

# deltam

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$   $J \cdot s$   $\pi=3,141592\dots$

NR 9 (532) 2018  
CENA 4 ZŁ VAT 5%  
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35-550 X  
MIESIĘCZNIK  
[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)



Nakład: 3500 egz.

$\int p_1 p_2 t_1 t_2$   
 $p_1 = p_2$   
 $t_1 = t_2$




$\cdot p_2, t_2$

$p_1, t_1$



**Topologia  
na Antypodach**  
str. 4

## SPIS TREŚCI NUMERU 9 (532)

O twierdzeniu Słomskiego <i>Bartosz Klin</i>	str. 1
Topologia na Antypodach <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 4
Ile jest podprzestrzeni? <i>Zofia Miechowicz, Tomasz Bartnicki</i>	str. 6
Zagnieżdżone pierwiastki <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 8
O ortocentrach i parabolach, a zwłaszcza o twierdzeniu odwrotnym Steinera <i>Piotr Pikul</i>	str. 10
Stara Delta Wodorki metali <i>Bogdan Baranowski</i>	str. 12
Migawka informatyczna: Modelowanie	str. 14
 Wyobraźnia? Wiedza? <i>Magdalena Fikus</i>	str. 16
Bestiariusz informatyczny (5) <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 17
Informatyczny kącik olimpijski (119): <i>Problem (MAX, +)</i> <i>kontratakuję</i>	str. 18
 Zadania	str. 19
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: Galaktyka bez ciemnej materii	str. 22
Niebo we wrześniu	str. 22
Dlaczego $\sqrt{2}$ nie pasuje do liczb wymiernych?	str. 24
Skąd mógł to wiedzieć?	str. 24
Galilleusz Arystotelesa ośmieszyl... A co na to Newton?	str. 24
 O ustawianiu <i>Joanna Jaszurka</i>	str. 25

W następnym numerze przesuwamy sofę.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216, p. 101, 01-460 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl) lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

## O twierdzeniu Słomskiego

Bartosz KLIN\*

Przy dzieleniu liczb wielocyfrowych metodą pisemną często wykonuje się następującą operację:

*Dla takich danych liczb  $A$  i  $B$ , że  $A \geq B$  znajdź taką największą cyfrę  $d$ , że  $A \geq d \cdot B$ .*

Zwykle wykonujemy tę operację w pamięci nawet dla sporych liczb. Czasem jednak, szczególnie gdy w liczbie  $B$  występuje wiele dużych cyfr, nawet wprawny matematyk może się zawahać przy wyborze właściwej cyfry  $d$ . Nie jest to może wielki problem, ale w dawnych czasach, przed upowszechnieniem maszyn liczących, kiedy rachmistrze musieli wykonywać sporo obliczeń na papierze, powodował pewne uciążliwości.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

Już w XVII wieku szkocki matematyk John Napier, znany nam dziś głównie jako odkrywca logarytmów, obmyślił bardzo proste urządzenie, które pozwalało szybko obliczać wszystkie wielokrotności podanej liczby wielocyfrowej przy mnożeniu przez pojedyncze cyfry. Z użyciem *kości Napiera*, bo o nich tu mowa, można bardzo sprawnie wykonać operację opisaną powyżej.

Kości Napiera to podłużne tabliczki, na których wypisano układy liczb. Kości jest 10 rodzajów, po jednym dla każdej cyfry od 0 do 9. Obok wszystkie rodzaje kości.

Każda kość ma w górnym polu wypisaną pojedynczą cyfrę, a poniżej, w 9 kolejnych kwadratach, kolejne wielokrotności tej cyfry zapisane dwiema cyframi rozdzielonymi ukośną linią. W jednym zestawie było zwykle po kilka kości każdego rodzaju.

Powiedzmy, że chcemy poznać wynik mnożenia 379 przez 5 i 8. W tym celu układamy obok siebie kości odpowiadające cyfrom 3, 7 i 9 i odczytujemy liczby z piątego i ósmego wiersza, dodając cyfry na ukos jak na rysunku obok.

	3	7	9	
	0/3	0/7	0/9	
	0/6	1/4	1/8	
	0/9	2/1	2/7	
	1/2	2/8	3/6	
5 · 379 =	1/5	3/5	4/5	= 1895
	1/8	4/2	5/4	
	2/1	4/9	6/3	
8 · 379 =	2/4	5/6	7/2	= 3032
	2/7	6/3	8/1	

Mnożąc przez 5, odczytujemy kolejne cyfry wyniku od prawej **5**,  $4 + 5 = 9$ ,  $3 + 5 = 8$  i wreszcie **1**, co daje wynik 1895. Czasem w wyniku dodania dwóch cyfr powstaje przeniesienie i wtedy trzeba dodać 1 do sumy cyfr na następnych pozycjach. Przykładowo, mnożąc 379 przez 8, odczytujemy od prawej cyfry **2**,  $7 + 6 = 13$ ,  $4 + 5 + 1 = 10$  i wreszcie  $2 + 1 = 3$ , co daje w wyniku 3032.

Kości Napiera były całkiem przydatne w mnożeniu i dzieleniu liczb wielocyfrowych, szczególnie dla ludzi, którzy mieli problemy z tabliczką mnożenia, co w dawnych czasach było częste nawet wśród nieźle wykształconych osób. Ich stosowanie nadal wymaga jednak wykonywania pewnych (co prawda bardzo prostych) obliczeń w pamięci: dodawania pojedynczych cyfr, a czasem zapamiętywania przeniesienia. W połowie XIX w., kiedy w Europie zaczęły się upowszechniać mechaniczne arytmetometry, stało się jasne, że dobrze byłoby udoskonalić kości Napiera tak, aby wyniki mnożenia można było z nich odczytywać całkowicie automatycznie. Autorem jednego z najbardziej pomysłowych urządzeń tego rodzaju był polski wynalazca, dziadek sławnego poety Antoniego Słomskiego (1895–1976).

Chaim Zelig Słomski (1810–1904), bo o nim tu mowa, pochodził z ortodoksyjnej rodziny żydowskiej. Młodość spędził na Białostocczyźnie,

0	3	7	9
00+0=00	03+0=03	07+0=07	09+0=09
00+0=00	06+1=07	14+1=14	18+0=18
00+1=01	09+2=11	21+2=23	27+0=27
00+1=01	12+3=15	28+3=31	36+0=36
00+1=01	15+3=18	35+4=39	45+0=45
00+2=02	18+4=22	42+5=47	54+0=54
00+2=02	21+5=26	49+6=55	63+0=63
00+3=03	24+6=30	56+7=63	72+0=72
00+3=03	27+7=34	63+8=71	81+0=81

gdzie odebrał staranne wykształcenie talmudyczne, a jednocześnie samodzielnie studiował matematykę, astronomię i filozofię. Jego życiową misją stało się popularyzowanie nauki w społeczności żydowskiej. Napisał wiele znakomitych książek i artykułów popularnonaukowych w języku hebrajskim, wzbogacając przy tym ten język o wiele terminów technicznych i matematycznych, których w nim wcześniej nie było.

W 1838 r. Słonimski przeniósł się do Warszawy, gdzie poznał Abrahama Sterna, znanego konstruktora maszyn liczących. Wkrótce ożenił się z jego córką Sarą, a po śmierci teścia kontynuował prace nad jego wynalazkami. Zbudował, między innymi, maszynę do mnożenia liczb, opartą na pomysłowej modyfikacji kości Napiera. Zilustrujemy teraz jej działanie na przykładzie. Wypiszmy w tabeli obok rachunki potrzebne do obliczenia kolejnych wielokrotności liczby 379.

W każdym miejscu tabeli znajduje się wyrażenie postaci

$$XX + Y = ZZ,$$

gdzie liczby  $XX$  są wielokrotnościami cyfr w pierwszym wierszu i nie zależą od pozostałych cyfr liczby, którą rozważamy. Są to te same liczby, które widnieją na zwykłych kościach Napiera. Cyfra  $Y$  jest równa pierwszej cyfrze liczby  $ZZ$  z kolumny po prawej stronie, jak pokazują poziome strzałki. (W ostatniej kolumnie po prawej  $Y = 0$ .) Wynik, czyli odpowiednią wielokrotność liczby 379, odczytujemy z drugich cyfr liczb  $ZZ$  w odpowiednim wierszu. Przykładowo, z zaznaczonych cyfr odczytujemy

$$379 \cdot 5 = 1895, \quad 379 \cdot 8 = 3032.$$

Popatrzmy teraz na kolumny cyfr  $Y$ , zaznaczone pionowymi strzałkami. Mamy tu, patrząc od prawej, ciągi cyfr:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0  
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8  
0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7  
0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3

Te ciągi pośrednio zależą od wszystkich cyfr na prawo od aktualnej kolumny, a więc potencjalnie trudno przewidzieć, którego z nich trzeba użyć na której pozycji. Ile takich ciągów może się pojawić przy mnożeniu dużych liczb przez pojedyncze cyfry? Można zauważyć, że pierwsza cyfra w takim ciągu musi być równa 0, a każda następna jest równa lub o jeden większa od poprzedniej. Jednak 9-cyfrowych ciągów o tej własności jest aż  $2^8 = 256$ . Czy każdy z nich faktycznie może się pojawić?

Słonimski zauważył (i to właśnie „twierdzenie” jest do dziś opatrzone jego nazwiskiem), że 9-cyfrowych ciągów, które rzeczywiście mogą się pojawić przy obliczaniu wielokrotności liczb wielocyfrowych, jest tylko 28. Dowód tego jest całkiem prosty. Uporządkujmy rosnąco wszystkie nieskracalne ułamki zwykle między 0 a 1, o mianowniku nie większym niż 9:

$\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{2}{4}, \frac{1}{7}, \frac{2}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{1}{8}, \frac{2}{3}, \frac{1}{7}, \frac{3}{4}, \frac{1}{9}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{9}$ .

(Jest to tzw. *ciąg Fareya rzędu 9*; takie ciągi mają wiele ciekawych własności, na omówienie których nie ma tu miejsca.) Takich ułamków jest 27, a więc dzielą one przedział  $[0, 1]$  na 28 kawałków. Łatwo zauważyć, że dla każdej liczby rzeczywistej  $0 \leq p \leq 1$  części całkowite liczb  $p, 2p, 3p, \dots, 9p$  zależą tylko od tego, w którym z tych kawałków znajduje się liczba  $p$ . Przykładowo, dla liczby  $p = 0,379$  mamy

$$\frac{3}{8} < 0,379 < \frac{2}{5},$$



O ciągach Fareya pisaliśmy w  $\Delta_{08}^6$  i  $\Delta_{10}^5$ . Polecamy też *Księgę liczb* J.H. Conwaya i R.K. Guya.



### Rozwiązanie zadania F 959.

Na potrzeby oszacowania przyjmijmy bardzo uproszczony model, w którym cała masa  $m$  struny skupiona jest w jej środku. Ruch harmoniczny poziomej struny odbywa się pod wpływem składowej pionowej siły naciągu. Dla masy skupionej w środku struny odpowiada to jej ruchowi pod działaniem pionowej sprężyny o pewnej wypadkowej stałej sprężystości  $k$ . Częstość drgań wynosi więc:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

W stanie równowagi siła ciężkości równoważona jest przez siłę naciągu sprężyny:  $mg = kx$ , gdzie  $x$  oznacza wydłużenie sprężyny, czyli w naszym modelu obniżenie środka struny. Otrzymujemy:

$$x = \frac{g}{4\pi^2 f^2}.$$

$$x \approx 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 6,6 \text{ } \mu\text{m}.$$

a więc:

$$1 \leq 5p < 2 \quad \text{bo} \quad \frac{1}{5} \leq p < \frac{2}{5},$$

$$3 \leq 8p < 4 \quad \text{bo} \quad \frac{3}{8} \leq p < \frac{1}{2},$$

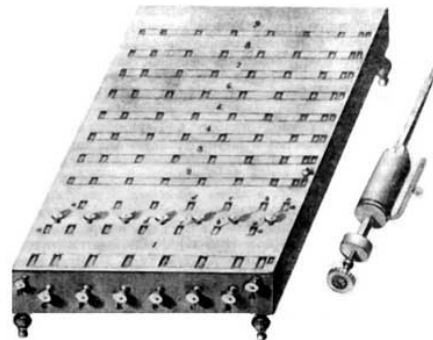
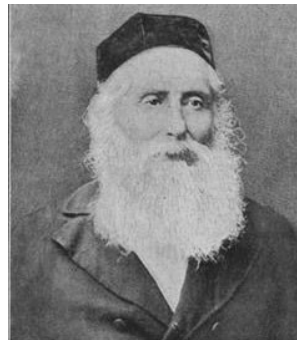
i tak dalej. Cały ciąg części całkowitych wielokrotności  $p, 2p, 3p, \dots, 9p$  wygląda w tym przypadku tak:

$$0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$$

i łatwo zauważyć, że jest to ten sam ciąg, który pojawia się jako ciąg przeniesień  $Y$  w pierwszej kolumnie tabeli wielokrotności liczby 379.

Liczba 28 jest na tyle niewielka, że wszystkie możliwe ciągi można ponumerować i umieścić na 28 kościach, jak u Napiera, albo – lepiej – na obracających się cylindrach.

Zauważmy, że jeżeli podczas obliczania wielokrotności liczby wielocyfrowej znany numer odpowiedniego (jednego z 28) ciągu cyfr  $Y$  oraz aktualnie rozważaną cyfrę, to numer następnego ciągu jest jednoznacznie wyznaczony. W ten sposób, licząc od prawej do lewej, możemy kolejno dobierać ciągi cyfr  $Y$  i obliczać kolejne cyfry wielokrotności danej liczby.



Chaim Słonimski, jego urządzenie do mnożenia i jeden z cylindrów w tym urządzeniu

Słonimski skonstruował proste urządzenie, które pozwala łatwo wykonać te operacje (rysunek). Widnieje na nim 11 rzędów okienek. W pierwszym rzędzie od dołu użytkownik, za pomocą pokręteł, ustawia cyfry liczby, której wielokrotności chce poznać. Następnie, poczynając od prawej strony, w trzecim rzędzie od dołu w danej kolumnie odczytuje kod (literę, jedną z 28) ciągu przeniesień. Następnie obraca inne pokrętko w następnej kolumnie po lewej, aż ten sam kod ukaże się w drugim rzędzie od dołu w tej kolumnie. Potem odczytuje kod w trzecim rzędzie od dołu i tak dalej, aż do pierwszej kolumny od lewej. Po wykonaniu tych czynności w pozostałych rzędach okienek można odczytać kolejne wielokrotności rozważanej liczby.

Centralnym elementem urządzenia Słonimskiego są specjalne cylindry, na których wypisane są wszystkie możliwe ciągi cyfr  $Y$  i które można odpowiednimi pokrętłami obracać i przesuwac w górę i w dół wzdłuż osi.

W 1844 r. Słonimski zaprezentował swoje urządzenie w Berlinie przed Pruską Królewską Akademią Nauk, a rok później w Petersburgu przed Cesarską Akademią Nauk, gdzie spotkał się z bardzo pozytywnym przyjęciem i otrzymał prestiżową Nagrodę Demidowa drugiego stopnia. Od cara Mikołaja I w uznaniu swoich zasług otrzymał też honorowe obywatelstwo, które wiązało się z prawem zamieszkania poza dzielnicą żydowską.

Poza swoją maszyną mnożącą Chaim Słonimski dokonał kilku innych ciekawych wynalazków. Zmarł w Warszawie; jego grób można znaleźć na Cmentarzu Żydowskim przy ul. Okopowej.



### Rozwiązanie zadania F 960.

O wysokości dźwięku piszczałki decyduje jej długość  $L$ . Podstawowa częstość  $f$  dźwięku odpowiada długości fali  $\lambda = 4L$ , a więc wynosi  $f = \frac{c}{4L}$ . Prędkość dźwięku w gazie wynosi

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}},$$

gdzie  $\kappa$  oznacza wykładnik adiabaty,  $\mu$  masę molową gazu,  $R$  stałą gazową, a  $T$  temperaturę w skali Kelwina. Spadek temperatury od  $T_0 = 293 \text{ K}$  do  $T_1 = 273 \text{ K}$  spowoduje obniżenie częstości od  $f_0$  do

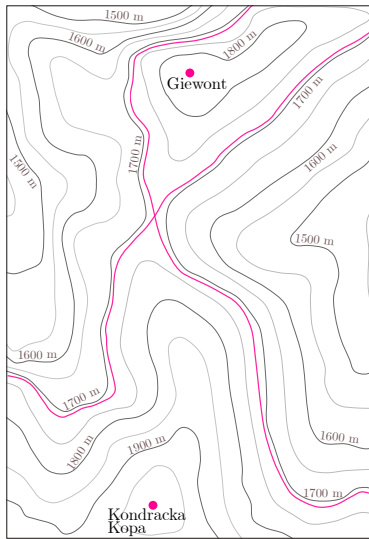
$$f_1 = f_0 \cdot \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy  $f_1 = 189,2 \text{ Hz}$ .

# Topologia na Antypodach

Michał MIŚKIEWICZ\*

\*doktorant, Wydział Matematyki,  
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet  
Warszawski



Typowe (regularne) poziomice zaznaczone są na szaro, a nietypowe (osobliwe) na kolorowo.

Mapa obok przedstawia rejon Giewontu i Kopy Kondrackiej. Typowa poziomicą jest albo pusta (np. nie ma żadnych punktów na wysokości 2500 m), albo składa się z jednej lub więcej składowych, z których każda jest albo zamkniętą pętlą (jak ta wokół Giewontu, 1800 m), albo krzywą o dwóch końcach na brzegu mapy (np. te powyżej dolin Małej Łąki i Kondratowej, 1600 m). Może się jednak zdarzyć, że poziomicą jest *osobliwa* – na wysokości 1894 m mamy izolowany punkt (szczyt Giewontu), a na 1725 m przecięcie w kształcie litery X (Kondracka Przełęcz). Są to jednak pojedyncze przypadki – jak szczyt, przełęcz albo dno kotła – a wszystkie pozostałe poziomice są *regularne*.

W matematyce pojęcie poziomicy pojawia się w podobnym, nieco ogólniejszym kontekście. Poziomicą funkcji  $f$  wyznaczoną przez wartość  $y$  nazywamy zbiór tych wszystkich argumentów  $x$ , dla których  $f(x) = y$ ; zbiór ten oznaczamy przez  $f^{-1}(y)$ . W poprzednim akapicie rozważaliśmy funkcję  $f$  przyporządkowującą punktowi  $x$  na mapie jego wysokość, ale to tylko jedna z możliwości. W ogólnym przypadku można wykazać (mówi o tym tzw. twierdzenie Sardy), że prawie każda poziomicą *gładkiej* funkcji  $f$  jest regularna, a więc – podobnie jak w przypadku kartograficznym – osobliwe poziomice są zjawiskiem nietypowym.

Nie będziemy tu definiować pojęcia gładkości; obrazowo chodzi o to, że wykres funkcji  $f$  jest gładki, w szczególności nie ma uskoków ani kantów.

W ramach dalszego śledzenia poziomicy pokażemy teraz, że na równiku Ziemi można znaleźć dwa punkty antypodyczne leżące na jednej poziomicy. Punkty *antypodyczne* to takie, że tunel wydrążony z jednego z nich na wylot przez środek Ziemi wypada w drugim; z dobrym przybliżeniem tak położone są Quito w Ekwadorze (2850 m n.p.m.) i Pekanbaru w Indonezji (12 m n.p.m.). Jeśli w każdym z tych dwóch miast mamy znajomego, możemy ich poprosić o udanie się w podróż na zachód w tym samym tempie i informowanie na bieżąco o aktualnej wysokości nad poziomem morza. O ile na początku znajomy z Ekwadoru jest ponad 2 km wyżej, to sytuacja będzie się szybko zmieniać, a po pewnym czasie nasi znajomi zamienią się miejscami i różnica w raportowanych wysokościach będzie taka sama, ale na minusie. Niewątpliwie gdzieś po drodze wysokości musiały się wyrównać – w ten sposób znaleźliśmy punkty antypodyczne na jednej poziomicy.

Powyższy przykład jest mało zaskakujący, bo bez niczyjej pomocy z łatwością znajdziemy żadaną parę punktów na pełnym morzu (wysokość 0 m n.p.m.). Przedstawione rozumowanie jest jednak bardziej uniwersalne i działa równie dobrze, gdyby zamienić wysokość na jakąś inną funkcję (średnia roczna temperatura, ciśnienie, suma opadów etc.), byle tylko była ciągła, bo musimy wykluczyć skoki. Możemy też pójść krok dalej i chcieć porównać dwa parametry naraz. Pokażemy więc, że na powierzchni Ziemi można znaleźć dwa punkty antypodyczne o równej średniej rocznej temperaturze i ciśnieniu. Wyniknie to z następującego ogólnego twierdzenia.

**Twierdzenie 1 (Karol Borsuk, Stanisław Ulam).** Niech

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

będzie sferą jednostkową, a  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dowolną funkcją ciągłą. Wówczas istnieje punkt  $\mathbf{x} \in S^2$ , dla którego  $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ .

Aby zastosować powyższe twierdzenie do naszej sytuacji, powierzchnię Ziemi modelujemy za pomocą sfery, a odpowiednią funkcję  $f$  definiujemy poprzez przyporządkowanie punktowi  $\mathbf{x}$  pary liczb wyrażających średnią roczną temperaturę i ciśnienie w  $\mathbf{x}$ . Z twierdzenia otrzymujemy wtedy dwa punkty  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  i  $-\mathbf{x} = (-x, -y, -z)$ , w których oba te parametry mają tę samą wartość. Pozostaje zauważyć, że odpowiada to dokładnie parze punktów antypodycznych na powierzchni Ziemi.

Czytelnik łatwo zauważy, że na samym równiku taki punkt mógłby nie istnieć, więc trzeba rozszerzyć obszar poszukiwań.

Przyjmując  $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(-\mathbf{x})$ , można łatwo wykazać równoważność Twierdzeń 1 i 2.

Dla wygody twierdzenie Borsuka–Ulama pokażemy w następującej wersji:

**Twierdzenie 2.** Załóżmy, że funkcja ciągła  $F: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest nieparzysta, to znaczy spełnia  $F(-\mathbf{x}) = -F(\mathbf{x})$  dla każdego  $\mathbf{x} \in S^2$ . Wówczas  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  dla pewnego  $\mathbf{x} \in S^2$  ( $\mathbf{0}$  oznacza punkt  $(0, 0)$ ).

Przykładem takiej funkcji jest  $G(x, y, z) = (x, y)$ , czyli rzut prostopadły na płaszczyznę  $xy$ . W tym konkretnym przypadku zauważamy, że równość  $G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  zachodzi dla dokładnie dwóch punktów, które na część biegunów Ziemi oznaczymy  $\mathbf{n}, \mathbf{s}$ . Inny przykład otrzymamy, jeśli weźmiemy dowolny obrót  $r: S^2 \rightarrow S^2$  przekształcający sferę na nią samą i określimy funkcję  $G_r(\mathbf{x}) = G(r(\mathbf{x}))$ ; wówczas miejsca zerowe to  $r^{-1}(\mathbf{n}), r^{-1}(\mathbf{s})$ . Ale przejdźmy już do ogólnego przypadku.

*Zarys dowodu Twierdzenia 2.* Ograniczymy się do wykazania tezy twierdzenia w przypadku, gdy  $F$  jest funkcją nie tylko ciągłą, ale też gładką. Przypuśćmy, że teza nie zachodzi, czyli  $F$  nie przyjmuje zera; będziemy dążyć do sprzeczności.

Między  $F$  a funkcją  $G$  z przykładu wyżej można znaleźć całą rodzinę funkcji

$$(\star) \quad H(\mathbf{x}, t) = tF(\mathbf{x}) + (1-t)G(\mathbf{x}) \quad \text{dla } \mathbf{x} \in S^2, t \in [0, 1].$$

Wstawienie  $t = 0$  w powyższym wzorze daje na powrót  $G$ , natomiast dla  $t = 1$  otrzymujemy  $F$ . Rodzinę tę możemy też rozumieć jako jedną gładką funkcję  $H: S^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  określoną na (pustym w środku) cylindrze  $S^2 \times [0, 1]$ , pokrywającą się z  $G$  i  $F$  odpowiednio na dolnym ( $t = 0$ ) i górnym ( $t = 1$ ) denku.

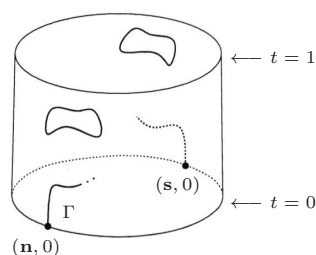
Założymy dodatkowo, że poziomica  $H^{-1}(\mathbf{0})$  jest regularna. Wówczas składa się ona ze skończonego wielu krzywych, zamkniętych lub mających końce na którymś z denek. Skoro  $F$  nie przyjmuje zera, to  $H^{-1}(\mathbf{0})$  nie może dotykać górnego denka. Wiemy natomiast, że ma dokładnie dwa punkty wspólne z dolnym denkiem ( $(\mathbf{n}, 0)$  oraz  $(\mathbf{s}, 0)$ ), gdyż na tym denku  $H$  pokrywa się z  $G$ . Jak mówi przysłowie, *każdy kij ma dwa końce*, a więc w skład poziomicy  $H^{-1}(\mathbf{0})$  może wchodzić jedynie jedna niezamknięta krzywa  $\Gamma \subseteq S^2 \times [0, 1]$ , o końcach w  $(\mathbf{n}, 0)$  i  $(\mathbf{s}, 0)$ .

Przypomnijmy teraz, że funkcje  $F$  i  $G$  są nieparzyste, a więc zgodnie ze wzorem  $(\star)$  nieparzysta jest także każda z rodziny funkcji je łączących, to znaczy  $H(-\mathbf{x}, t) = -H(\mathbf{x}, t)$  dla dowolnych  $\mathbf{x}, t$ . W konsekwencji poziomica  $H^{-1}(\mathbf{0})$  ma następującą własność symetrii: jeśli jakiś punkt  $(\mathbf{x}, t)$  do niej należy, to punkt  $(-\mathbf{x}, t)$  również. Tę samą własność ma więc też krzywa  $\Gamma$ . Opisaną sytuację trudno jest jednak wiernie oddać na rysunku, z bardzo prostego powodu – jest niemożliwa!

Żeby się o tym przekonać, ponownie poprośmy o pomoc naszych sprawdzonych znajomych. Niech obaj podróżują w tym samym tempie wzdłuż krzywej  $\Gamma$ , przy czym jeden niech zacznie z punktu  $(\mathbf{n}, 0)$ , a drugi z  $(\mathbf{s}, 0)$ . Ze względu na symetrię  $\Gamma$  w każdym momencie nasi znajomi będą w punktach postaci  $(\mathbf{x}, t)$  i  $(-\mathbf{x}, t)$ , co oznacza, że nie mogą się spotkać. Z drugiej strony, po pewnym czasie każdy z nich dojdzie do przeciwnego końca  $\Gamma$ , więc po drodze gdzieś musieli się minąć. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że funkcja  $F$  musi przyjmować zero.  $\square$

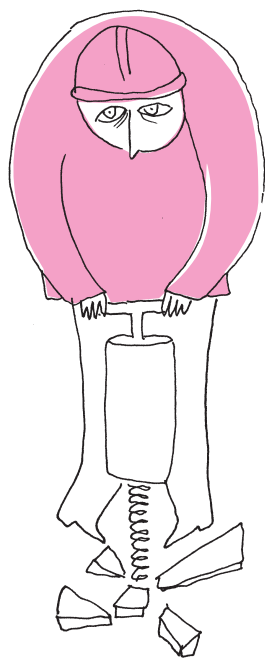
Wróćmy na chwilę do przyjętego *ad hoc* założenia o regularności  $H^{-1}(\mathbf{0})$  – jest ono spełnione w typowym przypadku, ale nie zawsze. Czytelnik znający twierdzenie Sard’a łatwo uzupełni tę lukę, zamieniając w dowodzie funkcję  $G$  na  $G_r$  i odpowiednio  $H$  na  $H_r$  zgodnie ze wzorem  $(\star)$ ; można bowiem sprawdzić, że dla prawie każdego obrotu  $r$  poziomica  $H_r^{-1}(\mathbf{0})$  jest regularna, co pozwala przeprowadzić resztę rozumowania bez zmian. Przyjęte na początku założenie o gładkości  $F$  też nietrudno wyrugować.

Czytelnik obdarzony Szczególnie Czujnym Okiem może zauważyć, że przedstawione rozumowanie równie dobrze stosuje się do funkcji ciągłych  $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  z  $n$ -wymiarowej sfery w  $n$ -wymiarową przestrzeń dla dowolnego  $n = 1, 2, 3, \dots$ . W szczególności dla  $n = 1$  otrzymujemy następujące twierdzenie: dla każdej ciągłej funkcji  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , określonej na okręgu, znajdziemy punkt  $\mathbf{x}$ , w którym  $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ . Zatoczyliśmy w ten sposób pełne koło i rozwiązaliśmy w inny sposób początkowy problem z punktami antypodycznymi na równiku.



Tak może wyglądać poziomica  $H^{-1}(\mathbf{0})$ . Na potrzeby rysunku denka cylindra są okręgami, a nie sferami.

АНТЫ ПОД У



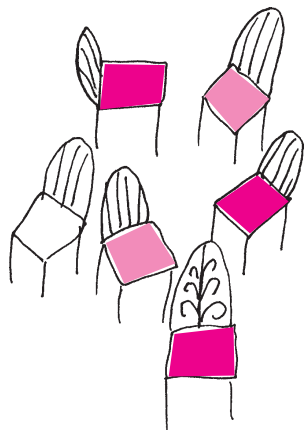
# Ile jest podprzestrzeni?

Zofia MIECHOWICZ\*, Tomasz BARTNICKI\*

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

Niestety, w „matematyce szkolnej” równość  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  często podaje się jako definicję symbolu Newtona, a dopiero później przedstawia jej interpretację kombinatoryczną.

Dla każdego z działań  $\oplus$  i  $\odot$  ich wynik nie zależy od kolejności argumentów (symetria) oraz kolejności ich wykonywania (łączność). Dodanie reszty 0 oraz pomnożenie przez resztę 1 nic nie zmienia, a dla każdej reszty niezerowej istnieje reszta do niej przeciwna i reszta do niej odwrotna. Ponadto, resztowe mnożenie jest rozdzielne względem resztowego dodawania. Istnieją ciała, których liczba elementów jest potęgą liczby pierwszej, ale ich konstrukcja jest nieco bardziej skomplikowana. Warto jednak zaznaczyć, że dla zadanej liczby  $q = p^k$  istnieje dokładnie jedno ciało  $q$ -elementowe, z dokładnością do izomorfizmu, czyli „nazewnictwa” elementów. Podobnie jest dla  $n$ -wymiarowych przestrzeni liniowych nad zadaniem ciałem skończonym. Zawsze mają one  $q^n = p^{kn}$  wektorów i są izomorficzne.



*Jaka jest liczba różnych  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego?*

Jest to jedno z pierwszych pytań, które zadajemy sobie, zaczynając zajmować się elementarną kombinatoryką. Wkrótce dowiadujemy się, że liczbę tę oznacza się przez  $\binom{n}{k}$  (symbol Newtona), a następnie poznajemy różne metody jej wyznaczania.

Wyjściowe pytanie o liczbę podzbiorów przeniesiemy na nieco wyższy poziom abstrakcji, zmieniając w nim kilka pojęć. Słowo *zbiór* zamienimy na *przestrzeń liniowa nad ciałem skończonym*, *podzbiór* na *podprzestrzeń*. Zamiast *mocy zbioru* (w tym przypadku liczby elementów) będziemy rozważać *wymiar przestrzeni*. Możemy teraz zadać analogiczne pytanie w świecie przestrzeni liniowych.

*Jaka jest liczba różnych  $k$ -wymiarowych podprzestrzeni liniowych przestrzeni  $n$ -wymiarowej nad  $q$ -elementowym ciałem?* Zanim poznamy odpowiedź na to pytanie, przybliżymy pojęcia, których ono dotyczy.

Rozważmy zbiór reszt z dzielenia przez liczbę pierwszą  $p$  z dodawaniem i mnożeniem modulo  $p$ . Dla przykładu, przy  $p = 11$  mamy  $7 \oplus 8 = 4$  oraz  $4 \odot 5 = 9$ . Działania te mają, przedstawione na marginesie, naturalne własności, dzięki czemu zaprezentowaną strukturę możemy nazywać *ciałem* (które, rzecz jasna, jest *skończone*). Przedstawiony sposób nie jest jedynym, w jaki można otrzymać skończone ciało – na potrzeby naszych rozważań istotny jest jednak tylko fakt, że takie struktury istnieją.

Niech  $\mathbb{F}$  będzie ciałem skończonym. Rozważmy zbiór wszystkich  $n$ -elementowych ciągów liczb z  $\mathbb{F}$ , czyli  $\mathbb{F}^n$ . Takie ciągi można w naturalny sposób dodawać i mnożyć przez liczby z  $\mathbb{F}$ , na przykład (wracając do opisanego wcześniej ciała reszt z dzielenia przez 11 oraz biorąc  $n = 2$ ) mamy  $(7, 3) + (8, 10) = (4, 2)$  oraz  $5 \cdot (7, 3) = (2, 4)$ . Działania te są „porządne”, to znaczy spełniają prawa łączności, przemienności i rozdzielności. Sprawia to, że  $\mathbb{F}^n$  możemy traktować jako *przestrzeń liniową* nad ciałem  $\mathbb{F}$ ; jej elementy będziemy nazywać *wektorami*.

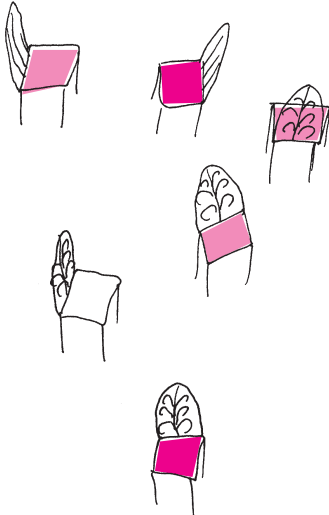
Niektóre podzbiory  $\mathbb{F}^n$  są bardzo szczególne i nie można z nich „uciec”, dodając dowolne dwa ich elementy oraz mnożąc je przez liczbę z  $\mathbb{F}$ . Takie zbiory nazywamy *podprzestrzeniami* wyjściowej przestrzeni – nazwa jest bardzo naturalna, gdyż podprzestrzenie same w sobie mogą być traktowane jako przestrzenie liniowe nad rozważanym ciałem. Przykładem jest zbiór ciągów stałych. Nieco ogólniej, wystarczy wziąć dowolny wektor  $v$  z naszej przestrzeni i rozpatrzyć zbiór jego wielokrotności, tzn. wektorów postaci  $a \cdot v$  dla  $a \in \mathbb{F}$ . Podprzestrzenie tej postaci nazywamy *jednowymiarowymi*. Jak możemy zwiększyć ich wymiar? Wystarczy znaleźć wektor  $w$  spoza tej podprzestrzeni i rozważyć zbiór wektorów postaci  $a \cdot v + b \cdot w$  (są to *kombinacje liniowe* wektorów  $v$  i  $w$ ) – to też będzie podprzestrzeń, już dwuwymiarowa. Ogólnie, podprzestrzeń  $k$ -wymiarowa składa się z kombinacji liniowych układu  $k$  wektorów o tej własności, że żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych (o takim układzie mówimy, że jest *liniowo niezależny*).

Możemy już przejść do wyjściowego pytania. Przestrzeń  $\mathbb{F}^n$  składa się z  $q^n$  wektorów (gdzie  $q$  to liczba elementów  $\mathbb{F}$ ). Chcemy wyznaczyć liczbę jej różnych  $k$ -wymiarowych podprzestrzeni liniowych. Będziemy ją oznaczać przez  $\binom{n}{k}_q$ .

Do opisanego podprzestrzeni  $k$ -wymiarowej wystarczy wskazać  $k$  liniowo niezależnych wektorów  $v_1, \dots, v_k$  z tej przestrzeni. Ponieważ poruszamy się po przestrzeni nad ciałem skończonym, to wyznaczenie liczby takich  $k$ -tek sprowadza się do prostego przeliczenia. Wybierzmy najpierw wektor  $v_1$ . Jedyne, o co musimy się zatroszczyć, to żeby był on różny od wektora zerowego. Ze wszystkich  $q^n$  wektorów, które są dostępne, musimy wykluczyć tylko ten jeden. Wektor  $v_1$  możemy zatem wybrać na  $q^n - 1$  sposobów.

Na wektor  $v_2$  mamy już odrobinę mniej kandydatów. Nie może on należeć do podprzestrzeni rozpinanej przez wektor  $v_1$ . Elementów tej podprzestrzeni jest





ty, na ile sposobów możemy pomnożyć ten wektor przez element ciała  $F$  (tych elementów jest  $q$ ). Wektor  $v_2$  wybieramy zatem na  $q^n - q$  sposobów.

Wektor  $v_3$  nie może należeć do podprzestrzeni rozpiętej przez oba wcześniej wybrane. Wykluczamy więc dokładnie  $q^2$  wektorów.

Jeżeli wybraliśmy już  $l$  wektorów, to kolejny nie może być kombinacją liniową poprzednich, w związku z czym mamy już tylko  $q^n - q^l$  możliwości. Różnych  $k$ -tek wektorów niezależnych mamy więc

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{k-1}).$$

Oczywiście, niektóre układy wektorów generują te same podprzestrzenie, nas interesują te generujące różne. Każdą podprzestrzeń wymiaru  $k$  możemy uzyskać na tyle sposobów, ile różnych  $k$ -tek wektorów niezależnych w niej znajdziemy. Wiemy dokładnie, ile jest takich  $k$ -tek (przed chwilą właśnie to policzyliśmy!):

$$(q^k - 1)(q^k - q)(q^k - q^2) \cdots (q^k - q^{k-1}).$$

Zatem ostatecznie szukana przez nas liczba wyraża się następująco:

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdots (q - 1)}.$$

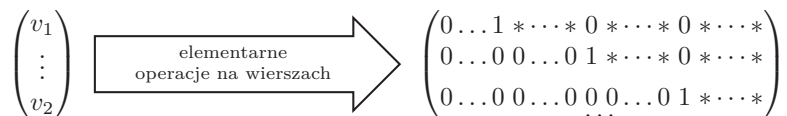
Wzór ten nie jest nowy, a dobór oznaczenia nie jest przypadkowy. Formuła ta nazywana jest *współczynnikiem dwumianowym Gaussa*, a pierwszy raz została użyta przez tego słynnego matematyka do znalezienia wzoru na tak zwane sumy Gaussa. Ale czy ma ona, oprócz nazwy, jakiś bliższy związek ze współczynnikiem dwumianowym Newtona? Przyjrzyjmy się bliżej. Przypomnijmy, że zachodzi algebraiczna równość  $q^s - 1 = (q - 1) \sum_{i=0}^{s-1} q^i$ , w związku z czym powyższy ułamek można „skrócić” przez  $(q - 1)^k$ , otrzymując

$$(*) \quad \binom{n}{k}_q = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} q^i \cdot \sum_{i=0}^{n-2} q^i \cdots \sum_{i=0}^{n-k} q^i}{\sum_{i=0}^{k-1} q^i \cdot \sum_{i=0}^{k-2} q^i \cdots \sum_{i=0}^0 q^i}$$

Jeżeli zatem potraktujemy  $\binom{n}{k}_q$  jak funkcję zmiennej rzeczywistej  $q$ , dostaniemy  $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$ . Widzimy więc wyraźnie, że coś jest na rzeczy. Tylko, że po analitycznym podejściu do sprawy trudno nam powiedzieć coś oprócz tego, iż zależność (której zresztą się spodziewaliśmy) istnieje. A gdybyśmy chcieli poczuć jej istotę? Zrozumieć charakter? W tym celu musimy się udać po pomoc do Donalda Knutha, który podszedł do sprawy z zupełnie innej strony.

Donald Ervin Knuth (ur. 10 stycznia 1938 r.) – amerykański matematyk i informatyk. Jeden z pionierów informatyki, jest znany m.in. z wielotomowego dzieła *Sztuka programowania*. Jest też autorem systemu składania drukarskiego  $\text{T}_E\text{X}$ .

Spróbujmy jeszcze raz zliczyć podprzestrzenie wymiaru  $k$ , tym razem innym sposobem. Po pierwsze, umieścimy wektory  $v_1, \dots, v_k$  w macierzy, jako jej wiersze. Taką macierz możemy, poprzez elementarne operacje na wierszach, sprowadzić do tak zwanej zredukowanej postaci schodkowej

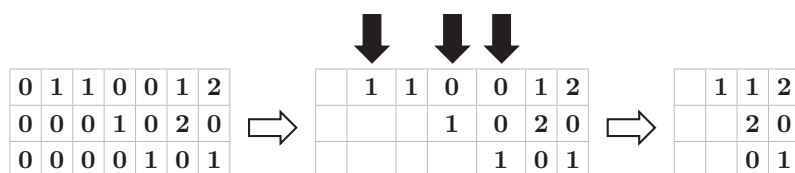


Operacje elementarne to: dodawanie wierszy, mnożenie wiersza przez niezerowy skalar oraz zamiana kolejności wierszy.

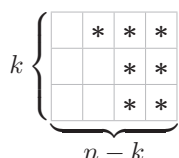
Zredukowana postać schodkowa ma następujące cechy:

- pierwszy niezerowy element od lewej w każdym wierszu to 1 (tę jedynekę będziemy nazywać wiodącą),
- wszystkie pozostałe elementy w kolumnie, w której jest jedynka wiodąca, to zera,
- w każdym wierszu jedynka wiodąca pojawia się na prawo od jedynki wiodącej w poprzednim wierszu.

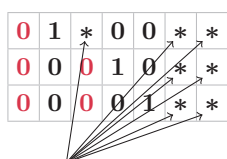
Można udowodnić, że jeżeli wiersze dwóch takich macierzy generują tę samą przestrzeń, to macierze te są równe. Zliczenie wszystkich interesujących nas podprzestrzeni sprowadza się więc do policzenia, ile jest różnych zredukowanych macierzy schodkowych. Żeby je policzyć, spróbujmy usunąć z takiej macierzy wszystko, co „zbędne”. Z pewnością zbędne są wszystkie zera, na lewo od jedynek wiodących. Możemy je więc bezkarnie usunąć. Kolumny zawierające wiodące jedynki również nie będą miały dla nas znaczenia, więc je też usuńmy



Otrzymaliśmy macierz zawierającą puste pola oraz pewne liczby. Tak naprawdę nie interesuje nas, jakie to są liczby, więc możemy każdą z nich zastąpić gwiazdką.



Czyli mamy diagram o wymiarach  $k$  na  $n - k$ . Oznaczmy pojedynczy diagram przez  $\lambda$ , a liczbę gwiazdek w nim przez  $|\lambda|$ . Zauważmy, że z diagramu  $\lambda$  możemy „odzyskać” postać macierzy, z której powstał. Kolumny z jedynkami wiodącymi wstawiamy w sposób jednoznaczny, podobnie jak zera po ich lewej stronie. Natomiast gwiazdki możemy zastąpić elementami ciała  $F$  na wszystkie możliwe sposoby, których jest dokładnie  $q^{|\lambda|}$



dowolnie

I tak oto dochodzimy do wniosku, że różnych zredukowanych macierzy schodkowych, a więc również podprzestrzeni  $k$ -wymiarowych przestrzeni  $n$ -wymiarowej jest:

$$(**) \quad \binom{n}{k}_q = \sum_{\lambda \subset k \times (n-k)} q^{|\lambda|},$$

gdzie zapis  $\lambda \subset k \times (n - k)$  oznacza, że diagram  $\lambda$  „mieści” się w macierzy o  $k$  wierszach i  $n - k$  kolumnach. Z powyższej formuły widać ponadto, że  $\binom{n}{k}_q$  wyraża się zawsze jako wielomian stopnia  $(n - k)k$  zmiennej  $q$  o całkowitych dodatnich współczynnikach. To nie było od razu widoczne z formuły (\*), gdyż na pozór

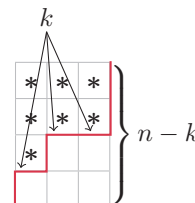
nie wydaje się, aby występujący tam ułamek mógł zostać skrócony. Warto również podkreślić, że równość pomiędzy prawymi stronami równań (\*) i (\*\*) zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej  $q$ ; na mocy naszych rozważań jest bowiem prawdziwa dla dowolnego  $q$  będącego liczebnością pewnego ciała skończonego (w szczególności dla liczb pierwszych), a jeśli funkcje wymierne (tzn. ilorazy wielomianów) przyjmują te same wartości dla nieskończenie wielu argumentów, to są równe wszędzie tam, gdzie są określone.

Pozostało nam jeszcze policzyć, ile jest różnych diagramów o  $|\lambda|$  gwiazdkach. Jeżeli przyjrzymy się dokładnie pojedynczemu diagramowi i obrócimy go o  $90^\circ$ , to zobaczymy, że w istocie jest on tym samym, co tak zwany *diagram Ferrersa* (znany matematykom od dawna i dokładnie zbadany).

Diagramy Ferrersa reprezentują podziały liczby naturalnej na skończoną liczbę dodatnich składników, przy czym ich kolejność jest nieistotna. Zliczanie takich diagramów jest równoważne zliczaniu różnych podziałów.

Łatwo policzyć, ile jest takich diagramów. Możemy każdy z nich utożsamiać z linią łamaną stanowiącą jego prawostronny obrys (na rysunku diagram Ferrersa dla  $n = 7$  i  $k = 3$ ).

Żeby otrzymać taką linię, złożoną z  $n$  kresek, musimy wybrać dokładnie  $k$  miejsc, na których postawimy kreski poziome, a możemy to zrobić na  $\binom{n}{k}$  sposobów. Dzięki temu, że policzyliśmy, ile jest różnych diagramów o mocy  $|\lambda|$ , możemy ponownie stwierdzić słuszność interesującej nas zależności; wystarczy zauważyć, że dla  $q = 1$  prawa strona (\*\*) jest liczbą wszystkich możliwych diagramów Ferrersa, czyli wynosi  $\binom{n}{k}$ .



## Zagnieżdżone pierwiastki

Jarosław GÓRNICKI\*

\* Wydział Matematyki i Fizyki  
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

W 1911 roku Srinivasa Ramanujan (1887–1920) zaproponował czytelnikom *Journal of the Indian Mathematical Society* (JIMS 3 (1911), Question 289, p. 90) wyznaczenie wartości:

$$(a) \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\dots}}}}, \quad (b) \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + \dots}}}.$$

Ponieważ pytania te w 1911 r. nie doczekały się odpowiedzi, więc Ramanujan podał je w kolejnym tomie JIMS 4 (1912), p. 226. Zadania Ramanujana można rozwiązać prosto i elegancko.

(a) Zauważmy, że

$$n(n + 2) = n\sqrt{1 + (n + 1)(n + 3)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Niech  $f(n) = n(n + 2)$ , wtedy

$$f(n) = n\sqrt{1 + f(n + 1)} = n\sqrt{1 + (n + 1)f(n + 2)} = \dots,$$

zatem

$$n(n + 2) = n\sqrt{1 + (n + 1)\sqrt{1 + (n + 2)\sqrt{1 + \dots}}}.$$

O innych wzorach Ramanujana pisaliśmy w  $\Delta_{18}^3$ .

Przyjmując  $n = 1$ , mamy odpowiedź,

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}} = 3. \blacksquare$$

(b) Działa podobny *trick*:  $n(n+3) = n\sqrt{(n+5) + (n+1)(n+4)}$ . Niech  $f(n) = n(n+3)$ , wówczas

$$\begin{aligned} f(n) &= n\sqrt{(n+5) + f(n+1)} = \\ &= n\sqrt{(n+5) + (n+1)\sqrt{(n+6) + f(n+2)}} = \dots, \end{aligned}$$

więc

$$n(n+3) = n\sqrt{(n+5) + (n+1)\sqrt{(n+6) + (n+2)\sqrt{(n+7) + \dots}}$$

Przyjmując  $n = 1$ , otrzymujemy

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + 4\sqrt{9 + \dots}}} = 4. \blacksquare$$

Przypadek (a) stał się treścią zadania 578 w „Klubie 44” (*Delta* 3/2009), a jego „siłowe” rozwiązanie jest w *Delcie* 7/2009, patrz też *Delta* 2/2010. Wcześniej, w 1966 r., pojawił się on jako zadanie podczas *The William Lowell Putnam Competition*.

Oczywiście Ramanujan wiedział więcej, np. odkrył wzór

$$(*) \quad x + n + a = \sqrt{ax + (n+a)^2 + x\sqrt{a(x+n) + (n+a)^2 + (x+n)\sqrt{\dots}}},$$

gdzie  $x, n, a$  są liczbami nieujemnymi.

*Dowód.* Ponieważ

$$x + n + a = \sqrt{ax + (n+a)^2 + x(x+2n+a)},$$

więc przyjmując  $f(x) = x + n + a$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{ax + (n+a)^2 + x \cdot f(x+n)} = \\ &= \sqrt{ax + (n+a)^2 + x\sqrt{a(x+n) + (n+a)^2 + (x+n) \cdot f(x+2n)}} = \dots \end{aligned}$$

i w konsekwencji równość (\*). ■

Przyjmując w tożsamości (\*):

- (i)  $x = 2, n = 1, a = 0$ , otrzymamy rozwiązanie przypadku (a),
- (ii)  $x = 2, n = 1, a = 1$ , otrzymamy rozwiązanie przypadku (b),
- (iii)  $x = y \geq 0, n = 0, a = 1$ , mamy

$$\sqrt{1 + y + y\sqrt{1 + y + y\sqrt{1 + y + \dots}}} = 1 + y,$$

w szczególności dla  $y = 1$ ,

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2.$$

- (iv)  $x = y \geq 0, n = a = 0$ , mamy

$$\sqrt{y\sqrt{y\sqrt{y\sqrt{y\sqrt{\dots}}}}} = y,$$

w szczególności dla  $y = 2$ ,

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots = 2.$$

- (v)  $x = y \geq 0, n = 1, a = 0$ , mamy

$$\sqrt{1 + y\sqrt{1 + (1+y)\sqrt{1 + (2+y)\sqrt{1 + \dots}}} = 1 + y,$$

w szczególności dla  $y = 1$ ,

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots}}} = 2,$$

- (vi)  $x = 2, n = 0, a = \sqrt{1+y} - 1$ , mamy

$$\sqrt{y + 2\sqrt{y + 2\sqrt{y + 2\sqrt{y + \dots}}} = 1 + \sqrt{1+y}, \text{ gdzie } y \geq 0,$$

- (vii)  $x = 1, n = 0, a = \frac{\sqrt{1+4y} - 1}{2}$ , mamy

$$\sqrt{y + \sqrt{y + \sqrt{y + \sqrt{y + \dots}}} = \frac{\sqrt{1+4y} + 1}{2}, \text{ dla } y > 0.$$

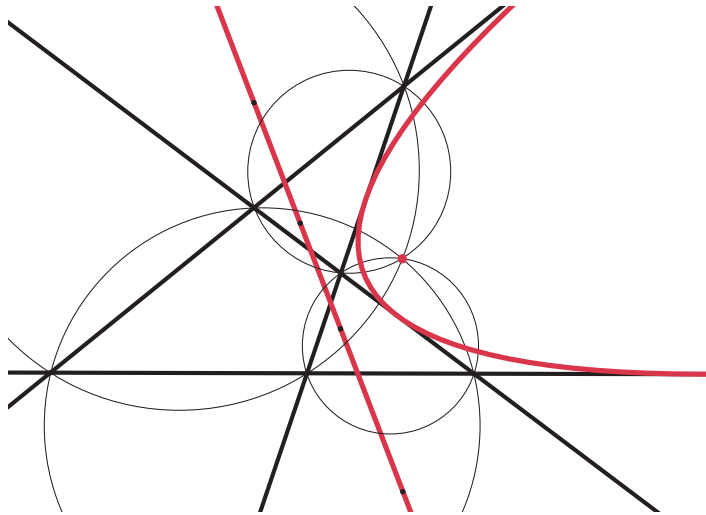
Takich wzorów-schematów Ramanujan podał bardzo, bardzo dużo. Może niektóre z nich warto poznać i zrozumieć, choć Ramanujan nie widział potrzeby ich uzasadniania, po prostu wiedział, że są prawdziwe!



# O ortocentrach i parabolach, a zwłaszcza o twierdzeniu odwrotnym Steinera

\*student, Uniwersytet Jagielloński

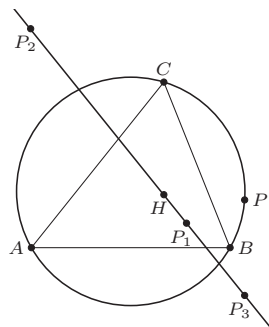
Piotr PIKUL\*



Rys. 1

W *Delcie* 11/2017 został przedstawiony (bez dowodu) fakt, że dla czterech dowolnych prostych (tak dowolnych, że są parami nierównoległe i żadne trzy nie mają punktu wspólnego) ortocentra wyznaczonych przez nie czterech trójkątów leżą na jednej prostej, a okręgi opisane na tych trójkątach mają punkt wspólny. Ponadto parabola, której kierownicą jest prosta zawierająca ortocentra, a ogniskiem punkt wspólny okręgów opisanych jest styczna do czterech wyjściowych prostych (rys. 1).

Z przyczyn dla mnie samego niejasnych ta ciekawostka spowodowała, że – chyba pierwszy raz od matury – pochyliłem się nad planimetrią. W dalszej części można się zapoznać z dowodem, którym zaowocowały moje rozważania. Skorzystamy w nim z następujących twierdzeń, które same w sobie są całkiem interesujące:



Rys. 2. Punkty  $P_1, P_2, P_3$  to odbicia punktu  $P$  względem prostych  $AB, BC$  i  $CA$ . Punkt  $H$  to ortocentrum trójkąta  $ABC$ .

**Twierdzenie 1 (Steiner).** *Jeśli punkt  $P$  leży na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ , to odbicia symetryczne punktu  $P$  względem prostych  $AB, BC$  i  $AC$  leżą na jednej prostej, przechodzącej przez ortocentrum trójkąta  $ABC$  (rys. 2). Prosta tę nazywamy prostą Steinera punktu  $P$  w trójkącie  $ABC$ .*

Dowód tego twierdzenia został omówiony na łamach *Delty* w listopadzie 2016 roku. Na potrzeby dalszych rozważań bardziej będzie nam potrzebne **twierdzenie odwrotne**.

**Twierdzenie 2.** *Dany jest trójkąt  $ABC$  i punkt  $P$ . Jeśli obrazy punktu  $P$  w symetriach względem boków trójkąta  $ABC$  leżą na jednej prostej, wtedy punkt  $P$  leży na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ . Ponadto prosta zawierająca odbicia symetryczne punktu  $P$ , zawiera ortocentrum trójkąta  $ABC$ .*

Kolejną wariację na temat twierdzenia Steinera pozwolę sobie nazwać **twierdzeniem dualnym**, ponieważ zamienia ono niejako rolę prostych i punktów.

**Twierdzenie 3.** *Dany jest trójkąt  $ABC$  i prosta  $p$  przechodząca przez ortocentrum trójkąta  $ABC$ . Wtedy odbicia  $p$  względem boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, leżącym na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$ .*

Brakuje tutaj czwartego twierdzenia – „odwrotnego do dualnego”, które nie będzie nam potrzebne. Jego sformułowanie (i udowodnienie) pozostawiamy Czytelnikowi.

Zanim przejdziemy do dowodów powyższych twierdzeń, przyjrzyjmy się, jak z ich pomocą można udowodnić wyjściowy *problem czterech prostych*.

Niech  $a, b, c, d$  będą czterema danymi prostymi. Niech  $D$  oznacza ortocentrum trójkąta  $abc$ , a  $C$  oznacza ortocentrum trójkąta  $abd$ . Na mocy Twierdzenia 3 odbicia prostej  $CD$  względem prostych  $a, b$  i  $c$  przecinają się w pewnym punkcie okręgu opisanego na trójkącie  $abc$ , a jej odbicia względem prostych  $a, b$  i  $d$  również mają wspólny punkt, leżący na okręgu opisanym na trójkącie  $abd$ . Musi to być ten sam punkt. Nazwijmy go  $P$ .

Odbicia punktu  $P$  względem prostych  $a, b, c$  i  $d$  leżą na prostej  $CD$ , więc (na mocy Twierdzenia 2) punkt ten leży na okręgach opisanych na każdym z trójkątów  $abc, bcd, abd$  i  $acd$ , a prosta  $CD$  zawiera ortocentra wszystkich

tych trójkątów. Związek współliniowości ortocentrów ze wspólnym punktem okręgów opisanych, który został wspomniany w wyjściowym artykule jako podejrzenie/wskazówka, jest wyraźnie widoczny.

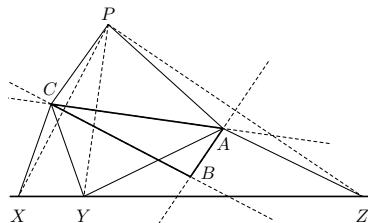
Teraz należy jeszcze wykazać, że parabola wyznaczona przez ognisko  $P$  i kierownicę  $CD$  jest styczna do prostych  $a, b, c$  i  $d$ . Skorzystamy tu z następującego faktu, którego uzasadnienie można znaleźć w *Deltoidzie* 6/2018:

**Lemat 1** (charakteryzacja stycznych do paraboli). *Prosta jest styczna do paraboli o ognisku  $F$  i kierownicy  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetralną pewnego odcinka łączącego  $F$  z punktem na  $f$ .*

Ponieważ wiemy, że odbicia symetryczne  $P$  względem prostych  $a, b, c$  i  $d$  leżą na  $CD$ , natychmiast otrzymujemy, że  $a, b, c$  i  $d$  są styczne do interesującej nas paraboli. Kończy to dowód przytoczonego na wstępie faktu.  $\square$

Przedstawione rozumowanie pokazuje w dodatku, że punkt okręgu opisanego i jego prosta Steiner'a wyznaczają parabolę styczną do prostych zawierających boki trójkąta. Można się zastanowić, czy jest to jednoznaczna charakterystyka wszystkich takich parabol. Tutaj nie będziemy tego rozważać.

Teraz pozostaje już tylko udowodnić twierdzenia 2 i 3. Zaczniemy od dowodu *twierdzenia odwrotnego*.



Zaprezentowane rozumowanie może wydawać się zależne od przedstawionej na rysunku konfiguracji punktów. Wykorzystywane równości są jednak prawdziwe nawet jeśli uznamy, że dotyczą kątów skierowanych, co uwalnia nas od potrzeby rozważania przypadków.

Niech  $X, Y$  i  $Z$  będą odbiciami punktu  $P$  względem prostych, kolejno  $BC, AC$  i  $AB$ . Jeśli  $X, Y$  i  $Z$  nie są parami różne, punkt  $P$  musi pokrywać się z jednym z wierzchołków trójkąta (więc, oczywiście, leży na okręgu opisanym). Podobnie jest w przypadku, gdy  $P$  leży na prostej  $XYZ$ . Powinno się to stać jasne, jeśli zauważymy, że trójkąt  $ABC$  jest wyznaczony przez symetralne odcinków  $PX, PY$  i  $PZ$ . Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkt  $Y$  leży pomiędzy  $X$  i  $Z$ . Dowód sprowadza się do przeliczeń na kątach. Na początku zauważamy następujące równości:

$$\begin{aligned} \sphericalangle CXY &= \sphericalangle XYC, & \sphericalangle AYZ &= \sphericalangle YZA, & \sphericalangle APC &= \sphericalangle CYA, \\ \sphericalangle PCB &= \sphericalangle BCX, & \sphericalangle BAP &= \sphericalangle ZAB, \\ \sphericalangle XYC &+ \sphericalangle CYA &+ \sphericalangle AYZ &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Analizując trójkąt wyznaczony przez proste  $AB, BC$  i  $XZ$ , otrzymujemy:

$$180^\circ = \sphericalangle CBA + (180^\circ - \sphericalangle BCX - \sphericalangle CXY) + (180^\circ - \sphericalangle YZA - \sphericalangle ZAB).$$

Podstawiając poprzednie równości, otrzymujemy:

$$180^\circ = \sphericalangle CBA + 180^\circ - \sphericalangle PCB + \sphericalangle APC - \sphericalangle BAP,$$

zatem  $\sphericalangle PCB + \sphericalangle BAP = \sphericalangle CBA + \sphericalangle APC$ . Ostatnia równość oznacza, że czworokąt  $BAPC$  jest wpisany w okrąg, czyli to, co należało wykazać. Dzięki *podstawowemu* twierdzeniu Steiner'a prosta zawierająca odbicia symetryczne pewnego punktu z okręgu opisanego względem boków trójkąta przechodzi przez ortocentrum.  $\square$

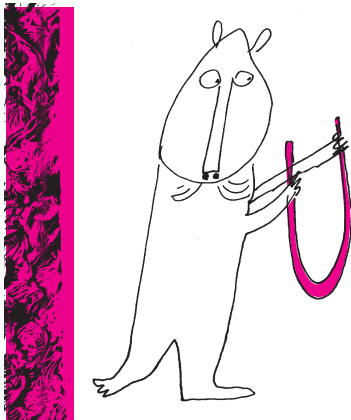
Na zakończenie udowodnimy *twierdzenie dualne*.

Odbicia symetryczne prostej przechodzącej przez ortocentrum mają punkty wspólne z okręgiem opisanym (np. odbicia ortocentrum). Zauważmy, że jeśli obraz jest styczną, musi być równoległy do boku trójkąta, a tym samym do wyjściowej prostej. Ta zaś może być równoległa do co najwyżej jednego boku trójkąta, więc przynajmniej dwa jej odbicia nie są stycznymi.

Wiemy zatem, że pewien obraz wyjściowej prostej ma drugi punkt wspólny z okręgiem. Oznaczmy ten punkt przez  $P$ . Prosta Steiner'a punktu  $P$  musi być wyjściową prostą, ponieważ ma z nią co najmniej dwa punkty wspólne (ortocentrum i pewne odbicie  $P$ ).

To kończy dowód, ponieważ każdy punkt okręgu opisanego leży na odbiciu symetrycznym swojej prostej Steiner'a względem dowolnego boku trójkąta.  $\square$

Miło jest czasem powrócić do geometrii.



Przytaczamy tu artykuł sprzed ponad 30 lat ( $\Delta_{87}^6$ ), by pokazać m.in., jak powstawały w ramach tzw. badań podstawowych idee uwolnienia komunikacji drogowej od ropy naftowej, które dziś zaczynają zbliżać się do faktycznego wdrożenia.

Redakcja

Związki stechiometryczne to takie, które podlegają prawom: stałości składu (prawo Daltona) i stałych stosunków (prawo Prousta). W artykule jest także mowa o związkach niestechiometrycznych, tj. niepodlegających tym prawom, takich, których skład może się zmieniać. Prosty przykładem takiego związku jest występujący w przyrodzie minerał – tlenek tytanu  $TiO_{1,7-1,8}$  (gdymy obowiązywało prawo stosunków stałych, jego skład należałoby wyrazić wzorem  $TiO_2$ ).



Z przyszłościowych nośników energii wodór wydaje się być jednym z najbardziej obiecujących. Synteza wody z wodoru i tlenu jest reakcją wysoce energetyczną, wykorzystywaną zresztą współcześnie do napędu niektórych rakiet. Inną zaletą wodoru jako paliwa jest nieszkodliwość produktu spalania (wody) dla otoczenia oraz łatwa dostępność naturalnych zasobów wody jako źródła jego otrzymywania. Powstaje przy tym problem magazynowania i transportu wodoru.

## Wodorki metali w technologii wodorowej

Kontakt wielu metali z gazowym wodorem prowadzi do powstania połączeń zwanych wodorkami metali. Reakcję taką możemy zapisać schematycznie wzorem



gdzie Me symbolizuje atom reagującego metalu,  $H_2$  cząsteczkę gazowego wodoru,  $x$  i  $y$  oznaczają współczynniki stechiometryczne, czyli ilości cząsteczek biorących udział w elementarnej reakcji. Strzałki oznaczają możliwość prowadzenia powyższej reakcji w obu kierunkach. Inaczej mówiąc – gazowy wodór możemy związać chemicznie z metalem, ale i odwrotnie – z wodorku metalu możemy otrzymać gazowy wodór i czysty metal. Tworzenie lub rozkład wodorku metalu zależy od temperatury oraz ciśnienia gazowego wodoru. Obukierunkowość reakcji (\*) jest podstawą do wykorzystywania wodorków metali do magazynowania i przenoszenia wodoru. Sposób taki ma w porównaniu z tradycyjnymi metodami, tj. butlami stalowymi z gazowym wodorem czy zbiornikami z ciekłym wodorem, szereg zalet. Po pierwsze, na jednostkę objętości przypada w wodorkach metali dużo większa ilość wodoru, niż ma to miejsce nawet w ciekłym stanie tego pierwiastka. I tak ciekły wodór zawiera w normalnym ciśnieniu około  $0,07 \text{ g w cm}^3$ , natomiast wodorek o składzie  $TiFeH_{1,93}$  aż  $5,5 \text{ g}$  w tej samej objętości, a więc około 80 razy więcej. Ponadto przechowywanie i przenoszenie wodoru w formie wodorków metalicznych jest dużo bezpieczniejsze.

Niewątpliwym ograniczeniem jest natomiast duży ciężar metalu pochłaniającego wodór. Wymieniony wyżej wodorek tytanowo-żelazawy zawiera wagowo jedynie 1,8% wodoru. Niemniej jednak ten właśnie wodorek służy za podstawę opracowywanych już technologii wykorzystywania wodoru do napędu samochodów. Nie wymaga to zmian konstrukcyjnych w silniku. Zasadniczą modyfikacją jest zastąpienie gaźnika urządzeniem mieszającym wodór z powietrzem. Jedną ze znanych firm samochodowych, przygotowanych do przejścia na napęd wodorowy, jest Mercedes-Benz z RFN. Druga już generacja tych rozwiązań oparta jest o kombinowany napęd benzynowo-wodorowy. Przy małych mocach i szybkościach, stosowanych w ruchu miejskim, silnik pracuje na czystym wodrze. Jest to wtedy związane z minimalnym zanieczyszczeniem środowiska, ponieważ prawie wyłącznym produktem pracy takiego silnika jest para wodna. W miarę wzrostu mocy, a więc i większych szybkości ruchu, wzbogaca się stopniowo mieszanekę wybuchową w benzynę, aby ostatecznie przejść na nią całkowicie w czasie jazdy na drogach szybkiego ruchu. Ten kombinowany napęd daje przede wszystkim większy zasięg tankowania wodorem, który przy braku benzyny nie przekraczał 300 km. „Wodorowy” samochód wymaga dodatkowego obciążenia metalicznym stopem pochłaniającym i wydzielającym wodór. Jest to objętościowo niewielki element o wadze około 200 kg. Przy obecnych (rok 1987 – red.) niskich cenach ropy naftowej na rynkach światowych wprowadzenie napędu wodorowego nie jest realne, zwłaszcza na większą skalę. Niemniej Mercedes-Benz jest przygotowany do wprowadzenia paliwa wodorowego w samochodach, jeżeli będzie to ekonomicznie uzasadnione.

Napęd w pojazdach mechanicznych jest jednym z wielu możliwych zastosowań wodorków metalicznych w tzw. technologii wodorowej. Optymiści utrzymują, że potencjalnych zastosowań jest ponad dwadzieścia. Wspomnijmy tutaj o jednym z nich, rozważanym już obecnie na większą skalę. Mianowicie, wodorki metaliczne mogą być wykorzystane do magazynowania wodoru, otrzymywanego

np. na drodze elektrolizy wody w elektrowniach w czasie małego obciążenia. Rozważane są już obecnie projekty budowy wielotonowych zasobników metalicznych do takich właśnie celów. Innym atrakcyjnym przykładem jest zastosowanie wodorków metalicznych w zamrażarkach, w których wydzielanie ciepła w jednej części jest sprzężone z jego pochłanianiem w innej części. Absorpcja wodoru w metalach jest bowiem z reguły związana z wydzielaniem ciepła – natomiast jego desorpcja ze stałego metalu pochłania ciepło z otoczenia. Sterowanie tą wymianą ciepła stwarza w urządzeniach o większej skali poważne problemy inżynierskie.

### Wodorki metali jako obiekt badawczy

Układy metal-wodór stanowią w badaniach podstawowych przedmiot szerokiego zainteresowania. Z ogólnego punktu widzenia chodzi tutaj o połączenia metali z najbliższym pierwiastkiem, wykazującym najprostszą strukturę elektronową. Zdziwiająca jest przy tym różnorodność właściwości, jakie obserwujemy. I tak wodorki metali alkalicznych i ziem alkalicznych mają charakter związków ściśle stechiometrycznych, w których wodór występuje w postaci anionów. Metale przejściowe, np. tytan, cyrkon i metale ziem rzadkich tworzą natomiast – obok wielu ściśle stechiometrycznych wodorków – połączenia o zmiennym składzie, tzw. wodorki niestechiometryczne, których właściwości zmieniają się często w zależności od stężenia wodoru. I tak np. wodorek cezu ze wzrostem stężenia wodoru zmienia charakter z metalicznego na półprzewodnikowy, a następnie staje się nawet izolatorem. Wprowadzenie wodoru do metalu może spowodować powstanie ferromagnetyzmu, jak to ma miejsce w wodorkach uranu, ale i odwrotnie, może redukować ferromagnetyzm, co obserwujemy w wodorku niklu. Również i w odniesieniu do nadprzewodnictwa tworzeniu wodorku metalicznego może towarzyszyć obniżenie temperatury krytycznej, do całkowitego zaniku włącznie, jak to stwierdzono w większości wodorków metali przejściowych. Natomiast w wodorku palladu, od pewnego stężenia wodoru począwszy, występuje nadprzewodnictwo, przy czym temperatura krytyczna jest (w pewnym zakresie stężeń) wyraźnie wzrastającą funkcją stężenia wodoru.

Dużą zaletą wielu wodorków jest łatwość ich otrzymywania oraz możliwość odwracalnych zmian składu przez odpowiedni kontakt z gazowym wodorem. W sieci metalicznej wodór może występować albo w postaci anionowej – jak we wspomnianych wyżej metalach alkalicznych – albo też w postaci w różnym stopniu ekranowanego protonu, jak to ma miejsce w metalach przejściowych. Jest sprawą dyskusyjną, w jakim stopniu wodór taki można uważać za składnik metaliczny otrzymanego „stopu”.

W sieci przestrzennej metalu cząstki wodoru zajmują określone położenie. Zmiany stężenia mogą tutaj prowadzić do wymuszania różnych typów symetrii sieci krystalicznej. Zmiany takie towarzyszą przejściom fazowym w układach metal-wodór, które często przypominają swoim charakterem przejścia gaz-ciecz lub ciecz-ciało stałe w układach jednoskładnikowych.

Ta analogia skłania często do rozpatrywania wodoru w metalach jako gazu sieciowego, który może wykazywać przejścia fazowe charakterystyczne dla tego modelu.

### Wysokie ciśnienia w wodorkach metali

Chłonność poszczególnych metali na wodór jest bardzo zróżnicowana. Często nawet podobne, wydawałoby się, metale zachowują się odrębnie. I tak dla otrzymania wodorku palladu o składzie  $\text{PdH}_{0,6}$  wystarczy w temperaturze pokojowej ciśnienie wodoru rzędu kilkunastu mm Hg. Natomiast należące do tej samej co pallad podgrupy w układzie periodycznym metale nikiel i platyna absorbują w takich samych warunkach zanedbywalnie małe ilości wodoru. Jeżeli gazowy wodór o ciśnieniu około 6 tys. atm (0,6 GPa) działa na metaliczny nikiel w temperaturze pokojowej, to otrzymujemy metaliczny wodorek niklu  $\text{NiH}$ . To samo ciśnienie natomiast nie powoduje znaczącej absorpcji wodoru w platynie. Niemniej przykład wodorku niklu wykazuje, że działanie wysokim ciśnieniem gazowego wodoru na metale może umożliwić syntezę wodorków dotychczas nieznanymi.

Tę tezę sprawdzono na wielu przykładach w Instytucie Chemii Fizycznej PAN w Warszawie. Np. otrzymano w ten sposób nieznanymi dotychczas wodorek manganu, jak również na drodze bezpośredniej syntezy z pierwiastków wodorki chromu i glinu, znane jedynie z pośrednich metod otrzymywania. Warto wspomnieć, że wykrycie nadprzewodnictwa wodorku palladu ma swoją genezę również w metodyce wysokociśnieniowej gazowego wodoru. Technika ta została zastosowana i rozwinięta po naszych doświadczeniach w Instytucie Fizyki Ciała stałego AN ZSRR w Czernogolowce.

Wysokie ciśnienie może wywołać w wodorkach metali szereg istotnych zmian. Należą do nich zmiany symetrii sieci krystalicznej, występujące w określonych ciśnieniach jako nieciągłe przejścia fazowe. Jest znanym faktem, że różnorodność faz jest w odniesieniu do zmian ciśnienia dużo większa niż w odniesieniu do zmian temperatury. Zmniejszenie wzajemnych odległości elementów sieci krystalograficznej pod wpływem wzrostu ciśnienia wymusza często reorganizację sieci przestrzennej. Takie skokowe zmiany zachodzą również w krystalicznych wodorkach metali poddawanych działaniu wysokiego ciśnienia. Ogólnie rzecz ujmując, obserwuje się ten sam typ zmian, co w innych fazach krystalicznych, mianowicie: wysokie ciśnienie preferuje bardziej objętościowo zwarte fazy w porównaniu z ciśnieniem normalnym. Obok krystalicznych wodorków metali bada się ostatnio amorficzne stany metaliczne (tzw. szkła metaliczne) nasycane wodorem. Otrzymywanie amorficznych metali wymaga w wielu przypadkach dodatków, np. krzemu, boru czy fosforu, które znacznie obniżają pochłanianie wodoru. Zastosowanie wysokich ciśnień wodoru polepsza znakomicie jego absorpcję. A zatem jeżeli jesteśmy zainteresowani wysokimi stężeniami wodoru w niektórych amorficznych metalach, to nieodzowne staje się wykorzystanie techniki wysokociśnieniowej.

## Modelowanie

Wojciech  
CZERWIŃSKI



### Rozwiązanie zadania M 1576.

Rozważmy dowolny czworościan  $ABCD$  w którym  $K, L, M, N$  są punktami styczności sfery wpisanej i ścian leżących odpowiednio naprzeciw wierzchołków  $A, B, C, D$ .

Wyznamy miary kątów  $\sphericalangle ABN$  oraz  $\sphericalangle BAN$  w zależności od miar kątów wewnętrznych ścian czworościanu (które są dane, gdy dana jest siatka).

Zauważmy, że na mocy cechy bok-bok-bok, pary:  $ABM$  i  $ABN$ ,  $ACN$  i  $ACL$ ,  $ADL$  i  $ADM$  to pary trójkątów przystających; oznacmy kąty wewnętrzne przy wierzchołku  $A$  w poszczególnych z nich odpowiednio przez  $\beta, \gamma, \delta$ .

Wówczas

$$\beta + \gamma = \sphericalangle BAN + \sphericalangle CAN = \sphericalangle BAC,$$

$$\gamma + \delta = \sphericalangle CAL + \sphericalangle DAL = \sphericalangle CAD,$$

$$\delta + \beta = \sphericalangle DAM + \sphericalangle BAM = \sphericalangle DAB,$$

skąd wniosek, że

$$\sphericalangle BAN = \beta =$$

$$= \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle DAB - \sphericalangle CAD).$$

Podobnie uzyskujemy równość

$$\sphericalangle ABN = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle DBA - \sphericalangle CBD).$$

Ponieważ dodawanie i odejmowanie kątów, a także prowadzenie dwusiecznej są wykonalne konstrukcyjnie, więc powyższe równości bezpośrednio przenoszą się na żadaną konstrukcję punktu styczności ze ścianą  $ABC$ . Dla pozostałych ścian konstrukcja jest w pełni analogiczna.

Dziś modeluje się prawie wszystko. Przykładowo prognozę pogody tworzy się na podstawie modelu atmosfery. Przestrzeń nad ziemią dzieli się na prostopadłościanny szerokości kilku kilometrów, wysokości kilkudziesięciu, może kilkuset metrów; w każdym z nich ustala się, jaka jest temperatura, wilgotność, ciśnienie, prędkość wiatru, jego kierunek i jeszcze wiele innych parametrów. Taki opis sytuacji to stan modelu. Ponadto opierając się na prawach fizyki, ustala się, jak ten stan będzie ewoluował w czasie. To, oczywiście, będzie przybliżenie sytuacji rzeczywistej. Na przykład, liczymy, w jakim stanie model będzie za 12 godzin, dobę, dwie. Często takie obliczenia wymagają wielkiej mocy obliczeniowej, szczególnie jeśli chcemy zrobić to dokładnie, jak np. w przypadku prognozy ICM (meteo.pl).

Modelowanie stosuje się również w wielu innych przypadkach, gdy chcemy przewidzieć w sposób przybliżony, co będzie w przyszłości. Konstruuje się modele opisujące ceny akcji na giełdzie, wielkość pokrywy lodowej w Arktyce, erupcje wulkanów, wielkość populacji danego kraju czy świata, ewolucję chorób na danym terenie itd. We wszystkich tych sytuacjach chcemy czegoś dowiedzieć się o przyszłości ważnego dla nas zjawiska czy procesu, ale jest on na tyle skomplikowany, że nie jesteśmy w stanie zrobić tego dokładnie. Dlatego idziemy na kompromis i zajmujemy się pewnym przybliżeniem rzeczywistości. Będzie to, co prawda, przybliżenie, ale za to będziemy w stanie z nim pracować i rzeczywiście obliczać, jak się ono zachowa w przyszłości. Modele rzeczywistości mogą być dosyć dokładne, wtedy jednak (ze względu na złożoność) ciężko analizować ich własności i obliczać, jak będą ewoluowały. Ale za to, jeśli to już zrobimy, będziemy mieli dobre przybliżenie tego, co się stanie *naprawdę*. Mogą być też mniej dokładne, wtedy będą zachowywały się istotnie inaczej niż rzeczywistość. W zamian za to będzie nam je łatwiej analizować, a analiza przyniesie pewne wnioski, które choć częściowo pozwolą zrozumieć badane zjawisko.

Czasem model, który tworzymy, wcale niekoniecznie ma wiele wspólnego z rzeczywistością, ale konstruujemy go tak, by dawał dobre wyniki dla niektórych eksperymentów, mając nadzieję, że przyda nam się on do przewidywania wyników innych eksperymentów. Ten sposób patrzenia na modelowanie bliższy jest fizyce, gdzie siłą rzeczy nie znamy *istoty rzeczywistości*, więc możemy jedynie konstruować model tak, by dobrze przybliżał znane nam obserwacje. Dobrymi przykładami są tu: kopernikański model układu słonecznego czy model standardowy opisujący świat w mikroskali.

Skoro modelowanie stosuje się w ekonomii, meteorologii, biologii, fizyce, socjologii, to dlaczego by nie zastosować go w informatyce do lepszego badania zachowań programów? Istotnie się to robi i modele programów mają sporo różnych zastosowań. W informatyce znamy zasady kierujące działaniem programów, natomiast nie umiemy przewidywać, do czego doprowadzą. Dlatego stosujemy podejście, w którym budowany model odzwierciedla rzeczywistość w sposób przybliżony. Jednym z ważnych zastosowań jest *automatyczna weryfikacja programów*, czyli automatyczne wykrywanie błędów w programach. Oczywiście, nie jest ono zupełnie automatyczne, ale jego część wykonuje się automatycznie. Chcemy wykryć, czy nasz program może potencjalnie wykonać pewnego rodzaju błędny przebieg. Powiedzmy, pytamy, czy może on w pewnym momencie próbować podzielić coś przez 0. W tym celu konstruuje się model programu  $M$  i opisuje w precyzyjny sposób, co rozumiemy przez błędny przebieg. W naszej sytuacji byłby to ciąg instrukcji, który kończy się instrukcją: podziel coś przez 0. Takie błędne ciągi instrukcji charakteryzuje się przy użyciu formuł pewnych logik. Powiedzmy, że formuła logiczna  $\phi$  opisuje ciągi instrukcji kończące się podzieleniem przez 0, to znaczy wylicza się do *prawdy* przy podstawieniu takich ciągów, a do *falszu* przy pozostałych. Teraz wystarczy już tylko sprawdzić, czy w modelu  $M$  możliwe jest obliczenie, dla którego formuła  $\phi$  zwraca wartość *prawda*. To podejście nazywa się z angielska *model checking*, czyli sprawdzanie modelu, i cieszy się dużym sukcesem komercyjnym. Dla przykładu, firma Intel wydaje na rozwój tej techniki miliony dolarów.





### Rozwiązanie zadania M 1578.

Trójkąt równoboczny  $A'B'C'$  o wierzchołkach w węzłach nazwijmy *czapeczką*, jeżeli  $AB \parallel A'B'$  oraz punkty  $C$  i  $C'$  leżą po tej samej stronie prostej  $A'B'$ .

Każdemu trójkątowi  $T$ , spełniającemu warunki zadania, przyporządkujemy *najmniejszą* zawierającą go *czapeczkę*. Precyzyjniej: jeżeli  $T$  jest *czapeczką*, to przyporządkowujemy mu siebie samego, natomiast w przeciwnym przypadku — *czapeczkę ograniczoną* prostymi: równoległą do  $AB$  przechodzącą przez wierzchołek  $T$  leżący najbliżej  $AB$ , równoległą do  $BC$  przechodzącą przez wierzchołek  $T$  leżący najbliżej  $BC$  oraz równoległą do  $CA$  przechodzącą przez wierzchołek  $T$  leżący najbliżej  $CA$ .

Każdej *czapeczce* o boku  $k = 1, \dots, n$  zostało w ten sposób przyporządkowanych dokładnie  $k$  trójkątów spełniających warunki zadania. Co więcej, liczba *czapeczek* o boku  $k$  jest równa

$$1 + 2 + \dots + (n - k + 1) = \binom{n - k + 2}{2}.$$

Wobec tego szukana liczba trójkątów równobocznych to

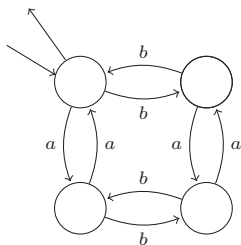
$$\sum_{k=1}^n k \binom{n - k + 2}{2} = \binom{n + 3}{4},$$

przy czym równość ta wynika z następującej obserwacji.

Czteroelementowy podzbiór zbioru  $\{0, 1, \dots, n + 2\}$ , którego drugim co do wielkości elementem jest  $k \in \{1, \dots, n\}$ , można wybrać na dokładnie  $k \binom{n - k + 2}{2}$

sposobów (wybierając najmniejszy element spośród  $\{0, \dots, k - 1\}$  oraz dwa większe od  $k$  spośród  $\{k + 1, \dots, n + 2\}$ ). Sumując po wszystkich możliwych  $k$ , uzyskujemy liczbę sposobów wyboru 4 spośród  $n + 3$  elementów.

**Uwaga.** Zachęcamy Czytelnika do znalezienia naturalnej bijekcji między obiektami zliczanymi w tym zadaniu (dla trójkąta o boku  $n$ ) oraz w poprzednim (dla trójkąta o boku  $n + 1$ ).



Automat rozpoznający język słów nad alfabetem  $\{a, b\}$ , które zawierają parzyście wiele liter  $a$  oraz parzyście wiele liter  $b$ .

Jednak korzyść z analizowania modeli programów nie jest tylko komercyjna, ale również teoretyczna. Jednym z modeli programów, bardzo dokładnym i skomplikowanym, jest maszyna Turinga. Dzięki temu, że ustalony został precyzyjny model programu, można zdefiniować, co dokładnie oznacza, że dany problem da się rozwiązać w czasie wielomianowym albo że jest w klasie NP, wielokrotnie wspomianej w łamach *Delty*. Czyli właściwe definicje modeli pomagają nam lepiej zrozumieć świat programów, powiązania między różnymi pojęciami, a często także pozwalają opracować szybkie algorytmy.

Żeby przejść do konkretów, przyjrzyjmy się najprostszemu modelowi programu, mianowicie *automatowi skończonemu*. Dowolny program w każdej chwili swojego działania jest w jakimś stanie pamięci. Przykładowo, program szukający maksimum w tablicy o rozmiarze 100 może być w stanie: jestem w 37 komórce tablicy, do tej pory największa liczba to 178, a aktualnie spoglądam na liczbę 110. Przy praktycznym założeniu, że każdy komputer ma skończoną pamięć, liczba możliwych stanów programu jest również skończona. Natomiast obliczenie programu polega na przechodzeniu pomiędzy tymi stanami według pewnego ustalonego zestawu reguł (ten zestaw, oczywiście, zależy od programu). Nasz program szukający maksimum może przejść np. do stanu: jestem w 38 komórce tablicy, największa znaleziona liczba to 178, aktualnie widzę liczbę 88. Dodatkowo zmiany stanu programu mogą być różnych typów – w naszym przykładzie jest to uaktualnienie maksimum albo przejście dalej w prawo w tablicy. Model powinien to móc uwzględniać. Dodatkowo model powinien zawierać informację, w jakim stanie program zaczyna swoje działanie oraz w jakich stanach się kończy. Sprecyzujmy teraz opisane intuicje i zdefiniujmy dokładnie, czym jest automat skończony.

*Deterministyczny automat skończony*  $\mathcal{A}$  nad skończonym alfabetem  $\Sigma$  składa się ze zbioru *stanów*  $Q$ , wyróżnionego *stanu początkowego*  $q_0 \in Q$ , zbioru *stanów akceptujących*  $F \subseteq Q$  oraz zbioru *transycji*  $T \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ . Jeśli dla pewnych stanów  $p, q \in Q$  oraz litery  $a \in \Sigma$  zachodzi  $(p, a, q) \in T$ , to piszemy  $p \xrightarrow{a} q$ . Biegiem automatu  $\mathcal{A}$  po słowie  $w = a_1 \dots a_n$  składającym się z liter  $a_i \in \Sigma$  nazwiemy ciąg takich stanów  $\rho = p_0, \dots, p_n$ , że  $p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} p_n$ . Jeśli dodatkowo  $p_0$  jest stanem początkowym, a  $p_n$  pewnym stanem akceptującym, to bieg  $\rho$  nazwiemy *akceptującym* i powiemy, że słowo  $w$  jest akceptowane przez automat. Natomiast *językiem* rozpoznawanym przez automat  $\mathcal{A}$  nazywamy zbiór wszystkich słów przez niego akceptowanych. Intuicyjnie język automatu  $\mathcal{A}$ , oznaczany  $L(\mathcal{A})$ , opisuje zbiór wszystkich ciągów akcji programu, który modeluje dany automat. Jeśli słowo  $w = a_1 \dots a_n$  należy do  $L(\mathcal{A})$ , to oznacza, że w programie jest pewien przebieg, w którym po kolei program wykonuje akcje typu  $a_1, a_2$  itd. aż na końcu wykonuje akcję typu  $a_n$ . Stan natomiast intuicyjnie reprezentuje to, co w danym momencie trzeba pamiętać o prefiksie słowa, żeby pod koniec stwierdzić, czy całe słowo należy do języka, czy też nie.

Okazuje się, że automaty skończone przydatne są nie tylko do modelowania działania programów, ale są po prostu bardzo eleganckim pojęciem, które jest użyteczne w wielu kontekstach. Przykładowo, znajdują zastosowanie przy sprawdzaniu, czy model  $M$  spełnia formułę  $\phi$ , albo przy analizie algorytmów operujących na znanych niektórym Czytelnikom wyrażeniach regularnych. Wyrażenia regularne są zbudowane przy użyciu sumy (oznaczanej  $+$ ), konkatenacji (oznaczanej  $\cdot$ ) i gwiazdki (oznaczanej  $*$ ). Jeśli  $r$  i  $s$  opisują języki  $L_r$  oraz  $L_s$ , to  $r + s$  opisuje sumę  $L_r \cup L_s$ ,  $r \cdot s$  opisuje język słów, których pierwsza część należy do  $L_r$ , a druga do  $L_s$ , natomiast  $r^*$  opisuje język słów, które dadzą się podzielić na skończenie wiele części, z których każda należy do  $L_r$ . Przykładowo wyrażenie  $(a + b) \cdot (b + c)$  opisuje język czterech słów, których pierwsza litera to  $a$  lub  $b$ , a druga to  $b$  lub  $c$ . Natomiast wyrażenie  $b^* \cdot c$  opisuje język nieskończenie wielu słów, które zaczynają się pewną liczbą liter  $b$ , a kończą się literą  $c$ . Okazuje się, że język automatu na rysunku również da się opisać wyrażeniem regularnym:

$$(a \cdot a + b \cdot b + (a \cdot b + b \cdot a)(a \cdot a + b \cdot b)^*(a \cdot b + b \cdot a))^*,$$

zachęcamy Czytelników do uzasadnienia tego faktu. Co ciekawe, wyrażenia regularne opisują tak naprawdę dokładnie te same języki, co automaty skończone. To jednak temat na zupełnie inną opowieść.



## Wyobraźnia? Wiedza?

Podobno Einstein, któremu można przypisać wszystkie dowcipne paradoksy, powiedział (napisał), że wyobraźnia jest ważniejsza od wiedzy. Takie właśnie hasło wzięli sobie polscy absolwenci brytyjskich uczelni na jubileuszową i uroczystą debatę Oksfordzką, która odbyła się w samym królewskim Zamku. A ponieważ zaprosili mnie do tak zwanej „łóży mędrców”, z której to łóży ma się prawo na koniec debaty wygłosić własny pogląd, to przez parę poprzedzających debatę dni próbowałam sobie wyrobić własne zdanie na ten temat. Przypomnę, że w ogólnym zarysie w debacie oksfordzkiej formułowane są teza i antyteza i że po trzy osoby bronią każdej. Na koniec publiczność głosuje, kto lepiej i bardziej przekonująco wystąpił. I jeszcze zwierzę się, że lubię te debaty, ponieważ są cywilizowane, eleganckie i oparte o racjonalne argumenty.

Wydaje mi się, że ponieważ trzeba dać szansę obu stronom, teza zazwyczaj jest nie do końca precyzyjna. W tym przypadku chodzi o słowo „wiedza”, można też wejść w spór, co znaczy „ważniejsza”. Dyskutanci zaczęli od przykładów. Na przykład że człowiek z Neandertalu musiał szukać sposobów na zimowy mróz i spodobało mu się użycie skóry zwierzęcej jako okrycia. To miało świadczyć o tym, że wyobraził sobie, dlaczego zwierzęta nie marzną, a potem uzyskał wiedzę, że może dla siebie zrealizować takie wyobrażenie. A może miał wiedzę o zwierzętach w zimie i wyobraził sobie, że i jemu dodatkowa skóra pomoże? Kolejny przykład dotyczył Leonarda da Vinci, który wymyślił (wyobraźnię miał wspaniałą) maszyny latające, ale nie miał wiedzy, jak zbudować taką, żeby latała. Jego wyobrażenia dotrwały do braci Wright! Niesłychaną wyobraźnię ma współczesny miliarder Elon Musk, który jednak, żeby ją zrealizować, musi zatrudniać tysiące inżynierów mających wiedzę. Uniwersytety służą do wykształcenia takich ludzi – a czy ktokolwiek słyszał o takich instytucjach, które kształcą „wyobraźnieli”? Stawiałabym na dobre wydziały filozofii, ale widocznie na sali filozofa nie było.

Jako „mędrzec” upomniałam się o odróżnienie wiedzy od nauki. W przypadku nauki (nie wiem jakiego słowa użył Einstein) nie widzę możliwości ustalenia, co jest „ważniejsze”. Niestety, nie dostosowałam się do rad moich szkolnych nauczycieli, którzy twierdzili, że trzeba formułować myślowe hipotezy w kategoriach ogólnych, a potem dopiero je ilustrować. Dlatego też przytoczyłam przykłady: właśnie Einstein, kiedy pisał swoje równania, nie wiedział, że w dalekiej przyszłości sprawdzą się one w zrozumieniu zjawisk „czarnych dziur” i fal grawitacyjnych. Jednym słowem posługiwał się przede wszystkim wiedzą, a wyobraźnią pochwalili się liczni autorzy książek i reżyserzy filmów sci-fi. A budząca moje serdeczne uczucia wielka uczona amerykańska,



Barbara McClintock (1902–1992)

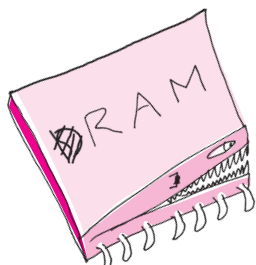
Barbara McClintock, formułując hipotezę „skakających genów”, miała wybujałą wyobraźnię, ponieważ w czasach jej wczesnych doświadczeń, w końcu lat 30. XX wieku, nikt nie myślał o żadnym skakaniu genów (nie wiedziano nawet, co to gen), w szczególności nikt sobie tego nie umiał WYOBRAZIĆ. Skończyło się *happy endem* – skakające geny ludzie z mniejszą wyobraźnią odkryli w realu 30 lat później, a Komitet Noblowski zdążył dać Barbarze w 81. roku życia Nagrodę Nobla w dziedzinie fizjologii i medycyny (solo, to rzadkość w tych nagrodach). Odwiedzający Warszawę w czerwcu 2018 Sir Tim Hunt, noblista z 2001 roku, powiedział, że laureaci bywają bardzo różni, ale wszystkich łączy nieustająca potrzeba odpowiedzi na pytanie, które sobie pierwsi na świecie postawili.

Oddałam swój głos na „wiedzę”, choć uważam, że naukowiec musi mieć wyobraźnię, żeby rozwijać jakąś dziedzinę wiedzy. Ale trzeba było wybrać. Publiczność wybrała wyobraźnię, (68:52).

Magdalena FIKUS

## Bestiariusz informatyczny (5)

W piątym odcinku bestiariusza przybliżymy kilka bardziej technicznych akronimów związanych ze sprzętem komputerowym (ang. *hardware*). Wspominaliśmy już o ENIAC-u, jednym z pierwszych komputerów, którego nazwa też była akronimem. Przykłady innych komputerów z tamtych czasów to **EDVAC** (*Electronic Discrete Variable Automatic Computer*), **PDP** (*Programmed Data Processor*) i pierwszy komputer wykorzystany w biznesie **LEO** (*Lyons Electronic Office*).



Początkowo komputery budowane były z lamp próżniowych, później z przekaźników, a następnie tranzystorów. Jednak dopiero wynalezienie w latach 60. XX wieku układu scalonego **IC** (*Integrated Circuit*), umożliwiającego upakowanie wielu takich elementów na małej przestrzeni, spowodowało prawdziwy boom komputerowy. Liczba elementów w układzie zwiększała się wykładniczo, by już dwie dekady później osiągnąć rząd miliona tranzystorów w układach wielkiej skali integracji **VLSI** (*Very-Large-Scale Integration*). Dwie popularne technologie produkcji układów to **TTL** (*Transistor-Transistor Logic*) oraz **CMOS** (*Complementary Metal-Oxide-Semiconductor*).

Podstawowa część procesora to jednostka arytmetyczno-logiczna **ALU** (*Arithmetic Logic Unit*), wykonująca obliczenia zapisane w kolejnych instrukcjach programu. Rodzaj dostępnych instrukcji zależy od architektury procesora **ISA** (*Instruction Set Architecture*), przy czym wyróżnić można dwa główne rodzaje architektur **CISC** oraz **Risc** (*Complex* oraz *Reduced Instruction Set Computing*), różniące się złożonością i liczbą dostępnych instrukcji. Konkretnie architektury też mają swoje akronimy, np. **SPARC** (*Scalable Processor ARChitecture*) czy **ARM** (*Advanced RISC Machine*). Część architektur udostępnia operacje wektorowe, które w celu przyspieszenia obliczeń wykonują instrukcje równoległe na wielu danych naraz **SIMD** (*Single Instruction, Multiple Data*). Istnieją też specjalne procesory **DSP** (*Digital Signal Processor*) przystosowane do szybkiego przetwarzania sygnałów (głównie audio i wideo). Specjalizowane układy scalone można też tworzyć na macierzach bramek **FPGA** (*Field-Programmable Gate Array*), programując je za pomocą języków **HDL** (*Hardware Description Language*).

W komputerach osobistych podstawowym systemem komunikującym procesor ze sprzętem był **BIOS** (*Basic Input/Output System*), który przy starcie systemu przeprowadzał test poprawności działania sprzętu **POST** (*Power-On Self-Test*). Obecnie jego rolę przejął **UEFI** (*Unified Extensible Firmware Interface*).

Pamięć RAM w komputerze dzieli się na dwa główne rodzaje: pamięci dynamiczne **DRAM** oraz statyczne **SRAM** (*Dynamic* oraz *Static Random-Access Memory*), różniące się wydajnością (i ceną). W celu odciążenia procesora stosuje się technikę bezpośredniego dostępu sprzętu do pamięci **DMA** (*Direct Memory Access*).

Sporo różnych akronimów związanych jest z technologiami pamięci masowych. Począwszy od systemów plików jak **FAT** (*File Allocation Table*) i **NTFS** (*New Technology File System*), przez interfejsy komunikacji **SCSI** (*Small Computer System Interface*, czyt. skazi) i **SATA** (*Serial Advanced Technology Attachment*), aż do mechanizmu **RAID** (*Redundant Array of Independent Disks*) łączenia wielu dysków w celu zwiększenia ich niezawodności lub wydajności. A jeśli o niezawodności mowa, to warto wspomnieć o używanych w dyskach kodach korygujących **CRC** (*Cyclic Redundancy Check*) oraz **SMART** (*Self-Monitoring, Analysis and Reporting Technology*), czyli systemie monitorowania i powiadamiania o błędach w działaniu dysku.

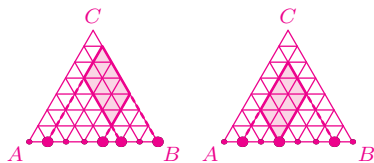
Nie może też zabraknąć nazw starszych kart graficznych, takich jak **CGA** (*Color Graphics Adapter*) czy **SVGA** (*Super Video Graphics Array*), których standaryzacji dokonywała organizacja **VESA** (*Video Electronics Standards Association*). Były podłączane do płyty głównej przez szyny **PCI** (*Peripheral Component Interconnect*) lub **AGP** (*Accelerated Graphics Port*). Współczesne karty graficzne wykorzystywane są również do zwykłych obliczeń (aktualnie głównie związanych z kopaniem bitcoinów) za pomocą technologii takich jak **CUDA** (*Compute Unified Device Architecture*).

Tomasz IDZIASZEK



**Rozwiązanie zadania M 1577.**  
Niech  $A$  będzie zbiorem  $n + 1$  węzłów należących do boku  $AB$ .

Zauważmy, że każda czwórka różnych punktów z  $A$  jednoznacznie wyznacza równoległobok o zadanych własnościach, którego punktami przecięcia z  $AB$  są te cztery punkty i którego „najniższy” wierzchołek nie leży na  $AB$ . Z kolei każda trójka różnych punktów z  $A$  jednoznacznie wyznacza taki równoległobok, którego „najniższy” wierzchołek leży na  $AB$ .



Z drugiej strony boki każdego równoległoboku spełniającego zadane warunki przecinają prostą  $AB$  w trzech lub czterech punktach i są to punkty należące do  $A$ . Stąd wniosek, że szukana liczba równoległoboków jest równa łącznej liczbie wyborów trzech lub czterech elementów zbioru  $(n + 1)$ -elementowego, czyli

$$\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+2}{4}.$$

## Informatyczny kącik olimpijski (119):

### Problem (MAX, +) kontratakuję

Tym razem wyjątkowo nie omówimy żadnego nowego zadania. Wrócimy za to do problemu przedstawionego w  $\Delta_{13}^4$  w artykule *Złośliwy problem (MAX, +) i kubelkowe struktury danych*. Problem ten wygląda następująco: Dany jest ciąg złożony z  $n$  liczb całkowitych  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Na tym ciągu chcemy wykonywać dwa typy operacji: (1) przypisanie wartości  $k$  każdemu elementowi ciągu o indeksie z przedziału  $[i..j]$  i wartości mniejszej niż  $k$  (operacja **update**( $i, j, k$ )) oraz (2) zapytanie o sumę elementów ciągu o indeksach z przedziału  $[i..j]$  (operacja **quary**( $i, j$ )).

W oryginalnym artykule przedstawiona była struktura danych, która  $m$  takich operacji potrafi wykonać w czasie  $\mathcal{O}(n + m\sqrt{n}\log n)$ . Autor tamtego opracowania (Wojciech Śmietanka) zorganizował wówczas konkurs na poprawę tej złożoności, który udało mi się wtedy wygrać, uzyskując wynik  $\mathcal{O}(n \log^2 n + m \log^3 n)$ . Niedawno w algorytmicznej społeczności pojawił się jeszcze lepszy pomysł, który przedstawię w dzisiejszym kąciku. Nie dość, że rozwiązuje on nasz problem w czasie  $\mathcal{O}((n + m) \log n)$ , to jeszcze korzysta wyłącznie ze zwykłego drzewa przedziałowego! (Choć to, jakie konkretnie informacje będziemy przechowywać w każdym przedziale bazowym, jest – według mnie – dość nieintuicyjne.)

Przejdźmy do sedna. W każdym wierzchołku drzewa przedziałowego będziemy utrzymywać następujące informacje o elementach zawartych w jego przedziale bazowym: **min** – minimalna wartość wśród elementów z przedziału; **count\_min** – liczba elementów o wartości równej **min**; **second\_min** – najmniejsza wartość elementu różna od **min** lub nieskończoność, jeśli wszystkie wartości w przedziale są równe; **sum** – suma wartości elementów; **lazy** – wartość  $k$ , o jaką należy zaktualizować dzieci przedziału bazowego, aby wartości w nich przechowywane stały się aktualne, lub **null**, gdy wartości w dzieciach są aktualne.

Po pierwsze, zachęcamy Czytelnika do przekonania się, że z aktualnych wartości dla dzieci przedziału bazowego możemy odzyskać wartości dla ojca. Następnie razem przeanalizujemy, w jaki sposób aktualizujemy konkretny przedział bazowy o nową wartość  $k$ . Jeśli  $k \leq \text{min}$ , to nie robimy nic. Nawet najmniejsza wartość nie zostanie zmieniona na  $k$ . Jeśli  $\text{min} < k < \text{second\_min}$ , to wszystkie elementy o wartości **min** zamienią się na elementy o wartości  $k$ , czyli przypisujemy  $\text{min} := k$  oraz  $\text{sum} := \text{sum} + \text{count\_min} \cdot (k - \text{min})$ . Przypisujemy również  $\text{lazy} := k$ , być może nadpisując mniejszą wartość **lazy**. Jeśli  $\text{second\_min} \leq k$ , to rekurencyjnie aktualizujemy dzieci przedziału bazowego i w czasie stałym odzyskujemy z nich informacje o ojcu.

Otrzymując zapytanie o przedział  $[i..j]$ , rekurencyjnie rozkładamy go na przedziały bazowe. Jeśli w rekurencji natrafimy na przedział z wartością **lazy**  $\neq \text{null}$ , to – jak wyżej – aktualizujemy jego dzieci. Następnie można odzyskać sumę albo zaktualizować owe przedziały bazowe i odzyskać wartości ich przodków w drzewie.

Sama poprawność algorytmu jest dość oczywista. Jednak skąd bierze się tak dobra złożoność czasowa? Nietrudno skonstruować przykład, w którym jedna operacja **update**( $i, j, k$ ) zajmie czas  $\mathcal{O}(n)$ . Problemem są zejścia rekurencyjne, gdy  $\text{second\_min} \leq k$ . Oznaczmy ich liczbę przez  $x$ . Poza nimi wszystko działa jak w zwykłych drzewach przedziałowych, więc nasz algorytm działa w czasie  $\mathcal{O}(x + n + m \log n)$ .

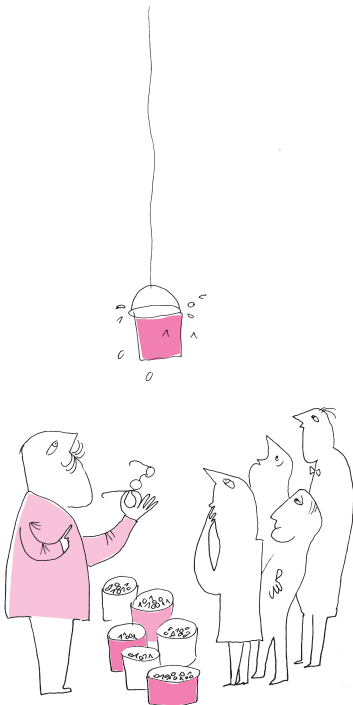
Przejdźmy do dokładniejszej analizy algorytmu. Weźmy przedział bazowy  $P$ . Jeśli w jakimś nadprzedziale przypisaliśmy wartość **lazy**  $:= k$ , to w nim całym była tylko jedna wartość nie większa niż  $k$ , w szczególności  $k$  było mniejsze niż  $\text{second\_min}$  dla  $P$ . Dowodzi to, iż wartości **second\\_min** zawsze pozostają aktualne. Z tego powodu przy propagowaniu wartości **lazy** nie natrafimy na przypadek  $\text{second\_min} \leq k$ . Całe  $x$  pochodzi więc z aktualizacji przedziałów bazowych o nowe wartości  $k$ .



W dniach 17–18 września 2018 roku na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego odbędzie się czwarta edycja Konferencji Krajowej Sympozjum Młodych Naukowców Wydziału Fizyki. Celem konferencji jest umożliwienie studentom studiów I i II stopnia przedstawienia wyników własnych badań naukowych w zakresie fizyki oraz jej zastosowań w pokrewnych dziedzinach. W ramach Sympozjum przewidziane są sesje plenarne z udziałem sześciorga zaproszonych gości, sesje tematyczne wystąpień studentów oraz sesja plakatowa.

Organizatorami Sympozjum są: Studenckie Koło Nanotechnologii „Nanorurki”, Samorząd Studentów Wydziału Fizyki UW oraz Wydział Fizyki UW zaś uczestnikami studenci z całej Polski. Szczegółowy program Sympozjum można znaleźć na stronie internetowej Sympozjum [smn.fuw.edu.pl](http://smn.fuw.edu.pl).

Serdecznie zapraszamy do udziału w Sympozjum!





Aby oszacować wartość  $x$  w terminach  $n$  oraz  $m$ , wprowadzimy pojęcie potencjału. Dla danego przedziału bazowego możemy policzyć, ile jest w nim różnych wartości. Potencjałem dla ciągu nazwijmy sumę tych wartości, liczoną po wszystkich przedziałach bazowych. Potencjał ten będzie największy, jeśli wszystkie wartości w ciągu będą różne. Będzie on wtedy wynosił tyle, ile suma długości przedziałów bazowych, czyli  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

Najpierw zastanówmy się, kiedy nasz potencjał może się zwiększyć za względu na dany przedział bazowy  $P$ . Przy operacji **update**( $i, j, k$ ) zbiór wartości w  $P$  może się powiększyć co najwyżej o jeden element – o element o wartości  $k$ . Aby tak się stało, musi zachodzić  $k > \min$ , w przeciwnym razie żaden element w  $P$  nie otrzyma nowej wartości  $k$ . Ponadto przedział  $[i..j]$  nie może zawierać całego  $P$ , w przeciwnym razie usuniemy wartość  $\min$  ze zbioru wartości z  $P$  i potencjał się nie zwiększy. Liczba przedziałów bazowych, które przecinają się z  $[i..j]$ , a nie są zawarte w  $[i..j]$ , wynosi  $\mathcal{O}(\log n)$ , a są to dokładnie te przedziały, które odwiedzamy rekurencyjnie, rozkładając  $[i..j]$  na przedziały bazowe. Ze względu na każdy z tych  $\mathcal{O}(\log n)$  przedziałów potencjał zwiększy się o co najwyżej jeden.

Nasz potencjał na początku wynosił co najwyżej  $\mathcal{O}(n \log n)$ , a podczas każdej z  $m$  operacji wzrośnie o co najwyżej  $\mathcal{O}(\log n)$ , a więc może też zmaleć co najwyżej  $\mathcal{O}(n \log n) + m \cdot \mathcal{O}(\log n) = \mathcal{O}((n + m) \log n)$  razy.

Wróćmy do naszego problematycznego przypadku, czyli gdy w aktualizowanym o wartość  $k$  przedziale zachodzi  $\text{second\_min} \leq k$ . Wszystkie elementy o wartościach  $\min$  oraz  $\text{second\_min}$  będą po aktualizacji miały wartość równą  $k$ , czyli liczba różnych wartości w aktualizowanym przedziale bazowym zmaleje i zmaleje też potencjał. W ten sposób ograniczyliśmy  $x$  przez  $\mathcal{O}((n + m) \log n)$ , a cały algorytm, tak jak postulowaliśmy, zadziała w czasie  $\mathcal{O}((n + m) \log n)$ .

Marcin SMULEWICZ



## Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

**M 1576.** Mając daną siatkę czworoscianu, skonstruować punkty styczności sfery wpisanej w ten czworoscian do jego ścian.

Rozwiązanie na str. 14

W kolejnych dwóch zadaniach rozważamy trójkąt równoboczny  $ABC$  o boku  $n$  podzielony na  $n^2$  trójkątów równobocznych o boku 1. Każdy punkt, który jest wierzchołkiem co najmniej jednego z tych  $n^2$  trójkątów, nazwijmy *węzłem*.

**M 1577.** Wyznaczyć liczbę równoległoboków o wierzchołkach w węzłach, których dwa boki są równoległe do  $AC$ , a dwa do  $BC$ .

Rozwiązanie na str. 17

**M 1578.** Wyznaczyć liczbę trójkątów równobocznych o wierzchołkach w węzłach (ale bokach niekoniecznie równoległych do boków  $ABC$ ).

Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 959.** Struny leżącej poziomo gitary uginają się nieznacznie pod wpływem siły ciężkości. Oszacuj, o ile obniży się środek struny G o częstotliwości podstawowej  $f = 196$  Hz. Przyspieszenie ziemskie  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ .

Rozwiązanie na str. 3

**F 960.** Jak zmieni się wysokość tonu piszczałki organowej (tzw. piszczałka otwarta), dającej dźwięk o częstotliwości  $f_0 = 196$  Hz w temperaturze  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , gdy temperatura w kościelnej nawie spadnie do  $T_1 = 0^\circ\text{C}$ ?

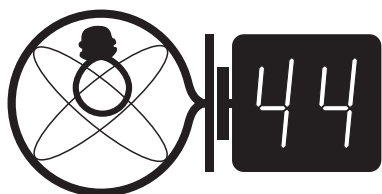
Rozwiązanie na str. 3

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z fizyki nr 662, 663

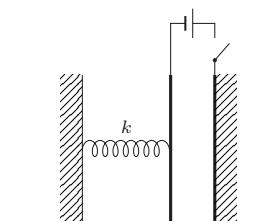
Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*



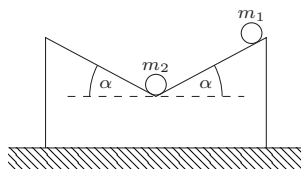
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2018



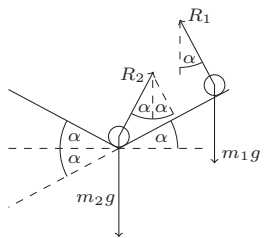
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

**662.** Na poziomej płaszczyźnie leżą dwa klocki o jednakowych masach  $m$ , połączone nieważką sprężyną (rys. 1). Współczynnik tarcia klocków o płaszczyznę wynosi  $\mu$ . Napięcie sprężyny ma wartość  $N$ . Jaką maksymalną stałą siłę  $F$  można przyłożyć do jednego z klocków, aby drugi nie ruszył z miejsca?

**663.** W kondensatorze płaskim jedna okładka jest nieruchoma, a druga może poruszać się bez tarcia i jest połączona ze ścianą za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$  (rys. 2). Pole powierzchni każdej okładki wynosi  $S$ , początkowa odległość między nimi  $d$ . Okładki podłączono do źródła napięcia stałego. Przy jakiej maksymalnej wartości tego napięcia okładki nie zetkną się, jeżeli są stale równoległe względem siebie?

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2018

Przypominamy treść zadań:

**658.** Kulka o masie  $m_2$  leży na nieważkiej podstawce (rys. 3). Podstawka ma kształt prostokątnością połączonego z dwoma stykającymi się klinami o kątach nachylenia  $\alpha$ . Nie ma tarcia między podłożem a podstawką. Na prawym klinie położono kulkę o masie  $m_1$  i puszczono swobodnie. Jaki warunek musi być spełniony, aby kulka o masie  $m_2$  zaczęła w wyniku tego wsuwać się na lewy klin? Między kulkami a podstawką również nie ma tarcia.

**659.** Nieprzewodząca cienka płytką kwadratowa o boku  $d$  jest równomiernie naładowana ładunkiem  $Q$ . Na osi symetrii płytki prostopadłej do jej płaszczyzny, w odległości  $\frac{d}{2}$  od płytki, umieszczono ładunek punktowy  $q$ . Znaleźć wartość siły elektrostatycznej działającej na ten ładunek.

**658.** Kulka o masie  $m_2$  zacznie wsuwać się na lewy klin, gdy będzie wystarczająco lekka. Rozważmy masę graniczną  $m_2 = m_0$ , gdy kulka jeszcze się nie wsuwa, ale już nie naciska na prawy klin. Na rysunku 4 przedstawiono siły działające w tym granicznym przypadku na obie kulki. Siła reakcji  $R_2$  jest prostopadła do lewego klina. Ponieważ podstawka jest nieważka, składowe poziome siły reakcji, działających na kulki, równoważą się  $R_2 \sin \alpha - R_1 \sin \alpha = 0$ , stąd  $R_1 = R_2$ . Przyspieszenia obu kulek w kierunku prostopadłym do prawego klina są jednakowe (i równe przyspieszeniu podstawki w tym kierunku)

$$\frac{m_1 g \cos \alpha - R_1}{m_1} = \frac{m_0 g \cos \alpha - R_2 \cos 2\alpha}{m_0},$$

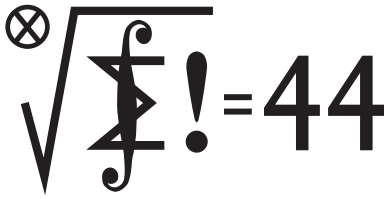
stąd  $m_0 = m_1 \cos 2\alpha$ . Dolna kulka będzie wsuwać się na lewy klin przy spełnionym warunku  $m_2 < m_1 \cos 2\alpha$ .

**659.** Siła działająca na ładunek równa jest co do wartości sile, jaką ładunek działa na płytkę. Ładunek znajduje się w środku sześcianu, którego jedną ze ścian jest płytkę. Zgodnie z prawem Gaussa strumień pola elektrycznego wytwarzanego przez ładunek  $q$  przez powierzchnię tego sześcianu wynosi  $\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ , gdzie  $\epsilon_0$  jest przenikalnością elektryczną próżni. Strumień pola przez powierzchnię płytki jest równy

$$\phi_1 = \frac{q}{(6\epsilon_0)} = \sum_i E_{i\perp} S_i,$$

gdzie  $S_i$  jest elementem powierzchni płytki, a  $E_{i\perp}$  składową wektora natężenia pola elektrycznego prostopadłą do płytki w miejscu, w którym znajduje się  $i$ -ty element powierzchni. Gęstość powierzchniowa ładunku płytki wynosi  $\frac{Q}{d^2}$ , szukana wartość siły działającej na płytkę dana jest wzorem

$$F = \frac{|qQ|}{6\epsilon_0 d^2}.$$



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2018

## Zadania z matematyki nr 765, 766

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**765.** Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg. Jego najmniejszy kąt wewnętrzny ma wierzchołek  $A$ . Zakładamy, że proste  $AD$  i  $BC$  przecinają się w punkcie  $P$ , zaś proste  $AB$  i  $DC$  przecinają się w punkcie  $Q$ , przy czym  $AP \perp PQ$ . Niech  $M$  będzie środkiem przekątnej  $BD$ . Wykazać, że  $PM \perp AB$ .

**766.** Znaleźć liczbę rzeczywistą  $M > 5/2$  taką, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c, d, e$  zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+a}} + \sqrt[5]{\frac{e}{a+b}} \geq M.$$

Im większa liczba  $M$ , tym lepsze rozwiązanie.

Zadanie 766 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2018

Przypominamy treść zadań:

**761.** Trójkąt  $ABC$  (nie prostokątny) jest wpisany w okrąg o średnicy  $AD$ . Punkt  $E$  jest symetryczny do  $A$  względem środka boku  $BC$ . Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach  $ABC$  i  $BDE$  mają równe promienie.

**762.** Rozważamy liczby naturalne  $n \geq 2$ .

(a) Udowodnić, że jeśli liczba  $2^n - 1$  jest bezkwadratowa, to liczby  $n$  oraz  $2^n - 1$  są względnie pierwsze.

(b) Pokazać, że nie zachodzi implikacja odwrotna.

**761.** Czworokąt  $ABEC$  jest równoległobokiem. Niech prosta  $EC$  przecina okrąg, opisany na trójkącie  $ABC$ , w punktach  $C$  i  $F$  (gdy jest styczna, przyjmujemy  $F = C$ ). Powstaje trapez równoramienny  $ABCF$  lub  $ABFC$  (gdy  $F = C$  – trójkąt równoramienny). W każdym przypadku  $|BE| = |AC| = |BF|$ .

Trójkąt  $ABC$  z założenia nie jest prostokątny, więc żaden jego bok nie pokrywa się ze średnicą  $AD$ , na której oparty jest kąt prosty  $ABD$ ; a ponieważ  $AB \parallel CE$ , zatem  $BD \perp CE$ . To znaczy, że w trójkącie równoramiennym  $EBF$  prosta  $BD$  jest symetralną boku  $EF$ . W konsekwencji trójkąt  $BDE$  jest względem niej symetryczny do trójkąta  $BDF$ . Okręgi opisane na tych trójkątach są przystające; to już teza, bo drugi z tych okręgów jest też opisany na trójkącie  $ABC$ .

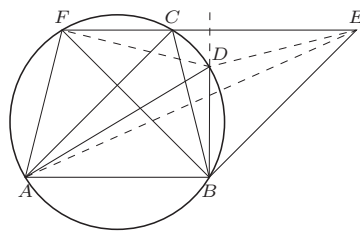
**762.** (a) Przypuśćmy, że liczby  $n$  oraz  $2^n - 1$  mają wspólny dzielnik pierwszy  $p$  (jasne, że  $p > 2$ ). Wykażemy, że wówczas liczba  $2^n - 1$  dzieli się przez  $p^2$  (nie jest więc bezkwadratowa). Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata,  $2 \equiv 2^p \pmod{p}$ . Podnosimy tę kongruencję stronami do potęgi  $n/p$ , otrzymując  $2^{n/p} \equiv 2^n \equiv 1 \pmod{p}$ . Zatem  $2^{n/p} = kp + 1$  dla pewnej liczby całkowitej  $k$ . Stąd

$$2^n = (1 + kp)^p = 1 + \binom{p}{1}kp + \binom{p}{2}(kp)^2 + \dots + \binom{p}{p}(kp)^p,$$

czyli  $2^n \equiv 1 \pmod{p^2}$ ; a to była nasza teza.

(b) Przykład pokazujący, że nie zachodzi implikacja odwrotna, nie tak łatwo znaleźć (mała szansa, że trafimy, zwyczajnie próbując – bez komputera ciężko). Prosty program, który dla zadanej liczby pierwszej  $p$  kontroluje dwie końcowe cyfry rozwinięcia (przy podstawie  $p$ ) kolejnych potęg dwójki, pozwala znaleźć moment powtórzenia końcówki 01, czyli wykładnik  $n$ , dla którego  $2^n \equiv (** \dots **01)_p \equiv 1 \pmod{p^2}$ . Powtarzamy tę procedurę dla kolejnych liczb pierwszych  $p$ ; warto przy tym, dla oszczędności czasu, ograniczyć zakres wykładnika, np. do  $n < 1000$ . W ten sposób szybko znajdujemy parę  $p = 127$ ,  $n = 889$ ; nie jest ona jednak szukanym kontrprzykładem, bowiem dla tej pary zachodzą związki  $n = 7p$ ,  $2^7 \equiv 1 \pmod{p}$ , z których nietrudno wynika, że liczby  $n$  i  $2^n - 1$  nie są względnie pierwsze.

Następna znaleziona para  $p = 1093$ ,  $n = 364$  jest już dobra: gdyby liczby  $n = 4 \cdot 7 \cdot 13$  oraz  $2^n - 1$  nie były względnie pierwsze, ta ostatnia musiałaby się dzielić przez 7 lub 13; ale minimalne wykładniki  $\alpha, \beta$ , dla których  $2^\alpha \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $2^\beta \equiv 1 \pmod{13}$ , to  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 12$ , więc wykładnik  $n$  musiałby się dzielić przez 3; a tak nie jest. Skoro zaś ta para została wygenerowana przez algorytm, zapewniający podzielność  $2^n - 1$  przez  $p^2$ , zatem liczba  $2^{364} - 1$  nie jest bezkwadratowa.



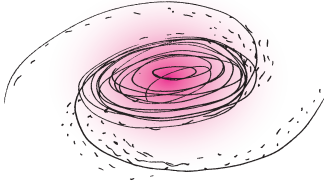
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
654 (WT = 2,05), 655 (WT = 2,90)  
z numeru 3/2018

Tomasz Wietecha	Tarnów	44+3,92
Marian Łupieżowicz	Gliwice	41,20
Tomasz Rudny	Gliwice	39,04
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Karol Łukanowski	Niemcz	23,85
Aleksander Surma	Myszków	20,28
Michał Koźlik	Poznań	19,20
Jan Zambrzycki	Białystok	17,37

Pan Tomasz Wietecha po raz 13  
przekroczył granicę 44 punktów.  
Gratulujemy!

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
755 (WT = 1,91) i 756 (WT = 1,56)  
z numeru 2/2018

Tomasz Choczewski	Szczecin	40,78
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,19
Michał Miodek	Warszawa	34,34
Krzysztof Kamiński	Pabianice	34,29
Paweł Kubit	Kraków	32,77
Michał Koźlik	Gliwice	32,23
Janusz Olszewski	Warszawa	32,15
Piotr Kumor	Olsztyn	31,69



## Prosto z nieba: Galaktyka bez ciemnej materii

Ciemna materia jest hipotetycznym typem materii wymyślonym przez astronomów do wytłumaczenia intrygujących obserwacji. Z szacunków wynika, że składa się na ponad 80% całej materii, oddziałując praktycznie wyłącznie grawitacyjnie z pozostałymi 20%, czyli z dobrze nam znaną materią barionową (która dodatkowo potrafi także oddziaływać silnie, słabo i elektromagnetycznie). Wśród kandydatów na ciemną materię wymienia się, na przykład, masywne czarne dziury (podobne do tych odkrytych niedawno przez zespoły LIGO i Virgo) lub różne egzotyczne, niestandardowe cząstki elementarne, i inwestuje dużo wysiłku w ich eksperymentalne wykrycie. Z drugiej strony niektórzy astronomowie postulują zmiany w teorii grawitacji w celu rozwiązania zagadki bez potrzeby odwoływania się do nowych cząstek elementarnych; sytuacja jest skomplikowana i daleka od rozwiązania.



Głównym dowodem na istnienie problemu są obserwacje zachowania się świecącej materii (gazu, gwiazd) w galaktykach: między innymi tego, jak zmienia się prędkość gwiazd i gazu względem odległości od centr galaktyk. Zakładając, że teoria grawitacji jest poprawna w skalach rozmiaru galaktyk, wiele z nich nie mogłoby istnieć – rozpadłyby się w trakcie rotacji lub nie uformowałyby się w obserwowanym kształcie – gdyby nie zawierały dużej ilości niewidocznej materii oddziałującej grawitacyjnie z tą, którą bezpośrednio obserwujemy. Nieobserwowalna i masywna otoczka, która przeważa nad masą galaktyki, nazywana jest *halo ciemnej materii*.

Istnienie ciemnej materii w galaktykach jest obecnie częścią „głównego nurtu” astronomii. Tym bardziej szokujące były niedawne obserwacje zespołów korzystających z teleskopów Gemini North i Kecka (Maunakea, Hawa’i) oraz teleskopu Hubble’a galaktyki NGC1052-DF2, odległej o 65 milionów lat świetlnych, która wygląda tak, jakby nie zawierała w ogóle ciemnej materii! Przez dziesięciolecia przyjmowano, że galaktyki rozpoczynają swoje życie jako skupiska (doły potencjału grawitacyjnego) ciemnej materii, w które stopniowo wpada coraz więcej „zwykłej” materii, gaz zamienia się w gwiazdy, a następnie pojawiają się coraz bardziej skomplikowane struktury i populacje, takie jak obserwowane w Drodze Mlecznej. NGC1052-DF2 należy do typu galaktyk o bardzo małej jasności powierzchniowej (UDG, Ultra-Diffuse Galaxy), które mając masę i rozmiar Drogi Mlecznej mogą być od niej setki razy mniej jasne, co jest związane z brakiem gazu potrzebnego do procesów gwiazdotwórczych, zawierają one stare populacje gwiazd. Obecnie nie wiadomo, jak powstają galaktyki tego typu. NGC1052-DF2 znajduje się w gromadzie zdominowanej przez gigantyczną galaktykę eliptyczną NGC1052. Powstawanie galaktyk jest gwałtownym procesem i, być może, pobliska obecność dużej galaktyki miała wpływ na wzrost NGC1052-DF2 i jej niedobory ciemnej materii. Inną hipotezą jest kataklizmiczne wydarzenie w przeszłości: szybkie powstanie dużej liczby masywnych gwiazd, których promieniowanie wyrzuciło cały gaz i ciemną materię, powstrzymując powstawanie kolejnych gwiazd.

Michał BEJGER

## Niebo we wrześniu

Wrzesień jest spotkaniem lata z jesienią, przy całym czasie postępującym skracaniem się dnia i wydłużaniem nocy. 23 września przed godziną 4 rano Słońce przekroczy równik niebieski w drodze na południe i tym samym na północnej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna jesień. Jednak faktyczna równonoc na naszych szerokościach geograficznych nastąpi 2 dni później, a do końca września dzień skróci się o ponad kwadrans. Wrzesień jest miesiącem zakryć gwiazd przez Księżyc. W jego trakcie Srebrny Glob przesłoni aż 7 dość jasnych gwiazd, niestety, nie tych najjaśniejszych.

Na początku września na porannym niebie dobrze widoczna jest planeta Merkury, która 26 sierpnia osiągnęła maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą 18° i pozostanie dostępna obserwacjom do końca pierwszej dekady miesiąca. W tym czasie jej jasność urośnie z  $-0,8$  do  $-1,3^m$ , średnica kątowna spadnie z 6 do 5'', zaś faza zwiększy się z 65 do 92%. Merkury 6 września przejdzie 1° na północ od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa, a 8 i 9 września w małej odległości minie go Księżyc. Najpierw 4-procentowy sierp Srebrnego Globu znajdzie się 10° na zachód od



Merkurego (Regulus 4° bliżej), dobę później Księżyc niecałe 15 godzin przed nowiem znajdzie się 3,5 stopnia na wschód od pierwszej planety Układu Słonecznego. W międzyczasie zakryje on Merkurego, co będą mogli obserwować mieszkańcy rosyjskiego Zabajkala. O ile z odnalezieniem Księżyca 8 września nie powinno być kłopotów, to dobę później stanie się to bardzo trudne, jeśli w ogóle możliwe.

Pierwsza dekada września skończy się nowiem naturalnego satelity Ziemi, ale przez cały jej czas Księżyc zdominuje poranne niebo, gdyż o tej porze doby ekliptyka jest nachylona do widnokregu pod maksymalnym kątem. 3 września Księżyc w ostatniej kwadrze przejdzie przez Hiady i spotka się z Aldebaranem, najjaśniejszą gwiazdą Byka. Niestety, minie przy tym wszystkie jasne gwiazdy z południowej części gromady, samego Aldebarana – w odległości 0,5 stopnia. Tuż po północy z 4 na 5 września sierp Księżyca w fazie 29% zakryje gwiazdę 4. wielkości  $\nu$  Geminorum. 7 września węższy o 20% sierp Srebrnego Globu przejdzie niecałe 2° na południe od gromady otwartej M44, a jego brzeg minie w odległości tylko 4' gwiazdę Asellus Australis, tworzącą południowo-wschodni róg otaczającego M44 trapezu gwiazd 4. i 5. wielkości (zakrycie w południowej Europie i północnej Afryce).

Na niebie wieczornym postępuje pogarszanie się warunków obserwacyjnych wszystkich pozostałych jasnych planet Układu Słonecznego. O tej porze doby ekliptyka jest nachylona minimalnie i planeta Wenus, znajdująca się kilka stopni pod nią, mimo dużej odległości kątowej od Słońca, zachodzi niewiele po nim i po zmierzchu jest niewidoczna. Można ją próbować dostrzec w dzień, gdyż jasność planety przekroczy  $-4,6^m$ , ale jest to zadanie dla doświadczonych obserwatorów. Ułatwi je powracający na wieczorne niebo Księżyc. 12 września, mając tarczę oświetloną w 11%, przejdzie on 10° na północ od Wenus.

Planeta Jowisz zachodzi około dwie godziny po Słońcu i można ją obserwować tylko krótko po zmierzchu, nisko nad południowo-zachodnim widnokregiem. W trakcie miesiąca jasność Jowisza spadnie do  $-1,8^m$ , a jego tarcza skurczy się do 33". Do tego czasu Jowisz oddali się od gwiazdy Zuben Elgenubi na prawie 7°. Tyle samo zabraknie Księżycowi do Jowisza w dniach 13–14 września, gdy spotka się z nim w fazie ponad 20%.

16 września Księżyc przejdzie przez I kwadrę, a dobę później spotka się z planetą Saturn. Wieczorem oba ciała Układu Słonecznego oddzieli dystans mniejszy niż 1,5 stopnia. Szósta planeta od Słońca 6 września zmieni kierunek swojego ruchu na prosty, tym samym zakończy się okres jej najlepszej widoczności w tym roku. Zbliży się wtedy do pary jasnych mgławic M8 i M20 na nieco ponad 100'. We wrześniu jasność Saturna spadnie do  $+0,5^m$ , a tarcza planety zmniejszy średnicę do 16". Nadal blisko Saturna przebywa planetoida (4) Westa. 26 września przejdzie ona niecałe 3° na południe od Saturna, ale do jej odszukania potrzebna jest przynajmniej lornetka, gdyż jasność planetoidy jest o ponad 7<sup>m</sup> mniejsza od jasności szóstej planety od Słońca.

Dobę po spotkaniu z Saturnem Księżyc dotrze do charakterystycznego łuku gwiazd 3. i 4. wielkości w północno-wschodnim krańcu gwiazdozbioru Strzelca i zakryje położoną najbardziej z nich na południe gwiazdę  $\sigma$  Sgr. Do zakrycia przez ciemny brzeg dojdzie jeszcze na jasnym niebie tuż po zmierzchu, około godziny 19:20. Gwiazda pojawi się ponownie już na ciemnym niebie, około godz. 20:45.

Pierwszą w miarę dobrze widoczną wrześniową planetą jest Mars, który nadal góruje po zapadnięciu ciemności. Czerwona Planeta przesuwa się ruchem prostym na północny wschód, kontynuując szybkie oddalanie się od Ziemi, skutkujące znacznym spadkiem jasności i średnicy kątowej. Do końca września blask Marsa osiągnie  $-1,3^m$ , a średnica tarczy – 16", czyli tyle samo, co w przypadku odległego o 30° Saturna. Mała jak na Marsa będzie jego faza, jedynie 89%, co przy nadal dużej tarczy powinno dać się łatwo dostrzec przez teleskop. 19 i 20 września Czerwoną Planetę minie Księżyc w fazie około 80%, a kolejnej nocy, 21 września oświetlony w 90% zakryje następną jasną gwiazdę. Tym razem będzie to Nashira, gwiazda Koziorożca, oznaczana na mapach nieba grecką literą  $\gamma$ . Gwiazda zniknie za księżycową tarczą około godziny 23, ale tylko na północ od linii, łączącej Wałbrzych poprzez Konin z Olsztynem.

Po minięciu Marsa Księżyc podaży ku ostatnim dwóm planetom Układu Słonecznego, będącymi niedaleko opozycji. Ich warunki obserwacyjne są bardzo dobre. Neptun znajdzie się po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce 7 września, zaś Uran uczyni to pod koniec października. We wrześniu Neptun przejdzie przez trójkąt gwiazd 5. i 6. wielkości 81, 82 i 83 Aqr, znajdujący się prawie w połowie drogi między gwiazdami  $\lambda$  i  $\varphi$  Aqr, sam świecąc blaskiem  $+7,8^m$ . Księżyc spotka się z Neptunem 23 września dzień przed pełnią, zakrywając przy tym w okolicach północy gwiazdy  $\psi 1$  i  $\psi 2$  Aqr. Jednak bliskość pełni sprawi, że zakrycia staną się trudne do obserwacji. 3 dni później Srebrny Glob zbliży się na 7° do mającego jasność  $+5,7^m$  Urana, zmniejszając przy tym fazę do 96%, a wieczorem tego samego dnia, około 22:30, zakryje kolejną gwiazdę 4. wielkości  $\xi 2$  Ceti. Miesiąc Srebrny Glob zakończy ponownym przejściem przez centralny obszar Hiad.

We wrześniu warto pamiętać o komecie 21P/Giacobini-Zinner. Jest to kometa okresowa, obiegająca Słońce raz na 6,5 roku i jest źródłem październikowego roju meteorów Drakonidów. 10 września kometa jednocześni przejdzie przez perihelium, nieco ponad 1 AU od Słońca i zbliży się do Ziemi na mniej niż 0,4 AU, stąd może pojaśnić nawet do  $+7^m$ . Być może dzięki temu w tym roku Drakonidy pojawią się w większej liczbie niż zazwyczaj. W okresie maksymalnej jasności w obserwacjach komety nie przeszkodzi Księżyc w nowiu. We wrześniu kometa 21P przemierzy obszar od środka gwiazdozbioru Woźnicy, poprzez pogranicze Byka, Oriona i Bliźniąt do wnętrza gwiazdozbioru Jednorożca.

*Ariel MAJCHER*

## Dlaczego $\sqrt{2}$ nie pasuje do liczb wymiernych?

Zupełnie nieszkodząca *zasada dobrego uporządkowania* mówi, że każdy niepusty podzbiór liczb naturalnych ma element najmniejszy. Pokażemy, jak ją wykorzystać do wykazania, że  $\sqrt{2}$  jest niewymierne, czyli że dla żadnej liczby naturalnej  $n$  liczba  $n\sqrt{2}$  nie jest całkowita.

Niech  $S = \{n \in \mathbb{N} : n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\}$ . Załóżmy, że zbiór  $S$  jest niepusty. Oczywiście,  $S \subset \mathbb{N}$ , więc z *zasady dobrego uporządkowania* zbiór  $S$  ma element najmniejszy (być może nie jest on jedyny). Niech tym elementem będzie

$k \in \mathbb{N}$ . Rozważmy następującą liczbę:  $(\sqrt{2} - 1)k$ . Skoro  $k \in S$ , to  $\sqrt{2}k \in \mathbb{Z}$ . Zatem  $\sqrt{2}k - k \in \mathbb{Z}$  oraz

$$(\sqrt{2} - 1)k\sqrt{2} = 2k - \sqrt{2}k > 0.$$

Zauważmy, że  $2k \in \mathbb{N}$  oraz  $\sqrt{2}k \in \mathbb{Z}$ , więc  $2k - \sqrt{2}k \in \mathbb{Z}$ . W takim razie  $(\sqrt{2} - 1)k \in S$ , ale  $(\sqrt{2} - 1)k < k$ , a założyliśmy, że  $k$  jest elementem najmniejszym ze zbioru  $S$ . Zatem otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że  $S$  jest niepustym zbiorem.

Mateusz DĘBOWSKI

## Skąd mógł to wiedzieć?

W  $\Delta_{18}^3$  (*Z notatnika geniusza*) i w tym numerze (str. 8) przedstawione są różne zależności liczbowe pochodzące od Ramanujana. Robią ogromne wrażenie, tym bardziej że Ramanujan podał je bez uzasadnień i dla nas mają status natchnionej wizji. Warto zauważyć, że takie wizjonerskie przedstawianie matematycznych faktów trafiało się wielokrotnie. Zbiorem takich wizji jest ogromne dzieło Diofantosa (które będzie przywołane w  $\Delta_{18}^{10}$ ) powstałe dwa tysiące lat temu, a dotyczące teorii liczb.

W szczególności znajduje się tam stwierdzenie, że dla dowolnych liczb całkowitych  $a, b, c, d$  wyrażenie  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$  też da się przedstawić jako suma kwadratów dwóch liczb całkowitych i to na dwa sposoby. Zamiast dowodu jest tam po prostu napisane, jakie są to liczby:  $ac - bd$  i  $ad + bc$  lub  $ac + bd$  i  $ad - bc$ ; dla przykładu, biorąc 2, 4, 3 i 5, otrzymamy

$$(4 + 16)(9 + 25) = (6 - 20)^2 + (10 + 12)^2 = (10 - 12)^2 + (6 + 20)^2,$$

proszę sprawdzić.

Dziś ta prawidłowość kojarzy się z twierdzeniem o liczbach zespolonych, które mówi, że *moduł iloczynu równa się iloczynowi modułów*, ale jak mógł to dostrzec Diofantos?

M. K.

## Galileusz Arystotelesa ośmieszył... A co na to Newton?

W *Małej Delcie* z czerwca 2018 M. K. opisał prosty dowód podany przez Galileusza, pokazujący, że swobodne spadanie ciał nie może być ruchem, w którym, jak twierdził Stagiryta, prędkość spadającego ciała jest proporcjonalna do przebytej przez nie drogi. Galileusz posłużył się prostymi argumentami (wszak mechanika analityczna jeszcze nie istniała) logiczno-geometrycznymi. Nie będę ich tu cytował, kto nie pamięta, łatwo je w *Delcie* odnajdzie.

Popatrzmy jednak na taki ruch newtonowskimi oczyma. Równanie  $v(t) = s(t)$  możemy zapisać w postaci równania różniczkowego

$$\frac{ds}{dt} = s.$$

Całkując je, otrzymujemy

$$\ln s = t + a,$$

gdzie  $a$  jest stałą całkowania. Jeśli teraz wybierzemy (za Galileuszem) na drodze poruszającego się ciała punkty

$$s_n = 2^{-n},$$

to po podstawieniu do ostatniego równania otrzymamy

czas  $t_n$ , w którym poruszające się ciało znajdzie się w punkcie  $s_n$ :

$$t_n + a = -n \ln 2.$$

Widzimy zatem, że

$$t_{n+1} - t_n = \ln 2.$$

(Istotnie, jest to więcej niż  $1/2$ ). Każdy z nieskończonej liczby odcinków jest w tym ruchu przebywany w takim samym czasie o wartości  $\ln 2$ .

Jeśli rozwiązanie równania ruchu zapiszemy w postaci *explicite*

$$s = be^t,$$

gdzie  $b = e^a$ , to widzimy, że punkt  $s = v = 0$  odpowiada wartości  $t = -\infty$ .

Tak więc ciało poruszające się ruchem, o którym mówił Arystoteles, nigdy nie może być w spoczynku ( $v = 0$ ), chyba że myślimy o epoce, zanim Matka Ziemia wyłoniła się z Chaosu i we śnie urodziła Uranosa...

Krzysztof REJMER



Więcej o zasadzie szufladkowej znaleźć można m.in. w *deltoidach* 2 i 3/2009.

## O ustawianiu

Joanna JASZUŃSKA

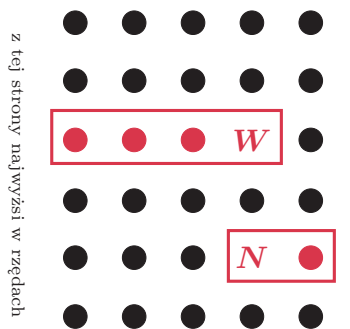
Zasada szufladkowa Dirichleta głosi, iż jeśli rozmieszczamy pewną liczbę obiektów w mniejszej liczbie szufladek, to któreś dwa z nich trafią do tej samej szufladki. Podobnie, jeśli liczba obiektów jest większa niż dwukrotność liczby szufladek, któreś trzy trafią razem do szufladki itd.

1. Podczas defilady żołnierze mają być ustawieni w prostokąt, przy czym w każdej kolumnie i w każdym rzędzie mają stać od najwyższego do najniższego (żadni dwaj z nich nie są równego wzrostu). Dowódca ustawia ich w prostokącie jakkolwiek, po czym porządkuje według wzrostu w każdej kolumnie osobno, następnie zaś w każdym rzędzie (psując być może porządek w kolumnach), potem, jeśli trzeba, znów w kolumnach, znowu w rzędach etc. Czy ten sposób działania ma sens, tzn. czy niezależnie od początkowego ustawienia żołnierzy ta procedura zawsze po skończeniu wielu takich przestawieniach da żądany efekt? A jeśli tak, to po ilu?

2. W szeregu stoi, w przypadkowej kolejności, 50 żołnierzy. Żadnych dwóch nie jest tego samego wzrostu. Wykaż, że można wybrać ośmiu z nich tak, aby, gdy wystąpią oni krok naprzód, byli ustawieni według wzrostu (rosnąco lub malejąco).

3. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej  $n > 0$  istnieje taka liczba całkowita  $k > 0$ , że liczbę  $kn$  można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

4. Na okręgu umieszczono 101 dodatnich liczb całkowitych o sumie równej 300. Wykaż, że istnieje taki łuk okręgu, na którym suma liczb równa jest 200.



Rys. 1. Kolorowe ramki oznaczają żołnierzy wysokich i niskich.

### Rozwiązania

**R1.** Tak; co więcej, wystarczy ustawić żołnierzy raz w kolumnach i raz w rzędach. Przypuśćmy, że potem w pewnej kolumnie wyższy żołnierz  $W$  stoi za niższym  $N$ , wbrew żądaniu, że mają stać według wzrostu (rys. 1). Rozważmy żołnierzy stojących w rzędzie z  $W$  i przed nim (są oni wyżsi od niego, ich wraz z  $W$  nazwiemy *wysokimi*) oraz żołnierzy stojących w rzędzie z  $N$  i za nim (są niżsi od  $N$ , ich wraz z  $N$  nazwiemy *niskimi*). Zauważmy, że każdy żołnierz wysoki jest wyższy od każdego z żołnierzy niskich (bo jest wyższy od  $W$ , a  $W$  – od  $N$ ). Wysokich i niskich żołnierzy jest łącznie o 1 więcej niż kolumn, więc zanim uporządkowano rzędy, pewnych dwóch z nich stało w tej samej kolumnie. Wysocy stali w różnych kolumnach, niscy też w różnych, stąd w jednej kolumnie musiał stać jakiś żołnierz wysoki za niskim – sprzeczność, bo kolumny były już wtedy uporządkowane.  $\square$

**R2.** Każdego żołnierza utożsamiamy z jego wzrostem, a następnie dajemy mu numer – długość najdłuższego rosnącego podciągu w danym szeregu, którego jest on ostatnim elementem. Jeśli któryś żołnierz ma numer 8, mamy szukany podciąg rosnący.

W przeciwnym przypadku każdy z 50 żołnierzy ma numer najwyżej 7. Gdyby każdy z numerów od 1 do 7 występował najwyżej 7-krotnie, łącznie mielibyśmy najwyżej 49 żołnierzy. Stąd któraś liczba powtarza się co najmniej 8 razy. Żołnierze o tych właśnie numerach tworzą szukany podciąg malejący, gdyż każdy kolejny z nich jest niższy od poprzednika o tym samym numerze (gdyby bowiem był wyższy, byłby następnym elementem rosnącego podciągu i miałby numer o jeden większy).  $\square$

**R3.** Rozważmy liczby  $1, 11, 111, \dots$ . Wśród pierwszych  $n + 1$  z nich pewne dwie dają tę samą resztę z dzielenia

przez  $n$ . Ich różnica jest liczbą postaci  $11 \dots 100 \dots 0$  podzieloną przez  $n$ , co kończy dowód.  $\square$

**R4.** Oznaczmy liczby wokół okręgu kolejno przez  $a_1, a_2, \dots, a_{101}$  i rozważmy sumy  $a_1 + a_2 + \dots + a_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, 100$ . Są to dodatnie liczby całkowite mniejsze od 300. Jeśli któraś z tych sum jest równa 200, zadanie jest rozwiązane, podobnie dla sumy 100 (wtedy wszystkie pozostałe  $a_i$  wyznaczają szukany łuk).

Jeśli żadna z sum nie jest równa 200 ani 100, to każda z nich przy dzieleniu przez 100 daje jedną z 99 niezerowych reszt. Wówczas pewne dwie sumy  $a_1 + \dots + a_j$  oraz  $a_1 + \dots + a_k$  dla  $j < k$  dają taką samą resztę, więc ich różnica  $a_{j+1} + \dots + a_k$  dzieli się przez 100, czyli jest równa 200 lub 100. Podobnie jak powyżej wyznacza ona wobec tego poszukiwany łuk lub jego dopełnienie.  $\square$

### Zadania domowe

5. Wykaż, że wśród dowolnych 1111 parami różnych podzbiorów zbioru 11-elementowego zawsze znajdują się dwa rozłączne.

6. Udowodnij, że w dowolnym ciągu 2018 liczb całkowitych zawsze można wskazać pewną liczbę kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez 2018.

# LIX SZKOŁA MATEMATYKI POGLĄDOWEJ

# MATEMATYKA I KOMPUTERY

TERMIN: 8-11 lutego 2019 roku

**Nie gwarantujemy, że o tym akurat będzie mowa, ale gwarantujemy, że mowa będzie o takich rzeczach:**

#### Wizualizacja i modelowanie świata:

jak przy tym oszukiwać, np. zamieniając zniemacka równania różniczkowe cząstkowe na zwyczajne; jak modelować coś, czego nie jesteśmy w stanie sprawdzić eksperymentalnie (np. w astronomii) lub coś, co jest nieracjonalne (np. zachowanie ludzkie).

#### Dowody wspierane komputerowo:

(na twierdzeniu o czterech barwach świat się nie kończy)  
COQ, Mizar i mniej znane twierdzenia udowodnione przy asyście komputera.

#### Naprawdę trudne obliczenia:

złożoność obliczeniowa, maszyny Turinga, problem stopu; zadanie na wieczór: sprawdzić, czy  $P=NP$ .

#### O tym, czego do niedawna nie podejrzewano:

sieci społecznościowe, bitcoin, sztuczne sieci neuronowe oraz ich mechanizmy.

#### Ciekawostka:

W 2010 r. naukowcy z Uniwersytetu w Edynburgu wystawili na sprzedaż twierdzenia. Z asystą komputerów udowodnili nowe twierdzenia i miały one zostać nazwane tak jak zazyczy sobie kupujący.



Szkoły są otwarte dla wszystkich, którzy są z matematyką związani, niezależnie od tego, czy jej uczą, uprawiają ją, piszą o niej, czy tylko się nią pasjonują. Szczególnie mile widziani są młodzi matematycy, którzy uczą bądź chcą uczyć, w szkołach wyższych.

## Zapraszamy

Zgłoszenia uczestnictwa przyjmowane są do **20.12.2018** poprzez formularz znajdujący się na stronie **[www.smp.uph.edu.pl](http://www.smp.uph.edu.pl)**

Pytania należy kierować na adres **[okm@uph.edu.pl](mailto:okm@uph.edu.pl)**



Ośrodek Kultury Matematycznej