

Nakład: 3500 egz.



NR 7 (530) 2018  
CENA 4 ZŁ VAT 9%  
P. ISSN 0137-3925 I NR IND 35 580 X  
MES. ECZNIK  
[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

**Nieprzechodnie  
kostki i ruletki**  
str. 1






20 maja 2018 roku  
zmarł

**Michał Nawrocki**

fizyk

**Przewodniczący Komitetu Redakcyjnego *Delty***

## SPIS TREŚCI NUMERU 7 (530)

Nieprzechodnie kostki i ruletki <i>Andrzej Komisariski</i>	str. 1
Jak powstały wszystko opisujące liczby <i>Marek Kordos</i>	str. 4
O powstawaniu pierwiastków <i>Michał Bejger</i>	str. 7
Niewąskie nierówności <i>Karol Horoch</i>	str. 9
Wyniki olimpiad 2017/2018	str. 11
Ostatni Mohikanin <i>Lukasz Rajkowski</i>	str. 15
 Zadania	str. 16
Migawka informatyczna: Kiedy możemy czuć się bezpieczni?	str. 17
 Pamiętajcie o następcach <i>Magdalena Fikus</i>	str. 18
Informatyczny kącik olimpijski (117): <i>Bajtockie kółeczko</i>	str. 19
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: Czuły zwiadowca	str. 22
Niebo w lipcu	str. 22
Aktualności Fizyka prachłodziarek	str. 24
 Nieprawdopodobne! <i>Joanna Jaszewska</i>	str. 25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, **prof. dr hab. Michał Nawrocki** – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216, pokój 101, 01-460 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl) lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.  
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

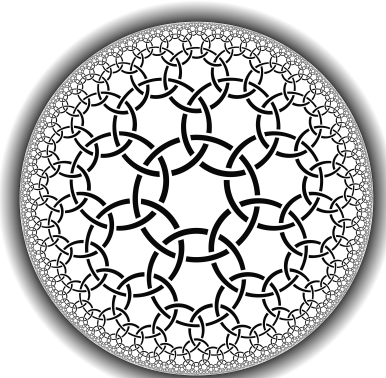
Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

**Można nas też znaleźć na** [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**W następnym numerze  
prezentujemy pierwszą  
alternatywną geometrię.**

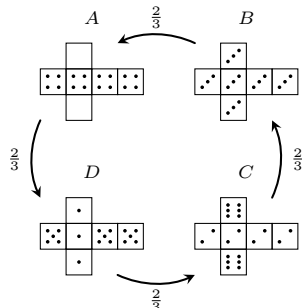


# Nieprzechodnie kostki i ruletki

Andrzej KOMISARSKI\*

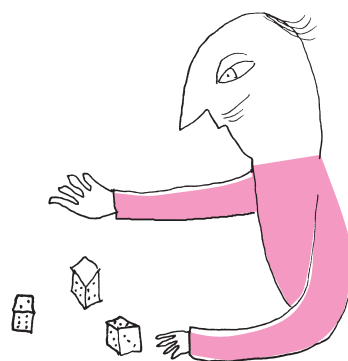
\*Wydział Matematyki i Informatyki,  
Uniwersytet Łódzki

W roku 1970 Martin Gardner opisał w dziale matematycznym czasopisma *Scientific American* kostki do gry odkryte kilka lat wcześniej przez statystyka Bradleya Efrona. Kostki te (oznaczymy je  $A, B, C$  oraz  $D$ ) różnią się od zwykłej kostki tym, że na ich ściankach umieszczone są inne liczby oczek:



- kostka  $A$  – ma dwie ścianki puste, a na każdej z pozostałych czterech ścianek umieszczone są po 4 oczka;
- kostka  $B$  – na każdej ściance znajdują się 3 oczka;
- kostka  $C$  – na czterech ściankach znajdują się po 2 oczka, a na dwóch po 3;
- kostka  $D$  – na trzech ściankach znajduje się po 1 oczku, a na pozostałych po 5.

Rzucając kostkami  $A$  i  $B$  z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$ , uzyskamy więcej oczek na kostce  $A$  niż na  $B$ . Gdy rzucimy  $B$  oraz  $C$ , to z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$  uzyskamy więcej oczek na kostce  $B$  niż na  $C$ . W podobny sposób (za każdym razem z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$ ) kostka  $C$  okazuje się lepsza od  $D$ , zaś  $D$  lepsza od  $A$ . Czyli wśród tych czterech kostek nie ma najlepszej! Ujmując to inaczej: dla każdej kostki z tego zestawu można znaleźć w tym zestawie kostkę lepszą. Przy sortowaniu kostek od najgorszej do najlepszej powstaje cykl (patrz rysunek). Relacja między kostkami, polegająca na byciu lepszą, nie jest przechodnia! Ta nieprzechodniość fascynowała nie tylko matematyków, ale również socjologów i ekonomistów (którzy powiązali ją z teorią wyboru i z modelami użyteczności losowej).



Rozważmy dwuosobową grę: pierwszy gracz wybiera jedną z kostek  $A, B, C, D$ , drugi wybiera jedną z pozostałych, a następnie obaj rzucają wybranymi kostkami. Wygrywa ten, kto uzyska więcej oczek. Okazuje się, że w tej grze lepiej być drugim graczem, bo wybierając odpowiednio kostkę, wygrywa się z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$ .

**Gra  $n$  „kostkami”.** Załóżmy, że mamy jakiś inny skończony zbiór przyrządów do losowania liczb (niekoniecznie sześciennych kostek), który dawałby w analogicznej grze dużą szansę wygrania drugiemu graczowi. Jak duża może być ta szansa? Niech  $X_1$  będzie dowolnym przyrządem z tego zbioru, zaś  $X_2, X_3, \dots$  określamy w ten sposób, że  $X_k$  jest tym przyrządem, który wybrałby gracz drugi, gdyby gracz pierwszy wybrał przyrząd  $X_{k-1}$ . Ponieważ przyrządów jest skończenie wiele, to w którymś momencie muszą zacząć się powtarzać, powstanie cykl. Możemy usunąć ze zbioru wszystkie przyrządy spoza tego cyklu – to może co najwyżej zwiększyć szansę drugiego gracza. Oznaczmy przez  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  zbiór takich tworzących cykl przyrządów. Niech odpowiedzią gracza drugiego na  $X_{k-1}$  będzie  $X_k$  (dla  $k = 1, \dots, n$ ). Przyjmijmy  $X_0 = X_n$ . Prawdopodobieństwo tego, że przy optymalnej grze obu graczy drugi wygra, wynosi  $\min_{1 \leq k \leq n} P(X_{k-1} < X_k)$ .

Wykażemy, że dla  $n$  przyrządów, tworzących cykl, prawdopodobieństwo to może przyjąć wartość co najwyżej

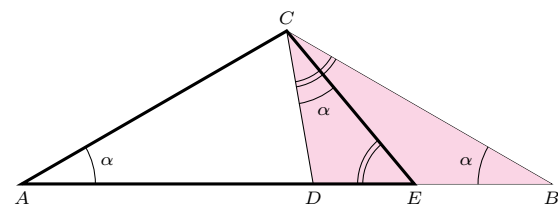
$$\pi_n = 1 - \frac{1}{4 \cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}}$$

Dla zbioru  $n$  przyrządów prawdopodobieństwo to jest co najwyżej takie, jak dla pewnego cyklu zawartego w tym zbiorze, a więc nie przekracza  $\pi_n$ . Z drugiej strony, gdy wszystkie elementy zbioru należą do cyklu długości  $n$ , to może ono być równe  $\pi_n$ .

**Geometryczne narzędzia.** Będziemy potrzebować pewnych geometrycznych obserwacji. Rozważmy taki trójkąt równoramienny  $ABC$ , że  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \alpha \leq 60^\circ$ . Wybierzmy takie punkty  $D$  oraz  $E$  na boku  $AB$ , żeby  $\sphericalangle ECD = \alpha$  oraz żeby punkt  $D$  leżał bliżej wierzchołka  $A$  niż punkt  $E$ . Wówczas  $AE \cdot DB = AC^2$ .

Tym samym symbolem oznaczamy przyrząd oraz zmienną losową opisującą wynik losowania z użyciem przyrządu.

$\pi_3 \approx 0,618, \pi_5 \approx 0,692,$   
 $\pi_6 \approx 0,707, \pi_7 \approx 0,717, \pi_{12} \approx 0,732$   
Ciąg  $(\pi_n)$  jest rosnący.



Trójkąty  $AEC$  i  $BCD$  są podobne, a stąd wynika, że

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{BD}$$

(ostatnia równość wynika z równoramienności  $\triangle ABC$ ), czyli  $AE \cdot DB = AC^2$ .



**Rozwiązanie zadania M 1571.**

Wykażemy, że szukanym zbiorem jest wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka  $B$ .

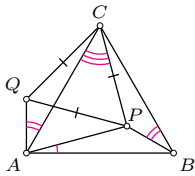
Z jednej strony, dla każdego punktu  $P$  tej wysokości mamy

$$\frac{\sphericalangle PAB + \sphericalangle PCA}{2} = \frac{\sphericalangle PCB + \sphericalangle PCA}{2} = 30^\circ = \sphericalangle PBC.$$

Z drugiej strony, przypuśćmy, że punkt  $P$  wnętrza trójkąta równobocznego  $ABC$  jest taki, że

$$\sphericalangle PBC - \sphericalangle PAB = \sphericalangle PCA - \sphericalangle PBC.$$

Oznaczmy przez  $Q$  obraz punktu  $P$  w obrocie wokół  $C$  przeprowadzającym  $B$  na  $A$ . Wówczas trójkąt  $CPQ$  jest równoboczny.

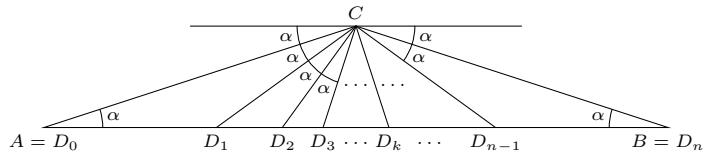


Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sphericalangle PAQ - \sphericalangle AQP &= \\ &= (60^\circ + \sphericalangle QAC - \sphericalangle PAB) - (\sphericalangle AQC - 60^\circ) = \\ &= 60^\circ + \sphericalangle PBC - \sphericalangle PAB - \sphericalangle BPC + 60^\circ = \\ &= 120^\circ + \sphericalangle PCA - \sphericalangle PBC - \sphericalangle BPC = \\ &= 120^\circ + 60^\circ - \sphericalangle PCB - \sphericalangle PBC - \sphericalangle BPC = \\ &= 180^\circ - 180^\circ = 0, \end{aligned}$$

skąd  $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle AQP$  i  $AP = QP = CP$ . To oznacza, że punkt  $P$  leży na symetralnej odcinka  $AC$ , czyli na wysokości trójkąta  $ABC$  opuszczonej z  $B$ .

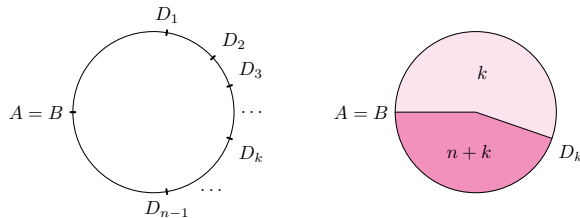
Powtórzmy teraz wielokrotnie wcześniejszą obserwację.



Niech  $n \geq 2$  i  $\alpha = \frac{180^\circ}{n+2}$ . Wówczas  $\sphericalangle BCA = n \cdot \alpha$ . Jeśli punkty  $D_0 = A, D_1, D_2, \dots, D_n = B$  wybierzemy na boku  $AB$  w taki sposób, że  $\sphericalangle D_k CD_{k-1} = \alpha$  dla  $k = 1, \dots, n$ , to zachodzi  $AD_k \cdot D_{k-1}B = AC^2$ .

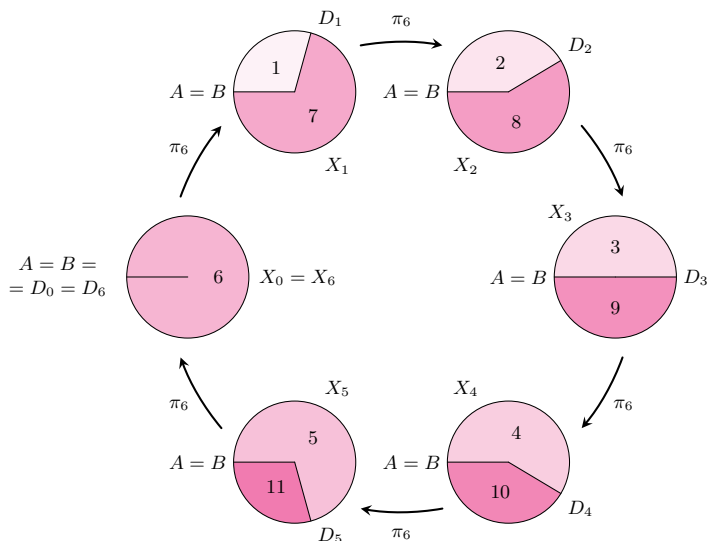
Jesteśmy gotowi, by skonstruować  $n$  przyrządów losujących, pozwalających graczowi drugiemu wygrać z prawdopodobieństwem  $\pi_n$ .

**Konstrukcja ruletek.** Nawiniemy odcinek  $AB$  (czyli najdłuższy bok trójkąta) na koło o środku  $O$  i promieniu  $\frac{AB}{2\pi}$  tak, by stał się on obwodem koła. Punkty  $A = D_0$  oraz  $B = D_n$  ulegną sklejeniu, tworząc jeden punkt, który wraz z punktami  $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$  dzieli obwód na  $n$  części. Punkty te, oczywiście, nie są równomiernie rozmieszczone na obwodzie, tak samo jak nie były na boku trójkąta. Przyrząd  $X_k$  (gdzie  $k = 0, 1, \dots, n$ ) to ruletka, którą otrzymujemy, dzieląc koło promieniami  $OA$  oraz  $OD_k$  na dwa sektory, w które wpisujemy liczby  $k$  oraz  $n+k$  w sposób pokazany na rysunku.



Z lewej szablon do zbudowania  $n$  przyrządów, z prawej przyrząd  $X_k$ .

Ruletka działa w naturalny sposób – można, na przykład, zamocować w środku wskazówkę i wprawić ją w ruch, każda jej wynikowa pozycja jest tak samo prawdopodobna, a wynikiem losowania będzie liczba wpisana w pole, na którym się ona zatrzyma. Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku  $k$  na przyrządzie  $X_k$  wynosi  $\frac{AD_k}{AB}$  (stosunek długości łuków), zaś prawdopodobieństwo uzyskania wyniku  $n+k$  wynosi  $\frac{D_k B}{AB}$ . Ruletki  $X_0$  oraz  $X_n$  są identyczne – zwracają jedynie wynik  $n$ . Dla przykładu, dla  $n = 6$  uzyskujemy następujące ruletki:



Aby obliczyć prawdopodobieństwo tego, z jakim  $X_{k-1}$  jest mniejsze od  $X_k$ , zauważmy, że  $X_{k-1}$  może przyjąć tylko wartości  $k-1$  lub  $k-1+n$ , zaś  $X_k$  tylko wartości  $k$  lub  $k+n$ . Zatem  $X_{k-1}$  jest mniejsze od  $X_k$  zawsze z wyjątkiem



**Rozwiązanie zadania F 956.**

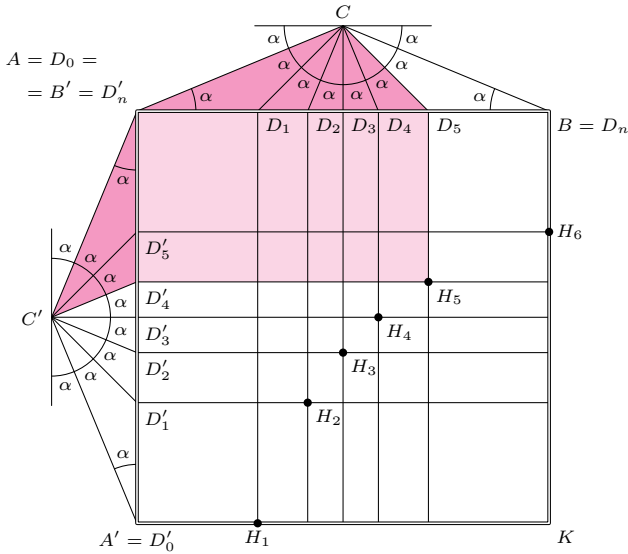
Dla daleko idącego uproszczenia przyjmijmy, że Ziemia jest ciekłą, jednorodną kulą. Korzystając z faktu, że wewnątrz jednorodnej powłoki kulistej wypadkowa siła grawitacji od całej powłoki równa się zeru, otrzymujemy, że przyspieszenie grawitacyjne  $\gamma$  we wnętrzu Ziemi rośnie liniowo z odległością  $r$  od jej środka:  $\gamma(r) = gr/R$ . Pozostaje nam obliczyć ciśnienie pochodzące od słupa cieczy o gęstości  $\rho$  i wysokości  $R$  znajdującego się w polu grawitacyjnym  $\gamma(r)$ :

$$\begin{aligned} p &= \int_0^R \rho \gamma(r) dr = \\ &= \int_0^R \rho g \frac{r}{R} dr = \frac{1}{2} \rho g R \end{aligned}$$

(niełubiący całkowania dla otrzymania wzoru końcowego mogą posłużyć się analogią z obliczaniem prędkości średniej w ruchu jednostajnie przyspieszonym). Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy  $p = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \approx 1,8 \cdot 10^6 \text{ atm}$ . Na podstawie badań fal sejsmicznych wartość ciśnienia we wnętrzu Ziemi oceniana jest w granicach od  $3,5 \cdot 10^6 \text{ atm}$  do  $3,9 \cdot 10^6 \text{ atm}$ . Niedoszacowanie tej wartości w przeprowadzonym powyżej rachunku wynika z nieuwzględnienia wzrostu gęstości skał wraz ze zbliżaniem się do środka Ziemi.

sytuacji, gdy  $X_k = k$  oraz  $X_{k-1} = k - 1 + n$ . Wynika stąd, że dla  $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} P(X_{k-1} < X_k) &= 1 - P(X_k = k) \cdot P(X_{k-1} = k - 1 + n) = \\ &= 1 - \frac{AD_k}{AB} \cdot \frac{D_{k-1}B}{AB} = 1 - \frac{AC^2}{AB^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{4 \cdot \left(\frac{AB/2}{AC}\right)^2} = 1 - \frac{1}{4 \cos^2 \alpha} = \pi_n. \end{aligned}$$



Zauważmy, że  $\triangle ACD_5$  oraz  $\triangle B'C'D'_4$  są podobne (ogólniej, podobne są  $\triangle ACD_k$  oraz  $\triangle B'C'D'_{k-1}$ ).

Na kolejnym rysunku zilustrowane są obliczenia dla  $n = 6$  oraz przyrządów  $X_4$  i  $X_5$ . Odcinek  $AB$  nawijamy na ruletkę  $X_4$  (trójkąt z lewej) i  $X_5$  (trójkąt nad kwadratem) w pokazany sposób. Zaznaczamy odpowiednie sektory.

Prawdopodobieństwo  $P(X_4 \geq X_5) = 1 - P(X_4 < X_5)$  jest równe stosunkowi pól zacieniowanego prostokąta i kwadratu  $AA'KB$ . Ponieważ trójkąty  $ACD_k$  i  $B'C'D'_{k-1}$  są podobne, to stosunek ten dla dowolnych ruletek  $X_{k-1}$ ,  $X_k$  i dowolnego  $n \geq 2$  wynosi

$$\frac{AD_k \cdot D'_{k-1}B'}{AB \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{AB \cdot A'B'} = \frac{1}{4 \cos^2 \alpha}.$$

Wszystkie prostokąty  $AD'_{k-1}H_kD_k$  mają takie samo pole równe  $AC^2$ . Punkty  $H_1, \dots, H_n$  leżą na jednej hiperboli. Wykazaliśmy, jak zbudować  $n$  przyrządów realizujących szansę  $\pi_n$  na wygraną drugiego gracza.

**Dlaczego nie można uzyskać więcej niż  $\pi_n$ ?** Załóżmy, że  $Y_1, \dots, Y_n$  są takimi niezależnymi zmiennymi losowymi, że  $P(Y_{k-1} < Y_k) > \pi_n$  dla wszystkich  $k = 1, \dots, n$  (gdzie  $Y_0 = Y_n$ ). Okazuje się (dowód tego faktu nie jest łatwy), że modyfikując odpowiednio nasze zmienne losowe, można założyć, że  $Y_n$  jest stała (tak, jak w przypadku kostki  $B$  w zestawie Efrona oraz ruletki  $X_n$ ). Określmy liczby  $y_0, y_1, \dots, y_n$  następująco: niech  $y_k$  będzie takie, że  $P(Y_k \leq y_k) \geq \frac{AD_k}{AB}$  oraz  $P(Y_k \geq y_k) \geq 1 - \frac{AD_k}{AB} = \frac{D_kB}{AB}$  (taka liczba  $y_k$  to kwantyl rzędu  $\frac{AD_k}{AB}$  rozkładu zmiennej losowej  $Y_k$ ). Ponieważ  $Y_0 = Y_n$  jest stała, więc można liczby  $y_0$  oraz  $y_n$  określić tak, by  $y_0 = y_n$ . Niech  $y_j$  będzie najmniejszą spośród liczb  $y_1, \dots, y_n$ . Wówczas  $y_{j-1} \geq y_j$ . Wynika stąd, że jeśli  $Y_j \leq y_j$  oraz  $Y_{j-1} \geq y_{j-1}$ , to  $Y_{j-1} \geq Y_j$ . Zatem

$$\begin{aligned} P(Y_{j-1} < Y_j) &\leq 1 - P(Y_j \leq y_j, Y_{j-1} \geq y_{j-1}) \leq \\ &\leq 1 - \frac{AD_j}{AB} \cdot \frac{D_{j-1}B}{AB} = 1 - \frac{1}{4 \cos^2 \frac{180^\circ}{n+2}} = \pi_n. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Oznacza to, że takie zmienne losowe nie istnieją.

Ponieważ ciąg  $(\pi_n)$  jest rosnący i zbieżny do  $\frac{3}{4}$ , więc prawdopodobieństwo zwycięstwa drugiego gracza jest zawsze mniejsze niż  $\frac{3}{4}$ .

Zauważmy, że  $\pi_4 = 1 - \frac{1}{4 \cos^2 30^\circ} = \frac{2}{3}$ , czyli kostki Efrona stanowią optymalny przykład dla  $n = 4$ . W ciągu  $\pi_n$ , oprócz  $\pi_4$ , tylko  $\pi_2 = \frac{1}{2}$  jest liczbą wymierną (wtedy gra nie ma większego sensu, ale takie kostki bez problemu można wskazać). Pozostałe wartości są niewymierne, więc nie można ich zrealizować za pomocą kostek (nawet takich, które mają inną niż 6 liczbę ścian).

Na przykład  $\pi_3 = 1 - \frac{1}{4 \cos^2 36^\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi} = \phi - 1$  jest stosunkiem długości krótszej do dłuższej części w złotym podziale odcinka ( $\phi$  to złota proporcja),  $\pi_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\pi_8 = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ , zaś  $\pi_{10} = \sqrt{3} - 1$ . Jeszcze inne szczególne wartości  $\pi_n$  to  $\pi_{2^n-2} = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}$  dla  $n \geq 2$  (mamy tu  $n-1$  dwójek oraz  $n-2$  pierwiastki) oraz  $\pi_{3 \cdot 2^n-2} = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{3}}}$  (tym razem  $n \geq 1$  i mamy  $n-1$  dwójek, jedną trójkę oraz  $n-1$  pierwiastków).

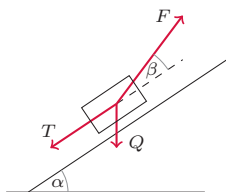
Motywacją do napisania artykułu była praca Małgorzaty Róg *Paradoks pierwszeństwa, czyli gry zaprzeczające intuicjom o prawdopodobieństwie* (V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie) napisana na 39. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego.

Opisany problem nieprzechodności kojarzony jest z Martinem Gardnerem i Bradleyem Efronem. Jednak pierwszymi badaczami tego zjawiska byli polscy matematycy Hugo Steinhaus i Stanisław Trybuła, którzy wyniki w tej materii uzyskali w 1959 roku.



### Rozwiązanie zadania F 955.

Na paczkę poza siłą  $F$  działa skierowana pionowo siła ciężkości  $Q$  oraz równoległa do powierzchni pochylni siła tarcia  $T$ .



Rozłóżmy siły działające na paczkę na składowe: prostopadłą do pochylni  $N = Q \cos \alpha - F \sin \beta$  i równoległą  $S = F \cos \beta - Q \sin \alpha - T$ . Siła tarcia  $T = fN = f(Q \cos \alpha - F \sin \beta)$ . Wciąganie paczki oznacza, że  $S \geq 0$ . Podstawiając poprzednio uzyskane wzory, otrzymujemy:

$$F \cos \beta \geq Q \sin \alpha - f(Q \cos \alpha - F \sin \beta).$$

Skąd wyznaczamy:

$$F \geq \frac{Q(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \beta + f \sin \beta}.$$

Minimalna wartość siły odpowiada maksymalnej wartości mianownika wyrażenia. Współczynnik tarcia możemy wyrazić jako  $f = \tan \phi$  i otrzymać warunek:

$$F \geq \frac{Q(\sin \alpha \cos \phi + \sin \phi \cos \alpha)}{\cos \beta \cos \phi + \sin \phi \sin \beta} = Q \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\cos(\beta - \phi)}.$$

Maksimum mianownika otrzymujemy, gdy  $\beta = \phi$ , czyli  $\tan \beta = f$ .

Bohaterowie tej opowieści żyli sto lat przed Euklidesem i 250 lat przed Archimedesem.

Przecinki w tym zapisie są niezbędne, gdyż – jak zapewne zauważy Czytelnik Skrupulatny – na każdym miejscu pojawić się może dowolnie wielka liczba.

W przykładzie liczbowym będzie to (1; 2, 2, 2, 2), czasami zapisywane pretensjonalnie jako

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}.$$

Zapis taki jest przydatny (jak będzie widać dalej), a powstaje on z inaczej zapisanego algorytmu Euklidesa: wyłączamy całości, resztę (mniejszą wobec tego od 1) odwracamy, wyłączamy całości, resztę odwracamy, wyłączamy i tak dalej. Widać to obok.

## Jak powstały wszystko opisujące liczby

Marek KORDOS

Pierwszy etap pitagoreizmu głosił hasło *wszystko jest liczbą*: pożądaną Harmonię Świata da się wyrazić jako stosunek liczb (dziś nazywanych naturalnymi), przy czym jest ona tym pełniejsza, im liczby te są mniejsze.

Wykrycie, iż stosunek przekątnej kwadratu do jego boku nie da się opisać w ten sposób, spowodował kryzys, w którego wyniku od kultu liczb odstąpiono (*liczby zostawmy kupczykom*), wiążąc Harmonię z proporcjami geometrycznymi i złotą proporcję wynosząc na ołtarze. Ten drugi etap pitagoreizmu uformował geometrię naszej cywilizacji w kształcie, jaki ma ona do dziś.

Ale owe lekko porzucenie liczb nie mogło podobać się ambitnym uczniom Akademii Platonskiej. I faktycznie je przełamali. Stworzyli w tym celu pierwszą w dziejach teorię aksjomatyczną – była to *teoria wielkości jednego rodzaju*. Oto jej aksjomaty:

- Wielkości jednego rodzaju dają się porównać (a więc mamy zawsze  $A > B$ ,  $A = B$  lub  $A < B$ );
- Dla dwóch wielkości jednego rodzaju istnieje wielkość tegoż rodzaju, będąca ich sumą;
- Istnieje wielkość uzupełniająca mniejszą z wielkości do większej;
- Wielkość można  $n$ -krotnie zwielokrotnić dla każdego naturalnego  $n$ ;
- Dowolną wielkość  $A$  można zwielokrotnić tak, by okazała się większa od  $z$  góry danej wielkości  $B$ ,

ten ostatni warunek został później nazwany *aksjomatem Archimedesesa*.

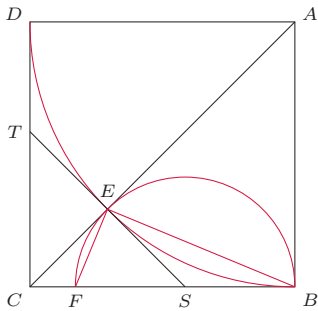
Dalej pomysły poszły już dwiema, zdecydowanie odmiennymi, drogami.

Teajtetos (–410; –368) stworzył to, co dziś nazywamy algorytmem Euklidesa. Mianowicie stwierdził, że stosunek dwóch wielkości jednego rodzaju można opisać za pomocą poniższej procedury:

ogólnie	gdy wielkości są liczbami
$A = n_0 \cdot B + R_1,$	$1517 = 1 \cdot 1073 + 444,$
$B = n_1 \cdot R_1 + R_2,$	$1073 = 2 \cdot 444 + 185,$
$R_1 = n_2 \cdot R_2 + R_3,$	$444 = 2 \cdot 185 + 74,$
$R_2 = n_3 \cdot R_3 + R_4,$	$185 = 2 \cdot 74 + 37,$
$R_3 = n_4 \cdot R_4 + R_5$	$74 = 2 \cdot 37.$
...	

Procedura ta czasami się kończy (w przypadku liczb naturalnych zawsze), a czasami nie (przykłady dalej). Zawsze natomiast zamienia stosunek wielkości  $A/B$  na specyficzny ciąg liczb naturalnych ( $n_0; n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$ ) zwany *łamkiem ciągłym* lub *łańcuchowym*. Tak można wyrazić stosunek dowolnych dwóch wielkości jednego rodzaju (np. długości, ciężaru, pola powierzchni itp.), a więc każdą (dodatnią) liczbę rzeczywistą.

$$\begin{aligned} \frac{1517}{1073} &= 1 + \frac{444}{1073} = 1 + \frac{1}{\frac{1073}{444}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{185}{444}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{444}{185}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{74}{185}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{185}{74}}}}. \end{aligned}$$



Zobaczmy, jak to działa w tym najbardziej wówczas nerwowym punkcie – w przypadku stosunku przekątnej kwadratu do jego boku. Narysujmy ćwiartkę okręgu o środku  $A$  i promieniu  $AB$  (rysunek), a następnie styczną do niego w punkcie  $E$ . Jak łatwo zauważyć, powstały cztery odcinki równej długości ( $BS$ ,  $SE$ ,  $ET$ ,  $TD$ ). Gdy narysujemy półokrąg o środku  $S$  i promieniu  $SB$ , powstanie jeszcze jeden odcinek o tej długości:  $SF$ . Przystąpmy teraz do rachunków.

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{CE}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CF}{CE}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{CE}{AB}}.$$

Wyjaśnienia wymaga jedynie ostatnia z równości. Bierze się ona stąd, że trójkąty  $BCE$  i  $ECF$  są podobne (kąt przy wierzchołku  $C$  jest wspólny, a  $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CEF$  jako kąt wpisany i dopisany oparte na łuku  $EF$ ).

Z przeprowadzonego rachunku wynika, że sytuacja będzie się powtarzać bez końca, a więc stosunek przekątnej kwadratu do jego boku to ułamek łańcuchowy zaczynający się od 1 i mający następnie nieskończony ciąg dwójek, co zapisuje się  $(1; \overline{2})$ .

Oczywiście (żyjąc ponad dwa tysiące lat później) możemy to zrealizować, rozwijając  $\sqrt{2}$  w ułamek łańcuchowy:

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} \quad \text{itd.}$$

Ułamki łańcuchowe były przyjęte bardzo sympatycznie, bo nawiązywały do opisu Harmonii przez liczby naturalne – najbardziej harmoniczna była złota proporcja, gdyż opisywały ją same jedynki  $(1; \overline{1})$ :

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} \quad \text{itd.}$$

Ułamki łańcuchowe mają szereg interesujących własności, np.:

- jak można było zauważyć z przykładu liczbowego, liczby wymierne rozwijają się w ułamki skończone;
- ułamki okresowe są pierwiastkami równań kwadratowych o współczynnikach wymiernych;
- niewymierne pierwiastki kwadratowe z liczb wymiernych rozwijają się w ułamki w pewnym stopniu symetryczne, a mianowicie postaci  $(a; \overline{b_1, b_2, b_3, \dots, b_3, b_2, b_1, 2a})$ ;

ponieważ to dziwne, rozpatrzmy przykład ułamka  $(2; \overline{2, 4})$ :

oznaczymy  $(0; \overline{2, 4})$  przez  $1/y$ , wówczas

$$y = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{y}} = 2 + \frac{y}{4y + 1} = \frac{9y + 2}{4y + 1}, \quad \text{czyli } 4y^2 - 8y - 2 = 0,$$

wobec tego

$$y = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \quad \text{i} \quad (2; \overline{2, 4}) = 2 + \frac{1}{y} = 2 + \frac{2}{2 + \sqrt{6}} = 2 + \frac{2(\sqrt{6} - 2)}{2} = \sqrt{6}.$$

Poważniejszą własność ułamków łańcuchowych odkrył w XVIII wieku Lagrange:

*redukt ułamka łańcuchowego liczby  $n$  jest jej najlepszym wymiernym przybliżeniem.*

Sformułowanie to wymaga objaśnienia terminu *najmniejsze wymierne przybliżenie*, niezgodnego z naszymi przyzwyczajeniami językowymi. Otóż jest to takie przybliżenie wymierne, że lepsze od niego musi mieć większy mianownik.

Tak więc z podanego przy algorytmie Euklidesa przykładu liczbowego wynika, że jednym z najlepszych przybliżeń wymiernych  $\sqrt{2}$  jest  $41/29$  (to skrócone  $1517/1073$ ), ale też  $3/2$ ,  $7/5$  czy  $17/12$ .

Skoro propozycja opisu liczb rzeczywistych za pomocą ułamków łańcuchowych jest tak atrakcyjna, to czemu uczymy się zupełnie innego sposobu patrzenia na nie?

Dwie uwagi o stosowaniu algorytmu Euklidesa do liczb naturalnych – zilustrowane na rozpatrzonym już przykładzie liczbowym.

Pierwsza uwaga dotyczy tego, że ostatnia niezerowa reszta w algorytmie Euklidesa to największy wspólny dzielnik poddanych temu algorytmowi liczb – wystarczy spostrzec, że po natrafieniu na jakikolwiek wspólny dzielnik algorytm zatrzymałby się.

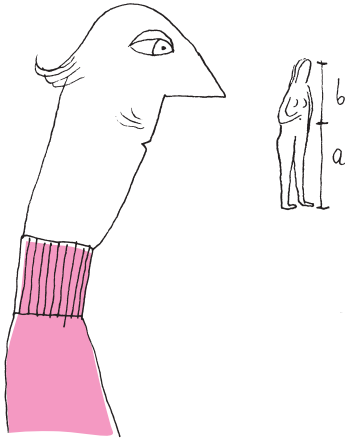
Jeśli natomiast przedstawiony poprzednio rachunek napiszemy od końca, otrzymamy

$$\begin{aligned} 37 &= 185 - 2 \cdot 74 = \\ &= 185 - 2(444 - 2 \cdot 185) = \\ &= 5 \cdot 185 - 2 \cdot 444 = \\ &= 5(1073 - 2 \cdot 444) - 2 \cdot 444 = \\ &= 5 \cdot 1073 - 12 \cdot 444 = \\ &= 5 \cdot 1073 - 12(1517 - 1073) = \\ &= 17 \cdot 1073 - 12 \cdot 1517 \end{aligned}$$

(faktycznie to  $18241 - 18204$ ).

Czytelnik! Uważaj! zobacz w tym rozumowaniu dowód, że

*dla dowolnych liczb naturalnych  $n$  i  $m$  istnieją takie liczby całkowite  $a$  i  $b$ , że  $a \cdot n + b \cdot m = \text{NWD}(n, m)$ .*



Jakąś częścią odpowiedzi jest fakt, że była też inna propozycja, przedstawiona przez Eudoksosa (–408; –355). On nie przedstawiał proporcji wielkości jednego rodzaju za pomocą ciągu liczb naturalnych, lecz opisywał ją poprzez jej dolne i górne przybliżenia wymierne. A robił to tak.

*Proporcja wielkości jednego rodzaju  $A$  i  $B$  jest równa proporcji wielkości jednego (ale możliwe, że zupełnie innego) rodzaju  $\alpha$  i  $\beta$ , gdy dla dowolnych liczb naturalnych  $n$  i  $m$  zachodzą warunki:*

*jeśli  $n \cdot A > m \cdot B$ , to  $n \cdot \alpha > m \cdot \beta$ ;*

*jeśli  $n \cdot A = m \cdot B$ , to  $n \cdot \alpha = m \cdot \beta$ ;*

*jeśli  $n \cdot A < m \cdot B$ , to  $n \cdot \alpha < m \cdot \beta$ .*

A gdzie tu są zapowiadane przybliżenia wymierne? Popatrzmy na to tak, zakładając przez chwilę, że zachodzi pierwsza sytuacja:

jeśli  $\frac{A}{B} > \frac{m}{n}$ , to  $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{m}{n}$ ,

zatem  $\frac{A}{B}$ , jak i  $\frac{\alpha}{\beta}$  mają takie same wymierne przybliżenia dolne.

Trzeci przypadek wskazuje, że  $\frac{A}{B}$ , jak i  $\frac{\alpha}{\beta}$  mają te same przybliżenia górne.

Łącznie więc proporcja jest wyznaczona przez zbiór wszystkich swoich wymiernych przybliżeń dolnych i przybliżeń górnych. Coś takiego nazywamy dziś przekrojem Dedekinda i to jest obowiązujący od stuleci sposób uprawiania liczb rzeczywistych.

Dzisiaj może nam być trudno wyobrazić sobie świat bez – niejako danych nam od urodzenia – liczb rzeczywistych. Wyobraźmy sobie jednak, że ich nie ma i wykażmy za Euklidesem (VI księga *Elementów*), że

*stosunek pól dwóch trójkątów o równych wysokościach jest równy stosunkowi ich podstaw* (pamiętajmy: pola i odcinki to są wielkości różnych rodzajów).

Najpierw spostrzeżenie pomocnicze: *pola trójkątów o równych wysokościach i podstawach są równe* – dowodzi się go nożyczkami (Czytelniku, czy masz nożyczki?), rozcinając każdy taki trójkąt na trzy kawałki i składając z niego prostokąt o jednym boku równym podstawie, a drugim – połowie wysokości.

Skoro tak, to możemy dwa trójkąty, o których mówi twierdzenie, narysować jako prostokątne. I możemy je zestawić tak, aby ich równe (bo równe wspólnej wysokości) przyprostokątne pokryły się.

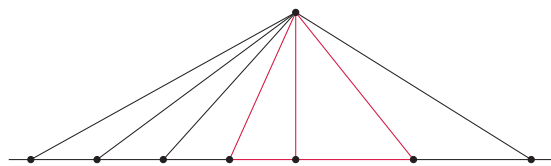
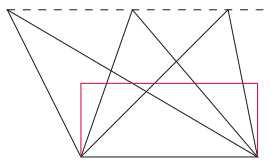
Teraz odkładamy  $n$  razy w lewo podstawę lewego trójkąta i  $m$  razy w prawo podstawę prawego trójkąta. Otrzymane punkty łączymy z górnym wierzchołkiem wspólnej przyprostokątnej, otrzymując na lewo  $n$  trójkątów o polach równych lewemu kolorowemu trójkątowi, a na prawo  $m$  trójkątów o polach równych kolorowemu prawemu trójkątowi (tu  $n = 4$ ,  $m = 2$ ).

Gdy złożymy rysunek wzdłuż wspólnej przyprostokątnej, to  $n$ -krotna lewa podstawa będzie większa od  $m$ -krotnej prawej wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$ -krotne lewe pole będzie większe od  $m$ -krotnego pola prawego.

Wynalazek liczb rzeczywistych to, zdaniem wielu, największy wynalazek matematyczny wszech czasów. Nad pomysłem Eudoksosa rozpyłwiali się w zachwycie zwłaszcza Archimedes i – wiele lat później – Newton. Ten ostatni swój podziw wyrażał, podkreślając, że nie jest możliwe podzielenie rozciągłości w przestrzeni przez rozciągłość w czasie, bo to zupełnie inne rzeczy – jest natomiast możliwe podzielenie liczby mierzącej rozciągłość w przestrzeni przez liczbę mierzącą rozciągłość w czasie – bo to takie same liczby! W wyniku dzielenia otrzymamy wówczas liczbę, której znaczenie (w tym przypadku zapewne prędkość) musimy ustalić.

Tak więc liczby rzeczywiste pozwoliły na zastosowanie matematyki do wszelkich zjawisk, bo każde z nich opisujemy tymi samymi liczbami (co faktycznie w koncepcji Eudoksosa lepiej widać).

Nazwisko Dedekinda stało się nazwą podziału liczb wymiernych na dwie części o tej własności, że każda liczba w jednej z nich jest mniejsza od każdej liczby w drugiej, dlatego że podczas gdy Eudoksos mówił, iż każda proporcja, czyli liczba, to przekrój liczb wymiernych, Dedekind dodał: i każdy przekrój to liczba. Tym sposobem pojawiło się wiele liczb, o jakich matematycy nie mieli pojęcia. Okazało się wręcz, że liczby praktycznie stosowane przez matematyków to tylko dająca się zaniedbać mniejszość.



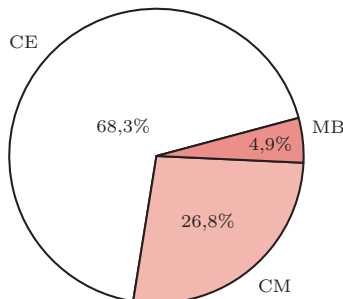
Istnieje jeszcze jeden powód, który mógł spowodować „wygraną” koncepcji Eudoksosa. Podał on bowiem bardzo piękny sposób mierzenia zwany całką Eudoksosa, całkowaniem Starożytnych bądź metodą wyczerpywania, który służył matematykom aż do XVI wieku. Ale to już inna historia.



# O powstawaniu pierwiastków

Michał BEJGER

Indeks dolny oznacza liczbę protonów w jądrze danego pierwiastka.



Skład Wszechświata: głównie ciemna energia (CE) i ciemna materia (CM), z niewielką domieszką „zwykłej” materii barionowej (MB), o której mowa w niniejszym artykule.

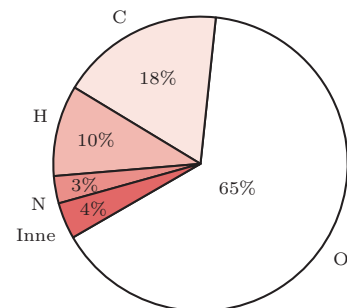
Czy zastanawiasz się czasem, Czytelniku, skąd wziął się wodór  ${}^1\text{H}$  i tlen  ${}^8\text{O}$  powszechne w wodzie i powietrzu, wapń  ${}^{20}\text{Ca}$  wchodzący w skład kości, żelazo  ${}^{26}\text{Fe}$  we krwi, a także miedź  ${}^{29}\text{Cu}$ , neodym  ${}^{60}\text{Nd}$ , terb  ${}^{65}\text{Tb}$ , dysproz  ${}^{66}\text{Dy}$ , wolfram  ${}^{74}\text{W}$ , platyna  ${}^{78}\text{Pt}$ , złoto  ${}^{79}\text{Au}$  i dziesiątki innych metali „ziem rzadkich” niezbędnych do prawidłowego funkcjonowania naszych smartfonów?

Oto, co wynika z obserwacji. Nie wiemy dokładnie jak i czemu, ale w odległej przeszłości (około 13,8 miliarda lat temu) Wszechświat rozpoczął, w tzw. Wielkim Wybuchu, gwałtowną ewolucję od stanu bardzo gęstej i bardzo gorącej materii. Po około jednej milionowej sekundy materia wypełniająca szybko rosnący Wszechświat stała się dostatecznie chłodna, by swobodnie do tej pory kwarki mogły zacząć łączyć się w bariony: cząstki składające się z trzech kwarków związanych oddziaływaniami silnymi, na przykład, neutrony i protony (barion, od greckiego *βαρος*, co znaczy ciężki, w porównaniu do leptonów np. do elektronu).

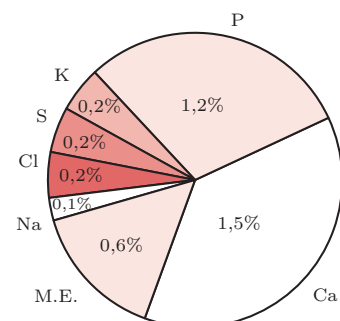
Najlżejsze atomy wodoru,  ${}^1\text{H}$  (jądro składa się z jednego protonu), pojawiły się wkrótce potem, w epoce „rekombinacji”, około 380 tys. lat po Wielkim Wybuchu, gdy temperatura spadła na tyle, by pozwolić na istnienie stabilnych układów elektron-proton. Wodór stanowi około 70% „zwykłej” materii barionowej, która z kolei jest, według naszej obecnej wiedzy kosmologicznej, jedynie drobnym ułamkiem (około 5%) całej materii-energii. Pozostała większość to nieświecąca „ciemna materia” (oddziałująca grawitacyjnie, ale nie elektromagnetycznie) i jeszcze bardziej tajemnicza „ciemna energia”, proponowana w celu wyjaśnienia przyspieszonego rozszerzania się Wszechświata.

Drugim w kolejności obfitości pierwiastków jest hel ( ${}^2\text{He}$ , 23% masy barionów), którego większość również powstała w wyniku pierwotnej nukleosyntezy związanej z Wielkim Wybuchem. Pozostała część helu powstaje w wyniku fuzji jąder wodoru we wnętrzach gwiazd („spalania się”, jak w żargonie mówią astronomowie), przy okazji produkując energię i ciśnienie promieniste (fotony). Proces fuzji powstrzymuje gwiazdy przed zapadnięciem się pod wpływem własnej grawitacji i, w zależności od masy gwiazdy, stwarza warunki (odpowiednio wysoką temperaturę) do powstawania coraz cięższych pierwiastków. Znane są dwie klasy reakcji łańcuchowych fuzji wodoru w hel: proton-proton (pp, w której powstaje krótko żyjące jądro deuteru lub berylu), oraz węgiel-azot-tlen (CNO, gdzie atomy węgla, azotu i tlenu występują w roli katalizatorów). Pierwsza z nich zachodzi w gwiazdach lżejszych od około  $1,3 M_{\odot}$ , druga jest możliwa w masywniejszych. Wytworzenie jednego jądra helu wiąże się w obu przypadkach z emisją około 26,7 MeV ( $4,3 \cdot 10^{-12}$  J) energii.

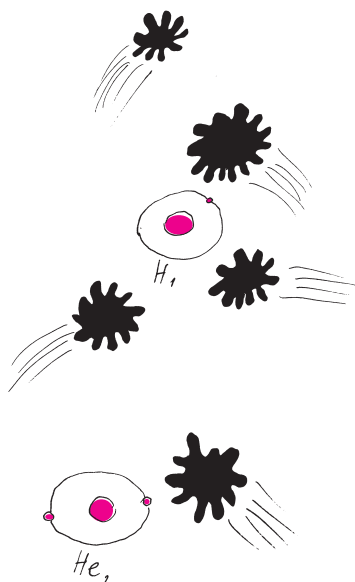
Okres, w którym gwiazda „pali” wodór w jądrze, nazywa się ciągiem głównym (w tym stanie znajduje się aktualnie Słońce). Obiekty o masach powyżej  $0,5 M_{\odot}$  stają się następnie czerwonymi olbrzymami, „palącymi” wodór w otocze jądra, a następnie (prędzej lub później, w zależności od masy – masywniejsze szybciej) hel wprost w jądrze. Gwiazdy masywniejsze od około  $10 M_{\odot}$  zostają po zejściu z ciągu głównego czerwonymi nadolbrzymami, zdolnymi od razu do syntezy cięższych pierwiastków w helowym jądrze. Fuzja helu w węgiel  ${}^6\text{C}$  następuje w procesie  $3\alpha$ : łączenia się trzech jąder helu  ${}^2\text{He}$  (cząstek  $\alpha$ ). Przechwyty cząstek  $\alpha$  przez coraz cięższe jądra w procesie nazwanym drabiną  $\alpha$  prowadzą do powstania, kolejno, jąder o parzystej liczbie protonów: tlenu  ${}^8\text{O}$ , neonu  ${}^{10}\text{Ne}$ , magnezu  ${}^{12}\text{Mg}$ , krzemu  ${}^{14}\text{Si}$ , siarki  ${}^{16}\text{S}$ , argonu  ${}^{18}\text{Ar}$ , wapnia  ${}^{20}\text{Ca}$ , tytanu  ${}^{22}\text{Ti}$ , chromu  ${}^{24}\text{Cr}$ , żelaza  ${}^{26}\text{Fe}$  i niklu  ${}^{28}\text{Ni}$ . Produkcja energii w procesie fuzji kończy się na żelazie i niklu, ponieważ jądra tych atomów mają największą energię wiązania na nukleon: dodawanie kolejnych nukleonów wymaga *dostarczenia* energii. Jest to również przyczyna względnie wysokiej obfitości tych pierwiastków w przyrodzie. W dostatecznie gorących (temperatury w centrum większe od kilkuset milionów kelwinów) i masywnych (cięższych od około  $8 M_{\odot}$  przy



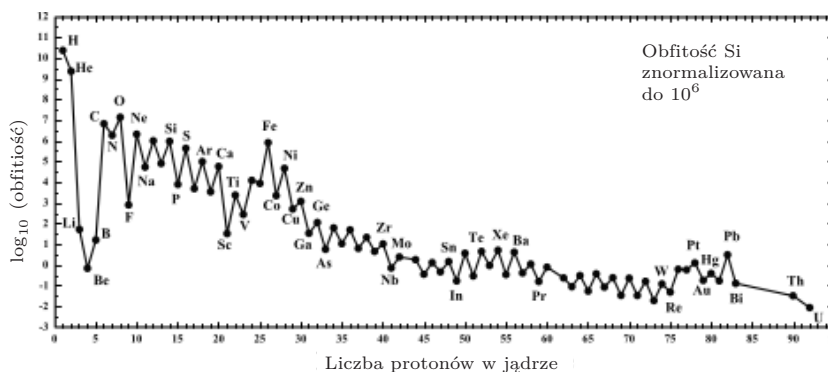
Inne:



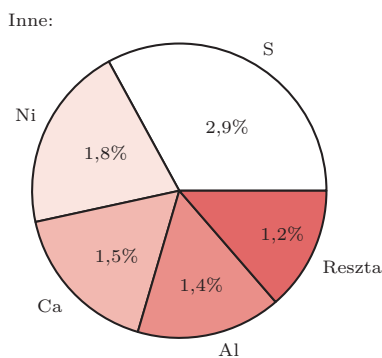
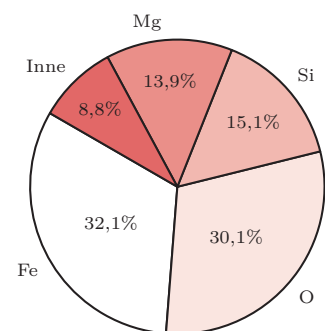
Skład chemiczny człowieka: głównie tlen, węgiel, wodór i azot (M.E. – mikroelementy lżejsze od żelaza: bor, chrom, kobalt, fluor, żelazo, mangan, krzem, wanad, oraz cięższe: miedź, cynk, selen, brom, molibden i jod).



narodzinach na ciągu głównym) gwiazdach dochodzi następnie do zapłonu węgla: rozpoczęcia fuzji jąder węgla w cięższe pierwiastki – neon, sód, magnez, tlen itd. w różnego typu procesach z wydzielaniem fotonów, pojedynczych nukleonów i cząstek  $\alpha$ , na przykład  ${}^6\text{C} + {}^6\text{C} \rightarrow {}^{12}\text{Mg} + \gamma$  (lub  ${}^{11}\text{Na} + {}^1\text{H}$ , lub  ${}^{10}\text{Ne} + {}^2\text{He}$ ). Po etapie „palenia” węglem – jeśli warunki na to pozwalają – następuje w coraz wyższej temperaturze fuzja neonu, a następnie tlenu i krzemu. Wysoka temperatura umożliwia dodatkowe reakcje, np. fotodysocjacje, to znaczy zderzenia z energetycznymi fotonami, które wybijają z jąder nukleony lub cząstki  $\alpha$ . Procesy te po części mają też udział w powstawaniu jąder o nieparzystej liczbie protonów, takich jak fosfor  ${}^{15}\text{P}$ , chlor  ${}^{17}\text{Cl}$ , potas  ${}^{19}\text{K}$ , które również powstają, między innymi, w cyklu CNO i podczas wybuchów masywnych gwiazd supernowych (o czym za chwilę). W ogólności jądra atomowe o parzystej liczbie protonów i nukleonów (sumie protonów i neutronów w jądrze) są bardziej stabilne, przez co występują częściej niż te o nieparzystej liczbie. Prawidłowość ta, zwana regułą Oddo–Harkinsa, wynika z faktu, że nukleony będące fermionami wiążą się w pary, co zwiększa energię wiązania jądra, a przez to jego stabilność.



Względna obfitość pierwiastków we Wszechświecie



Skład chemiczny Ziemi.

Skład skorupy ziemskiej jest inny: to przeważnie tlen O (46%), krzem Si (28%), aluminium Al (8,2%), żelazo Fe (5,6%), wapń Ca (4,2%), sód Na (2,5%), magnez Mg (2,4%), potas K (2%) i tytan Ti (0,6%).

Radioaktywność po wybuchu jest głównym źródłem energii światła supernowej, która potrafi świecić tygodnie, a nawet miesiące.

Podsumowując, praktycznie wszystkie pierwiastki od helu do żelaza, kobaltu i niklu powstają podczas zwyczajnej ewolucji gwiazd. Wyjątek stanowi beryl  ${}^4\text{Be}$ , bor  ${}^5\text{B}$ , oraz częściowo lit  ${}^3\text{Li}$ , które co prawda powstają we wnętrzu gwiazd, ale są szybko zamieniane na cięższe pierwiastki. Stabilne jądra litu, berylu i boru powstają w procesie *spalacji* (kruszenia), podczas którego cięższe jądro atomowe traci nukleony w wyniku zderzenia z cząstką promieniowania kosmicznego (np. cząstką  $\alpha$ ) o bardzo dużej energii kinetycznej.

Atomy cięższe od niklu powstają, gdy dostatecznie masywna gwiazda wypali dostępne w swoim wnętrzu paliwo, stanie się niestabilna i zacznie się zapadać. W przypadku gwiazd o masie większej od około  $8 M_{\odot}$  żelazno-niklowe jądro jest zgniatanie do ogromnych gęstości przez spadające zewnętrzne warstwy i rozgrzewane do temperatur przekraczających setki miliardów kelwinów. W tych warunkach „symetryczne”, to znaczy zawierające podobną liczbę neutronów i protonów, jądra atomowe stają się wyraźnie neutrononadmiarowe: jądro zapadającej się gwiazdy zamienia się w gorącą i gęstą *gwiazdę neutronową*, najgęstszy znany nauce obiekt materialny. Jeśli masa gwiazdy nie jest zbyt duża, oddziaływania silne pomiędzy nukleonami powstrzymują kolaps spadającej materii i, wraz z emitowanym przez gwiazdę neutronową strumieniem neutrin, powodują odrzucenie jej na zewnątrz. Proces ten nazywamy wybuchem supernowej. W tych warunkach część „zwykłej” materii gwiazdy, bogate w neutrony jądra atomowe gwiazdy neutronowej oraz swobodne nukleony mają dużo okazji, by oddziaływać ze sobą z dużą energią. Kluczem do produkcji ciężkich pierwiastków są wielokrotne zderzenia jądro-nukleon, prowadzące najczęściej do powstawania izotopów o krótkim okresie połowicznego rozpadu. Procesy przechwyty nukleonu dzielą się na dwa rodzaje: procesy wolne (*slow*, s), oraz szybkie (*rapid*, r). Różnica polega na tym, że w procesach szybkich jądro zyskuje na masie, łapiąc więcej nukleonów, niż jest w stanie stracić podczas zachodzących w tym samym czasie rozpadów promieniotwórczych. Obecnie

Metale takie jak stront  ${}_{38}\text{Sr}$ , itr  ${}_{39}\text{Y}$ , cyrkon  ${}_{40}\text{Zr}$ , niob  ${}_{41}\text{Nb}$  są tworzone również podczas procesów s w ostatnich etapach ewolucji gwiazd asymptotycznej gałęzi olbrzymów.

Kilonowa wybuchu z energią około tysiąca razy większą niż nowa klasyczna, czyli termojądrowy zapłon materii zaakreowanej w układzie podwójnym na powierzchnię białego karła z towarzysza, zwykłej gwiazdy.

wiadomo, że w wybuchach supernowych, także tych związanych z termojądrową eksplozją białego karła, tzn. supernowych typu Ia, działają przeważnie procesy typu s oraz szybkie przechwyty protonów: supernowe dostarczają pierwiastków od miedzi  ${}_{29}\text{Cu}$  do molibdenu  ${}_{42}\text{Mo}$ .

Począwszy od rutenu  ${}_{44}\text{Ru}$  proces s ustępuje miejsca procesowi r: ciężkie pierwiastki tworzone są głównie podczas katastrofalnych zderzeń w *układach podwójnych gwiazd neutronowych*. Niedawna, historycznie pierwsza detekcja fal grawitacyjnych ze zderzenia się gwiazd neutronowych (sygnał GW170817, o którym pisaliśmy w  $\Delta_{17}^{12}$ ), zarejestrowana przez interferometry Virgo i LIGO (i przeprowadzona przez te interferometry triangulacja) umożliwiła powiązanie go z wykrytym w tym samym czasie przez satelitę Fermi krótkim błyskiem gamma, i szerokie obserwacje astronomiczne fotonów z następującej po nim emisji *kilonowej*. Dzięki temu zdobyliśmy dowody, że rozrzucona podczas zderzenia z prędkościami bliskimi prędkości światła gęsta neutronadmiarowa materia gwiazd neutronowych jest świetnym miejscem dla procesów typu r i tworzenia naprawdę ciężkich pierwiastków, w tym platyny  ${}_{78}\text{Pt}$  i złota  ${}_{79}\text{Au}$ , a także metali z grupy ziem rzadkich (wspomnianych wcześniej dysprozu, neodymu, terbu), innych lantanowców i aktynowców, oraz pierwiastków radioaktywnych, między innymi polonu  ${}_{84}\text{Po}$ , radu  ${}_{88}\text{Ra}$  i uranu  ${}_{92}\text{U}$ . Podobnie jak w przypadku supernowych kilonowe są zasilane energią fotonów z rozpadów radioaktywnych, więc badanie ich krzywych blasku umożliwia stwierdzenie, ile i jakich pierwiastków danego rodzaju świeci.

Powtarzając za nieocenionym Carlem Saganem, dosłownie pochodzimy z Kosmosu: poprzednie generacje gwiazd „umarły”, a my powstaliśmy na planecie stworzonej z ich różnorodnych pozostałości. Życie, w tej jedynej znanej nam do tej pory formie, wymaga garści różnych, przeważnie lekkich i łatwo osiągalnych pierwiastków, natomiast cywilizacja i postęp technologii korzysta z coraz bardziej egzotycznych i trudno dostępnych materiałów powstałych w największych kosmicznych katastrofach. Atomy składające się na najważniejszy obecnie element ludzkiego „fenotypu rozszerzonego” (mam, oczywiście, na myśli smartfon) przebyły niezwykle skomplikowaną drogę z wnętrza gwiazd do wnętrza naszych kieszeni; warto o tym pamiętać.

## Niewąskie nierówności

Karol HOROCH\*

\* nauczyciel, Liceum Przymierza Rodzin w Warszawie



Nierówności między średnimi, a w szczególności nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną (oznaczana dalej A-G), to jedne z podstawowych narzędzi dowodowych w arsenale każdego olimpijczyka. Przypomnijmy sformułowanie A-G:

Dla dowolnego ciągu  $n$  nieujemnych liczb  $a_1, \dots, a_n$  spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Twierdzenie to dowodzone jest zwykle indukcyjnie lub za pomocą twierdzenia Jensena, ale jeśli dowody te pozostawiły w Tobie, drogi Czytelniku, niedosyt i wciąż masz wrażenie, że nierówność A-G pozostaje nieintuicyjna, być może znajdziesz ukojenie w poniższym rozumowaniu. Naturalnie, tych, którzy nie widzieli jeszcze żadnego dowodu A-G, również zapraszamy do lektury.

Na początek przedstawimy dwie obserwacje, które powinny się wydać oczywiste każdemu zaznajomionemu z pojęciem średniej arytmetycznej:

- Biorąc dowolne dwie spośród liczb  $a_1, \dots, a_n$ , a następnie zwiększając jedną z nich o  $\varepsilon$ , a drugą zmniejszając o  $\varepsilon$  (gdzie  $\varepsilon$  jest dowolną liczbą dodatnią), nie zmienimy wartości średniej arytmetycznej liczb  $a_1, \dots, a_n$ .
- Jeśli jedna z liczb  $a_1, \dots, a_n$  jest większa od średniej arytmetycznej tych liczb, to jest też spośród nich liczba mniejsza od tej średniej i *vice versa*.



**Rozwiązanie zadania M 1570.**  
**Odpowiedź:** Taki wielościan istnieje.  
 Rozważmy prostopadłościan  $\mathcal{W}$  o wymiarach

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} \times 2.$$

Przecinając ten prostopadłościan płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi o długości 2, rozetniemy go na dwa przystające prostopadłościany o wymiarach  $1 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}$ . Każdy z nich jest podobny do  $\mathcal{W}$  w skali  $\sqrt[3]{2}$ .

8, 18, 6, 10, 21, 16, 26 →  
 11, 15, 6, 10, 21, 16, 26 →  
 15, 15, 6, 10, 17, 16, 26 →  
 15, 15, 8, 10, 15, 16, 26 →  
 15, 15, 9, 10, 15, 15, 26 →  
 15, 15, 15, 10, 15, 15, 20 →  
 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15 →



**Rozwiązanie zadania M 1572.**  
 Zauważmy, że reszta z dzielenia liczby  $n$  przez liczbę  $k$  jest równa

$$n - k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor,$$

wobec tego równość  $r(n) = r(n-1)$  można przepisać jako

$$\sum_{k=1}^n n - k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n-1} n - 1 - k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor,$$

czyli równoważnie

$$2n - 1 = \sum_{k=1}^n k \left( \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right).$$

Zauważmy ponadto, że czynnik

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$$

jest równy 1, jeżeli  $k$  dzieli  $n$  oraz 0 w przeciwnym przypadku. Stąd wniosek, że powyższy warunek można przepisać jako

$$2n - 1 = \sum_{k|n} k.$$

Łatwo sprawdzić, że równość ta jest spełniona dla  $n = 2^m$ , gdzie  $m$  jest dodatnią liczbą całkowitą. Przykładową nieskończoną rodzinę liczb  $n$  spełniających warunek zadania stanowią więc wszystkie potęgi dwójki.

Praca zwycięzcy Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki z roku 1985, Piotra Hajłasza, zawierała odpowiedzi na te pytania – patrz  $\Delta_{86}^{03}$ .

Proste? No więc możemy iść dalej.

Następnym krokiem będzie zdefiniowanie operacji *zweżenia do średniej*. Mając dany ciąg liczb  $a_1, \dots, a_n$  o średniej arytmetycznej  $s$ , weźmy takie dowolne dwie  $a_i, a_j$ , że  $a_i < s < a_j$ . Mniejsza jest odległa od średniej o  $s - a_i$ , a większa o  $a_j - s$ . Niech  $\Delta$  będzie mniejszą z tych dwóch różnic. Zweżenie do średniej liczb  $a_i$  i  $a_j$  polega na jednoczesnym zmniejszeniu  $a_j$  i zwiększeniu  $a_i$  o  $\Delta$ . Przykładowo, jeśli w zadanym ciągu liczb średnia arytmetyczna wynosiła 7, to liczby 13 i 2 zostaną zweżone do liczb 8 i 7, a liczby 5 i 9 zweżone do 7 i 7.

Operacja zweżenia ma trzy cechy godne odnotowania:

1. Zweżenie dowolnych dwóch liczb z ciągu nie zmienia średniej arytmetycznej całego ciągu.
2. Za każdym razem gdy dokonujemy zweżenia, przynajmniej jedna ze zweżanych liczb zrównuje się ze średnią.
3. Za pomocą skończonej liczby operacji zweżenia możemy zrównać wszystkie zadane liczby z ich średnią.

Jeśli w tym momencie, Szanowny Czytelniku, zmarszczyłeś brwi poruszony myślą „Czy aby na pewno? Dla dowolnych ciągów  $a_1, \dots, a_n$ ? W skończonej liczbie kroków?”, spieszmy z wyjaśnieniami. Otóż, dopóki nie zrównamy wszystkich liczb ze średnią, zawsze będzie para liczb do zweżenia różnych od średniej. Zanim więc nie osiągniemy celu, możemy zweżać, a z każdym zweżeniem liczba liczb różnych od średniej zmniejsza się o jedną lub o dwie. Dla zilustrowania tego procesu na marginesie przedstawiamy ciąg takich zweżeń dla liczb 8, 18, 6, 10, 21, 16, 26 (których średnia arytmetyczna wynosi 15), gdzie pogrubione zostały pary liczb podlegających zweżeniu.

Nadszedł czas na *grande finale*, w którym wyjaśni się, jaki był cel całego zamieszania ze zweżeniami. Jest jasne, że zweżanie nie zmienia wartości sumy liczb, a tym samym ich średniej arytmetycznej. Co natomiast z iloczynem, a w konsekwencji – ze średnią geometryczną? Zachowując poprzednio wprowadzone oznaczenia, założmy, bez utraty ogólności, że liczby  $a_i$  oraz  $a_j$  zweżamy o  $\Delta$ . Iloczyn zmieni się wtedy na  $a_1 \dots (a_i + \Delta) \dots (a_j - \Delta) \dots a_n$ . Wartość tego iloczynu będzie większa niż oryginalnego  $a_1 \dots a_n$ , gdyż

$$(a_i + \Delta)(a_j - \Delta) = a_i a_j + \Delta(a_j - a_i) - \Delta^2 \geq a_i a_j + 2\Delta^2 - \Delta^2 > a_i a_j$$

(w przedostatnim kroku skorzystaliśmy z nierówności  $a_j - a_i \geq 2\Delta$ ). Widać więc, że zweżanie zwiększa iloczyn zweżanych liczb. Oznacza to, że średnia geometryczna wszystkich liczb również się zwiększa! Prawdziwość A-G powinna się teraz objawić w całej swojej oczywistości. Mając ciąg liczb, które nie są parami równe, dokonujemy skończonej liczby zweżeń aż do zrównania ich ze średnią arytmetyczną. Kiedy to nastąpi i wszystkie liczby z naszego ciągu będą parami równe, obie średnie także się zrównają. Ponieważ jednak z każdym zweżeniem średnia geometryczna zwiększała się, a arytmetyczna nie ulegała zmianom, wnioskujemy, iż dla wyjściowego ciągu średnia geometryczna była mniejsza od arytmetycznej. To kończy dowód.

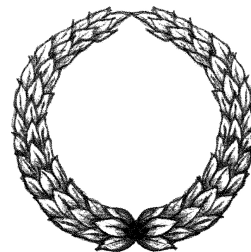
Dociekliwym Czytelnikom pozostawiamy sprawdzenie, że analogicznie można przeprowadzić dowód nierówności:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[p]{\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n}},$$

gdzie  $p$  jest dodatnią liczbą naturalną, a  $a_1, \dots, a_n$  są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Podpowiemy, iż należy zbadać, jak zweżanie liczb wpływa na wartość  $a_i^p + a_j^p$ , korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona.

Nasuwa się pytanie, czy są inne nierówności między średnimi, które można udowodnić w analogiczny sposób, tzn. wynajdując przekształcenie ciągu danych liczb, podobne do powyższego zweżenia do średniej? Takie przekształcenie powinno mieć dwie cechy: 1) nie zmieniając wartości jednej ze średnich, zawsze zwiększa (ew. zmniejsza) drugą z nich; 2) w skończonej liczbie kroków wyrównuje wszystkie liczby, tym samym wyrównując obie średnie. Z tym pytaniem pozostawiamy Czytelnika.

# Wyniki Olimpiad 2017/2018



## LXVII Olimpiada Fizyczna

W dniach 6–10 kwietnia br. odbył się w Warszawie finał LXVII Olimpiady Fizycznej. Do tegorocznych zawodów trzeciego stopnia zakwalifikowało się 80 zawodników. W sobotę 7 kwietnia zawodnicy w dwóch turach rozwiązywali zadanie doświadczalne, którego celem było wyznaczenie prędkości ultradźwięków w powietrzu. W niedzielę 8 kwietnia zawodnicy zmierzali się z zadaniami teoretycznymi. Pierwsze z nich polegało na analizie ruchu gumki recepturki zsuwającej się ze stożka, w drugim należało określić siły magnetyczne działające na wielokrotnie składaną taśmę przewodzącą, trzecie zaś wymagało analizy ruchu obiektów w tunelu przecinającym planetę na wylot.

Redaktorzy zadań finałowych Olimpiady Fizycznej starają się zawsze, by rozwiązania składały się z elementarnych kroków niewykraczających poza omawiany w szkole zakres materiału, ale wymagających „poglówkowania” i uświadomienia sobie istoty fizycznej rozważanego problemu. W tym roku niemal każdy z finalistów znalazł wśród zaproponowanych zadań coś dla siebie, dzięki czemu rekordowa liczba osób uzyskała tytuł laureata Olimpiady Fizycznej. Treści zadań wraz z wzorcowymi rozwiązaniami można znaleźć na stronie Komitetu Głównego OF [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl).

Finałową galę LXVII Olimpiady Fizycznej zaszczylił wiceminister edukacji narodowej, pan Maciej Kopeć, który gratulował zawodnikom sukcesu, przyznając, że nieodmiennie wielkie wrażenie robi na nim pomysłowość, z jaką uczestnicy podchodzą do rozwiązywania zadań finałowych.

Laureatami LXVII Olimpiady Fizycznej zostali (w kolejności zajętych miejsc):

1. **Łukasz Białas**  
XIII LO w Szczecinie
2. **Konrad Pawlik**  
I LO im. M. Kopernika w Krośnie
3. **Wojciech Szymański**  
VI LO im. J. Kochanowskiego w Radomiu
4. **Maciej Maruszczak**  
XIII LO w Szczecinie
5. **Dominik Borys**  
ZSO nr 2 im. G. Morcinka w Rudzie Śl.
6. **Tomasz Cheda**  
VI LO im. J. Kochanowskiego w Radomiu
7. **Jan Kiljański**  
XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
8. **Bartłomiej Wacławik**  
V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie
9. **Łukasz Majsiak**  
III LO im. A. Mickiewicza we Wrocławiu
10. **Przemysław Podleśny**  
II LO im. P. Firleja w Lubartowie
11. **Antoni Wójcik**  
II SLO im. P. Jasienicy w Warszawie
12. **Jan Sobków**  
Akademickie LO PWr we Wrocławiu
13. **Jerzy Paczos**  
XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
14. **Adam Wątroba**  
IV LO im. M. Kopernika w Rzeszowie
15. **Michał Bucoń**  
II LO im. S. Batorego w Warszawie
16. **Michał Żelasko**  
V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie
17. **Kamil Iwanowski**  
III LO im. Marynarki Wojennej w Gdyni
18. **Łukasz Jakubowski**  
V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie
19. **Jakub Bednarz**  
I LO im. T. Kościuszki w Gorzowie Wlkp.
20. **Michał Maszkowski**  
XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
21. **Mateusz Frejlich**  
I LO im. Króla Kazimierza Wielkiego w Olkuszu
22. **Jakub Wornbard**  
XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
23. **Filip Nikolow**  
V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie
24. **Bartosz Brzoza**  
II LO im. A. Frycza Modrzewskiego w Rybniku
25. **Juliusz Ziomek**  
CXXII LO im. I. Domeyki w Warszawie
26. **Michał Zygarowicz**  
I LO w Krośnie
27. **Piotr Sawicki**  
XIII LO w Szczecinie
28. **Antoni Prus**  
V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie
29. **Krzysztof Druciarek**  
XIII LO w Szczecinie
30. **Kacper Kuta**  
XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
31. **Adrian Czuchaj**  
XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu
32. **Tomasz Tomaszewski**  
LO im. S. Małachowskiego w Płocku



## LXIX Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1324 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 655 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 145 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 20 kwietnia br. postanowił przyznać 38 tytułów laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):

### Nagrody stopnia pierwszego

**Daniel Murawski** (36) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Tomasz Ślusarczyk** (36) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

**Mariusz Trela** (36) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

**Radosław Żak** (36) – Katolickie Gimnazjum im. Świętej Rodziny z Nazaretu w Krakowie.

### Nagrody stopnia drugiego

**Radomił Baran** (30) – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie.

**Cezary Botta** (30) – Gimnazjum im. Noblistów w Rokietnicy.

**Damian Burczyk** (30) – III Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

**Maciej Dziuba** (30) – II Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Końskich.

**Jan Fornal** (30) – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie.

**Łukasz Orski** (30) – Gimnazjum Akademickie Politechniki Wrocławskiej we Wrocławiu.

**Filip Gawron** (29) – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie.

**Aleksandra Kowalska** (29) – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie.

### Nagrody stopnia trzeciego

**Kamil Galewski** (24) – I Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim.

**Jakub Grudzień** (24) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Stanisław Hauke** (24) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Jacek Jakimiuk** (24) – II Liceum Ogólnokształcące im. księżnej Anny z Sapiehów Jabłonowskiej w Białymstoku.

**Łukasz Kamiński** (24) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Rafał Pyzik** (24) – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Tarnowie.

**Antoni Wiśniewski** (24) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Wojciech Drozd** (23) – Zespół Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika Gimnazjum i Liceum Akademickie w Toruniu.

**Radosław Girul** (23) – Liceum Ogólnokształcące nr XXIV z Oddziałami Mistrzostwa Sportowego we Wrocławiu.

**Przemysław Podleśny** (23) – II Liceum Ogólnokształcące im. Piotra Firleja w Lubartowie.

**Jacek Salata** (23) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

**Kajetan Vogtt** (23) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Antoni Żewierzejew** (23) – III Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

### Nagrody stopnia czwartego

**Rafał Szulc** (20) – I Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Lublinie.

**Stanisław Gajda** (18) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Dominik Gulgowski** (18) – III Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

**Justyna Jaworska** (18) – XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie.

**Tomasz Kiełbasa** (18) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Piotr Kowalewski** (18) – III Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

**Natalia Kucharczuk** (18) – I Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim.

**Maciej Małowidzki** (18) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Iwo Pilecki-Silva** (18) – Liceum Ogólnokształcące nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu.

**Paweł Sawicki** (18) – III Liceum Ogólnokształcące z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

**Paweł Moćko** (17) – VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach.

**Michał Siennicki** (17) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Maciej Wojtala** (17) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie zadania z finału LXIX Olimpiady Matematycznej otrzymały następujące osoby:

**Kamil Galewski** (zadanie 1) – I Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim,

**Karolina Zając** (zadanie 5) – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali finalistom w przygotowaniach do zawodów.



# LXI Olimpiada Astronomiczna

## Laureaci

- I. **Anna Olechowska**, 3 klasa II Społ. LO Warszawa
- II. **Kornel Książak**, 3 klasa XIII LO Szczecin
- III. **Wojciech Kolesiński**, 2 klasa XIII LO Szczecin
- III. **Jurand Prądyński**, 3 klasa IV LO Częstochowa
- III. **Patryk Skrzeczkowski**, 3 klasa I LO Radzyń Podl.

## Finałiści (w kolejności alfabetycznej)

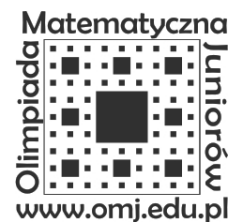
- **Piotr Bielak**, 3 klasa III LO Lublin
- **Elie Boulanger**, 3 klasa gimnazjum ZS UMK Toruń
- **Szymon Cedrowski**, 1 klasa XIV LO Warszawa
- **Kamil Ciebiera**, 2 klasa LO Prez. Rzeszów
- **Krzysztof Druciarek**, 2 klasa XIII LO Szczecin
- **Miłosz Dudek**, 3 klasa I LO Pszczyna
- **Szymon Frąckowiak**, 2 klasa XIII LO Szczecin
- **Adam Gonstał**, 3 klasa I LO Włocławek
- **Mateusz Kapusta**, 1 klasa III LO Wrocław
- **Agnieszka Makulska**, 2 klasa XIV LO Warszawa
- **Piotr Masajada**, 2 klasa XIV LO Wrocław
- **Wiktor Matyszkiewicz**, 2 klasa XIV LO Warszawa
- **Filip Rękawek**, 3 klasa Katol. LO Garwolin
- **Bartosz Salwiczek**, 2 klasa I LO Kołobrzeg
- **Kamil Szydłowski**, 2 klasa ZS UMK Toruń
- **Mateusz Winiarski**, 1 klasa I LO Krosno
- **Wiktor Włodarczyk**, 3 klasa XIII LO Szczecin

Strona internetowa  
Olimpiady Astronomicznej:  
[www.planetarium.edu.pl/oa.htm](http://www.planetarium.edu.pl/oa.htm)

# XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

W XIII Olimpiadzie Matematycznej Juniorów, adresowanej do uczniów gimnazjum oraz szkół podstawowych, wzięło udział 10473 uczniów z 1070 szkół. Do zawodów drugiego stopnia awansowało 1216 uczniów z 551 szkół, a do zawodów finałowych 127 uczniów z 69 szkół.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów postanowił przyznać 73 osobom z 49 szkół tytuł laureata pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy:



## Laureaci I stopnia

### (30 punktów na zawodach II i III stopnia)

Juliusz Banecki, Łukasz Marek Orski, Kornel Sikora

### Laureaci I stopnia (pozostali)

Cezary Mikołaj Botta, Adam Tomasz Dankowiakowski,  
Paweł Franciszek Gadziński, Kosma Jan Kasprzak,  
Tymoteusz Kucharek, Justyna Maja Palikowska,  
Władysław Sowul

## Laureaci II stopnia

Antoni Buraczewski, Bartłomiej Bychawski,  
Oskar Dąbkowski, Julia Helena Filip, Ignacy Gębuś,  
Piotr Kuc, Marek Lisowski, Piotr Jan Łaba,  
Krzysztof Nawrocki, Filip Nogaj, Korneliusz Piotr Obarski,  
Michał Orzanowski, Mateusz Padarż,  
Stanisław Wojciech Sieniawski, Witold Sikora,  
Michał Stanisław Słoniewski, Jakub Igor Słowikowski,  
Jan Stanisław Tryka, Szymon Urban, Kacper Wasiak,  
Dominik Wawszczak, Wojciech Wiktor Weremczuk,  
Artur Wojtuszkiewicz, Radosław Żak

## Laureaci III stopnia

Anna Bachry, Daniel Bernatowicz, Kalina Anna Białek,  
Bogdan Tomasz Błędziński, Michał Bronicki, Mikołaj Bulge,  
Bartosz Chomiński, Konrad Wojciech Czarnecki,  
Damian Wojciech Dąbrowski, Bartosz Piotr Głowacki,  
Antoni Krzysztof Grabowski, Andrzej Gwiazda,  
Karolina Kamińska, Jakub Mateusz Kądziołka,  
Paweł Kielmiński, Mateusz Klepacki, Igor Donat Klimczak,  
Franciszek Kobus, Jan Krzysztof Kossacki,  
Mateusz Kowal, Rafał Jan Krajewski-Siuda,  
Tymoteusz Kwieciński, Paweł Lamża,  
Agata Jolanta Lisowska, Stanisław Majchrzak,  
Kacper Jerzy Paciorek, Tomasz Puczel,  
Patryk Nikodem Rogalski, Edyta Rozczypała,  
Jakub Rymarski, Magdalena Teresa Skrok,  
Antoni Stachowski, Marcin Tabisz, Oliwier Urbański,  
Aleksander Jan Walenciak, Michał Antoni Wiliński,  
Marek Wiśniewski, Piotr Mateusz Zug,  
Jadwiga Irena Zymer

Komitet Główny OMJ pragnie serdecznie podziękować Fundacji mBanku, Instytutowi Matematycznemu PAN, Szkole Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie oraz Wydziałowi Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej za wsparcie organizacji Olimpiady, a także Fundacji mBanku, Panu Franciszkowi Hutten-Czapskiemu, Panu Cezaremu Smorszczewskiemu oraz redakcji czasopisma *Delta* za ufundowanie nagród dla laureatów OMJ.

Zadania oraz pełną wersję komunikatu  
można znaleźć na stronie [www.omj.edu.pl](http://www.omj.edu.pl).



## XXV Olimpiada Informatyczna

W dniach 10–13 kwietnia 2018 r. w Warszawie odbyły się zawody finałowe jubileuszowej, XXV Olimpiady Informatycznej. Zostało do nich zakwalifikowanych 97 zawodników. W ciągu dwóch dni zawodów zawodnicy mieli do rozwiązania w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Komitet Główny przyznał tytuły laureata I, II i III miejsca zawodnikom, którzy w zawodach finałowych uzyskali, odpowiednio, co najmniej 400, 299 i 200 punktów, i wyróżnił zawodników, którzy w finale uzyskali co najmniej 170 punktów. Poniżej publikujemy listę tych zawodników (w nawiasach liczba zdobytych punktów oraz szkoła). Lista wszystkich finalistów jest dostępna na stronie [oi.edu.pl](http://oi.edu.pl).

Z okazji jubileuszu wydana została książka *Przygody Bajtazara. 25 lat Olimpiady Informatycznej. Wybór zadań* (WN PWN).

Uroczystość 25-lecia Olimpiady odbędzie się we wrześniu, w łączności z obchodami 70-lecia informatyki w Polsce.



### Laureaci I miejsca

1. **Anadi Agrawal** (508, Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław)
2. **Mariusz Trela** (506, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków)
3. **Dawid Jamka** (481, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego, Radom)
4. **Kacper Kluk** (434, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
5. **Juliusz Pham** (421, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
6. **Paweł Pawlik** (417, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)

### Laureaci II miejsca

7. **Mateusz Rzepecki** (372, LO nr III, Wrocław)
8. **Mateusz Cegiełka** (347, XIV LO, Warszawa)
9. **Adrian Górecki** (346, XIV LO, Warszawa)
10. **Grzegorz Gawryał** (331, III LO, Tarnów)
11. **Stanisław Strzelecki** (328, XIV LO, Warszawa)
12. **Tomasz Ponitka** (314, LO nr XIV, Wrocław)
13. **Wojciech Szymański** (312, VI LO, Radom)
14. **Damian Burczyk** (311, III LO, Gdynia)
15. **Piotr Nawrot** (309, VI LO, Radom)
16. **Przemysław Podleśny** (299, II LO, Lubartów)

### Laureaci III miejsca

17. **Michał Kępa** (284, IX LO, Częstochowa)
18. **Paweł Anikiel** (280, III LO, Gdynia)
- 19.–21. **Grzegorz Kwiatkowski** (277, XIV LO, Warszawa)  
**Stanisław Szcześniak** (277, XIV LO, Warszawa)  
**Kacper Walentynowicz** (277, III LO, Gdynia)
22. **Jędrzej Olkowski** (270, XIV LO, Warszawa)
23. **Mateusz Orda** (263, LO nr III, Wrocław)
24. **Rafał Kilar** (258, I LO, Krosno)
25. **Antoni Żewierzejew** (254, III LO, Gdynia)
26. **Tymoteusz Wiśniewski** (252, XIV LO, Warszawa)

27. **Zuzanna Skoczylas** (248, XIV LO, Warszawa)
28. **Patryk Księżuk** (244, XIV LO, Warszawa)
29. **Adam Pawłowski** (238, VIII LO, Poznań)
30. **Łukasz Orlikowski** (237, III LO, Gdynia)
- 31.–33. **Cezary Bednarz** (234, LO nr XIV, Wrocław)  
**Dawid Ignasiak** (234, LO nr III, Wrocław)  
**Krzysztof Rymski** (234, XIV LO, Warszawa)
34. **Mieszko Grodzicki** (232, VI LO, Radom)
- 35.–36. **Michał Borowski** (231, I LO, Lublin)  
**Adam Morawski** (231, LO nr III, Wrocław)
37. **Michał Siennicki** (229, XIV LO, Warszawa)
38. **Michał Woźny** (228, V LO, Kraków)
39. **Piotr Kowalewski** (226, III LO, Gdynia)
40. **Konrad Czaplński** (220, I LO, Białystok)
- 41.–42. **Szymon Dominikowski** (218, XIV LO, Warszawa)  
**Paweł Sawicki** (218, III LO, Gdynia)
- 43.–44. **Krystian Król** (213, VI LO, Radom)  
**Hubert Obrzut** (213, LO nr XIV, Wrocław)
45. **Kacper Szczepański** (211, III LO, Gdynia)
46. **Krzysztof Ziobro** (207, V LO, Kraków)
- 47.–49. **Adam Bac** (203, XIV LO, Warszawa)  
**Janusz Partyka** (203, XIV LO, Warszawa)  
**Marek Skiba** (203, I LO, Lublin)
50. **Łukasz Selwa** (201, V LO, Kraków)

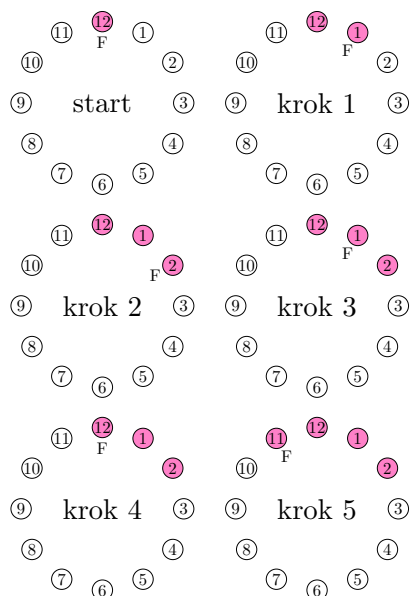
### Finaliści z wyróżnieniem

- Jan Ciołek** (186, XVIII LO, Warszawa)  
**Bartłomiej Waclawik** (186, V LO, Kraków)  
**Karol Górski** (182, I LO, Lublin)  
**Konrad Litwiński** (181, XIV LO, Warszawa)  
**Adam Górkiewicz** (180, LO nr XIV, Wrocław)  
**Tomasz Buczyński** (179, V LO, Kraków)  
**Jagoda Kamińska** (176, III LO, Gdynia)  
**Gerard Drózdź** (173, VI LO, Radom)  
**Szymon Tworkowski** (173, I LO, Białystok)  
**Arkadiusz Kozdra** (171, LO nr XIV, Wrocław)  
**Andrzej Turko** (170, LO nr III, Wrocław)

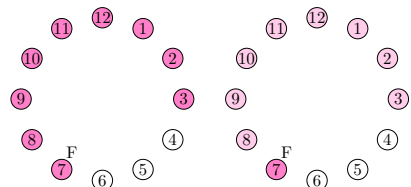


# Ostatni Mohikanin

Łukasz RAJKOWSKI



Początek przykładowej trajektorii fajki (F). Kolorem oznaczeni są Indianie, którzy zdążyli zapalić.



Moment pierwszego dojścia do bezpośredniego sąsiedztwa „szóstki” oraz to, jak wygląda ta sytuacja z punktu widzenia jego potencjalnej „ostatniości”.

Zacznijmy od następującego zadania: dwunastu Indian (dla ustalenia uwagi i zgrabności tytułu przyjmijmy, że pochodzą oni z plemienia Mohikanów) siedzi dookoła ogniska i pali fajkę pokoju. Procedura rozpoczyna się rzecz jasna od Wodza, który po zapaleniu rzuca zdobytą od białych twarzy symetryczną monetą i w zależności od wyniku podaje fajkę na lewo albo na prawo. Kolejny Indianin robi to samo – pali fajkę, rzuca monetą i podaje dalej (fajkę, nie monetę). Nietrudno uwierzyć, że prędzej czy później fajka wpadnie w ręce ostatniego Indianina, który jej wcześniej nie palił (będzie to tytułowy *ostatni Mohikanin*). Oczywiście, na samym początku nie jesteśmy w stanie stwierdzić, kto nim będzie, gdyż przedstawiona procedura jest losowa. Zapewne jednak niektórzy z Mohikanów mają większą szansę na bycie ostatnim Mohikaninem niż inni. Naturalne jest w tej sytuacji pytanie: który z nich ma na to szansę *największą*?

Wydaje się, że Indianie o numerach 1 i 11 nie są dobrymi kandydatami – każdy z nich ma prawdopodobieństwo 50% otrzymania fajki już w pierwszym ruchu. Analiza sytuacji Indian o numerach 2 i 10 zdaje się bardziej skomplikowana, intuicja podpowiada jednak, że ich szansa na bycie ostatnimi jest większa niż sąsiadów Wodza. Idąc tym tropem, największą szansę na bycie ostatnim powinien mieć Indianin siedzący najdalej od Wodza, czyli ten o numerze 6. Przedstawionym domysłem daleko jednak do matematycznej ścisłości i nic dziwnego – prowadzą bowiem do błędnych wniosków. Tak naprawdę *każdy Indianin (poza Wodzem) ma to samo prawdopodobieństwo zapalenia fajki jako ostatni!* Jak to możliwe?

Z punktu widzenia Mohikanina numer 1 sytuacja wygląda następująco: fajka znajduje się u jego sąsiada (Wodza) i pytamy o prawdopodobieństwo tego, że fajka zdąży odwiedzić pozostałych Indian, zanim trafi do „jedyńki”. Rozważmy teraz Indianina o numerze 6. Zauważmy, że niezależnie od trajektorii fajki przyjdzie taki moment, że fajka po raz pierwszy wyląduje w *bezpośrednim sąsiedztwie* „szóstki”. Jeśli ma on palić jako ostatni, to tak czy inaczej począwszy od tego momentu fajka *musi* odwiedzić wszystkie wierzchołki poza „szóstką”, zanim do niego trafi (ze sposobu przekazywania fajki wynika, iż dotychczas odwiedzone wierzchołki nie mają znaczenia, gdyż i tak będą musiały zostać odwiedzone jeszcze raz). Jest to dokładnie ta sama sytuacja, jaka na początku była widziana *oczami Indianina numer 1*. Pokazaliśmy zatem, że

*na pewno dojdzie do zdarzenia, pod warunkiem którego szansa „szóstki” na bycie ostatnim jest taka, jak szansa (bezw warunkowa) „jedyńki” na bycie ostatnim.*

Oznacza to, że (bezw warunkowa) szansa „szóstki” na bycie ostatnim jest taka sama, jak szansa jedynki – oczywiście w ten sam sposób możemy pokazać, że szansa dowolnego Indianina (poza Wodzem) na bycie ostatnim Mohikaninem jest taka sama, wynosi zatem 1/11.

Wyobraźmy sobie teraz, że mamy do czynienia z rzutkami Indianami, którzy nie mają nic przeciwko rzucaniu fajką pokoju i czynią to bardzo celnie. Reguły gry są podobne – po wypaleniu fajki każdy z Indian z równym prawdopodobieństwem wybiera któregoś z pozostałych, aby przekazać mu fajkę. Oczywiście, ze względu na symetrię sytuacji, wciąż jest prawdą to, że każdy z Indian ma to samo prawdopodobieństwo zostania ostatnim Mohikaninem, niezależnie od początkowego położenia fajki. A co by było, gdyby między nimi występowały jakieś animozje, tzn. nie każda para Indian byłaby skłonna przekazać między sobą fajkę? Czy istnieje inna struktura sympatii i antypatii poza *cyklem* (każdy z Indian lubi wyłącznie swoich sąsiadów; rozważyliśmy ten przypadek w pierwszej części artykułu) i *kliką* (każdy z Indian darzy się sympatią), w której zachodzi przedstawiona wcześniej własność? Okazuje się, że nie, co uzasadniamy dalej.

Zaprezentowany fakt został udowodniony w artykule Lászlo Lovásza i Petera Winklera *A note on the last new vertex visited by a random walk*, opublikowanym w 1993 r. w czasopiśmie *Journal of Graph Theory*.

Rozpocznijmy od przedstawienia naszego problemu w języku teorii grafów. Mamy do czynienia z grafem  $\mathcal{G} = (V, E)$  o  $n$  wierzchołkach, po którym w losowy sposób spacerujemy – stojąc w dowolnym wierzchołku, z jednakowym prawdopodobieństwem wybieramy dowolnego jego sąsiada, aby przejść do niego w następnym kroku. Niech  $p_u(v)$  będzie prawdopodobieństwem zdarzenia, że wierzchołek  $v$  został odwiedzony jako ostatni, jeśli startowaliśmy z  $u$ . Interesujący nas warunek możemy teraz zapisać jako

$$(*) \quad \text{dla dowolnych, różnych wierzchołków } u, v \text{ zachodzi } p_u(v) = 1/(n-1).$$

Załóżmy, że spełniony jest powyższy warunek i wybierzmy dowolne dwa *niepołączone* wierzchołki  $u, v$ . Niech  $d$  będzie stopniem  $u$ , a  $S$  zbiorem jego sąsiadów. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, dostajemy  $p_u(v) = \frac{1}{d} \sum_{s \in S} p_{u,s}(v)$ , gdzie  $p_{u,s}(v)$  jest prawdopodobieństwem zakończenia na  $v$  jeśli startowaliśmy od  $u$  pod warunkiem zdarzenia, że pierwszym odwiedzonym

wierzchołkiem był  $s$ . Zauważmy ponadto, że  $p_{u,s}(v) \geq p_s(v) \stackrel{(*)}{=} p_u(v)$ , gdyż  $p_{u,s}(v)$  „obejmuje” wszystkie te spacery (liczone od  $s$ ), co  $p_s(v)$  oraz te, które nie odwiedzały  $u$  przed dotarciem do  $v$ . Gdyby istniał choć jeden taki spacer, mielibyśmy  $p_u(v) = \frac{1}{d} \sum_{s \in S} p_{u,s}(v) > \frac{1}{d} \sum_{s \in S} p_s(v) = p_u(v)$ , zatem sprzeczność.

Nie istnieje więc spacer, który startuje z sąsiada  $u$ , przechodzi (niekoniecznie jednokrotnie) przez wszystkie wierzchołki poza  $u$  i  $v$ , a na końcu odwiedza  $v$ . Wnioskujemy stąd, że

$$(*) \quad G \setminus \{u, v\} \text{ jest niespójny dla dowolnych niepołączonych } u, v.$$

Okazuje się, że graf, który spełnia  $(*)$  i  $(*)$ , musi być łańcuchem albo kliką. Jest to ciekawe i przystępne zadanie z matematyki dyskretnej, które polecamy wykonać Czytelnikom Ambitnym. Czytelnikom Niecierpliwym polecamy zaś lekturę marginesu. Howgh!

(1) (A) nie jest cyklem. (B) nie jest cyklem. (C) nie jest cyklem. (D) nie jest cyklem. (E) nie jest cyklem. (F) nie jest cyklem. (G) nie jest cyklem. (H) nie jest cyklem. (I) nie jest cyklem. (J) nie jest cyklem. (K) nie jest cyklem. (L) nie jest cyklem. (M) nie jest cyklem. (N) nie jest cyklem. (O) nie jest cyklem. (P) nie jest cyklem. (Q) nie jest cyklem. (R) nie jest cyklem. (S) nie jest cyklem. (T) nie jest cyklem. (U) nie jest cyklem. (V) nie jest cyklem. (W) nie jest cyklem. (X) nie jest cyklem. (Y) nie jest cyklem. (Z) nie jest cyklem.



Redaguje Łukasz BOŻYK



## Zadania



**M 1570.** Czy istnieje taki wielościan wypukły  $\mathcal{W}$ , który można rozciąć płaszczyzną na dwa wielościany podobne do  $\mathcal{W}$ ?  
Rozwiązanie na str. 10

**M 1571.** Wewnątrz trójkąta równobocznego  $ABC$  wyznacz zbiór takich punktów  $P$ , że miary kątów  $PAB, PBC, PCA$  tworzą w tej właśnie kolejności ciąg arytmetyczny.  
Rozwiązanie na str. 2

**M 1572.** Oznaczmy przez  $r(n)$  sumę  $n$  liczb będących resztami z dzielenia dodatniej liczby całkowitej  $n$  przez  $1, 2, \dots, n$ . Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich  $n$ , że  $r(n) = r(n-1)$ .  
Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 955.** Na pochylnię tworzącą kąt  $\alpha$  z poziomem należy wciągnąć ciężką paczkę. Dla jakiej rozwartości kąta  $\beta$  między kierunkiem siły wciągającej  $F$  i pochylnią wartość tej siły jest najmniejsza? Współczynnik tarcia paczki o powierzchnię pochylni wynosi  $f$ .  
Rozwiązanie na str. 4

**F 956.** Średnia gęstość Ziemi wynosi  $\rho \approx 5,5 \text{ g/cm}^3$ . Oszacuj wartość ciśnienia  $p$  w środku Ziemi. Przyspieszenie ziemskie (na jej powierzchni) wynosi  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ , a promień Ziemi  $R \approx 6400 \text{ km}$ .  
Rozwiązanie na str. 2

## Kiedy możemy czuć się bezpieczni?

Zawodowo zajmuję się kryptologią, czyli dziedziną nauki badającą różne aspekty bezpieczeństwa cyfrowego świata. Jest to nauka ścisła, czyli taka, w której królują stricte matematyczne rozumowania. Solą matematyki są, oczywiście, dowody. Również główne wyniki kryptologiczne to właśnie twierdzenia i ich dowody. A twierdzenie to para: założenie i teza. W kryptologii teza zwykle jest podobna: proponowany system jest bezpieczny. Ciekawym i ważnym pytaniem jest jednak wątpliwość: ale przy jakich założeniach?!

I tutaj staramy się być tak paranoiczni, jak to tylko możliwe.

Pierwszą regułą, którą wyznaje środowisko kryptologiczne, jest tak zwana zasada Kerckhoffs'a (z roku 1883), czyli zasada, że *wróg zna system*. To założenie mówi, że system powinien być bezpieczny, nawet jeśli nasz przeciwnik (cracker, podsłuchiwaniec) zna cały protokół, a jedyne, co pozostaje dla niego tajemnicą, to *klucz kryptograficzny*. Motywacja dla takiego założenia jest dość jasna. Komunikujemy się zwykle nie raz, a wielokrotnie. Nie sposób w praktyce wymyślać i używać nowego protokołu do każdego pojedynczego aktu komunikacji. W związku z tym używa się za każdym razem tego samego systemu, ALE ten system nie jest jednoznaczny, tylko zależy od jakiegoś ciągu bitów, zwanego kluczem. Ponieważ system używany jest wielokrotnie i przez wielu użytkowników, to powinniśmy się liczyć z tym, że – prędzej czy później – zostanie przechwycony i stanie się znany przeciwnikowi. Użytkownicy systemu nie powinni się jednak tej sytuacji obawiać, powinni tylko pilnować swoich kluczy. Więcej, owe klucze można starać się często zmieniać, co jeszcze dodatkowo podnosi bezpieczeństwo (oczywiście, w klasycznych szyfrach pojawia się wtedy problem bezpiecznego ustalenia wspólnego klucza).

Dokładnie w ten sposób działa np. nowoczesne szyfrowanie AES (*Advanced Encryption Standard*) czy inne popularne szyfry symetryczne. Środowisko kryptologów bynajmniej nie próbuje utrzymać w tajemnicy sposobu działania AES-a. Wręcz odwrotnie – system powstał w wyniku jawnego konkursu (w roku 1997), w którym każdy mógł zgłosić (publicznie!) swojego kandydata na szyfr, a ostatecznego wyboru dokonał amerykański instytut NIST. Wygrała propozycja Vincenta Rijmena i Joana Daemena, której szczegóły można znaleźć chociażby w Wikipedii.

Można by sobie, oczywiście, zadać na boku pytanie, czy – tak *na wszelki wypadek* – nie opłacałoby się utajnić również sam system. Powszechnie uważa się, że jest to jednak zły pomysł! Dlaczego? Wierzy się, że system, który ma luki, a jest upubliczniony przed wprowadzeniem do użycia, zostanie skutecznie *zaatakowany* przez społeczność kryptologiczną, zanim jego używanie mogłoby narazić kogoś na straty. Utajnienie systemu pozbawia nas szansy na taką darmową, *środowiskową* weryfikację.

Ale wróćmy do dyskusji na temat założeń. Na razie przyjrzeliliśmy się założeniu, że wszystkie szczegóły działania systemu (poza kluczami) są znane przeciwnikowi. Dodatkowo, kryptolodzy powszechnie zakładają również, że cała komunikacja między stronami protokołu może zostać podsłuchana.

Od razu uspokójmy Czytelnika – pomimo że te założenia wydają się bardzo silne, to istnieje wiele protokołów (nie tylko szyfrowanie, ale i podpis cyfrowy, i wiele innych), które są bezpieczne przy założeniu o przeciwniku dokładnie takim jak wyżej (i przy kilku dość wiarygodnych założeniach z dziedziny algorytmiki). Spójrzmy jednak na problem z drugiej, paranoicznej strony i zadajmy sobie pytanie: czy powyższy zestaw założeń (przypomnijmy: wróg zna system i może podsłuchiwać całą komunikację) nie jest, być może, i tak za słaby? To znaczy, czy powyższy *model* dobrze opisuje realia świata i uwzględni wszystkie sytuacje, w których chcemy się cyfrowo komunikować?

W tym miejscu przebijmy balon suspensu i napiszmy wprost: czasem nawet i ten model jest za słaby!

Wszystkiemu *winna* jest ludzka głowa, która nie potrafi ani zapamiętać kilkusetcyfrowych kluczy, ani wykonywać szybko obliczeń na liczbach tego rozmiaru, czego wymaga większość protokołów. Wyręczamy się urządzeniami (smartfonami, kartami płatniczymi, komputerami osobistymi), a te podatne są na ataki nieobjęte w wyżej opisanym modelu! (Nie są przecież zespawaną ołowianą skrzynką, do której tylko wchodzi i wychodzą pakiety komunikacji.)

Może się przecież zdarzyć, że nasz komputer został zainfekowany wirusem, który przejmie kontrolę nad naszym sprzętem i wykradnie nasz klucz trzymany w pamięci komputera. W takiej sytuacji (pełna kontrola przeciwnika nad sprzętem) raczej trudno o nadzieję na bezpieczeństwo. Ale w praktyce często przeciwnik *czegoś* się dowie o naszym urządzeniu, ale nie wszystkiego. Na przykład jest w stanie wykraść tylko jakąś część pamięci komputera. Albo jest w stanie mierzyć pobór mocy karty płatniczej podczas interakcji z bankomatem. Albo może nagrać dźwięk (sic!), który wydaje procesor podczas procesu szyfrowania danych. Dla każdego z powyższych przypadków istnieją protokoły kryptologiczne bezpieczne w standardowym sensie, ale złamane przy obecności opisanej dodatkowej wiedzy przeciwnika (tzw. wycieku). Stanowi to, oczywiście, bezsporną motywację do dyskusji na temat założeń odnośnie przeciwnika w twierdzeniach postulujących bezpieczeństwo różnych rozwiązań.

Kryptolog zawsze powinien oddychać możliwie rozrzedzonym powietrzem. Próbuje definiować przeciwnika możliwie najsilniejszym, nawet jeśli wydaje się to skrajnie przesadzone (np. zakładamy, że przeciwnik może poznać wartość **dowolnie wybranej przez siebie** funkcji stanu pamięci urządzenia, o ile tylko wartość tej funkcji nie zdradzi więcej niż 90% całości). Sloganowo można by to uzasadnić, pisząc, że przecież czego przestępca nie umiał wczoraj, zrobi jutro. I wcale to nie jest pretensjonalne haselko. Naprawdę ciężko było kiedyś nawet przypuścić, że dźwięk wydawany przez urządzenie szyfrujące może być jakoś zależny od klucza w nim zapisanego!

Lubię myśleć, że kryptolodzy po prostu sprzedają *pakiety ubezpieczeniowe*. Oczywiście, nigdy żaden nie zabezpieczy nas od wszystkiego, ale stale staramy się poszerzać ich zakres. Z drugiej strony – przeciwnicy też mają coraz potężniejsze narzędzia do ataku... Skojarzenie z kotkiem i myszką narzuca się niemal ostentacyjnie.

Tomasz KAZANA

## Pamiętajcie o następcach

Różne sprawy dzieją się wraz z nadejściem wiosny, może to być np. rozstrzygnięcie polskiej części europejskiego konkursu Młodych Badaczy.

W konkursie mogą brać udział uczniowie szkół różnego stopnia i specjalności. Należy przedstawić opis pracy wykonanej samodzielnie w zakresie nauk przyrodniczych i ścisłych, można mieć opiekuna (zwykle nauczyciel lub pracownik uczelni). Do konkursu startują uprzednio nagradzani i wyróżniani w innych konkursach krajowych lub rekomendowani przez samodzielnego pracownika naukowego. Przesłane do krajowego organizatora (jest nim „od zawsze” Krajowy Fundusz na Rzecz Dzieci) opisy prac są recenzowane przez ekspertów z danej dziedziny, a następnie przesyłane do jury. Tu jestem!

Dostajemy co roku komplet materiałów (w tym roku było ich około 80), z nich wybieramy 20 finalistów. Finaliści przyjeżdżają do Centrum Nauki Kopernik (często po raz pierwszy w życiu) i przez dwa dni opowiadają, co zrobili, i rozmawiają z Jury. To dzieje się wiosną, w tym roku ciepłą i piękną, choć z rzadka spoglądaliśmy za okna. To są ważne kilkugodzinne rozmowy. Większość jurorów spotyka się z młodymi badaczami od kilkunastu lat – stąd też wyrobiliśmy sobie opinię o ich ogólnym poziomie merytorycznym. Ten poziom rośnie! Finaliści otrzymują nagrody trzech stopni, w każdej kategorii po trzy. Nagradzamy także sposób prezentacji (plakat, drobne rekwizyty). W tym roku mało drobne były dwa modele łazików Marsjańskich wybudowane przez uczniów.

Laureaci pierwszych nagród jadą na konkurs europejski EUCYS.

Konkurs, o którym mowa, EUCYS, czyli European Union Contest for Young Scientists jest organizowany od 1989 roku. Polska została dopuszczona do udziału w konkursie w roku 1995, czyli 9 lat przed przyjęciem do Unii. Spisujemy się w EUCYS bardzo dobrze, bo właśnie (mimo krótszego udziału) wyprzedziliśmy Brytyjczyków i wysunęliśmy się na drugie miejsce w „klasyfikacji medalowej” (za Niemcami).

Nasza redakcja jest szczególnie z tego dumna, bo na 23 nagrody, jakie zostały przyznane młodym matematykom, aż 10 zdobyli przedstawiciele Polski, ale też *Delty*, bo byli to laureaci Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki organizowanego od 40 lat przez naszą redakcję i Polskie Towarzystwo Matematyczne. Jak widać, nasz Konkurs nie ma sobie równych w Europie.

Konkurs nosi dziś imię Pawła Domańskiego, pierwszego zwycięzcy, który potem stworzył silną grupę badaczy analizy funkcjonalnej w Poznaniu.

*Redakcja*

Nauki przyrodnicze poczyniły wielkie postępy. Do pracowni biologicznych wprowadzono wyszukane przyrządy konstruowane przez fizyków i inżynierów, wyposażone w zaawansowane programy informatyczne. Te zmiany obserwujemy także dzięki swobodnemu dostępowi uczniów do nowych laboratoriów. Ci, którzy urodzili się w małych miejscowościach, potrafią także znaleźć drogę do pracowni (i serc naukowców) akademickich. Przychodzą „z pytaniem” i zostają na dłużej. Zazwyczaj na swoje pomiary i realizację pomysłów przeznaczają kolejne wakacje. Czasem ich pomysły stają się zaczynem badań opiekunów.

Są te uczniowskie projekty pomysłowe i nowoczesne, a ich wyniki zawsze opracowane statystycznie. Dominuje wyraźny kierunek poszukiwania zastosowań praktycznych zjawiska, które się bada. Jest to np. projekt hydrożeli –

żeli pochłaniających metale w wodach przemysłowych, znalezienie nowej technologii przeróbki wełny, sierści i piór zwierząt pozyskiwanych na mięso (ogromny problem środowiskowy, co robić z tonami takich odpadów), nowy test wczesnego wykrycia zakażenia układu moczowego u niemowląt (poważny problem diagnostyki medycznej, rodzice niemowlęcia wiedzą, jakim kłopotem jest „zbiórka moczu” u malucha). Problemem remediacji ropopochodnych zanieczyszczeń gleby i wód z pomocą grzyba – bocznika zajęli się dwaj uczniowie z warszawskiego liceum im. Staszica. Pierwotwór implantu uwalniającego witaminę B12 utworzyła uczennica Liceum im. Norwida w Częstochowie (niedobór trudny do zdiagnozowania), który likwidowałby bolesne i częste zastrzyki witaminy.

Nagrody zostały przyznane, nazwiska twórców ogłoszone. Sama, zgadzając się z uszeregowaniem wyróżnianych uczynionym po długiej wnikliwej dyskusji, osobiście chcę powiedzieć o pracach, które zdobyły moje serce:

- Diagnostyka chorób układu moczowego u niemowląt.
- Analiza architektury naczyń krwionośnych dna oka w oparciu o regułę Leonarda da Vinci.
- Efektywne chłodzenie komputera dzięki ciepłu parowania cieczy.

Twórca kaskady parującej wody dołączonej do osobistego komputera wymyślił i wielokrotnie ulepszył system chłodzenia, ponieważ: „przeszkadzał mi szum wentylatora chłodzącego osobisty komputer”. Idea pionierska i pewno przyda się podobnym Jackowi. Kaskada nie hałasuje!

O dnie oka i wczesnym, najwcześniejszym wykrywaniu zwyrodnienia plamki żółtej (nieuleczalna postępująca choroba kończąca się ślepotą, 300 mln ludzi na świecie) myślę serdecznie, bo dotknęła ludzi z mojego najbliższego otoczenia.

I wreszcie te pieluszki nasycone indykatorowym roztworem (siostra projektodawczyni chorowała) mobilizują moje współczucie dla rodziców niemowląt.

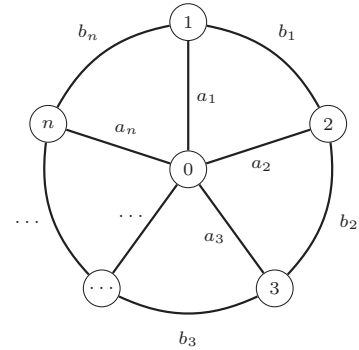
Z twórcami tych wielu pomysłów i ich ulepszeń na pewno spotkamy się w przyszłości. A może także z autorem pracy o geometrycznych własnościach środka ciężkości, którego największą pasją życiową jest gra na skrzypcach.

*Magdalena FIKUS*

## Informatyczny kącik olimpijski (116): Bajtockie kółeczko

Tym razem omówimy zadanie *Bajtockie kółeczko* z pierwszego etapu zawodów drużynowych X Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów.

**Bajtockie kółeczko:** W Bajtocji znajduje się  $n + 1$  miast (ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 0 do  $n$ ) oraz  $2n$  dróg pomiędzy nimi. Miasta o numerach z przedziału  $[1; n]$  znajdują się na okręgu, zaś miasto o numerze 0 (stolica) jest środkiem tego okręgu. Pomiedzy każdym miastem na okręgu oraz stolicą istnieje dwukierunkowe połączenie ( $a_i$  oznacza czas przejazdu pomiędzy stolicą a  $i$ -tym miastem). Dodatkowo, pomiędzy każdymi dwoma sąsiednimi miastami na okręgu istnieje dwukierunkowe połączenie ( $b_i$  oznacza czas przejazdu pomiędzy  $i$ -tym miastem a miastem sąsiadującym z prawej strony). Naszym zadaniem jest zaplanowanie podróży po Bajtocji. W tym celu musimy wybrać miasto, z którego wyruszymy oraz miasta, które odwiedzimy. Podróż musi zaczynać się i kończyć w tym samym mieście. Każda droga oraz każde miasto (poza miastem, w którym zaczynamy i kończymy podróż) może zostać odwiedzone co najwyżej raz. Ile czasu potrwa najdłuższa taka podróż?



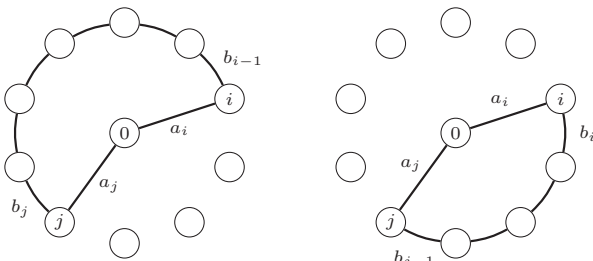
Naszym zadaniem, w terminologii grafowej, jest znalezienie cyklu o największej sumie wag krawędzi. Rozważmy dwa przypadki:

- do cyklu nie należy wierzchołek 0 – wówczas mamy tylko jedną możliwość wyboru cyklu, którego suma wag krawędzi wynosi:  $b_1 + b_2 + \dots, b_n$ ;
- do cyklu należy wierzchołek 0 – ten przypadek zostanie dokładnie opisany w dalszej części rozwiązania.

### Rozwiązanie $O(n^3)$

Rozważamy przypadek, kiedy stolica należy do cyklu. W tym przypadku dokładnie dwie krawędzie incydentne ze stolicą należą do cyklu. Zauważmy, że dla ustalonych krawędzi incydentnych ze stolicą łatwo znaleźć najdłuższy cykl. Załóżmy, że do cyklu należą krawędzie:  $(0, i)$  oraz  $(0, j)$  dla  $i, j \in [1; n]$  i  $i < j$ . Wówczas istnieją dokładnie dwa cykle zawierające obie te krawędzie:

- $C_l$  – zakładamy, że od  $i$ -tego wierzchołka poruszamy się w lewo,
- $C_p$  – zakładamy, że od  $i$ -tego wierzchołka poruszamy się w prawo.



po lewej  $C_l$ , po prawej  $C_p$

Suma wag krawędzi cyklu  $C_l$  wynosi:

$$W_l = a_i + b_{i-1} + \dots + b_1 + b_n + \dots + b_j + a_j,$$

zaś suma wag krawędzi cyklu  $C_p$  wynosi:

$$W_p = a_i + b_i + \dots + b_{j-1} + a_j.$$

Zatem dla ustalonych krawędzi incydentnych ze stolicą (krawędzi do wierzchołków  $i$  oraz  $j$ ) wynikiem jest  $\max(W_l, W_p)$ .

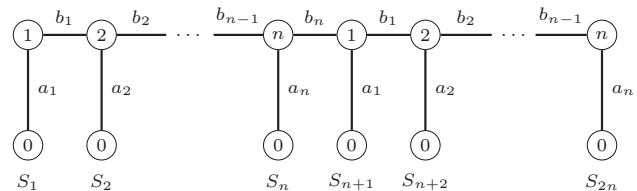
Aby znaleźć cykl o największej sumie wag krawędzi, wystarczy rozpatrzyć każdą parę krawędzi incydentnych ze stolicą. Dla każdej takiej pary należy obliczyć wynik i spośród otrzymanych wyników wybrać maksimum. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie  $O(n^3)$ .

### Rozwiązanie $O(n^2)$

Zauważmy, że możemy w czasie stałym obliczać sumę wag krawędzi na spójnym fragmencie obwodu przy wykorzystaniu sum prefiksowych. Wówczas otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie  $O(n^2)$ .

### Rozwiązanie $O(n \cdot \log(n))$

Ustawmy wierzchołki, które znajdują się na obwodzie, w ciąg (jeden za drugim) oraz zduplikujmy otrzymany ciąg.

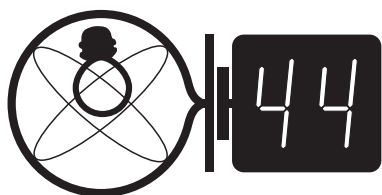


Niech  $S_i$  oznacza odległość od wierzchołka numer 1 do kolejnych kopii stolicy, dokładnie:

$$S_i = \begin{cases} a_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_j & \text{dla } 1 \leq i \leq n, \\ a_{i-n} + \sum_{j=1}^n b_j + \sum_{j=1}^{i-1-n} b_j & \text{dla } n < i \leq 2n. \end{cases}$$

Dla każdego całkowitego  $i \in [1; n]$  znajdujemy najdłuższy cykl, który zawiera krawędź  $(0, i)$ . Zauważmy, że długość tego cyklu wynosi:  $S_j - S_i + a_i$ , dla takiego największego  $S_j$ , że  $j \in [i + 1; i + n - 1]$ . Znalezienie największej takiej wartości w ciągu  $S$  można zrealizować drzewem przedziałowym (dlaczego?). Spośród wyników obliczonych dla każdego  $i \in [1; n]$  wybieramy największy. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie  $O(n \cdot \log(n))$ .

Bartosz ŁUKASIEWICZ



## Skrót regulaminu

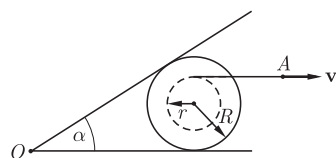
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2018

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

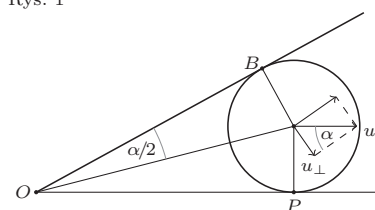
Przypominamy treść zadań:

**654.** Na szpulę o promieniu wewnętrznym  $r$  i zewnętrznym  $R$  nawinięta jest linka (rys. 1). Koniec  $A$  linki ciągnięty jest poziomo z prędkością  $v$ . Na szpuli opiera się deska, która może obracać się wokół poziomej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku, przechodzącej przez punkt  $O$ . Szpula toczy się bez poślizgu po powierzchni poziomej. Jaka jest prędkość kątowa deski, gdy tworzy ona z poziomem kąt  $\alpha$ ?



Rys. 1

**655.** Ciężarek o masie  $m$  wisi na nici. Na jaką najmniejszą wysokość należy podnieść ciężarek, aby spadając, rozerwał nić? Minimalna siła wystarczająca do rozerwania nici wynosi  $Mg$  ( $g$  jest przyspieszeniem ziemskim) i przed rozerwaniem wydłuża ją o  $a$ . Zakładamy, że siła naprężenia nici jest proporcjonalna do jej wydłużenia aż do zerwania.



Rys. 2

**654.** Toczenie bez poślizgu możemy opisać jako czysty obrót wokół chwilowej osi przechodzącej przez punkt styczności z podłożem  $P$  (rys. 2), stąd prędkość kątowa ruchu obrotowego szpuli dana jest wzorem  $\omega = \frac{v}{R+r}$ , a jej prędkość ruchu postępowego wynosi  $u = \omega R = \frac{vR}{R+r}$ . Prędkość punktu  $B$  styczności szpuli z deską w chwili, gdy deska tworzy z poziomem kąt  $\alpha$ , ma składową prostopadłą do deski  $u_{\perp} = u \sin \alpha$  (prędkość ruchu obrotowego jest prostopadła do deski). Odległość punktu  $B$  od osi obrotu deski wynosi  $l = \frac{R}{\tan \frac{\alpha}{2}}$ . Szukana prędkość kątowa deski dana jest wzorem

$$\omega_D = \frac{u_{\perp}}{l} = \frac{2v \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{R+r}.$$

**655.** Nić nie ulega zerwaniu, gdy ciężarek wisi na niej w stanie równowagi, zatem spełniony jest warunek:  $m < M$ . Oznaczmy przez  $x$  wydłużenie nici w stanie równowagi (rys. 3), mamy wtedy związki:

$$a = \frac{Mg}{k}, \quad x = \frac{mg}{k} = \frac{am}{M},$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem sprężystości nici. Dodatkowe wydłużenie w momencie rozerwania nici wynosi  $y = a - x$ . Musimy rozważyć dwa przypadki:

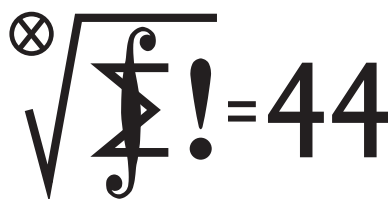
1. Gdy  $y \leq x$ ,  $a \leq 2x$ ,  $m \geq \frac{M}{2}$ , na ciężarek cały czas działa siła sprężystości i aż do momentu zerwania nici porusza się on ruchem harmonicznym. Najmniejsza wysokość, na jaką musimy go podnieść, wynosi  $h = y = a \left(1 - \frac{m}{M}\right)$ .
2. Gdy  $y > x$ ,  $m < \frac{M}{2}$ , możemy skorzystać z zasady zachowania energii:  $mg(h + y) = \frac{ka^2}{2}$ .

Ostatecznie szukana wysokość dana jest wzorem

$$h = \begin{cases} a \left(1 - \frac{m}{M}\right), & \text{gdy } \frac{M}{2} \leq m < M, \\ \frac{a(M^2 - 2mM + 2m^2)}{2mM}, & \text{gdy } m < \frac{M}{2}. \end{cases}$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 646 ( $WT = 2,75$ ), 647 ( $WT = 3,95$ ), 648 ( $WT = 2,71$ ), 649 ( $WT = 2,67$ ) z numerów 11 i 12/2017

Tomasz Rudny	Poznań	39,04
Marian Łupieżowicz	Gliwice	38,86
Tomasz Wietecha	Tarnów	36,14
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosów	28,70
Karol Łukanowski	Niemcz	23,89
Aleksander Surma	Myszków	18,61



## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2018

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

**757.** Funkcje  $f, g: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  są określone wzorami

$$f(k) = \max\{1, k-1\}, \quad g(k) = \min\{n, k+1\}.$$

Dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$  ustalić, ile jest funkcji  $h: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , dających się wyrazić jako złożenie skończenie wielu odwzorowań, z których każde jest jedną z funkcji  $f, g$ . [Dopuszczamy również złożenie puste (zero egzemplarzy funkcji  $f, g$ ), przyjmując zwykłą umowę, że daje ono w wyniku odwzorowanie tożsamościowe  $h(k) = k$ .]

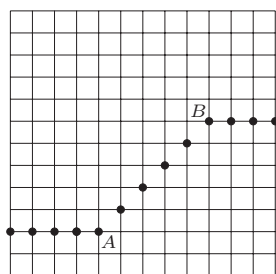
**758.** Trzy okręgi o promieniach  $r_1, r_2, r_3$  są parami styczne zewnętrznie oraz są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu  $R$ . Wykazać, że

$$r_1 + r_2 + r_3 + 2\sqrt{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} \leq 3R.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 751 ( $WT = 3,77$ ) i 752 ( $WT = 1,26$ ) z numeru 12/2017

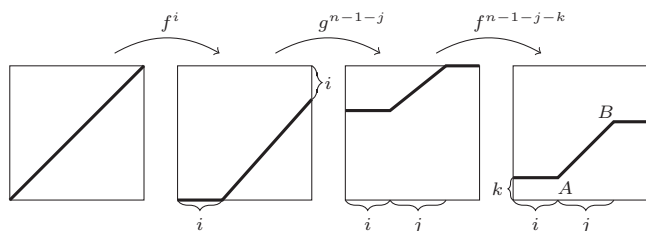
Marcin Kasperski	Warszawa	45,09
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Choczewski	Szczecin	36,09
Michał Koźlik	Gliwice	32,23
Michał Miodek	Warszawa	31,56

Nie tak wielu Weteranów przekroczyło 44 więcej niż trzy razy (do tej pory – dwudziestka). Marcin Kasperski oto dołączył do ich grona.



Rys. 1

Wniosek: startując od odwzorowania tożsamościowego i stosując skończenie wiele razy operacje  $f, g$  (w dowolnej kolejności) możemy uzyskać tylko funkcje typu  $h_{AB}$  oraz funkcje stałe. Co ważne, *każdą* taką funkcję da się w ten sposób uzyskać (przykładową ewolucję przedstawia rysunek 2).



Rys. 2

Pozostaje zliczyć funkcje  $h_{AB}$  – czyli możliwe pary punktów  $A, B$  – oraz doliczyć funkcje stałe. Punkty  $A, B$  mogą leżeć na przekątnej  $x = y$  (przechodzącej przez  $n$  punktów kratowych), na jednej z dwóch linii  $|x - y| = 1$  (po  $n-1$  punktów kratowych), na jednej z dwóch linii  $|x - y| = 2$  (po  $n-2$  punktów kratowych), itd. Liczba możliwych do uzyskania funkcji (więc  $n$  funkcji stałych oraz wszystkich funkcji  $h_{AB}$ ) wynosi zatem

$$n + \binom{n}{2} + 2 \left[ \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{2}{2} \right] = n + \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} = \frac{n(2n^2 - 3n + 7)}{6}.$$

**757.** Funkcja jest reprezentowana przez jej wykres – w tym przypadku układ  $n$  kropek na „planszy”

$$K = \{(x, y) : 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n; x, y \in \mathbb{N}\}$$

(to zbiór punktów kratowych w kwadracie  $[1, n] \times [1, n]$ ), po jednej kropce na każdej linii pionowej. Stosując do takiego układu funkcję  $f$ , uzyskujemy przesunięcie wszystkich kropek o jednostkę w dół, z wyjątkiem tych, które już były na dolnej krawędzi; one nie zmieniają położenia. Działanie funkcji  $g$  jest podobne (ruch w górę; blokada na górnej krawędzi).

Niech  $A, B$  będą dwoma różnymi punktami zbioru  $K$  takimi, że odcinek  $AB$  jest równoległy do przekątnej kwadratu, przy czym punkt  $B$  leży na prawo i w górę od  $A$ . Dla takiej pary punktów niech  $h_{AB}$  oznacza funkcję, której wykres składa się z punktów kratowych, położonych na odcinku poziomym od lewego skraja planszy do  $A$ , na odcinku  $AB$ , i na odcinku od  $B$  do prawego skraja planszy (rysunek 1). Złożenie takiej funkcji z dowolną z operacji  $f, g$  daje w wyniku znów funkcję takiej postaci lub funkcję stałą (o wykresie: wszystkie kropki na krawędzi górnej lub dolnej). Złożenie funkcji stałej z  $f$  lub  $g$  daje oczywiście także funkcję stałą.

**758.** Oznaczmy (kolejno) przez  $S_1, S_2, S_3$  środki tych trzech okręgów, a środek dużego okręgu przez  $O$ . Zgodnie z warunkami zadania,

$$(1) |S_i S_j| = r_i + r_j, \quad |OS_i| = R - r_i \quad \text{dla } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Niech  $P$  będzie środkiem ciężkości trójkąta  $S_1 S_2 S_3$ . Jest to punkt minimalizujący sumę kwadratów odległości od wierzchołków (znany fakt, zresztą łatwy do wykazania). Zatem

$$(2) \sum |OS_i|^2 \geq \sum |PS_i|^2 = \sum \left(\frac{2}{3} m_i\right)^2$$

(sumy po  $i = 1, 2, 3$ ),

gdzie  $m_i$  jest długością środkowej, wychodzącej z wierzchołka  $S_i$ . Suma kwadratów długości środkowych to  $3/4$  sumy kwadratów długości boków (kolejny znany wzór). Nierówność (2) pokazuje więc, że

$$3 \sum |OS_i|^2 \geq \frac{4}{3} \sum m_i^2 = \sum |S_i S_{i+1}|^2.$$

Wprowadzamy dane (1) i przekształcamy uzyskaną nierówność:

$$\begin{aligned} 3 \sum (R - r_i)^2 &\geq \sum (r_i + r_{i+1})^2; \\ 9R^2 - 6R \sum r_i + 3 \sum r_i^2 &\geq 2 \sum r_i^2 + 2 \sum r_i r_{i+1}; \\ 9R^2 - 6R \sum r_i + \left(\sum r_i\right)^2 &\geq 4 \sum r_i r_{i+1}; \\ (3R - \sum r_i)^2 &\geq 4 \sum r_i r_{i+1}. \end{aligned}$$

Różnica w nawiasie jest dodatnia. Pierwiastkując stronami ostatnią nierówność, dostajemy tezę zadania.

## Prosto z nieba: Czują zwiadowca

Detekcja i analiza fal grawitacyjnych jest stosunkowo nowym sposobem obserwacji Wszechświata. Dotychczasowe fale, wykrywane już praktycznie regularnie przez interferometry LIGO (znajdujące się w Hanford w stanie Waszyngton oraz Livingston w stanie Luizjana) oraz Virgo (Cascina obok Pizy we Włoszech) powstały w ostatnich chwilach życia układów podwójnych czarnych dziur o masie gwiazdowej (masy rzędu  $10 M_{\odot}$ ), lub gwiazd neutronowych (masy około  $1,5 M_{\odot}$ ). Rozmiar detektorów LIGO i Virgo (ramiona długości kilku kilometrów), a przede wszystkim ich lokalizacja – na powierzchni Ziemi – ogranicza czułość do przedziału częstotliwości od około 10 Hz do 8 kHz, a co za tym idzie, ogranicza typy astrofizycznych źródeł sygnału. Wszechświat w przedziale niższych częstotliwości jest równie fascynujący: zawiera, jak przewidujemy, układy podwójne supermasywnych czarnych dziur (podobnych do tej, która znajduje się w centrum naszej Galaktyki), a także mnóstwo układów podwójnych zwykłych gwiazd, np. białych karłów. Niewykluczone są też egzotyczne źródła fal, takie jak struny kosmiczne, czyli hipotetyczne jednowymiarowe defekty topologiczne, które mogły powstać w bardzo wczesnym Wszechświecie.

Niskie częstotliwości LIGO i Virgo ogranicza szum sejsmiczny, to znaczy drgania powierzchni Ziemi. Czułość w przedziale średnich częstotliwości (rzędu 100 Hz) jest zdominowana drganiami cieplnymi luster (mas testowych), od których odbija się światło interferometrów, natomiast wyższe częstotliwości limituje „szum śrutowy”, czyli korpuskularna natura światła.

Najlepszym rozwiązaniem jest przeniesienie detektora w przestrzeń kosmiczną. W stanie nieważkości masy testowe spadają swobodnie (poruszają się po geodezyjnych), więc ich względna odległość jest zaburzana jedynie przez przechodzące fale grawitacyjne, a nie skomplikowany wpływ środowiska, jak w przypadku luster interferometrów LIGO i Virgo. Marzeniem i wyzwaniem dla pokoleń astrofizyków jest zbudowanie takiego interferometru. Aktualnie realizowanym projektem jest Laser Interferometer Space Antenna (LISA), który będzie składać się z formacji trzech satelitów, tworzących trójkątny interferometr o boku 2,5 mln km. LISA zostanie umieszczona na

ziemskiej orbicie wokół Słońca, w odległości kątowej około  $20^{\circ}$  za Ziemią. Wnętrze każdego ze statków kosmicznych będzie zajmować system laserowy, służący do przechwytywania i emisji – w odpowiedniej fazie – sygnału z dwu innych statków, a przede wszystkim dwie masy testowe w idealnym stanie nieważkości.

Masy testowe detektora LISA to sześciany o boku 46 mm wykonane ze stopu złota i platyny, i ważące po 2 kg każdy. Satelity będą poruszać się w taki sposób, by nie zaburzać ich swobodnego spadku.

Decyzja o finansowaniu LISA nie została by zapewne podjęta, gdyby nie rozpoznawcza, „zwiadowcza” misja LISA Pathfinder, będąca testem kluczowych technologii niezbędnych do realizacji głównego projektu. LISA Pathfinder to miniaturowy interferometr (a w zasadzie jedno ramię o boku długości jedynie 40 cm), mierzący odległość pomiędzy dwoma testowymi złoto-platynowymi sześcianami z dokładnością do 0,01 nm. Sonda została umieszczona w punkcie Lagrange’a L1 układu Ziemia-Słońce i przebywała w tym miejscu przez prawie 16 miesięcy. W tym czasie przeprowadzono wiele testów: bezpieczne uwalnianie mas testowych w warunkach nieważkości, manewrowanie sondą w taki sposób, by zapewnić swobodny spadek mas (system sterujący, zwany „elektrosprejem” wykorzystuje odrzut rozprędzanych w polu elektrycznym cząstek koloidu), zdolność wykonywania interferometrii laserowej w zadanym przedziale częstotliwości (co do tej pory nie było przetestowane na Ziemi), a także trwałość różnych podsystemów sondy: czujników, laserów, optyki i elektroniki.

Końcowe wyniki LISA Pathfinder są bardzo optymistyczne: osiągnięta czułość LISA w przedziale fal o okresach oscylacji od około 10 s do nieco ponad pół dnia, jest o ponad 2 razy lepsza, niż początkowo planowano. LISA została niedawno zaakceptowana jako kolejna, po rentgenowskim satelicie Athena, „duża” misja Europejskiej Agencji Kosmicznej. Dzięki bardzo dobrym wynikom LISA Pathfinder początek misji LISA nastąpi najprawdopodobniej zgodnie z planem, to znaczy w 2034 roku.

*Michał BEJGER*

## Niebo w lipcu

Lipiec to pełnia lata. Często jest to najgorętszy, ale i najbardziej mokry miesiąc w całym roku. Zachmurzenie ma zazwyczaj charakter konwekcyjny, czyli w godzinach popołudniowych formują się chmury burzowe, które zanikają w pierwszej połowie nocy. Dlatego, mimo że noce są krótkie, są one pogodne. Niestety, ciepła noc oznacza, że powietrze silnie faluje, zakłócając obraz w teleskopach – im większe powiększenie, tym widok bardziej zdegradowany.

6 lipca Ziemia przejdzie przez aphelium, czyli najbardziej oddalony od Słońca punkt swojej orbity.

Tego dnia Ziemia jest o mniej więcej 5 mln km dalej od Słońca niż w styczniu, wskutek czego tarcza Słońca jest wtedy najmniejsza (lecz zmiana nie jest tak duża, jak w przypadku Księżycy – jedyne  $2'$ ), a Ziemia porusza się najwolniej w ciągu roku. Dzięki temu lato jest u nas kilka dni dłuższe niż zima. Ma to również znaczenie dla przebiegu zaćmienia Słońca, które łatwiej wtedy zakryć Księżycowi w całości, dzięki czemu zaćmienia trwają dłużej.

23 lipca Słońce przekroczy równoleżnik  $20^{\circ}$  deklinacji w drodze na południe i od tego momentu dnia



zacznie szybko ubywać. W lipcu zmiana jeszcze nie jest aż tak duża, niewiele ponad godzinę, ale w następnych miesiącach proces ten nabierze szybszego tempa. Wraz z końcem miesiąca kończy się również sezon na obserwację łuku okołohoryzontalnego (więcej o tym zjawisku na angielskiej stronie: [www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm](http://www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm)). Nawet na południowych granicach Polski Słońce w południe jest już zbyt nisko, aby mogło dojść do tego zjawiska. To samo dotyczy sezonu na obłoki srebrzyste. Od początku sierpnia nawet nad morzem Słońce chowa się bardziej niż 18° pod widnokrąg i północna część nieboskłonu również pograża się w ciemnościach.

W lipcu najciekawsze zjawiska astronomiczne mają związek z Księżycem. Srebrny Glob zacznie miesiąc w fazie 93% od minięcia jasnego Marsa, 6 lipca przejdzie przez ostatnią kwadrę, a 13 lipca – przez nów, okraszając go częściowym zaćmieniem Słońca. Niestety, zjawiska nie da się dostrzec z Polski. Dwa tygodnie później Księżyc w pełni wejdzie w cień Ziemi i dojdzie do jego całkowitego zaćmienia.

Pełnia wypada 27 lipca o 22:20 naszego czasu, a nieco ponad 15,5 godziny wcześniej Srebrny Glob przejdzie przez apogeum, czyli najdalszy od Ziemi punkt swojej orbity. To oznacza, że księżycowa tarcza osiągnie minimalne rozmiary i poruszać się będzie najwolniej, a dodatkowo przejdzie ona blisko środka cienia Ziemi. To wszystko zaowocuje bardzo długim zaćmieniem, z fazą całkowitą trwającą ponad 100 minut! Jest to najdłuższe zaćmienie Księżyca w tym wieku. W Polsce Księżyc wejdzie już zanurzony w półcień, albo w cień Ziemi, ale w całym kraju da się obserwować bardzo długą fazę całkowitą, która zacznie się po 21:30 i skończy o 23:13 naszego czasu.

Dodatkową atrakcją zaćmienia jest fakt, że tego samego dnia wypada opozycja Marsa, która jest tzw. wielką opozycją. Podczas niej Mars zbliży się do Ziemi na około 57,6 mln km, osiągając jasność  $-2,8^m$ , czyli więcej od Jowisza i średnicę ponad 24" (kolejne, jeszcze większe zbliżenie obu planet nastąpi ponownie dopiero w 2035 r.). Tego dnia Księżyc znajdzie się 6° na północ od Marsa, a planeta wejdzie 45 minut po nim. W lipcu Mars porusza się ruchem wstecznym na pograniczu gwiazdozbiorów Koziorożca, Mikroskopu i Strzelca, górując na niecałych 15°. Znacznie lepiej Czerwona Planeta zaprezentuje się za ponad 2 lata, podczas kolejnej opozycji w październiku 2020 r. Wtedy Mars będzie o  $0,2^m$  słabszy, jego średnica – o 2" mniejsza, ale za to wysokość podczas górowania dojdzie do prawie 45°, oferując znacznie lepszy widok.

W lipcu mocno pogorszy się nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokręgu, jednocześnie poprawi się jej nachylenie do widnokręgu porannego. Oznacza to, że będące blisko swoich maksymalnych elongacji wschodnich obie planety wewnętrzne, czyli Merkury i Wenus, w Polsce są praktycznie niewidoczne. Pierwsza planeta od Słońca 12 lipca osiągnie maksymalną elongację i to przekraczającą 26°, jednak tego dnia

zejdzie z nieboskłonu niecałą godzinę po Słońcu, a w trzeciej dekadzie lipca nawet mniej niż pół godziny po nim, mimo wciąż dużej elongacji. Planeta Wenus swoją maksymalną elongację osiągnie w połowie sierpnia, ale przez cały lipiec jest dalej niż 40° od Słońca. Jednak wysokość planety nad horyzontem godzinę po zmierzchu zmniejszy się z 10° na początku miesiąca do 3° pod jego koniec. W kolejnych miesiącach będzie jeszcze gorzej. Zatem Wenus można obserwować w pierwszej części miesiąca, jak przemierza gwiazdozbiór Lwa, świecąc blaskiem  $-4,1^m$ . W tym czasie jej tarcza urośnie do 17", a faza spadnie do 65%. 9 lipca Wenus przejdzie 1° na północ od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa, zaś 15 i 16 lipca minie ją Księżyc w fazie 11 i 19%. Warto jednak pamiętać o planetach wewnętrznych podczas wakacyjnych wyjazdów gdzieś na południe od Polski. Już na szerokości 40°N obie są widoczne bez kłopotu.

Wieczorem po południowo-zachodniej stronie nieba, nisko nad horyzontem, można obserwować Jowisza. W trakcie miesiąca warunki obserwacyjne planety także wyraźnie się pogarszają. O zmierzchu jest ona już po górowaniu i zachodzi niewiele po północy. 11 lipca Jowisz zmieni kierunek swojego ruchu z wstecznego na prosty, tym samym kończąc najlepszy okres widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Do końca lipca planeta osłabnie do  $-2,1^m$ , zmniejszając jednocześnie średnicę kątową do 38". Do tego dnia Jowisz zbliży się do gwiazdy Zuben Elgenubi na odległość 1,5 stopnia. Księżyc spotka się z Jowiszem w dniach 20 i 21 lipca. Najpierw w fazie 61% zbliży się na mniej niż 5°, do późniejszej fazy zwiększy się do 70%, odległość – do 10°.

Planeta z pierścieniami oraz planetoida (4) Westa są teraz tuż po opozycji i przesuwają się na zachód, około 11° od siebie, zwiększając dystans do gwiazdy Kaus Australis do 4,5 stopnia. Około 3° na zachód od Saturna, czyli w jednym polu widzenia lornetki, znajduje się para słynnych mgławic M20 i M8. Do końca miesiąca jasność Saturna spadnie do  $+0,2^m$ , ale jego tarcza utrzyma średnicę 18". Westa wędruje na pograniczu gwiazdozbiorów Strzelca i Wężownika, zbliżając się do zakrętu na niebie. 11 lipca planetoida przetnie linię, łączącą gwiazdę 5. wielkości 58 Oph i jaśniejszą o  $0,5^m$  ξ Oph, kierując się ku gwiazdzie 3. wielkości θ Oph, do której zbliży się na 2,5 stopnia. W lipcu jasność Westy spadnie z  $+5,8$  do  $+6,3$  magnitudo. Księżyc spotka się z Saturnem i Westą w dniach 23, 24 i 25 lipca na kilka dni przed pełnią, zbliżając się do obu ciał na około 4°.

Z ciekawych spotkań Księżyca z gwiazdami warto odnotować zakrycie gwiazdy 4. wielkości ξ2 Ceti, do którego dojdzie 8 lipca tuż przed świtem. Przez Polskę przejdzie północna granica zakrycia, z brzegówką na linii Police – Gryfice – Kołobrzeg. Gwiazda zniknie za jasnym brzegiem Księżyca w fazie 32% około godz. 4 na południe od tej linii, pojawiając się ponownie przy brzegu ciemnym kilkanaście – kilkadziesiąt minut później. Im bliżej Pomorza, tym zakrycie potrwa krócej.

*Ariel MAJCHER*

## Fizyka prachłodziarek

Przez większą część historii ludzkości pożywienie było dobrem trudno dostępnym. Słodkie i dojrzałe owoce pojawiały się okresowo, a trzeba było o nie konkurować z innymi organizmami. Wiele zwierząt dostarczało cennego białka, ale białko owo miało tendencje do uciekania i trzeba się było za nim nabiegać. Co gorsza, raz pozyskane jedzenie zaczynało się bardzo szybko psuć i niełatwym zadaniem było jego konserwowanie, tak by mogło ono starczyć na dłużej, pomagając przeczekać okresy niedostatku.

Jednym ze sposobów zwiększenia trwałości jedzenia jest przechowywanie go w niskiej temperaturze. Chociaż pomysły wykorzystania praw fizyki do kontrolowanego obniżania temperatury w specjalnych maszynach pojawiły się już w połowie XVIII wieku, dopiero od stu lat możemy cieszyć się masowo produkowanymi chłodziarkami. Ich upowszechnienie w krajach rozwiniętych sprawiło, że wiele produktów łatwo psujących się lub sezonowych może trafiać na nasze stoły – i to w dowolnej porze roku. Niestety, zerowa zasada termodynamiki mówi, że układ fizyczny pozostawiony sam sobie dąży do wyrównania temperatury z otoczeniem, utrzymywanie niskich temperatur wymaga więc zużywania energii. Szacuje się, że w chwili obecnej konsumpcja energii wykorzystywanej do chłodzenia żywności przeliczona na głowę mieszkańca globu wynosi około 0,5 kWh dziennie.

W dawnych wiekach utrzymywanie jedzenia w niskich temperaturach wymagało innych pomysłów. Jednym z praprzodków dzisiejszych chłodziarek był układ dwóch glinianych garnków o różnych średnicach, włożonych jeden w drugi tak, że zostawało pomiędzy nimi nieco miejsca, które było wypełniane mokrym piaskiem. W typowych sytuacjach, przy temperaturze zewnętrznej rzędu 20°C i niskiej wilgotności powietrza, we wnętrzu mniejszego naczynia może panować miły chłodek około 10°C. Nieco prostszy wariant tego urządzenia można zobaczyć podczas niektórych przyjęć na świeżym powietrzu w gorące dni, gdy gospodarz owija butelkę wina mokrym ręcznikiem, a woda, parując z ręcznika, pobiera ciepło, zapewniając trunkowi zalecaną przez enologów ciepłotę.

Chociaż układ fizyczny nie jest bardzo skomplikowany, a wszystkie niezbędne do opisu naszej prachłodziarki równania są od dawna znane, to dopiero w 2017 roku Oleh Luniachek, Ruslan Timchenko i Oleksiy Golubov opublikowali rozwiązanie prostego modelu fizycznego pozwalającego na ilościową analizę temperatury wewnątrz rozważanego układu w zależności od warunków zewnętrznych. Kto z poważnych fizyków wspinających się po szczeblach kariery akademickiej ma czas na takie zabawy? Pewnie nikt, ale panowie, będący studentami Uniwersytetu Narodowego im. Karazina w Charkowie, być może o tym jeszcze nie wiedzieli. . .

Model jest bardzo prosty. Już Newton wiedział, że ilość ciepła przenikającego przez warstwę, po której dwóch stronach występują różne temperatury, jest wprost proporcjonalna do różnicy tych temperatur i odwrotnie proporcjonalna do grubości warstwy. Inne prawo fizyczne, noszące nazwisko Adolfa Ficka i opisujące dyfuzję molekularną, pozwala na powiązanie tej samej wielkości z gęstościami pary nasyconej wody w powietrzu i wilgotnością po obu stronach rozważanej warstwy. Studenci nie wiedzieli, jaka jest zależność funkcyjna tej gęstości od temperatury, więc wymyślili parametryzację zgodną z danymi, a stąd byli już w stanie wyznaczać temperaturę po jednej stronie warstwy, jeśli wiadomo, jaka panuje po drugiej stronie.

Prawdziwa prachłodziarka jest bardziej skomplikowana, ma bowiem, licząc od wewnątrz, warstwę gliny, czyli ściankę wewnętrznego naczynia, warstwę mokrego piasku, kolejną warstwę gliny i wreszcie cienką warstwę powietrza otulającego całe naczynie, ale skoro umiemy rozwiązać jedną warstwę, to cztery kolejne także. W rezultacie można wyznaczyć szukaną temperaturę wewnętrzną. Seria eksperymentów przeprowadzonych przez studentów przyniosła rezultaty zgodne z modelem teoretycznym.

Praca, o której mowa, została opublikowana w czasopiśmie *Emergent Scientist* wydawanym pod patronatem Francuskiego Towarzystwa Fizycznego i Francuskiej Akademii Nauk. Prace nadsyłane do tego czasopisma są recenzowane przez zawodowych naukowców, nie muszą jednak wpisywać się w dyskusje głównego nurtu nauki poszerzające granice ludzkiej wiedzy. Redaktorzy *Emergent Scientist* zdają sobie bowiem sprawę z istnienia wielu „codziennych” problemów fizycznych, których rozwiązanie jest doskonałym ćwiczeniem dla studentów, a opublikowanie takich rozwiązań stanowi świetny i przystępny materiał źródłowy, pokazujący jak działa metoda naukowa.

Krzysztof TURZYŃSKI



## Nieprawdopodobne!

Joanna JASZUŃSKA

Zagadnienia związane z prawdopodobieństwem i statystyką bywają zaskakujące i nieintuicyjne. Zdarza się też często, że okazują się one znacznie łatwiejsze niż się na pierwszy rzut oka wydaje.

1. W czasie II Wojny Światowej matematyk Abraham Wald analizował zniszczenia ostrzelanych samolotów wojskowych powracających do amerykańskich baz. Zasugerował on wzmocnienie tych ich części, które według statystyk uszkodzane były *najrzadziej*. Dlaczego?
2. W trakcie I Wojny Światowej żołnierzy, uprzednio noszących na głowie jedynie zwykłe czapki, wyposażono w stalowe hełmy. Wedle statystyk z czasem *wzrosła* liczba rannych w głowę. Dlaczego?
3. Klasa chce iść do kina na jeden z filmów:  $A$ ,  $B$  lub  $C$ . Każdy uczeń ma ustalone preferencje. W głosowaniu porównującym filmy  $A$  i  $B$  większość wybrała  $A$ . W głosowaniu pomiędzy  $B$  i  $C$  większość poparła  $B$ . Niestety, kino wycofało film  $B$  z repertuaru, pozostały do wyboru tylko  $A$  i  $C$ . Czy większość woli  $A$  od  $C$ ?
4. Dane są liczby 2018, 31, 12345, 506. Jaki procent ich sumy stanowi ich średnia?
5. Pracownicy pewnej firmy protestowali, że większość z nich zarabia poniżej średniej (w tej firmie). Szef to zmienił, *obniżając* asystentce pensję. Jak to możliwe?
6. Na loterii jest 150 losów: 5 losów *wygrasz milion*, 50 losów *wygrasz kolejny los* i 95 losów *nic nie wygrasz*. Kupuję jeden los (i jeśli wygram kolejne, to je biorę). Z jakim prawdopodobieństwem wygram milion?
7. Na pewien kraj wieki temu czarodziejka rzuciła urok: *każda rodzina może mieć dowolnie wiele córek, ale jeśli urodzi im się syn, nie będą już mieć więcej potomstwa*. Mimo to w tym kraju wciąż jest mniej więcej tyle samo kobiet co mężczyzn. Jak to wyjaśnić?
8. Roztargniona sekretarka ma  $n$  listów,  $n$  odpowiadających im zaadresowanych kopert, ale wkłada listy do kopert losowo. Dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  przez  $P_k$  oznaczmy prawdopodobieństwo tego, że *dokładnie*  $k$  listów trafi do właściwych kopert. Wykaż, że dla  $n > 2018$  zachodzi nierówność  $P_0 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n < (2,7)^{-(n^n)!}$ .
9. Losujemy liczbę całkowitą ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 10^{100}\}$ . Z jakim prawdopodobieństwem nie ma ona w swym zapisie dziesiętnym żadnej cyfry 7?
10. Skuteczność pewnej szczepionki testowano dwukrotnie. W próbie I szczepionka okazała się skuteczna dla 75% kobiet i 60% mężczyzn, w próbie II – dla 50% kobiet i 25% mężczyzn. Czy wynika stąd, że szczepionka ta jest skuteczniejsza dla kobiet?

### Rozwiązania

**R1.** Wald analizował zniszczenia samolotów, które *wróciły*, a więc których uszkodzenia nie uniemożliwiły im dalszego lotu. Najrzadziej obserwowane uszkodzenia zinterpretował jako najniebezpieczniejsze – to one powodowały, że dany samolot nie wracał.  $\square$

**R2.** Dzięki nowym hełmom żołnierze ranni w głowę częściej przeżywali. Wcześniej widnieliby w statystykach jako *polegli*, nie zaś jako ranni.  $\square$

Powyższe dwa zadania to przykłady tzw. *błędu przeżywalności*.

**R3.** Niekoniecznie. Niech na przykład 10 z 30 osób ma preferencje  $[A, B, C]$  (najbardziej chcą obejrzeć  $A$ , najmniej  $C$ ), 10 osób uważa, że  $[B, C, A]$ , a 10, że  $[C, A, B]$ . Wtedy  $A$  z  $B$  wygrywa 20 : 10, podobnie  $B$  z  $C$ , ale tak samo  $C$  z  $A$ !  $\square$

Jest to tzw. *paradoks Condorceta*.

**R4.** Średnia czterech liczb stanowi 25% ich sumy.  $\square$

**R5.** Początkowo szef zarabiał 11 tys., a każdy z pozostałych pracowników po 10 tys. Średnia płaca była więc ciut powyżej 10 tys. i wszyscy prócz szefa zarabiali poniżej średniej.

Po protestach szef nadal zarabia 11 tys., asystentka 8 tys., a pozostali pracownicy po 10 tys. Średnia jest teraz odrobinę poniżej 10 tys. i wszyscy prócz asystentki zarabiają powyżej średniej.  $\square$

**R6.** Rozważmy inną loterię, na której jest 100 losów: 5 losów *wygrasz milion* i 95 losów *nic nie wygrasz*. Prócz tego do pudełka z losami wpadło 50 liści – w razie wylosowania liścia należy go wyrzucić i losować raz jeszcze. Prawdopodobieństwo wygranej jest równe 5/100 (nie zależy od losowania liści, drapania się po głowie itp.). Ponieważ ta loteria nie różni się de facto od opisanej w zadaniu, więc odpowiedź jest ta sama.  $\square$

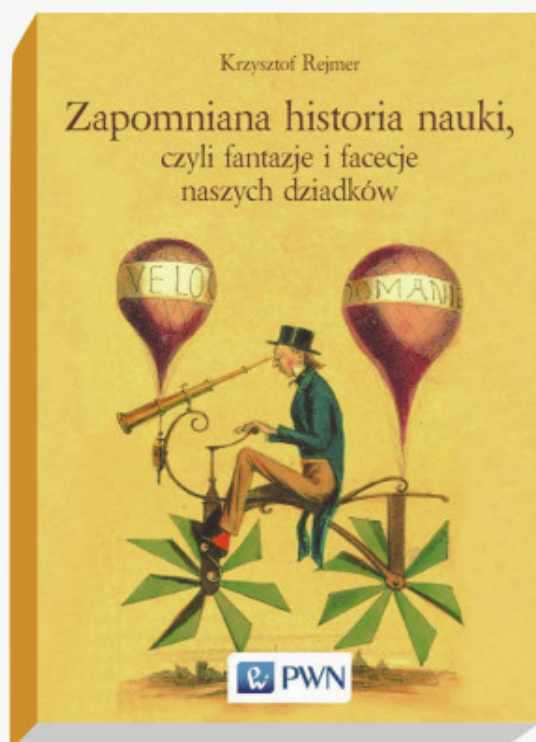
**R7.** Każde rodzące się dziecko jest na 50% chłopcem, a na 50% dziewczynką – nie zależy to od liczby i płci posiadanego przez nie starszego rodzeństwa.  $\square$

**R8.** Jeśli  $n - 1$  listów trafi do właściwych kopert, to  $n$ -ty też musi trafić, więc  $P_{n-1} = 0$ .  $\square$

**R9.** Każdą z liczb od 1 do  $10^{100}$  można zapisać, używając dokładnie 100 cyfr, początkowe z nich mogą być zerami (liczbę  $10^{100}$  kodują same zera). Liczb bez cyfry 7 jest  $9^{100}$ , bo na każdym ze 100 miejsc zapisu dziesiętnego można wybrać dowolną spośród 9 cyfr różnych od 7. Wobec tego szukane prawdopodobieństwo równe jest  $9^{100}/10^{100} = (0,9)^{100} \approx 0,00002656$ .  $\square$

**R10.** Niekoniecznie. Jeśli np. w próbie I uczestniczyły 4 kobiety i 100 mężczyzn, a w próbie II testowano 100 kobiet i 4 mężczyzn, to łącznie szczepionka okazała się skuteczna dla 3 + 50 spośród 104 kobiet oraz dla 60 + 1 z takiej samej liczby mężczyzn.  $\square$

... ale może przebadano np. tylko młodzieńców i sędziwe damy? Problem ten znany jest jako *paradoks Simpsona*.



Chciałbym, żeby Czytelnik (...) zadał sobie pytanie, o czym myśleli nasi poprzednicy. Do czego dążyli i dlaczego? Jakimi sposobami? Jacy byli i w jakim chcieli żyć świecie? Czy ich porażki wynikały wyłącznie z ich niewiedzy, a sukcesy z ich umiejętności? Czy siła woli i charakter plus umiejętności i wiedza to już wszystko? Co sprawia, że czasem z uporem błądzimy we mgle? I czego możemy się nauczyć, poznając historię ludzkiej wyobraźni i jej skłonności do wędrowania na manowce? A może manowce niekoniecznie są tym, czym być się zdają?

*ze wstępu autora*

Książka dr Rejmera wprowadza czytelnika w nieznaną już dla wielu świat optymizmu poznawczego, charakterystycznego dla XIX stulecia. Czytając ją, przenosimy się w świat zbliżony do tego, stworzonego przez Cyrusa Smitha z *Tajemniczej wyspy* czy kapitana Nemo z *20 tysięcy mil podmorskiej żeglugi*. (...) niezwykle miło jest pobyc przez chwilę w towarzystwie bohaterów tej książki, którzy potrafili przez całe życie wierzyć w poznawalność i możliwość ujarznienia świata. O ile jednak Julius Verne wymyślał świat i bohaterów w nim żyjących, w książce Krzysztofa Rejmera spotykamy realnie żyjących i działających ludzi. Ich niezłomny optymizm może imponować, a wręcz zachęcać do porzucenia – przynajmniej intelektualnie – ograniczeń tak zwanej życiowej mądrości.

*Marek Kordos*

Droga do zrozumienia otaczającej nas rzeczywistości prawie nigdy nie jest prosta. Wręcz przeciwnie, zwykle jest kręta i pełna bocznych ślepych uliczek, które trzeba zbadać, zanim znajdzie się tę właściwą. Standardowe podręczniki zwykle zawierają rys historyczny pokazujący, jak powstały uznane powszechnie teorie, które pozwoliły wznieść nasze rozumienie świata na wyższy poziom. Hipotezy i fantazje, które okazały się ślepyimi uliczkami, łatwo popadają w zapomnienie. Książka Krzysztofa Rejmera pozwala poznać historie pomysłowych i odważnych pasjonatów, którzy próbowali budować różnorakie maszyny, stawiali i obalali hipotezy, ale w większości nie odnieśli sukcesu i nie przeczytamy o ich przełomowych odkryciach i wynalazkach na kartach podręczników. Historie ludzi i ich idei, przedstawione w fascynujący sposób przez autora, skłaniają do refleksji nad tym, w jaki sposób dokonuje się postęp w nauce i technice. Czy nie jest tak, że ci, których szalone pomysły okazały się trafne, mieli po prostu więcej szczęścia od tych, których pomysły wcale nie były bardziej szalone, ale zwyczajnie mieli tego szczęścia mniej? Zdecydowanie warto poznać plątaninę pogmatwanych ścieżek, po których błądzili nasi dziadkowie, żeby móc lepiej zrozumieć, jak z tego bogactwa idei wyłoniła się uznana dziś wiedza naukowa i zdobycze techniki, których obecność jest dla nas dziś tak oczywista.

*Szymon Charzyński*