęli rozumieć to zjawisko lepiej na początku lat 70. Choć nie udało się efektywnie rozwiązać ani jednego z „trudnych” problemów, ani też wykluczyć istnienia algorytmów wielomianowych, udowodniono, że prawie wszystkie znane trudne problemy są równoważne na mocy wielomianowych redukcji pomiędzy nimi. Powstała teoria NP-trudności wyjaśniała, że efektywne rozwiązanie dowolnego z nich pociąga istnienie szybkich algorytmów dla pozostałych. Zamiast zastanawiać się nad setkami różnych problemów niezależnie, naukowcy zrozumieli, że „jądro” trudności jest takie samo. Choć dalej nie wiemy, czy da się je rozwiązać wielomianowo, całe zagadnienie sprowadza się do jednego kluczowego pytania: „czy $P \neq NP$?”. Świat znów stał się prosty.

Teoria NP-trudności okazuje się jednak czasem zbyt „grubo ciosana”, chociażby dla uczestników Olimpiady Informatycznej. Powiedzmy, że na zawodach pojawia się zadanie „rozstrzygnij, czy w danym zbiorze liczb naturalnych istnieją takie a, b, c , że $a + b = c$ ”. Najprostszy algorytm przegląda wszystkie trójki liczb i działa w czasie $\mathcal{O}(n^3)$. Znajomość podstawowych struktur danych pozwala na poprawę czasu działania do $\mathcal{O}(n^2 \log(n))$. Ale czy da się poprawiać dalej, np. do $\mathcal{O}(n \log(n))$? Inny problem: „mając dane dwa ciągi liczb, znajdź ich najdłuższy

Co prawda, istnieje kilka problemów, o których do dziś nie wiemy, ani że są rozwiązywalne wielomianowo, ani że są NP-trudne, ale są to „niedobitki”.





W przypadku cyklu Hamiltona odpowiedź jest pozytywna i najlepszy znany algorytm działa w czasie $\mathcal{O}(1,66^n)$.

Pisząc o „krótkich” wektorach, mamy na myśli długość ich zapisu lub, innymi słowy, wymiar przestrzeni, w której są zanurzone.



Rozwiązanie zadania M 1584.

Ciąg dany rekurencyjnie przez

$$a_0 = 2, \quad a_n = a_{n-1}^2 - n, \quad \text{dla } n \geq 1.$$

spełnia dla naturalnego n warunek $a_n > n$, co można sprawdzić indukcyjnie: dla 1, 2 i 3 sprawdzamy bezpośrednio, ponadto jeśli $k > 3$, to mamy $a_{k+1} = a_k^2 - (k+1) = k^2 - k - 1 > k + 1$. Kolejno otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} a_0 &> 0, \\ a_1 &= a_0^2 - 1 > 0, \\ a_2 &= (a_0^2 - 1)^2 - 2 > 0, \\ a_3 &= ((a_0^2 - 1)^2 - 2)^2 - 3 > 0, \\ a_4 &= (((a_0^2 - 1)^2 - 2)^2 - 3)^2 - 4 > 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Rozwiązując te nierówności względem a_0 , otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} a_0 &> 1, \\ a_0 &> \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \\ a_0 &> \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \\ &\vdots \\ a_0 &= 2 > \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots + \sqrt{n}}}}}. \end{aligned}$$

wspólny podciąg (niekoniecznie spójny)”. Programowanie dynamiczne pozwala rozwiązać go w czasie $\mathcal{O}(n^2)$, ale skąd wiadomo, że nie da się lepiej?

Pierwszy zdefiniowany wyżej problem nazywa się 3SUM i, jako że ma rozwiązanie wielomianowe, teoria NP-trudności nie mówi nam nic o ograniczeniach dolnych na złożoność algorytmu. 3SUM okazuje się istotny w geometrii obliczeniowej i w latach 90. zastanawiano się, czy da się go rozwiązać w czasie np. $\mathcal{O}(n^{1,99})$. Jako że zapasy kawy przeznaczonej na badania zaczynały się kurczyć, postawiono nową hipotezę, że nie istnieje algorytm podkwadratowy dla 3SUM. Z hipotezy wynikało, że nie istnieją podkwadratowe algorytmy dla wielu innych zagadnień, np. obliczania sumarycznej powierzchni n figur na płaszczyźnie. Jednak w przeciwieństwie do hipotezy $P \neq NP$ nieznanymi były żadne szokujące implikacje odrzucenia hipotezy 3SUM, toteż nie zyskała ona podobnego zainteresowania.

W międzyczasie rozwijała się teoria algorytmów wykładniczych. Postawiono wiele pytań typu „dla Cyklu Hamiltona znamy algorytm o złożoności $\mathcal{O}(2^{2n})$, ale czy można to poprawić do $\mathcal{O}(1,99^{2n})$?” Aby wykluczyć istnienie szybszych algorytmów wykładniczych, potrzebowano jeszcze silniejszych hipotez niż $P \neq NP$, ale takich, których obalenie byłoby wielkim szokiem dla nauki – inaczej trudno przekonać innych do wiary w nową hipotezę. Jedną z nich jest *Strong Exponential Time Hypothesis* (SETH), która w uproszczeniu głosi, że problemu SAT nie tylko nie da się rozwiązać wielomianowo, ale nawet złożoność $\mathcal{O}(1,99^{2n})$ jest nieosiągalna. W oparciu o tę hipotezę (lub jej słabszą wersję) uzasadniono, że różne znane algorytmy wykładnicze są optymalne i dopóki nie zrozumiemy lepiej problemu SAT, nie warto już nad nimi pracować. Zaczęliśmy widzieć więcej, a świat się znowu trochę uściślił.

Wróćmy do świata wielomianowego i spójrzmy na następujący problem *Orthogonal Vectors*: „mając dane n (krótkich) wektorów, rozstrzygnij, czy istnieje wśród nich para wektorów prostopadłych (czyli o iloczynie skalarnym 0)”. Oczywiście, łatwo go rozwiązać, sprawdzając wszystkie pary wektorów i – jak zapewne Czytelnik już się domyśla – nie wiemy, czy da się to zrobić sprytniej. W roku 2005 opublikowano zaskakującą redukcję, z której wynika, że algorytm dla *Orthogonal Vectors* o złożoności $\mathcal{O}(n^{1,99})$ pociągałby algorytm dla SAT o złożoności $\mathcal{O}(1,995^n)$. Teorie złożoności wielomianowej i wykładniczej zaczęły się przenikać. Następnie pokazano redukcję z problemu *Orthogonal Vectors* do wspomnianego wcześniej problemu najdłuższego podciągu. Oznacza to, że kwadratowy algorytm obliczania najdłuższego podciągu (znany od lat 60. i wykorzystywany intensywnie w biologii obliczeniowej) jest optymalny przy założeniu SETH.

Badacze zachęteni tymi odkryciami doszli do wniosku, że pół wieku po narodzinach teorii NP-trudności informatyka jest już „gotowa”, by stworzyć teorię dokładnej złożoności wielomianowej. Pojawiły się kolejne redukcje z problemów *Orthogonal Vectors* i 3SUM. W porównaniu do klasycznej teorii złożoności „krajobraz” redukcji okazał się bardziej skomplikowany: zamiast jednej hipotezy mamy ich kilka (choć niektóre są powiązane), a zamiast równoważności pomiędzy problemami często znamy jedynie implikacje w jedną stronę. Pewne miejsca w tym krajobrazie udało się już zrozumieć lepiej. Na przykład, dla każdego z poniższych problemów znany jest algorytm o złożoności $\mathcal{O}(n^3)$, a znalezienie algorytmu o złożoności $\mathcal{O}(n^{2,99})$ pociągałoby postęp dla wszystkich pozostałych:

- Obliczanie najkrótszych ścieżek pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków w grafie.
- Szukanie w grafie trójkąta o ujemnej sumie wag krawędzi.
- Rozstrzyganie, czy dana funkcja zadaje metrykę.
- Obliczanie promienia grafu (takiego najmniejszego k , że istnieje wierzchołek v , z którego odległość do wszystkich innych jest nie większa niż k).

Czy faktycznie teoria dokładnej złożoności jest bardziej skomplikowana niż teoria NP-trudności, czy też najbliższe lata przyniosą kolejny przełom i kolejne uproszczenie świata? To pytanie jest obecnie obiektem intensywnych badań, m.in. na Uniwersytecie Warszawskim. Czytelników zainteresowanych naszym stanem wiedzy w tej dziedzinie odsyłam do artykułu Virginii V. Williams *Hardness of Easy Problems: Basing Hardness on Popular Conjectures such as the Strong Exponential Time Hypothesis*.

Nie takie sztuczne neurony

Dominik KRZEMIŃSKI*

* Uniwersytet Cardiff

Niemal każdy wykład wprowadzający w zagadnienie sztucznych sieci neuronowych zaczyna się anegdotą o zaczerpnięciu tego pojęcia z anatomii mózgu. Najprostszy model matematycznej jednostki zwanej „sztucznym neuronem” opisuje równanie:

$$y = \sigma\left(\sum_i w_i x_i + b\right).$$

W analogii do biologicznych komórek neuronowych mamy do czynienia z sumą informacji x (przesyłanej z komórek presynaptycznych do postsynaptycznych) z odpowiednimi wagami w (siła połączeń synaptycznych), na którą działa funkcja nieliniowa σ (uwolnienie potencjału czynnościowego po osiągnięciu wartości progowej).

Historia wzajemnych wpływów uczenia maszynowego i neuronauki jest jednak znacznie dłuższa i o wiele bardziej skomplikowana. Szczególnie wyraźnie zaznacza się to w ostatnich latach, gdy niezwykłą popularność zdobywają tzw. głębokie sieci neuronowe (*deep neural networks*). Swoją strukturą coraz bardziej przypominają one skomplikowane układy przetwarzające informacje w mózgu. W niedawnym wydaniu periodyku naukowego *Neuron* rolę współpracy naukowców z tych dwóch obszarów wiedzy podkreślał sam Demmis Hassabis, współzałożyciel DeepMind. Dla przypomnienia, ta należąca do Google firma zasłynęła opracowaniem programu AlphaGo, który jako pierwszy automat wygrał (w 2016 roku) z arcymistrzem gry w Go, Lee Sedolem. Ciekawostką jest fakt, że AlphaGo został uhonorowany za to przez południowokoreańską federację dziewiątym danem. Gra planszowa Go uznawana jest przez ekspertów za najtrudniejszą na świecie!

Jednym z najprostszych modeli matematycznych znajdującym zastosowanie w obu wspomnianych dziedzinach jest tzw. sieć Hopfielda. W oryginalnym sformułowaniu dyskretna sieć Hopfielda składa się z N neuronów, z których każdy łączy się z każdym i może przybrać jeden z dwóch stanów: $+1$, lub -1 . Przez $v_i[t]$ oznaczamy będziemy stan i -tego neuronu w chwili t . Wagę połączenia między i -tym i j -tym neuronem oznaczamy przez w_{ij} . Zakładamy, że wagi są symetryczne ($w_{ij} = w_{ji}$) oraz że neuron nie wpływa sam na siebie ($w_{ii} = 0$). Stan jednostki i w chwili $t + 1$ w zależności od stanu układu w chwili t opisuje się równaniem:

$$v_i[t + 1] = \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} v_j[t]\right) = \text{sgn}\left(\sum_{j \neq i} w_{ij} v_j[t]\right),$$

gdzie funkcja sgn przyjmuje wartość $+1$, gdy jej argument jest większy od zera, bądź -1 w przeciwnym przypadku. Wyrażenie $\sum_{j \neq i} w_{ij} v_j[t]$ można interpretować jako *ekscytację* jednostki k – to znaczy, że w zależności od znaku ekscytacji nastąpi aktywacja ($+1$) bądź deaktywacja (-1) jednostki. Wyrażenie to będziemy oznaczać przez $\varepsilon_i[t]$.

Dla tak zdefiniowanej sieci określamy energię układu jako:

$$(*) \quad E(v) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N w_{ij} v_i v_j = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} w_{ij} v_i v_j.$$

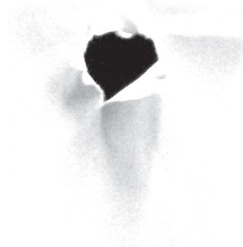
Zakładamy, że aktualizacja stanu następuje w sposób asynchroniczny, to znaczy żadne dwa neurony nie są włączane bądź wyłączane w tym samym momencie. Wówczas zmiana energii przy aktualizacji jednostki k wynosi:

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_k(v[t + 1]) - E_k(v[t]) = -\sum_{j \neq k} w_{kj} v_k[t + 1] v_j[t] + \sum_{j \neq k} w_{kj} v_k[t] v_j[t] = \\ &= (v_k[t] - v_k[t + 1]) \sum_{j \neq k} w_{kj} v_j[t] = (v_k[t] - v_k[t + 1]) \varepsilon_k[t]. \end{aligned}$$

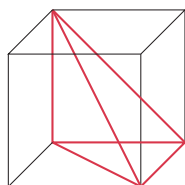
Teraz rozpatrzmy dwa przypadki. Kiedy uczenie nie następuje, nie zmienia się stan układu, czyli $v_k[t] = v_k[t + 1]$. Mamy zatem $\Delta E_k = 0$, czyli $E_k(v_k[t + 1]) = E_k(v_k[t])$. W przeciwnym przypadku musimy rozważyć kolejne dwie możliwości. Ponieważ nastąpiła zmiana układu:

- dla $\varepsilon_k[t] < 0$ mamy $v_k[t] = +1$, a $v_k[t + 1] = -1$;
- dla $\varepsilon_k[t] > 0$ mamy $v_k[t] = -1$, a $v_k[t + 1] = +1$.

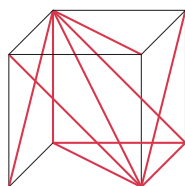
O sieciach neuronowych pisaliśmy w $\Delta_{18}^{1,5}$.

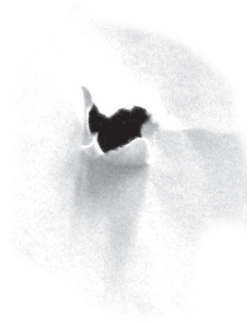


Rozwiązanie zadania M 1583. Sześcian wypełniają trzy kopie czworokątnu przedstawionego na poniższym rysunku



i trzy kopie jego lustrzanego odbicia, co Czytelnik Uważny zobaczy na kolejnym rysunku.





Uważny Czytelnik zauważy, że jest to paradygmat uczenia bez nadzoru. Zgadza się to z intuicyjnym pojmowaniem działania ludzkiej pamięci, w której skojarzenia tworzone są jedynie na podstawie zaobserwowanych wzorców.



Rys. 1. Zapamiętane wzorce



Rys. 2. Rekonstrukcja litery „C” w trzech krokach

Zainteresowanym większą ilością przykładów wzajemnych wpływów neuronauk i uczenia maszynowego polecam pracę przeglądową wspomnianą na początku artykułu: D. Hassabis i in., Neuroscience-Inspired Artificial Intelligence, 2017, *Neuron*.

Za każdym razem wyrażenie $(v_k[t] - v_k[t + 1])$ ma przeciwny znak do wartości ekscytacji. Pokazaliśmy zatem, że $\Delta E_k < 0$. W każdym przypadku energia będzie maleć, a że liczba stanów sieci jest skończona, w skończonym czasie zbiegnie do stanu minimum lokalnego (tzn. niemożliwego do „poprawienia” poprzez opisaną aktywność neuronów). Będzie to tzw. stan stabilny.

Jak w takim razie sieć Hopfielda może się czegokolwiek „nauczyć”?

W najprostszym wydaniu rzecz opiera się na *regule uczenia Hebba*, opracowanej już w latach 50. XX wieku przez kanadyjskiego psychologa Donalda Hebba. Mówi ona o tym, że jeśli neuron *A* systematycznie pobudza neuron *B*, to połączenie synaptyczne między nimi staje się silniejsze (po angielsku często jest to podawane w zgrabnej formie: *fire together, wire together*). Ta prosta hipoteza została potwierdzona kilkanaście lat po jej sformułowaniu, poprzez odkrycie paradygmatu długotrwałych wzmocnień synaptycznych. Niewątpliwą zaletą reguły Hebba jest fakt, iż w prosty sposób łączy idee z neurobiologii i psychologii, a także stanowi dobry model pamięci asocjacyjnej. Szczególnym przykładem takiej pamięci może być warunkowanie zastosowane w słynnym eksperymencie Pawłowa. Powtarzana ekspozycja psa na miskę z jedzeniem wraz z dźwiękiem dzwonka skutkuje wzmocnionym wydzielaniem śliny w reakcji wyłącznie na dźwięk dzwonka.

Regułę Hebba do zapamiętania wzorca opisanego binarnym wektorem s można zapisać jako:

$$w_{ij} = \frac{1}{N} s_i s_j.$$

Zwróćmy uwagę, że przy tak dobranych wagach najmniejsza wartość energii określonej wzorem (*) przyjmowana jest dla $v = s$. Ponieważ opisany wcześniej proces uczenia stabilizuje się w minimach lokalnych, możemy mieć nadzieję, że będzie on „zbliżać” wektor v do s .

W ogólności, możemy zapamiętać więcej niż jeden wzór. Na przykład, dla P wzorców s^1, s^2, \dots, s^P reguła Hebba przyjmuje postać:

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^P s_i^k s_j^k$$

co jest odpowiednikiem pamięci skojarzeniowej. Można udowodnić, że pojemność takiej sieci to $\frac{P}{N} \approx 0,138$. Oznacza to, że sieć złożona z 1000 węzłów jest w stanie zapamiętać maksymalnie około 138 wzorców. Grafika na marginesie pokazuje przykład rekonstrukcji litery „C” dla sieci pamiętającej trzy wzorce.

Osiągnięcie lokalnego minimum w sieci Hopfielda jest gwarantowane. Często zdarza się jednak utknięcie w minimum fałszywym, a zatem rozpoznanie wzorca, którego de facto sieć nie była nauczona. Nie zmienia to jednak faktu, iż z powodzeniem sieci te stosuje się do odzsumiania obrazów, dekonwolucji danych, rozpoznawania wzorców, a także w problemach optymalizacyjnych.

Co najważniejsze jednak, idee Donalda Hebba przyczyniły się do powstania modelu równoległego rozproszonego przetwarzania informacji, czyli tzw. koneksjonizmu, spopularyzowanego w latach 80. przez naukowców Uniwersytetu Stanforda: Jamesa McClellanda i Davida Rumelharta. Sieć Hopfielda jest najlepszym przykładem takiego modelu. Istnieje przekonanie, że właśnie z koneksjonizmu wyewoluowała dziedzina głębokich sieci neuronowych. Nic dziwnego, skoro do zwolenników tej idei należy sam Geoffrey Hinton, absolwent psychologii kognitywnej, uważany za ojca chrzestnego *deep learning*’u. Przykłady interakcji neuronauki i uczenia maszynowego można mnożyć bez końca. Nie wspominałem tu, na przykład, o klasyfikatorach, wykorzystywanych do dekodowania sygnałów pochodzących z mózgu. Na uwagę zasługują również próby interpretacji działania sztucznych sieci neuronowych, gdzie wykorzystywane są modele kognitywne. Cieszy więc zacieśnianie się współpracy między badaczami obu dziedzin, co pomaga w wypracowaniu wspólnego języka. Cel przecież jest zbieżny: zrozumieć, jak uczy się człowiek, by sprawniej mogła uczyć się maszyna.

Jak definiować ciągi rekurencyjne?

Filip MAZOWIECKI*

* Université de Bordeaux

Autor dziękuje Michałowi Pilipczukowi za pomoc i uwagi do tekstu.

Tytułowa rekurencja jest jednym z podstawowych pojęć w informatyce, które umożliwia definiowanie ciągów różnych obiektów, pozwalając odwoływać się w definicji danego obiektu do jego poprzedników. Pokażemy dwie klasy takich definicji i omówimy ich równoważność. Zaczniemy od prostych przykładów: ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego. Rozważmy dwa ciągi a_0, a_1, \dots i b_0, b_1, \dots zadane przez

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3 \quad b_0 = 1, \quad b_{n+1} = 2 \cdot b_n.$$

(Takie ciągi przydają się, na przykład, do szacowania, jak długo działa program, który rekurencyjnie wywołuje siebie lub inne programy.)

W obu przypadkach, żeby poznać wartość konkretnego a_n lub b_n (korzystając wprost z definicji), trzeba się wciąż odwoływać do wartości poprzednich elementów, aż dojdziemy do pierwszego elementu (a_0 lub b_0). Oczywiście, a_n jest ciągiem arytmetycznym, a b_n ciągiem geometrycznym, więc wiemy, że procedurę obliczania wartości konkretnego elementu ciągu da się przyspieszyć i skorzystać ze wzorów: $a_n = 3n + 1$ oraz $b_n = 2^n$. Nie zawsze jest to takie proste. Trochę ciekawszym przykładem jest ciąg Fibonacciego zadany przez:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Zauważmy, że aby obliczyć wartości kolejnych elementów ciągu, musimy się zawsze odwołać do dwóch poprzednich elementów i dlatego potrzebne są aż dwa początkowe elementy. Spróbujmy uogólnić to zjawisko i zdefiniować tak zwane *liniowe ciągi rekurencyjne*, którym będziemy się dalej szerzej przyglądać. Powiemy, że ciąg c_0, c_1, \dots jest liniowym ciągiem rekurencyjnym stopnia k , jeśli znamy wartości pierwszych k elementów, a pozostałe elementy są wyznaczone przez k poprzednich elementów. Dokładniej:

$$(1) \quad c_0 = s_0, \quad c_1 = s_1, \dots, c_{k-1} = s_{k-1}, \quad c_{n+k} = r_{k-1} \cdot c_{n+k-1} + \dots + r_0 \cdot c_n,$$

dla danych liczb rzeczywistych $s_0, \dots, s_{k-1}, r_0, \dots, r_{k-1}$. Dodatkowo zakładamy, że $r_0 \neq 0$ (inaczej ciąg byłby stopnia $k-1$). Przykładowo ciąg (b_n) jest takim ciągiem stopnia 1 i podobnie (F_n) jest takim ciągiem stopnia 2. Ciąg (a_n) nie spełnia tej definicji, ponieważ a_{n+1} odwołuje się do stałej 3 (zauważmy, że w definicji (1) stałe r_i mogą być tylko przemnożone przez jeden z poprzednich elementów ciągu c_{n+i}). Można to jednak łatwo naprawić: zauważmy, że ciąg (a_n) spełnia $a_n - a_{n-1} = 3$. Tak więc wystarczy w definicji podmienić trójkę na $(a_n - a_{n-1})$. Otrzymujemy w ten sposób równoważną rekurencję stopnia 2:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1}.$$

Pierwsze pytanie, jakim się zajmiemy w tym tekście, to pytanie, czy możemy ograniczyć się wyłącznie do ciągów stopnia 1. Okazuje się, że odpowiedź brzmi „tak”, ale – niestety – nie za darmo. Jeśli pozwolimy na to, żeby użyć więcej niż jednego ciągu, to każdy ciąg stopnia k można zamienić na układ k ciągów stopnia 1. Przykładowo ciąg Fibonacciego można zdefiniować, używając jednego dodatkowego ciągu:

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_{n+1} = F_n + G_n \\ G_0 = 1, & G_{n+1} = F_n. \end{cases}$$

Nietrudno zauważyć, że ciąg (G_n) służy jako bufor do przetrzymywania wartości F_{n-1} i równie nietrudno uogólnić tę metodę na dowolny ciąg stopnia k . W takim razie zadajmy pytanie odwrotne: czy mając układ k ciągów stopnia 1, możemy zdefiniować każdy ciąg z tego układu za pomocą jednego ciągu (być może stopnia większego niż 1)? Rozważmy przykład, który pokaże trudność tego zadania: zdefiniujemy ciąg $d_n = n^2$, używając dwóch dodatkowych ciągów: $e_n = n$ i $f_n = 1$

$$(2) \quad \begin{cases} d_0 = 0, & d_{n+1} = d_n + 2 \cdot e_n + f_n, \\ e_0 = 0, & e_{n+1} = e_n + f_n, \\ f_0 = 1, & f_{n+1} = f_n. \end{cases}$$

Poprawność tej definicji wynika z prostej tożsamości $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Czy możemy zdefiniować ciąg (d_n) bez użycia dodatkowych ciągów? Warto się chwilę zastanowić nad tym pytaniem, zanim przeczytamy rozwiązanie. Odpowiedź brzmi „tak” i realizuje ją rekurencja poniżej:

$$(3) \quad d_0 = 0, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = 4, \quad d_{n+3} = 3 \cdot d_{n+2} - 3 \cdot d_{n+1} + d_n.$$

Czytelnik Zaawansowany Algebraicznie zapisze układ k ciągów za pomocą macierzy kwadratowej wymiaru k i skorzysta z Twierdzenia Cayleya–Hamiltona.

Szybkie rachunki pokazują poprawność tego wzoru

$$(4) \quad 3 \cdot (n+2)^2 - 3 \cdot (n+1)^2 + n^2 = n^2 + 6n + 9 = (n+3)^2.$$

Ogólnie prawdą jest, że każdy ciąg zdefiniowany za pomocą układu k ciągów stopnia 1 możemy przekształcić w ciąg zdefiniowany za pomocą tylko jednego ciągu o stopniu k . Dowód tego faktu nie jest bardzo trudny, ale wymaga podstawowej znajomości algebry liniowej, więc nie omówimy go tutaj w pełnej ogólności.

Zamiast tego spróbujemy zademonstrować tę własność dla szczególnego przypadku. Zauważmy, że nietrudno uogólnić definicję (2) tak, żeby zdefiniować $d_n = n^k$ dla dowolnego k . Wystarczy rozpisać wzór na $(n+1)^k$ i użyć k dodatkowych ciągów. Wykażemy, że można ten ciąg zdefiniować, używając tylko jednego ciągu stopnia $k+1$. Pierwsze $k+1$ elementów zadajemy w oczywisty sposób jako:

$$d_0 = 0, \dots, d_{k-1} = (k-1)^k, d_k = k^k.$$

Rekurencję weźmiemy trochę „z kapelusza”. Najpierw rozwinie wielomian w równaniu $(x-1)^{k+1} = 0$:

$$(5) \quad (x-1)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^i \cdot x^{k+1-i} = 0;$$

i przeniesiemy wszystkie wyrazy o stopniu mniejszym niż $k+1$ na prawą stronę

$$(6) \quad x^{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{i+1} \cdot x^{k+1-i}.$$

Z tego wzoru magicznie otrzymujemy wzór rekurencyjny na d_n , podstawiając d_{n+i} pod jednomian x^i dla każdego $0 \leq i \leq k+1$ (w szczególności pod x^0 podstawiamy d_n):

$$d_{n+k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{i+1} \cdot d_{n+1-i}.$$

Sprawdźmy, że dla $k=2$ dostajemy $d_{n+3} = 3 \cdot d_{n+2} - 3 \cdot d_{n+1} + d_n$, czyli dokładnie rozwiązanie z (3). Pozostaje wykazać, że rekurencja otrzymana z (6) jest poprawna dla każdego k . Wystarczy sprawdzić, że

$$(n+k+1)^k = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{i+1} \cdot (n+k+1-i)^k,$$

czyli

$$(7) \quad \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^i \cdot (n+k+1-i)^k = 0.$$

Uzasadnimy to równanie, korzystając z metody *interpretacji kombinatorycznej*. Otóż dla ustalonej wartości i rozważmy $\binom{k+1}{i} (-1)^i \cdot (n+k+1-i)^k$. Przyjmijmy, że mamy dwie grupy elementów: pierwszą grupę G_1 , gdzie $|G_1| = k+1$; i drugą G_2 , gdzie $|G_2| = n$. Możemy zinterpretować $\binom{k+1}{i}$ jako wybranie podzbioru $A \subseteq G_1$ o rozmiarze i , natomiast $(n+k+1-i)^k$ jako dobranie ciągu z powtórzeniami (e_1, e_2, \dots, e_k) spośród pozostałych elementów, czyli $e_i \in G_2 \cup (G_1 \setminus A)$. Pozostały czynnik $(-1)^i$ określa, czy to wszystko dodamy, czy odejmiemy od całej sumy.

Obliczymy teraz to samo raz jeszcze, ale tym razem w innej kolejności. Ustalmy najpierw jakiś ciąg z powtórzeniami (e_1, e_2, \dots, e_k) , gdzie $e_i \in G_1 \cup G_2$. Niech $S \subseteq G_1$ będzie zbiorem elementów, które nie występują w ciągu (e_1, e_2, \dots, e_k) i oznaczmy $m = |S|$. Pytanie brzmi, na ile różnych sposobów można dobrać do tego ciągu zbiór A tak, żeby otrzymać dokładnie to samo co poprzednio. Jedyne warunki, jaki A musi spełniać, to $A \subseteq S$. Przyjmijmy dodatkowo, że chcemy wybrać A ustalonego rozmiaru i . Możemy to zrobić na $\binom{m}{i}$ sposobów i wtedy będziemy brali ten składnik ze znakiem $(-1)^i$. To znaczy, że dla ustalonego ciągu (e_1, e_2, \dots, e_k) dodamy do sumy $\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i$. Podstawiając w (5) $m := k+1$ oraz $x := 1$, widzimy, że to wyrażenie jest zawsze równe 0. To znaczy, że sumując po wszystkich ciągach (e_1, e_2, \dots, e_k) , otrzymamy i tak 0, czyli wykazaliśmy (7).

Nasz argument, niestety, wymagał wyczarowania rekurencji otrzymanej z rozpisania (5). Żeby otrzymać ten wzór bez zgadywania, potrzeba ponownie nieco algebry liniowej. Co więcej, zauważmy, że nawet samo udowodnienie poprawności tego wzoru wymagało znajomości podstaw kombinatoryki. Niech będzie to więc przestroga, że i informatykowi dobrze jest znać trochę matematyki.

A jednak się da (II),

czyli saga kryptologiczna w odcinkach.

Tym razem: bez zobowiązań o zobowiązaniach.

Łukasz RAJKOWSKI

Zapewne każdy z czytających te słowa grał kiedyś w *marynarza*, ale na wypadek gdyby któryś z Czytelników miał smutne dzieciństwo pozbawione tej gry, pokrótce wyjaśnię zasady: na ustalony sygnał każdy z uczestników przedstawia wybraną przez siebie liczbę (najczęściej przy użyciu własnych palców). Następnie rozpoczyna się (cykliczne) wyliczanie uczestników aż do sumy przedstawionych przez nich liczb (oczywiście, należy wcześniej ustalić, od kogo rozpoczyna się wyliczanka). Osoba, na której zakończy się wyliczanie, jest „zwycięzcą” (wziętym w cudzysłów, gdyż „nagrodą” może być, na przykład, zmywanie naczyń). Niestety, przedstawiona procedura ma pewną techniczną trudność, która była źródłem niejednej podwórkowej kłótni – jeśli któryś z uczestników opóźni się z przedstawieniem swojej liczby, może zostać oskarżony o celową zwłokę, która przy pewnej sprawności rachunkowej mogłaby zostać wykorzystana w celu osiągnięcia z góry założonego wyniku gry. Aby tego uniknąć, uczestnicy mogliby zapisywać wybrane przez siebie liczby na kartkach, które wrzucane byłyby do jednego worka. Co jednak począć w sytuacji, kiedy taka operacja nie jest możliwa, na przykład gdybyśmy chcieli zagrać w *marynarza* przez telefon (lub raczej, ze względu na potencjalnie dużą liczbę uczestników, gdybyśmy chcieli to uczynić, prowadząc grupową konwersację na pewnym popularnym serwisie społecznościowym)? Okazuje się, że wciąż jest to możliwe; wystarczy użyć kryptologicznego narzędzia zwanego *zobowiązaniem*.

Kryptologiczne zobowiązanie jest „skrzynką”, do otwarcia której potrzebny jest klucz. Najczęściej zamykamy w niej wiadomość, wysyłamy całość nadawcy, a po pewnym czasie dosyłamy mu klucz (gdy uznamy, że może on już zapoznać się z zawartością). Dokonujemy jednak w ten sposób pewnego zobowiązania – nie mamy do dyspozycji kilku różnych kluczy o tej własności, że w zależności od użytego klucza skrzynka odsłoni adresatowi inną zawartość. Opisana przed chwilą skrzynka reprezentowana jest przez funkcje `Commit` i `Open` takie, że jeśli Aldona chce „zobowiązać się” Bogumiłowi do wiadomości m , oblicza $(c, k) = \text{Commit}(m)$ i wysyła mu c . Aby odkryć zobowiązanie, musi ona jeszcze dosłać k , dzięki czemu Bogumił oblicza $m' = \text{Open}(c, k)$. Aby protokół był poprawny, muszą być spełnione następujące warunki:

- (i) $\text{Open}(\text{Commit}(m)) = m$ (dzięki czemu Bogumił odczytuje m po dostaniu klucza),
- (ii) sama znajomość c nie dostarcza żadnej informacji o m ,
- (iii) Aldona nie może skonstruować takich dwóch kluczy k_1, k_2 , że $\text{Open}(c, k_1) \neq \text{Open}(c, k_2)$.

Podobnie jak w poprzednim odcinku sagi, możemy dostrzec pewien szkopuł w przedstawionych warunkach. Podpunkty (ii) i (iii) nie mogą być bowiem spełnione jednocześnie. Istotnie, z punktu (iii) wynika, że istnieje tylko jedna wartość klucza k , dla której $\text{Open}(c, k)$ jest sensowną wiadomością – Bogumił po odebraniu wiadomości c mógłby zatem przeglądać wszystkie możliwe wartości kluczy, aż znajdzie ten właściwy. Innymi słowy, c jednoznacznie definiuje m , co przeczy podpunktowi (ii). Musimy zatem zgodzić się na pewien kompromis – któryś ze wspomnianych warunków będzie naruszony, jednak możemy zadbać o to, by realizacja tego naruszenia była bardzo trudna obliczeniowo. W świetle tego spostrzeżenia kryptologiczne zobowiązania możemy podzielić na *bezw warunkowo kryjące* i *bezw warunkowo wiążące*.

Zobowiązania bezwarunkowo kryjące naruszają podpunkt (iii), zatem znajomość c nie mówi zupełnie nic o m , a Aldona teoretycznie mogłaby znaleźć dwa klucze prowadzące do różnych odczytów ze skrzynki, choć będzie to dla niej bardzo trudne obliczeniowo. Przedstawimy przykład protokołu, który realizuje te założenia. Zauważmy najpierw, że wystarczy ograniczyć potencjalne wiadomości do 0 lub 1. Rzeczywiście, dowolnie skomplikowaną informację możemy rozbić na bity i zobowiązać się do każdego z nich z osobna. Aldona wybiera dużą liczbę

Aldonę i Bogumiła przedstawiliśmy już w pierwszej części naszej sagi, traktującej o szyfrowaniu z kluczem publicznym.



Rozwiązanie zadania F 963.

Gdyby prędkość wirowania Ziemi wzrosła, to najsilniejszy efekt tej zmiany byłby obserwowany na równiku. Oszacujmy, przy jakiej prędkości kątowej ω siła odśrodkowa zrównoważyłaby przyciąganie grawitacyjne na równiku:

$$\omega^2 R = g.$$

Biorąc pod uwagę, że $\omega = 2\pi/T$, gdzie T jest poszukiwaną długością najkrótszej doby, otrzymujemy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 5000 \text{ s,}$$

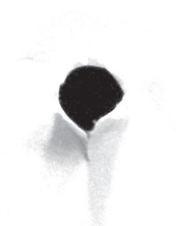
czyli około 1/17 „obecnej” doby. Na szczęście rotacja Ziemi spowalnia i doba wydłuża się o niecałe 2 ms na stulecie.

Warto podkreślić, że „potęgowanie modulo” jest szybkie. Załóżmy, że chcemy obliczyć $(g^x \bmod p)$. Poprzez podnoszenie poprzednich wyników do kwadratu prędko obliczamy $(g^2 \bmod p), (g^4 \bmod p), (g^8 \bmod p), \dots, (g^{2^m} \bmod p)$, gdzie $m = \lfloor \log_2 x \rfloor$, a mnożąc odpowiednie z tych reszt, możemy łatwo wyznaczyć $(g^x \bmod p)$.

Zadanie dla niedowiarków: do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać 23428033658 przy dzieleniu przez liczbę pierwszą $10^{11} + 3$? Można korzystać z pomocy komputera.

O kryterium Eulera piszemy więcej w następnym numerze.

Kolejne zadanie, do rozwiązania którego można wykorzystać komputer: czy 10 jest resztą kwadratową z dzielenia przez 151951844572340170652293?



pierwszą p oraz g niepodzielne przez p , po czym wysła Bogumiłowi p i g . Bogumił wybiera dowolnie $x < p$ i odsyła Aldonie $s = (g^x \bmod p)$. Aby zobowiązać się do bitu b , Aldona wybiera dowolnie klucz $k < p$ i wysyła Bogumiłowi $c = (s^b g^k \bmod p)$. Widzimy, że liczba otrzymana przez Bogumiła to $(g^{bx+k} \bmod p)$, zatem bez znajomości k nie ma on bladego pojęcia o b . Kiedy jednak Aldona dośle k , sprawa jest dla Bogumiła jasna, wystarczy bowiem, że obliczy $(g^k \bmod p)$ i $(g^{x+k} \bmod p)$ i sprawdzi, która z tych liczb jest równa c . Zastanówmy się teraz, w jaki sposób Aldona mogłaby „oszucać system”. Byłoby to równoznaczne ze znalezieniem dwóch kluczy k_1, k_2 , przy których Bogumił odczytałby różne wartości b . Spełniona byłaby zatem równość

$$g^{k_1} = s g^{k_2} \pmod{p}, \quad \text{czyli } g^{k_1 - k_2} = s \pmod{p}.$$

Oznaczałoby to, że Aldona jest w stanie na podstawie g, s wybranych przez Bogumiła znaleźć l spełniające $g^l = s \pmod{p}$. Rozwiązałaby zatem problem *logarytmu dyskretnego*, o którym sądzimy, że jest trudny obliczeniowo. Wierzymy zatem, że nie byłaby w stanie dostarczyć dwóch różnych kluczy do wysłanej Bogumiłowi skrzynki.

Zobowiązania bezwarunkowo wiążące to takie, w których „skrzynka” może zostać otwarta tylko na jeden sposób, w związku z czym teoretycznie Bogumił mógłby wyznaczyć c na podstawie m . Postaramy się jednak, by w praktyce było to niemożliwe. Aby przedstawić przykład takiego protokołu, przypomnimy (lub nauczymy się) kilku interesujących faktów z teorii liczb.

Niech n będzie liczbą naturalną. *Resztą kwadratową* z dzielenia przez n nazwiemy taką liczbę naturalną r , że istnieje x , dla którego $r = x^2 \pmod{n}$. Dla przykładu, 2 jest resztą kwadratową z dzielenia przez 7, gdyż $2 = 3^2 \pmod{7}$, ale 3 już nią nie jest. Łatwo sprawdzić, czy r jest resztą kwadratową z dzielenia przez liczbę pierwszą p – na mocy *kryterium Eulera* wystarczy obliczyć $(r^{\frac{p-1}{2}} \bmod p)$; już wiemy, że jest to szybkie. Jeśli wyjdzie 1, i tylko w takim przypadku, mamy do czynienia z resztą kwadratową (w przeciwnym przypadku dostajemy -1). Wracając do naszego przykładu, mamy $2^3 = 1 \pmod{7}$, ale $3^3 = -1 \pmod{7}$. Sprawa komplikuje się, gdy n jest liczbą złożoną (na przykład $n = pq$, gdzie p i q są pierwsze). Wiemy co prawda, że r jest resztą kwadratową z dzielenia przez n wtedy i tylko wtedy, gdy jest resztą kwadratową z dzielenia przez p oraz z dzielenia przez q , jeśli jednak nie dysponujemy rozkładem n na czynniki pierwsze (jak wiemy, dla dużych n jest to trudne obliczeniowo), nie mamy do dyspozycji tak wygodnego warunku, jak kryterium Eulera dla liczb pierwszych. Decyzja, czy dana liczba jest resztą kwadratową względem dużej liczby złożonej, uznawana jest za trudną obliczeniowo, co wykorzystamy poniżej.

Oto, co powinna tym razem zrobić Aldona, aby zobowiązać się do bitu b . Podobnie, jak w opisanym w poprzedniej części sagi protokole RSA, wybiera ona dwie duże liczby pierwsze p, q i oblicza $n = pq$. Jeśli chce zobowiązać się do 1, wybiera r będące resztą kwadratową z dzielenia przez n . Wybór r niebędącego resztą kwadratową z dzielenia przez n oznacza zobowiązanie do 0. Sposób wyboru odpowiedniego r polega na „losowaniu do skutku” – nietrudno wykazać, że nie trzeba zbyt długo czekać na sukces, a ponieważ Aldona zna liczby p, q , jest w stanie rozstrzygać, czy wylosowane liczby są resztami kwadratowymi z dzielenia przez n . Następnie Aldona wysyła Bogumiłowi liczby n, r . Aby przekonać się o wartości b , Bogumił musiałby rozstrzygnąć, czy r jest resztą kwadratową z dzielenia przez n ; wiemy już, że jest to dla niego trudne, gdyż nie zna on rozkładu n na czynniki pierwsze. Oczywiście, w ramach klucza Aldona wysyła Bogumiłowi liczby p, q ; wówczas bez trudu sprawdza on „kwadratowość” reszty r względem każdego z czynników pierwszych, tym samym odczytując zobowiązanie Aldony.

A tak na poważnie, po co to wszystko?

Oczywiście, przedstawienie gry w marynarza jako przykładu zastosowania kryptologicznych zobowiązań miało raczej żartobliwy charakter. Poważniejszym wykorzystaniem są przetargi; łatwo wyobrazić sobie, dlaczego zobowiązania są bardzo pożyteczne w tym kontekście. Tak naprawdę jednak waga tego narzędzia jest związana z faktem, że jest bardzo wygodną „cegiełką” stosowaną przy konstrukcji innych kryptologicznych protokołów. Protokoły te często mają bardzo nieoczekiwane własności – będziemy o nich pisać w kolejnych odcinkach cyklu „A jednak się da!”.



Zgłoś się do gry i zawalcz o stypendium naukowe

Z początkiem października wystartowała rekrutacja do 5. edycji programu **ADAMED SmartUP**. Dla młodych pasjonatów nauki to szansa na udział w innowacyjnym obozie naukowym, a także rozwinięcie swoich karier pod okiem doświadczonych ekspertów oraz zdobycie stypendium naukowego.

Pierwszym etapem rekrutacji jest gra alternatywnej rzeczywistości, w której zarejestrowani użytkownicy wcielają się w młodych naukowców pracujących w 4 laboratoriach: informatycznym, biomedycznym, biochemicznym, astrofizycznym. Swoich sił w tej naukowej zabawie mogą spróbować uczniowie w wieku 15–19 lat z całej Polski, którzy interesują się naukami ścisłymi i przyrodniczymi.

Aby wziąć w udział w grze, należy w terminie od 1 października br. do 15 stycznia 2019 r. zarejestrować się na stronie adamedsmartup.pl/grarekrutacyjna i przejść jak najwięcej zadań. Użytkownicy, którzy najlepiej poradzą sobie z grą, zostaną poproszeni o przesłanie szczegółowych aplikacji i na początku kwietnia spotkają się z Radą Naukową programu, a 50 z nich podczas wakacji weźmie udział w obozie naukowym.

Dotychczas wyzwanie udziału w grze alternatywnej rzeczywistości podjęło prawie 25 000 uczniów. 200 spośród nich uczestniczyło w innowacyjnym obozie naukowym, 40 laureatów nagrody głównej przygotowywało się do studiów na najlepszych polskich i zagranicznych uczelniach, a 9 stypendystów otrzymało wsparcie finansowe na rozwijanie swoich pasji i realizację marzeń naukowych.

Bestiariusz informatyczny (6)

Szósty odcinek cyklu przybliży nam kilka bardziej technicznych akronimów związanych z oprogramowaniem (*software*). Programiści zapisują zadania, które ma wykonać komputer, w odpowiednim języku programowania. Dzielimy je na generacje od **1GL** do **5GL** (*First- do Fifth-Generation programming Language*), począwszy od niskopoziomowych języków maszynowych, aż do wysokopoziomowych języków wizualnych. Wiele z nich ma nazwy będące akronimami, np. **BASIC** (*Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code*), **COBOL** (*COmmon Business-Oriented Language*), **ALGOL** (*ALGOrithmic Language*), **APL** (*A Programming Language*), **LISP** (*LISt Processing*), **VB** (*Visual Basic*) czy w końcu język zapytań do relacyjnych baz danych **SQL** (*Structured Query Language*).

Programy zapisane w niektórych językach muszą być przed uruchomieniem skompilowane do kodu maszynowego; dla języka C++ możemy użyć kompilatora **GCC** (*GNU Compiler Collection*). Z kolei programy w języku Java uruchamiane są w maszynie wirtualnej **JVM** (*Java Virtual Machine*), która wspiera kompilowanie kodu „w locie” **JIT** (*Just-In-Time compilation*). Natomiast język Python udostępnia również możliwość pracy w interaktywnym środowisku **REPL** (*Read-Eval-Print Loop*).

Programy mogą komunikować się wzajemnie i z systemem operacyjnym dzięki zdefiniowaniu zestawu reguł opisujących wywołania funkcji w kodzie źródłowym **API** (*Application Programming Interface*) oraz wykonywalnym **ABI** (*Application Binary Interface*). Przykładem jest tu np. standardowy interfejs systemu operacyjnego **POSIX** (*Portable Operating System Interface*) lub standard bibliotek współdzielonych **DLL** (*Dynamic-Link Library*). Z kolei komunikacja programów ze sprzętem odbywa się przez warstwę **HAL** (*Hardware Abstraction Layer*), a w sieci jest możliwa np. dzięki zdalnemu wywoływaniu procedur **RPC** (*Remote Procedure Call*).

Inżynieria oprogramowania musi dziś radzić sobie z projektami zawierającymi miliony wierszy kodu **SLOC** (*Source Lines Of Code*), przy których niezbędne jest użycie systemu **CVS** (*Concurrent Versions System*) umożliwiającego wspólną pracę wielu programistów. W latach 80. popularnością cieszyło się programowanie obiektowe **OOP** (*Object-Oriented Programming*), a programiści tworzyli oprogramowanie pudełkowe, uaktualniane co kilka miesięcy. Dziś priorytetem staje się stosowanie procesów umożliwiających częste aktualizacje, takie jak programowanie ekstremalne **XP** (*eXtreme Programming*) i kładące duży nacisk na testy **TDD** (*Test-Driven Development*), oraz wykonywanie aplikacji na serwerach producenta **SaaS** (*Software as a Service*).

Zestaw niezbędnych programiście narzędzi tworzy **SDK** (*Software Development Kit*). Oprócz tego ważna jest dla niego znajomość podstawowych struktur danych, jak kolejka **FIFO** (*First In, First Out*), oraz algorytmów, jak przeszukiwanie grafu włąb i wszcz **DFS**, **BFS** (*Depth- oraz Breadth-First Search*) czy algorytm wyszukiwania wzorca w tekście **KMP** (*Knuth-Morris-Pratt*), który wziął nazwę od nazwisk swoich twórców.

Niektóre akronimy są też dobrymi radami dla programistów. Reguła **KISS** (*Keep It Simple, Stupid*) preferuje prostotę przy projektowaniu, natomiast reguła **DRY** (*Don't Repeat Yourself*) zaleca unikanie powtórzeń (tj. pisanie podobnych fragmentów kodu lub brak automatyzacji procesu kompilacji).

Mamy też rady dla użytkowników programów komputerowych. Przede wszystkim wyniki obliczeń są na tyle sensowne, na ile sensowne są dane wejściowe, innymi słowy **GIGO** (*Garbage In, Garbage Out*), czyli śmieci na wejściu generują śmieci na wyjściu. Zamiast więc obwiniać komputer o błędne działanie, należy się zastanowić, czy nie zachodzi **PEBKAC** (*Problem Exists Between Keyboard And Chair*), czyli poszukać winnego gdzieś pomiędzy klawiaturą a krzesłem. Gdy wszystko inne zawodzi, mamy też **RTFM** (*Read The F*cking Manual*), czyli niezbyt grzeczne odesłanie użytkownika do instrukcji obsługi bądź też listy popularnych pytań **FAQ** (*Frequently Asked Questions*). Dziś raczej zastąpione przez uprzejmą prośbę o skorzystanie z wyszukiwarki **GIYF** (*Google Is Your Friend*).

Tomasz IDZIASZEK

Informatyczny kącik olimpijski (121): Egzamin

Tym razem omówimy zadanie *Egzamin*, które pojawiło się w 2010 roku na *Junior Balkan Olympiad in Informatics* w Szumen (Bułgaria).

Egzamin: Dany jest ciąg $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, złożony z n liczb naturalnych, oraz liczba s . Ile jest podciągów ciągu a , których suma elementów wynosi przynajmniej s ? Dla przykładu, $a = (2, 5, 3, 5)$ ma 6 podciągów, które mają sumę przynajmniej $s = 10$. Są to podciągi: $(2, \underline{5}, 3, 5)$, $(2, \underline{5}, 3, \underline{5})$, $(2, \underline{5}, 3, 5)$, $(2, 5, \underline{3}, \underline{5})$, $(2, \underline{5}, 3, \underline{5})$ oraz $(2, \underline{5}, 3, \underline{5})$.

Rozwiązanie $O(n \cdot 2^n)$

Pomysł, który jako pierwszy nasuwa się na myśl, polega na obliczeniu sumy każdego podciągu, a następnie zliczeniu tych sum, których wartość jest nie mniejsza niż s .

Zastanówmy się teraz, jaka jest złożoność opisanego rozwiązania. Ciąg a ma $\binom{n}{1}$ podciągów długości 1, $\binom{n}{2}$ podciągów długości 2, ..., wreszcie $\binom{n}{n}$ podciągów długości n . Zatem, suma długości wszystkich podciągów wynosi: $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$. Powyższą sumę można zinterpretować nieco inaczej: każdy z n elementów ciągu a należy do 2^{n-1} podciągów (dla ustalonego elementu $n - 1$ pozostałych elementów tworzy 2^{n-1} podciągów). Zatem liczba składników we wszystkich sumach wynosi $n \cdot 2^{n-1}$, co daje nam złożoność czasową $O(n \cdot 2^n)$.

Rozwiązanie $O(2^n)$

Spróbujmy przyspieszyć powyższe rozwiązanie. Będziemy obliczali sumy podciągów w kolejności niemalejących długości (najpierw podciągi długości jeden, potem długości dwa, trzy, itd.). Założymy, że obliczamy sumę podciągu $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ (podciąg ma długość m , indeksy kolejnych elementów tworzą ciąg i_1, i_2, \dots, i_m). Suma elementów tego ciągu to suma podciągu $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{m-1}}$ (którą obliczyliśmy wcześniej, ponieważ przeglądamy podciągi od najkrótszych do najdłuższych) powiększona o a_{i_m} . W tym podejściu obliczenie sumy każdego z $2^n - 1$ podciągów odbywa się w czasie stałym, co daje nam złożoność czasową $O(2^n)$.

Rozwiązanie $O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}})$

W tym rozwiązaniu skorzystamy z techniki *Meet in the middle*.

Podzielmy ciąg a na dwa ciągi równej długości (jeśli długość ciągu jest nieparzysta, wtedy niech pierwszy ciąg zawiera o jeden element więcej): lewy $L = (a_1, a_2, \dots, a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ oraz prawy $P = (a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}, a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2}, \dots, a_n)$. Następnie, dla każdego z nich, obliczmy sumy podciągów. Możemy to zrobić w czasie $O(2^{\frac{n}{2}})$, korzystając z algorytmu opisanego w poprzedniej sekcji. Niech $S^L = (S_1^L, S_2^L, \dots, S_l^L)$ oznacza sumy podciągów L , i niech $S^P = (S_1^P, S_2^P, \dots, S_p^P)$ oznacza sumy podciągów P .

Zauważmy teraz, że dowolny podciąg q ciągu a spełnia jeden z trzech poniższych warunków:

Warunek (I): wszystkie elementy q należą do L .

Aby obliczyć liczbę podciągów o sumie przynajmniej s , których wszystkie elementy należą do L , wystarczy zliczyć te elementy ciągu S^L , które mają wartość przynajmniej s . Formalnie jest to moc zbioru: $\{i \in \{1, 2, \dots, l\} : S_i^L \geq s\}$. Sprawdzenie tego warunku

odbywa się w czasie liniowym od liczby podciągów L , czyli $O(2^{\frac{n}{2}})$.

Warunek (II): wszystkie elementy q należą do P . Analogicznie jak warunek (I).

Warunek (III): część elementów q należy do L , część należy do P .

W tym przypadku chcemy obliczyć liczbę takich par (i, j) dla $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, że $S_i^L + S_j^P \geq s$. Ten problem rozbijemy na l podproblemów. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ obliczymy, ile jest takich $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, że $S_i^L + S_j^P \geq s$.

W tym celu posortujemy ciąg S^P i otrzymamy ciąg nazwijmy S'^P . Założymy, że obliczamy wynik dla ustalonego $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Za pomocą wyszukiwania binarnego szukamy takiego najmniejszego $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, że $S_i^L + S_k'^P \geq s$. Jeśli takie k istnieje, wtedy dla każdego $j \in \{k, k+1, \dots, p\}$ zachodzi $S_i^L + S_j'^P \geq s$, ponieważ S'^P jest niemalejący. Stąd, S_i^L należy do $p - k + 1$ par, które mają sumę przynajmniej s . Jeśli zaś takie k nie istnieje, to S_i^L nie tworzy żadnej pary o sumie przynajmniej s .

Faza sortowania zajmuje czas $O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}})$. Wyznaczenie liczby poprawnych par, dla ustalonej wartości, za pomocą wyszukiwania binarnego zajmuje czas $O(n)$. Wszystkich wartości do sprawdzenia jest l (l jest rzędu $O(2^{\frac{n}{2}})$), co daje całkowitą złożoność $O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}})$.

Przykład

Prześledźmy opisany algorytm na przykładzie ciągu $a = (2, 5, 3, 4, 2, 4)$, w którym szukamy liczby podciągów o sumie przynajmniej 10. Najpierw dzielimy ciąg a na dwa ciągi i dla każdego z nich obliczamy sumy wszystkich jego podciągów:

$$\begin{array}{ll}
 L = (2, 5, 3) & P = (4, 2, 4) \\
 (2, 5, 3) \rightarrow 2 & (\underline{4}, 2, 4) \rightarrow 4 \\
 (2, \underline{5}, 3) \rightarrow 5 & (4, \underline{2}, 4) \rightarrow 2 \\
 (2, 5, \underline{3}) \rightarrow 3 & (4, 2, \underline{4}) \rightarrow 4 \\
 (\underline{2}, \underline{5}, 3) \rightarrow 7 & (\underline{4}, \underline{2}, 4) \rightarrow 6 \\
 (2, 5, \underline{3}) \rightarrow 5 & (\underline{4}, 2, \underline{4}) \rightarrow 8 \\
 (2, \underline{5}, \underline{3}) \rightarrow 8 & (4, \underline{2}, \underline{4}) \rightarrow 6 \\
 (\underline{2}, \underline{5}, \underline{3}) \rightarrow 10 & (\underline{4}, \underline{2}, \underline{4}) \rightarrow 10 \\
 S^L = (2, 5, 3, 7, 5, 8, 10) & S^P = (4, 2, 4, 6, 8, 6, 10)
 \end{array}$$

Z warunku (I) mamy 1 podciąg, z warunku (II)

również 1. Przechodzimy do warunku (III). Najpierw sortujemy S^P , otrzymując $S'^P = (2, 4, 4, 6, 6, 8, 10)$.

Teraz wyznaczamy wyniki dla kolejnych elementów S^L : $(2, 4, 2, 6, 4, 7, 7)$. Ostatecznym wynikiem jest:

$$(1) + (1) + (2 + 4 + 2 + 6 + 4 + 7 + 7) = 1 + 1 + 32 = 34.$$

Bartosz ŁUKASIEWICZ

Rok 2058

Ważnych otwartych pytań, istotnych wyzwań czy fundamentalnych problemów dla ludzkości pozostało jeszcze wiele. Co ciekawe – zdaje się, że wszystkie je rozstrzygniemy do roku 2058.

Skąd to oszacowanie?

Wszystko wiąże się z prostą obserwacją, że rozwój nauki i technologii ma charakter wykładniczy. Na przykład (empiryczne) prawo Moore'a głosi, że liczba tranzystorów w układach scalonych określonego rozmiaru podwaja się średnio co półtora roku. Tego typu obserwacji można dokonywać także w innych dziedzinach: jeśli spojrzymy na koszt energetyczny jednostki obliczenia, koszt wyprodukowania jednostki pamięci itp. itd. – wszędzie dostrzeżemy postęp o charakterze co najmniej wykładniczym. Mistrzem szukania tego typu zależności (oraz – rzecz jasna – wyciągania z nich śmiałych wniosków) jest popularny futurolog Ray Kurzweil. Myślę, że warto poświęcić choć chwilę, aby zapoznać się z jego wizją przyszłości.

Mamy już XXI wiek, więc, oczywiście, nikt postnowoczesny nie będzie bawił się w jakieś emergentyzmy czy – nie daj Boże – teologizmy. Króluje redukcjonizm. Wniosek z niego dla rozwoju technologii jest bardzo prosty: ekstrapolując wszystkie wskaźniki rozwoju oraz szacując złożoność obliczeniową ludzkiego mózgu, już za chwilę (Kurzweil jest tu bardzo dokładny – podaje rok 2029) stworzymy maszynę znacznie inteligentniejszą od człowieka. To, oczywiście, będzie przełom, ale dopiero pierwszy z serii. No bo skoro ludzkość zdoła stworzyć maszynę od siebie lepszą, to ta maszyna – pracując wydajniej tysiące razy (a po kilku latach, zgodnie z tempem rozwoju mocy obliczeniowej – już miliony razy) od wszystkich ludzi razem wziętych, stworzy maszynę od siebie jeszcze lepszą. Ta nowa też pójdzie krok dalej, ale, oczywiście, jeszcze szybciej. Ostatecznie – możemy przewidywać, że kolejne wersje supermaszyn będą powstawać również w tempie geometrycznym. To znaczy (bardzo upraszczając) za T lat powstanie superkomputer w wersji 1, za $T/2$ lat – superkomputer w wersji 2, za $T/4$ lat – w wersji 3 i tak dalej, to znaczy... Za $2T$ lat niechybnie dojdziemy do punktu osobliwego – rozumianego tak jak w analizie zespolonej czy astronomii.

Co jeszcze ciekawsze, $2T$ jest znacznie mniejsze niż mogłoby się wydawać. Kurzweil uważa, że osobliwość nadejdzie z całą pewnością jeszcze w pierwszej połowie XXI wieku (szczegóły można znaleźć w jego książce: *Nadchodzi osobliwość. Kiedy człowiek przekroczy granice biologii*), a jego argumenty i wyliczenia podane są z wprost chirurgiczną dokładnością. (Tytułowy rok 2058 jest tu wersją bardzo konserwatywną – wybrałem jednak akurat ten, bo ma dla mnie pewne znaczenie osobiste, a zarazem dałem obliczeniom Kurzweila cień marginesu.)

Nadchodząca osobliwość może naturalnie rodzić obawy. Przede wszystkim może się wydawać, że człowiek w świecie ultrainteligentnych maszyn ma prawo trochę nie nadążać albo wręcz odstawać. Tu jednak futurologi zgodni nie są. Wielu z nich (w tym Kurzweil, ale i np. Elon Musk) skłaniają się do innej wizji. Widzą raczej przyszłość jako eksplozję rozwoju, który człowiekowi służy, a nie go zastępuje. Innymi słowy, maszyny nie będą od człowieka niezależne, ale dokładnie odwrotnie – będą z nim żyć w symbiozie, ulepszając jego ciało, ale i umysł. Rozwój ma dotyczyć (w początkowej fazie) genetyki, nanotechnologii i robotyki, które razem stworzą hybrydę biologicznego człowieka z coraz większym udziałem niebiologicznej mechaniki (nanoroboty niszczące komórki nowotworowe itp.), ale i niebiologicznej inteligencji, która, oczywiście, zwiększy ludzkie możliwości. W fazach kolejnych – czynnik biologiczny będzie okazywać się coraz bardziej ułomny, aż w końcu całkowicie zastąpiony przez elementy niebiologiczne. Tym samym supermaszyny kolejnych wersji nie będą przedmiotami (podmiotami?) nieludzkimi, a raczej będą po prostu lepszym człowiekiem, który ostatecznie (gdy osobliwość nadejdzie) wypełni swą inteligencją cały dostępny wszechświat.

Czy powyższa wizja rzeczywiście się kiedyś ziści (powiedzmy, nawet do końca XXI wieku)?

Trudno nie mieć wątpliwości i pytań. Czy w świecie materialnym jest w ogóle możliwe zasymulowanie świadomego mózgu? Co to w ogóle jest ta świadomość? Czy sztuczna inteligencja może być lepsza od człowieka w szukaniu dowodów twierdzeń (tak jak jest już lepsza w prostszych grach, jak szachy czy go)? A jeśli tak, to czy może również być bardziej kreatywna w formułowaniu matematycznych hipotez? Może jednak istnieje jakaś bariera nie do przejścia, która zatrzyma opisany proces? Albo metafizyczno-teologiczna (upraszczając: do symulacji człowieka potrzebne jest jednak coś więcej niż tylko to, co widać za pomocą szkiełka i oka), albo czysto fizyczna (okaże się, że człowiek jest zbyt prosty, by był w stanie sam siebie na tyle poznać, aby zrobić swoją ulepszoną kopię; względnie – prawa fizyki są takie, że rozwój supermaszyn musi się zatrzymać, zanim nadejdzie osobliwość)?

Odpowiedzi nie znam. Natomiast *przypuszczam* (w felietonie o futurologii nie mógłbym pozostać niemy), że poznamy ją przed rokiem 2058. To znaczy: albo osobliwość wybuchnie, albo odkryjemy jakiś fizyczny odpowiednik twierdzenia Gödla o niemożności, który – z punktu widzenia czystej fizyki – wytłumaczy nam precyzyjnie, czego po prostu człowiekowi nigdy nie uda się ustalić czy zrobić, a także, jakie są fizyczne ograniczenia tempa ziemskiego rozwoju butnej ludzkości.

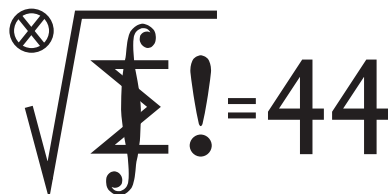
A o tym, jak będzie naprawdę, z pewnością – gdy tylko się to ustali – napiszemy w *Delcie*. Miłej lektury!

Tomasz KAZANA

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2019



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 759 ($WT = 2,86$) i 760 ($WT = 1,46$) z numeru 4/2018

Tomasz Wietecha	Tarnów	42,51
Tomasz Choczewski	Szczecin	42,49
Janusz Olszewski	Warszawa	41,77
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Michał Miodek	Warszawa	37,70
Piotr Kumor	Olsztyn	36,55
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,75
Paweł Kubit	Kraków	34,23

Zadania z matematyki nr 769, 770

Redaguje Marcin E. KUCZMA

769. W trapezie $ABCD$ o równoległych podstawach AB i CD zachodzą równości: $|AB| = |AD|$, $|BD| = |BC|$. Okrąg opisany na trójkącie BCD przecina przekątną AC w punkcie E . Dowieść, że prosta DE połowi bok AB .

770. Dla dodatnich liczb całkowitych a_1, \dots, a_m oraz n rozważamy sumę

$$K_n(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{n}\right)^{a_i}.$$

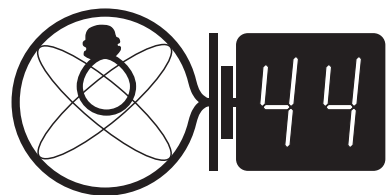
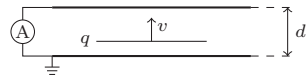
Dla ustalonych liczb całkowitych $m, n \geq 2$ wyznaczyć kres górny zbioru tych wartości wyrażenia $K_n(a_1, \dots, a_m)$, które są mniejsze od 1.

Zadanie 770 zaproponował pan Adam Woryna.

Zadania z fizyki nr 666, 667

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

666. Między okładkami kondensatora płaskiego porusza się ze stałą prędkością v cienka płytką naładowana równomiernie ładunkiem q . Znaleźć natężenie prądu w obwodzie przedstawionym na rysunku. Odległość między okładkami wynosi d , efekty brzegowe można zaniedbać.



667. W ustawionym pionowo zamkniętym z dwóch stron cylindrze, znajduje się mieszanina dwóch gazów doskonałych o masach molowych μ_1, μ_2 i masach odpowiednio m_1, m_2 . Wewnątrz cylindra znajduje się tłok o masie M , który jest przepuszczalny tylko dla gazu pierwszego. Początkowo tłok znajduje się przy górnej podstawie cylindra, a następnie zostaje puszczone swobodnie. Ile moli gazu pierwszego znajduje się w bieżącej chwili po ustaleniu się równowagi powyżej tłoka? Temperatura układu jest stała i wynosi T . Tarcie tłoka o ścianki można zaniedbać. Wysokość cylindra (nie uwzględniając grubości tłoka) jest równa l .



Rozwiązanie zadania F 964. Siła przyciągania Ziemia-Księżyc jest źródłem siły dośrodkowej w ruchu orbitalnym Księżyca, co prowadzi do warunku:

$$\frac{GM_Z}{r^2} = \omega^2 r,$$

gdzie r oznacza odległość środków Ziemi i Księżyca.

W układzie nieinercyjnym rotującym z prędkością ω wokół środka Ziemi (duża masa Ziemi pozwala nam utożsamić jej środek ze środkiem masy układu Ziemia-Księżyc) na cząstkę pyłu o masie m leżącą na Księżycu najdalej od Ziemi działa więc wypadkowa siła „do Księżyca”:

$$F_z = \frac{GM_K m}{(r + R_K)^2} + \frac{GM_K m}{R_K^2} - m\omega^2 R_K,$$

a na podobną cząstkę najbliższej Ziemi siła:

$$F_w = \frac{GM_K m}{R_K^2} + m\omega^2 (r - R_K) - \frac{GM_K m}{(r - R_K)^2}.$$

Dla $r \gg R_K$ mamy

$$\frac{1}{(r \pm R_K)^2} \approx \frac{1}{r^2} \left(1 \mp 2 \frac{R_K}{r}\right).$$

W tym przybliżeniu

$$F_z \approx F_w \approx \frac{GM_K m}{R_K^2} - \frac{3GM_Z m R_K}{r^3} > 0.$$

Ostatnia równość oznacza, że cząstka jest dociskana do Księżyca. Ostatecznie otrzymujemy warunek:

$$r > R_K \sqrt[3]{\frac{3M_Z}{M_K}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych $r > 3 \sqrt[3]{9} R_K \approx 6,24 R_K \approx 10\,860$ km.

Obliczona odległość r , to około 6,2 promienia Księżyca R_K , a więc warunek $r \gg R_K$ jest słabo spełniony, stąd w treści zadania, dla bezpieczeństwa pada określenie „oszacuj”.

Okres obiegu Księżyca w obliczonej odległości od Ziemi wynosiłby około 3 godziny 7 minut zamiast 27 i 1/3 dnia.

Warto jednak pamiętać, że aktualnie Księżyc oddala się od Ziemi w tempie niecałych 4 cm/rok.

Prosto z nieba: Ewolucja kilonowej

W sierpniu 2017 roku zespoły LIGO i Virgo wykryły nadchodzący z pobliskiej galaktyki NGC 4993 sygnał, nazwany później GW170817: potężną falę grawitacyjną powstałą podczas połączenia się gwiazd neutronowych w relatywistycznym układzie podwójnym. Oprócz fal grawitacyjnych zaobserwowano, pochodzące z tego samego źródła, promienie γ , X, UV, światło widzialne, podczerwone oraz fale radiowe. Zaobserwowany przez satelity Fermi i INTEGRAL w tym samym momencie krótki błysk γ (GRB 170817A) dowodzi niezbicie, że tego typu zjawiska powstają na skutek zderzeń zwartych, gęstych obiektów. Błysk był niezwykle słaby, co może oznaczać, że główne źródło promieniowania – dżet γ – obserwowaliśmy pod niezaniechanym kątem.

Naturalnie, od razu po odebraniu GW170817 wszystkie teleskopy świata zostały skierowane na NGC 4993: detekcja fal grawitacyjnych to jedno, ale elektromagnetyczna obserwacja pozostałości – chmury gęstej materii z wnętrza gwiazd neutronowych, świecącej dzięki radioaktywnym procesom w różnych długościach fal przez dni, miesiące, a nawet lata – może dostarczyć dodatkowych, unikalnych informacji o tym, co działo się od razu po zderzeniu. Dodatkowo sygnał optyczny zawiera nieco inne informacje o źródle niż, na przykład, fale radiowe.

Początkowo obserwowano głównie promieniowanie widzialne i podczerwone. Dwa dni po zderzeniu obserwatorium rentgenowskie Chandra nie wykryło składnika rentgenowskiego. Promienie X pojawiły się ostatecznie około 9 dni po wybuchu. To późne wyjaśnienie w twardym promieniowaniu jest dość nietypowe: zamiast niego standardowe poświaty po błyskach γ wykazują raczej pociemnienie. Ze względu na Słońce, znajdujące się zbyt blisko źródła na niebie, kolejne obserwacje były niemożliwe aż do grudnia 2017 roku. Dane zebrane 109 dni po błysku przyniosły jednak prawdziwą rewelację: strumień rentgenowski znacząco wzrósł (około czterokrotnie) w porównaniu do początkowego. Taki sam rosnący trend obserwowano do pewnego czasu w radio – załamanie się nastąpiło w 200 dni po GW170817, a rentgenowskiego nieco później*. Około 250 dni po zderzeniu kilonowa osiągnęła maksymalną jasność w promieniowaniu X. Taka ewolucja czasowa jest dowodem dyskryminującym model „kokonu”, który przewiduje dużo późniejszą zmianę trendu. Jeśli obecna ewolucja się utrzyma, kilonowa będzie widoczna przez kolejne dwa lata, a długotrwałe obserwacje pozwolą na dokładniejsze określenie struktury dżetu.

* K.D. Alexander i in., A Decline in the X-ray through Radio Emission from GW170817 Continues to Support an Off-Axis Structured Jet, arXiv:1805.02870

Michał BEJGER

Niebo w listopadzie

W zeszłym miesiącu Słońce wędrowało tylko przez gwiazdozbiór Panny, by w listopadzie odwiedzić aż trzy gwiazdozbiory: pierwsze trzy tygodnie miesiąca Słońce spędza w Wadze, następne kilka dni – w Skorpionie (w tym gwiazdozbiórze przebywa najkrócej, zaledwie niecały tydzień), a 30 listopada wejdzie do gwiazdozbioru Wężownika, w którym będzie gościł prawie do końca drugiej dekady grudnia. Okres od końca listopada do końca stycznia odznacza się najkrótszymi dniami i najdłuższymi nocami w ciągu roku. 21 listopada Słońce przekroczy równoleżnik -20° deklinacji w drodze na południe i dopiero 21 stycznia ponownie przekroczy tę linię, tym razem w drodze na północ. W tym czasie jego wysokość w południe zmieni się tylko o 3,5 stopnia, z kulminacją 21 grudnia, w dniu przesilenia zimowego.

Październik skończył się ostatnią kwadrą Księżyca, zatem w listopadzie blask Srebrnego Globu nie przeszkodzi w obserwacjach w pierwszej połowie miesiąca. 7 listopada tuż po 17 polskiego czasu Księżyc przejdzie przez now i (tak samo, jak w październiku) przed nowiem jego widoczność będzie bardzo dobra, natomiast po nowiu trzeba odczekać kilka dni, aż wzniesie się on wyżej.

Modele dżetów brane pod uwagę:

1. *dżet jednolity* (top-hat model), widziany pod kątem do jego osi. Krzywe zmiany blasku już teraz wykluczają taki model, ponieważ wyjaśnienie zachodzi za wolno.
2. Dżet o wewnętrznej strukturze, widziany pod kątem. Dzięki temu po przebicciu się dżetu przez zasłaniający go początkowo materiał obserwuje się stopniowo jaśniejącą poświatę pochodzącą z coraz bardziej relatywistycznego materiału bliżej osi dżetu.
3. Poświata wywoływana świeceniem rozrzuconego radioaktywnego materiału. Świecenie i wyjaśnienie pochodzi z rozszerzającej się otoczki (kokonu).



I kwadra przypada 15 listopada, pełnia – 23 listopada, zaś ostatnia kwadra – 30 listopada. W okolicach nowiu i pełni naturalny satelita Ziemi znajdzie się daleko od ekliptyki, stąd tym razem do zaćmień nie dojdzie. 2 listopada Srebrny Glob w fazie 33% zbliży się do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa, na odległość $1,5^\circ$. Dwa dni później w odległości 3° Księżyc minie Porrimę, mając tarczę oświetloną w 14%, a kolejne dwa dni później, w fazie zaledwie 3% przejdzie 7° od Spiki, najjaśniejszej gwiazdy Panny i jednocześnie $8,5^\circ$ od powracającej na niebo poranne po październikowym spotkaniu ze Słońcem planety Wenus. Tego ranka do nowiu zabraknie Księżycowi zaledwie około 34 godzin, ale jego cienki sierp powinien być dobrze widoczny, gdyż na godzinę przed świtem zdąży się wznieść na prawie 8° . O tej samej porze Spica zajmie pozycję na wysokości 6° , a Wenus – zaledwie 2° . Cały ten okres jest dobrą okazją na podziwianie tzw. światła popielatego Księżycyca, czyli jego nocnej części, oświetlonej światłem odbitym od Ziemi. Warto tutaj pamiętać, że Ziemia ma prawie 4-krotnie większą średnicę od Srebrnego Globu, a dodatkowo odbija w przestrzeń o wiele więcej światła słonecznego, zatem na księżycowym niebie świeci zdecydowanie jaśniej. Im bliżej nowiu, tym światło popielate jest intensywniejsze, w czym pomaga węższy i słabiej świecący sierp naturalnego satelity Ziemi.

Planeta Wenus 26 października przeszła przez koniunkcję dolną, czyli między Ziemią a Słońcem i przeniosła się na niebo poranne. Dzięki korzystnemu nachyleniu ekliptyki do widnokregu planeta wyłoni się z zorzy porannej już właśnie pod koniec pierwszego tygodnia listopada, niecałe 2 tygodnie po koniunkcji. Warto obserwować Wenus w tym początkowym okresie, gdyż wtedy, dzięki jej bliskości, już nawet w lornetkach da się dostrzec wyraźny sierp planety, który pokaże średnicę około $1'$ i fazę 5%. Wenus zdąży 6 listopada zbliżyć się do Spiki na 4° , ale potem wykona fragment pętli na niebie, zmieniając ruch z wstecznego na prosty i 15 listopada minie Spikę w odległości zaledwie $75'$, by do końca miesiąca oddalić się od niej na 6° . W trakcie miesiąca blask planety zmieni się z $-4,3^m$ do $-4,7^m$, średnica tarczy spadnie z 58 do $41''$, zaś faza urośnie z 5 do 26% .

Wieczorem można obserwować cztery planety Układu Słonecznego: dwie widoczne gołym okiem (Saturn i Mars) oraz dwie, do których obserwacji potrzebna jest przynajmniej lornetka (Neptun i Uran). Jowisz szykuje się do spotkania ze Słońcem 26 listopada i ginie już w zorzy wieczornej. Podobnie jak Merkury, który mimo osiągnięcia 6 listopada swojej maksymalnej elongacji wschodniej, wynoszącej 23° , zajdzie niewiele ponad 0,5 godziny po Słońcu. Z pozostałych planet pierwszy z nieboskłonu zniknie Saturn, który widoczny będzie tylko w pierwszej części miesiąca, zajmując na początku nocy astronomicznej pozycję na wysokości zaledwie małych kilku stopni, zatem nie można liczyć na wiele więcej niż wzrokowe stwierdzenie obecności Saturna tam, gdzie powinien być. W listopadzie jego jasność spadnie

do $+0,6^m$, a średnica – do $16''$. 11 listopada niecałe $40'$ na północ od Saturna przejdzie Księżyc w fazie 16% .

Dużo lepsze warunki obserwacyjne będą dla planety Mars, która na początku nocy astronomicznej jest jeszcze przed górowaniem. 2 listopada Mars przejdzie $20'$ na północ od Nashiry, a 3 dni później – $30'$ od Deneba Algiedi, dwóch jasnych gwiazd z północno-wschodniej części Koziorożca. 11 listopada planeta wejdzie do gwiazdozbioru Wodnika i 3 dni później minie w odległości $26'$ gwiazdę 4. wielkości ι Aqr. 15 i 16 listopada Mars spotka się z Księżycem, w fazie 50 i 60% w odległości około 6° . Pierwszego z wymienionych dni Srebrny Glob minie Deneba Algiedi w odległości $20'$. W trakcie miesiąca jasność Marsa spadnie z $-0,6^m$ do 0^m , a tarcza skurczy się z 12 do $9''$.

Siódma i ósma planeta od Słońca będą widoczne przez większą część nocy. Obie poruszają się ruchem wstecznym, lecz Neptun 25 listopada zmieni kierunek ruchu na prosty. Planeta dokona zwrotu $25'$ na południowy zachód od gwiazdy 6. wielkości 81 Aqr, sama świecąc blaskiem $+7,9^m$. Uran zbliży się do granicy Barana z Rybami, do których wejdzie ponownie na początku grudnia na trzy miesiące, aby pożegnać się z nimi na 75 lat, aż do 2093 r. Ta planeta jest o ponad 2^m jaśniejsza od Neptuna i na ciemnym niebie można próbować dostrzec ją gołym okiem. Pod koniec miesiąca Uran zbliży się do gwiazdy σ Psc na odległość $1,5^\circ$. Księżyc spotka się z Neptunem 17 listopada przy fazie 69% , zbliżając się do niego na 6° . Trzy dni później Srebrny Glob dotrze do Urana, mijając go również w odległości 6° . Do tego dnia oświetlenie księżycowej tarczy urośnie do 92% .

Co roku w listopadzie promieniają meteory ze słynnego roju Leonidów. Są to bardzo szybkie meteory, ich prędkość zderzenia z atmosferą wynosi 71 km/s, stąd często po nich zostają smugi dymu, które łatwo uwiecznić na naświetlanych kilkanaście sekund zdjęciach. Tegoroczne maksimum ich aktywności przewiduje się 19 listopada tuż po północy polskiego czasu. Można się wtedy spodziewać około 20 meteorów na godzinę. W obserwacjach początkowo przeszkodzi Księżyc w fazie 80% , ale zajdzie on około godz. 3 i przez ponad 3 godziny niebo będzie zupełnie ciemne.

W listopadzie można już zacząć szukać komety 46P/Wirtanen. Jest to kometa okresowa, której rok trwa prawie 5,5 roku ziemskiego. 12 grudnia kometa przejdzie przez peryhelium, 17 grudnia zaś zbliży się do Ziemi na $11,6$ mln km. Może wtedy osiągnąć jasność nawet $+4^m$, albo i większą, będąc prawdziwą ozdobą nocnego nieba. W grudniu kometa przemierzy na niebie odcinek ponad 90° . Jednak zanim to nastąpi, kometa w listopadzie zakreśli kawałek pętli na tle gwiazdozbiorów Pieca i Wieloryba, wędrując początkowo bardzo nisko nad widnokregiem i zwiększając jasność z $+7$ do $+5^m$. Można ją wtedy próbować dostrzec przez teleskop, kierując go 15 – 10° na południowy wschód od gwiazdy τ Ceti.

Ariel MAJCHER

Chłód ciemnej materii

Każdy fizyk-turysta wie, że igła magnesu wskazuje kierunek północny, gdyż jest ona dipolem magnetycznym, który oddziałuje z polem magnetycznym Ziemi. Analogiczne efekty mają także miejsce dla znacznie mniejszych układów opisywanych fizyką kwantową. Na poziomie pojedynczych atomów moment magnetyczny jąder atomowych oddziałuje z polem elektromagnetycznym wytwarzanym przez elektrony oraz z momentami magnetycznymi elektronów, w wyniku czego powstaje wiele poziomów energetycznych bardzo niewiele różniących się energią, nazywanych strukturą nadsubtelną widma energetycznego. W przypadku atomu wodoru promieniowanie odpowiadające przejściu między takimi dwoma poziomami należy do zakresu mikrofalowego i ma częstotliwość 1420 MHz oraz długość fali 21 cm. Prawdopodobieństwo emisji takiego promieniowania jest niezwykle małe – stan wzbudzony żyje około 10 mln lat. Powoduje to, że niełatwo badać takie przejścia w laboratorium.

Badanie emisji i absorpcji promieniowania związanego ze strukturą nadsubtelną atomu wodoru ma wielkie znaczenie w astrofizyce i kosmologii. Pierwsza detekcja miała miejsce w roku 1951 i została dokonana przez Harolda Ewena i Edwarda Purcella. Już kilka lat później badania natężenia tego promieniowania pozwoliły na zbadanie rozkładu materii w naszej Galaktyce i jednoznaczne określenie, że Droga Mleczna jest galaktyką spiralną oraz zmierzenie prędkości obiegu materii galaktycznej wokół centrum. Pomiar natężenia tego promieniowania może również pozwolić na wyznaczenie rozkładu materii w całym obserwowalnym wszechświecie, również w nieprzezroczystych obłokach gazowych, a przez to lepsze zrozumienie, skąd ta materia się wzięła i jak ewoluowała.

Niedawno Judd Bowman ze współpracownikami donieśli o zaobserwowaniu takiego promieniowania pochodzącego z odległych galaktyk i wyemitowanego w czasach, kiedy powstawały pierwsze gwiazdy. Na tej podstawie można było wyznaczyć temperaturę gazu, który oddziaływał z tym promieniowaniem. Ku zaskoczeniu badaczy okazało się, że kosmiczny wodór nie tylko był bardzo zimny, zimniejszy niż wypełniające wszechświat mikrofalowe promieniowanie tła, ale jeszcze tej różnicy temperatur nie dało się wyjaśnić żadną znaną fizyką.

Istnieje wiele mechanizmów podgrzewania kosmicznego gazu, ale jego chłodzenie wymaga oddziaływania z materią, która jest od niego zimniejsza. Czym mogła być tego rodzaju materia? Kosmologowie mają na to w zanadru gotową odpowiedź – to tzw. zimna ciemna materia, złożona z nieodkrytych jeszcze w laboratorium i stosunkowo ciężkich cząstek, która na tym etapie ewolucji wszechświata oddziałuje z pozostałymi jego składnikami przede wszystkim za pomocą oddziaływań grawitacyjnych.

Możliwe są jednak niezwiązane z grawitacją bardzo słabe oddziaływania ciemnej materii z tą widzialną. Prawdopodobieństwo takiego oddziaływania może zależeć od temperatury, a dokładniej od względnej prędkości między barionem a cząsteczką ciemnej materii, którą rozprasza – im mniejsza jest ta prędkość, tym oddziaływanie bardziej prawdopodobne. Okres tworzenia pierwszych gwiazd zapewnia wyjątkowe warunki fizyczne, które nie występowały w innych chwilach ewolucji wszechświata. W szczególności, w tym czasie gaz kosmiczny jest najzimniejszy – wcześniej był gorętszy, bo stygnął w miarę rozszerzania się wszechświata, a później był podgrzewany za pomocą promieniowania rentgenowskiego i innego promieniowania ciepłego

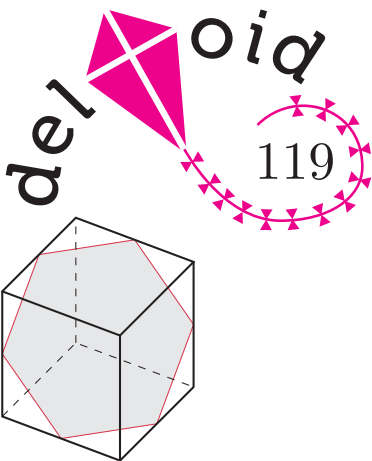
z obiektów astrofizycznych. Oznacza to, że prędkości atomów gazu są w tym czasie najmniejsze.

Modelowanie sygnału otrzymanego przez Bowmana i współpracowników wskazuje na to, że cząstki tworzące zimną ciemną materię powinny mieć masę rzędu masy protonu, a siła ich oddziaływań ze znaną materią, tłumacząca skuteczne chłodzenie, pozostaje w zgodzie ze znanymi ograniczeniami fizycznymi.

Czy oznacza to, że (znowu) odkryto ciemną materię? Na takie stwierdzenie jest jeszcze za wcześnie, zwłaszcza że możliwa obecność ciemnej materii jest tu stwierdzana tylko pośrednio. Jednak badanie w skali kosmicznej promieniowania pochodzącego z przejść między poziomami struktury nadsubtelnej atomu wodoru jest jeszcze w powijakach, można zatem sądzić, że kolejne obserwacje i pomiary przyniosą jeszcze bardziej interesujące wyniki.

- [1] J.D. Bowman, A.E.E. Rogers, R.A. Monsalve, T.J. Mozdzen, N. Mahesh, An absorption profile centered at 78 megahertz in the sky-averaged spectrum, *Nature* 555 (2018) 67–70
- [2] R. Barkana, Possible interaction between baryons and dark-matter particles revealed by the first stars, *Nature* 555 (2018) 71–74

Krzysztof TURZYŃSKI

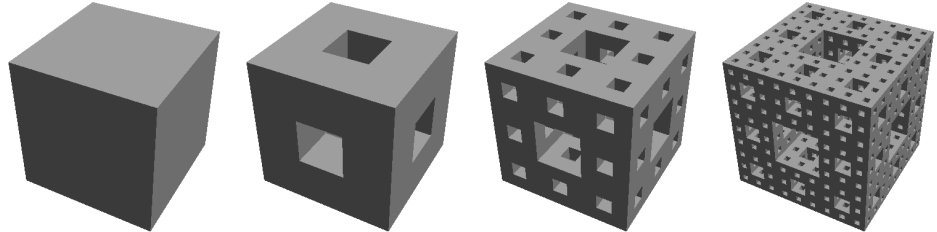


Rys. 1. Sześciokątny przekrój sześcianu

Kroimy kostkę

Joanna JASZUŃSKA

Podzielmy kostkę na 27 przystających sześcianów (jak w kostce Rubika), a następnie wyrzucmy 7 z nich: ten ze środka oraz środkowy na każdej ze ścian. W kolejnych krokach konstrukcji powtarzamy powyższą operację dla każdego z pozostałych mniejszych sześcianów (rys. 2).

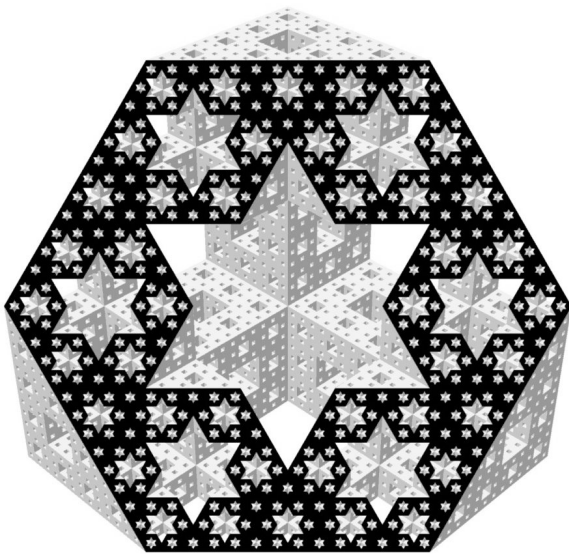


Rys. 2. Trzy początkowe kroki konstrukcji kostki Mengera (Wikimedia Commons, autor: Mattcomm)

Po nieskończenie wielu takich krokach otrzymalibyśmy *kostkę Mengera* – fraktal o zerowej objętości, nieskończonej powierzchni i innych ciekawych własnościach. Zatrzymajmy się jednak po czwartym kroku konstrukcji.

Sześcian można przeciąć płaszczyzną prostopadłą do głównej przekątnej i przechodzącą przez środki niektórych jego krawędzi, w przekroju uzyskując sześciokąt foremny (rys. 1, oznaczmy płaszczyznę cięcia przez π).

Jaki jest kształt i układ dziur na takim sześciokątym przekroju czwartego kroku konstrukcji kostki Mengera?

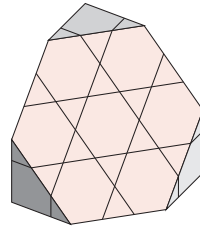


Rys. 3. (Wikimedia Commons, autor: Cmglee)

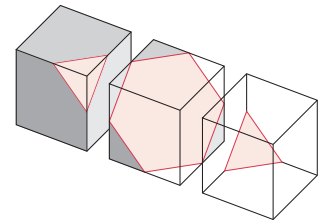
Odpowiedź widać na rysunku 3. Uzasadnimy dwoma sposobami, że w pierwszym kroku konstrukcji na środku przekroju otrzymujemy dziurę w kształcie gwiazdki.

Sposób I. Przekrojmmy płaszczyzną π (jak na rysunku 1) cały sześcian podzielony na 27 mniejszych kostek. Zarówno środkowa kostka, jak i kostki przy środkach krawędzi, przez które przechodzi płaszczyzna π , przecięte są w taki sam sposób jak całość, w przekroju uzyskujemy więc siedem odpowiednio mniejszych sześciokątów foremnych (rys. 4).

Płaszczyzna π przecina też 12 innych małych kostek, przechodząc w każdej z nich przez środki trzech krawędzi o wspólnym wierzchołku. Takie przekroje są trójkątami równobocznymi (rys. 5).



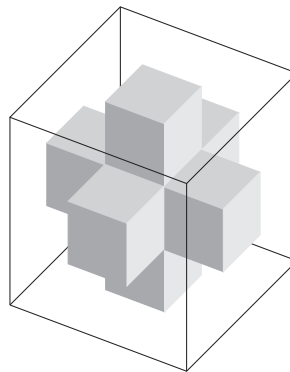
Rys. 4



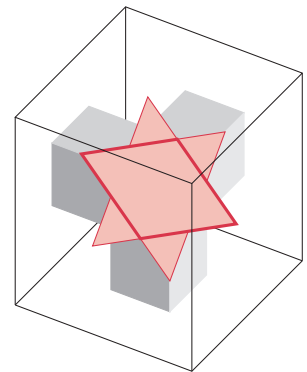
Rys. 5. Przekroje małych kostek

Sześciany usunięte w pierwszym kroku konstrukcji kostki Mengera składają się na sześciokąt na środku przekroju i sześć przylegających do niego trójkątów, co w sumie daje właśnie sześcioramienną gwiazdkę. W kolejnym kroku konstrukcji analogiczne mniejsze gwiazdki wycinane są z pozostałych sześciu sześciokątów z przekroju z rysunku 4, co tłumaczy także układ dziur widocznych na rysunku 3.

Sposób II. Pierwszy krok konstrukcji kostki Mengera można inaczej opisać jako wydrążenie w sześcianie trzech tuneli wyznaczonych przez kwadraty na środkach przeciwległych ścian (rys. 6).

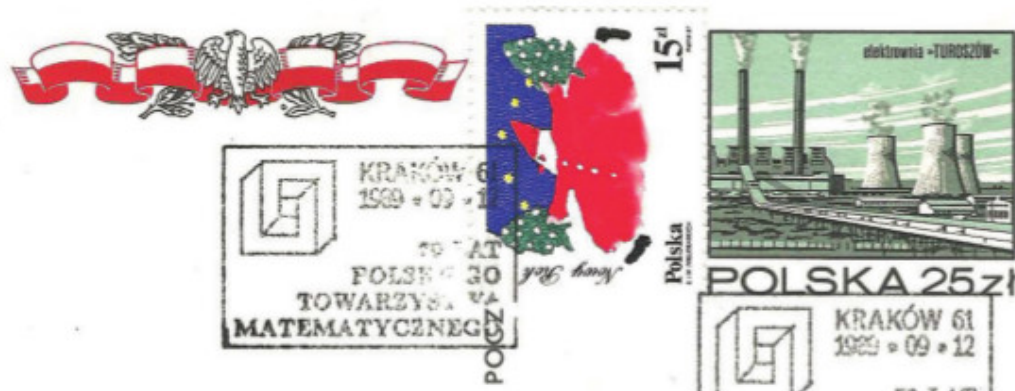


Rys. 6



Rys. 7

Przekrój płaszczyzną π każdego z tych tuneli to romb o kątach 60° i 120° (na rys. 5 na taki romb składają się dwa trójkąty i sześciokąt). Środkowa dziura-gwiazdka z rysunku 3 powstaje z trzech takich rombów (rys. 7).



Powyższe stemple na kartce pocztowej to jeden z nielicznych śladów zainteresowania Poczty Polskiej dziejami Polskiego Towarzystwa Matematycznego – tu jego siedemdziesięciolecie.

W dniach obchodów Stulecia Odzyskania Niepodległości wypada przypomnieć, że niespełna rok później powstało Polskie Towarzystwo Matematyczne – obchody tego wydarzenia będą miały miejsce w Krakowie w dniach 3–7 września 2019 roku (100latptm.matinf.uj.edu.pl).

Jubileusz odbędzie się w Krakowie ze względu na wydarzenia, jakie towarzyszyły powstaniu PTM.

Początek był dojmująco tragiczny – pierwszy załazek Towarzystwa pojawił się we Lwowie w 1917 roku, jednak wydarzenia wojenne spowodowały, iż żaden z założycieli nie dożył Niepodległości.

Krakowska inicjatywa zaistniała 9 kwietnia 1918 roku o godzinie 17 – wtedy odbyło się pierwsze Posiedzenie Zwyczajne powstającego Towarzystwa. Było to Towarzystwo krakowskie, ale już 19 września 1918 roku Samuel Dickstein z Warszawy i Antoni Łomnicki ze Lwowa zaproponowali, by Towarzystwo miało charakter ogólnopolski. Negocjacje nie były ani łatwe, ani krótkie (polecamy świetny tekst Józefa Piórka *Z protokołów Towarzystwa Matematycznego w Krakowie* www.smp.uph.edu.pl/czasopismo/msn, nr 3, str. 4–10). Dopiero 21 kwietnia 1920 roku na wniosek Stanisława Zaremby nazwę Towarzystwa Matematyczne zmieniono na Polskie Towarzystwo Matematyczne i powołano komisję statutową. Ostatecznie sprawozdawcze Walne Zebranie Polskiego Towarzystwa Matematycznego w formule zbliżonej do dzisiejszej odbyło się w Krakowie 4 czerwca 1921 roku.

Wracając do poczty – poniżej prezentujemy kilka znaczków i stempli, jakie zostały poświęcone polskim matematykom, wraz z „pocztową” anegdotą Edwarda Otto. Zostały one wzięte z obszernego materiału zamieszczonego przez Józefa Swadźbę w Matematyce Poglądowej 5 (www.mp.uph.edu.pl/archiwum).

