



delta

MATEMATYKA FIZYKA ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\pi=3,141592\dots$

NR 1 (524) 2018
CENA 4 ZŁ VAT 5%
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

ROZPLĄTUJEMY
na str. 7



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 1 (524)

Głębokie uczenie maszyn
Paueł Gora str. 1

 Zadania str. 4


Topologia w fizyce
Maciej Lis, Jakub Tworzydło str. 5

Okręgi Boromeusza, czyli
matematyk rozplątuje supelki
Jacek Gładysz str. 7

Gra w sumo
Michał Miśkiewicz str. 9

 Gwiazda potęgowa
Bartłomiej Pawlik str. 12

Wyznaczamy środek Polski
Piotr Różański str. 14

 Nasi wymarli
przodkowie
Magdalena Fikus str. 17

Migawka informatyczna:
Co to znaczy szybko? str. 18

Informatyczny kącik
olimpijski (111):
Metro str. 19


Klub 44 str. 20

Niebo w styczniu str. 22

Zagadnienie Fermata w jednej
linijce!
Waldemar Pompe str. 23

Rozsądnego algorytmu brak str. 24

Wpisywanie str. 24

 Przedłuż ścieżkę
Joanna Jaszurńska str. 25



W następnym numerze piszemy, jakie fale nas kręcą:

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia;
rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl
lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

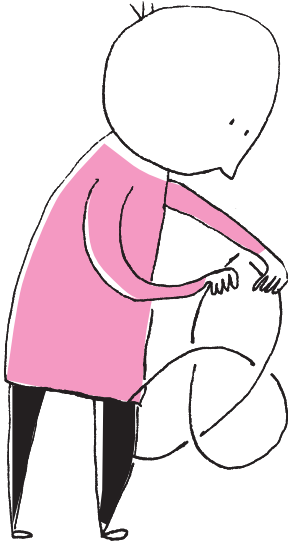
Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Głębokie uczenie maszyn

Paweł GORA*

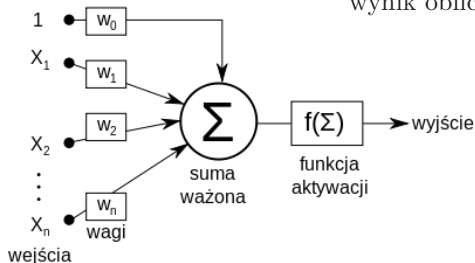
*Instytut Informatyki, Wydział
Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski



Czy zastanawialiście się kiedyś nad tym, czym jest inteligencja? Większość definicji zakłada posiadanie zdolności do rozumowania, uczenia się, adaptacji do zmieniającego się otoczenia. Najczęściej mówi się o inteligencji ludzi i zwierząt – organizmów mających mózg, a więc organ biologiczny. Czy inteligencja musi być jednak domeną jedynie istot, które uważamy obecnie za żywe? Wielu Czytelników słyszało zapewne również o inteligencji „sztucznej”, określanej tak dlatego, że nie występuje ona w sposób naturalny w przyrodzie, ale w emergentny sposób pojawia się w maszynach i algorytmach tworzonych dzięki innej inteligencji, np. człowieka.

W ostatnich latach nastąpił rozkwit fascynującej dziedziny nauki, jaką jest sztuczna inteligencja. Coraz częściej słyszymy o tym, że programy komputerowe wygrywają z ludźmi (i to mistrzami świata!) w gry, które wymagają dużego wysiłku intelektualnego (np. szachy, Go). Programy potrafią już rozpoznawać obiekty na zdjęciach i jeździć samochodem lepiej niż większość ludzi, rozpoznają mowę i tłumaczą tekst z jednego języka na drugi, wykazują się też kreatywnością i tworzą nowe dzieła na podstawie widzianych wcześniej obrazów lub tekstów.

Jeden z przełomów w dziedzinie uczenia maszyn i nadawania im (sztucznej) inteligencji związany jest w ostatnich latach z głębokimi sieciami neuronowymi. Słowo „neuronowymi” już powinno dać pewne skojarzenia z umysłem, w końcu nasz mózg składa się właśnie z dużej liczby neuronów, szacowanej na 100 miliardów. Faktycznie, budowa i działanie sztucznych sieci neuronowych zainspirowane zostały badaniami nad ludzkim mózgiem. W pewnym sensie sieci neuronowe zrodziły się właśnie z motywacji, aby maszyny mogły działanie mózgu naśladować. Ich podstawowym budulcem są sztuczne neurony, które otrzymują na wejściu pewne dane i przetwarzają je w określony sposób, przekazując na wyjściu wynik (rys. 1). Neurony mogą być połączone tak, że wynik obliczeń jednego z nich może stanowić sygnał wejściowy do innego.



Rys. 1. Neuron McCullocha-Pittsa – podstawowy budulec sieci neuronowej – źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Neuron_McCullocha-Pittsa

W ten sposób może współdziałać wiele warstw neuronów, przetwarzając dane otrzymane na wejściu aż do obliczenia wyniku zgodnie z określonymi regułami (funkcjami aktywacji) w neuronach oraz wartościami parametrów ich połączeń. Zakładając, że neuron otrzymuje na wejściu dane x_1, x_2, \dots, x_n , które przekazywane są przez połączenia wejściowe z przypisanymi do nich wagami w_1, w_2, \dots, w_n , wyjście obliczane jest za pomocą reguły:

$$y = f\left(w_0 + \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i\right),$$

gdzie f jest właśnie funkcją aktywacji, a w_0 jest dodatkowym parametrem neuronu ułatwiającym proces uczenia. Często jako funkcję aktywacji stosuje się funkcję sigmoidalną $\frac{1}{1+e^{-x}}$ oraz funkcję ReLU, czyli $\max(0, x)$.

Dane zazwyczaj przetwarzane są w jednym kierunku: od danych wejściowych (warstwa wejściowa), przez warstwy ukryte, aż do obliczenia wyniku (warstwa wyjściowa). Możliwe są również inne konfiguracje, jak np. w rekurencyjnych sieciach neuronowych, które znajdują zastosowania np. do analizy szeregów czasowych, rozpoznawania mowy i tłumaczeń tekstów. W takich sieciach połączenia pomiędzy neuronami z różnych warstw mogą tworzyć cykle.

Uczenie to taki proces dostrajania wag połączeń między neuronami, który daje najlepsze wyniki. W jaki sposób uczą się sieci neuronowe? Algorytmy uczenia (nie tylko sieci neuronowych) można podzielić na 3 grupy:

- uczenie z nadzorem (*supervised learning*),
- uczenie bez nadzoru (*unsupervised learning*),
- uczenie ze wzmocnieniem (*reinforcement learning*).

**Rozwiązanie zadania M 1552.**

Będziemy szukali takich rozwiązań, dla których $4a^2 = x^2$ oraz $4b^2 = 2x$, gdzie x jest dodatnią liczbą całkowitą; wówczas liczba

$$4a^2 + 4b^2 + 1 = (x + 1)^2$$

będzie kwadratem liczby całkowitej.

Z powyższych równości wynika, że

$$x = 2a^2 = 2b^2 - 1,$$

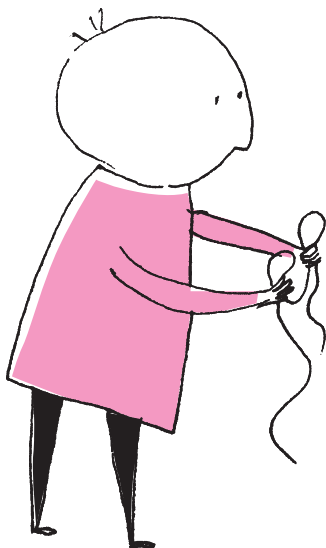
więc rozważane liczby mają szukaną postać, o ile tylko liczby a , b są powiązane zależnościami

$$a^2 - 2b^2 = -1.$$

Powyższe znane równanie diofantyczne (tzw. *ujemne równanie Pella*) ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych (a_n, b_n) danych przez

$$(1 + \sqrt{2})^{2n-1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

dla $n \geq 1$.

**Rozwiązanie zadania M 1554.**

Udowodnimy, że $c = 1$.

Zauważmy, że jeżeli $k = n$ i wszystkie połączenia są realizowane między rozłącznymi parami miast, to każda podróż może być złożona z tylko jednego lotu. Stąd $c \leq 1$.

Rozważmy następujące doświadczenie trwające k dni. W każdym z miast umieścimy na początku jednego turystę. Pierwszego dnia zaplanujmy loty pary turystów, którzy znajdują się w miastach, między którymi kursuje najtańszy lot; drugiego dnia – pary turystów, którzy znajdują się w miastach, między którymi jest drugi najtańszy lot itd.

Po k dniach każdy turysta będzie już po podróży mającej tę własność, że każdy kolejny lot był droższy od poprzedniego. Ponadto łącznie wszyscy turyści wykonają w sumie $2k$ lotów, gdyż każdego dnia dokładnie dwóch wsiadło do samolotu. Stąd wniosek, że średnia długość podróży wśród wszystkich turystów jest równa $\frac{2n}{2k} = \frac{n}{k}$ lotów. W związku z tym istnieje turysta, którego wycieczka jest złożona z co najmniej tylu lotów, a zatem $c \geq 1$.

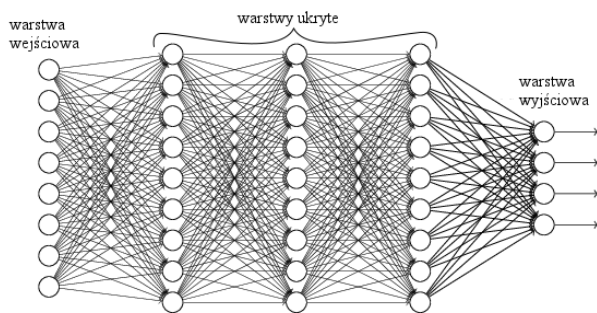
Największe sukcesy przez wiele lat święciło uczenie z nadzorem. W metodzie tej dany jest zbiór par *wejście-wynik* i celem jest znalezienie funkcji obliczanej przez sieć neuronową, która dla danych wejściowych dawałaby na wyjściu wyniki minimalizujące pewną funkcję kosztu (*loss function*). Funkcja kosztu powinna uwzględniać wyniki obliczane przez sieć neuronową oraz prawidłowe wyniki dla danych wejściowych, może być nią np. błąd średniokwadratowy, w praktyce odpowiednie dobranie funkcji kosztu wpływa istotnie na proces uczenia sieci. Sieć trenowana jest na pewnym podzbiórze par wejście-wynik – *zbiórze treningowym*, ale skuteczność sieci i algorytmu uczenia testowane są już na osobnym podzbiórze, *zbiórze testowym*, aby sprawdzić, jak dobrze sieć radzi sobie na nowych danych, na których nie była wcześniej trenowana (od algorytmów określanymi jako *inteligentne* oczekiwaliśmy właśnie, aby potrafiły radzić sobie z nieznanymi wcześniej danymi i sytuacjami!). Często bierze się pod uwagę jeszcze dodatkowy podzbiór, rozłączny z treningowym i testowym – *zbiór walidacyjny*, który ma pomóc w wyborze najlepszej architektury sieci oraz najlepszych algorytmów i wartości parametrów odpowiedzialnych za jej uczenie (tzw. *hiperparametrów*).

Samo trenowanie sieci neuronowej realizuje się najczęściej za pomocą *spadku gradientowego* i algorytmu *propagacji wstecznej* – wagi połączeń pomiędzy neuronami są modyfikowane tak, aby zmniejszać popełniany przez sieć błąd, czyli minimalizować funkcję kosztu, z tego powodu funkcja ta powinna być różniczkowalna względem wag połączeń. Jest to typowy schemat algorytmów uczenia (nie tylko sieci neuronowych), poszczególne algorytmy mogą się różnić pewnymi szczegółami, ale w większości z nich występuje pewien zbiór treningowy, dla którego algorytm dobiera ustawienia minimalizujące pewną funkcję kosztu.

Trochę inaczej sytuacja wygląda w przypadku uczenia bez nadzoru – dla danych wejściowych w zbiorze treningowym może bowiem nie być prawidłowego wyniku. Mimo to okazuje się, że odpowiednio konstruując sieci neuronowe, można nauczyć je wykrywania w danych pewnych wzorców (aby nazwać te wzorce, może być potrzebna ingerencja człowieka lub nieduży zbiór danych z wynikami – tak jak przy uczeniu z nadzorem). Typowym przykładem uczenia bez nadzoru jest analiza skupień – grupowanie danych w rozłączne podzbiory. W przypadku uczenia z nadzorem sieć neuronowa otrzymując na wejściu zbiór, w którym są zdjęcia pieszych i rowerzystów, dla każdego zdjęcia będzie w stanie powiedzieć, czy jest na nim pieszy czy rowerzysta. W przypadku uczenia bez nadzoru sieć neuronowa po przeanalizowaniu całego zbioru danych może powiedzieć: na zdjęciach mamy dwie grupy obiektów, obiekty z danej grupy są do siebie bardzo podobne, ale istotnie różnią się od obiektów z drugiej grupy.

Uczenie bez nadzoru można więc porównać z sytuacją, gdy małe dziecko obserwuje otaczający je świat, nie ma nauczyciela, który by mu ten świat tłumaczył (lub nie jest w stanie tego nauczyciela zrozumieć), a mimo to jest w stanie wykryć pewne wzorce i prawa występujące w świecie, rozpoznać rodziców, jedzenie, zrozumieć grawitację, nauczyć się chodzić. Uczenie z nadzorem można z kolei porównać do sytuacji, w której jest nauczyciel, który pokazuje uczniowi gotowe materiały, pytania i odpowiedzi, zadania i gotowe rozwiązania, a potem oczekuje, że uczeń będzie potrafił rozwiązać zadania trochę inne, do pewnego stopnia podobne do tych przykładowych, ale jednak niespotkane wcześniej. Tak jak w przypadku małych dzieci uczenie bez nadzoru jest typowe dla wieku przedszkolnego, a uczenie z nadzorem jest już typowe dla wieku szkolnego (a więc późniejszego), tak i w przypadku uczenia maszyn czasami stosuje się najpierw uczenie bez nadzoru, aby sieci neuronowe nauczyły się same wykrywać pewne wzorce, których znajomość może potem ułatwić uczenie z nadzorem (jest to przykład *semi-supervised learning* stanowiącego połączenie dwóch wspomnianych podejść).

Trzeci rodzaj uczenia maszyn to tzw. *uczenie ze wzmocnieniem*. W tym przypadku zbiór treningowy nie jest od razu dostępny w całości. Zamiast tego algorytm może być w interakcji ze środowiskiem, w którym się znajduje, wykonując określone akcje na podstawie swoich obserwacji. Każda akcja



Rys. 2. Wielowarstwowa sieć neuronowa – źródło: <http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap5.html>

powoduje przejście do innego stanu i otrzymanie informacji o nagrodzie związanej z wykonaną akcją. Celem algorytmu jest wykonywanie akcji, które spowodują otrzymanie najwyższej nagrody, np. wygranie w grze. Sieci neuronowe mogą być w tym przypadku uczone, jakie akcje wykonywać w danej sytuacji, aby zmaksymalizować swoją nagrodę (takie podejście stosowano m.in. w programie AlphaGo, który w 2016 wygrał w Go z jednym z najlepszych ludzi w tej grze – Lee Sedolem). Tego typu metodę nauczania można z kolei porównać do nauczyciela, który pozwala uczniowi od początku samodzielnie wykonywać działania i podejmować decyzje, dając mu za każdym razem informację zwrotną na temat podejmowanych działań.

Wspomniałem o tym, że sieci neuronowe mogą mieć wiele warstw. Mogą być zorganizowane w sposób hierarchiczny tak, że w kolejnych warstwach następuje przetwarzanie danych z niższego poziomu i wyniki przekazywane są do następnej warstwy (rys. 2). W ten sposób od danych wejściowych, niskopoziomowych, relatywnie prostych, można stopniowo otrzymywać coraz bardziej złożone, wysokopoziomowe informacje. Okazuje się, że w trakcie procesu trenowania sieć neuronowa może nauczyć się pewnych złożonych własności występujących w danych wejściowych, np. pewne neurony aktywują się (tj. funkcja aktywacji przyjmuje wartości dużo większe od zera), gdy w danych występują pewne określone wzorce. Tego typu metody uczenia nazywane są *deep learningiem*, czyli *głębokim uczeniem* – głębokim, bo uczone są sieci mające wiele warstw, a elementy w poszczególnych warstwach uczą się wykrywania i reprezentowania pewnych nieoczywistych (*głębokich*), złożonych własności danych, które zostały użyte w procesie uczenia, w kolejnych warstwach składając w pewnym sensie te złożone własności z elementów prostszych. Jest to jedna z najważniejszych własności decydujących o sukcesie deep learningu – w większości innych metod sztucznej inteligencji potrzebna jest często dość duża wiedza dziedzinowa; to człowiek-naukowiec jest odpowiedzialny za właściwe dobranie atrybutów obiektów występujących w danych, aby metoda dobrze działała. Algorytmy deep learningu mogą same nauczyć się najważniejszych złożonych cech, znacznie przyspieszając pracę naukowców – *nauczycieli maszyn*, oszczędzając ich czas, redukując szanse na popełnienie błędu (poprawiając też w ten sposób skuteczność!), umożliwiając stosowanie tych rozwiązań do wielu rzeczywistych problemów.

Dzięki temu algorytmy sztucznej inteligencji do pewnego stopnia zaczynają zastępować człowieka w... projektowaniu algorytmów sztucznej inteligencji! Często potrzeba jednak znacznie więcej danych, aby sieć neuronowa mogła się wystarczająco dobrze potrzebnych cech nauczyć, potrzebna jest również większa moc obliczeniowa, dlatego obliczenia w sieciach neuronowych przyspieszane są obecnie za pomocą kart graficznych lub klastrów wielu maszyn.

Warto wspomnieć o tym, że w metodach deep learningu elementy w poszczególnych warstwach nie muszą być sztucznymi neuronami, mogą być to również inne transformacje liniowe lub nieliniowe. Głębokie sieci neuronowe nie są więc jedyną realizacją deep learningu i strategii poszukiwania istotnych cech, ale w ostatnich latach okazały się niezwykle skuteczne i znalazły zastosowanie w wielu problemach związanych z rozpoznawaniem złożonych struktur. Na przykład, istnieją już sieci neuronowe potrafiące rozpoznawać obiekty na zdjęciach z większą skutecznością, niż robią to obecnie ludzie (takie metody stosowane są, na przykład, w sensorach pojazdów autonomicznych). Neurony w kolejnych warstwach sieci w procesie trenowania na rzeczywistych obrazach uczą się reprezentowania pewnych cech występujących w tych obrazach. Najniższe warstwy otrzymują na wejściu zwykłe piksele, a kolejne warstwy przetwarzają je do postaci linii, łuków, a potem coraz bardziej skomplikowanych struktur. Z podejściem tym może być jednak pewien problem – w przypadku rozpoznawania złożonych struktur (np. twarzy) na zdjęciach o dużej rozdzielczości potrzebna sieć neuronowa musiałaby mieć wiele warstw i neuronów, a jej trenowanie byłoby bardzo czasochłonnym procesem. Pojawiły się jednak pomysły na specjalne architektury sieci neuronowych, które mogą się sprawdzać bardzo dobrze w takich przypadkach, są to tzw. konwolucyjne (spłotowe) sieci neuronowe, w których układ połączeń pomiędzy neuronami inspirowany jest budową narządu wzroku u ludzi i zwierząt. Neurony tworzą wiele warstw, z których każda ma pewne specyficzne zastosowanie. Neurony w warstwie wejściowej grupowane są w obszary o takim samym rozmiarze (np. 5×5 pikseli), neurony z tego samego obszaru połączone są z neuronem z warstwy wyższej, tworząc tzw. filtr, który w trakcie uczenia sieci odpowiada za wykrywanie pewnej cechy obrazu, np. występowanie kreski lub łuku. Ponieważ dana cecha może wystąpić w dowolnym obszarze obrazka i w każdym obszarze chcielibyśmy ją wykrywać w taki sam sposób, więc filtr o takiej samej strukturze połączeń i z takimi samymi wagami powinien występować dla każdego możliwego obszaru. Jeśli mielibyśmy obrazek o wymiarach $m \times n$, a chcielibyśmy skonstruować filtr obejmujący obszar o rozmiarze $k \times l$ (dla $k < m$ i $l < n$), to potrzebowalibyśmy co najmniej $(m - k + 1) \times (n - l + 1)$ neuronów filtrujących daną cechę (czasami rozszerza się obrazek o piksele zerowe na brzegach, np. aby zachować taką samą liczbę neuronów z warstwy wejściowej i neuronów filtrujących). Neurony w danym filtrze współdzielą odpowiadające sobie wagi

(chcemy w końcu, aby każdy neuron z filtra działał tak samo), co ułatwia znacznie proces trenowania sieci. Filtrów wykrywających pewne niskopoziomowe cechy obrazka może być dużo, wszystkie one tworzą tzw. *warstwę konwolucyjną*. Neurony z warstwy konwolucyjnej połączone są następnie z neuronami z funkcją aktywacji ReLU (warstwa ReLU), które ułatwiają trenowanie sieci, a neurony z warstwy ReLU połączone są z neuronami z warstwy *pooling*, które pomagają wydobyć najważniejsze cechy z wcześniejszych warstw (np. poprzez wyliczanie maksymalnej lub średniej wartości z grupy sąsiednich neuronów z wcześniejszej warstwy). Warstwy konwolucyjna, ReLU i pooling mogą służyć do wykrycia złożonych wzorców, a do wsparcia ostatecznej klasyfikacji obiektu stosuje się tzw. *warstwę gęstą* (ang. *dense layer* lub *fully connected layer*), w której wszystkie neurony z warstwy wcześniejszej są połączone ze wszystkimi neuronami

z warstwy kolejnej. Warstwy te (oraz ewentualnie inne, przystosowane do konkretnego zagadnienia) mogą występować w sieci wielokrotnie, na różnych poziomach, z różnymi konfiguracjami. Zaprojektowanie dobrej sieci neuronowej jest kluczowym czynnikiem decydującym o jej skuteczności i szybkości trenowania i działania.

Obecnie następuje stopniowe przejście informatyki z etapu, w którym komputery są programowane przez człowieka, do etapu, w którym maszyny są przez człowieka uczone. Wszystko wskazuje na to, że jesteśmy na początku wielkiej rewolucji związanej z pojawieniem się na skalę masową sztucznej inteligencji, rozwiązywaniem przez nią coraz bardziej skomplikowanych problemów lepiej niż ludzie i w związku z tym – ze wspomaganiami lub stopniowym wyręczaniem ludzi w wielu wykonywanych przez nich pracach.



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1552. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par liczb całkowitych dodatnich (a, b) , dla których liczba

$$4^{a^2} + 4^{b^2} + 1$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie na str. 2

M 1553. W pewnym kraju jest skończona liczba miast. Między niektórymi parami miast istnieją jednokierunkowe połączenia autobusowe. Sieć komunikacyjna ma tę własność, że nie można zaplanować podróży złożonej z co najmniej jednego kursu, która zaczyna się i kończy w tym samym mieście. Udowodnić, że istnieje miasto, z którego nie można wyjechać autobusem oraz miasto, do którego nie można dojechać.

Rozwiązanie na str. 11

M 1554. W pewnym kraju jest $2n$ miast. Między niektórymi parami miast istnieją dwukierunkowe połączenia lotnicze, których w sumie jest k . Ceny biletów na różnych odcinkach są różne, ale na każdym odcinku cena jest taka sama niezależnie od kierunku lotu. Wyznaczyć najmniejszą stałą c (niezależną od n i k) o tej własności, że zawsze można tak zaplanować podróż złożoną z co najmniej $c \cdot \frac{k}{n}$ przelotów, aby każdy kolejny lot był droższy od poprzedniego.

Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Andrzej MAJHOFER

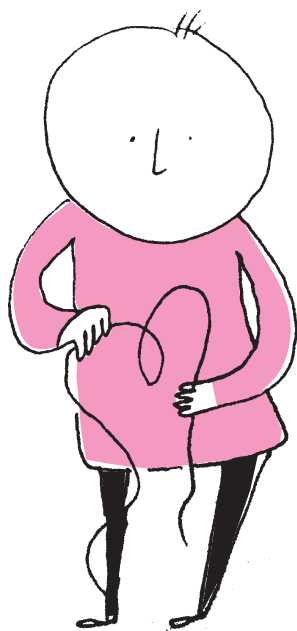
F 943. T.D. Stewart i R.C. Tolman wyznaczyli stosunek ładunku elektronu, e , do jego masy m metodą, w której metaliczne próbki poddawali przyspieszeniom. Wyjaśnij, jak to było możliwe. Przyjmij model swobodnych elektronów w metalu.

Rozwiązanie na str. 10

F 944. Na poziomej, płaskiej elektrodzie metalowej położono jednorodną płaską warstwę dielektryka (izolatora) o grubości d i przenikalności dielektrycznej ε . Na warstwie dielektryka umieszczono kroplę przewodzącej cieczy (elektrolitu) niezwilżającej dielektryka. Jak zmieni się kąt zwilżania θ , gdy do kropli przyłożymy napięcie U względem metalowej elektrody? Napięcia powierzchniowe wynoszą: ciecz-dielektryk γ_{cd} , ciecz-gaz otaczający układ γ_{lg} , a dielektryk-gaz γ_{dg} .

Wskazówka: Napięcie powierzchniowe to energia potrzebna do utworzenia powierzchni rozdziału faz przypadające na jednostkę pola powierzchni. Jest ono również równe sile działającej prostopadle do brzegu takiej powierzchni rozdziału na jednostkę jego długości. Kąt zwilżania to kąt między powierzchniami ciecz-dielektryk i ciecz-gaz.

Rozwiązanie na str. 6



Topologia w fizyce

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Maciej LIS*, Jakub TWORZYDŁO*

W 2016 roku Nagroda Nobla z Fizyki została przyznana za *teoretyczne odkrycia topologicznych przejść fazowych i topologicznych faz materii*. Z kilku przyczyn nagroda ta była dość nietypowa. Komitet Noblowski zdecydował o wyróżnieniu nie pojedynczego, przełomowego odkrycia, ale raczej nagrodził wprowadzenie do fizyki nowych idei, które ukierunkowały i ukształtowały nasz sposób myślenia o fazach materii. Ponadto, co też nietypowe, nagrodzeni badacze to wyłącznie teoretycy, mimo że ich pomysły znalazły późniejsze potwierdzenie eksperymentalne. Komisja zdecydowała też o nierównym podziale nagrody: jej połowę otrzymał David J. Thouless, a drugą połowę podzielili się F. Duncan M. Haldane oraz J. Michael Kosterlitz.

Ciekawostki o laureatach. Wszyscy laureaci są z pochodzenia Brytyjczykami i rozpoczynali swą karierę naukową na Wyspach. Najważniejszą inspiracją do badań było dla nich rozwiązywanie teoretycznych zagadek i łamigłówek, bez szczególnego zwracania uwagi na praktyczne zastosowania. Jak podsumował Duncan Haldane w jednym z pierwszych wywiadów, „zazwyczaj ciężko jest powiedzieć, czy coś będzie użyteczne, czy też nie, ale można łatwo poznać, że coś jest intrygujące”.

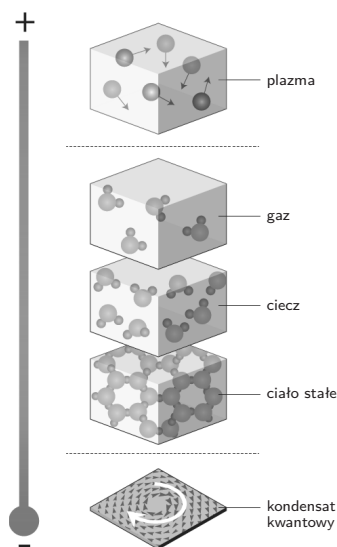
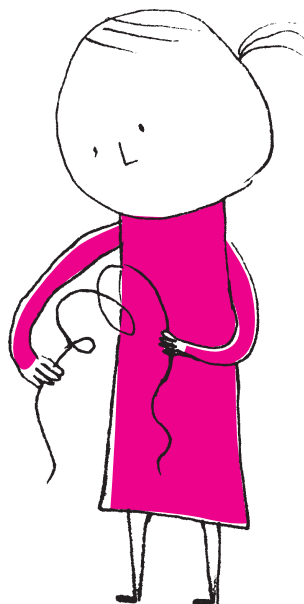
Powodowani ciekawością podejmowali coraz trudniejsze wyzwania naukowe, często takie, o których nikt inny nie odważył się nawet pomyśleć. Co ciekawe, jeden z noblistów ma też znaczące dokonania we wspinaczce alpejskiej. Na forach brytyjskich wspinaczy można odnaleźć pełne zdziwienia wykrzykniki: „słyszeliście, że ten Mike od Szczeliny Kosterlitz, co się z nim wspinałem w latach 70., dostał w tym roku Nobla?”.

Niestety, właśnie w latach 70. kryzys ekonomiczny poważnie dotknął Wielką Brytanię i wszyscy trzej nobliści opuścili swój kraj pochodzenia, emigrując do USA. Tam też, po kilku latach, znaleźli stałe posady i tam też dokonali swoich największych odkryć. Do dziś bardzo aktywnym badaczem jest najmłodszy z całej trójki, Duncan, który z oddaniem poświęca się wykładom dla studentów (stawił się na swoim wykładzie w Princeton w dniu przyznania nagrody), można także odnaleźć w internecie inspirujące prezentacje dotyczące jego najnowszych odkryć.

Fazy materii i porządek. Kluczowym pojęciem, którego zrozumienie pozwoli nam zapoznać się z odkryciami laureatów, jest pojęcie fazy materii. Na co dzień spotykamy materię w stanie gazowym, ciekłym bądź stałym; każdy z nich jest inny i przejście z jednej fazy do drugiej jest dla nas łatwo zauważalne. W ramach żartobliwego eksperymentu myślowego możemy wyobrazić sobie mocno rozgrzaną patelnię, na którą wrzucimy kostki lodu. Faktycznie, wszystkie trzy znane nam stany skupienia wody wystąpią jednocześnie.

Własnością, która wyróżnia stany materii, czy też w ogólniejszym ujęciu fazy materii, jest występowanie (lub nie) odpowiedniego uporządkowania. Przykładowo, cząsteczki wody w lodzie są ułożone w regularną sieć krystaliczną, a w gazie pary wodnej poruszają się zupełnie chaotycznie. Centralnym zagadnieniem teorii materii faz skondensowanych, w ramach której pracowali nobliści, jest klasyfikacja i opis mogących się pojawić faz. Przejścia między fazami (takie, jak np. zamrażanie wody) nie mogą odbyć się w inny sposób niż na drodze zmiany jednego porządku na drugi, co wymaga „rewolucji”, istotnego przeorganizowania.

Fazy kwantowe. W „zwykłych” stanach skupienia atomy, z których składa się substancja, poruszają się w sposób chaotyczny. Oczywiście, na poziomie atomowym obowiązują prawa fizyki kwantowej, często bardzo odległe od naszych klasycznych intuicji. Silnie chaotyczny ruch atomów powoduje jednak, że subtelne prawa fizyki kwantowej ulegają niejako zamazaniu, własności uśrednione względem wielu atomów danej substancji podlegają zupełnie zwyczajnemu opisowi klasycznej mechaniki.



Stany skupienia materii.



Rozwiązanie zadania F 944.

Rozpatrzmy najpierw przypadek bez przyłożonego napięcia. Brzeg kropli na powierzchni dielektryka pozostaje w spoczynku, gdy siły działające na jednostkę jego długości równoważą się. Niech kąt zwilżania w tym przypadku wynosi θ_0 . Mamy więc:

$$\gamma_{lg} \cos \theta_0 + \gamma_{cd} = \gamma_{dg},$$

czyli

$$\cos \theta_0 = \frac{\gamma_{dg} - \gamma_{cd}}{\gamma_{lg}}.$$

Dla znalezienia zmiany kąta zwilżania musimy wiedzieć, jak przyłożenie napięcia zmienia energię rozdziału faz ciec-dielektryk. Przewodząca ciecz i metalowa elektroda tworzą kondensator

o pojemności: $C = \frac{\epsilon S}{d}$, gdzie S oznacza pole powierzchni styku kropli z dielektrykiem. Energia kondensatora naładowanego do napięcia U wynosi

$E = \frac{CU^2}{2}$, ale trzeba też uwzględnić, że podczas ładowania, źródło napięcia wykonuje pracę potrzebną do pokonania stałego napięcia U przez przenoszony ładunek CU . Całkowita zmiana energii układu źródło-kondensator wynosi więc:

$$\Delta E = \frac{-CU^2}{2} = \frac{-\epsilon SU^2}{2d}.$$

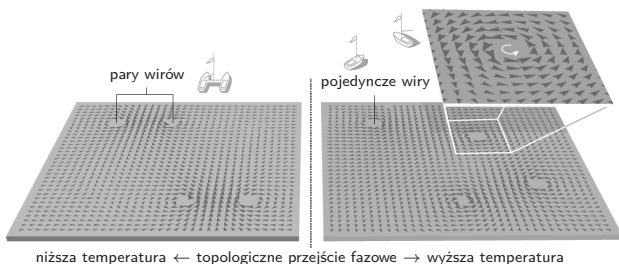
Energia ta zmienia wartość energii rozdziału faz ciec-dielektryk, czyli wartość napięcia powierzchniowego naładowana ciec-dielektryk. Kąt zwilżania θ będzie teraz spełniał zależność:

$$\gamma_{lg} \cos \theta + \gamma_{cd} = \gamma_{dg} + \frac{\epsilon U^2}{2d},$$

a więc

$$\cos \theta = \cos \theta_0 + \frac{\epsilon U^2}{2d\gamma_{lg}}.$$

Okazuje się, że ważną rolę w takim układzie pełnią wiry istniejące w dwuwymiarowym świecie. W niskich temperaturach wiry występują zawsze w parach i poruszają się wspólnie. Przy pewnej, podwyższonej temperaturze korzystniejsze staje się jednak rozdzielenie wirów, które zaczynają poruszać się niezależnie. Liczba wirów rośnie z temperaturą i oczywiste jest, że faza z dużą liczbą niezależnych wirów będzie wyglądać w sposób nieuporządkowany. Teoria wyprowadzona przez KT opisuje ilościowo zjawisko pojawiania się



Topologiczne przejście fazowe w warstwie zimnej materii. Poniżej temperatury przejścia fazowego, wiry występują w parach, a powyżej pojedyncze wiry poruszają się swobodnie.

Prawdziwym wyzwaniem jest badanie kwantowych faz materii, których własności są dalekie od naszych codziennych wyobrażeń. W celu wzmocnienia roli zjawisk kwantowych musimy ograniczyć chaotyczny ruch składowych, co osiągamy przez schładzanie substancji do bardzo niskich temperatur, możliwie najbliższych temperaturze zera bezwzględnego. Drugą możliwością jest ograniczenie wymiarowości badanego układu, w tym celu uzyskujemy bardzo cienkie warstwy powierzchniowe, międzypowierzchnie, czy wprost dwuwymiarowe materiały, takie jak np. grafen. Odkrywamy nowe, niezwykle stany materii, których klasyfikacja umyka naszym intuicjom ukształtowanym w świecie klasycznym. Szczególnym wyzwaniem jest zrozumienie tzw. zjawisk kolektywnych, w których wiele atomów ujawnia wspólne, często nieoczekiwane, zbiorowe własności.

Nadprzewodnictwo i nadciekłość. Najbardziej spektakularnymi kwantowymi fazami materii są stan nadciekły i nadprzewodzący. W pewnych metalach, ochłodzonych poniżej charakterystycznej temperatury bliskiej zera bezwzględnego, oporność spada do zera. Obserwujemy, że raz wzbudzony prąd płynie w nadprzewodzącym pierścieniu praktycznie w nieskończoność (czyli tyle, na ile wystarczy ciepłości wykonującym doświadczenie). Podobnie w nadciekłym helu brak lepkości i jakichkolwiek oporów ruchu powoduje, że ciecz umieszczona w naczynku podnosi się po ściankach i powoli cała wypływa. Tak niezwykle zjawiska są możliwe dzięki powstawaniu wspólnej funkcji falowej opisującej jednocześnie wiele atomów helu (nadciekłość) czy elektronów w metalu (nadprzewodnictwo).

Przejście KT. Na podstawie wiedzy zgromadzonej w latach 60. XX wieku fizycy byli przekonani, że w dwóch wymiarach (czyli w układach, które tworzą cienkie warstwy lub też w warstwach powierzchniowych) nie może istnieć żaden wyróżniony porządek, a więc nie będzie można znaleźć faz ani przejść pomiędzy nimi – materia będzie zachowywała się cały czas równie nieciekawie. Tymczasem Michael Kosterlitz i David Thouless (w skrócie: KT) wykazali, że taki porządek istnieje oraz wskazali mechanizm przejścia pomiędzy dwiema fazami: uporządkowaną i nieuporządkowaną.

Układ będący w fazie nadciekłej (lub nadprzewodzącej) można przedstawić za pomocą modelu pola strzałek, które wskazują kierunek w płaszczyźnie. Mówimy, że jest to model efektywny, ujmujący tylko najistotniejsze cechy układu (czyli np. takie, które decydują o własnościach termicznych). Wspólnie ułożone strzałki, wskazujące jeden kierunek, odpowiadają fazie nadciekłej (lub nadprzewodzącej).

samotnych wirów, które prowadzi do przeorganizowania całego układu. Zdziwiająca jest, że teoria ta przewiduje bardzo proste, uniwersalne prawo: $K_s/(k_B T_c) = 2/\pi$, gdzie K_s jest tzw. sztywnością kondensatu (czyli zmianą energii związanej z małym skróceniem wspólnego kierunku strzałek), k_B to stała Boltzmanna, natomiast T_c jest temperaturą, w której następuje przejście KT. Prawo to zostało sprawdzone dla wielu układów doświadczalnych: warstw nadciekłego helu, granularnych nadprzewodników, ale też warstw ciekłych kryształów oraz magnetyków.

Wir jako obiekt topologiczny. Najważniejszym obiektem, który pojawia się w matematycznym sformułowaniu teorii KT, jest wir dwuwymiarowych strzałek. Wyobraźmy sobie, że okrążamy środek wiru wzdłuż pewnej zamkniętej krzywej i w trakcie naszej podróży notujemy kierunek pola strzałek. Łatwo spostrzec, że strzałka obróci się o pełny kąt. Gdybyśmy jednak zmienili plan naszej podróży, i nie okrążyli środka wiru – wtedy strzałka nie wykona pełnego obrotu. Wielkość, która mierzy „ile razy” obróciła się strzałka,

nosi nazwę indeksu nawinięć. Obiekty matematyczne, które można charakteryzować wielkościami podobnymi do indeksu nawinięć, to jeden z przedmiotów badań topologii. Nasz dwuwymiarowy wir jest tu najprostszym przykładem, wśród fizyków nosi on nazwę defektu topologicznego. Co ciekawe, kolejne uogólnienie indeksu nawinięć, tym razem na pole trójwymiarowych strzałek zaczepionych na sferze, też zostało zastosowane w badaniach noblistów z 2016 roku.

Oczywiście, okazuje się, że odkrycie Kosterliza i Thoulessa było niejako pierwszym, małym krokiem w długiej przygodzie fizyków materii skondensowanej z indeksami topologicznymi i dziwnymi, kwantowymi

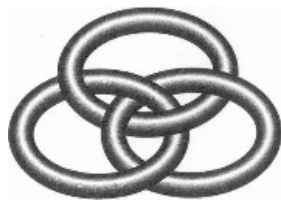
fazami. David Thouless otrzymał swoją „drugą ćwiartkę” nagrody za sklasyfikowanie faz kwantowego efektu Halla. Z kolei Duncan Haldane opisał fazy magnetyczne łańcuchów atomowych – rozszerzając podejście KT, i też uzyskując wyniki idące pod prąd współczesnych mu przewidywań teoretycznych (jednak pomyślnie zweryfikowane w eksperymentach kilka lat później). Wśród badaczy coraz częściej mówi się dziś o topologicznych izolatorach i topologicznych metalach – jako o kontynuacji badań Thoulessa, Haldane’a i Kosterlitz’a. Kto wie, może pod tymi enigmatycznymi nazwami jeszcze innych faz kryje się materiał na kolejną opowieść?



Okręgi Boromeuszy, czyli matematyk rozplątuje supełki

*Szkoła Matematyki 2+2, Jelenia Góra

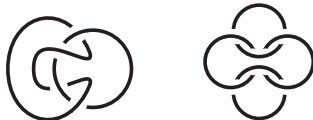
Jacek GŁADYSZ*



Węzły mogą wyglądać np. tak,



a sploty np. tak.



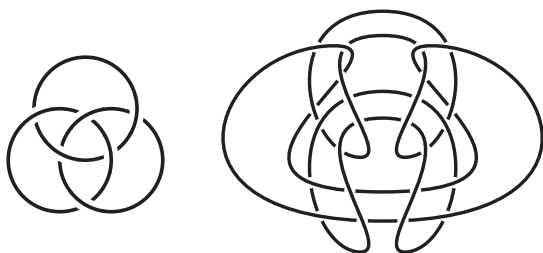
Widoczny obok splot trzech rurek to logo włoskiego rodu Boromeuszy. Splot ten ma interesującą własność: rozcięcie i usunięcie dowolnej z tych rurek sprawia, że pozostałe dwie nie są ze sobą w żaden sposób połączone. W tym miejscu pojawia się naturalne pytanie – czy da się skonstruować splot o podobnej własności dla więcej niż trzech rurek? Okazuje się, że jest to możliwe – konstrukcja taka (podana przez Martina Gardnera) przedstawiona jest na rysunku dla ośmiu rurek. Oczywiście, w podobny sposób można połączyć także większą liczbę okręgów – dziewięć, dziesięć, jedenaście... Domyślamy się, że podążając w przeciwnym kierunku, również uzyskamy pożądany rezultat: metodą podaną przez Gardnera można połączyć ze sobą siedem, sześć, ale również pięć, cztery albo trzy okręgi. I w tym miejscu docieramy do kluczowego dla nas pytania – czy splot wykonany w ten sposób z trzech rurek jest równoważny oryginalnemu splotowi Boromeuszy? Innymi słowy – czy jest możliwe przekształcenie jednego z tych splotów w skończonej liczbie ciągłych ruchów w drugi splot?

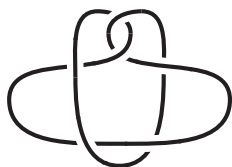
Sprecyzujmy ten problem (a zatem przenieśmy do matematyki). Nie będziemy mówili o rurkach, tylko o węzłach: *węzeł* to krzywa zamknięta, przykładem jest okrąg (dwa inne przykłady widoczne są obok). Kilka węzłów tworzy *splot*. Zarówno węzły, jak i sploty rozpatrujemy w przestrzeni trójwymiarowej. Dwa węzły (czy sploty) są równoważne, jeśli przez przemieszczanie i deformowanie (wyginanie, rozciąganie, ale bez rozrywania czy sklejanie) można z jednego z nich uzyskać drugi.

Uważny Czytelnik spostrzeże, że to, co widzi obok, to nie są ani węzły, ani sploty – rysunek jest płaski. Taki rysunek to *diagram* węzła (czy splotu). Wyraźnie zaznaczone są na nim *mosty* (gdy łuk rysowanej przestrzennej krzywej biegnie nad innym łukiem) i *tunele* (gdy biegnie pod) – łatwo zauważyć, że liczba mostów i tuneli jest na diagramie taka sama.

Nasz problem to zbadanie, czy widoczne obok diagramy splotów przedstawiają sploty równoważne, czy jeden z nich można w sposób ciągły przekształcić na drugi. Pytanie takie zostało zadane w *Delcie* 3/2017, a przedtem i potem powtarza je *Matematyczny Cyrk Delt* na swoich przedstawieniach.

Odpowiedź jest negatywna – te sploty nie są równoważne. Do wykazania, że tak jest, potrzebne nam będą dwa narzędzia: *ruchy podstawowe Reidemeistera* i *trójkolorowalność węzła (splotu)*.

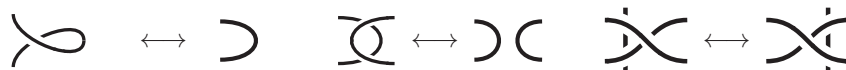




Ruchy podstawowe

Zacznijmy od oczywistej uwagi, że równoważne węzły czy sploty mogą mieć różne diagramy, np. obok widzimy diagram węzła równoważnego okręgowi. Nawet ten sam węzeł może mieć różne diagramy, bo to jakby jego rzut na dowolnie obraną płaszczyznę.

Niemiecki matematyk, Kurt Reidemeister, w 1927 roku wskazał tzw. ruchy podstawowe i udowodnił, że wszystkie możliwe zmiany diagramu sprowadzają się do tych trzech gatunków ruchów:



1. skręcenie/rozknięcie 2. wsunięcie/wysunięcie 3. przesunięcie

Każde ciągle przekształcenie węzła (jak później wykazano – również splotu) da się przedstawić na jego diagramie jako ciąg ruchów podstawowych. Badane przez nas sploty są równoważne, jeśli można wskazać przekształcenie jednego z nich w drugi za pomocą wymienionych ruchów podstawowych.

Trójkolorowalność diagramu

Trójkolorowalność, o której tu mowa, nie ma nic wspólnego z trójkolorowalnością grafu (która, jak wiadomo, jest problemem NP-zupełnym).

Jak łatwo zauważyć, diagram to kilka (kilkanaście, kilkadziesiąt) linii ciągłych, spotykających się w skrzyżowaniach (czyli mostach/tunelach). W każdym skrzyżowaniu spotykają się w diagramie zawsze trzy linie. Pokolorujmy składające się na diagram linie kilkoma kolorami (kolory muszą być co najmniej dwa – diagramy jednokolorowe odrzucamy). Jeśli w każdym skrzyżowaniu spotykają się wszystkie linie w jednym kolorze albo w trzech kolorach, to diagram nazywamy trójkolorowalnym.

Okazuje się, że

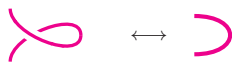
jeśli jeden z diagramów węzła (czy splotu) jest trójkolorowalny, to trójkolorowalny jest każdy diagram równoważnego z nim węzła (czy splotu).

Więcej na temat trójkolorowalności można znaleźć w książce Iana Stewarta *Stąd do nieskończoności – Przewodnik po dzisiejszej matematyce*.

Jeśli zatem diagram jakiegoś splotu jest trójkolorowalny, a innego nie, to sploty te nie są równoważne. Innymi słowy – trójkolorowalność (opisana jak wyżej) jest niezmiennikiem topologicznym ruchów podstawowych. Ale uwaga! – podane tu kryterium jest wyłącznie negatywne: jeśli diagramy dwóch splotów są oba trójkolorowalne, to nie wynika z tego, że sploty są równoważne; podobnie, gdy oba nie są trójkolorowalne.

W myśl powyższych uwag wystarczy dowieść, że ruchy Reidemeistera nie psują trójkolorowalności. Będziemy więc rozpatrywali wszystkie możliwe sytuacje, w których można zastosować te ruchy, pamiętając, że po ich wykonaniu końce rozpatrywanego fragmentu muszą pozostać w tym samym kolorze, w jakim były przed.

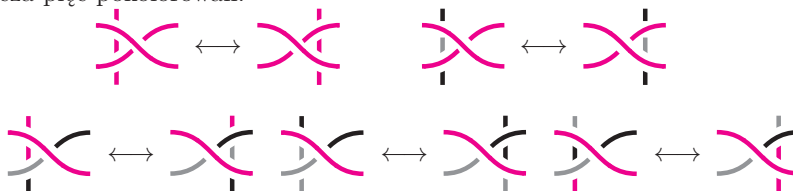
Jeśli diagram jest pokolorowany zgodnie z wymaganiami trójkolorowalności, to sytuacja, w której możemy zastosować ruch 1, ma miejsce tylko, gdy ten fragment jest pokolorowany jednym kolorem (co widać na marginesie).



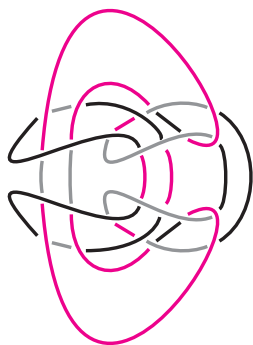
Sytuacja, gdy możemy zastosować ruch 2, dopuszcza poniższe dwie możliwości.



Czytelnik skrupulatny sprawdzi, że sytuacja, w której można zastosować ruch 3, dopuszcza pięć pokolorowań.



Jak widać, w każdej z sytuacji trójkolorowość jest przez ruchy podstawowe zachowywana.



I to pozwala na wykazanie, że splot trzech okręgów wedle recepty Gardnera jest różny od oryginalnego splotu Boromeuszy – pierwszy z nich jest trójkolorowalny (jak widać na marginesie), a drugi nie, co wykażemy. Spróbujemy bowiem pokolorować go zgodnie z zasadami trójkolorowości.

Zacznijmy od skrzyżowania 1, kolorując je trzema kolorami. Wówczas na skrzyżowaniu 2 powinniśmy użyć koloru czarnego, ponieważ spotykają się tam już pozostałe. Ten wybór implikowałby pokolorowanie ostatnich dwóch części



niepomalowanego okręgu również na czarno, bowiem na skrzyżowaniach 3 i 4 już dwie linie będą czarne (więc i trzecia taka być musi). Ale wtedy skrzyżowania numer 5 i 6 nie spełniałyby ustalonych reguł kolorowania.

Z kolei przyjęcie dla skrzyżowania 1 strategii kolorowania jednym kolorem prowadzi do wniosku, że na skrzyżowaniu 2 również powinniśmy użyć tego koloru. Ale wówczas dla pozostałych niepomalowanych części okręgu należałoby wybrać ten sam kolor, a przecież diagramy jednobarwne wykluczamy.

Stąd wniosek, że splot okręgów Boromeuszy nie jest trójkolorowalny. A zatem nie może być w skończonej liczbie ruchów podstawowych przekształcony na splot gardnerowski – *quod erat demonstrandum*.

Na sam koniec warto, być może, oddać się następującej refleksji. Na ile w zajmowaniu się matematyką istotna jest intuicja, a na ile formalizm? W przypadku rozwiązania omawianego problemu ważne było jedno i drugie. Tytułowych „supelków” nie dałoby się rozplątać bez wyrobienia w sobie przekonania na temat tego, czy omawiane sploty są równoważne czy też nie – pierwszym etapem znalezienia odpowiedzi była zatem czysta zabawa wyobraźnią. Gdyby na tym jednak

poprzestać, całość prac okazałaby się jałowa – formalizm na pewnym etapie był konieczny, by doprowadzić rozumowanie do końca i dojść do rozwiązania.

Oczywiście formalizm, z którego tu korzystaliśmy, był minimalny. Łatwo się jednak domyślić, że w przypadku problemów o większym stopniu złożoności wykorzystuje się bardziej zaawansowany aparat teoretyczny. Parafrazując zatem powszechnie znaną frazę, można by rzec – wyobraźnia jest równie ważna jak wiedza.

Gra w sumo

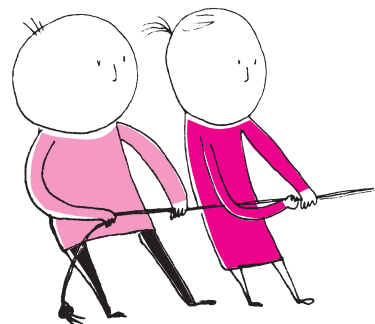
Michał MIŚKIEWICZ*

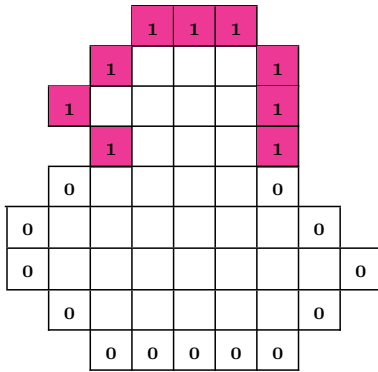
*doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czy Czytelnik zna grę w przeciąganie liny? Dwie drużyny ciągną dwa końce liny w przeciwne strony, a wygrywa ta, której uda się przeciągnąć linę na swoją stronę. Ściślej, gra kończy się w momencie wyjścia środka liny (zazwyczaj oznaczonego wstążką) z umówionego pola gry. Matematycy przypisują tę samą nazwę podobnej grze rozgrywanej się w dwóch (i więcej) wymiarach, w której to środek liny może poruszać się w wielu kierunkach, a nie tylko lewo-prawo. Trudno sobie jednak takie przeciąganie wyobrazić, dlatego przyjąłem termin *gra w sumo*.

Plansza do gry w sumo (dalej oznaczana przez $\bar{\Omega}$) składa się z pewnej liczby pól na szachownicy. Każde pole szachownicy P ma czterech sąsiadów, oznaczanych tutaj P_1, P_2, P_3, P_4 . Pole nazwiemy *wewnętrznym*, jeśli leży na planszy razem ze swoimi sąsiadami, w przeciwnym przypadku nazwiemy je *brzegowym*. Zbiór pól wewnętrznych oznaczmy przez Ω , a brzegowych przez $\partial\Omega$.

Dwoje zawodników, Jaś i Małgosia, zaczyna grę na pewnym polu P leżącym na planszy. Jeśli pole P jest brzegowe, gra się kończy. W przeciwnym przypadku rzut symetryczną monetą decyduje, który z zawodników uzyskuje w tej turze przewagę nad przeciwnikiem, dzięki czemu przepycha go na wybrane przez siebie sąsiednie pole (i z rozpędu sam też tam ląduje). Gra toczy się w turach do momentu, gdy gracze wylądują na polu brzegowym.





Rys. 1. Przykładowa plansza i funkcja rozstrzygnięcia. Jak widać, Małgosia postanowiła dać Jasiowi fory.

Na marginesie pozostawiam pytania, które Czytelnika mogą słusznie zaniepokoić: czy racjonalna strategia w ogóle istnieje? co zrobić, jeśli gra toczy się w nieskończoność bez rozstrzygnięcia? Odpowiedź na te i inne wątpliwości można znaleźć w skrypcie Julio Rossiego *Tug-of-war games. Games that PDE people like to play*, dostępnym na jego stronie.



Rozwiązanie zadania F 943.

Jeśli przewodnik poddamy jednostajnemu przyspieszeniu a , to elektrony przewodnictwa (przyjmujemy, że wewnątrz metalu zachowują się jak cząstki swobodne) doznają względem sieci krystalicznej metalu przyspieszenia $-a$, co odpowiada ruchowi w polu elektrycznym E :

$$-ma = -eE.$$

Pole $E = am/e$ wywołuje przepływ prądu o gęstości $j = \sigma am/e$, gdzie σ oznacza przewodnictwo właściwe metalu. Wartość tego prądu można zmierzyć i (zmierzywszy również przyspieszenie i przewodnictwo właściwe) wyznaczyć żądany stosunek:

$$\frac{e}{m} = \frac{\sigma a}{j}.$$

Opis doświadczeń i wyników pomiarów można znaleźć w *Physical Review* 8, 97 (1916).

Czytelnik może rozumieć $h(P)$ jako maksymalną wartość $v(P)$ dla wszystkich $v \in V$. Ze względów technicznych korzystamy tu z pojęcia supremum, bo maksimum mogłoby nie istnieć.

Kto wygrywa? Podobnie jak w grze w przeciąganie liny, musimy się na coś umówić. Dojście do pewnych pól brzegowych będzie oznaczać wygraną Jasia, a do innych – Małgosi. Przyjętą umowę możemy opisać za pomocą jednej funkcji $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, określonej wzorem

$$g(P) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli dojście do } P \text{ daje wygraną Małgosi,} \\ 0 & \text{jeśli Jasiowi.} \end{cases}$$

Przebieg gry jest więc zdeterminowany przez planszę $\bar{\Omega}$, funkcję rozstrzygnięcia g , decyzje zawodników, losowe wyniki rzutów monetą oraz wybór pola startowego.

W dalszej części artykułu przyjmiemy, że Jaś i Małgosia mają ustalone racjonalne strategie, czyli przy każdym przepchnięciu przeciwnika wybierają sąsiednie pole w taki sposób, by zmaksymalizować prawdopodobieństwo swojej wygranej. Jeśli dodatkowo ustalimy pole startowe P , to gra jest już czysto losowa i możemy określić warunkowe prawdopodobieństwo wygranej Małgosi:

$$h(P) := \mathbb{P}(\text{wygra Małgosia} \mid \text{gra startuje z } P).$$

W ten sposób otrzymaliśmy pewną funkcję $h: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Gdy P jest polem brzegowym, gra kończy się już na starcie, a jej rozstrzygnięcie jest opisane funkcją g , a zatem $h(P) = g(P)$. Rozgrywka robi się ciekawsza, jeśli P jest polem wewnętrznym. Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ chwilową przewagę uzyska Małgosia i przepchnie Jasia na takie sąsiednie pole P_i (gdzie $i = 1, 2, 3, 4$), dla którego prawdopodobieństwo przyszłej wygranej $h(P_i)$ jest możliwie największe. Jeśli z kolei los padnie na Jasia, wybierze on takiego sąsiada P_j , dla którego $h(P_j)$ jest najmniejsze. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} h(P) &= \mathbb{P}(\text{wygra M} \mid \text{start z } P) = \\ &= \mathbb{P}(\text{wygra M} \mid \text{start z } P_i) \mathbb{P}(\text{ruch M}) + \mathbb{P}(\text{wygra M} \mid \text{start z } P_j) \mathbb{P}(\text{ruch J}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\max_{i=1,2,3,4} h(P_i) + \min_{j=1,2,3,4} h(P_j) \right). \end{aligned}$$

Dla dowolnej funkcji h różnicę obu stron powyższej równości oznaczmy przez

$$\Delta h(P) := \frac{1}{2} \left(\max_{i=1,2,3,4} h(P_i) + \min_{j=1,2,3,4} h(P_j) \right) - h(P).$$

Wyrażenie to jest nazywane dyskretnym operatorem ∞ -Laplace'a (choć Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) nigdy takiego nie rozważał).

Dotychczasowe rozważania możemy podsumować następująco – funkcja $h: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta h(P) = 0 & \text{dla } P \in \Omega, \\ h(P) = g(P) & \text{dla } P \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Do znalezienia rozwiązania wykorzystamy metodę noszącą imię Oskara Perrona (1880–1975); noszącą bardzo słusznie, gdyż to jemu ją zawdzięczamy. Opiera się ona na własnościach funkcji v spełniających nierówność $\Delta v \geq 0$ zamiast równości. Są to tak zwane *podrozwiązania*, których rodzinę oznaczmy przez

$$V = \{v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : \Delta v(P) \geq 0 \text{ dla } P \in \Omega, v(P) = g(P) \text{ dla } \partial\Omega\}.$$

Rodzina V jest niepusta – należy do niej, na przykład, funkcja v zerująca się na Ω i równa funkcji g na $\partial\Omega$. Ponadto wszystkie funkcje $v \in V$ są ograniczone z góry przez 1, co wynika z następującego faktu:

Zadanie 1 (zasada maksimum). Jeśli $\Delta v(P) \geq 0$ dla $P \in \Omega$ oraz $v(P) \leq M$ dla $P \in \partial\Omega$, to również $v(P) \leq M$ dla $P \in \Omega$.

Wskazówka. Jeśli $v(P)$ przyjmuje największą wartość dla pewnego pola $P \in \Omega$, to przyjmuje tę samą wartość również dla wszystkich pól sąsiednich.

Jesteśmy teraz gotowi zdefiniować rozwiązanie.

Twierdzenie (o istnieniu). Funkcja $h: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$h(P) = \sup_{v \in V} v(P)$$

jest rozwiązaniem zagadnienia (*).



Rozwiązanie zadania M 1553.
 Każdą podróż złożoną z co najmniej jednego kursu autobusem nazwiemy *trasą*; skoro żadna trasa nie odwiedza tego samego miasta więcej niż raz, to wszystkich tras jest skończenie wiele. Wobec tego możemy wybrać (co najmniej jedną) trasę t złożoną z maksymalnej możliwej liczby kursów.

Miasto na końcu trasy t ma tę własność, że nie kursuje zeń żaden autobus – w przeciwnym przypadku można by przedłużyć trasę o ten kurs, otrzymując albo trasę dłuższą (co przeczy wyborowi t), albo trasę odwiedzającą dwa razy to samo miasto (co przeczy założeniom zadania). Podobnie początek trasy t to miasto, do którego nie można dojechać autobusem.

Dotychczasowe uwagi na temat rodziny V pozwalają stwierdzić, że powyższy wzór jest poprawny, a ponadto $0 \leq h(P) \leq 1$ dla wszystkich $P \in \bar{\Omega}$. Narzuca się pytanie, czy znaleziona właśnie funkcja h pokrywa się z rozważaną wcześniej funkcją opisującą prawdopodobieństwo wygranej. Poniższe zadanie rozwiewa tę wątpliwość.

Zadanie 2 (jednoznaczność). Zagadnienie (\star) ma tylko jedno rozwiązanie.

Wskazówka. Rozważyć dwa rozwiązania h_1, h_2 i powtórzyć rozumowanie z zadania 1 dla funkcji $h_1 - h_2$, starannie dobierając punkt o ekstremalnych własnościach.

Dowód twierdzenia opiera się na dwóch wyjątkowych własnościach rodziny V , których samodzielne sprawdzenie nie powinno sprawić Czytelnikowi problemu.

Zadanie 3. Jeśli funkcje v_1, \dots, v_k należą do V , to funkcja v określona jako ich maksimum

$$v(P) = \max(v_1(P), \dots, v_k(P)) \quad \text{dla } P \in \bar{\Omega}$$

również należy do V .

Zadanie 4. Jeśli $v \in V$ oraz $P \in \Omega$, to funkcja $\bar{v}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ określona przez

$$\bar{v}(P) = \frac{1}{2} \left(\max_{i=1,2,3,4} v(P_i) + \min_{j=1,2,3,4} v(P_j) \right),$$

$$\bar{v}(Q) = v(Q) \quad \text{dla } Q \neq P$$

również należy do rodziny V . Ponadto $\Delta \bar{v}(P) = 0$ oraz $v(Q) \leq \bar{v}(Q)$ dla $Q \in \bar{\Omega}$.

Dowód twierdzenia. Równość $h(P) = g(P)$ dla $P \in \partial\Omega$ wynika wprost z określenia V i h , pozostaje nam sprawdzić równość $\Delta h = 0$; ustalmy więc pole $P \in \Omega$. Z określenia h wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $v_0 \in V$ spełniająca $v_0(P) > h(P) - \varepsilon$. Podobnie dla każdego sąsiedniego pola P_i znajdziemy funkcję $v_i \in V$, dla której $v_i(P_i) > h(P_i) - \varepsilon$. Ich wspólne ograniczenie $v = \max(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ należy do rodziny V na mocy zadania 3 oraz

$$v(Q) > h(Q) - \varepsilon \quad \text{dla } Q \in \{P, P_1, P_2, P_3, P_4\}.$$

Skonstruowana w zadaniu 4 funkcja \bar{v} również spełnia te nierówności, a ponadto dzięki $\bar{v} \in V$ mamy $\bar{v}(Q) \leq h(Q)$ dla wszystkich $Q \in \bar{\Omega}$. W rezultacie

$$\left| \max_{i=1,2,3,4} h(P_i) - \max_{i=1,2,3,4} \bar{v}(P_i) \right|, \left| \min_{j=1,2,3,4} h(P_j) - \min_{j=1,2,3,4} \bar{v}(P_j) \right| < \varepsilon.$$

Porównanie liczb $\Delta h(P)$ i $\Delta \bar{v}(P)$ (ta druga jest zerem!) przy użyciu nierówności trójkąta daje

$$|\Delta h(P)| = |\Delta h(P) - \Delta \bar{v}(P)| < \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$, a więc zachodzi żądana równość $\Delta h(P) = 0$. \square

Zależnie od swojego filozoficznego usposobienia Czytelnik może być z tego dowodu zadowolony lub nie. *Wykazaliśmy istnienie* rozwiązania h , ale *nie wyznaczyliśmy* funkcji h jawnym wzorem. Tę wadę ma zresztą większość metod stosowanych obecnie w równaniach różniczkowych cząstkowych, do których zagadnienie (\star) zalicza się jako dyskretny odpowiednik.

Problem ten można częściowo obejść. Funkcja h jest większa lub równa każdej funkcji $v \in V$, więc stosując na przemian konstrukcje z zadań 3 i 4, możemy znaleźć coraz lepsze przybliżenia z dołu. Gdybyśmy natomiast w definicji rodziny V zastosowali przeciwny znak nierówności (czyli $\Delta v \leq 0$), to funkcję h otrzymalibyśmy jako infimum tej rodziny, co pozwala znaleźć przybliżenia h również z góry. W ten sposób możemy znaleźć wartości h z dokładnością dwóch cyfr po przecinku dla planszy z rysunku 1. Warto zwrócić uwagę, że dopiero wtedy jesteśmy w stanie przeprowadzić symulację naszej rozgrywki. O dziwo, w rzeczywistości zawodnicy sumo radzą sobie doskonale bez wykonywania takich obliczeń. . .

			1	1	1				
			1	0,92	0,88	0,91	1		
		1	0,92	0,85	0,77	0,83	1		
			1	0,83	0,66	0,66	1		
		0	0,50	0,66	0,49	0,33	0		
	0	0,16	0,33	0,49	0,37	0,24	0,12	0	
	0	0,11	0,22	0,33	0,24	0,16	0,11	0,05	0
		0	0,11	0,16	0,12	0,08	0,05	0	
			0	0	0	0	0		

Rys. 2. Przybliżone rozwiązanie dla planszy i funkcji rozstrzygnięcia z rysunku 1.



mała delta

Gwiazda potęgowa

Dawno, dawno temu żył sobie beztrąsko król wraz ze swoją piękną córką. Jak to czasem w zbyt szczęśliwych królestwach bywa, pewnego razu czarnoksiężnik przybył na dwór, żeby porwać królową i uwięzić ją w swojej upiornej wieży. Zgodnie z zasadami dobrego wychowania mrocznych czarodziej, do których należał, musiał dać mieszkańcom królestwa możliwość ocalenia królowy przed swoim nieczym planem. Czarodziej wyciągnął zza pazuchy kartkę, na której były narysowane dwa odcinki i rzucił:

– Krótszy z narysowanych odcinków ma długość 1, dłuższy a . Żądam odcinka długości $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$!

Król pochylił się nad kartką, zmarszczył czoło i po chwili odparł z wielką ulgą:

– Przecież to proste! Wystarczy wziąć linijkę, zmierzyć dłuższy odcinek, obliczyć wartość a^5 i odmierzyć odcinek o obliczonej długości a^5 .

– Oczywiście w zadaniu jest pewien kruczek. . .

– kruczki były dobrą czarodziejską praktyką. – Zaczarowałem wszystkie linijki w królestwie tak, że zniknęły z nich podziałki. Do dyspozycji masz jedynie odcinki długości 1 i a , których nie sposób dokładnie zmierzyć, linijkę bez podziałki oraz cyrkiel. – uśmiechnął się przebiegle.

Król czym prędzej wyciągnął swoją królewską linijkę i, o zgrozo, stwierdził, że podziałka faktycznie zniknęła. Sposepniał. . . W głowie pobrzmiwały mu przekłete słowa pewnego mędrca, że w matematyce nie ma specjalnej drogi dla królów.

– Królu, masz czas do jutra, do godziny będącej najmniejszą liczbą naturalną, mającą dokładnie sześć różnych dzielników! Jeśli do tego czasu nie otrzymam rozwiązania, królowa zostanie zamknięta w mojej wieży na zawsze! – rzekł czarnoksiężnik głosem tak donośnym, że echo rozniosło po królestwie wieść o zadaniu w tempie wykładniczym.

Wielu mieszkańców królestwa próbowało je rozwiązać, ale suma wyników ich starań niezmiennie

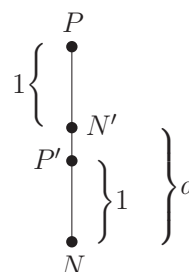
była zbiorem pustym. A czas uciekał. . . Dopiero nad ranem następnego dnia zadanie dotarło do pewnego rycerza, będącego z zamiłowania geometrą. Rozważał właśnie sprawę zakupu kanapy. Chciał, żeby była możliwie jak największa, ale na tyle mała, żeby można było ją przesunąć korytarzem w kształcie litery L i szerokości 1 metra. Problem okazał się trudniejszy, niż rycerzowi się zdawało (*problem przesunięcia sofy*) i stwierdził, że dobrze byłoby na chwilę oderwać się od bieżącego zajęcia. Zastanowił się chwilę nad sprawą odcinków czarnoksiężnika, zakręcił swoim wężem, zastanowił się kolejną chwilę i czym prędzej pognął do królewskiego pałacu zaprezentować rozwiązanie. Dotarł tuż przed dwunastą i rzekł ciepłym głosem do zapłakanej królowy:

– Wiem, jak rozwiązać zadanie czarodzieja.

Król, zaskoczony pewnością siebie rycerza, zarządził.

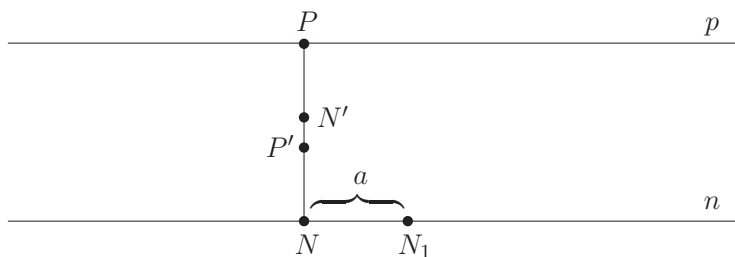
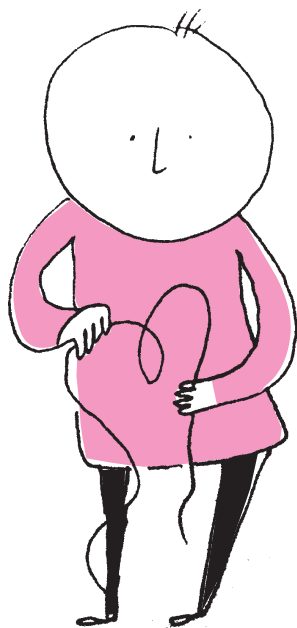
– Dajcie mu papier. Niezwłocznie podano mu kartkę oraz uzbrojenie w postaci ołówka, cyrkla i nawet królewskiej linijki.

– Mamy odcinki długości 1 i a . Skonstruowanie odcinka długości $a + 1$ to nie problem, oznaczmy go NP . Następnie na tym odcinku zaznaczamy takie punkty N' oraz P' , że $|NN'| = |N'P| = 1$. Z pomocą cyrkla to zupełna błahostka.

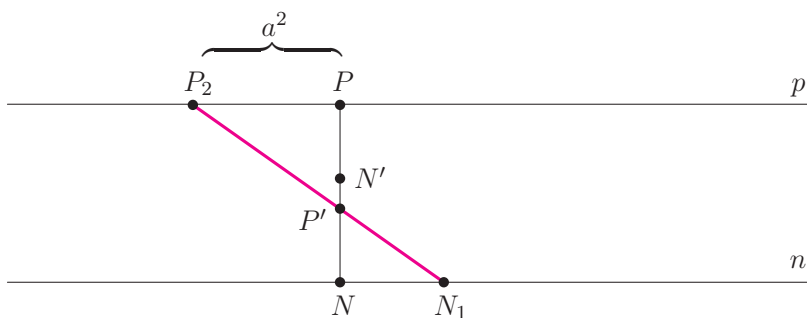


– Teraz prowadzimy proste n i p prostopadłe do odcinka NP i zawierające, odpowiednio, punkty N i P . – tutaj rycerz namachał się nieco cyrkiem.

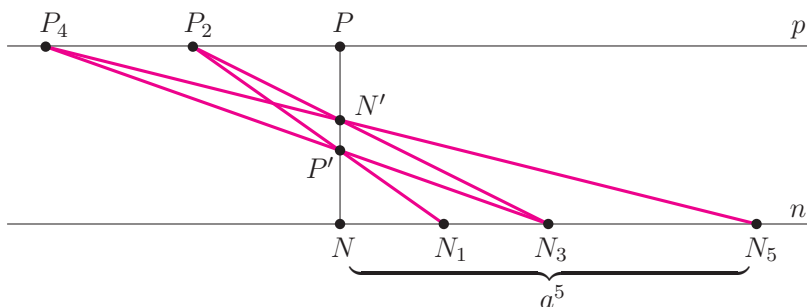
– Na prostej n zaznaczamy punkt N_1 tak, że $|NN_1| = |NN'| = a$. Jesteś już tak blisko!



– Przez punkty N_1 i P' prowadzimy prostą. Punkt jej przecięcia z prostą p oznaczmy P_2 . Długość odcinka PP_2 jest równa a^2 .



– Z punktu P_2 prowadzimy prostą, przechodzącą przez punkt N' . Punkt jej przecięcia z prostą n oznaczmy przez N_3 . Długość odcinka NN_3 to a^3 . Jeszcze raz, podobnie, przechodzimy przez punkt P' , otrzymując punkt P_4 . Potem przechodzimy przez punkt N' i otrzymujemy punkt N_5 . Odcinek NN_5 jest rozwiązaniem Twojego zadania, czarnoksiężniku.



Czarnoksiężnik już przy punkcie N_1 zrozumiał swoją sromotną klęskę. Dobrze wiedział, że odcinek NN_5 ma długość a^5 . Rycerz widząc pokonaną minę czarodzieja, rzekł zuchwale:

– W mig mogę skonstruować odcinek długości a^6 czy a^{12} . Nawet więcej, delikatnie modyfikując metodę, mogę otrzymać odcinki o długości $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^5}$, czy $\frac{1}{a^{10}}$.

Królowna w lot pojęła, na czym polegała metoda rycerza i sama, tak dla rozrywki, zaczęła konstruować odpowiednie odcinki.

– Ciekawe... Rycerzu, w Twojej metodzie łamana powstająca z odcinków między prostymi równoległymi przypomina gwiazdę. Nazwijmy ją gwiazdą potęgową!

Dobre wychowanie czarnoksiężnika kazało mu pogratulować rycerzowi, odczarować wszystkie linijki w królestwie i zniknąć do czasu, kiedy wszyscy o nim zapomną. Królowna, zobaczywszy, jak biegly

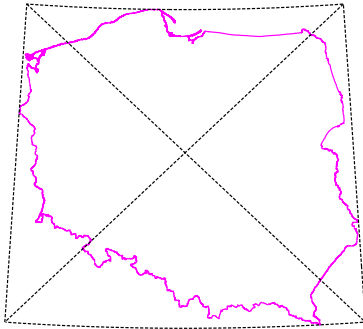
w geometrii jest jej wybawca, zgodziła się zostać jego żoną. Rycerz został królewiczem i długo i szczęśliwie zabawiał księżniczkę geometrią, pokazał między innymi, w jaki sposób mając dane dwa odcinki a i b , konstruować odcinek, którego długość jest iloczynem a i b , opowiedział o problemie sofy. Oczywiście, żyli też długo i szczęśliwie i codziennie wieczorem w blasku zamkowego kominka wspólnie radośnie uprawiali matematykę.

Małą Deltę przygotował Bartłomiej PAWLIK

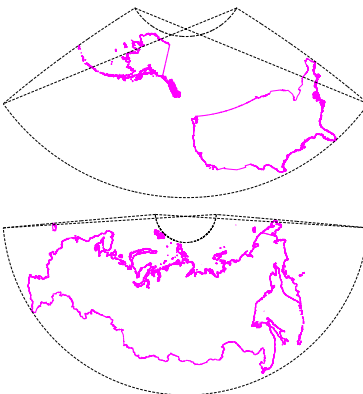
Wyznaczamy środek Polski

Piotr RÓŻAŃSKI*

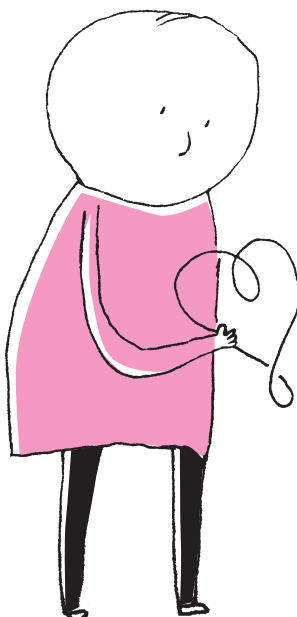
*Kolegium Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Środek Polski wyznaczony popularną metodą.



Rys. 2. Środki Stanów Zjednoczonych i Rosji wyznaczone popularną metodą.



Według niezliczonych źródeł internetowych (w tym polskiej Wikipedii) geometryczny środek Polski znajduje się w miejscowości Piątek. Zastosowana do uzyskania tego wyniku metoda opiera się na wyznaczeniu figury sferycznej złożonej z fragmentów południków i równoleżników przechodzących przez najbardziej wysunięte w czterech kierunkach świata punkty naszego kraju, a następnie wyznaczeniu przecięcia ortodrom (są to „linie proste” na sferze, czyli fragmenty okręgów wielkich) łączących przekątniowo te cztery punkty.

Warto zauważyć, że choć w przypadku Polski wynik (rys. 1) nie budzi wyraźnych wątpliwości (choć konia z rżędem temu, komu w wyniku precyzyjnego zastosowania tej metody uda się otrzymać miejscowość Piątek), to wykorzystanie tej samej metody do dużo bardziej niesymetrycznego obszaru Stanów Zjednoczonych wraz z Alaską da w wyniku środek USA położony... w Kanadzie! Wpływ odległej Alaski okazuje się tutaj decydujący, pomimo że jej powierzchnia stanowi jedynie 18% powierzchni całego kraju. Ten sam problem, tylko z większym natężeniem, napotykamy w przypadku Rosji – dla tego kraju wyznaczony środek leży niemal na północnym biegunie geograficznym (rys. 2).

Czy można lepiej?

Podstawowy problem z powyższą metodą polega na zależności wyniku od wyboru układu współrzędnych. Przykładowo, gdybyśmy wykreślili mapę nie względem bieguna geograficznego, lecz np. magnetycznego, położenia południków i równoleżników zmieniłyby się. Inne byłyby zatem punkty skrajne we wszystkich kierunkach i w zupełnie innym punkcie otrzymalibyśmy przecięcie ortodrom, pomimo że zastosowaliśmy jedynie inny układ współrzędnych. Intuicyjnie zdajemy sobie natomiast sprawę, że w przypadku każdego rzeczywistego przedmiotu względne położenie jego „środka” (jakkolwiek zdefiniowanego) nie powinno zależeć od jego obrotu lub przesunięcia. Oczekiwalibyśmy więc tej samej prawidłowości również dla metody wyznaczania środka rozległego obszaru na kuli ziemskiej.

Analogia do rzeczywistych, trójwymiarowych obiektów kieruje naszą uwagę na pojęcie „środka masy” (środka ciężkości), które jest dobrze zdefiniowane dla obiektów o dowolnym kształcie i strukturze. W przypadku obiektów o stałej gęstości możemy mówić o pojęciu centroidu, zdefiniowanego jako średnia z położenia wszystkich punktów wchodzących w skład bryły lub figury geometrycznej. Warto zauważyć, że wyznaczony w ten sposób „środek” jest niezależny od wyboru układu współrzędnych.

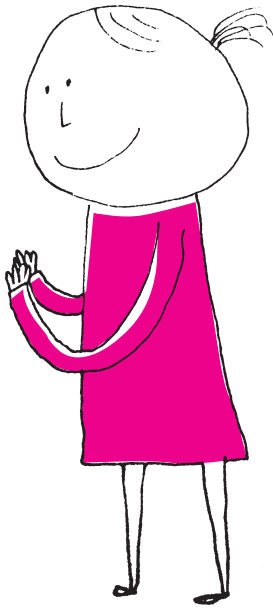
Musimy, oczywiście, przyjąć pewne założenia: jako obszar Polski rozumiemy wielokąt sferyczny lub elipsoidalny o ustalonych wierzchołkach. Położenia tych wierzchołków możemy pobrać ze strony internetowej Centralnego Ośrodka Dokumentacji Geodezyjnej i Kartograficznej (www.codgik.gov.pl). Będziemy przy tym opierać nasze obliczenia o tzw. *obszar administracyjny* Polski, zawierający, poza obszarem lądowym, również polską część Zalewu Szczecińskiego, ale niezawierający polskiej części Zalewu Gdańskiego i Wiślanego.

Metoda

W przypadku figury płaskiej \mathcal{F} o K wierzchołkach $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ i polu powierzchni równym P położenie środka masy \vec{R}_c możemy obliczyć przy użyciu wzoru

$$(1) \quad \vec{R}_c = \frac{1}{6P} \sum_{i=1}^K (\vec{r}_i + \vec{r}_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

Powyższa równość zachodzi wyłącznie dla figur płaskich, więc aby była dla nas użyteczna, musimy najpierw skorzystać z rzutowania (odwzorowania kartograficznego). Oznaczmy jako \mathcal{F}_P obszar administracyjny Polski wyrażony



we współrzędnych wybranego odwzorowania. Wykorzystując wprost powyższy wzór do całej figury \mathcal{F}_P , wprowadzilibyśmy znaczący błąd związany z wyborem konkretnego odwzorowania oraz utracilibyśmy możliwość wykonywania dokładnych obliczeń w trzech wymiarach. Aby zminimalizować wpływ tego kroku, możemy podzielić figurę \mathcal{F}_P na M rozłącznych „komórek” \mathcal{F}_i , takich że $\bigcup \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_P$, i skorzystać z następującej tożsamości dla środka masy:

$$(2) \quad \vec{R}_c = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^M \vec{R}_i \Delta P_i,$$

gdzie ΔP_i jest polem powierzchni komórki \mathcal{F}_i , a \vec{R}_i jest trójwymiarowym wektorem położenia jej środka masy.

Środki masy \vec{R}_i poszczególnych komórek możemy teraz obliczyć, korzystając ze wzoru (1) we współrzędnych odwzorowania, a następnie przeliczyć z powrotem do trójwymiarowych współrzędnych kartezjańskich. Z uwagi na dowolność wyboru odwzorowania skorzystanie z odwzorowania wiernopowierzchniowego (np. odwzorowania Albersa) pozwoli nam na dokładne wyznaczenie pól powierzchni komórek niezależnie od ich rozmiaru i kształtu. Dodatkowo, jeśli rozmiary komórek będą odpowiednio małe (czyli przy odpowiednio dużym M), wpływ zastosowanego odwzorowania na wyznaczone środki masy \vec{R}_i będzie zaniedbywalny, co w prosty sposób zweryfikujemy, badając, czy wyniki zmieniają się wraz ze zmianą np. punktu centralnego odwzorowania.

Ponieważ badany obszar \mathcal{F}_P jest dość skomplikowany (jego brzeg składa się z ponad 73000 wierzchołków), nie możemy na nim w prosty sposób określić siatki numerycznej. Wprowadzimy zatem obszar \mathcal{G}_P , będący prostokątem we współrzędnych rzutowania x, y , takim, że $\mathcal{F}_P \subset \mathcal{G}_P$, a więc zawierającym w całości projekcję badanej figury \mathcal{F}_P . Tak zdefiniowany prostokątny obszar możemy w dowolny sposób podzielić na $M = N^2$ mniejszych, prostokątnych komórek \mathcal{G}_i .

Dla każdej prostokątnej komórki \mathcal{G}_i ograniczającego obszaru \mathcal{G} możemy wyznaczyć obszar komórki \mathcal{F}_i (która niekoniecznie musi być prostokątem) na płaszczyźnie jako $\mathcal{F}_i = \mathcal{G}_i \cap \mathcal{F}$. Dla każdej komórki \mathcal{F}_i musimy następnie odpowiedzieć na dwa pytania: (a) jakie jest położenie środka masy \vec{R}_i danej komórki, oraz (b) jakie jest pole powierzchni ΔP_i danej komórki. Następnie na podstawie wzoru (2) obliczamy położenie środka masy obszaru \mathcal{F}_P .

Warto zauważyć, że jeśli zakładamy, że pomiędzy zdefiniowanymi punktami granica Polski biegnie po linii prostej, to chcielibyśmy, aby linie proste na elipsoidzie (geodezyjne) były również liniami prostymi w naszym wybranym odwzorowaniu. Dla zastosowanego tu odwzorowania wiernopowierzchniowego nie jest to, ściśle mówiąc, spełnione, lecz z uwagi na to, że dane CODGIK zdefiniowane są na bardzo drobnej siatce (średnia odległość pomiędzy sąsiednimi punktami granicznymi wynosi 49 m), nie ma to istotnego wpływu na wynik.

Wyniki

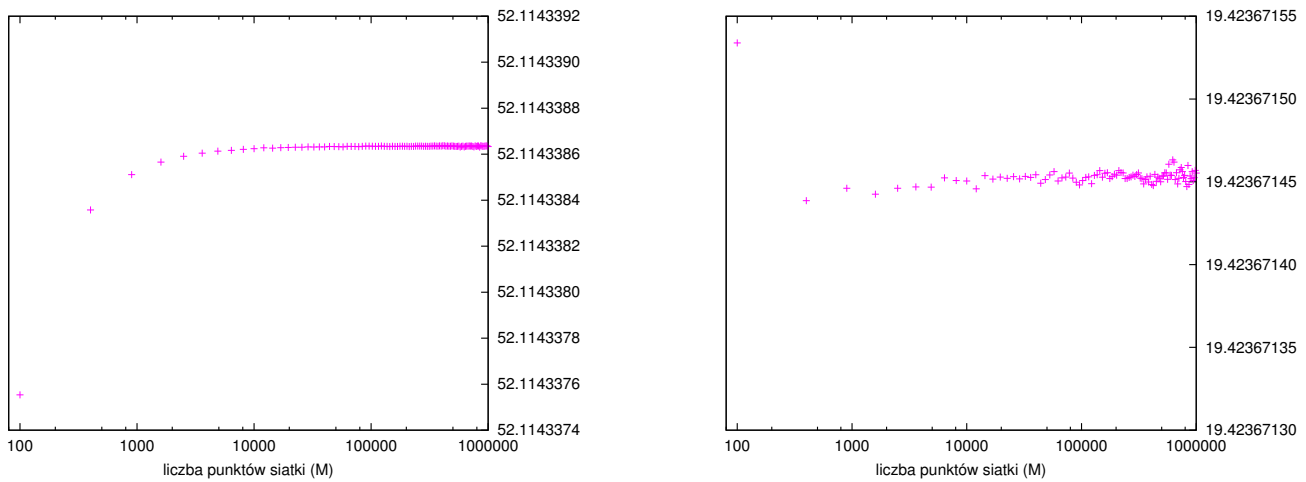
Pełny kod źródłowy programu znajduje się pod adresem github.com/develancer/srodek

Do wykonania obliczeń posłużył program komputerowy napisany w C++ z użyciem biblioteki *GeographicLib* (do przeliczania współrzędnych) oraz biblioteki *boost::geometry* do obliczeń geometrycznych na płaszczyźnie. Dla zminimalizowania wpływu błędów numerycznych przyjęto przekształconą postać wzoru (2):

$$(3) \quad \vec{R}_c = \vec{R}_0 + \frac{1}{P} \sum_{i=1}^M (\vec{R}_i - \vec{R}_0) \Delta P_i,$$

gdzie za \vec{R}_0 wybrano arbitralny punkt leżący wewnątrz obszaru \mathcal{F}_P . Można łatwo sprawdzić, że wybór tego punktu, jak również wybór punktu centralnego dla odwzorowania Albersa, nie ma istotnego wpływu na wynik.

W celu oszacowania niepewności otrzymanego wyniku wykonamy szereg obliczeń dla wzrastającej wartości N aż do 1000 (co odpowiada $M = 10^6$ komórek siatki).



Rys. 3. Wykresy otrzymanych wartości szerokości geograficznej (po lewej) i długości geograficznej (po prawej) położenia środka Polski w zależności od liczby M komórek w siatce numerycznej.

Wyniki przedstawiają wykresy na rysunku 3. Z dokładnością rzędu 1 metra środek (masy) obszaru administracyjnego Polski znajduje się we współrzędnych

$$\phi = 52,1143385^\circ = 52^\circ 6' 51,6'' \text{ N},$$

$$\lambda = 19,4236714^\circ = 19^\circ 25' 25,2'' \text{ E}.$$

Powyższy punkt znajduje się w pasie nieużytków nad rzeką Bzurą, na granicy gminy Piątek (powiat łęczycki) i gminy Krzyżanów (powiat kutnowski). Wspomniana uprzednio miejscowość Piątek znajduje się około 6 kilometrów na południowy wschód od wyznaczonego punktu, co i tak jest wyjątkowo dobrym wynikiem, biorąc pod uwagę stopień uproszczenia początkowej metody.

Niejako efektem ubocznym obliczeń jest uzyskanie całkowitego pola powierzchni badanego obszaru, czyli $P = \sum_{i=1}^M \Delta P_i$. Z uwagi na to, że zastosowano odwzorowanie wiernopowierzchniowe, otrzymana wartość $P = 312679,5 \text{ km}^2$ jest niezależna od wybranego N i w pełni zgodna z oficjalnie publikowaną wartością (wedle *Małego Rocznika Statystycznego Polski 2017*).

Co dalej?

Co jakiś czas zdarzają się drobne korekty granic, wywołane zarówno przyczynami naturalnymi (np. zmiana biegu rzek), jak i urzędowymi (np. planowana korekta granic z Czechami o $3,68 \text{ km}^2$). Spróbujmy oszacować, jaki wpływ mają takie niewielkie korekty na położenie wyznaczonego przez nas środka. Załóżmy, że do obszaru \mathcal{F} o polu powierzchni P został dołączony fragment $\Delta\mathcal{F}$ o polu powierzchni ΔP . Wychodząc ze wzoru (2), wzór na zmodyfikowane położenie środka \vec{R}'_c obszaru $\mathcal{F} \cup \Delta\mathcal{F}$ możemy zapisać jako

$$\vec{R}'_c = \vec{R}_0 + \frac{1}{P + \Delta P} \left((\vec{R}_c - \vec{R}_0) P + (\vec{R}_{\Delta\mathcal{F}} - \vec{R}_0) \Delta P \right)$$

co poprzez przyjęcie $\vec{R}_0 := \vec{R}_c$ (gdzie \vec{R}_c jest środkiem masy obszaru \mathcal{F}) przyjmuje postać

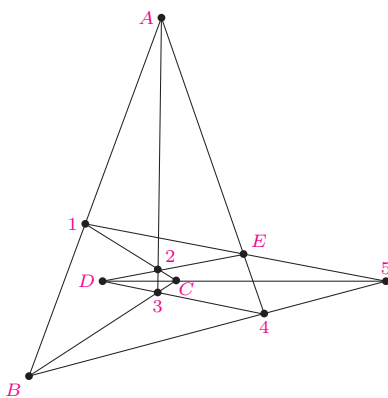
$$\vec{R}'_c = \vec{R}_c + \frac{\Delta P}{P + \Delta P} (\vec{R}_{\Delta\mathcal{F}} - \vec{R}_c) \approx \vec{R}_c + \frac{\Delta P}{P} (\vec{R}_{\Delta\mathcal{F}} - \vec{R}_c).$$

Zmiana położenia środka jest zatem proporcjonalna do odległości pomiędzy dotychczasowym położeniem środka a obszarem dołączanym, a także proporcjonalna do stosunku powierzchni obu obszarów. Dla planowanej korekty granic z Czechami $|\vec{R}_{\Delta\mathcal{F}} - \vec{R}_c| \approx 250 \text{ km}$, $\Delta P = 3,68 \text{ km}^2$, więc po takiej przykładowej korekcie położenie środka Polski przesunie się o około

$$\frac{\Delta P}{P} |\vec{R}_{\Delta\mathcal{F}} - \vec{R}_c| \approx \frac{3,68 \text{ km}^2}{312679 \text{ km}^2} \cdot 250 \text{ km} \approx 3 \text{ m}.$$

Krótko mówiąc – nám to nevadí.

Rozwiązanie zadania ze strony 24.



Pięciokąt $ABCDE$ i 12345 są wzajemnie wpisane.



Mitochondrium to znajdujące się w komórce organellum, wyodrębnione z cytoplazmy, z własnym DNA, różnym od reszty DNA jądrowego. Mitochondria dziedziczymy od matki.

Nasi wymarli przodkowie

Carl Sagan (1934–1996), amerykański astronom i popularyzator nauki, wymyślił kosmiczny kalendarz, w którym całą historię Wszechświata zawarł w jednym roku kalendarzowym, startując 1 stycznia. W takiej skali średni czas życia człowieka to 0,14 sekundy. Początek życia na Ziemi przypada 25 września, wynalezienie seksu przez drobnoustroje 1 listopada, pierwsi ludzie pojawiają się 31 grudnia o 22:30, narodziny Chrystusa następują o 23:59:56. Kalendarz ten plastycznie i wyraziście uzmysławia skalę, w której dyskutujemy o Wszechświecie (tym od pierwszego BUM!) i o ludzkim wkładzie do tej kosmicznej historii. Chciałabym się przyjrzeć bliżej ludziom neandertalskim (wyginęli o godz. 23:58), ponieważ są to najstarsi ludzie, których DNA możemy poznać i skomentować. DNA to molekularna pamięć o przodkach. Dawniej są już tylko martwe skamieniałości.

Badania genów pozwalają na określenie, kiedy żył „wspólny przodek”. Od czasu, gdy mieliśmy wspólnego przodka z szympanсами (6 mln lat temu), ewoluowaliśmy i one, i my. Nie jesteśmy identyczni z tamtym *Homo*, a dzisiejszy szympanś z tamtym. Czy neandertalczykowie byli bezpośrednimi naszymi przodkami? I czemu wyginęli na dwie minuty przed końcem „roku” Sagana?

W 2008 roku szwedzki naukowiec, Svante Pääbo, wraz z międzynarodowym zespołem opublikował sekwencję mitochondrialnego DNA z próbki wyekstrahowanej z kości neandertalczyka sprzed 38 tys. lat. Ten DNA tak się różnił od poznanych mtDNA człowieka współczesnego, że wskazywał na odrębność tej linii ewolucyjnej. Odpowiednia analiza wskazywała też na to, że wspólnego przodka mieliśmy (co potwierdzały dane paleontologiczne) około 500 tys. lat wcześniej (około 20 minut w kalendarzu Sagana).

Pääbo kontynuował oznaczenia neandertalskiego jądrowego DNA i już w 2010 roku opublikował pełną wersję DNA genomowego, uzyskanego z kości trzech różnych osobników, z różnych lokalizacji europejskich. Gazety cytowały ciekawostki: mieli oni gen nadający jasną barwę skóry, rudą barwę włosów, grupę krwi 0, gen FOXP2 związany z mową. Neandertalski genom miał więcej wspólnych sekwencji z genomami współczesnych ludzi z Europy i Azji niż ludzi z Afryki. Zapewne nasi europejscy przodkowie krzyżowali się ze spotykanymi dopiero po wyjściu z Afryki przedstawicielami populacji neandertalskich, a ślad po tych zdarzeniach widać dziś z zachowania w naszym genomie 4% genów pochodzenia neandertalskiego.

Dane genetyczne zmusiły ludzi współczesnych do rewizji i ponownej dokładnej analizy paleontologicznych śladów, które zostały po neandertalczykach. Zauważono, że mieli mózgi większe od naszych, a płaty czołowe porównywalne. Że ośrodek mowy mieli tej samej wielkości co my. Że niekoniecznie mieszkali w jaskiniach, są ślady po ich drewnianych budowlach. Narzędzia wykonywali precyzyjnie, z dużą biegłością. Wytwarzali odzież, symboliczne przedmioty, uprawiali kult zmarłych i opiekowali się chorymi i rannymi. Nasze genomy świadczą o tym, że pomyślnie się krzyżowaliśmy. Biologia świadczy, że hybrydowe potomstwo może lepiej znosić trudne warunki środowiska. Z krzyżowania się ludzie „współcześni”, nadchodzący z ciepłego klimatu, odnieśli korzyści przystosowawcze nadawane przez geny miejscowych plemion. Po neandertalczykach obok koloru skóry odziedziczyliśmy grupę genów systemu immunologicznego, które, niestety, także zwiększają obecną podatność na choroby typu autoimmunoagresji.

Dlaczego jednak wyginęli neandertalczykowie, nie wiemy, możemy jedynie snuć przypuszczenia. Być może gorzej znieśli epokę zlodowacenia 48 tys. lat temu. Być może żyli w zbyt małych oddzielonych terytorialnie grupach, które „rozmyły” się w kontakcie genetycznym z dużymi populacjami najeźdźców. Nie wybiliśmy ich, jak dotychczas sądzono, jedynie wchłonęliśmy.

„Zniknęli jako odrębna, wyraźnie rozpoznawalna populacja, żyją jako integralny element naszego dziedzictwa.”

Magdalena FIKUS

Co to znaczy szybko?

Każdy chyba, nawet zupełnie niezający się na informatyce, zgodzi się, że lepiej, żeby programy działały szybko niż wolno. Tylko co to znaczy szybko? Dziś powszechnie stosowany i uznawany jest pomysł, żeby szybkość algorytmu mierzyć liczbą operacji przez niego wykonywaną w zależności od wielkości wejścia. Za rozsądnie szybkie uznaje się algorytmy, które dla wejścia rozmiaru n zwracają odpowiedź po wykonaniu co najwyżej Cn^k operacji dla pewnych $C, k \in \mathbb{N}$. Mówimy wówczas, że działają w czasie $\mathcal{O}(n^k)$ i nazywamy je algorytmami wielomianowymi. Co prawda, w pewnych dziedzinach nie jest to założenie powszechne. Na przykład w dziedzinie baz danych, gdzie rozmiar wejścia bywa wielkości miliardów lub bilionów, za wolne są już w zasadzie nawet algorytmy kwadratowe. Ale jednak klasycznie uznaje się algorytmy wielomianowe za rozsądnie szybkie – zwykle, gdy istnieje jakiś algorytm wielomianowy, to istnieje również algorytm wielomianowy o niewielkim wykładniku. I wszystko byłoby dobrze, gdyby nie to, że złożoność pesymistyczna tak naprawdę nie do końca odpowiada temu, czego potrzebujemy w praktyce.

Najbardziej chyba znanym przykładem tej niezgodności jest algorytm quicksort. Wiele algorytmów sortujących działa w pesymistycznym czasie $\mathcal{O}(n \log n)$, quicksort natomiast w $\mathcal{O}(n^2)$. Jednak okazuje się, że w praktyce zwykle działa dość szybko, zupełnie nie zbliżając się do n^2 operacji. Wypadałoby uzasadnić, co takiego w sobie ma quicksort, że w praktyce działa szybko. W związku z tym wprowadzono pojęcie *średniej złożoności czasowej*. Po prostu zamiast najdłuższego czasu działania dla wejścia rozmiaru n bierzemy średnią ze wszystkich czasów działania dla wejść rozmiaru n . Przykładowo dla quicksortu bierzemy każdą z $n!$ permutacji n elementów z prawdopodobieństwem $1/n!$ i obliczamy średnią. Wychodzi rzeczywiście wynik rzędu $n \log n$. Złożoność średnia stała się bardzo popularna do badania „bardziej praktycznej” złożoności czasowej programów. Jednak i ona ma swoje wady.

Mianowicie, założenie, że każde możliwe wejście jest równo prawdopodobne, jest nie zawsze prawdziwe. Akurat dla sortowania jest to często założenie w miarę rozsądne, bo wydaje się, że każda kolejność elementów na wejściu jest mniej więcej równo prawdopodobna. Jednak wyobraźmy sobie, że rozważamy graf ważony opisujący połączenia pomiędzy miastami w danym państwie wraz z czasem przejazdu. Jest jasne, że nie każdy graf pojawi się tam tak samo często. Po pierwsze, graf ten musi spełniać pewne warunki (jak np. planarność, warunek trójkąta). Po drugie, rzeczywiste sieci dróg spełniają często pewne dodatkowe własności (np. częściej połączone są blisko leżące miasta). Oprócz tego, że grafy występują z różnymi prawdopodobieństwami, to zupełnie nie jest jasne, właściwie z jakimi, jak obliczyć te prawdopodobieństwa. Jest jeszcze inna przyczyna, dla której prawdopodobieństwa dla różnych grafów mogą być bardzo dziwne. Mianowicie, grafy na wejściu mogą być efektem pewnych przekształceń rzeczywistych danych. Może się okazać, że biorą się np. z układów tranzystorów, które przekształcamy na formuły logiczne, a dopiero te formuły na grafy. W takiej sytuacji własności występujących grafów będą bardzo specyficzne. Może się zdarzyć, że w związku z tym algorytm będzie działał dla nich bardzo wolno, pomimo niskiej średniej złożoności. Podsumowując, złożoność średnia jest pożyteczna,

ale jednak nie zawsze dobrze odzwierciedla to, czy program jest szybki w praktyce.

Algorytmem, o którym od dawno było wiadomo, że w praktyce działa szybko, ale nie wiadomo właściwie dlaczego, jest *algorytm sympleks*. Rozwiązuje on problem *programowania liniowego*, czyli odpowiada na pytanie, czy istnieją takie $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, które spełniają zbiór ograniczeń liniowych, każde postaci $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b$, tyle, że dla potencjalnie różnych a_i oraz b (i znajduje wartości x_i). Algorytm sympleks jest bardzo użyteczny przy różnych zagadnieniach optymalizacyjnych i w praktyce naprawdę często stosowany. Co prawda, od dawna znany był algorytm wielomianowy, ale w praktyce stosowany był algorytm sympleks, który ma pesymistyczną złożoność wykładniczą. Aktualnie uważa się, że najlepsze implementacje algorytmu sympleks i jednego z wielomianowych algorytmów (*interior-point method*) mają podobną efektywność. Jednak przez lata nie wiadomo było, dlaczego sympleks działa tak dobrze, i zostało to wyjaśnione dopiero w pracy Spielmana i Tenga w 2004 roku (za którą otrzymali później prestiżową nagrodę Gödla). Spielman i Teng wprowadzili pojęcie złożoności wygładzonej (*smoothed analysis*), co do której argumentowali, że jest właściwą miarą szybkości dla algorytmów wczytujących dane rzeczywiste. Następnie pokazali, z grubsza rzecz biorąc, że algorytm sympleks ma sześcienną złożoność wygładzoną, co uzasadnia teoretycznie, dlaczego zachowuje się tak świetnie w praktyce. Cała praca ma 94 strony i jest bardzo skomplikowana technicznie, lecz na uwagę zasługuje proste, ale genialne pojęcie złożoności wygładzonej.

Idea jest podobna jak w złożoności średniej, jednak tu motywacją jest następująca obserwacja. Zauważmy, że jeśli dane do programu pochodzą z urządzeń pomiarowych (co jest częste), to zawsze są nieco zaburzone. Można je uznać za skoncentrowane wokół pewnego punktu (rzeczywistej wartości mierzonej wielkości), dobrym przybliżeniem jest tu wielowymiarowy rozkład normalny o środku w tym punkcie i małej wariancji. Gdybyśmy znali ten punkt, to średni czas działania algorytmu obliczylibyśmy po prostu jako średnią z czasu działania ważoną rozkładem normalnym o środku w tym punkcie. Jako że nie znamy, to przyjmujemy następującą definicję złożoności wygładzonej. Jest to supremum względem wszystkich punktów z przestrzeni ze średniego czasu działania ważonego rozkładem normalnym o środku w tym punkcie i małej wariancji. Jeśli złożoność wygładzona jest mała, to znaczy, że dla dowolnych mierzonych danych średni czas działania programu jest krótki. Czyli sześcienna złożoność wygładzona rzeczywiście dobrze uzasadnia, dlaczego algorytm sympleks w praktyce działa szybko.

Podobną miarę szybkości, oczywiście, można zastosować do innych algorytmów, do których wejściem są liczby rzeczywiste. I rzeczywiście to zrobiono, jest wiele badań na temat złożoności wygładzonej. Wydaje się jednak, że prawdziwe zrozumienie, dlaczego niektóre problemy w teorii trudne są rozwiązywane przez algorytmy w praktyce szybkie, jest dopiero przed nami. Jednym z przykładów jest najbardziej chyba znany problem NP-zupełny: spełnialność formuł logicznych. Jest wiele programów, tzw. SAT-solverów, które w praktyce radzą sobie z nim świetnie. Dlaczego? Myślę, że nikt tego do końca nie wie, ale to już temat na zupełnie inną opowieść.

Wojciech CZERWIŃSKI

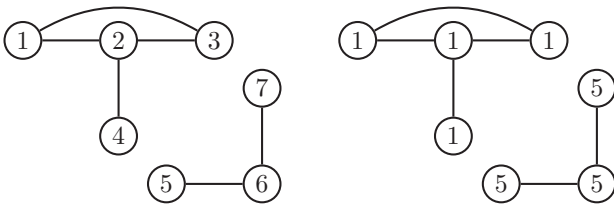
Informatyczny kącik olimpijski (111): Metro

Tym razem omówimy rozwiązanie zadania *Metro* z I etapu XI Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów w roku szkolnym 2016/2017.

Zadanie: Danych jest n stacji metra, ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do n . Każda stacja jest opisana parą współrzędnych (x_i, y_i) . Wiemy, że pomiędzy każdą parą stacji o tej samej pierwszej lub drugiej współrzędnej istnieje dwukierunkowa linia metra. W zadaniu należy odpowiedzieć na t zapytań postaci: Czy pomiędzy stacjami a i b można przejechać metrem? Zakładamy, że pasażerowie mogą przesiadać się dowolną liczbę razy.

Zacznijmy od zbudowania grafu $G = (V, E)$. Niech wierzchołki grafu reprezentują stacje metra, zaś krawędzie – połączenia pomiędzy tymi stacjami, które mają przynajmniej jedną wspólną współrzędną. Podzielimy graf na spójne składowe (dalej zwane skrótowo spójnymi), to znaczy na części, w których między każdą parą wierzchołków istnieje ścieżka.

Spójne składowe. Wyznaczenie spójnych składowych jest znanym problemem. Naszym celem jest tak przydzielać numery wierzchołkom, aby wierzchołki w tej samej spójnej miały ten sam numer, zaś wierzchołki w różnych spójnych miały różne numery. Ustalmy, że numerem spójnej będzie najmniejszy numer wierzchołka należącego do tej spójnej. Aby każdemu wierzchołkowi przydzielić numer spójnej, do której należy, wystarczy przeglądać wierzchołki w rosnącej kolejności numerów. Jeśli rozpatrywany wierzchołek nie ma jeszcze przypisanej spójnej, wówczas temu wierzchołkowi oraz wszystkim wierzchołkom z niego osiągalnych przypisujemy jego numer. Znalezienie wierzchołków osiągalnych może zostać zrealizowane np. algorytmem przeszukiwania w głąb (DFS) lub algorytmem przeszukiwania wszerz (BFS). Złożoność czasowa algorytmu wynosi $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.



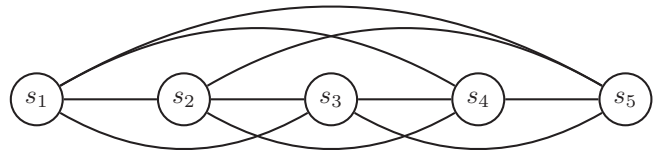
Przykład podziału grafu na spójne składowe.

Po wyznaczeniu spójnych składowych odpowiadanie na zapytania, czy ze stacji a istnieje połączenie do stacji b , można zrealizować w czasie stałym. Wystarczy sprawdzić, czy oba wierzchołki należą do tej samej spójnej składowej.

Zastanówmy się teraz, jaka jest złożoność całego rozwiązania. Pesymistycznie liczba krawędzi może być rzędu $\mathcal{O}(n^2)$ (np. w przypadku, gdy wszystkie stacje mają pierwszą współrzędną równą 1, wówczas liczba krawędzi wynosi $n(n-1)/2$). Niestety, dla limitów z treści zadania takie rozwiązanie nie otrzyma maksymalnej liczby punktów.

Okazuje się, że możemy zredukować rozmiar naszego grafu. Rozpatrzmy rzędną y oraz położone na niej stacje

s_1, s_2, \dots, s_k o współrzędnych $(x_{s_1}, y), (x_{s_2}, y), \dots, (x_{s_k}, y)$, gdzie $x_{s_1} < x_{s_2} < \dots < x_{s_k}$. Zauważmy, że pomiędzy każdą parą tych stacji można przejechać, ponieważ mają wspólną drugą współrzędną.



Zauważmy, że nie ma konieczności dodawania do grafu połączeń pomiędzy każdą parą stacji (tych połączeń byłoby $\frac{k(k-1)}{2}$). Wystarczy, że uwzględnimy wyłącznie krawędzie pomiędzy sąsiednimi stacjami, tzn. $(s_1, s_2), (s_2, s_3), \dots, (s_{k-1}, s_k)$. Tych krawędzi jest już tylko $k-1$.



Jeśli chcemy przejechać ze stacji s_i do stacji s_j , możemy skorzystać ze stacji pośrednich $s_i, s_{i+1}, \dots, s_{j-1}, s_j$. Analogiczną redukcję wykonujemy dla osi odciętych. Wówczas otrzymujemy graf, którego liczba krawędzi nie przekracza liczby wierzchołków.

Aby zbudować graf opisany powyżej, należy najpierw posortować wszystkie stacje według drugiej współrzędnej. Wówczas stacje, które mają tę samą drugą współrzędną, będą tworzyły spójny fragment. Każdy z tych fragmentów (stacje o tej samej drugiej współrzędnej) sortujemy względem pierwszej współrzędnej. Wtedy sąsiednie stacje w każdym z tych fragmentów łączymy krawędzią. Analogicznie wyznaczamy połączenie pomiędzy stacjami, które mają tę samą pierwszą współrzędną. Jedyna różnica polega na tym, że najpierw sortujemy względem pierwszej współrzędnej, a potem względem drugiej. Koszt tych operacji wynosi $\mathcal{O}(n \log(n))$.

Podsumowanie. Najpierw budujemy graf, gdzie wierzchołki reprezentują stacje, zaś krawędzie – połączenia pomiędzy sąsiednimi stacjami, znajdującymi się na tej samej odciętej lub rzędnej. Koszt budowy grafu wynosi $\mathcal{O}(n \log(n))$. Następnie wyznaczamy spójne składowe w czasie $\mathcal{O}(n)$. Na koniec odpowiadamy na każde z kolejnych zapytań w czasie stałym. Łączny koszt rozwiązania to $\mathcal{O}(n \log(n) + t)$.

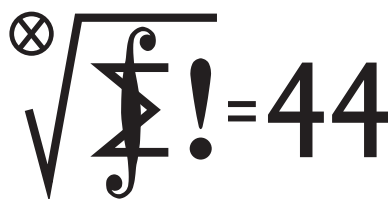
Bartosz ŁUKASIEWICZ

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2018

Zadania z matematyki nr 753, 754

Redaguje Marcin E. KUCZMA

753. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt D . Proste AD i BD przecinają boki BC i AC odpowiednio w punktach E i F . Udowodnić, że jeśli $|AE| + |AF| = |BE| + |BF|$, to $|AC| + |AD| = |BC| + |BD|$.

754. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych $x, y, z \geq 0$, spełniające układ równań

$$x + y + z = 1, \quad 9(xy + yz + zx) = 2 + 9(x^3 + y^3 + z^3).$$

Zadanie 754 zaproponował pan Mikołaj Pater.

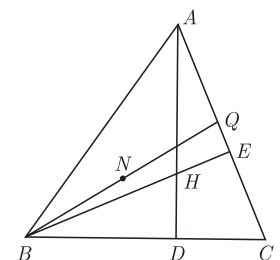
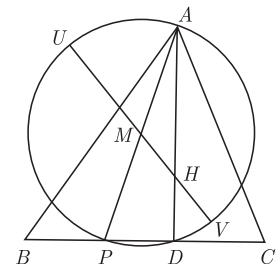
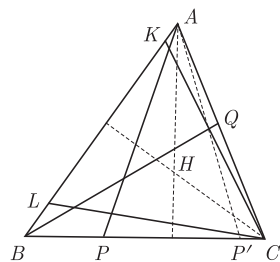
Rozwiązania zadań z numeru 9/2017

Przypominamy treść zadań:

745. Na obwodzie trójkąta ABC leżą punkty K, L, P, Q : punkty K, L na boku AB , punkty P i Q odpowiednio na bokach BC i CA ; przy tym odcinki AP, BQ, CK i CL mają jednakową długość. Udowodnić, że środki tych czterech odcinków leżą na jednym okręgu.

746. Dana jest liczba naturalna $k \geq 2$. Czy istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych (a_n) , którego żaden wyraz ani żadna suma skończenie wielu jego wyrazów nie jest k -tą potęgą liczby naturalnej, a przy tym ciąg $(\sqrt[k]{a_n})$ jest ograniczony?

745. Jeśli teza zadania ma być prawdziwa, to powinna ona zachować słuszność po zastąpieniu punktu P przez P' – drugi punkt prostej BC , leżący w tej samej odległości od A , co punkt P ; zaś środek szukanego okręgu powinien leżeć na osiach symetrii trójkątów równoramiennych CKL i APP' – czyli na wysokościach trójkąta ABC . Stąd domysł uściślenia tezy zadania: wykazać, że środki odcinków AP, BQ, CK, CL (o jednakowej długości $2r$) leżą na okręgu o środku H (ortocentrum trójkąta ABC).



Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A i niech M będzie środkiem odcinka AP . Weźmy pod uwagę okrąg o środku M i promieniu r (czyli o średnicy AP). Prosta HM przecina ów okrąg w punktach U, V (gdy punkty M, H pokrywają się, przyjmijmy $U = A, V = D$). Cięciwa AD tego okręgu oraz jego średnica UV przecinają się w punkcie H . Zatem

$$|AH| \cdot |HD| = |UH| \cdot |HV| = (r - |HM|)(r + |HM|),$$

czyli

$$|HM| = \sqrt{r^2 - |AH| \cdot |HD|}.$$

Jeśli teraz BE jest drugą wysokością trójkąta ABC , a N jest środkiem odcinka BQ , to analogicznie uzyskujemy równość

$$|HN| = \sqrt{r^2 - |BH| \cdot |HE|}.$$

Ale $|AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE|$; wynika to z podobieństwa trójkątów AHE i BHD . Tak więc $|HM| = |HN|$; środki odcinków AP i BQ leżą

w jednakowej odległości od punktu H . Analogicznie, w tej samej odległości od H leżą też środki odcinków CK i CL . To właśnie nasza teza.

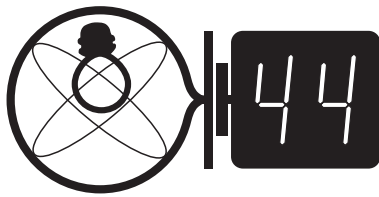
746. Istnieje. Przykład Autora (W. Bednarek): ciąg $a_n = 2^{kn+1}$.

Bierzemy dowolnie utworzoną sumę skończenie wielu wyrazów, o numerach $m_1 < \dots < m_s$:

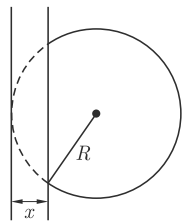
$$S = \sum_{i=1}^s a_{m_i} = \sum_{i=1}^s 2^{km_i+1} = 2^{km_1+1} \left(\sum_{i=1}^s 2^{k(m_i-m_1)} \right).$$

Suma w dużym nawiasie jest liczbą nieparzystą (jej pierwszy składnik to jedynka). Gdyby dla pewnej liczby naturalnej A zachodziła równość $S = A^k$, wówczas pisząc A w postaci $A = 2^t M$ (M nieparzyste) i przyrównując potęgę dwójki w S i w A^k uzyskalibyśmy równość $kt = km_1 + 1$; oczywista sprzeczność.

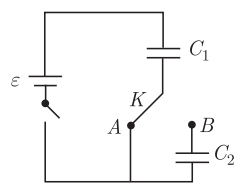
Pozostaje zauważyć, że ciąg o wyrazach $a_n^{1/n} = 2^k \cdot 2^{1/n} \leq 2^{k+1}$ jest ograniczony.



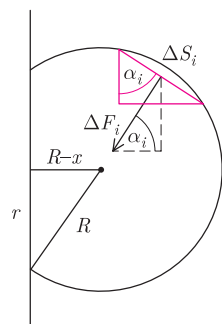
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2018



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 637 ($WT = 2,02$), 638 ($WT = 2,9$), 639 ($WT = 2,0$) z numerów 4 i 5/2017

Jan Zambrzycki	Białystok	42,42
Marian Łupieżowicz	Gliwice	38,33
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77

Zadanie 636 nie mogło zostać sprawdzone, ponieważ rysunek do treści tego zadania wykonany został nieprawidłowo (zmieniony został kierunek przewodzenia diody), przez co zadanie straciło sens. Przepraszamy.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 743 ($WT = 1,24$) i 744 ($WT = 2,74$) z numeru 6/2017

Patryk Jaśniewski	Gdańsk	45,10
Marcin Kasperski	Warszawa	43,83
Adam Dzedziej	Gdańsk	43,22
Roksana Słowik	Knurów	41,91
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Krzysztof Maziarz	Kraków	37,45

Wreszcie – po przeszło dwóch latach – mamy uczestnika, który zalicza 44 p. po raz pierwszy: Patryk Jaśniewski. Witamy w Klubie 44, z numerem 127.

Zadania z fizyki nr 650, 651

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

650. Radar na Ziemi obserwuje dwa pojazdy kosmiczne poruszające się z relatywistycznymi prędkościami. Pojazd A porusza się z prędkością v_1 , goni go pojazd B , poruszający się w tym samym kierunku z prędkością $v_2 > v_1$. W chwili początkowej odległość między pojazdami wynosi l . Po jakim czasie pojazd B dogoni A z punktu widzenia obserwatora na Ziemi oraz z punktu widzenia kosmonauty w pojeździe B ?

651. Dwie jednakowo naładowane kulki o takich samych masach umieszczono w odległości l od siebie i puszczono swobodnie. Po czasie t odległość między nimi wzrosła dwukrotnie. Po jakim czasie wzrośnie dwukrotnie odległość między tymi kulkami, gdy ich odległość początkowa będzie wynosić $3l$?

Rozwiązania zadań z numeru 9/2017

Przypominamy treść zadań:

642. Piłka o promieniu R słabo uderza w ścianę i deformuje się, jak pokazano na rysunku 1. Deformacja x jest dużo mniejsza od promienia piłki i możemy przyjąć, że ciśnienie powietrza w piłce nie zmienia się podczas uderzenia. Zaniedbując sprężystość powłoki, oszacować czas zderzenia piłki ze ścianą. Masa piłki wynosi m , ciśnienie powietrza w piłce p , ciśnienie atmosferyczne p_0 .

643. Układ składający się z dwóch kondensatorów o tej samej pojemności ($C_1 = C_2$) i klucza K łączymy ze źródłem napięcia o sile elektromotorycznej ε (rys. 2). Wielokrotnie zmieniamy położenie klucza K , łącząc kondensator C_1 kolejno ze stykami A i B . Jak zmienia się napięcie na kondensatorze C_2 po każdym przełączeniu klucza? Rozważyć przypadki:
a) w chwili dołączenia źródła napięcia klucz znajdował się w położeniu A ;
b) w chwili dołączenia źródła napięcia klucz znajdował się w położeniu B .

642. Podczas zderzenia na piłkę działa siła reakcji ściany F_R oraz siła F_0 spowodowana ciśnieniem atmosferycznym. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki siła reakcji równa jest co do wartości sile nacisku piłki na ścianę. Ponieważ możemy zaniedbać sprężystość powłoki, więc $F_R = \pi r^2 p$, gdzie r jest promieniem powierzchni zetknięcia piłki ze ścianą (rys. 3). W celu znalezienia siły F_0 podzielimy myślowo powierzchnię piłki stykającą się z powietrzem na małe elementy o powierzchni ΔS_i . Na każdy element działa prostopadle do niego siła $\Delta F_i = p_0 \Delta S_i$. Wobec symetrii składowe równoległe do ściany wszystkich tych sił znoszą się, siła F_0 skierowana jest prostopadle w kierunku ściany i ma wartość $F_0 = \sum_i \Delta F_i \cos \alpha_i = p_0 \sum_i \Delta S_i \cos \alpha_i$. Z rysunku 3 widać, że wielkość $\Delta S_i \cos \alpha_i$ jest rzutem i -tego elementu powierzchni na płaszczyznę pionową, a suma tych wielkości równa jest powierzchni styku piłki ze ścianą. Stąd $F_0 = \pi r^2 p_0$. Wypadkowa siła działająca na piłkę wynosi zatem

$$F = F_R - F_0 = \pi(R^2 - (R - x)^2)(p - p_0) = \pi(2Rx - x^2)(p - p_0).$$

Wobec $x \ll R$, mamy $F = 2\pi R(p - p_0)x$, a zwrot F jest przeciwny do deformacji x . W rozważanym przybliżeniu piłka podczas zderzenia ze ścianą porusza się ruchem harmonicznym z okresem $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, gdzie $k = 2\pi R(p - p_0)$. Czas zderzenia piłki ze ścianą równy jest połowie okresu:

$$t = \sqrt{\frac{\pi m}{2R(p - p_0)}}.$$

643. a) Gdy klucz znajduje się w położeniu A , potencjał dolnej okładki kondensatora C_2 jest taki sam jak potencjał klucza. Napięcie na kondensatorze C_2 nie zmienia się i wynosi 0.

b) W chwili początkowej napięcia na obu kondensatorach wynoszą $U_1 = \varepsilon/2$. Po przełączeniu klucza do punktu A kondensator C_1 ładuje się do napięcia ε . Po ponownym przełączeniu do punktu B przez źródło przepływa ładunek, napięcie na obu kondensatorach maleje o tę samą wartość ΔU . Zgodnie z prawem Kirchhoffa $\varepsilon - (\varepsilon - \Delta U) - (\varepsilon/2 - \Delta U) = 0$. Stąd $\Delta U = \varepsilon/4$, napięcie na drugim kondensatorze wynosi $U_2 = \varepsilon/4$. Rozumując analogicznie, otrzymujemy, że po drugim powrocie klucza do położenia B napięcie na kondensatorze C_2 wynosi $U_3 = \varepsilon/8$, a po n -tym powrocie $U_n = \varepsilon/2^n$. Po odpowiednio długim czasie dolny kondensator rozładuje się.

Niebo w styczniu

Rok 2017 skończył się widocznym w Polsce zakryciem Hiad i Aldebarana przez Księżyc, natomiast 2018 zacznie się pełnią Srebrnego Globu z prawie jednoczesnym jego przejściem przez perygeum (perygeum 1 stycznia o 22:55, pełnia – 2 stycznia o 3:24 naszego czasu), przez co będzie to największa i najjaśniejsza pełnia Księżyca w tym roku. Dodatkowo Księżyc znajdzie się wtedy niedaleko punktu Raka, czyli punktu, przez który Słońce przechodzi pierwszego dnia lata, zatem podczas górowania wzniesie się on na prawie 60° ponad widnokrąg. Lecz aby porównać to z sytuacją lipcową, gdy pełnię Księżyca od jego przejścia przez apogeum oddzieli 14 godzin, należałoby wykonać zdjęcie tym samym sprzętem, z takimi samymi parametrami naświetlania. Przy obserwacji gołym okiem, niestety, różnica będzie niewidoczna.

W roku 2018 przydarzą się trzy zaćmienia częściowe Słońca: 15 lutego, 13 lipca i 11 sierpnia, lecz żadne z nich nie będzie widoczne z Polski. Dojdzie również do dwóch całkowitych zaćmień Księżyca: 31 stycznia i 27 lipca. Z Polski da się zaobserwować końcówkę pierwszego zaćmienia, gdy podczas wschodu Księżyc będzie wychodził z półcienia Ziemi oraz większość drugiego, gdy w południowo-wschodniej części Polski Srebrny Glob wszędzie już zanurzony w półcieniu naszej planety – w pozostałej części naszego kraju Księżyc wszędzie w trakcie wchodzenia w jej cień. Lecz w całym kraju widoczna będzie faza całkowita zaćmienia.

Drugie zaćmienie dodatkowo uatrakcyjni fakt, że tego samego dnia przypada tegoroczna opozycja Marsa, będąca tzw. wielką opozycją, podczas której Czerwona Planeta zbliży się do nas na niecałe 58 mln km (15 lat po słynnej wielkiej opozycji z 2003 r., gdy była 2 mln km bliżej), osiągając średnicę kątową ponad $24''$ i jasność $-2,8^m$ (a więc więcej niż tegoroczna jasność Jowisza). Niestety, Mars znajdzie się wtedy ponad $6,5$ stopnia pod ekliptyką, osiągając deklinację prawie -26° , stąd wzniesie się maksymalnie na jakieś 12° ponad widnokrąg. W trakcie zaćmienia Mars będzie widoczny mniej więcej 6° pod Księżycem. A w związku z tym, że Srebrny Glob znajdzie się wtedy prawie w apogeum, a ponadto przejdzie bardzo blisko środka cienia Ziemi, więc to zaćmienie będzie należeć do wyjątkowo długich, z fazą całkowitą trwającą ponad 100 minut! Będzie to najdłuższe całkowite zaćmienie Księżyca w XXI wieku.

Na koniec roku czeka nas jeszcze jedna atrakcja: blisko Ziemi przejdzie kometa 46P/Wirtanen. Jest to kometa z rodziny Jowisza, o długości roku 5 lat i 156 dni (ziemskich). Kometa przejdzie przez perihelium 12 grudnia, 1,055 AU od Słońca, a 4 dni później – 11,5 mln km (0,077 AU) od Ziemi. Jest to kometa aktywna, zwykle jaśniejsza od komet podobnych rozmiarów i według prognoz może pojaśnić nawet do 4^m . W okolicach perihelium będzie ona widoczna bardzo dobrze, poruszając się bardzo szybko po niebie. Od połowy listopada 2018 r. do 1 stycznia 2019 r. kometa przemierzy odcinek prawie 110° , od gwiazdozbioru Pieca, przez Wieloryba, Erydana, Byka, Woźnicę, do Rysia, zatem przejdzie przez obszar nieba bliski opozycji do Słońca o tej porze roku i będzie widoczna całą noc. W dniu przejścia przez perihelium kometa znajdzie się między Menkarem z Wieloryba a Aldebaranem z Byka, mniej więcej w 1/3 odległości od pierwszej z wymienionych gwiazd. Cztery dni później kometa dotrze już na linię łączącą Plejady z Aldebaranem niecałe 4° od M45.

Srebrny Glob zacznie miesiąc i rok od pełni, odwiedzając przy tym gwiazdozbiór Bliźniąt. 5 stycznia, w fazie 86%, Księżyc zakryje Regulusa, czyli najjaśniejszą gwiazdę Lwa. Polska znajdzie się na wschodniej granicy

widoczności zjawiska, stąd u nas zakrycie zajdzie przy zachodzie Księżyca, nisko nad horyzontem, około godziny 9:24. Potem jeszcze 11 stycznia Księżyc w fazie 28% spotka się z Jowiszem i Marsem, zaś 4 dni później, 2 dni przed nowiem, w fazie 3% – z Merkurym i Saturnem. Po nowiu, 17 stycznia, Srebrny Glob odwiedzi Neptuna (20 stycznia, w fazie 11%) i Urana (23 i 24 stycznia, w fazie około 40%). Styczeń Księżyca skończy w pełni niewidocznym z Polski zaćmieniem całkowitym.

Dziewiątego stycznia Wenus przejdzie przez koniunkcję górną ze Słońcem i do połowy lutego będzie niewidoczna. Wieczorem można obserwować Neptuna w Wodniku i Urana w Rybach. Neptun do końca miesiąca osłabnie do ósmej wielkości gwiazdowej i oddali się od gwiazdy λ Aqr na ponad 1° , natomiast Uran 2 stycznia zmieni kierunek ruchu z wstecznego na prosty, kończąc tym samym okres najlepszej widoczności w tym sezonie obserwacyjnym. Planeta pod koniec miesiąca utworzy trójkąt prawie równoramienny i prostokątny z gwiazdami α i μ Psc, tracąc do obu gwiazd po około 3° . Jasność Urana w styczniu wyniesie $+5,8^m$.

Nad ranem, nisko nad wschodnim widnokretem można obserwować blisko siebie aż cztery jasne planety Układu Słonecznego: Jowisza z Marsem w Wadze

oraz pod koniec miesiąca Saturna w Strzelcu, zaś na jego początku – Merkurego w Wężowniku – 1 stycznia osiągnie on maksymalną elongację zachodnią 23° . Tego dnia, na godzinę przed świtem, planeta wzniesie się na wysokość około 5° nad punkt SE horyzontu, gdzie pokaże tarczę o jasności $-0,3^m$, średnicy $7''$ i fazy 65%. Ponad 11° na prawo od niej towarzystwa dotrzyma jej Antares, najjaśniejsza gwiazda Skorpiona. Merkury pozostanie widoczny do końca drugiej dekady stycznia, utrzymując jasność $-0,3^m$, ze stale zmniejszającą się tarczą i rosnącą fazą, a od połowy miesiąca zobaczymy przy nim Saturna, z blaskiem $+0,5^m$ i tarczą o średnicy $15''$, powracającego na poranne niebo po grudniowej koniunkcji ze Słońcem. 13 stycznia obie planety zbliżą się na $38'$, zaś 2 dni później minie je Księżyc 2 dni przed nowiem. Trzeciego stycznia Czerwona Planeta minie gwiazdę Zuben Elgenubi w odległości $35'$, a 4 dni później zbliży się do Jowisza na zaledwie $13'$, czyli mniej niż połowę średnicy Księżyca. Obie planety różni jasność (póki co, Jowisz jest sporo jaśniejszy) i barwa (Mars jest wyraźnie rdzawo-pomarańczowy). W końcu stycznia Mars zawita

do gwiazdozbioru Skorpiona, zbliżając się 1 lutego do gwiazdy Graffias na $22'$, zaś Jowisz oddali się od α Lib na 6° . Do tego czasu jasność Jowisza urośnie do -2^m , a jego tarcza – do $36''$. Blask Czerwonej Planety zwiększy się do $+1,2^m$, zaś rozmiar jej tarczy, przy fazy 91% – do $6''$.

Na koniec należy wspomnieć o gwiazdzie Mira Wieloryba, która od XVII w. stanowi wzorzec całej klasy gwiazd zmiennych, nazwanych jej imieniem. 11 stycznia prognozuje się maksimum jej blasku i może ona wtedy osiągnąć nawet ponad 3^m , wyraźnie zmieniając kształt Wieloryba. W styczniu Mira widoczna jest bardzo dobrze, góruje około 18:30 na wysokości 35° nad widnokresem.

31 stycznia w opozycji do Słońca znajdzie się planeta karłowata (1)Ceres. Przez cały miesiąc Ceres wędruje przez pogranicze Lwa i Raka, przechodząc do drugiego z gwiazdozbiorów w trzeciej dekadzie stycznia. Planeta karłowata osiągnie wtedy jasność większą od 7^m , będzie zatem dobrze widoczna przez lornetki.

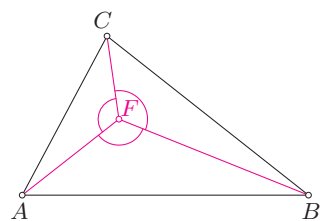
Ariel MAJCHER



Zagadnienie Fermata w jednej linijce!

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Waldemar POMPE*



Rys. 1

Tzw. zagadnienie Fermata to pytanie o to, gdzie wewnątrz danego trójkąta ABC należy umieścić punkt X , aby suma długości odcinków AX , BX i CX przyjęła najmniejszą wartość. Okazuje się, że jeśli każdy z kątów wewnętrznych trójkąta ABC jest mniejszy od 120° , to punkt X należy wybrać w miejscu, z którego widać wszystkie jego boki pod tym samym kątem. Innymi słowy, punkt X powinien się znaleźć w punkcie F spełniającym warunek

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle BFC = \sphericalangle CFA = 120^\circ.$$

Uzasadnienie, że taki punkt F (rys. 1) istnieje pozostawię Czytelnikowi jako ćwiczenie. Natomiast dowód, że dla każdego punktu X spełniona jest nierówność

$$XA + XB + XC \geq FA + FB + FC$$

przeprowadzę w jednej linijce:

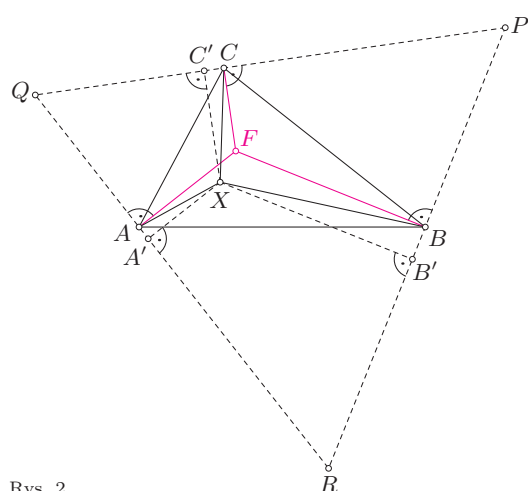
$$(*) \quad XA + XB + XC \geq XA' + XB' + XC' = FA + FB + FC.$$

A teraz kilka linijek, tłumaczących linijkę powyższą. :)

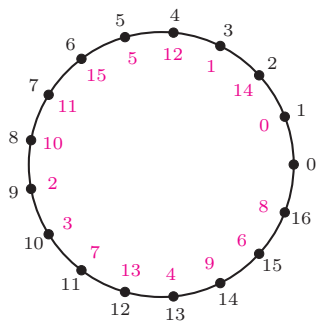
Proste prostopadłe do odcinków FA , FB , FC , przechodzące odpowiednio przez punkty A , B i C , wyznaczają trójkąt równoboczny – oznaczmy go przez PQR , jak na rysunku 2.

Jeśli przez A' , B' i C' oznaczmy rzuty prostokątne punktu X na odpowiednie boki trójkąta PQR , to oczywiście $XA \geq XA'$, $XB \geq XB'$, $XC \geq XC'$. Po dodaniu stronami uzyskujemy nierówność znajdującą się w linijce (*).

Wiadomo z kolei, że dla dowolnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego suma odległości tego punktu od boków trójkąta jest stała, niezależna od wyboru punktu (równa wysokości trójkąta). Stąd natychmiast wynika równość z linijki (*).



Rys. 2



Rozsądnego algorytmu brak

Na obrazku widać przenumerowanie szesnastu z 17 równo rozmieszczonych punktów na okręgu. Obok „normalnych” czarnych numerków podano dziwnie rozmieszczone czerwone. Zrobiono to w ten sposób, że nawinięto na ten okrąg półprostą, na której zaznaczono punkty odpowiadające kolejnym potęgom 3. I rzeczywiście mamy: $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 17 + 10$, $3^4 = 4 \cdot 17 + 13$, $3^5 = 14 \cdot 17 + 5$ i tak dalej, czyli $n = 3^k \pmod{17}$. Czytelnik zechce sprawdzić ten przepis dla kolejnych wykładników.

Ciekawe, że każdy z „czarnych” punktów, poza 0, dostał nową etykietkę.

Można spróbować zastosować podobny przepis dla innej podstawy potęg i innej liczby równomiernie na okręgu rozmieszczonych punktów. Zważywszy nasze codzienne przyzwyczajenia, najwygodniej jest nam potęgować 10, a liczbę punktów ustalmy, powiedzmy, na 7 i obliczamy reszty modulo 7.

Mamy $10^0 \equiv 1$, $10^1 \equiv 3$, $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv 6$, kolejne reszty to 4 i 5 – są wszystkie, a więc jest ich sześć, czyli każdy „czarny punkt” poza 0 otrzyma czerwoną etykietkę.

Gdybyśmy jednak zamiast 7 wzięli 3 punkty na okręgu, to i tak tylko jeden z nich otrzymałby przy potęgowaniu 10 czerwoną etykietkę.

Trzymając się potęgowania 10, dla 11 czerwone etykiety otrzymałyby tylko dwa punkty, a dla 13 sześć.

Natomiast przy tym potęgowaniu wszystkie czarne punkty otrzymałyby czerwone etykiety dla 17 (tak jak przy potęgowaniu 3), 19, 29, 97 czy 337. Zdają sobie sprawę, jak trudno to sprawdzić.

Choć mogę podać równoważny sposób badania tego problemu:

z potęgowania liczby m otrzymamy wszystkie reszty modulo k wtedy i tylko wtedy, gdy rozwinięcie liczby $1/k$ w ułamek o podstawie m będzie miało okres długości $k - 1$,

czyli taka jest długość okresu, jaka jest liczba niezerowych reszt. Np. $1/7$ w systemie dziesiętnym to $0,(142857)$.

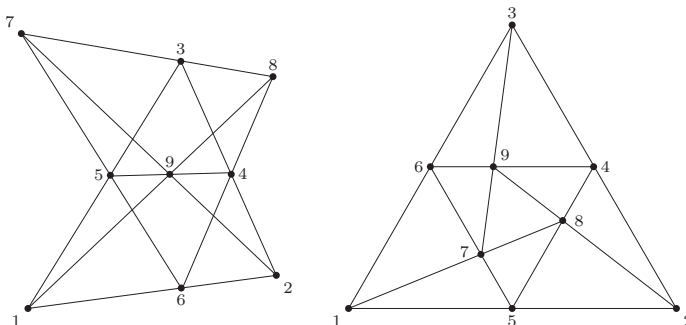
Czy to pomaga stwierdzić, kiedy wszystkie reszty się pojawiają? Można wątpić – nie sądzę, aby każdy Czytelnik stwierdził bez trudu, że np. $1/337$ ma okres długości 336.

Oczywiście, dla każdej podstawy m można obliczyć, czy jej potęgi dają wszystkie niezerowe reszty modulo k , ale robi się to, po prostu potęgując i dzieląc: podane tutaj dwie metody nie różnią się niczym – tylko w pierwszym przypadku zapisujemy reszty, a w drugim ilorazy. Cóż za piękna okazja, by znaleźć lepszy algorytm i wsławić się na wieki, bo problem postawił Gauss, a informacji o nim należy szukać pod hasłem **pierwiastki pierwotne**.

M. K.

Wpisywanie

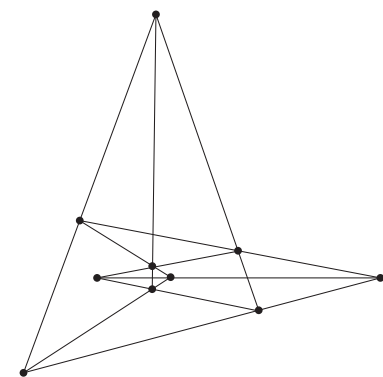
W geometrii dyskretnej przyjęło się mówić, że wielokąt jest wpisany w inny wielokąt, gdy ma wierzchołki na prostych zawierających boki tego drugiego wielokąta. Od czasu Hilberta tego zwrotu używa się i w przypadku „zwyckajnej” geometrii.



Na obu rysunkach trójkąt 123 jest wpisany w trójkąt 789, ten z kolei jest wpisany w trójkąt 456, ten zaś w trójkąt 123.

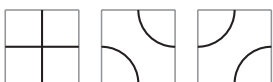
Jak widać, można to zrobić nawet na co najmniej dwa sposoby. Polecam Czytelnikowi sprawdzenie, że ten łańcuszek nie może być krótszy, czyli że nie ma takich trójkątów \mathcal{A} i \mathcal{B} , by \mathcal{A} był wpisany w \mathcal{B} i równocześnie \mathcal{B} był wpisany w \mathcal{A} . To nietrudne.

A jak jest dla czworokątów? Bo dla pięciokątów jest to możliwe. Wybierając odpowiednio odcinki z rysunku na marginesie, można wskazać dwa pięciokąty, z których każdy jest wpisany w pozostały.



rozwiązanie w numerze

M. K.



Rys. 1

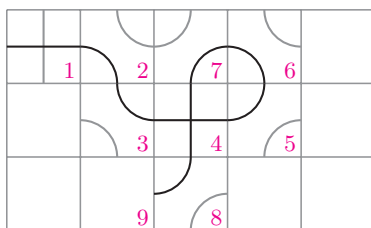
Wiadomo, że w tego rodzaju grach jeden z graczy zawsze ma strategię wygrywającą, czyli może wygrać niezależnie od poczynań przeciwnika. Więcej na ten temat oraz inne gry znaleźć można m.in. w *deltoidzie* 10/2009, polecam zwłaszcza zadanie 4.

Przedłuż ścieżkę

Joanna JASZUŃSKA

Gra Black rozgrywana jest przez dwóch graczy (I – rozpoczynającego i II) na prostokątnej planszy podzielonej na kwadratowe pola jednostkowe; każdy z wymiarów planszy jest większy od 2. Gracze na przemian rysują w kwadratach jeden ze wzorów z rysunku 1, przy czym:

- (1) gracz I w pierwszym ruchu musi w lewym górnym rogu narysować wzór +,
- (2) następnie gracz II gra na sąsiednim polu, przedłużając jedno z ramion +,
- (3) każdy gracz musi w swoim ruchu wydłużać czarną ścieżkę wyznaczoną przez pierwsze dwa ruchy (rys. 2),
- (4) przegrywa gracz, który doprowadzi ścieżkę do brzegu planszy.

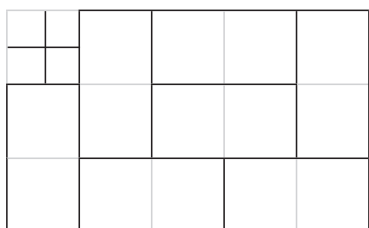


Rys. 2. Przykładowy początek gry, numeracja pól odzwierciedla kolejność ruchów.

W ruchu 7 gracz I doprowadził ścieżkę do pola z numerem 8.

Warto teraz przerwać lekturę, by pograć w tę grę i poszukać strategii wygrywającej.

Strategię wygrywającą na planszy o nieparzystej liczbie pól ma gracz II. Dzieli całą planszę bez początkowego pola na kostki domina (czyli prostokąty 2×1 , rys. 3). Łatwo sprawdzić, że taki podział zawsze jest możliwy (jak również inne, dalej opisane). Następnie w każdym swoim ruchu gra w pustej kostce domina tak, aby ścieżka kończyła się w jej środku (a więc nigdy nie doprowadzi jej do krawędzi i nie przegra). Zawsze może to zrobić, gdyż zmusza w ten sposób przeciwnika do dopełnienia tej samej kostki domina, więc sam w kolejnym swym ruchu znów zagra w nowej kostce.



Rys. 3. Podział na kostki domina odpowiadający rozgrywce z rys. 2.

Na planszy o parzystej liczbie pól podobną strategię wygrywającą ma gracz I: po pierwszym ruchu gracza II dzieli całą planszę na kostki domina tak, aby dwa zajęte już pola tworzyły jedną kostkę. Następnie gra jak wyżej.

Zmieńmy teraz regułę (4) na następującą:

(4') przegrywa gracz, który doprowadzi ścieżkę do brzegu planszy, chyba że zrobi to w prawym dolnym rogu (na *mecie*) – wtedy gracz ten wygrywa.

Poprzednia strategia gracza I dla parzystej liczby pól działa teraz na planszy o nieparzystej liczbie pól z usuniętą metą. W swoim ruchu gracz I zaczyna nowe domino (nie przegrywa) lub trafia na metę (wygrywa).

Jeśli plansza ma jeden wymiar parzysty, a drugi nieparzysty, gracz II dzieli na domina szachownicę bez pola startowego i mety i też wygrywa jak powyżej.

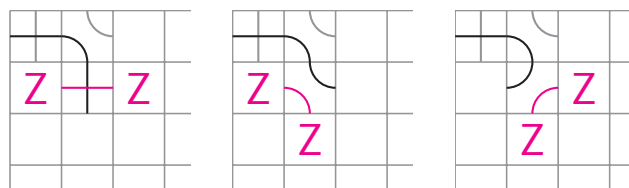
Pora na przykrą niespodziankę: planszy o obu wymiarach parzystych z usuniętym polem startowym i metą nie da się podzielić na kostki domina. Dlaczego? I jak w takim razie zmodyfikować strategię? Zachęcam do przemyśleń przed dalszą lekturą.



Rys. 4

Pomałujmy planszę w szachownicę. Pole startowe i meta są jednego koloru, więc bez nich zostaje inna liczba pól białych niż czarnych (rys. 4). Tymczasem każda kostka domina ma jedno pole białe i jedno czarne, zatem podział nie jest możliwy.

Nowa strategia dla gracza II: w pierwszym swoim ruchu kieruje on ścieżkę tak, by gracz I musiał zagrać w polu w prawo i w dół od pola startowego (rys. 5). Gracz I wydłuża ścieżkę, a jednocześnie wybrany przez niego wzór łączy pewne dwa puste pola, oznaczmy każde z nich przez *Z*.



Rys. 5. Lewa górna część planszy, różne warianty po drugim ruchu gracza I.

Teraz gracz II dzieli na kostki domina całą planszę oprócz trzech zajętych już pól, dwóch pól *Z* i mety. Taki podział zawsze da się przeprowadzić (nietrudne sprawdzenie tego pozostawiam Czytelnikowi). Ponadto *parę pól Z gracz II też uznaje za jedno domino*, gdyż pola te są ze sobą połączone. Dalej gra jak zwykle.

Literatura:
E.R. Berlekamp, J.H. Conway, R.K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, A K Peters 2003;
A. Brandhof, J. Guichelaar, A. Jaspers, *Half a Century of Pythagoras Magazine*, MAA Press 2015.