

Nakład: 3500 egz.

MATEMATYKA - FIZYKA - ASTRONOMIA - INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu$ $\pi=3,141592$

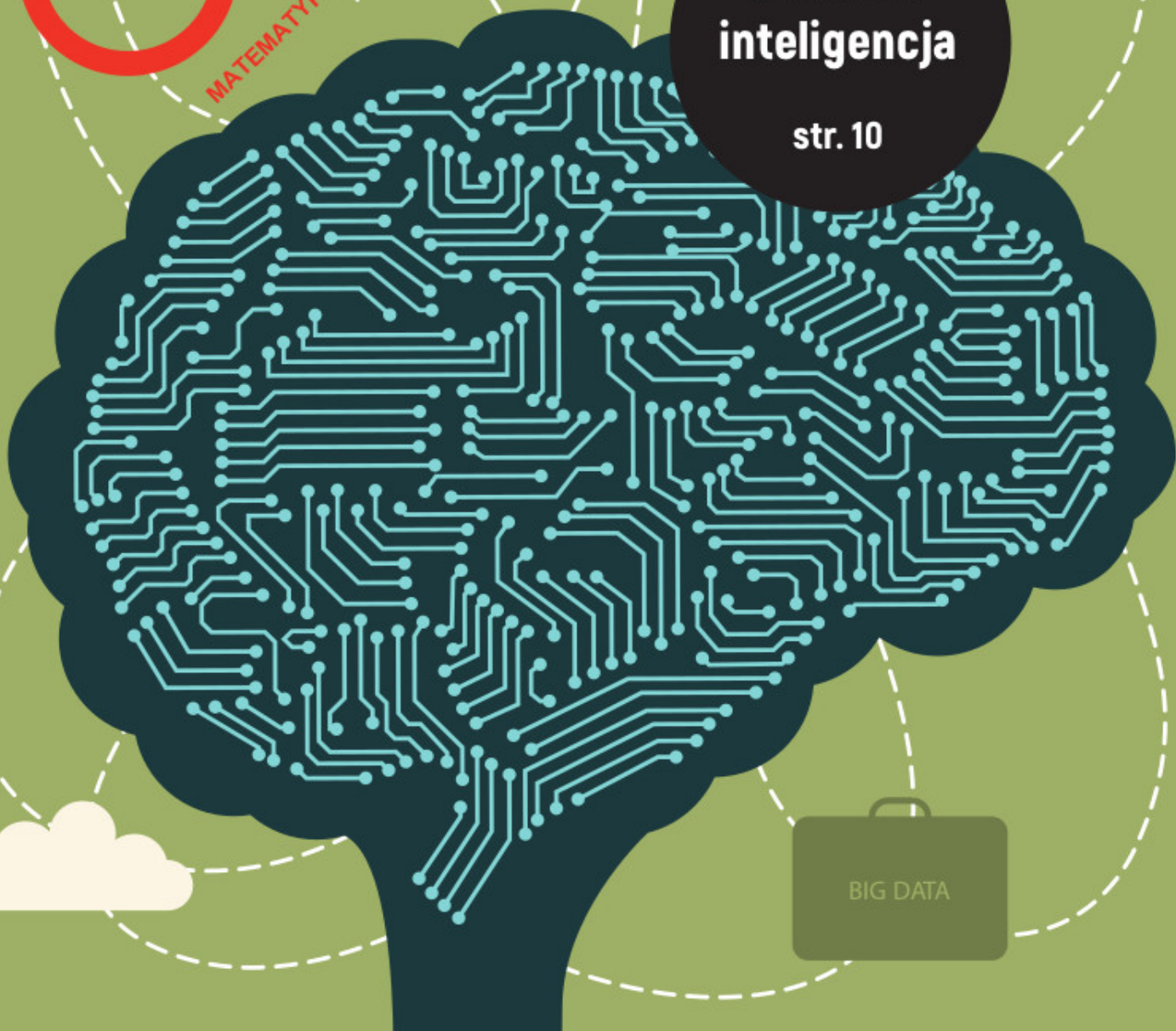
NR 5 (528) 2018
CENA 4 ZŁ VAT 5%
P. ISSN 0137-3005 | NR. ND 35350X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

BIG DATA

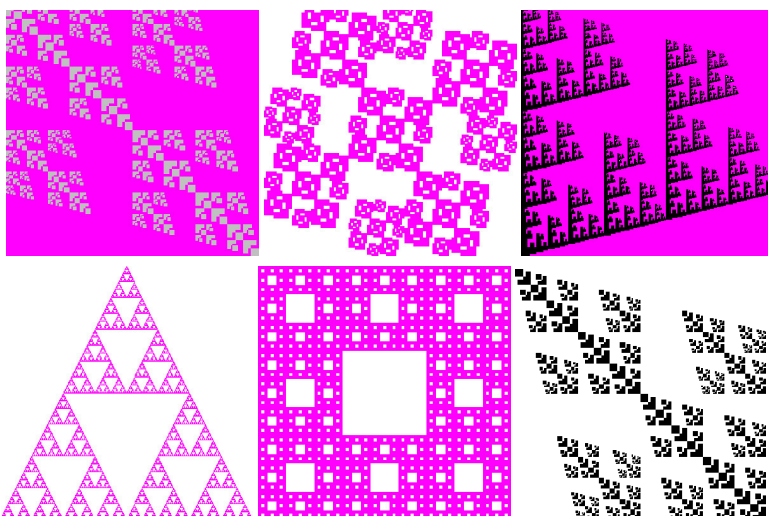
Sztuczna inteligencja

str. 10

BIG DATA



W następnym numerze opisujemy,
jak rysować takie fraktale:



SPIS TREŚCI NUMERU 5 (528)

Jak się mierzy nierówności
społeczno-ekonomiczne?

Martyna Kobus

str. 1



Zadania

str. 4

Galaktyki w komputerze
Grzegorz Gajda


str. 5

Równanie z dreszczykiem
Piotr Krzyżanowski

str. 7

Sztuczna inteligencja
Andrzej Dąbrowski

str. 10

 Pijany magnes
w magicznych
okularach

Stanisław Bednarek

str. 14

Stephen Hawking (1942–2018)
Sebastian J. Szybka

str. 16

Informatyczny kącik
olimpijski (115):
Gotówka, Startup

str. 19

Klub 44

str. 20

Prosto z nieba:
Portret gwiazdy

str. 22

Niebo w maju

str. 22

Aktualności

Mionowe manowce

str. 24



Kij ma dwa końce...
Joanna Jaszuska

str. 25

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216, p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Jak się mierzy nierówności społeczno-ekonomiczne?

*Instytut Nauk Ekonomicznych PAN

Martyna KOBUS*



Rozwiązanie zadania F 951.

W zderzeniu niesprężystym część energii kinetycznej zamieniana jest na wewnętrzne wzbudzenia zderzających się cząstek, ale nie zmienia się suma ich pędów i tym samym energia kinetyczna ruchu ich środka masy nie zmienia się w wyniku tych wzbudzeń.

Najkorzystniejsza, z punktu widzenia zerwania wiązania, jest sytuacja, która odpowiada zderzeniu centralnemu, gdy przed zderzeniem cząsteczki zbliżają się do siebie z takimi samymi prędkościami. Cała energia kinetyczna ruchu przed zderzeniem może być wówczas zamieniona na wzbudzenia wewnętrzne. Minimalna prędkość v spełnia więc warunek:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = E, \text{ czyli } v^2 = \frac{E}{m},$$

a stąd

$$v = 3930 \text{ m/s.}$$

Średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząstek gazu w temperaturze T wynosi $3kT/2$. Otrzymanej prędkości v odpowiada więc temperatura:

$$T = \frac{E}{3N_A k} \approx 19780 \text{ K.}$$

Ze względu na szeroki rozkład prędkości cząstek opisana tu termiczna dysocjacja cząstek pojawia się w znacznie niższych temperaturach. Dodatkowo, dysocjacja może nastąpić po kilku zderzeniach, gdy w każdym z nich wzbudzone są coraz wyższe stany oscylacyjne cząsteczki.

Nie ma chyba zagadnienia ekonomicznego, które by zdominowało debatę publiczną w ostatniej dekadzie tak bardzo jak rosnące nierówności. Niemalże każdy tydzień przynosi w mediach informację dotyczącą nierówności dochodowych czy majątkowych, np. ostatnio oszacowania rozmiarów unikania podatków przez firmy i osoby bogate na podstawie danych z afery *Panama Papers*. Unikanie to prowadzi do zaniżenia oszacowań nierówności majątkowych. Najczęściej wskazywane przyczyny rosnących nierówności to wzrost udziału dochodów z kapitału, postęp technologiczny, który nagradza umiejętności umysłowe korzystniej niż fizyczne, prowadząc do rozwarstwienia płac, procesy globalizacyjne i postępująca automatyzacja. Jako konsekwencje rosnących nierówności wskazuje się napięcia społeczne i polaryzację poglądów politycznych. W istocie nierówności są ważnym zjawiskiem społecznym. W niniejszym artykule przyjrzymy się temu, jak się je w ogóle mierzy.

Co ciekawe, nierówności jako zagadnienie badawcze znajdowały się długo poza głównym nurtem ekonomii. Ekonomiści uważali, że gospodarki znajdują się na ścieżce wzrostu, który w długim okresie sprzyja spadkowi nierówności. Popularne było przekonanie, że w początkowym okresie wzrostu gospodarczego nierówności wzrastają, gdyż tylko nieliczni korzystają z owoców wzrostu, ale w długim okresie wzrost wzbogaca każdego w sposób, który niweluje rozwarstwienie. Przekonanie to było oparte jednak na krótkich seriach danych o dochodach. Oszacowania były więc podatne na wpływ dużych jednostkowych zdarzeń jak Wielki Kryzys czy II Wojna Światowa, które doprowadziły do zniszczenia majątków i przez to czasowego spadku nierówności. Obecne zainteresowanie nierównościami bierze się z faktu, że rosną one systematycznie w krajach rozwiniętych i są na poziomie tych z początku XX wieku oraz z powodu popularności książki Thomasa Piketty'ego *Kapitał w XXI wieku* wydanej pięć lat temu. Piketty wraz z zespołem 30 ekonomistów z różnych krajów dostarczył nowej serii danych do analizy nierówności dochodowych i majątkowych. Wymagało to dotarcia do archiwów blisko 50 krajów świata. Większość tych danych jest dziś dostępna online w Światowej Bazie Danych o Najwyższych Dochodach. Piketty i jego zespół badali ewolucję udziału górnego decyla, percentyla, a czasem nawet 0,1% rozkładu dochodów w łącznym dochodzie. Jest to jedna z miar nierówności. Innym przyjrzymy się obecnie.

Nierówność jest pojęciem niełatwym do uchwycenia. Nie wszystkie pojęcia w naukach społecznych takie są. Przykładowo, bezrobocie od razu nasuwa na myśl funkcję, jakiej mamy użyć do jego pomiaru – iloraz. W przypadku nierówności mamy tylko pewne intuicje co do tego, czym ona jest, stąd pojęcie to definiuje się aksjomatycznie, to znaczy, intuicje zapisane są w formie aksjomatów. Wariancja szybko przychodzi na myśl jako miara nierówności, niemniej nie jest ona odporna na skalowania, a intuicja nam podpowiada, że to, czy mierzymy dochód w złotych czy w tysiącach złotych, nie powinno mieć wpływu na rozwarstwienie. Stąd dalej nasuwa się myśl, że niezmienniczość ze względu na proporcjonalne skalowanie dochodów jest rozsądnym wymaganiem wobec indeksu nierówności. Własność tę nazywamy homogenicznością i jest to jedna z czterech tak zwanych podstawowych własności miar nierówności. Jeśli funkcja spełnia je wszystkie, to mówimy, że jest indeksem nierówności.

Innym podstawowym aksjomatem teorii pomiaru nierówności jest tzw. transfer Pigou–Dalton, od nazwisk dwóch ekonomistów, którzy zaproponowali go w latach 20. XX wieku. Aksjomat ten mówi, że nierówność spada po takim transferze dochodu od bogatego do biednego, który nie zmienia ich wzajemnego uporządkowania. A zatem po transferze bogaty nadal pozostaje bogatszy od biednego, ale są oni teraz bliżej siebie w rozkładzie dochodu. Wydaje się faktycznie naturalne, że nierówność w takim przypadku została zmniejszona, więc indeks nierówności powinien odnotować spadek. Kolejny aksjomat stwierdza, że miary nierówności powinny być „ślepe” na to, kto posiada

**Rozwiązanie zadania F 952.**

Długość fali de Broglie'a elektronów jest dana wzorem $\lambda = h/(mv)$, gdzie h oznacza stałą Plancka, m masę elektronu, a v jego prędkość. Prędkość elektronów o ładunku $-e$ przyspieszanych napięciem U wynosi:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}, \text{ a więc } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm}},$$

dla $U = 150 \text{ V}$, $\lambda \approx 1 \text{ \AA}$. Wewnątrz kryształu długość fali λ wyznaczamy zastępując U wartością $U + U_k$.

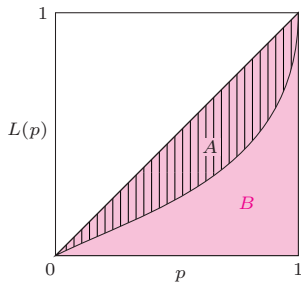
Współczynnik załamania wynosi więc:

$$n = \lambda/\lambda = \sqrt{1 + U_k/U},$$

a stąd

$$U_k = (n^2 - 1)U \approx 15,4 \text{ V}.$$

(Interpretację doświadczenia i oszacowanie $U_k \approx 15 \text{ V}$ podał Hans Bethe – *Annalen der Physik* **87**, 55 (1928)).



Krzywa Lorenza

dany dochód. Innymi słowy, powinny traktować wszystkich symetrycznie lub anonimowo, jak określał to polski logik Kazimierz Ajdukiewicz, zasłużony dla rozwoju blisko powiązanej z teorią nierówności aksjomatycznej teorii sprawiedliwości. Formalnie anonimowość oznacza, że indeks nie zmienia się ze względu na permutacje dochodów między osobami. Czwartą podstawową własność indeksów nierówności sprawia, że mogą być porównywane rozkłady o różnym rozmiarze populacji. Ścisłej, indeks nie zmienia się, jeśli zreplikujemy dochody w populacji.

Cztery podstawowe aksjomaty zostawiają wiele swobody w konstrukcji różnych miar. Miary te spełniają lub nie inne własności, których nie uważamy już za podstawowe, ale które również wyrażają pewne nasze intuicje odnośnie tego, czym jest nierówność. Przykładowo, niektórzy autorzy uważają, że miary nierówności powinny różnie traktować transfery Pigou–Dalton, które mają miejsce w dole rozkładu i w górze rozkładu. Własność ta nazywa się wrażliwością na transfery mieszane (łącznie u góry i u dołu). Konstruowane są miary, które ją mają, ale, na przykład, popularna miara, jaką jest współczynnik zmienności, jej nie ma. Generalnie zatem indeksy nierówności wielokrotnie się ze sobą nie zgadzają i różnie porządkują dwa rozkłady, co nie jest pożądane, gdyż wybór między poszczególnymi indeksami jest arbitralny. Naturalne jest więc pytanie, czy istnieją takie porównania, odnośnie których wszystkie miary, które spełniają cztery podstawowe własności, są zgodne? Formalnie, jaka jest największa (w sensie inkluzji) taka relacja na rozkładach, że jeśli rozkład x jest lepszy niż rozkład y w sensie tej relacji, to *wszystkie* indeksy nierówności, które spełniają cztery podstawowe własności, mają wartość w x niższą niż w y ?

Tą relacją jest porządek częściowy implikowany przez tzw. krzywą Lorenza. Porządkujemy dochody rosnąco. Krzywa Lorenza podaje skumulowany udział w łącznym dochodzie, który przypada p najbiedniejszej części populacji. Jeśli wszystkie dochody byłyby równe, wówczas p najbiedniejsza część populacji posiadałaby dokładnie p -tą część łącznego dochodu. Krzywa Lorenza jest wtedy diagonalą między punktami $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Gdy dochody stają się bardziej zróżnicowane, wówczas krzywa oddala się od diagonali w stronę brzegów trójkąta, jak pokazuje rysunek obok. Na brzegu mamy rozkład, w którym tylko jeden dochód jest dodatni – inni nie posiadają nic; jest to rozkład uważany za najbardziej nierówny. Mówimy, że rozkład x jest bardziej równy niż rozkład y , jeśli krzywa Lorenza rozkładu x leży powyżej krzywej Lorenza rozkładu y . Miarą nierówności, która zawdzięcza swą popularność z powodu bliskich związków z krzywą Lorenza, jest indeks Giniego. Indeks ten mierzy stosunek pola obszaru A do pola zamalowanego trójkąta B z rysunku obok. Wartość wskaźnika Giniego dla Polski wynosi obecnie około 0,3 na podstawie danych ankietowych o dochodach, a na podstawie (nielicznych niestety) danych z zeznań podatkowych indeks ma wartość 0,44. Rozbieżności te wynikają ze słabej reprezentacji osób o wysokich dochodach w badaniach ankietowych. Różnice są istotne. Wartość 0,3 plasuje nas obok zamożnych państw Zachodu, zaś wartość 0,4 obok Rosji.

Gdy krzywa Lorenza rozkładu x jest ponad krzywą dla rozkładu y , wówczas *wszystkie* indeksy I spełniające podstawowe własności pokazują, że $I(x) < I(y)$. A zatem porządek częściowy generowany przez zbiór wszystkich miar, które spełniają cztery podstawowe aksjomaty, to właśnie porządek zadany przez krzywą Lorenza. W praktyce zatem, aby stwierdzić, który rozkład jest równiejszy, nie trzeba sprawdzać po kolei wszystkich znanych miar, wystarczy porównać krzywe Lorenza. Niestety, nie zawsze uzyskamy odpowiedź. Gdy krzywe przecinają się, wówczas nie możemy nic stwierdzić. Krzywa Lorenza jest porządkiem częściowym, nie wszystkie rozkłady można porównać za jej pomocą. Co więcej, gdy krzywe Lorenza się przecinają, istnieje zarówno miara nierówności \tilde{I} , dla której zachodzi $\tilde{I}(x) > \tilde{I}(y)$, jak i taka \bar{I} , dla której $\bar{I}(x) < \bar{I}(y)$.

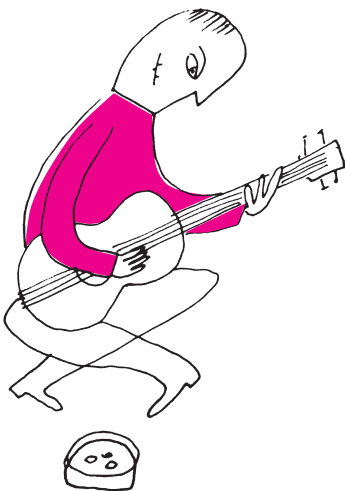
Wtedy, gdy nie możemy porównać rozkładów za pomocą krzywej Lorenza, odwołujemy się do indeksów, które dają porządek liniowy, czyli zawsze odpowiedzą, który rozkład jest równiejszy. To, jak już wspomnieliśmy,



odbywa się za cenę arbitralności zawartej w konkretnej postaci funkcyjnej indeksu. Arbitralność ta jednak jest zmniejszona, jeżeli znamy zbiór aksjomatów *charakteryzujących* dany indeks. Mówimy, że zbiór aksjomatów *charakteryzuje* dany indeks, jeśli indeks nie tylko spełnia te aksjomaty, ale też jest przez nie implikowany. Jeśli taką charakteryzację dla rozważanych przez nas indeksów znamy, wówczas wybór odbywa się między aksjomatami. *A priori* bowiem, z samej postaci funkcyjnej indeksu ciężko jest odczytać, jakie postulaty etyczne o nierówności on implikuje, np. jak traktuje transfery mieszane. Znając charakteryzację, lepiej rozumiemy wyniki, które otrzymujemy przy użyciu indeksu \bar{I} , w porównaniu do tych, które daje indeks \bar{I} .

W toku kilkudziesięciu lat rozwoju teorii pomiaru nierówności zaproponowano wiele aksjomatów i indeksów. Poza podstawowymi zwrócimy jeszcze uwagę na dwa. Często w badaniach empirycznych chcemy uzyskać zdezagregowany obraz łącznej nierówności, to jest w podziale na różne grupy społeczno-ekonomiczne (ze względu na płeć, wiek, miejsce zamieszkania, kolor skóry itp.). Pozwala to wysledzić, które grupy dokładają się najbardziej do łącznej nierówności i powinny być celem polityki redukującej nierówności. Naturalnym wymaganiem jest, by dało się zdekomponować nierówność łączną na część wewnątrzgrupową, czyli sumę nierówności w poszczególnych grupach zważonych ich udziałem w łącznej populacji, oraz część międzygrupową, czyli nierówność między średnimi dochodami w grupach (wówczas wszelkie nierówności wewnątrzgrupowe zostają zniwelowane, bo każda osoba w grupie „dostaje” średni dochód grupy). Okazuje się, że jedyną klasą indeksów, które można w ten sposób zdekomponować, są tzw. indeksy uogólnionej entropii. Jest to więc z jednej strony wymaganie bardzo pożądane w empirycznych zastosowaniach, a z drugiej bardzo restrykcyjne. Popularny indeks Giniego nie należy do tej klasy.

Ostatnią własnością indeksów, na którą zwrócimy uwagę, jest wymaganie, by indeks był istotny w sensie normatywnym, to jest, by był związany z funkcją dobrobytu. Dlaczego bowiem w ogóle interesuje nas nierówność? Dlatego, że uważamy, iż nierówność jest w pewnym sensie niepożądana, czyli że łączy się z niższym dobrobytem. Funkcje dobrobytu „dbają” zarówno o równość, jak i średni dochód. Najprostszym przykładem funkcji dobrobytu jest iloczyn średniego dochodu i $(1 - I)$, gdzie I to, na przykład, indeks Giniego. Dla ustalonego dochodu średniego funkcja dobrobytu maleje wraz z wyższą nierównością. Funkcja taka wyraża to, że ważny jest zarówno rozmiar ciasta, jak i jego podział. W ekonomii słynna jest debata o wymienności efektywności (rozmiaru) i sprawiedliwości (podziału), ale badania empiryczne w ostatnich latach pokazują, że możemy mieć raczej do czynienia z komplementarnością. Dla konkretnego rozkładu dochodów możemy zadać pytanie: jaki jest najmniejszy taki dochód, że dany każdej osobie doprowadziłby do tego samego poziomu dobrobytu co rozważany rozkład? Dochód ten to równo rozłożony dochód równoważny y_e . Oznaczmy przez \bar{y} średni dochód w rozważanym rozkładzie. Wówczas $1 - \frac{y_e}{\bar{y}}$ mierzy część średniego dochodu, który jest „stracony” z powodu nierówności. Jest to dobra miara nierówności. Jej konkretna postać zależy od wybranej funkcji dobrobytu, od której y_e pochodzi. Najpopularniejszy z tej klasy jest indeks Atkinsona, gdzie funkcja dobrobytu to potęga średniego dochodu, a wykładnik potęgi ma ładną interpretację jako stopień awersji do nierówności w społeczeństwie. Można później estymować z danych o dochodach, jaki stopień awersji mają różne społeczeństwa.



Dotychczasowa prezentacja teorii pomiaru nierówności odnosiła się tylko do jednej zmiennej i to zmiennej kardynalnej. Taką zmienną jest dochód i ekonomiści długo byli zainteresowani wyłącznie nierównościami dochodowymi, a wiadomo, że dla dobrobytu jednostki istotny jest nie tylko dochód, ale również zdrowie, edukacja, czyste powietrze, bezpieczeństwo osobiste, prawa polityczne i inne. Tradycyjnie sądzono jednak, że tego typu dobra niekonsumpcyjne mogą być ujęte w rachunkach dochodowych z odpowiednimi cenami. Nawet jeśli jednak znalazłbyśmy te ceny, zakładalibyśmy wówczas nieskończoną substytucję między tymi różnymi dobrami, co jest mocnym wymaganiem. Ponadto,

badania empiryczne pokazują, że czynniki, które przyczyniają się do wzrostu nierówności dochodowych (np. różne zapisy dotyczące płacy minimalnej), niekoniecznie są tożsame z czynnikami, które wywołują nierówność w innych zmiennych, np. w edukacji (na którą ma wpływ, na przykład, dostępność szkół publicznych czy regulacje dotyczące pracy dzieci w krajach rozwijających się). Dochód nie jest więc dobrym „przybliżeniem” zachowania innych wymiarów dobrobytu. To zainteresowanie innymi wymiarami dobrobytu ma dla teorii pomiaru nierówności dwie konsekwencje, mianowicie, konieczność rozwoju teorii pomiaru nierówności wielowymiarowych oraz teorii pomiaru nierówności dla zmiennych porządkowych. Pozadochodowe wymiary dobrobytu mają bowiem często postać uporządkowanych kategorii, np. pytamy respondenta o to, jak ocenia stan swojego zdrowia i ma do wyboru jedną z pięciu kategorii: bardzo źle, źle, średnio, dobrze, bardzo dobrze. Nie ma liczb, mamy tylko informację o porządku. Pojęcie średniej, na odchyleniu od której szereg miar nierówności się opiera, nie ma wówczas sensu. Średnia zmienia się wraz z przyjętą skalą i łatwo pokazać, że niejednokrotnie zmiana skali powoduje zmianę wniosków co do tego, który rozkład jest bardziej równy. Jest to, oczywiście, niepożądane. W praktyce rządów i organizacji międzynarodowych dojrzeła przekonanie, że należy wychodzić poza PKB *per capita* w rozumieniu tego, czym jest postęp społeczno-ekonomiczny. Stąd jest duża potrzeba rozwoju teorii pomiaru nierówności, która obejmuje wiele zmiennych i różnego typu.



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1564. W turnieju szachowym wzięło udział n zawodników ($n \geq 2$). Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem dokładnie jedną partię, przy czym żadna partia nie zakończyła się remisem. Niech w_i oraz p_i będą odpowiednio liczbami zwycięstw i porażek i -tego gracza, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Rozwiązanie na str. 6

M 1565. W turnieju szachowym bierze udział $2n$ zawodników ($n \geq 2$). Chcemy zaplanować rozgrywki składające się z $2n - 1$ rund w taki sposób, aby każdy zawodnik rozegrał w każdej rundzie dokładnie jedną partię oraz tak, aby w całym turnieju każdy zawodnik zagrał z każdym innym zawodnikiem dokładnie raz. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których jest to możliwe.

Rozwiązanie na str. 18

M 1566. W turnieju szachowym wzięło udział n zawodników ($n \geq 3$). Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem dokładnie jedną partię, przy czym żadna partia nie zakończyła się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wyznaczyć, w zależności od n , największą liczbę k o następującej własności: istnieje (niezależnie od przebiegu turnieju) co najmniej k różnych takich trójek zawodników A, B, C , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

Rozwiązanie na str. 16

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 951. Energia wiązania cząsteczki tlenu (O_2) wynosi $E = 493,6 \text{ kJ/mol}$. Jaka jest minimalna wartość prędkości cząsteczek tlenu, dla której ich zderzenia niesprężyste mogą doprowadzić do zerwania wiązania przynajmniej jednej z nich? Jakiej temperaturze gazu odpowiada ta prędkość? Stała Boltzmanna $k \approx 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, liczba Avogadro $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} / \text{mol}$, masa tlenu wynosi $m = 32 \text{ g/mol}$.

Rozwiązanie na str. 1

F 952. W roku 1927 Davisson i Germer badali odbicie wiązki elektronów przyspieszonych napięciem $U = 150 \text{ V}$ od powierzchni kryształu niklu. Obserwowali maksima odbicia pod pewnymi kątami. Część maksimów odpowiadała interferencji fal de Broglie’a odbitych od sieci atomów tworzących powierzchnię. Występowały jednak także maksima wynikające z interferencji fal rozpraszanych na płaszczyznach atomowych w głębi kryształu i równoległych do jego powierzchni. Położenia tych maksimów można wyjaśnić przyjmując, że fale de Broglie’a padających elektronów ulegają załamaniu ze współczynnikiem załamania $n \approx 1,05$. Zmiana kierunku ruchu elektronów wynika z ich oddziaływania z jonami sieci. Ile wynosi średni potencjał U_k związany z wewnętrznym rozkładem ładunku w kryształach?

Rozwiązanie na str. 2

Galaktyki w komputerze

* doktorant w Centrum Astronomicznym im. Mikołaja Kopernika PAN

Grzegorz GAJDA*

Symulacje komputerowe są dzisiaj niezbędną częścią badań naukowych, na równi z rozważaniami czysto teoretycznymi i prowadzeniem eksperymentów lub obserwacji. Na przykładzie modelowania fizyki galaktyk możemy zobaczyć, dlaczego symulacje są tak istotne, w jaki sposób się je konstruuje, czego się dzięki nim uczymy oraz jakie są ich ograniczenia.

W astronomii, w przeciwieństwie do innych nauk przyrodniczych, takich jak np. biologia czy fizyka, nie jesteśmy w stanie przeprowadzać kontrolowanych eksperymentów. Jesteśmy zdani jedynie na obserwacje. Jednak ze względu na to, że skale czasowe zjawisk zachodzących w astronomii są często bardzo duże, a w przypadku dynamiki i ewolucji galaktyk wynoszą setki milionów bądź miliardy lat, nie jesteśmy w stanie obserwować tych zjawisk bezpośrednio. Dlatego też symulacje są sprawdzianem naszego zrozumienia fizyki danego zjawiska. Jeśli nie udaje się w komputerze odtworzyć tego, jak wygląda Wszechświat, to znaczy, że nie wzięliśmy pod uwagę wszystkich istotnych procesów. Oczywiście, nie działa to w drugą stronę – zgodność wyników symulacji z danymi obserwacyjnymi jeszcze nie oznacza, że wszystko zrozumieliśmy.

Stopień skomplikowania symulacji postępuje wraz z pogłębianiem wiedzy. Niemniej istotny jest także wzrost możliwości komputerów. Składniki typowej symulacji galaktycznej można omówić w kolejności konieczności włączenia ich do modelu. Na pierwszy rzut oka na nocnym niebie widzimy przede wszystkim gwiazdy. Mogłoby się wydawać, że dalsza droga jest prosta i polega na umieszczeniu w symulacji wszystkich gwiazd w danej galaktyce. Następnie, korzystając z prawa grawitacji Newtona, obliczamy, jaką siłą działają wszystkie gwiazdy na siebie nawzajem. Otrzymujemy informację, z jakim przyspieszeniem się poruszają, uaktualniamy ich pozycje i prędkości, znowu obliczamy siły – i tak dalej. Niestety, taka symulacja nie jest możliwa ze względu na ograniczenia techniczne. Szacuje się, że w Drodze Mlecznej znajduje się kilkaset miliardów gwiazd. Jedynie najbardziej zaawansowane symulacje, przeprowadzane na wielu tysiącach procesorów, zbliżają się do takiej liczby obiektów. Jeśli dysponujemy mniejszymi zasobami lub chcemy śledzić ewolucję i oddziaływanie wielu galaktyk jednocześnie, to trzeba pójść na kompromis. Polega on na tym, że nie analizuje się pojedynczych gwiazd, a raczej całe ich skupiska, które można poniekąd identyfikować z gromadami gwiazd o masach wielu tysięcy mas Słońca.

Z obserwacji wiadomo, że galaktyki dyskowe obracają się zbyt szybko w stosunku do ich widzialnej masy – jest jej zbyt mało, żeby utrzymać galaktyki w całości. Musimy więc dodać do naszego modelu ciemną materię, aby galaktyki nie rozpadły się od razu po uruchomieniu symulacji. Ciemną materię modelujemy za pomocą masywnych *cząstek*, które nie mają nic wspólnego z hipotetycznymi elementarnymi cząsteczkami ciemnej materii – na odkrycie tych ostatnich w ziemskich laboratoriach astronomowie bardzo liczą.

Mając galaktyki składające się z gwiazd i ciemnej materii, można już prowadzić interesujące symulacje komputerowe. W ten sposób symuluje się, jak galaktyki zmieniają swoje kształty pod wpływem bliskich spotkań z innymi galaktykami bądź w jaki sposób ewoluują ich struktury i kształty. Taki model nadal jest jednak niepełny, gdyż nie jest w nim możliwe śledzenie powstawania galaktyk. Obecne, w tym uproszczeniu gwiazdy są stałe i niezmiennie, nie ma także świeżego gazu, z którego mogłyby powstać nowe gwiazdy. Musimy zatem dołożyć do naszego modelu gaz międzygwiazdowy, którego fizyka jest zdecydowanie bardziej skomplikowana niż oddziaływanie grawitacyjne punktów materialnych. Istnieje kilka sposobów na przełożenie równań dynamiki gazów na język symulacji komputerowych. Oczywiście, powinny one dawać takie same rezultaty, jednak często okazuje się, że różnią się one w szczegółach. Jednym z ważnych aspektów jest zrozumienie, w jaki sposób użyte metody



Rozwiązanie zadania M 1564.

Zauważmy, że dla każdego i
 $w_i + p_i = n - 1$, a także

$$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n p_i,$$

gdyż każda strona powyższej równości
jest równa liczbie wszystkich rozegranych
partii. Wobec tego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_i^2 - \sum_{i=1}^n p_i^2 &= \sum_{i=1}^n (w_i^2 - p_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n (w_i - p_i)(w_i + p_i) = \\ &= (n - 1) \sum_{i=1}^n (w_i - p_i) = \\ &= (n - 1) \left(\sum_{i=1}^n w_i - \sum_{i=1}^n p_i \right) = 0, \end{aligned}$$

skąd wynika postulowana równość.

numeryczne wpływają na końcowy rezultat i w jaki sposób sprawić, aby jak najlepiej odpowiadał rzeczywistości.

Zaprogramowanie fizyki powstawania i ewolucji gwiazd też spotyka się z ograniczeniami technicznymi. Ze względu na zbyt dużą rozpiętość skal wielkości nie jesteśmy w stanie śledzić powstawania pojedynczych gwiazd w tej samej symulacji, w której badamy galaktyki i gromady galaktyk. W związku z tym powszechnie korzysta się z modelu, w którym stygnącemu i gęstniejącemu gazowi przypisuje się pewne prawdopodobieństwo przekształcenia się w populację gwiazd.

W pierwszych symulacjach, które zawierały elementy wymienione powyżej, nie powstawały galaktyki podobne do tych, które obserwujemy w realnym Wszechświecie. Zamiast galaktyk spiralnych, mających kształt cienkiego dysku, powstawały obiekty grubsze i bardziej obłe. Okazało się, że kluczowym problemem było bardzo szybkie chłodzenie się gazu międzygwiazdowego, które prowadziło do zbyt szybkiej kondensacji i powstawania nadmiernie wielu gwiazd.

Rozwiązaniem problemu było wzięcie pod uwagę tego, że młode i masywne gwiazdy wybuchają jako supernowe, dostarczając energię do ośrodka międzygwiazdowego. Prowadzi to do powstania sprzężenia zwrotnego (*feedback*): jeśli w galaktyce powstaje dużo młodych gwiazd, to w szybkim tempie podgrzewają one ośrodek międzygwiazdowy, powodując spowolnienie tempa powstawania kolejnych gwiazd. Takie samoregulujące się środowisko umożliwiło powstawanie dyskowych galaktyk w symulacjach. Później okazało się również, że aby doprowadzić do ewolucji galaktyk spiralnych w galaktyki eliptyczne, niezbędne są dodatkowe źródła energii pochodzącej z supermasywnej czarnej dziury znajdującej się w centrum każdej dużej galaktyki.

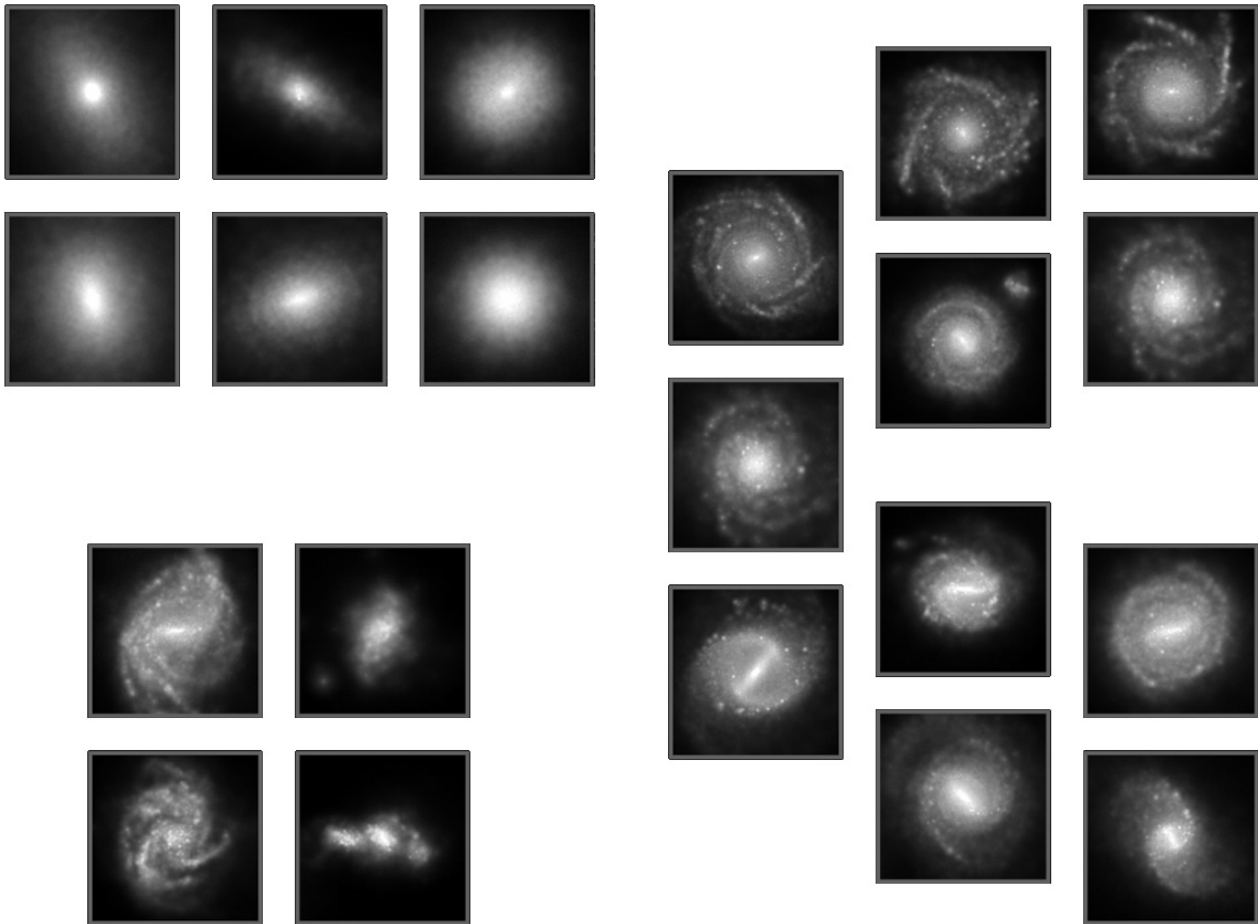


Diagram Hubble'a galaktyk powstałych w symulacji kosmologicznej Illustris: eliptyczne (lewy górny róg), spiralne (z prawej) i nieregularne (lewy dolny róg). Autorstwo: Illustris Collaboration.

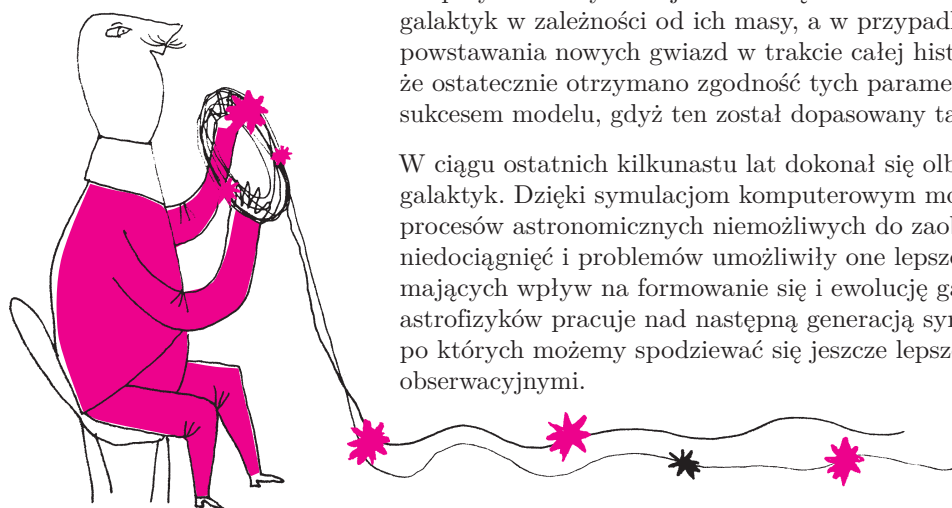
Illustris: www.illustris-project.org
EAGLE: icc.dur.ac.uk/Eagle/ oraz
eagle.strw.leidenuniv.nl/

Dzięki postępowi technologicznemu oraz dostatecznemu zrozumieniu istotnych procesów możliwe stało się wierne symulowanie reprezentatywnych kawałków Wszechświata. Dwie takie symulacje to Illustris oraz EAGLE. Na stronach internetowych obydwu projektów znajdują się modele oraz animacje z symulacji, przedstawiające m.in. powstawanie galaktyk eliptycznych oraz spiralnych. W obydwu projektach udało się odtworzyć wiele własności obserwowanych galaktyk, między innymi proporcje między galaktykami spiralnymi i eliptycznymi, skład chemiczny, wielkoskalowy rozkład neutralnego wodoru oraz rozkład galaktyk w gromadach.

Oczywiście, sukces symulacji poprzedniej generacji nie jest końcem poszukiwań, gdyż wciąż pozostaje wiele problemów do rozwiązania. W Illustrisie powstające galaktyki są nazbyt duże w porównaniu z rzeczywistymi rozmiarami. Innym problemem jest to, że gwiazdy w małych galaktykach powstawały zbyt szybko, więc ich końcowy wiek jest 2–3 razy większy od obserwowanego.

Najważniejszym problemem, który pozostaje do rozwiązania i który jest najbardziej niepokojący dla naukowców, jest problem wspomnianego już feedbacku. Niedostateczna rozdzielczość symulacji oraz niepełne zrozumienie odpowiednich procesów fizycznych skutkuje tym, że dostarczanie energii do ośrodka międzygwiazdowego przez gwiazdy i aktywne jądra galaktyk jest modelowane w sposób bardzo przybliżony, a nie wyprowadzane z podstawowych praw fizyki. Najkrócej mówiąc, dobierane są takie parametry, aby pewna własność populacji galaktyk jak najlepiej zgadzała się z rzeczywistością. Na przykład w symulacji EAGLE dążono do odtworzenia rozkładu ilości galaktyk w zależności od ich masy, a w przypadku Illustrisa – średniego tempa powstawania nowych gwiazd w trakcie całej historii Wszechświata. Zatem to, że ostatecznie otrzymano zgodność tych parametrów z obserwacjami, nie jest sukcesem modelu, gdyż ten został dopasowany tak, aby otrzymać taką zgodność.

W ciągu ostatnich kilkunastu lat dokonał się olbrzymi postęp w modelowaniu galaktyk. Dzięki symulacjom komputerowym możemy śledzić przebieg procesów astronomicznych niemożliwych do zaobserwowania. Mimo wszystkich niedociągnięć i problemów umożliwiły one lepsze zrozumienie procesów mających wpływ na formowanie się i ewolucję galaktyk. Obecnie kilka zespołów astrofizyków pracuje nad następną generacją symulacji kosmologicznych, po których możemy spodziewać się jeszcze lepszej zgodności z danymi obserwacyjnymi.



Równanie z dreszczykiem

*Piotr KRZYŻANOWSKI**

Jakiś czas temu Marek Bodnar z sąsiedniego Zakładu Biomatematyki pokazał mi niepozornie wyglądające równanie różniczkowe, które pojawiło się w pewnym modelu przebiegu choroby zakaźnej:

$$(1) \quad X'(\tau) = -\mu X(\tau) + \frac{1}{\epsilon} (\lambda X(\tau) (N e^{r\tau} - X(\tau)) - \gamma X(\tau)).$$

Liczby $\mu, \lambda, \epsilon, \gamma, r, N$ są stałymi, dodatnimi parametrami modelu (zob. [1, 2]). Niewiadomą jest funkcja $X(\tau)$ odpowiadająca liczbie chorych przypadających na jednostkę powierzchni. Zmienna niezależna τ to czas. Odpowiednio skalując zmienne występujące w równaniu, możemy sprowadzić je do prostszej, równoważnej postaci

$$(2) \quad x'(t) = x(t) \cdot (e^{At} - B - x(t)),$$

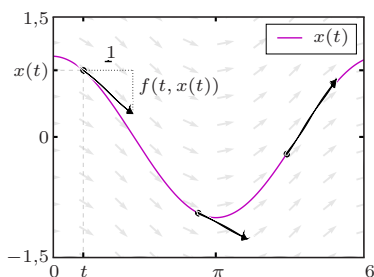
przy czym $A, B > 0$ zależą od parametrów oryginalnego zadania. Dodatkowo na rozwiązanie nakładamy warunek $x(0) = x_0$, gdzie $x_0 > 0$ jest kolejnym parametrem zadania.

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

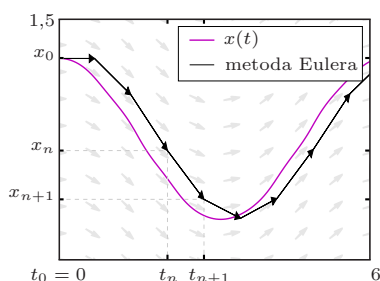
[1] J. Banasiak, E.K. Phongi, *Canard-Type Solutions in Epidemiological Models*, [dx.doi.org/10.3934/proc.2015.0085](https://doi.org/10.3934/proc.2015.0085)

[2] J. Banasiak, *Bifurkacje dynamiczne i osobliwie zaburzone układy równań*, imsm.mimuw.edu.pl/konf30/slides/j-banasiak.pdf

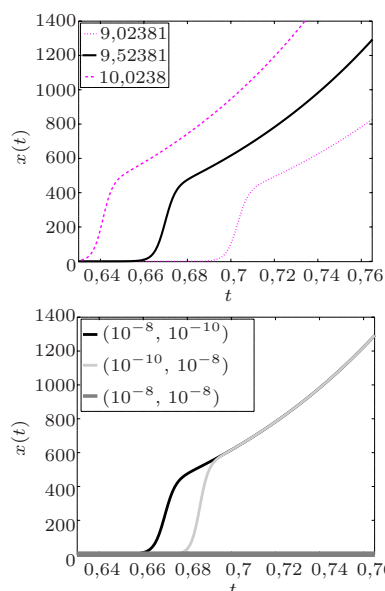
Parametr x_0 odpowiada liczbie zarażonych w chwili $t = 0$.



Rys. 1. Wykres rozwiązania $x(t) = \cos(t)$ równania $x'(t) = -\sin(t)$ w każdym swoim punkcie (t, x) jest styczny do wektora $[1, -\sin(t)]$.



Rys. 2. Metoda Eulera, wymyślona przez króla matematyków podobno na potrzeby przybliżonego rozwiązania zadania z hydrauliki fontann dla króla Prus. Tutaj zastosowana do zadania z rysunku 1, dla $h = 0,7$.



Rys. 3. U góry: rozwiązania dla różnych wartości parametru A modelu (2) tylko z pozoru wyglądają sensownie. Na dole: rozwiązania wyznaczone dla tej samej wartości $A = 9,52381$, ale przy różnych tolerancjach ($ATOL, RTOL$) pracy LSODE znacznie się różnią (jedno wygląda wręcz na zerowe), co jest bardzo podejrzane.

Jest to **równanie różniczkowe Bernoulliego** drugiego stopnia. Czytelnikom nie w pełni zaznajomionym z teorią równań różniczkowych wyjaśnimy, że wykres poszukiwanej przez nas funkcji $x(t)$, spełniającej równanie różniczkowe zapisane w ogólnej postaci

$$(3) \quad x'(t) = f(t, x(t)),$$

ma taką własność, że jest on styczny w każdym swoim punkcie $(t, x(t))$ do wektora o kierunku $[1, f(t, x(t))]$, zob. przykład na rysunku 1 dla $f(t, x) = -\sin(t)$. W przypadku równania (2), oczywiście, $f(t, x)$ jest inne, równe $x \cdot (e^{At} - B - x)$.

Równanie różniczkowe? Ależ to proste!

W dzisiejszych czasach zdawać by się mogło, że nie musimy rozumieć, czym jest równanie różniczkowe – wystarczy tylko wiedzieć, z jakiej biblioteki numerycznej skorzystać na swoim laptopie. . . Rzeczywiście: jedna z najlepszych (LSODE) jest wbudowana w darmowy pakiet obliczeń komputerowych GNU Octave; inne, równie znakomite, są używane przez MATLAB-a, Scipy, Mathematicę, itd. Dlatego codziennie naukowcy i inżynierowie z całego świata wykorzystują je do rutynowego numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych na komputerze, ufając ich technicznej doskonałości i wbudowanej wiedzy, obejmującej kilkanaście (lub więcej) lat użytkowania w najróżniejszych warunkach.

Jak działa taka biblioteka? Najprostszą strategią numerycznej aproksymacji rozwiązania równania (3) jest przyjęcie, że na krótkich odcinkach czasu długości h funkcja f jest stała (innymi słowy, że rozwiązanie jest funkcją liniową), co prowadzi do tzw. **metody Eulera**:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n),$$

gdzie $t_n = nh$ oraz (można udowodnić, że) $x_n \approx x(t_n)$ (zob. rys. 2). Nietrudno zgadnąć, że oprócz tej prościutkiej metody są też bardziej zaawansowane, np. schematy wielokrokowe lub metody Rungego–Kutty – również w wersjach, które dodatkowo automatycznie dopasowują długość h do rzeczywistego przebiegu rozwiązania tak, by zagwarantować spełnienie określonych przez użytkownika kryteriów tolerancji. Wspomniany powyżej LSODE używa właśnie schematów wielokrokowych z adaptacją długości kroku.

Febra wykresu: rozpoznanie, diagnoza i kuracja

Używając wbudowanej w pakiet Octave biblioteki LSODE do rozwiązania (2) dla parametrów $B = 157,143$, $x_0 = 0,2$ i kilku wybranych wartości A , odpowiednich dla modelowanego zjawiska, dostaniemy ładne wykresy, takie jak na rysunku 3 na górze.

Jak zauważył Marek Bodnar (i dlatego pokazał mi to równanie, bo wie, że lubię takie smaczki), gdy *ustalimy* zestaw parametrów zadania, ale za to będziemy bawić się tolerancjami pracy LSODE, otrzymamy podobne, lecz jednak zdecydowanie *różne* rozwiązania (rys. 3 na dole). (Zobacz też uwagi J. Banasiaka w [2, str. 36]. Analogiczne zjawisko pojawi się także w MATLAB-ie i in.)

Jak to rozsądzić? Kto przeszedł kurs *Równań różniczkowych zwyczajnych*, ten zauważy, że (2) tylko troszkę różni się od klasycznego **równania logistycznego**

$$y'(t) = y(t) \cdot (C - y(t)),$$

dla którego *znamy jawny wzór* na rozwiązanie:

$$y(t) = \frac{C y(t_0)}{y(t_0) + (C - y(t_0)) e^{-C(t-t_0)}}.$$

Gdyby więc – podobnie jak w metodzie Eulera – przyjąć chwilowo, że człon e^{At} jest stałą wynoszącą, powiedzmy, e^{At_0} , to wtedy (2) zamienia się w równanie logistyczne z $C = e^{At_0} - B$.

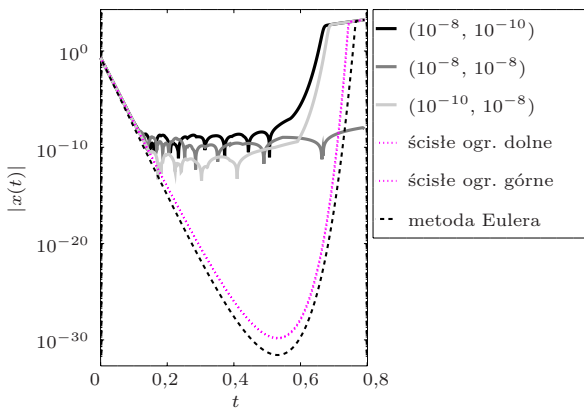
Ta wiedza pozwoli nam rozstrzygnąć, które z uzyskanych przez nas rozwiązań jest akceptowalne. Wykorzystamy następujące twierdzenie porównawcze:

Twierdzenie (Peano). *Jeśli funkcje $x, y : [0, T] \rightarrow R$ są różniczkowalne i spełniają dla $0 \leq t \leq T$ warunki:*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad y'(t) < f(t, y(t)), \quad y(0) \leq x(0),$$

to $y(t) \leq x(t)$ dla $0 \leq t \leq T$.

Z tego, co powiedzieliśmy wcześniej, wynika, że jako y wystarczy wziąć rozwiązanie równania logistycznego z C ciut mniejszym niż $e^{At_0} - B$, gdyż w naszym zadaniu $x(t)$ jest zawsze dodatnie. Łatwo też uzupełnić treść powyższego twierdzenia tak, aby otrzymać analogiczne dolne oszacowanie $x(t)$. Ponadto nic nie stoi na przeszkodzie, byśmy zastosowali je – podobnie jak w metodzie Eulera – nie od razu dla wszystkich t , ale wielokrotnie na krótkich odcinkach długości, powiedzmy, $H = 1$. W ten sposób dostajemy dwie – jak się okazuje, całkiem bliskie – krzywe, będące ścisłymi oszacowaniami z góry i z dołu dla prawdziwego (wciąż nieznanego!) rozwiązania (2): obie zostały naszkicowane na rysunku 4.



Rys. 4. Wykresy rozwiązań LSODE w skali logarytmicznej ukazują podejrzaną zachowanie dla małych wartości $x(t)$. Górne i dolne oszacowanie na bazie twierdzenia Peano są tak bliskie, że na rysunku wyglądają jak jedna krzywa.

Podobnemu wykresowi, z MATLAB-a, przyglądaliśmy się w poprzednim numerze *Delt*y.

Mt 20,16 Niestety, na rysunku 4 widzimy także, iż żaden wcześniej otrzymany wykres LSODE nie mieści się w wyznaczonym przez nas korytarzu, w którym musi przebiegać rozwiązanie. I, niczym w biblijnej przypowieści, prymitywna metoda Eulera ostatecznie wygrywa z wyrafinowanym LSODE: rozwiązania wyznaczone przez jedną z najlepszych numerycznych bibliotek okazują się bowiem dramatycznie kiepskie tam, gdzie wartości są bardzo małe: wykres trzęsie się jak w febrze, choć z teorii wiadomo, że powinien być gładki.

Patrząc na rysunek 4, zaczynamy rozumieć, o co chodzi. Schemat taki, jak LSODE ma wbudowany mechanizm sterowania długością kroku (w zamyśle służący *polepszeniu* jakości rozwiązania!), który jednak najwyraźniej gubi się, gdy rozwiązanie staje się w specyficzny sposób czułe na niewielkie odchylenia od dokładnej wartości, a tak dzieje się, gdy rozwiązanie przybliży się do zera.

LSODE (w końcu) też daje radę! W takiej sytuacji – gdy zadanie staje się zbyt trudne dla używanej metody – numeryk często proponuje: *Może więc zmieńmy... zadanie?!* Faktycznie, wprowadzając w (2) nową niewiadomą $y = \log x$, dostaniemy kolejne równoważne równanie:

$$(4) \quad y'(t) = -G + e^{Ft} - e^{y(t)}, \quad y(0) = \log(x_0),$$

którego rozwiązania mają znacznie spokojniejszy przebieg niż (2). LSODE rozwiązuje je bez trudu, więc kładąc następnie $x(t) = e^{y(t)}$, wyznaczamy znakomity wykres, nareszcie idealnie wpasowujący się pomiędzy górne i dolne ograniczenie. Nie pokazujemy tego wykresu, bo i tak w używanej przez nas skali będzie nieodróżnialny od krzywych ograniczających z rysunku 4.

Walka nie jest jeszcze wygrana

Ale w życiu takie rzeczy nie zdarzają się, prawda? – chciałoby się zapytać, mając w pamięci, że cała technologiczna nowoczesność wokół nas była zapewne wcześniej testowana w modelach komputerowych, które – jak przekonuje nas codzienne doświadczenie – najwyraźniej musiały *dać się* numerycznie rozwiązać w wystarczająco dokładny sposób. Generalnie, metody numeryczne rzeczywiście działają zdumiewająco dobrze; jednak trafiają się spektakularne niepowodzenia – takie, jak zatonięcie 26 lat temu pływającej platformy wiertniczej Sleipner (zakończone wstrząsem tektonicznym o mocy 3 stopni w skali Richtera i stratą rzędu 700 mln dolarów) – spowodowane tylko jednym czynnikiem: zlekceważeniem naturalnych ograniczeń standardowych pakietów obliczeniowych.

Warto o tym pamiętać, naciskając klawisz Enter... i nie tylko.

Parametry F, G w równaniu (4) zależą, oczywiście, od A i B .

O innych perypetiach wykorzystania komputera do wykonania obliczeń pisaliśmy m.in. w $\Delta_{09}^3, \Delta_{09}^6, \Delta_{09}^{10}$.

Ukuto nawet specjalny termin: *Computer-Aided Catastrophe*.

Sztuczna inteligencja

Andrzej DĄBROWSKI

- Raj na Ziemi jednak istnieje. Znalazła go sztuczna inteligencja.
- Sztuczna inteligencja pomoże w walce z bioterroryzmem. Nauczyła się rozpoznawać bakterie wąglika.
- Potężna kasta zawodowa może zniknąć bez śladu. Sztuczna inteligencja bez trudu pokonała setkę ekspertów.
- Zaleje nas spam. Sztuczna inteligencja złamała system weryfikacji CAPTCHA.

Takie i podobne tytuły pojawiają się codziennie, zarówno w czasopismach, na stronach internetowych, jak i usłyszeć można je w telewizji czy w radiu. A to nie wszystko. Po wpisaniu przez nas hasła w wyszukiwarce internetowej sztuczna inteligencja nie tylko wybierze najbardziej pasujące linki, ale i okraja je odpowiednimi reklamami. Czytając e-mail, można nie zauważyć większości spamu – to też efekt działania sztucznej inteligencji. W wielu miejscach sztuczna inteligencja działa niewidzialnie dla nas. Nie wiadomo, które wiadomości czy artykuły na stronach sportowych czy ekonomicznych redaguje dziennikarz, a które sztuczna inteligencja. Przytłoczeni przez hasła *sztuczna inteligencja, uczenie maszynowe, głębokie sieci neuronowe* nie wiemy, czy to tylko atrakcyjne hasła, czy też kryją się za tym rzeczywiste dokonania. Prawda jest taka, że za tymi hasłami kryje się rewolucja nie tylko technologiczna. Zmienia się sposób, w jaki uprawia się naukę, diagnozuje choroby, a nawet tworzy dzieła sztuki. Pesymiści przewidują intelektualną dominację sztucznej inteligencji nad człowiekiem, przywołując pokonanie arcymistrzów gry w szachy i go.

Komputery zawsze uważane były za narzędzia użyteczne, wykonujące prace obliczeniowe i księgowo. Nazwa *mózgi elektroniczne*, która była powszechnie używana w czasach, kiedy zaczynałem studia, dość szybko zanikła, bo, jak się okazało, była zdecydowanie na wyrost.

Zostały adekwatne nazwy: komputer (compute – liczyć), czy po czesku počítač (počitadlo – liczydło), ale po francusku ordinateurur (ordre – porządek, rozkaz).

Teraz ta nazwa byłaby już bliższa prawdy.

Tradycyjnie, aby sprawić, by komputer coś zrobił, należało napisać program, szczegółowo opisujący wszystkie kroki, które ma wykonać. W uczeniu maszynowym, dziale sztucznej inteligencji, to komputer sam buduje swój program działania, ucząc się na podstawie dostępnych mu danych (im więcej danych, tym lepiej – stąd *big data*) – wydobywa z nich wiedzę, proponując najbardziej prawdopodobny wynik. Tak więc uczenie maszynowe jest operacją odwrotną do programowania. Inną różnicą jest, że w tradycyjnym podejściu wyniki pracy komputera są przewidywalne (deterministyczne), a w uczeniu maszynowym losowe, a ich przypadkowość zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby danych.

Celem uczenia maszynowego jest wytrenowanie komputerów tak, aby były w stanie podejmować

optymalne decyzje. Co jest zadziwiające, najróżnorodniejsze zastosowania uczenia maszynowego są efektem praktycznie takiego samego algorytmu uczącego – o wiele prostszego niż algorytmy używane w tradycyjnych programach komputerowych.

Co może sztuczna inteligencja?

W powszechnej opinii sztuczna inteligencja kojarzy się z sieciami neuronowymi, a ostatnio z głębokimi sieciami neuronowymi. Jednak zajmuje ona znacznie bardziej rozległy obszar aktywności. Oto kilka z nich.

1. Reprezentacja wiedzy. Wykorzystuje się gigantyczne bazy wiedzy w celu zbudowania systemów eksperckich. Przykładem zastosowania tej dziedziny sztucznej inteligencji są system GIDEON (*Global Infectious Disease & Epidemiology Network*), zautomatyzowany wywiad lekarski, który ma pomóc w diagnozowaniu chorób zakaźnych i tropikalnych oraz system *Citizenship Application* służący do oceny, czy dana osoba kwalifikuje się do ubiegania o obywatelstwo USA.

2. Planowanie automatyczne. System służący planowaniu i podejmowaniu decyzji, szczególnie przy wykonywaniu operacji przez inteligentnych agentów, roboty autonomiczne i samochody autonomiczne.

3. Przetwarzanie języka naturalnego. Zespół procedur zajmujących się automatyzacją analizy, rozumienia, tłumaczenia i generowania języka naturalnego przez komputer.

4. Wizja komputerowa. Zajmuje się rozpoznawaniem obrazów. Ma liczne zastosowania w kontroli produkcji żywności i środków farmaceutycznych. Rozpoznawanie wąglika, o którym była mowa na początku artykułu, związane jest z wizją komputerową.

5. Robotyka. Technologia służąca wytwarzaniu automatów zastępujących człowieka. Działanie robotów oparte jest na zastosowaniu różnych metod sztucznej inteligencji: wizja komputerowa, planowanie automatyczne, sieci neuronowe.

6. Silna sztuczna inteligencja. Projekty stworzenia wirtualnego mózgu są dopiero w powijakach. W ramach projektu Blue Brain Project, rozpoczętego w 2005 roku przez Politechnikę Federalną w Lozannie, stworzono w 2011 roku symulację, odpowiadającą skali mózgu pszczoły (około miliona neuronów i miliarda połączeń nerwowych). W 2015 roku Japończycy użyli

ówcześnie czwartego najszybszego komputera na świecie (komputer K ma 705 tys. rdzeni i 1,4 mln GB pamięci RAM) do symulacji jednej sekundy aktywności 1% mózgu ludzkiego. Komputer potrzebował 40 minut, aby wykonać to zadanie. Kora ludzkiego mózgu, odpowiedzialna za wyższe procesy poznawcze, zawiera 15–33 miliardów neuronów, z których każdy może mieć do 10 tysięcy połączeń synaptycznych. Szacuje się ilość informacji, potrzebnych do odtworzenia jej funkcjonalności, na 500 petabajtów. Przewiduje się, że superkomputery o wystarczającej mocy obliczeniowej, aby przetworzyć taką ilość danych, powstaną około 2020 roku.

Pierwszym zwiastunem silnej sztucznej inteligencji jest program *AlphaGoZero*, który bez pomocy człowieka nauczył się grać w go. Mistrzowie tej gry zauważyli że sztuczna inteligencja odkryła zupełnie nowe strategie gry, nieznanne człowiekowi.

Podobnie, *Google Translator*, program do automatycznego tłumaczenia, sam wytworzył sztuczny język, pozwalający tłumaczyć pary języków, które nigdy nie były wcześniej trenowane w procesie uczenia.

Uczenie maszynowe

Szczególnie interesującą dziedziną sztucznej inteligencji jest uczenie maszynowe. Uczenie maszynowe wykorzystuje dostarczane mu dane, stosując w trakcie treningu metody statystyczne. Uczenie maszynowe jest *czarną skrzynką* (czyli układem, o którego budowie wewnętrznej nic nie wiadomo) z danymi na wejściu i wynikami na wyjściu. Uczenie, określające związek między wejściem a wyjściem, oparte jest na trzech schematach: uczenie nienadzorowane, uczenie nadzorowane i uczenie przez wzmocnienie.

Uczenie nadzorowane zakłada obecność ludzkiego nadzoru przy ocenie wyników, uzyskanych w każdym przebiegu algorytmu dla danych na wejściu. Taki sposób treningu jest wykorzystywany przy klasyfikacji z zadanymi wzorcami (rozpoznawanie pisma, diagnostyka medyczna).

W **uczeniu przez wzmocnienie** program uzyskuje sygnał w postaci nagrody czy kary w zależności od stopnia zgodności wyniku z projektowanym celem (tak były uczone komputery do gry w szachy i w go).

Uczenie nienadzorowane zakłada brak udziału człowieka oraz systemu nagród i kar w procesie nauczania: grupowanie (*klasteryzacja*) danych, segmentacja obrazu.

W bestsellerowej książce o algorytmach uczenia *Naczelny algorytm* scharakteryzowano różne podejścia do modelowania relacji między wejściem a wyjściem.

(P. Domingos, *Naczelny algorytm. Jak jego odkrycie zmieni nasz świat*, Helion, 2016)

Symboliści. Zakłada się, że inteligencja sprowadza się do manipulacji symbolami. Algorytm uczenia,

którym posługują się symboliści, to odwrotna dedukcja: analizowana jest część założeń i wynikających z nich wniosków i dopasowywane są te dodatkowe założenia, przy których wnioski są najbardziej prawdopodobne.

Koneksjoniści. Zakładają, że mózg składa się z różnych prostych elementów tego samego typu (neuronów). O jego działaniu decyduje siła połączeń między tymi elementami. Podstawowym algorytmem uczenia jest propagacja wsteczna. Polega ona na korekcji wag połączeń między neuronami po konfrontacji obliczonego wyniku z rzeczywistym.

Ewolucjoniści. Zakładają, że podstawą sposobów nauczania (a raczej dopasowania) jest selekcja naturalna. Metoda uczenia polega na użyciu algorytmów genetycznych.

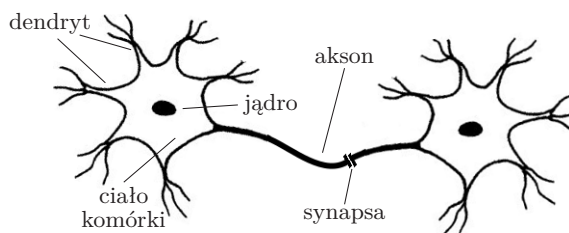
Bayesiści. Zakładają, że wiedza polega na ocenie wiarygodności wyników. Metoda uczenia polega na użyciu twierdzenia Bayesa i twierdzeń z niego wynikających. (Twierdzenie Bayesa pozwala obliczyć prawdopodobieństwo przyczyny, gdy znany jest jej skutek.)

Analogiści. Zakładają, że podobne rodzi podobne. To często używane podejście przy klasyfikacji z zadanymi wzorcami. Algorytm uczenia to maszyny wektorów wspierających (SVM – *Support Vector Machine*). Metoda ta polega na szukaniu najbardziej „wyrazistych” granic między obszarami danych.

Sieci neuronowe

Spśród wymienionych powyżej metod najczęściej opisywane są sieci neuronowe. Łatwo przypisać do nich etykietę mózgu elektronowego, obrazowo opisać sposób trenowania sieci i przedstawić naprawdę bogate zastosowania. Dla matematyka sieci neuronowe mają urok eleganckiej konstrukcji z ciekawie zarysowanym problemem związanym z klasycznymi problemami matematycznymi.

Naturalne jest poszukiwanie źródeł sieci neuronowych w budowie mózgu. Sygnały w mózgu przekazywane są za pomocą sieci neuronów. Neuron jest zbudowany z ciała komórki oraz odchodzących od niego wypustek: aksonu i dendrytów. Informacje w postaci sygnałów elektrycznych przekazywane są do następnych neuronów przez akson, który przewodzi pobudzenie z udziałem synapsy do dendrytów, należących do kolejnego neuronu.

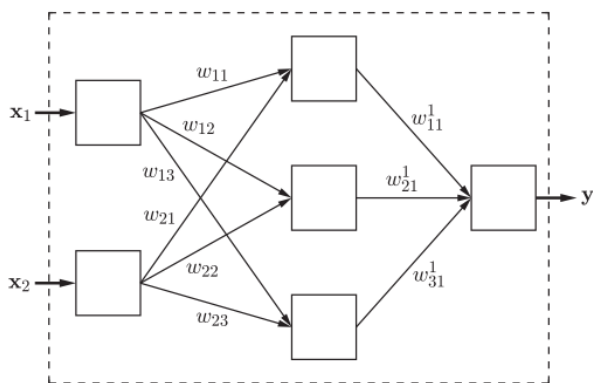


Różne obszary mózgu są odpowiedzialne za poszczególne funkcje: widzenie, słuch, kontrola ruchu, myślenie

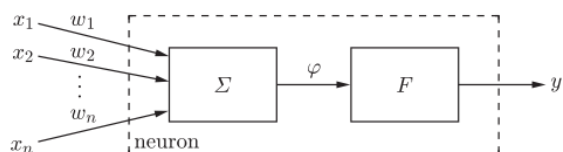
abstrakcyjne i inne. Wydawałoby się naturalne, że neurony powinny wyspecjalizować się w obsłudze różnych funkcji. W kwietniu 2000 roku zespół neurobiologów z MIT opublikował w czasopiśmie *Nature* wyniki nadzwyczajnego eksperymentu. Zmienili oni układ połączeń w mózgu fretki, zamieniając połączenia nerwowe oczu z częścią kory mózgowej odpowiedzialnej za słuch, a połączenia nerwowe wychodzące z uszu do części kory odpowiedzialnej za widzenie. Mózg fretki szybko przystosował się do nowej sytuacji – nie zauważono żadnej straty zarówno w odczuciu bodźców wzrokowych, jak i słuchowych. Wynika z tego, że wszystkie neurony działają tak samo, a połączenia w sieci neuronowej dopasowują się do funkcji, które mają obsługiwać. Jest to wskazówka, że modele mózgu można budować z tych samych elementów, a trening służy do ustanowienia połączeń, zależnych od modelowanej funkcji. Można postawić pytanie: jaki powinien być najprostsz model sieci neuronów i połączeń między nimi, aby mógł służyć do zbudowania relacji między danymi i wynikami danego typu?

Model sieci neuronowych, przedstawiony znacznie wcześniej od propozycji neurobiologów z MIT (Model Hebba zaproponowany był w latach 40. XX wieku, model perceptronu w latach 60.), zakłada, że neurony działają tak samo, a różnicowanie działalności sieci jest określone przez połączenia między neuronami. Sieci neuronowe składają się z neuronów w warstwie wejściowej, warstwach pośrednich i warstwie wyjściowej.

Pełniejszy opis można znaleźć w artykule K. Ambroch *Sztuczne sieci neuronowe*, MSN, Nr 32 (2004) <http://www.smp.uph.edu.pl/msn/32/ambroch.pdf>. Wykresy pochodzą z tej samej publikacji.



Pojedynczy neuron przetwarza wektor sygnałów wejściowych x wymiaru n na sygnał wyjściowy y (n jest liczbą neuronów w warstwie wcześniejszej). Na podstawie danych x w bloku sumowania Σ obliczana jest wartość $\varphi = w^T x = \sum_i w_i x_i$, a następnie sygnał ten jest przetwarzany przez funkcję aktywacji F . Wielkości w_{ij} nazywane są wagami połączeń.



Funkcja aktywacji w zasadzie powinna mieć postać funkcji progowej $F(\varphi) = 1_{[\varphi > \varphi_0]}$. Zazwyczaj jest zastępowana przez różniczkowalne sigmoidalne funkcje rosnące o asymptotach poziomych 1 i 0 (odpowiednio w ∞ i $-\infty$). Przyjmuje się, że w sieci występuje jeden rodzaj funkcji aktywacji. Czy tak ubogie sieci mogą być uniwersalne?

Uniwersalne twierdzenie aproksymacyjne

Sieci o jednym wyjściu modelują obliczanie wartości funkcji, a neurony reprezentują funkcje aproksymujące. W problemie aproksymacji chcemy jak najbogatszą rodzinę funkcji przybliżyć za pomocą jak najprostszej, łatwo zdefiniowanej rodziny funkcji. W 1885 roku Karl Weierstrass udowodnił twierdzenie, że każda ciągła funkcja z domkniętego odcinka jest jednostajną granicą ciągu wielomianów. Twierdzenie to było uogólniane na wiele sposobów, dobierano różne rodziny funkcji, aby przyspieszyć zbieżność czy powiększyć rodzinę funkcji aproksymowanych. We wszystkich tych przypadkach rodzina funkcji aproksymujących była nieskończona.

Spośród 23 problemów, które David Hilbert przedstawił na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1900 roku w Paryżu, 13. problem dotyczy istnienia rozwiązań wielomianów stopnia 7. będących algebraiczną (wariant: ciągłą) funkcją dwóch zmiennych. Pytanie to można (w nieoczywisty sposób!) uogólnić: *Czy każda ciągła funkcja trzech zmiennych jest złożeniem skończonej liczby ciągłych funkcji dwóch zmiennych?*

W 1957 roku 19-letni uczeń, Władimir Arnold, korzystając z pięknego twierdzenia Kołmogorowa (*każda ciągła funkcja wielu zmiennych jest złożeniem skończonej liczby funkcji trzech zmiennych*), odpowiedział twierdząco na to pytanie.

Później Kołmogorow wykazał, że ciągła funkcja wielu zmiennych może być przedstawiona za pomocą operacji złożenia i dodawania funkcji tylko jednej zmiennej.

Z twierdzeń tych wynika, że w problemie aproksymacji można użyć skończonej liczby funkcji. Dopiero twierdzenie Cybenki (nazywane uniwersalnym twierdzeniem aproksymacyjnym) z roku 1989 pokazało, jak uniwersalne są sieci neuronowe.

Twierdzenie (Cybenko). *Niech F będzie ciągłą funkcją sigmoidalną. Skończone sumy postaci $G(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j F(w_j^T x + \theta_j)$ są gęste w przestrzeni funkcji ciągłych n zmiennych na kostce jednostkowej.*

Powyższe twierdzenie pokazuje, że sieć z jedną warstwą wewnętrzną, z dowolną ciągłą funkcją aktywacji, może z zadaną dokładnością aproksymować funkcję ciągłą. W tej samej pracy Cybenko wykazał, że twierdzenie to jest również prawdziwe, gdy mamy do czynienia z zagadnieniem klasyfikacji (a więc: gdy funkcja celu jest stała na podzbiorach stanowiących skończony podział kostki w \mathbb{R}^n).

W praktyce używane są **głębokie sieci neuronowe** składające się z wielu warstw. Pozwala to na szybszą

optymalizację sieci, szczególnie gdy warstwa wyjściowa składa się z wielu neuronów. Ostatnio nawet Google zamienił swój algorytm oceny wyników przeszukiwania sieci *PageRank* na wersję *RankBrain*, opartą na głębokich sieciach neuronowych.

Uczenie sieci

O potęgze sieci neuronowych decyduje uczenie sieci. Po wprowadzeniu danych x na wejście sieci z zadany układem wag oblicza się wyjście y . Wartość wyjścia jest oceniana w zależności od metody uczenia. Tak otrzymany błąd wyniku y jest podstawą do korekty wag. Ta korekta jest tym, co określamy uczeniem sieci.

Podstawowym algorytmem korekty wag jest **propagacja wsteczna**. Model sieci neuronowej da się opisać przez funkcję wielu zmiennych mierzącą dopasowanie sieci. Na przykład w uczeniu nadzorowanym funkcja ta mierzy różnicę między wynikiem, otrzymanym z sieci, a wzorcem. Tymi zmiennymi są wagi połączeń między neuronami. Dobra sieć to taka, w której funkcja dopasowania osiąga wartość bliską optymalnej. Propagacja wsteczna w klasycznej postaci to nic innego jak metoda najszybszego spadku. Wagi połączeń korygują się w kierunku gradientu funkcji dopasowania, obliczonego dla ostatnio zadanych danych x . Dysponując dużą liczbą dobrze dobranych zestawów, wagi połączeń zbliżają się do swoich wartości optymalnych, a więc sieć staje się coraz bardziej dopasowana do zestawu danych uczących.

Postęp w budowaniu sieci neuronowych polega na eksperymentowaniu z różnymi funkcjami aktywacji, zmianą algorytmu optymalizacji w propagacji wstecznej (np. stochastyczna metoda najszybszego spadku czy metoda dropout), wreszcie dopasowywaniem architektury sieci. Ostatnio do tego celu używa się algorytmów genetycznych (*neuroevolution*), gdzie w jednym przebiegu poprawia się nie tylko wagi połączeń, ale i architekturę sieci metodami algorytmów genetycznych.

Wady sztucznej inteligencji

W chórze zachwytów nad osiągnięciami sztucznej inteligencji nie powinno zabraknąć refleksji nad błędami spowodowanymi niewłaściwą konstrukcją algorytmu sztucznej inteligencji, jak i jego niewłaściwym wykorzystaniem.

Przeuczenie. Zjawisko to występuje wtedy, gdy zbiór danych treningowych jest zbyt mało zróżnicowany. Model jest wtedy zbyt dopasowany do specyficznych danych i staje się mało elastyczny.

Firma Microsoft umieściła w sieci *czatbota* Tay, mającego wygląd kilkunastoletniej dziewczyny, który brał udział w dyskusjach młodych ludzi w wieku 15–24 lat na Twitterze. Jednak w ciągu doby został „zdeprawowany” przez uczestników, nauczony terminologii rasistowskiej i seksistowskiej. Nie minęła doba, a Microsoft musiał usuwać rasistowskie tweety,

wreszcie zamknąć działanie czatbota, wysyłając rozpaczliwy tweet o treści: *c u soon humans need sleep now so many conversations today thx.*

Program *Compas*, używany przez sądy amerykańskie, pomagający wydawać wyroki, sugerował wyższe wyroki dla Afroamerykanów. Jego trening został oparty na analizie rozpatrywanych spraw, gdzie dominowały sprawy Afroamerykanów z udziałem dużej liczby recydywistów.

Problemy prawne. Korzystanie ze sztucznej inteligencji przysparza nowych problemów prawnych. Oto kilka przykładów:

- Lekarz wydaje diagnozę w oparciu o system ekspercki. Kto ponosi odpowiedzialność, gdy system się pomyli?
- Jeżeli system ekspercki jest uznany za bardziej wiarygodny od człowieka, czy lekarz jest zobowiązany do uwzględnienia wskazań systemu?
- Jeżeli transakcja została wykonana w czyimś imieniu przez wirtualnego agenta, to kto jest odpowiedzialny w przypadku straty?
- Czy jest możliwe, aby inteligentny agent był posiadaczem akcji i mógł przeprowadzać transakcje w swoim imieniu?
- Kto odpowiada za wypadki samochodów autonomicznych: właściciel, twórca oprogramowania, producent?

Technologiczna osobliwość. Jest to moment stworzenia silnych sztucznych inteligencji, które mogłyby opracowywać jeszcze wydajniejsze sztuczne inteligencje, wywołując lawinowe zmiany w technologii i społeczeństwie

Wywiad w *Wysokich obcasach* z dnia 23.07.2016 *Gazety Wyborczej*: *Zbliżamy się do momentu, w którym być może będziemy musieli oddać koronę władców świata* www.wysokieobcasy.pl/wysokie-obcasy/1,53662,20432293,technologiczna-osobliwosc-zblizamy-sie-do-momentu-w-ktorym.html. Ciekawe, czy kiedykolwiek doczekamy się takiego momentu w dziejach ludzkości?

Na konferencji sztucznej inteligencji w Puerto Rico (2015) zadano pytanie ekspertom: kiedy, z prawdopodobieństwem 50%, sztuczna inteligencja osiągnie ludzki poziom? Połowa ekspertów odpowiedziała, że najwcześniej w 2045 roku, ale niektórzy z nich twierdzili, że trzeba będzie czekać na to więcej niż 100 lat.

Twórca terminu *sztuczna inteligencja*, John McCarthy, wraz z bardzo utytułowanymi kolegami (Marvin Minsky, Nathaniel Rochester i Claude Shannon) twierdzili (w roku 1956, w epoce komputerów epoki kamiennej): *W ciągu dwóch miesięcy zespół 10 ludzi może znaleźć rozwiązanie takich problemów jak maszynowe tłumaczenie, automatyczne tworzenie pojęć abstrakcyjnych i rozwiązywanie niektórych problemów zarezerwowanych dla ludzi.*

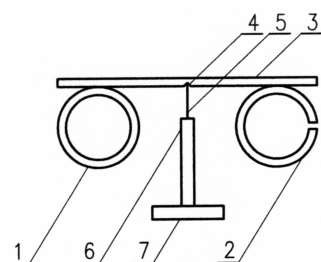
Ta krzepiąca przepowiednia pozwala mi sądzić, że jeszcze długo czekać będziemy na moment technologicznej osobliwości w wydaniu sztucznej inteligencji.

Pijany magnes w magicznych okularach

Stanisław BEDNAREK

Wiele zjawisk fizycznych udaje się pokazać, wykonując doświadczenia przy użyciu środków, którymi posługujemy się w życiu codziennym. Można tego dokonać na dwa sposoby. Pierwszy z nich to ten znany z podręczników – na ogół mało interesujący. Drugi to sposób niestandardowy, pozwalający zadziwić widzów, a czasem nawet samego wykonawcę. W ten właśnie sposób potraktujemy dziś zjawisko indukcji elektromagnetycznej. Znane z podręczników doświadczenie polega na wsuwaniu magnesu sztabkowego do cewki połączonej z miernikiem wskazówkowym. My jednak postąpimy inaczej.

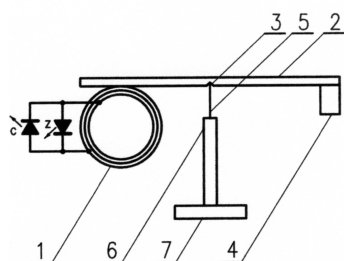
Przed przystąpieniem do doświadczeń należy przygotować: magnes neodymowy w kształcie krążka o średnicy około 20 mm i wysokości około 10 mm, kawałki listewki i deseczki, igłę do szycia ręcznego, aluminiowy ceownik (kształtownik mający przekrój litery C) o długości około 60 cm i szerokości 30 mm, kilkadziesiąt metrów drutu miedzianego o średnicy 0,1–0,2 mm w izolacji z emalii, plastikową szpulkę, np. od plastra medycznego, czerwoną i zieloną diodę LED, miedzianą lub aluminiową rurkę o długości około 1 m i średnicy wewnętrznej o 2–3 mm większej niż średnica magnesu oraz o możliwie grubej ścianie, rurkę plastikową o takich samych rozmiarach oraz klej epoksydowy. Przydadzą się też spotykane niemal w każdym domu narzędzia – piłka z brzeszczotami do drewna i metalu, wiertarka i lutownica.



Rys. 1. Budowa przyrządu okularowego; 1 – pierścien miedziany, 2 – pierścien miedziany z przecięciem, 3 – listewka, 4 – zagłębienie, 5 – igła, 6 – słupek, 7 – deseczka.

Pracę rozpoczynamy od zbudowania prostego przyrządu przedstawionego na rysunku 1. Z rurki miedzianej lub aluminiowej odcinamy dwa pierścienie o szerokości około 1 cm i jeden z nich przecinamy na obwodzie. Oba pierścienie przyklejamy symetrycznie klejem epoksydowym do listewki o długości około 30 cm blisko jej końców. W połowie długości listewki nawiercamy małe zagłębienie. Na końcu innego kawałka listewki wiercimy otworek, skierowany podłużnie i mocujemy w nim za pomocą kleju koniec igły zakończony otworkiem. Drugi koniec tej listewki łączymy z deseczką. W ten sposób otrzymujemy podstawkę z ostrzem igły, na którym opieramy listewkę z pierścieniami. Ostrze powinno wchodzić w zagłębienie, a listewka zajmować pozycję poziomą i swobodnie się obracać. Ewentualne pochylenie listewki usuwamy, dociążając (np. klejem) unoszący się koniec. Gotowy przyrząd bardzo przypomina binokle, czyli używane dawno temu okulary – stąd jego nazwa.

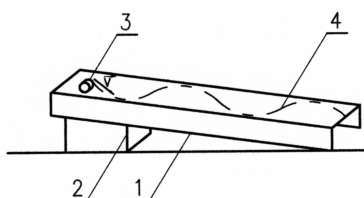
Czas na pierwsze doświadczenia. Do nieruchomego pierścienia bez przecięcia zbliżamy magnes, ustawiając jego płaską powierzchnię równoległą do płaszczyzny pierścienia. Zauważamy, że pierścien odsuwa się od magnesu. Gdy magnes odsuwamy od pierścienia, wtedy podąża on za magnesem. To samo wykonujemy dla pierścienia z przecięciem. Tym razem, zarówno przy zbliżaniu, jak i oddalaniu magnesu, pierścien pozostaje nieruchomy. Odwracamy magnes i powtarzamy doświadczenie podczas zbliżania i oddalania przeciwnego bieguna. Efekty są takie same. Dlaczego tak się dzieje? W odpowiednich tablicach fizycznych możemy sprawdzić, że miedź jest diamagnetykiem, więc powinna być wypychana z silniejszego pola, istniejącego w sąsiedztwie zbliżanego magnesu. No dobrze, ale dlaczego podczas oddalania magnesu obserwujemy przyciąganie pełnego pierścienia, a pierścien z przecięciem pozostaje nieruchomy? Przecież zawiera on prawie taką samą ilość miedzi? Przyczyną tych efektów jest indukowany w pierścieniu prąd elektryczny. Jego kierunek przepływu określa reguła Lenza. Zgodnie z nią kierunek indukowanego prądu jest taki, że pole magnetyczne, wytworzone przez ten prąd, przeciwdziała zmianom pola magnetycznego, które przyczyniły się do powstania tego prądu. Niech, na przykład, do pierścienia będzie zbliżany północny biegun magnesu. Wtedy przepływ prądu indukowanego w pierścieniu odbywa się w takim kierunku, żeby od strony magnesu wytworzony został też biegun północny. Jednoimienne bieguny odpychają się i pierścien jest odsuwany od magnesu. Pierścien możemy tutaj traktować jako krótki magnes. W przeciętym pierścieniu prąd nie płynął,



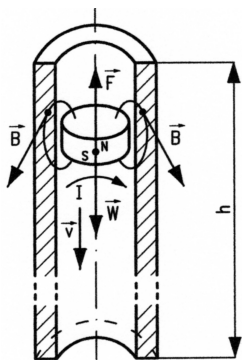
Rys. 2. Modyfikacja przyrządu okularowego; 1 – cewka, 2 – listewka, 3 – wgłębienie, 4 – przeciwciężarek, 5 – igła, 6 – słupek, 7 – deseczka, c, z – diody LED odpowiednio: czerwona i zielona.

więc pierścień ten pozostawał nieruchomy. Oddziaływanie diamagnetyczne między pierścieniami i magnesem też istnieje, ale jest ono zbyt słabe i nie zdoła powodować zauważalnych efektów. Żeby doświadczenie było bardziej zadziwiające, szczelina w przeciętym pierścieniu powinna być jak najmniej widoczna – można ją zamaskować przez wsunięcie przyciętego kawałka tektury.

Czytelnikowi pozostawiamy szczegółowe zbadanie, jakie są relacje między kierunkiem ruchu wybranego biegunu magnesu i kierunkiem przepływu prądu w układzie na rysunku 2, sygnalizowanym odpowiednim kolorem świecącej diody oraz jak zależy to od kierunku włączenia diody i nawinięcia cewki. Dodajmy tylko, że dioda czerwona może świecić jaśniej lub zapalać się wcześniej, ponieważ jest wykonana z innego półprzewodnika (o niższej przerwie energetycznej). Dociekliwy Czytelnik zapyta też, czy zamiast nawijać cewkę można przyłączyć diody bezpośrednio do końców przeciętego pierścienia i zaobserwować świecenie? Niestety, to doświadczenie się nie uda, ponieważ napięcie indukowane w pojedynczym zwoju, którym jest pierścień, wynosi kilka mV, a dioda do zaświecenia potrzebuje napięcia około 1,5 V lub wyższego.



Rys. 3. Sposób przygotowania równi pochyłej; 1 – ceownik aluminiowy, 2 – podstawka, 3 – magnes neodymowy, 4 – tor magnesu, \vec{v} – początkowa prędkość magnesu.



Rys. 4. Siły działające na magnes poruszający się w rurce: h – długość rurki, \vec{W} – ciężar magnesu, \vec{B} – indukcja pola magnetycznego, I – natężenie indukowanego prądu, \vec{F} – siła elektrodynamiczna, \vec{v} – prędkość magnesu, N, S – bieguny magnesu.

Zmiany kierunku prądu pozwala wykazać zmodyfikowana wersja przyrządu okularowego, którą pokazuje rysunek 2. Zamiast pierścieni do listewki przyklejone są cewka i przeciwiężarz. Cewkę wykonujemy, nawijając kilkadziesiąt zwojów miedzianego izolowanego drutu na plastikowej szpulce o średnicy wewnętrznej nieco większej niż średnica magnesu. Z końców cewki usuwamy izolację i przylutowujemy do nich końcówki diod, ustawionych w ten sposób, żeby ich kierunki przewodzenia były przeciwne. W tym celu składamy parami dłuższe oraz krótsze końcówki diod i lutujemy je do końców cewki. Następnie cewkę przyklejamy w pobliżu jednego końca listewki, a na drugim końcu mocujemy przeciwiężarek z nieferromagnetycznego materiału, zapewniający poziomą pozycję listewki. Jeżeli zbliżymy magnes do cewki, to będzie ona odpychana od niego i zaświeci jedna z diod. Podczas oddalania cewka podąża za magnelem i świeci druga dioda. Podobnie jak poprzednio, przyczyną tych efektów są prądy indukowane w cewce i ich oddziaływanie z magnelem.

Układ do wykonania kolejnych doświadczeń jest bardzo prosty (rys. 3). Aluminiowy ceownik odwracamy ramionami w dół i opieramy ukośnie na nieferromagnetycznej podstawie, np. złożonej z kilku książek lub kawałków deseczki. Przy górnym końcu otrzymanej w ten sposób równi pochyłej ustawiamy magnes, tak aby mógł staczać się wzdłuż krawędzi ceownika i puszczamy swobodnie. Magnes stacza się w dół, ale bez trudu można zauważyć, że odbywa się to bardzo powoli – znacznie wolniej niż w przypadku zwykłego krążka. Powtórzmy to doświadczenie, puszczając magnes ustawiony skośnie do krawędzi ceownika. Tym razem magnes zachowuje się jeszcze dziwniej. Wbrew oczekiwaniu magnes nie spada z krawędzi ceownika, tylko zbliżając się do niej, zawraca, poruszając się pomiędzy krawędziami po linii falistej, niczym osobnik po kilku większych drinkach. Przyczyną hamowania magnesu jest jego odpychające oddziaływanie z prądami indukowanymi w ceowniku, podobnie jak w pierścieniach przyrządu okularowego. To oddziaływanie powoduje też zmiany kierunku ruchu magnesu przy zbliżaniu się do krawędzi ceownika. W znajdujących się od dołu ramionach ceownika indukowane są wtedy prądy o większym natężeniu. Zgodnie z podaną regułą Lenza, gdy zbliża się, na przykład, północny biegun magnesu, to prąd płynie w takim kierunku, że przed ramieniem też pojawia się biegun północny i magnes jest odpychany.

W ostatniej serii doświadczeń wykorzystamy rurki. Najpierw wkładamy magnes do górnego końca pionowo ustawionej rurki plastikowej. Zauważamy, że magnes szybko przelatuje przez rurkę. Hamujące działanie oporu powietrza jest prawie niezauważalne. Łatwo obliczyć, ze znanego wzoru $t = \sqrt{2h/g}$ (gdzie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ to przyspieszenie ziemskie), że czas t spadania magnesu z wysokości $h = 1 \text{ m}$ wynosi 0,45 s. Czas spadania magnesu w plastikowej rurce o długości 1 m jest niewiele większy. Czytelnikowi o szybkim refleksie może jednak uda się go zmierzyć przy użyciu stopera. Powtarzamy to doświadczenie z rurką miedzianą lub aluminiową (rys. 4). Tym razem czas spadania magnesu wielokrotnie wzrasta i może wynieść nawet ponad 20 s. Taki czas bez trudu daje się zmierzyć stoperem. Dla grubociennej rurki miedzianej czas ten bywa jeszcze większy i oglądający doświadczenie mogą pomyśleć, że pijany magnes zasnął w rurce. W rzeczywistości ciężar magnesu jest równoważony przez siłę elektrodynamyczną, spowodowaną przepływem prądu elektrycznego w ściankach rurki. Prąd ten jest indukowany wskutek ruchu magnesu i osiąga duże natężenie dzięki małej oporności właściwej miedzi lub aluminium i grubej ściance rurki. Ruch magnesu jest więc praktycznie jednostajny, poza początkowym i końcowym odcinkiem rurki. Tam, na granicy powietrza i metalu, siła elektrodynamiczna słabnie.

Stephen Hawking (1942–2018)

Sebastian J. SZYBKA*

*Obserwatorium Astronomiczne,
Uniwersytet Jagielloński



Rozwiązanie zadania M 1566.
Udowodnimy, że $k = n - 2$.

Oznaczmy krótko $A \rightarrow B$, jeżeli zawodnik A wygrał z zawodnikiem B , a trójkę zawodników (A, B, C) o tej własności, że $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ nazwijmy remisową (trójki (A, B, C) , (B, C, A) , (C, A, B) utożsamiamy).

Rozważmy turniej szachowy z udziałem zawodników $A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, X, Y$ o następujących wynikach:

- $X \rightarrow Y$;
 - $Y \rightarrow A_i \rightarrow X$ dla $i = 1, 2, \dots, n - 2$;
 - jeżeli $1 \leq i < j \leq n - 2$, to $A_i \rightarrow A_j$.
- Wówczas

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-2} \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow A_1,$$

więc opisany turniej spełnia założenia zadania (zawodnicy mogą usiąść przy okrągłym stole w określonej powyżej kolejności). W takim turnieju są dokładnie $n - 2$ trójki remisowe, mianowicie (A_i, X, Y) dla $i = 1, 2, \dots, n - 2$, co oznacza, że $k \leq n - 2$.

Dowód nierówności $k \geq n - 2$ przeprowadzimy indukcyjnie. Dla $n = 3$ jest dokładnie jedna trójka remisowa. Przypuśćmy, że liczba trójek remisowych w turnieju z n zawodnikami (których można odpowiednio usadzić przy okrągłym stole) jest nie mniejsza od $n - 2$, przy czym $n \geq 3$, i rozważmy dowolny turniej z $n + 1$ zawodnikami A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , w którym

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_1.$$

Jeżeli $A_{i+2} \rightarrow A_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n + 1$ (gdzie $A_{n+2} = A_1$ oraz $A_{n+3} = A_2$), to każda z trójek (A_i, A_{i+1}, A_{i+2}) jest remisowa, więc jest ich co najmniej $n + 1$ (w szczególności więcej niż $n - 1$).

W przeciwnym przypadku istnieje takie i , że $A_i \rightarrow A_{i+2}$; bez straty ogólności (ewentualnie cyklicznie przenumerozując zawodników) przypuśćmy, że $i = n$. Wówczas z założenia indukcyjnego wynika, że A_1, A_2, \dots, A_n tworzą co najmniej $n - 2$ różne trójki remisowe. Wystarczy więc wykazać, że istnieje trójka remisowa, do której należy zawodnik A_{n+1} . Istotnie, skoro $A_{n+1} \rightarrow A_1$ oraz $A_n \rightarrow A_{n+1}$, to istnieje takie j ($1 \leq j \leq n - 1$), że

$$A_{j+1} \rightarrow A_{n+1} \rightarrow A_j,$$

na przykład $j = \min\{\ell : A_\ell \rightarrow A_{n+1}\} - 1$ i trójka (A_j, A_{j+1}, A_{n+1}) jest wówczas remisowa. To kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

Penrose pokazał, iż osobliwości wewnątrz czarnych dziur powstają bez względu na stopień „symetryczności” kolapsującej materii.

Pamiętajcie, aby patrzeć w górę na gwiazdy, a nie w dół na swoje stopy. Starajcie się zrozumieć to, co widzicie i zastanawiajcie się, dlaczego Wszechświat istnieje. Bądźcie ciekawi. Jakkolwiek życie wyda się wam trudne, zawsze jest coś, co możecie zrobić i co może się wam udać. Liczy się to, że się nie poddajecie.

Stephen Hawking

14 marca 2018 roku zmarł Stephen Hawking – wybitny fizyk teoretyk, kosmolog, relatywista, ale także autor popularnonaukowych książek sprzedanych w dziesiątkach milionów egzemplarzy. Miał 76 lat. Trudno byłoby znaleźć bardziej rozpoznawalną sylwetkę wśród współczesnych osobistości świata naukowego. Umysł Hawkinga, oczarowany tajemnicą istnienia i wbrew ograniczeniom ciała swobodnie wędrujący po Wszechświecie, na zawsze pozostanie symbolem triumfu myśli nad materią.

Stephen Hawking urodził się w Oksfordzie w Wielkiej Brytanii w 1942 roku. Jego ojciec Frank Hawking i matka Isobel (z domu Walker) byli absolwentami miejscowego uniwersytetu. Ojciec prowadził badania medyczne dotyczące chorób tropikalnych, natomiast matka studiowała ekonomię, politologię i filozofię. Gdy młody Stephen miał osiem lat, jego rodzina przeprowadziła się z Oksfordu do odległego o 90 km St Albans. Tam też uczęszczał do szkoły. Stypendium, które zdobył, umożliwiło mu rozpoczęcie studiów fizyki w Oksfordzie. Studia ukończył w roku 1962.

Hawking zapragnął kontynuować swoją naukową przygodę w Trinity Hall (Cambridge) pod okiem kosmologicznej gwiazdy owych czasów: Freda Hoyle’a. Składając dokumenty, nie wiedział, że to właśnie z Cambridge będzie związane całe jego naukowe życie. Zrządzenie losu sprawiło, że opiekunem doktoratu zamiast Hoyle’a został mało jeszcze wtedy znany Dennis Sciama. Sciama okazał się doskonałym promotorem. W latach sześćdziesiątych grupa Sciama oprócz Hawkinga składała się z George’a Ellisa, Brandona Cartera, Martina Reesa (inni późniejsi sławni wychowankowie Sciamy to Gary Gibbons i John D. Barrow).

Tuż po 21 urodzinach nadeszła wiadomość, która zdawała się przekreślać naukową karierę Hawkinga: okazało się, że jest nieuleczalnie chory. Postępujące stwardnienie zanikowe boczne to choroba neurodegeneracyjna powodująca śmierć przeważnie w ciągu kilku lat. Stephen Hawking, wbrew opiniom specjalistów, od momentu usłyszenia diagnozy żył jeszcze 55 lat. Większość swego życia spędził na wózku inwalidzkim.

W latach sześćdziesiątych teoria grawitacji Einsteina miała już pół wieku. Jednym z zagadkowych aspektów tej teorii, który od samego początku jej istnienia utrudniał fizyczną interpretację rozwiązań równań Einsteina, był problem osobliwości – miejsc lub zdarzeń, w których gęstość energii i krzywizna czasoprzestrzeni stają się nieskończone. Einstein i inni wielcy tych wczesnych lat, opierając się na analogiach ze znanymi im teoriami, odrzucali rozwiązania osobliwe jako нефizyczne. Nic w tym dziwnego – osobliwości mogą pojawić się nawet w teorii Newtona jako skutki uboczne zbyt uproszczonego modelowania lub sztucznie narzuconej wysokiej symetrii rozwiązań. Przypuszczano, iż osobliwości wewnątrz czarnych dziur i ta kosmologiczna są właśnie takimi artefaktami. Prawdziwy kolaps do czarnej dziury nie jest dokładnie sferycznie symetryczny, a rzeczywisty Wszechświat nie jest idealnie jednorodny. Oba uproszczenia były niezbędne do przeprowadzenia obliczeń i nie było wiadomo, jak sprawdzić, co dzieje się w bardziej realistycznych sytuacjach. W roku 1965 Roger Penrose, dzięki zastosowaniu nowatorskich metod matematycznych, udowodnił twierdzenie, z którego wynikało, iż osobliwości wewnątrz czarnych dziur nie są artefaktem upraszczających założeń. Innymi słowy, teoria grawitacji Einsteina przewiduje, iż we Wszechświecie istnieją zdarzenia lub miejsca, w których równania tej teorii załamują się. Stephen Hawking zmodyfikował i udoskonalił twierdzenie Penrose’a tak, aby w naturalny sposób dało się je

Matematyka Pogranicza

15–17 czerwca 2018

Białystok



Matematyka Pogranicza jest konferencją interdyscyplinarną, popularyzującą zastosowania i obecność matematyki w różnych dziedzinach naszego życia i środowiska – w architekturze, sztuce, przyrodzie, kosmosie, muzyce i wielu innych obszarach. Konferencja jest skierowana do szerokiego grona odbiorców. Jej zadaniem jest łączenie środowisk po obu stronach wschodnich granic Polski i jednocześnie szukanie pomostu między matematyką i innymi dziedzinami. Konferencja Matematyka Pogranicza będzie okazją do wszelakich rozmów i dzielenia się wiedzą różnych środowisk, w szczególności nauczycieli i matematyków ze wschodniego pogranicza Polski. Zapraszamy do udziału wszystkich zainteresowanych (nauczycieli szkolnych i akademickich nie tylko matematyki, historyków, architektów, muzyków oraz uczniów i studentów) z Polski i krajów sąsiadujących od strony wschodniej: Litwy, Ukrainy, Białorusi, Rosji, z zachodniej i południowej strony również.

mp.wi.pb.edu.pl

Według Hawkinga temperatura czarnej dziury (tu dla uproszczenia sferycznej czarnej dziury Schwarzschilda) jest odwrotnie proporcjonalna do jej masy M , i równa się

$$k_B T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M}$$

gdzie \hbar jest zredukowaną stałą Plancka, c prędkością światła w próżni, k_B stałą Boltzmanna, a G stałą grawitacyjną Newtona. Temperatura czarnej dziury o masie Słońca wynosi jedynie $6,2 \cdot 10^{-8}$ K.

zastosować do zagadnienia początkowej osobliwości. W pracach tych brali udział również Charles Misner, Robert Geroch i Brandon Carter. Pokazały one, iż istnienie Wielkiego Wybuchu jest naturalną konsekwencją teorii Einsteina i że równania tej teorii nie wystarczają do opisu chwili początkowej. W roku 1970 Stephen Hawking opublikował wspólnie z Rogerem Penrosem udoskonaloną wersję twierdzenia o osobliwościach.

Innym ważnym zagadnieniem, do którego zrozumienia przyczynił się Stephen Hawking, jest problem jednoznaczności czarnych dziur. Współczesna astronomia dostarcza nam wielu obserwacji przemawiających za istnieniem tych obiektów we Wszechświecie. Skala ich mas imponuje: od czarnych dziur gwiazdowych o kilku masach Słońca do obiektów galaktycznych o masach rzędów dziesiątek miliardów mas Słońca. Począwszy od roku 1967, właściwie do dzisiaj trwają badania nad twierdzeniami o jednoznaczności czarnych dziur. Nad zagadnieniem tym pracowało i nadal pracuje wielu fizyków. Jednym z nich był Stephen Hawking. Twierdzenia o jednoznaczności implikują, iż wszystkie czarne dziury, zarówno małe, jak i te gigantyczne, opisywane są przez to samo rozwiązanie równań Einsteina: odkrytą w 1963 roku czasoprzestrzeń Kerrą. Rozwiązanie Kerrą w odniesieniu do obiektów astrofizycznych zależy tylko od dwóch parametrów: masy i krętu. W roku 1973 Stephen Hawking uzasadnił podstawowe założenie pojawiające się w twierdzeniach o jednoznaczności. Wykazał on, że rotujące czarne dziury muszą mieć symetrię osiową. Co więcej, udowodnił, że jeżeli horyzont czarnej dziury (powierzchnia, po przekroczeniu której nie można się już z czarnej dziury wydostać) składa się z jednego „kawałka”, to musi on mieć kształt przypominający sferę (tzw. topologię sfery).

Twierdzenie o osobliwościach i twierdzenia o jednoznaczności czarnych dziur to tylko dwa przykładowe ważne zagadnienia, nad którymi pracował Stephen Hawking. W 1968 r. Stephen Hawking pokazał, jak w teorii Einsteina zdefiniować globalny czas. Trzy lata później udowodnił w ramach teorii klasycznej, iż bez względu na to, co wpadnie do czarnej dziury, pole powierzchni jej horyzontu nie może zmaleć. W tym samym roku razem z Garym Gibbonssem przedstawił jedną z pierwszych prac na temat analizy sygnałów fal grawitacyjnych. W roku 1973 wspólnie z Georgem Ellisem napisał książkę *The Large Scale Structure of Space-Time*. Książka ta do dzisiaj stanowi obowiązkową pozycję w bibliotece każdego relatywisty. Nie sposób wyliczyć wszystkich osiągnięć Hawkinga. Warto wspomnieć o szczególnie ważnym dla niego wzorze, który udało mu się wyprowadzić w roku 1974. Wiele lat temu na zakończenie spotkania zorganizowanego z okazji 60 urodzin Hawking wyraził życzenie, aby ten wzór został wryty na jego grobie.

Rok 1974 rozdziela dwa okresy w życiu naukowym Hawkinga: klasyczny i kwantowy. W roku 1972 Jacob Bekenstein przedstawił hipotezę, iż powierzchnia horyzontu czarnej dziury jest miarą zawartej w niej entropii (entropia to wielkość, za pomocą której fizycy mierzą „bałagan”, czyli ilość informacji zawartej w układzie). Drugie prawo termodynamiki implikuje, iż entropia układu izolowanego nie może maleć. Twierdzenie Hawkinga z roku 1971 pokazuje, że pole powierzchni horyzontu również nie może maleć. Ta analogia, według Bekensteina, sugerowała związek między dwiema wielkościami: entropią i powierzchnią horyzontu. Hipoteza Bekensteina spotkała się z dezaprobatą Hawkinga i jego kolegów. Przecież entropia związana jest z temperaturą, a skoro klasyczne czarne dziury nie emitują promieniowania, to ich temperatura wynosi dokładnie zero. Hawking, próbując wykazać błędność hipotezy Bekensteina, w pomysłowy sposób połączył procedury kwantowej teorii pola i teorii grawitacji Einsteina. Ku swojemu zaskoczeniu odkrył, iż czarne dziury nie są całkiem czarne – efekty kwantowe powodują, iż promieniają! To oznacza, że mają niezerową temperaturę i że można przypisać im entropię. Hawkingowi udało się wyprowadzić wzór

$$S = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A$$

wiązący entropię czarnej dziury S z polem powierzchni jej horyzontu A .

Właśnie to osiągnięcie uważał za jedno z najważniejszych w swoim życiu. Odkrycie Hawkinga zostało opublikowane w *Nature*. Promieniowanie czarnych dziur określa się mianem promieniowania Hawkinga.

Jeśli najbliższe czarne dziury mają masę rzędu kilku mas Słońca, to promieniowanie Hawkinga jest zbyt słabe, aby mogło zostać zaobserwowane w przewidywalnej przyszłości. Mimo to jest ono bardzo ważne dla teoretyków – prawdopodobnie stanowi klucz do pogodzenia dwóch fundamentalnych teorii fizycznych: mechaniki kwantowej i teorii grawitacji Einsteina. Z twierdzenia o osobliwościach wynika, że teoria grawitacji Einsteina nie wystarcza do opisu całego Wszechświata. Wiele osób przypuszcza, iż teoria kwantowej grawitacji wypełni luki teorii Einsteina. Praca Hawkinga z 1974 roku oraz wyniki uzyskane rok wcześniej wraz z Brandonem Carterem i Jamesem Bardeenem ujawniły szereg zaskakujących analogii między zachowaniem czarnych dziur i podstawowymi prawami termodynamiki. Przypuszcza się, iż teoria kwantowej grawitacji pozwoli zrozumieć termodynamikę czarnych dziur, tak jak fizyka statystyczna pozwoliła wyprowadzić z fundamentalnych zasad prawa termodynamiki klasycznej.

Odkrycie Hawkinga z roku 1974 sprawiło, iż skoncentrował on swoje zainteresowania na próbach pogodzenia teorii kwantowej z grawitacją. Kwantowa grawitacja powinna rozwiązać problem osobliwości, zarówno tych we wnętrzach czarnych dziur, jak i osobliwości początkowej. W roku 1983 Hawking razem z Jamesem Hartlem zaproponował rozwiązanie problemu narodzin Wszechświata (osobliwość początkowa) za pomocą procedury zwanej *no-boundary proposal*. Propozycja ta wywołała różne problemy, których nie udało się rozwiązać do dzisiaj. Ostatni artykuł Hawkinga, ukończony tuż przed śmiercią, dotyczył właśnie tego zagadnienia.

Osiągnięcia naukowe Stephena Hawkinga zostały szybko docenione. W wieku 32 lat został wybrany na członka *Royal Society*. W roku 1979 objął *Lucasian chair of natural philosophy* – pozycję profesorską, którą 310 lat wcześniej piastował sam Izaak Newton. Sława Hawkinga nie ograniczała się wyłącznie do świata naukowego. Dla wielu osób Stephen Hawking był znany jako autor bijącej rekordy popularności książki *Krótką historia czasu*. Książka ta została przetłumaczona na ponad 35 języków. Sprzedano ponad 10 milionów egzemplarzy.

Pomimo ciężkiej choroby Stephen Hawking nie stronił od aktywnego życia – odwiedził biegun południowy, doświadczył lotu samolotem w „zerowej grawitacji”, spotykał się z ciekawymi ludźmi, bywał w operze i na koncertach, współpracował z telewizją i kinem, gwiazdami muzyki. Często publicznie wypowiadał swoje opinie na tematy dotyczące wiary, przyszłości naszej cywilizacji i zagrożeń, które przed nami stoją. Sława nie przytłaczała go, lecz zdawała się mu służyć. Jego poglądy naukowe dwukrotnie stały się przedmiotem publicznych zakładów. Po raz pierwszy w roku 1974 założył się z Kipem Thornem (noblistą z roku 2017) o to, czy czarne dziury istnieją. Gdyby nie istniały, nagroda wynagrodziłaby Hawkingowi czas, który poświęcił na ich badanie. W roku 1997 przedmiotem zakładu między Stephenem Hawkingiem i Kipem Thornem z jednej strony oraz Johnem Preskillem z drugiej stał się tzw. paradoks utraty informacji. Zgodnie z mechaniką kwantową informacja, która wpadnie do czarnej dziury, nie może zniknąć w niej na zawsze. W praktyce spór dotyczył tego, czy prawa mechaniki kwantowej wymagają modyfikacji (Hawking, Thorn), czy też nie (Preskill). Chociaż w roku 2004 Hawking przyznał się do przegranej, to argumenty Hawkinga nie przekonały Kipa Thorna ani większości środowiska naukowego. Zagadka pozostaje wciąż nierozwiązana.

Stephen Hawking był dwukrotnie żonaty. Z pierwszego małżeństwa miał trójkę dzieci: Roberta, Lucy and Timothy’ego. Zmarł w swoim domu w Cambridge.

Model Hartle’a–Hawkinga to propozycja rozwiązania problemu początkowej osobliwości. W tym modelu pytanie o to, co działo się przed Wielkim Wybuchem, nie ma sensu. Czas wylania się ze stanu, który zawierał wyłącznie przestrzeń.



Rozwiązanie zadania M 1565.

Udowodnimy, że odpowiednie zaplanowanie rozgrywek jest możliwe dla każdego $n \geq 2$.

Rozważmy ostrosłup prawidłowy

$(2n - 1)$ -kątny o podstawie

$A_1 A_2 \dots A_{2n-1}$ i wierzchołku S .

Ponumerujmy zawodników liczbami od 1

do $2n$ i ustalmy, że zawodnik o numerze

$2n$ w i -tej rundzie gra z zawodnikiem

o numerze i , a dla $1 \leq k < \ell \leq 2n - 1$

zawodnicy o numerach k i ℓ grają ze sobą

w i -tej rundzie wtedy i tylko wtedy, gdy

$A_k A_\ell \perp SA_i$.

Łatwo zauważyć, że to poprawnie

wyznacza przebieg rozgrywek: pary

zawodników grających w każdej z rund są

rozłączne, nie powtarzają się w różnych

rundach (każdy bok oraz każda przekątna

podstawy ostrosłupa jest prostopadła do

dokładnie jednego z odcinków SA_i) oraz

każda runda składa się z dokładnie $2n - 1$

partii.

Informatyczny kącik olimpijski (115): Gotówka, Startup

Tym razem omówimy dwa zadania, które na pierwszy rzut oka wyglądają podobnie, jednak w istocie są różne. Pierwsze z nich pochodzi z II etapu IX Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów, zaś drugie z Bałkańskiej Olimpiady Informatycznej Juniorów w 2015 roku.

Zadanie Gotówka: Danych jest n transakcji opisanych za pomocą ciągu liczb całkowitych $a = a_1, a_2, \dots, a_n$ (dodatnie liczby to wpływy, zaś ujemne to wydatki). Poprawnym ciągiem transakcji nazywamy taki, podczas którego stan konta nigdy nie spadnie poniżej zera. Ile jest permutacji ciągu a , które są poprawnymi ciągami transakcji?

Rozwiązanie $O(n! \cdot n)$

Pierwszy, najbardziej intuicyjny, pomysł polega na wygenerowaniu wszystkich $n!$ permutacji ciągu a oraz zliczeniu tych, które są poprawne. Sprawdzenie, czy dana permutacja transakcji jest poprawna, możemy wykonać w czasie liniowym od jej długości. Wystarczy, że sprawdzimy, czy suma każdego prefiksu jest nieujemna. Niestety, takie podejście jest czasochłonne i działa w czasie $O(n! \cdot n)$.

Rozwiązanie $O(n \cdot 2^n)$

W tym rozwiązaniu wykorzystamy technikę programowania dynamicznego. Niech $DP[s]$ oznacza liczbę poprawnych ciągów transakcji, które są permutacją ciągu s . Obliczmy wartość DP dla każdego podciągu $s = s_1, s_2, \dots, s_m$ ciągu a . Jeśli s jest pusty lub suma elementów podciągu s jest ujemna, wtedy $DP[s] = 0$. W przeciwnym przypadku istnieje przynajmniej jedna poprawna permutacja ciągu s . Aby obliczyć $DP[s]$, rozważmy m możliwości wybrania transakcji, która zostanie wykonana jako ostatnia. Liczba poprawnych ciągów transakcji, przy założeniu, że ostatnia transakcja to s_i , wynosi $DP[s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_m]$ (liczba poprawnych uporządkowań $m - 1$ pozostałych transakcji). Zatem:

$$DP[s] = \sum_{i=1}^m DP[s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_m].$$

Liczba poprawnych permutacji dla całego ciągu to $DP[a]$.

Ciąg a ma 2^n podciągów. Obliczenie $DP[s]$ dla i -elementowego podciągu s kosztuje i operacji, zaś i -elementowych podciągów jest $\binom{n}{i}$. Zatem obliczenie wszystkich wartości DP wymaga wykonania

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot i = n \cdot 2^{n-1}$$

operacji. Rozwiązanie działa w czasie $O(n \cdot 2^n)$.

Zadanie Startup: Dany jest ciąg n transakcji opisanych za pomocą ciągu liczb całkowitych $a = a_1, a_2, \dots, a_n$ (dodatnie liczby to wpływy, zaś ujemne to wydatki). Poprawnym ciągiem transakcji nazywamy taki, podczas którego stan konta nigdy nie spadnie poniżej zera. Ile jest rotacji ciągu a , które są poprawnymi ciągami transakcji? Rotacją ciągu a nazywamy n -elementowy ciąg, powstały poprzez konkatencję sufiksu i prefiksu ciągu a . Rotacjami ciągu $(1, 2, 3, 4)$ są: $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 4, 1, 2)$ i $(4, 3, 2, 1)$.

Rozwiązanie $O(n^2)$

Zauważmy, że wszystkich rotacji jest n (każdy element wyznacza początek rotacji). Wystarczy zatem każdą z nich rozpatrzyć niezależnie. Sprawdzenie, czy dana rotacja jest poprawnym ciągiem transakcji, możemy wykonać w czasie liniowym od jej długości. Wystarczy sprawdzić, czy suma każdego prefiksu jest nieujemna. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie, które działa w czasie $O(n^2)$.

Rozwiązanie $O(n \cdot \log(n))$

Zastanówmy się teraz, czy możemy przyspieszyć fazę sprawdzania, czy dana rotacja jest poprawnym ciągiem transakcji – oczywiście możemy. Zaczniemy od sklejenia dwóch kopii ciągu a w jeden ciąg b :

$$b = a_1, a_2, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Wówczas każda rotacja jest podslowem ciągu b .

Niech $p = p_0, p_1, p_2, \dots, p_{2n}$ będzie ciągiem sum prefiksowych dla ciągu b (tzn. $p_k = \sum_{i=1}^k b_i$).

Założmy, że chcemy sprawdzić poprawność rotacji $a_x, a_{x+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{x-1}$. Odpowiadającym podslowem słowa b jest $b_x, b_{x+1}, \dots, b_{x+n-1}$. Podslowo jest poprawnym ciągiem transakcji, jeśli każdy prefiks ma nieujemną sumę:

$$\forall_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i b_{x+j-1} \geq 0 \right).$$

Powyższy warunek możemy równoważnie zapisać jako

$$\forall_{i=1}^n (p_{x+i-1} - p_{x-1} \geq 0)$$

oraz jako

$$\forall_{i=1}^n (p_{x-1} \leq p_{x+i-1}).$$

Zauważmy, że powyższy warunek jest prawdziwy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p_{x-1} \leq \min(p_x, p_{x+1}, \dots, p_{x+n-1}).$$

W celu wyznaczenia minimum na przedziale możemy skorzystać ze struktury drzewa przedziałowego rozpiętego na ciągu p . Drzewo przedziałowe pozwala w czasie $O(\log(n))$ znajdować minimum na przedziale – czyli sprawdzać, czy dana rotacja jest poprawna. Wszystkich rotacji jest n , zatem rozwiązanie działa w czasie $O(n \cdot \log(n))$.

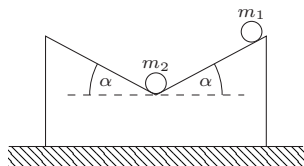
Bartosz ŁUKASIEWICZ

Skrót regulaminu

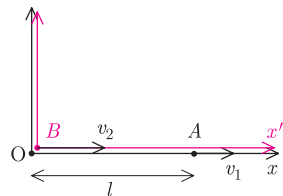
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2018



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 658, 659

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

658. Kulka o masie m_2 leży na nieważkiej podstawce (rys. 1). Podstawa ma kształt prostopadłościanu połączonego z dwoma stykającymi się klinami o kątach nachylenia α . Nie ma tarcia między podłożem a podstawką. Na prawym klinie położono kulkę o masie m_1 i puszczono swobodnie. Jaki warunek musi być spełniony, aby kulka o masie m_2 zaczęła w wyniku tego wsuwać się na lewy klin? Między kulkami a podstawką również nie ma tarcia.

659. Nieprzewodząca cienka płytką kwadratowa o boku d jest równomiernie naładowana ładunkiem Q . Na osi symetrii płytki prostopadłej do jej płaszczyzny, w odległości $\frac{d}{2}$ od płytki, umieszczono ładunek punktowy q . Znaleźć wartość siły elektrostatycznej działającej na ten ładunek.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2018

Przypominamy treść zadań:

650. Radar na Ziemi obserwuje dwa pojazdy kosmiczne poruszające się z relatywistycznymi prędkościami. Pojazd A porusza się z prędkością v_1 , goni go pojazd B , poruszający się w tym samym kierunku z prędkością $v_2 > v_1$. W chwili początkowej odległość między pojazdami wynosi l . Po jakim czasie pojazd B dogoni A z punktu widzenia obserwatora na Ziemi oraz z punktu widzenia kosmonauty w pojeździe B ?

651. Dwie jednakowo naładowane kulki o takich samych masach umieszczono w odległości l od siebie i puszczono swobodnie. Po czasie t odległość między nimi wzrosła dwukrotnie. Po jakim czasie wzrośnie dwukrotnie odległość między tymi kulkami, gdy ich odległość początkowa będzie wynosić $3l$?

650. Przyjmijmy, że obserwator O związany z Ziemią i obserwator związany z pojazdem B zsynchronizowali swoje zegary, gdy znajdowali się w tym samym miejscu i tę chwilę uznali za zerową (rys. 2). Zdarzeniem początkowym jest odbicie sygnału radarowego wysłanego z Ziemi od pojazdu A , któremu obserwator O przypisuje współrzędną czasową $t_1 = 0$ oraz współrzędną przestrzenną $x_{A_1} = l$. W układzie statku B to samo zdarzenie zachodzi w chwili $t'_1 = (0 - v_2 l / c^2) / \sqrt{1 - v_2^2 / c^2}$, w miejscu o współrzędnej przestrzennej $x'_{A_1} = l / \sqrt{1 - v_2^2 / c^2}$, zgodnie z transformacją Lorentza.

Zdarzenie końcowe – statek B dogania A – zachodzi w układzie Ziemi w miejscu o współrzędnej $x_{A_2} = l + v_1 t_2 = v_2 t_2$, stąd chwila zdarzenia wynosi $t_2 = l / (v_2 - v_1)$. W układzie statku B miejsce zdarzenia ma współrzędną $x'_{A_2} = 0$ i zachodzi w chwili

$$t'_2 = (t_2 - (v_2 x_{A_2} / c^2)) / \sqrt{1 - v_2^2 / c^2} = t_2 \sqrt{1 - v_2^2 / c^2}.$$

W układzie Ziemi statek B dogoni A po czasie $\Delta t = t_2 - t_1 = l / (v_2 - v_1)$.

W układzie statku B szukany czas wynosi

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{l(1 - (v_1 v_2) / c^2)}{(v_2 - v_1) \sqrt{1 - v_2^2 / c^2}}.$$

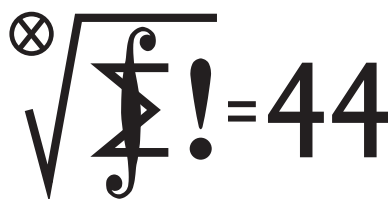
Ten sam wynik możemy otrzymać ze wzoru $\Delta t' = \Delta x' / v_{A/B}$, gdzie $\Delta x' = x'_{A_2} - x'_{A_1} = -l / \sqrt{1 - v_2^2 / c^2}$, a $v_{A/B} = (v_1 - v_2) / \sqrt{1 - v_1 v_2 / c^2}$ jest prędkością statku A względem B .

651. Oznaczmy odległość początkową między kulkami przez $2x_0$ i obliczmy ich prędkości v , gdy odległość ta osiągnie wartość $2x$. Z zasady zachowania energii otrzymujemy $v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi m \epsilon_0} \cdot \frac{x - x_0}{x x_0}}$, gdzie m jest masą, a q ładunkiem kulki.

Widać, że prędkości kulek zależą od ich położenia względnego k oraz położenia początkowego

$$(*) \quad v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi m \epsilon_0} \cdot \frac{k-1}{k x_0}}, \quad \text{gdzie } k = x / x_0.$$

Podczas ruchu kulki k zmienia się od 1 do 2. Podzielmy przemieszczenia kulek w obu rozważanych przypadkach na jednakową liczbę odcinków, dla których Δk są takie same. Przemieszczenie kulki przy zmianie k o Δk wynosi $\Delta x = \Delta k x_0$ i w drugim przypadku jest 3 razy większe niż w pierwszym: $\Delta x_2 / \Delta x_1 = 3$. Z (*) wynika, że dla danego k prędkość kulki w pierwszym przypadku jest $\sqrt{3}$ razy większa niż w drugim. Przy zmianie k o małe Δk średnie prędkości kulek również będą różniły się $\sqrt{3}$ razy: $v_{sr_1} / v_{sr_2} = \sqrt{3}$. Czasy, w których kulki przemieszczają się o Δx_i , są równe: $\Delta t_i = \Delta x_i / \Delta v_{i, sr}$, gdzie $i = 1, 2$. Stosunek tych czasów w rozważanych przypadkach dany jest wzorem $\Delta t_2 / \Delta t_1 = 3\sqrt{3}$. Całkowity czas ruchu w drugim przypadku wynosi $t_2 = 3\sqrt{3} t_1$.



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2018

Zadania z matematyki nr 761, 762

Redaguje Marcin E. KUCZMA

761. Trójkąt ABC (nie prostokątny) jest wpisany w okrąg o średnicy AD . Punkt E jest symetryczny do A względem środka boku BC . Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach ABC i BDE mają równe promienie.

762. Rozważamy liczby naturalne $n \geq 2$.

(a) Udowodnić, że jeśli liczba $2^n - 1$ jest bezkwadratowa, to liczby n oraz $2^n - 1$ są względnie pierwsze.

(b) Wykazać, że nie zachodzi implikacja odwrotna.

Zadanie 762 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2018

Przypominamy treść zadań:

753. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt D . Proste AD i BD przecinają boki BC i AC odpowiednio w punktach E i F . Udowodnić, że jeśli $|AE| + |AF| = |BE| + |BF|$, to $|AC| + |AD| = |BC| + |BD|$.

754. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych $x, y, z \geq 0$, spełniające układ równań

$$x + y + z = 1, \quad 9(xy + yz + zx) = 2 + 9(x^3 + y^3 + z^3).$$

753. Weźmy pod uwagę okrąg ω , dopisany do trójkąta ADF przy boku AD , styczny do tego boku w punkcie X , oraz okrąg ω' , dopisany do trójkąta BDE przy boku BD , styczny do prostej ED w punkcie X' . Wzory, wyrażające długości odcinków stycznych, są dobrze znane (lub/oraz łatwe do uzasadnienia):

$$2 \cdot |DX| = |AF| + |AD| - |DF|,$$

$$2 \cdot |DX'| = |BE| + |BD| - |DE|.$$

Odejmujemy stronami:

$$\begin{aligned} 2 \cdot |DX| - 2 \cdot |DX'| &= |AF| - |BE| + |AD| + |DE| - |BD| - |DF| = \\ &= |AF| - |BE| + |AE| - |BF|. \end{aligned}$$

To wyrażenie ma wartość 0, w myśl założenia zadania. Stąd wniosek, że punkty X i X' pokrywają się; to zaś oznacza, że ω i ω' to ten sam okrąg, styczny do prostych AC , BC , AE , BF (kolejno) w punktach U , V , $X (=X')$, Y .

Z położenia tych punktów na odpowiednich prostych wynikają równości

$$|AC| + |AD| = |CU| - |AU| + |AX| + |DX| = |CU| + |DX|,$$

$$|BC| + |BD| = |CV| - |BV| + |BY| + |DY| = |CV| + |DY|.$$

Sumy, uzyskane po prawych stronach, są równe, bo $|CU| = |CV|$, $|DX| = |DY|$. Stąd równość sum po lewych stronach – czyli teza zadania.

754. Niech x, y, z będą liczbami nieujemnymi, spełniającymi podany układ równań. Ich suma, więc i jej kwadrat, wynosi 1; wobec tego

$$xy + yz + zx = \frac{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2}.$$

Wstawiając to do drugiego równania układu, po prostym przekształceniu dostajemy równanie

$$(1) \quad 2(x^3 + y^3 + z^3) + (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{5}{9}.$$

Funkcja $f(t) = 2t^3 + t^2$ jest ściśle wypukła w przedziale $[0, \infty)$, zatem spełnia nierówność Jensena

$$(2) \quad f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}.$$

Równanie (1) oznacza, że (dla rozważanych liczb x, y, z) nierówność (2) staje się równością, co ma miejsce jedynie, gdy te liczby są równe. Ich suma jest jedynką, więc $x = y = z = 1/3$; ta trójka liczb spełnia oba równania układu i stanowi jego jedynę rozwiązanie.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
644 ($WT = 2,63$), 645 ($WT = 3,1$)
z numeru 10/2017

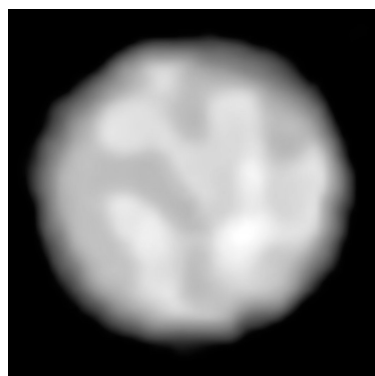
Marian Łupieżowicz	Gliwice	38,86
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	28,03

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
747 ($WT = 2,24$) i 748 ($WT = 1,64$)
z numeru 10/2017

Adam Dzedzej	Gdańsk	47,10
Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Roksana Słowik	Knurów	43,26
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Michał Koźlik	Gliwice	32,23

Pan Adam Dzedzej mija metę po raz trzeci i zostaje trzydziestym siódmym Weteranem Klubu 44 M.

Znikomy obserwowany rozmiar gwiazd objawia się, między innymi, widocznymi fluktuacjami („mruganiem”) ich światła przechodzącego przez falującą atmosferę Ziemi. Tarcze planet są dużo większe i dlatego ich mrugania nie widać, ponieważ światło nadchodzące z różnych miejsc tarczy uśrednia się.



Granulacja powierzchni gwiazdy π^1 Gruis (gwiazdozbiór Żurawia). Obserwacja VLT/PIONIER (ESO).

Prosto z nieba: Portret gwiazdy

W przeważającej większości obserwacji astronomicznych gwiazdy są praktycznie zawsze traktowane jak punktowe źródła światła – znajdują się po prostu zbyt daleko, by dało się osiągnąć rozdzielczość wystarczającą na przestudiowanie detali ich powierzchni. Wyjątkiem jest, oczywiście, Słońce, którego powierzchnia jest w szczególności badana z powierzchni Ziemi i za pomocą sond kosmicznych. Dzięki szybkiemu postępowi technicznemu w budowaniu coraz większych teleskopów zaczyna się jednak era bezpośredniego badania powierzchni innych gwiazd. Very Large Telescope, należący do ESO (Cerro Paranal, Chile), złożony z czterech niezależnych teleskopów o średnicach luster 8,2 metra, został niedawno wycelowany w kierunku gwiazdy π^1 Gruis w gwiazdozbiórce Żurawia, znajdującej się w odległości 530 lat świetlnych od Ziemi. Gwiazda wchodzi w skład układu podwójnego; jest nieco masywniejsza od Słońca i odewoluowana: znajduje się na gałęzi asymptotycznej olbrzymów, grupującej chłodne, duże i jasne gwiazdy „palące” hel w węgiel (oraz wodór w hel) w otoczce tlenowo-węglowego jądra. π^1 Gruis jest dużą gwiazdą – jej promień to $694 R_{\odot}$, i właśnie dlatego oraz dzięki dokładności instrumentu PIONIER (*Precision Integrated-Optics Near-infrared Imaging Experiment*), analizującego światło zbierane przez VLT, można wprost obserwować granulację powierzchni π^1 Gruis. Okazuje się, że powierzchnię pokrywa kilka dużych bąbli konwektywnych o rozmiarze około 120 milionów km każdy. Dla porównania, promień Słońca R_{\odot} to około 695 tys. km; każda z komórek konwektywnych ma rozmiar porównywalny z odległością Słońce-Wenus. Pojawiająca się na powierzchni granulacja jest wynikiem podgrzewania plazmy wewnątrz gwiazdy, która porusza się w kierunku powierzchni i ochładza. W porównaniu do granulacji typu słonecznego bąble π^1 Gruis są ogromne – na Słońcu rozmiar komórki to przeciętnie około 1500 km (w każdym momencie jest ich na powierzchni Słońca około 4 milionów). Z powodu ich dużej liczby i małego rozmiaru zmiany jasności uśredniają się. W przypadku π^1 Gruis duże bąble są odpowiedzialne za zmienną jasność gwiazdy – dzięki VLT/PIONIER można ją teraz studiować bezpośrednio.

Michał BEJGER



Niebo w maju

Kolejny miesiąc wiosny odznacza się już bardzo długimi dniami i krótkimi nocami. W ciągu miesiąca dzień wydłuży się o prawie 1,5 godziny i pod koniec maja trwa około 16,5 godziny. 20 maja Słońce przekroczy równoleżnik 20° deklinacji północnej w drodze na północ, a kilka dni wcześniej w północnej części kraju zacznie się okres białych nocy astronomicznych, czyli czas, w którym Słońce w najciemniejszej części nocy chowa się pod widnokrąg mniej niż o 18° . Stopniowo obszar występowania białych nocy rozszerza się na południe i w okolicach przesilenia letniego pokrywa całą Polskę, choć w górach efekt jest słaby, gdyż granica występowania tego zjawiska kończy się kilkadziesiąt kilometrów na południe od granic naszego kraju.

W tym samym czasie rozpoczyna się sezon na zjawisko łuku okołohoryzontalnego. Tutaj uprzywilejowane jest południe. W sprzyjających warunkach (cirrusy na niebie oraz Słońce na wysokości co najmniej 58° nad widnokretem) jakieś 46° na południe od Słońca pojawia się mała, lecz intensywna tęcza. Warunek przebywania Słońca na tak dużej wysokości oznacza, że zjawisko nie występuje dalej niż 56° od równika, a w Polsce jest ono rzadkie, gdyż Słońce znajduje się na odpowiedniej wysokości tylko latem w godzinach okołopołudniowych. Bliżej równika szansa na dostrzeżenie łuku okołohoryzontalnego jest znacznie większa.

Więcej o zjawisku łuku okołohoryzontalnego na angielskiej stronie: www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm

Kolejnym zjawiskiem, występującym od maja do sierpnia, są tzw. obłoki srebrzyste, czyli powstające bardzo wysoko w atmosferze chmury, oświetlone Słońcem schowanym już pod widnokregiem. Tutaj także bardziej uprzywilejowana jest północ. Podejrzewa się, że obłoki srebrzyste to kondensacje pary wodnej na pyłe meteorowym lub wyrzuconym przez wulkany. W Polsce obłoki srebrzyste pojawiają się na wysokości kilkunastu stopni nad północnym horyzontem, bardziej na północ można je dostrzec wyżej.

Układ faz Księżyca będzie podobny do kwietniowego: początek miesiąca w pełni, 8 maja – ostatnia kwadra, 15 maja – now, 22 maja – I kwadra i pełnia 29 maja. Niestety, w maju opuści nas szczęście do zjawisk zakryciowych. Z jaśniejszych gwiazd z terenu Polski da się obserwować tylko zakrycie gwiazdy 4. wielkości ι Cap 8 maja, a i to już na jasnym niebie, kilkanaście minut przed godziną 5 (z odkryciem w okolicach wschodu Słońca). Sezon zakryć Regulusa skończył się w kwietniu, natomiast sezon zakryć Aldebarana skończy się we wrześniu, ale każdy z pozostałych pasów zakryć ominie Polskę. Na kolejne zakrycie Regulusa trzeba czekać do roku 2026, a do zakrycia Aldebarana – 8 lat dłużej. Nie zabraknie za to spotkań z planetami Układu Słonecznego: 1 maja Księżyc w pełni spotka się z Jowiszem, o świcie oddali się od niego na 5° , 5 maja rano przy fazie 78% Saturn znajdzie się 2° od niego, dobę później dotrze na niecałe 3° do Marsa. Po nowiu 17 maja jego cienki sierp w fazie 7% przejdzie $5,5$ stopnia na południe od Wenus, a 10 dni później 2 dni przed pełnią ponownie minie Jowisza w odległości 3° .

9 maja największa planeta Układu Słonecznego znajdzie się w opozycji. Zatem maj jest najlepszym okresem widoczności Jowisza w tym roku. Ponad rok temu Jowisz przeszedł przez swoje aphelium, czyli najdalszy od Słońca punkt swojej orbity, stąd ta opozycja należy do tych mniej korzystnych. Planeta osiągnie jasność $-2,5^m$ i średnicę $45''$. 3 maja Jowisz przejdzie tylko $5'$ na północ od gwiazdy 5. wielkości ν Lib, która wtedy może mylić się z księżycami galileuszowymi, a na przełomie maja i czerwca przejdzie niecały stopień na północ od gwiazdy Zuben Elgenubi. Jest to gwiazda podwójna, której składniki o jasnościach $+2,8$ oraz $+5,1^m$ dzielą na niebie prawie $4'$, zatem oba składniki można dostrzec gołym okiem.

Okolo 50° , czyli 2-krotną rozpiętość wyciągniętej przez siebie dłoni z rozstawionymi palcami, na wschód od Jowisza swoją pętlę po niebie kreśli Saturn. Planeta przygotowuje się do opozycji pod koniec czerwca i – tak samo, jak Jowisz – porusza się ruchem wstecznym. Przez cały miesiąc Saturn znajduje się mniej więcej $100'$ na północ od jednej z jaśniejszych gromad kulistych gwiazd M22. Łatwo ją dostrzec przez lornetkę, jako rozmytą mgiełkę. W maju jasność Saturna urośnie do $+0,2^m$, a jego średnica kątowna do $18''$.

Czerwona Planeta rozpocznie maj również w Strzelcu, okolo 15° na wschód od Saturna, jednak w trakcie miesiąca przesunie się o ponad 11° dalej i dotrze do gwiazd głównej figury Koziorożca. W tym czasie jej jasność zwiększy się do $-1,2^m$, a średnica kątowna do $15''$, czyli niewiele mniej od średnicy Saturna. Do końca maja dystans między tymi planetami urośnie do prawie 30° .

W północno-zachodniej części Strzelca znajduje się planetoida (4) Westa. 20 czerwca przejdzie ona przez opozycję, a w maju wykona zakręt na kreślonej przez siebie pętli i zmieni kierunek ruchu na wsteczny. Westa odwiedzi dwa obiekty z katalogu Messiera: 2 maja przejdzie niewiele ponad $0,5$ stopnia na południowy zachód od gromady otwartej M18, zaś 24 maja – tyle samo na północ od mgławicy M24. Wszystkie te obiekty znajdują się w maju okolo 6° na północny zachód od Saturna, natomiast Westa w trakcie miesiąca pojaśnieje z $6,5$ do $5,8^m$, stając się tym samym możliwą do zaobserwowania gołym okiem.

Wieczorem bardzo dobrze widoczna jest planeta Wenus, która przez miesiąc przemierzy odcinek prawie 40° od gwiazd 4. wielkości κ i ν Tauri do obszaru mniej więcej 3° na północny zachód od świecącej z jasnością $3,5^m$ gwiazdy Wasat (δ Gem). Po drodze planeta 4 maja minie w odległości $20'$ gwiazdę 4. wielkości τ Tauri, 10 dni później przetnie linię łączącą gwiazdy tworzące rogi Byka: El Nath (β Tau) – róg północny i ζ Tau – róg południowy. 19 maja Wenus wejdzie do gwiazdozbioru Bliźniąt, gdzie 2 dni później spotka się ze znaną gromadą otwartą gwiazd M35, w odległości $45'$, 27 maja zbliży się na mniej niż $15'$ do Meksutu (ϵ Gem). W maju nadal niewiele zmieni się tarcza planety. Najwyraźniej spadnie faza, do 80% na koniec miesiąca, jasność urośnie do -4^m , zaś tarcza – do $13''$. Przez cały miesiąc godzinę po zachodzie Słońca planeta wzniesie się na wysokość okolo 13° nad północno-zachodnim widnokregiem. Pozostałe 3 planety Układu Słonecznego przebywają za blisko Słońca i są niewidoczne.

W maju promieniuje kolejny znany coroczny rój meteorów: η -Akwarydy. Są to szybkie meteory, zderzają się z atmosferą z prędkością 66 km/s, a ich radiant znajduje się w północno-wschodniej części Wodnika, nieco ponad 1° na południowy zachód od gwiazdy 4. wielkości η Aqr. Meteory z tego roju promieniują od 19 kwietnia do 28 maja, z maksimum okolo 6 maja. Niestety, na północnej półkuli Ziemi te meteory widoczne są niezbyt dobrze, gdyż ich radiant znajduje się niedaleko ekliptyki, a ta o tej porze roku rano nachylona jest niekorzystnie. Ponadto wschodzi okolo godziny 1:30 i godzinę później – na początku świtu żeglarskiego – wznosi się na wysokość zaledwie 10° nad wschodni horyzont. Stąd, mimo że w maksimum roju można spodziewać się nawet 50 meteorów na godzinę, to u nas na pewno zdarzy się ich o wiele mniej. Dodatkowo obserwacje popsuje Księżyc w fazie 69%, znajdujący się wtedy niecałe 50° na zachód.

Ariel MAJCHER

Mionowe manowce

Cząstka naładowana, która wpada w pole magnetyczne prostopadłe do swej prędkości, zaczyna się poruszać jednostajnie po okręgu, a okres pełnego obiegu tego okręgu jest proporcjonalny do masy tej cząstki oraz odwrotnie proporcjonalny do jej ładunku i do indukcji magnetycznej. Wiele cząstek elementarnych ma też właściwość zwaną spinem. W ogromnym uproszczeniu możemy sobie wyobrazić, że spin wiąże się z ruchem wirowym ładunku elektrycznego cząstki, która w polu magnetycznym zachowuje się jak miniaturowa pętka z prądem. Okazuje się, że wektor spinu obrazujący „natężenie” i „kierunek” tego prądu również obraca się jednostajnie w polu magnetycznym.

Opisana wyżej analogia, choć prosta, nie uwzględnia jednak tego, że spin jest wielkością kwantową. Teoria kwantowa przewiduje zaś, że w przestrzeni występują nieustanne fluktuacje polegające na narodzinach i zniknięciach par cząstka-antycząstka. Efekty te wpływają minimalnie na tempo, w jakim spin danej cząstki obraca się w polu magnetycznym. To ostatnie można w wielu przypadkach bardzo dokładnie zmierzyć i stąd wynika jeden z najważniejszych problemów aktualnej teorii cząstek elementarnych, czyli Modelu Standardowego.

Tempo obiegu spinu w polu magnetycznym cząstek takich jak elektron czy mion można w zasadzie obliczyć w Modelu Standardowym i porównać z wynikami doświadczalnymi. Dla elektronu wielkość ta jest obliczona i zmierzona z dokładnością do trzynastu (!) cyfr znaczących, przy czym wyniki pomiarów i obliczeń są zgodne. Z mionem jest wszakże kłopot – przy obecnej dokładności eksperymentów na poziomie jedenastu cyfr znaczących występuje drobna acz istotna różnica z obliczeniami teoretycznymi (na ostatnim miejscu). Z uwagi na oznaczenia, jakich fizycy używają w pisanych z tej okazji równaniach, problem ten jest znany jako *anomalía $g-2$ dla mionu*.

Zauważmy na marginesie, że w bieżącym roku mija 70. rocznica podania (przez P. Kusch i H.M. Foleya) pierwszego kwantowego obliczenia opisywanej wielkości dla elektronu. W kolejnych dekadach rozwój teorii cząstek elementarnych i metod zaawansowanych obliczeń kwantowych doprowadził do uzyskania dokładności, z jaką nie jest przewidywana żadna inna wielkość fizyczna i która nie przestaje cokolwiek onieśmielać piszącego te słowa.

Historia obliczeń teoretycznych $g-2$ dla mionu jest ciekawa sama w sobie i obfituje w zażarte dyskusje czy nieoczekiwane zmiany znaków. Głównym powodem trudności tych obliczeń jest fakt, że kwantowe fluktuacje przestrzeni powodują powstawanie par cząstka-antycząstka oddziałujących silnie, a z opisem takich układów przez Model Standardowy występują pewne praktyczne trudności obliczeniowe. Można je jednak pokonać, odwołując się do bardzo dokładnych danych doświadczalnych dla rozpraszania elektronów i pozytonów przy niskich energiach, toteż od kilku lat panuje przekonanie, że przewidywanie teoretyczne dla $g-2$ mionu, wynikające z Modelu Standardowego, jest godne zaufania.

Pesymiści mówią – kłapa! Model Standardowy nie zgadza się z doświadczeniem. Optymiści na to – świetnie! To znak, że w kwantowych fluktuacjach przestrzeni powstają nowe, nieodkryte jeszcze bezpośrednio cząstki. Jesteśmy blisko przełomu doświadczalnego! Kto ma rację?

A może niezgodności wcale nie ma? Na początku tego roku Takahiro Morishima, Toshifumi Futamase i Hirohiko Shimizu upublicznili w repozytorium arXiv serię trzech raportów. Japońscy badacze twierdzili w nich, że przy tak dokładnych obliczeniach, jakie potrzebne są do wyznaczenia $g-2$ dla mionu, nie można udawać, że eksperymenty wykonywane są w pustej – a więc, w myśl ogólnej teorii względności, płaskiej – przestrzeni. Ich zdaniem, należy uwzględnić niewielkie poprawki wynikające z obecności pola grawitacyjnego Ziemi. Jeśliby włączyć takie poprawki do obliczeń zaproponowaną przez nich metodą, rozbieżność między obliczeniami teoretycznymi i wynikami doświadczalnymi dla mionu znika, przy czym nie psuje się analogiczna zgodność dla elektronu. Różne efekty dla tych dwóch cząstek wynikają z tego, że badane w eksperymentach miony, w odróżnieniu od elektronów, poruszają się z prędkościami bliskimi prędkości światła.

Wynik ten zaintrygował wielu fizyków. Nie tylko dlatego, że wydawał się usuwać anomalie $g-2$ dla mionu, ale przede wszystkim dlatego, że sugerował zaskakująco duży wpływ ogólnej teorii względności na świat cząstek elementarnych. Podejrzany wydawał się także fakt, że to pole grawitacyjne Ziemi miało mieć decydujący wpływ na wielkość poprawek, podczas gdy wpływ grawitacji Słońca powinien być kilkanaście razy większy, a wpływ grawitacji Galaktyki – kilka tysięcy razy większy.

Nic więc dziwnego, że wielu badaczy postanowiło sprawdzić wynik grupy japońskiej. Już po kilku dniach zaczęły ukazywać się prace, których autorzy wykazali, że, odpowiednio rozważając zasadę względności Einsteina, można mówić o wpływie grawitacji na eksperymenty mionowe tylko wtedy, gdy oddziaływania grawitacyjne zmieniają się w obszarze laboratorium, skąd wynika, że oryginalnie opublikowany efekt powinien być pomnożony przez kwadrat stosunku rozmiaru laboratorium i promienia Ziemi, a więc przez bardzo małą liczbę. Oznacza to, że postulowane rozwiązanie anomalii $g-2$ dla mionu nie może być poprawne.

Czego nas uczy ta historia? Według mnie, można wyciągnąć z niej dwie lekcje. Po pierwsze, wieści o wynikach, które są zaskakujące lub w jakiś sposób „dziwne”, bardzo szybko rozchodzą się w środowisku naukowym. Jednak w odróżnieniu od nieprawdziwych informacji dotyczących spraw politycznych lub społecznych, które zaskakująco skutecznie infekują świadomość społeczną, te „dziwne” wieści naukowe poddawane są szybko i skutecznie kontroli innych badaczy. W środowisku naukowym ceni się bowiem nie tych, co głośno krzyczą, ale tych, co mają (ostatecznie) rację.

Krzysztof TURZYŃSKI

T. Morishima and T. Futamase,
arXiv:1801.10244 [hep-ph], arXiv:1801.10245 [hep-ph],
T. Morishima, T. Futamase and H.M. Shimizu,
arXiv:1801.10246 [hep-ph],



Kij ma dwa końce...

Joanna JASZUŃSKA

... medal – dwie strony, czego nie ma tu, musi być tam, a co weszło, musi wyjść.

1. Siedem kulek w dowolny sposób dzielimy na dwie niepuste grupy i notujemy iloczyn liczb kulek w obu grupach. Następnie procedurę tę powtarzamy, wybierając za każdym razem dowolną grupę kulek, aż uzyskamy siedem grup po jednej kulce. Wtedy sumujemy zapisane liczby. Niezależnie od sposobu rozdzielania, wynikiem jest 21. Dlaczego? Czy dla 77 kulek wynik też jest zawsze ten sam?

2. Na pewnym siedmiuosobowym przyjęciu niektórzy przywitani się poprzez uścisk ręki. Czy możliwe, że każdy uściśniętą rękę dokładnie trzech innych osób?

3. Wykaż, że liczba wszystkich osób od początku istnienia świata, które uściśnięły rękę nieparzystej liczbie innych osób, jest parzysta.

4. W pewnej grupie złożonej ze 100 chłopców i 100 dziewcząt każdy zna dokładnie 8 osób przeciwnej płci. Wykaż, że dowolnych k chłopców z tej grupy zna „wspólnymi siłami” co najmniej k dziewcząt.

5. Wykaż, że w każdej grupie osób istnieją takie dwie, które mają w tej grupie tyle samo znajomych (znajomości są symetryczne i nikt nie liczy sam siebie).

6. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewn. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

7. Na przyjęciu u pewnego małżeństwa gośćmi były cztery inne małżeństwa. Niektórzy przywitani się, podając sobie ręce, nikt nie witał się ze swoim współmałżonkiem. Gospodarz spytał każdego z pozostałych uczestników przyjęcia (również własną żonę), ile rąk uściśnięli. Każdy podał inną liczbę. Jaką podała gospodyni?

8. Jaś chciałby każdego ze swych trzech gości powitać uściskiem dłoni. Każda z tych czterech osób cierpi na inną chorobę, zaraźliwą przez dotyk. Na szczęście Jaś ma rękawiczki, ale niestety tylko dwie. Czy może przywitać się z każdym z gości tak, aby nikt nikogo nie zaraził?

9. Na nieskończenie wielkim stole leży nieskończenie wiele monet, początkowo dokładnie 20 z nich orłem do góry. Monety można odwracać na drugą stronę i przesuwać. Należy podzielić je na dwie grupy tak, aby w każdej grupie tyle samo monet leżało orłem do góry. Jak tego dokonać z zawiązanymi oczami (bez możliwości spojrzenia na monety w żadnym momencie, również początkowym) i w rękawiczkach (bez możliwości wyczuwania, czy dana moneta leży orłem czy reszką do góry)?

10. Ponad połowę powierzchni pewnej idealnie kulistej planety zajmują lądy. Wykaż, że istnieje taka średnica tej planety, której oba końce są na lądzie.

Zakładamy, że lądy i morza mają *przyzwoite* (mieralne) kształty.

11. Czy istnieje taki 11-kąt i taka prosta, która przecina wszystkie boki tego 11-kąta (nie w wierzchołkach)?

12. Każdy kij ma dwa końce. Ile końców ma 5 i pół kija?

Rozwiązania i wskazówki do niektórych zadań

R1. Na początku połączmy każde dwie kulki nitką. Ilekroć pewną grupę dzielimy na n i k kulek, przecinamy wszystkie $n \cdot k$ nitek pomiędzy rozdzielanymi kulkami. Kulki pozostające w jednej grupie nadal są połączone. W efekcie, po uzyskaniu pojedynczych kulek, przetniemy wszystkie nitki (i każdą tylko raz), a rozważana suma iloczynów to właśnie liczba tych nitek. \square

R2. Nie. Gdyby tak było, to liczba uścisków dłoni byłaby równa $7 \cdot 3/2$, bo w każdym z nich uczestniczą dwie osoby. Jednak liczba ta nie jest całkowita. \square

R4. Niech rozważane osoby będą ośmiornicami i niech każda poda jedną kończynę każdej znajomej osobie przeciwnej płci. Wtedy dowolne grono k chłopców podaje dziewczętom łącznie $8k$ kończyn. Jednocześnie każde dziewczę jest w stanie chwycić najwyżej 8 z nich, znajomych dziewczyn musi więc być co najmniej k . \square

R5. Gdyby w n -osobowej grupie każdy miał inną liczbę znajomych, to byłyby to liczby $0, 1, 2, \dots, n-1$. Nie jest jednak możliwe, by ktoś znał wszystkich pozostałych $n-1$ osób i jednocześnie ktoś inny miał 0 znajomych. \square

W6. Gdyby każda królewna tańczyła z inną liczbą królewiczów, to byłyby to wszystkie liczby od 0 do 102. Ile różnych par zatańczyłoby wtedy na balu?

Zad. pochodzi z VIII Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

W7. Każdy podał inną liczbę, więc podano wszystkie wyniki od 0 do 8. Osoby, które powiedziały 0 i 8, są małżeństwem, ponieważ...

R8. Tak. Wkłada jedną rękawiczkę na drugą i wita się z gościem 1. Następnie zdejmuje zewnętrzną rękawiczkę i wita się z gościem 2. Potem gość 3 wkłada zewnętrzną rękawiczkę (jej wnętrze jest czyste) i wita się z Jasiem. \square

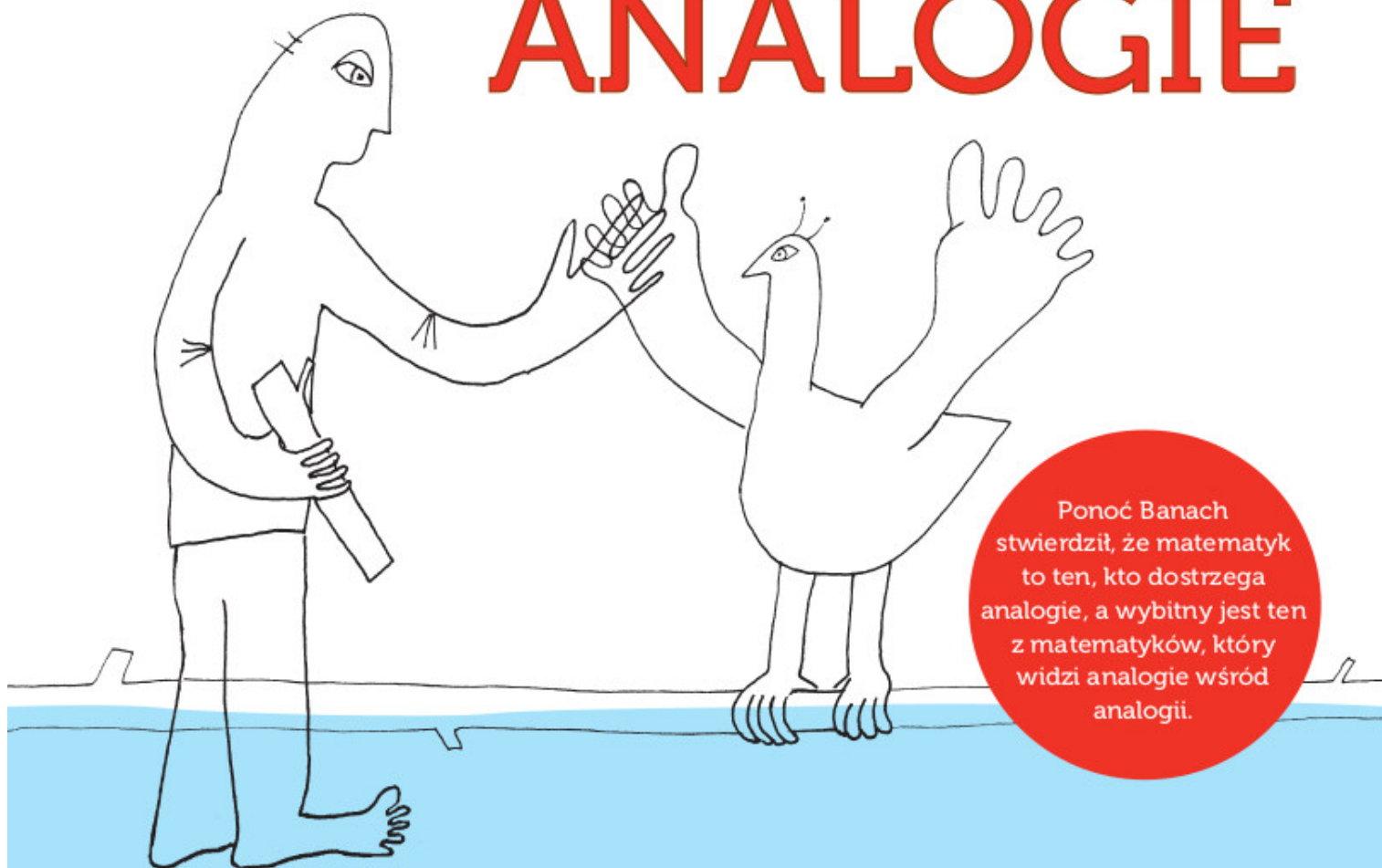
R9. Do jednej grupy weźmy dowolnych 20 monet i wszystkie je odwróćmy. Drugą grupę niech tworzą pozostałe monety. W obu grupach po tyle samo monet leży teraz orłem do góry, bo jeśli wśród wybranych 20 monet było ich n , to po odwróceniu jest ich $20 - n$, czyli tyle samo, ile wśród pozostałych monet. \square

R10. Gdyby każda średnica o jednym końcu na lądzie miała drugi koniec w wodzie, to łączna powierzchnia lądów byłaby co najwyżej taka, jak wód – sprzeczność. \square

R11. Nie. Prosta przecinająca wielokąt na przemian wchodzi do jego wnętrza i z niego wychodzi. Zaczyna i kończy na zewnątrz, przecina więc obwód parzystą liczbę razy. \square

TERMIN: 24–28 SIERPNIĄ 2018 ROKU, MIEJSCE: POD WARSZAWĄ
LVIII SZKOŁA MATEMATYKI POGLĄDOWEJ

ANALOGIE



Ponoć Banach
stwierdził, że matematyk
to ten, kto dostrzega
analogie, a wybitny jest ten
z matematyków, który
widzi analogie wśród
analogii.

bo w gruncie rzeczy cały gmach matematyki to analogie:

- analogicznie do rachowania na liczbach naturalnych (i na jego użytek) stworzono teorię pierścieni;
- analogicznie do rachunku liczb wymiernych powstała teoria ciał;
- ogląd wielościanów zaowocował zarówno teorią grup, jak topologią geometryczną;
- praktycznie niezbędne mierzenie przyniosło zarówno liczby rzeczywiste, jak i rachunek prawdopodobieństwa;
- obserwacje kinematyczne zaowocowały analizą matematyczną i rachunkiem wariacyjnym;
- nawet logika matematyczna i computer science powstały w analogii do scholastycznych sylogizmów.

O umiejętności dostrzegania analogii będzie mowa na LVIII Szkole Matematyki Poglądowej.

Szkoły są otwarte dla wszystkich, którzy są z matematyką związani, niezależnie od tego, czy jej uczą, uprawiają ją, piszą o niej, czy tylko się nią pasjonują. Szczególnie mile widziani są młodzi matematycy, którzy uczą, bądź chcą uczyć, w szkołach wyższych.

Zapraszamy

Zgłoszenia uczestnictwa przyjmowane są do **30.06.2018** poprzez formularz znajdujący się na stronie **www.smp.uph.edu.pl**

Pytania należy kierować na adres **okm@uph.edu.pl**