



W następnym numerze: ciemna materia atakuje



SPIS TREŚCI NUMERU 10 (521)

Postęp
Wojciech Czerwiński str. 1

(Nie)sprawiedliwe wybory
Joanna Ochremiak str. 1

Wokół zasady nieoznaczoności
Jan Chwedeńczuk str. 4

Ludziom małej wiary
Tomasz Kazana str. 6

Czy możemy zobaczyć
początek Wszechświata?
Paweł Bielewicz str. 8


Symetrie ciała i grupy:
teoria Galois
Maria Donten-Bury str. 10

 Zadania str. 13

Dlaczego nie da się zobaczyć
atomów?
Ewa Łacińska str. 14

Czy grawiton da się wykryć?
Michał Bejger str. 16

Informatyczny kącik
olimpijski (108):
Hacker Cups and Balls str. 18


 Od Nobla do Nobla,
do Nobla...
Magdalena Fikus str. 19

Klub 44 str. 20

Prosto z nieba:
O zdmuchiowaniu dysków str. 22

Niebo w październiku str. 22

Aktualności str. 24

 Kto da mniej?
Joanna Jaszewska str. 25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia;
rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2018 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

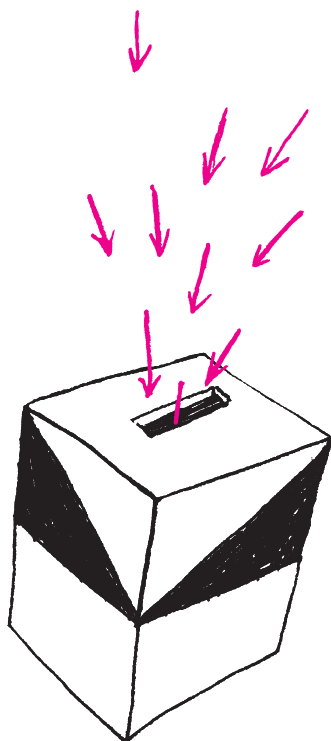
Postęp

Wydaje się, że postęp naszej cywilizacji dokonuje się głównie w ten sposób, że coś nowego umiemy, my, ludzie, skonstruować czy dokonać. Przykłady można mnożyć, podróżując poprzez wieki, widzimy: rozpalanie ognia, budowę koła, wytapianie brązu i żelaza, budowę murów warownych, wynalazek prochu, leczenie nowych chorób, udoskonalenie druku, budowę statków dalekomorskich, wreszcie wynalazki maszyny parowej, radia, ostatnio tranzystory i następujące po nich komputery, energia jądrowa, czy wynalazek wielkiej światowej sieci łączności – Internetu. Oczywiście, niektóre usprawnienia dokonują się przez wiele lat lub wieków na drodze mozolnych procesów. Sceptycy mogliby powiedzieć, że to dalece nie wszystko, bo postęp dokonuje się również w ten sposób, że coś więcej wiemy lub rozumiemy. Niekoniecznie umiemy to od razu wykorzystać, ale po paru latach lub dekadach – tak. Niech przykładami z ostatnich wieków będą zrozumienie: elektryczności – co zmieniło fizykę i technikę; istnienia bakterii – co zmieniło medycynę; istnienia genów, a wieki później budowy tych genów – co w naszych czasach zmienia biologię i medycynę; budowy atomu – co zmieniło sztukę wojenną i w efekcie przyniosło dekady pokoju; pochodnych i całek – co zrewolucjonizowało technikę i wiele, wiele innych.

Wojciech CZERWIŃSKI

Ale czy może być jeszcze jakiegoś innego rodzaju postęp? Czy może dokonywać się poprzez zrozumienie, że czegoś nigdy nie uda nam się zrobić? Przecież nigdy nie przyniesie to niczego praktycznego. Tak jest jedynie pozornie! Po pierwsze, gdy rozumiemy, czego nie uda się zrobić, to nie tracimy już sił na podążanie tą ścieżką. Poza tym czasami sama niemożliwość zrobienia jednej rzeczy powoduje możliwość zrobienia innej – jak w kryptologii. A możliwe, że znajdziemy i inne takie dziedziny. Ale chyba najbardziej fundamentalna wartość poszukiwania ograniczeń jest taka, że zrozumienie, czego nie da się zrobić, jest nieodłączną częścią zrozumienia Wszechświata. A to, nawet jeśli kierujemy się tylko pragmatyzmem, może się przydać, chociaż jeszcze nie wiemy do czego.

Głównymi bohaterami tego numeru są właśnie bariery, ograniczenia, które nie pozwalają nam na pewne działania, konstrukcje, dokładne badania. Pozornie są jedynie kłódami rzucanymi nam przez Wszechświat pod nogi. Ale po głębszym przyjrzeniu się Czytelnik Koneser może w nich dostrzec jedyny w swoim rodzaju urok.



(Nie)sprawiedliwe wybory

Joanna OCHREMIAK*

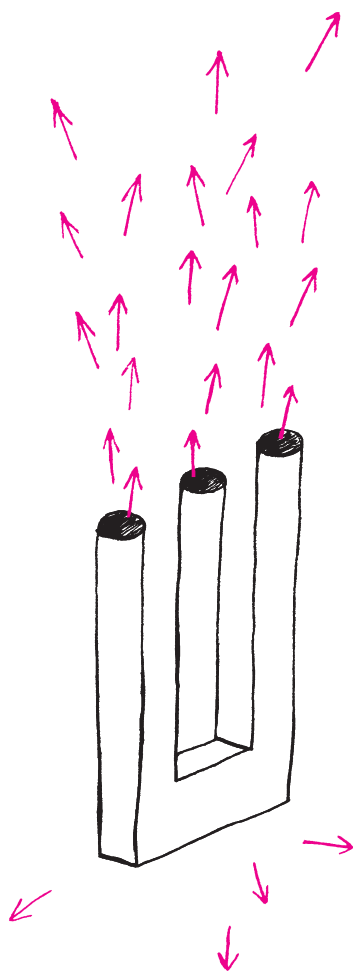
Ustalenie wspólnego stanowiska przez grupę ludzi wymaga często w pierwszym kroku wyboru metody podjęcia zbiorowej decyzji. Kluczowe stają się wówczas pytania: Jaka metoda jest sprawiedliwa? Jaka metoda najlepiej odzwierciedli preferencje członków grupy?

Jednym z modeli zbiorowego podejmowania decyzji są *funkcje społecznego dobrobytu*. Załóżmy, że grupa $n \geq 2$ osób $\{w_1, \dots, w_n\}$, nazwijmy ich *wyborcami*, chce podjąć wspólną decyzję w sprawie k różnych *alternatyw* (czyli możliwości). Zbiór wyborców oznaczmy przez W , natomiast zbiór alternatyw przez A . Przyjmijmy, że każda z osób potrafi uporządkować zbiór alternatyw od najlepszej do najgorszej jej zdaniem alternatywy – przyporządkowując alternatywom liczby od k (najlepsza) do 1 (najgorsza). Zapis $a >_i a'$ oznacza, że wyborca w_i uważa alternatywę a za lepszą od alternatywy a' . Dla uproszczenia wykluczamy „remisy”. Każda z osób ma zatem do wyboru $k!$ możliwych uporządkowań – ich zbiór oznaczmy przez $\mathcal{U}(A)$.

Funkcję $f: \mathcal{U}(A)^n \rightarrow \mathcal{U}(A)$ nazywamy *funkcją społecznego dobrobytu*. Przyporządkowuje ona krotce n uporządkowań alternatyw (odpowiadającym preferencjom wyborców w_1, \dots, w_n) jedno uporządkowanie, które uznajemy za zbiorową decyzję. Zapis $a > a'$ oznacza, że grupa uznaje alternatywę a za lepszą od alternatywy a' . Aby funkcję społecznego dobrobytu uznać za sprawiedliwą metodę podejmowania zbiorowych decyzji, wymaga się, by spełniała szereg warunków.

Postulat *niezależności od alternatyw niezwiązanych* głosi, że decyzja w sprawie alternatyw a i a' nie powinna zależeć od preferencji wyborców wobec pozostałych kwestii.

*Université Paris Diderot



Niezależność od alternatyw niezwiązanych. Przypuśćmy, że podejmując decyzję przy zastosowaniu funkcji f , grupa uznała alternatywę a za lepszą od alternatywy a' , czyli $a > a'$. Następnie niektórzy członkowie grupy zmienili zdanie w sprawie pewnych alternatyw, ale ich preferencje względem alternatyw a i a' pozostały takie same, tzn. zależność $a >_i a'$ albo $a' >_i a$ dla każdego wyborcy w_i pozostała bez zmian. Funkcja f spełnia warunek niezależności od alternatyw niezwiązanych, jeśli zawsze w takiej sytuacji, przy kolejnym podejmowaniu decyzji za pomocą funkcji f , grupa w dalszym ciągu uzna alternatywę a za lepszą od alternatywy a' .

Słaby warunek optymalności Pareto wymaga respektowania jednomyślnej preferencji członków grupy.

Słaby warunek optymalności Pareto. Załóżmy, że każdy członek grupy przedkłada alternatywę a nad alternatywę a' , tzn. $a >_i a'$ dla każdego wyborcy w_i . Powiemy, że funkcja społecznego dobrobytu f spełnia słaby warunek optymalności Pareto, jeśli zawsze w takiej sytuacji zbiorowe uporządkowanie, będące wynikiem zastosowania funkcji f , spełnia $a > a'$.

Nietrudno przyznać, że sformułowane powyżej postulaty stanowią rozsądne minimum, konieczne, by uznać funkcję f za sprawiedliwą.

Badaniem tego typu warunków oraz analizą własności metod podejmowania grupowych decyzji zajmuje się *teoria wyboru społecznego*. Jej narodziny w latach 50. XX wieku wiązały się z odkryciem serii paradoksów mówiących o tym, że rozsądne, wydawałoby się, warunki, są w praktyce nie do pogodzenia. Bodajże najbardziej znanym tego typu wynikiem jest *twierdzenie Arrowa o niemożliwości*, pochodzące od amerykańskiego ekonomisty Kennetha Arrowa.

Twierdzenie Arrowa o niemożliwości. Jeśli zbiór alternatyw ma co najmniej trzy elementy, to każda funkcja społecznego dobrobytu, spełniająca słaby warunek optymalności Pareto oraz warunek niezależności od alternatyw niezwiązanych, jest dyktaturą.

Przez *dyktaturę* rozumiemy funkcję społecznego dobrobytu f , dla której istnieje taki wyborca w_i , że dla każdej pary alternatyw a i a' , jeśli $a >_i a'$, to przy podejmowaniu decyzji za pomocą funkcji f grupa uzna alternatywę a za lepszą od alternatywy a' . Dyktatura spełnia wprawdzie oba sformułowane przez nas wymagania, trudno jednak uznać ją za dobrą metodę podejmowania zbiorowych decyzji. Twierdzenie Arrowa mówi więc w istocie o nieistnieniu funkcji społecznego dobrobytu spełniającej minimalne wymagania sprawiedliwości.

Pozostaje nam udowodnić twierdzenie Arrowa. Przypuśćmy, że grupa $n \geq 2$ osób podejmuje decyzję w sprawie $k \geq 3$ alternatyw przy zastosowaniu funkcji społecznego dobrobytu f spełniającej słaby warunek optymalności Pareto oraz warunek niezależności od alternatyw niezwiązanych. Dla ułatwienia przyjmijmy dodatkowo, że funkcja f jest *neutralna*. Oznacza to, że każda z alternatyw traktowana jest tak samo. Dokładniej, jeśli każdy wyborca zamieni w swoim uporządkowaniu pewne dwie alternatywy a i a' miejscami, to w grupowym uporządkowaniu, będącym wynikiem zastosowania funkcji f , alternatywy a i a' również zamienią się miejscami. Założenie to nie jest konieczne, ale uprości nieco dowód przy jednoczesnym zachowaniu jego kluczowych idei.

Grupę wyborców P nazwiemy *decyzyjną w kwestii $a > a'$* , jeśli jest ona w stanie przeforsować decyzję o uznaniu alternatywy a za lepszą od a' , tzn. jeśli każda z osób w grupie P przedkłada alternatywę a nad a' , natomiast wszyscy pozostali wyborcy przedkładają alternatywę a' nad a , to grupową decyzją przy zastosowaniu funkcji f jest $a > a'$. Z neutralności funkcji f wynika, że jeśli grupa P jest decyzyjna w kwestii $a > a'$, to jest ona decyzyjna w kwestii dowolnej innej pary alternatyw. Możemy ją więc nazwać po prostu grupą *decyzyjną*.

Przez \mathcal{D} oznaczmy zbiór wszystkich grup decyzyjnych. Ponieważ funkcja f spełnia słaby warunek optymalności Pareto, zbiór wszystkich wyborców W jest decyzyjny, czyli należy do \mathcal{D} .

**Rozwiązanie zadania M 1543.**

Jeżeli $9n + 16 = k^2$ oraz $16n + 9 = \ell^2$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych k, ℓ , to

$$(4k - 3\ell)(4k + 3\ell) = 16k^2 - 9\ell^2 = 16^2 - 9^2 = 175.$$

Liczba 175 ma trzy przedstawienia w postaci iloczynu dwóch dodatnich liczb całkowitych:

$$1 \cdot 175 = 5 \cdot 35 = 7 \cdot 25,$$

co wobec $4k - 3\ell < 4k + 3\ell$ prowadzi do par (k, ℓ) : (22, 29), (5, 5), (4, 3) i w konsekwencji do $n = 52$, $n = 1$ lub $n = 0$. Bezpośrednio sprawdzamy, że każda z tych liczb ma żądaną własność.

**Rozwiązanie zadania M 1544.**

Mnożąc daną równość stronami przez $a + b + c$, uzyskujemy

$$\frac{a^2 + a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2 + b(c+a)}{c+a} + \frac{c^2 + c(a+b)}{a+b} = a + b + c,$$

skąd

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

**Rozwiązanie zadania M 1545.**

Bez straty ogólności przyjmijmy, że

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Zauważmy, że w każdej z par

$$(1, a_1 - 1), (2, a_1 - 2), \dots, ([a_i/2], [a_i/2])$$

jest co najmniej jedna liczba spoza zbioru \mathcal{S} . Rzeczywiście, gdyby w pewnej parze obie liczby należały do \mathcal{S} , to ich suma także, co przeczy definicji a_i .

Z drugiej strony liczb spoza \mathcal{S} , które są mniejsze od a_i , jest dokładnie $i - 1$. Stąd $[a_i/2] \leq i - 1$, a zatem $a_i \leq 2i - 1$. Sumując te nierówności dla $i = 1, 2, \dots, n$, uzyskujemy

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Rozważmy teraz dowolną grupę wyborców P . Przypuśćmy, że wyborcy w tej grupie przedkładają alternatywę a nad a' , zaś wyborcy spoza tej grupy przedkładają alternatywę a' nad a . Mamy dwie możliwości. Jeśli wspólną decyzją w tej sytuacji jest $a > a'$, to znaczy, że grupa P jest decyzyjna w kwestii $a > a'$, czyli po prostu decyzyjna. Jeśli wspólną decyzją jest $a' > a$, to decyzyjna jest grupa $W \setminus P$ (wyborcy należący do W i nienależący do P). A zatem dokładnie jedna spośród grup P oraz $W \setminus P$ należy do zbioru \mathcal{D} .

Jeśli P i Q są grupami wyborców, to przez $P \cap Q$ oznaczamy zbiór wszystkich tych osób, które należą zarówno do P , jak i do Q . Okazuje się, że jeśli grupy P i Q są decyzyjne, to grupa $P \cap Q$ również. Rzeczywiście, rozważmy alternatywy a oraz b i przypuśćmy, że wyborcy w grupie $P \cap Q$ uważają alternatywę a za lepszą od b , natomiast wszyscy pozostali wyborcy mają przeciwne zdanie. Wykażemy, że zbiorowe uporządkowanie, będące wynikiem zastosowania funkcji f , spełnia $a > b$. Niech c będzie alternatywą inną niż a i b (alternatywa taka istnieje, ponieważ zbiór A ma co najmniej trzy elementy). Z warunku niezależności od alternatyw niezwiązanych wynika, że preferencje członków grupy wobec alternatywy c nie wpływają na grupową decyzję w kwestii alternatyw a i b . Możemy więc założyć, że każdy wyborca w grupie $P \setminus Q$ ma preferencję $b >_i a >_i c$; każdy wyborca w grupie $Q \setminus P$ uważa, iż $c >_i b >_i a$; każdy wyborca w grupie $P \cap Q$ jest zdania, że $a >_i c >_i b$; zaś wyborcy spoza grup P i Q uznają porządek $b >_i c >_i a$. Uporządkowania pozostałych alternatyw przyjmijmy dowolne. W wyniku zastosowania funkcji f otrzymujemy grupowe uporządkowanie alternatyw od najlepszej do najgorszej. Decyzyjność grupy P implikuje, że w tym uporządkowaniu $a > c$, zaś decyzyjność grupy Q implikuje, że $c > b$. Oznacza to, że grupa uznaje alternatywę a za lepszą od b , co kończy dowód decyzyjności grupy $P \cap Q$.

Podsumowując, wykazaliśmy powyżej trzy własności zbioru grup decyzyjnych \mathcal{D} : 1) grupa wszystkich wyborców W należy do \mathcal{D} , 2) dla każdej grupy wyborców P dokładnie jedna spośród grup P oraz $W \setminus P$ należy do \mathcal{D} , 3) dla każdych dwóch grup P i Q , należących do \mathcal{D} , grupa $P \cap Q$ należy do \mathcal{D} . Zbiór spełniający te trzy warunki jest *ultrafiltrem* podzbiorów zbioru W .

Ostatnim krokiem w dowodzie jest wykazanie, że istnieje taki wyborca w_i , iż grupa jest decyzyjna wtedy i tylko wtedy, gdy w_i jest jej członkiem.

Niech P będzie grupą osób, które należą do każdej grupy decyzyjnej. Z warunku 3) wynika, że grupa P jest decyzyjna. Wobec tego grupa P nie może być pusta – grupa wszystkich wyborców jest decyzyjna, a zatem warunek 2) implikuje, że grupa pusta nie jest decyzyjna. Niech wyborca w_i należy do grupy P . Członkowie grupy P z definicji należą do każdej grupy decyzyjnej, czyli w szczególności wyborca w_i należy do każdej grupy decyzyjnej. Z drugiej strony, jeśli Q jest dowolną grupą, której w_i jest członkiem, to grupa $W \setminus Q$ nie jest decyzyjna, gdyż w_i do niej nie należy. Z warunku 2) wnioskujemy więc, że grupa Q jest decyzyjna.

Wyborca w_i jest dyktatorem – jeśli przedkłada on alternatywę a nad alternatywę a' , to grupa Q osób będących tego samego zdania jest decyzyjna, a zatem przeforsuje ona zbiorową decyzję $a > a'$. To kończy dowód twierdzenia Arrowa.

Wykazaliśmy, że funkcja społecznego dobrobytu niebędąca dyktaturą nie może jednocześnie spełniać słabego warunku optymalności Pareto oraz warunku niezależności od alternatyw niezwiązanych. To i inne tego typu paradoksalne twierdzenia teorii wyboru społecznego sprawiają, że projektowanie grupowych metod podejmowania decyzji jest bardzo skomplikowane. Nieunikniona jest rezygnacja z pewnych pożądaných własności. Spośród postulatów, o których mówi twierdzenie Arrowa, najczęściej porzuca się niezależność od alternatyw niezwiązanych. W praktyce oznacza to, że aby uzyskać bardziej pożądaný wynik, czasem oplaća się deklarować preferencje inne niż rzeczywiste. Wybory są więc z konieczności zawsze nie do końca sprawiedliwe.

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Mechanika kwantowa, choć sformułowana ponad sto lat temu, wciąż zaskakuje. Przyczyną jest odmienność teorii kwantów od fizyki klasycznej, a co za tym idzie, zjawisk przez nią przewidywanych od doświadczanych w życiu codziennym. W warstwie teoretycznej zasadnicza różnica między oboma podejściami tkwi w tym, jak traktują układy fizyczne. Klasycznie cząstka *ma* w każdej chwili położenie i prędkość (bądź skłogacony z nią pęd), co oznacza, że jej własności są określone i istnieją realnie, bez względu na to, czy ktoś lub coś je mierzy. W opisie kwantowym wielkości te nie są określone, dopóki *obserwator* nie dokona ich pomiaru. Przed pomiarem cząstce przypisuje się całą gamę możliwych położenia czy pędów. Ta wielość współistniejących możliwości zawarta jest w *stanie kwantowym*.

By wyrobić sobie pewną intuicję dotyczącą tego, czym jest ten obiekt, przypomnijmy, że fundamentem fizyki klasycznej jest równanie Newtona, które wiąże zmianę pędu układu z działającymi nań siłami. Rozwiązanie tego równania to podanie pędu i położenia cząstki w każdej chwili. Każda z tych wielkości jest wektorem w przestrzeni trójwymiarowej, zatem ruch cząstki, czyli jej trajektoria, rozumiana jako podanie pary pęd + położenie, będzie krzywą w przestrzeni o sześciu wymiarach. Cząstce kwantowej nie można przypisać pojedynczej krzywej, co oznacza, że nie ma ona dokładnie określonego pędu bądź położenia. Po przejściu do świata kwantów klasyczna trajektoria rozmywa się na cały zbiór możliwości zawartych w stanie kwantowym, którego ewolucję wyznacza równanie Schrödingera.

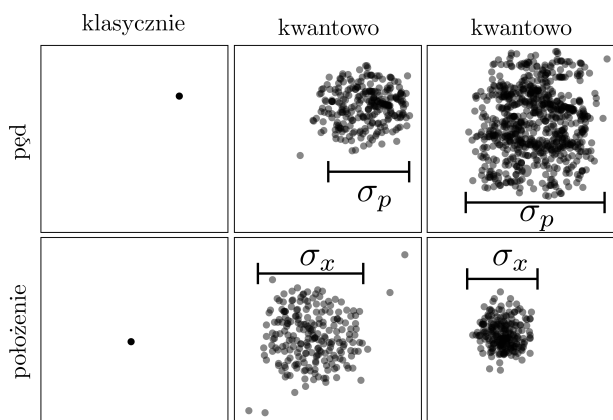
W ramach teorii kwantów cząstka opisywana jest w taki sposób, jakby była właśnie rozmyta, czyli znajdowała się w wielu konfiguracjach fizycznych naraz, zaś zjawisko to nazywamy *superpozycją*. W ramach powszechnie stosowanej interpretacji mechaniki kwantowej, zwanej „kopenhaską”, dopiero akt pomiaru danej wielkości fizycznej – na przykład położenia albo pędu – określa jej wartość, pozostawiając pozostałe w ogólności nieznanymi. Interpretacja ta stawia obserwatora, poprzez dokonywany przezeń pomiar, na wyróżnionej pozycji, jako urządzenia bądź istoty nadającej układowi fizycznemu określone cechy. Probabilistyczna natura teorii kwantów objawia się w tym, że nie można powiedzieć, która z wielu możliwości zawartych w stanie kwantowym stanie się realnym bytem na skutek pomiaru. Można jedynie powiedzieć, z jakim prawdopodobieństwem – określonym przez dynamikę stanu kwantowego zgodnie z równaniem Schrödingera – obserwator zarejestruje dany wynik.

Konsekwencje opisu układu fizycznego poprzez stan kwantowy są wielorakie. Einstein, Podolsky i Rosen pokazali, że dwie cząstki można przygotować w pewnym stanie superpozycji, oddalić wzajemnie na znaczną odległość, a następnie zmierzyć, na przykład, położenie jednej z nich, co nieskończenie szybko określa położenie drugiej [1]. Wydawać by się mogło, że prowadzi to do natychmiastowej komunikacji, w szczególności szybszej, niż pozwala na to ograniczenie, jakie nakłada prędkość światła. Spostrzeżenie to sprowokowało Einsteina od ukucia frazy o „upiornym działaniu na odległość”, i było dla niego kolejnym argumentem na rzecz niesłuszności bądź niepełności opisu kwantowego. Nieomal trzydzieści lat później John Bell opublikował pracę, w której dowiódł, że powyższe zjawisko, prowadzące do tak zwanego paradoksu EPR, jest przejawem *nielokalności* mechaniki kwantowej [2]: dwie cząstki, mimo że odległe, nie stanowią osobnych bytów, dopóki nie dokona się na nich pomiaru. Przed pomiarem stanowią jeden układ, mimo że nie są w żaden sposób mechanicznie powiązane.

W układach, w których jest wiele cząstek, superpozycja może prowadzić do szczególnej między nimi relacji, nazywanej splątaniem. Przykładem wielocząstkowego stanu splątanego jest sławny kot Schrödingera, który „będąc naraz” martwy i żywy, dopiero dzięki obserwatorowi wytrąca się z tej upiornej superpozycji. Splątanie jest zasobem – pozwala na osiągnięcie niezwyklej dokładności pomiarów [3, 4], na przykład poprzez planowaną poprawę czułości detektorów fal grawitacyjnych [5, 6, 7].



Na wczesnym etapie rozwoju teorii kwantów dostrzeżono, że opis cząstki poprzez stan kwantowy niesie pewną szczególną konsekwencję, zwaną obecnie *zasadą nieoznaczoności Heisenberga*. Można ją sformułować na wiele sposobów, my przytoczymy ten, który jest powszechnie uznany i nie budzi kontrowersji: zasada nieoznaczoności Heisenberga mówi, że nie można



Rozkład położenia i pędów mierzonych dla cząstki opisywanej równaniem Newtona (lewa kolumna) oraz Schrödingera (środkowa i prawa kolumna). Klasycznie wyniki pomiarów przeprowadzonych w identycznych warunkach nie różnią się. Kwantowo zarówno położenie, jak i pęd mają rozrzuty, których wartości połączone są zasadą nieoznaczoności Heisenberga. Przygotowanie cząstki w stanie, który ma mały rozrzut położenia, skutkuje większym rozrzutem pędów.

przygotować cząstki w takim stanie kwantowym, by zarówno jej położenie, jak i pęd były określone.

By zrozumieć wagę tego twierdzenia, przeprowadźmy następujący eksperyment myślowy. Rozważmy działko, które w regularnych odstępach czasu wystrzeliwuje w identyczny sposób pojedyncze elektrony. Po wystrzeleniu pozwalamy elektronowi lecieć przez pewien czas (za każdym razem ten sam), po czym mierzymy jego położenie. Powtarzamy doświadczenie miliony razy, zawsze notując, gdzie elektron został zaobserwowany. Gdyby nie prawa mechaniki kwantowej, elektron zawsze dolatywałby do tego samego punktu (oczywiście zakładając, że przebieg całego doświadczenia zawsze jest ten sam). Dzieje się tak dlatego, że równanie Newtona daje jednoznaczny związek końcowego położenia cząstki z działającymi nań siłami i warunkami początkowymi. Lecz elektronem rządzi teoria kwantów, co sprawia, że mierzone położenia będą miały pewien rozrzut, który oznaczymy przez σ_x .

W następnym kroku powtarzamy doświadczenie kolejne miliony razy, mierząc, zamiast położenia, pęd cząstki. Znow w ramach mechaniki newtonowskiej należałoby się spodziewać za każdym razem tego samego wyniku. W rzeczywistości również pęd elektronu będzie miał pewien rozrzut, którego wartość oznaczymy przez σ_p .

Zasada nieoznaczoności stwierdza, że gdybyśmy tak ustawili działko, żeby dostać jak najmniejsze σ_x (czyli by pomiary położenia prawie nie różniły się między sobą w kolejnych powtórzeniach doświadczenia), stałoby się to kosztem σ_p (patrz rysunek). Wielkości te są powiązane: im dokładniej określone jest położenie cząstki, tym mniej dokładnie określony jest pęd, i *vice versa* [8]. Matematycznie stwierdzenie to zawiera się w nierówności

$$(*) \quad \sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Innymi słowy, iloczyn tych dwu wielkości nie może być dowolnie mały, lecz jest fundamentalnie ograniczony przez pewną stałą fizyczną, zwaną zredukowaną stałą Plancka. Wartość liczbowa tej stałej w skali doświadczanych przez człowieka wartości wielkości fizycznych jest niewiarygodnie mała, albowiem $\hbar \simeq 10^{-34}$ kg m²/s. Oznacza to, że z punktu widzenia naszych codziennych obserwacji można przyjąć, że w gruncie rzeczy prawa strona nierówności (*) wynosi zero, czyli nie ma żadnego związku między rozrzutami σ_x i σ_p . Niemniej, gdy prowadzimy obserwacje w nanoskali, nie można już pominąć wartości \hbar i zasada nieoznaczoności ma znaczenie. Jest ona jednym z przejawów fundamentalnego indeterminizmu mechaniki kwantowej: nie da się przygotować cząstki w takim stanie, by wszystkie wielkości fizyczne były doskonale określone. Wręcz przeciwnie, są one nieoznaczone, pomiary od realizacji do realizacji doświadczenia dają różne wyniki, a ich rozrzuty można powiązać nierównością taką jak (*).

Powyższy wywód nie tłumaczy, dlaczego to akurat te dwie wielkości, czyli położenie i pęd połączone są zasadą nieoznaczoności. Dowód tego związku wymaga znajomości teorii przestrzeni Hilberta, lecz pewne argumenty na rzecz istnienia tego związku można oprzeć na wnioskach płynących z mechaniki klasycznej. Zauważmy, że to pęd (a zatem i prędkość) prowadzą do przesunięcia, czyli zmiany położenia – mówimy, że pęd jest *generatorem* przesunięcia. Mniej oczywisty jest związek odwrotny – zależność od położenia centralnej wielkości mechaniki klasycznej, jaką jest hamiltonian, generuje zmianę pędu. Z tych dwóch zdań wnioskujemy, że położenie i pęd nawet na gruncie mechaniki klasycznej są związane. Co więcej, można wykazać, że, na przykład, symetria przestrzenna układu (a zatem jego niezmienniczość pod wpływem transformacji

Literatura

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, 1935.
- [2] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1:195, 1964.
- [3] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone. Quantum-enhanced measurements: beating the standard quantum limit. *Science*, 306(5700):1330–1336, 2004.
- [4] L. Pezzé, A. Smerzi. Entanglement, nonlinear dynamics, and the Heisenberg limit. *Phys. Rev. Lett.*, 102(10):100401, 2009.
- [5] B. P. Abbott *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.
- [6] B. P. Abbott *et al.* Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 116:241103, Jun 2016.
- [7] J. Aasi *et al.* Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light. *Nature Photonics*, 7(8):613–619, 2013.
- [8] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley Publishing Company, 1994.



przesunięcia) prowadzi do zasady zachowania pędu, i *vice versa*. Podobny związek zachodzi między składowymi wektora momentu pędu czy też energią a czasem. Stąd można się spodziewać, że istnieje wiele zasad nieoznaczoności, łączących rozrzuty pomiarów dwóch *sprzężonych* wielkości fizycznych.

Poza żywymi i martwymi kotami czy wysoce hipotetycznymi komputerami kwantowymi to zasada nieoznaczoności jest jednym z tych pojęć powstałych na gruncie teorii kwantów, które zdołały się przebić do powszechnej świadomości. Zazwyczaj formułowana jest w sposób niemający wiele wspólnego z powyższym wyprowadzeniem: powiada się, że pomiar położenia tak zaburza układ, że następujący po nim pomiar pędu daje wyniki z dużym rozrzutem, i na odwrót. Zauważmy, że w naszym opisie pomiary nie są wykonywane sekwencyjnie na jednej cząstce, lecz na wielu kopiach tego samego stanu kwantowego. Lecz bez względu na sformułowanie zasada nieoznaczoności Heisenberga pozostaje jedną ze zdumiewających konsekwencji kwantowej superpozycji.

Ludziom małej wiary

Tomasz KAZANA

Świat informatyki teoretycznej pełen jest hipotez, które badacze przyjmują po prostu *na wiarę*. Niektórzy wierzą, na przykład, że $P \neq NP$, inni wierzą, że istnieje bezpieczna kryptografia klucza publicznego (albo jeszcze konkretniej: wierzą, że szyfrowanie RSA jest bezpieczne). Co ciekawe, najpopularniejsze hipotezy informatyczne bynajmniej nie są równoważne, a relacje między nimi mogą zaskakiwać.

Chyba najpiękniej tę tematykę omówił Russell Impagliazzo w swym popularnym artykule *A Personal View of Average-Case Complexity* z roku 1995. Znajdziemy tam omówienie pięciu potencjalnych Wszechświatów, w których różne hipotezy mają różne rozstrzygnięcia. Scharakteryzujemy pokrótce te miejsca.

Wszechświat *Algorithmica*. Tutaj zakładamy, że po prostu $P = NP$. Filozoficznie oznacza to, że w zasadzie nie ma dla nas problemów bardzo trudnych. Niemal wszystkie problemy obliczeniowe komputer potrafi rozwiązywać w czasie wielomianowym.

Wszechświat *Heuristica*. Tym razem co prawda $P \neq NP$, ale generalnie tragedii obliczeniowej nie ma. Impagliazzo rozumie to w ten sposób, że istnieją problemy z klasy NP, dla których nie ma algorytmów, które *zawsze* działają w czasie wielomianowym, jednakże dla każdego takiego problemu istnieje algorytm, który dla przeciętnej jego instancji działa już szybko. Co więcej: te trudne instancje problemów NP są również trudne do znalezienia, a więc i tak nie powinny się pojawić w praktyce.

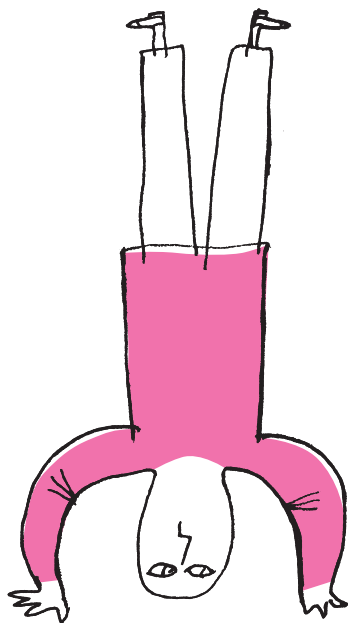
Wszechświat *Pessiland*. Tutaj istnieją problemy z klasy NP, które są trudne również w średnim przypadku. Dodatkowo nie istnieją funkcje jednokierunkowe (szerzej o nich niżej).

Wszechświat *Minicrypt*. W tym miejscu istnieją funkcje jednokierunkowe, a więc takie, których wartości komputer może szybko obliczać, ale dla których problem szukania przeciwobrazu jest trudny. Funkcje jednokierunkowe odgrywają dużą rolę w kryptologii. Z drugiej jednak strony zakładamy, że w Minicrypt nie istnieje bezpieczna kryptografia klucza publicznego.

Wszechświat *Cryptomania*. W tych okolicach występują i funkcje jednokierunkowe, i bezpieczna kryptografia klucza publicznego.

To, w którym z powyższych Wszechświatów my żyjemy, jest dzisiaj kwestią wiary. Pierwsze dwa światy to, oczywiście, eldorado algorytmików. Zarówno w Algorithmice, jak i w Heuristice niemal nie ma praktycznych problemów, dla których wielomianowa maszyna Turinga byłaby bezużyteczna. Z drugiej strony Minicrypt i Cryptomania to krainy mlekiem i miodem płynące dla kryptologów. Tylko tam istnieją jakiegokolwiek nietrywialne protokoły kryptologiczne.





Najsmutniejszym miejscem dla wszystkich (Mordorem informatyków?) zdaje się być (nienazwany przecież przypadkowo) Pessiland. Brakuje w nim funkcji jednokierunkowych, więc kryptolodzy są bezrobotni. Z drugiej strony algorytmicy też są bezsilni wobec wielu problemów z klasy NP.

W kwestii publicznych wyznań wiary to w znakomitej większości informatycy wierzą, że żyjemy w Cryptomanii. W większości, ale z całą pewnością nie jednomyślnie. Bardzo poważną i bardzo szanowaną osobą, która skłania się ku wierze w Algoritmikę, jest podobno profesor Wojciech Rytter z Uniwersytetu Warszawskiego. Autor niniejszego tekstu nie miał śmiałości, aby ten fakt zweryfikować u źródła. Ten sam autor ma również opory, żeby w druku pojawiła się jego osobista opinia w rozważanym temacie. Zresztą, jak w tym dowcipie o góralu, co to wstąpił do PZPR, i tak się z nią nie zgadza.

Jak już wspomniano na wstępie, dość interesujące są niektóre implikacje. Na przykład umiemy udowodnić, że jeśli funkcje jednokierunkowe istnieją, to musi być $P \neq NP$. (Rozumowanie jest w zasadzie natychmiastowe: gdyby $P = NP$, to odwracanie jakiegokolwiek funkcji nie mogłoby być istotnie trudniejsze od jej obliczania, bo przecież szukanie przeciwobrazu to problem z klasy NP; ta ostatnia obserwacja jest natychmiastowa, gdyż sam przeciwobraz może posłużyć jako *świadek* z definicji klasy NP.)

Z drugiej strony nie jest jasne, czy z założenia $P \neq NP$ wynika istnienie funkcji jednokierunkowych. Jest to bardzo ważny otwarty problem informatyki teoretycznej. Gdyby został pozytywnie rozstrzygnięty, przynajmniej przestałaby nas nękać apokaliptyczna wizja Pessilandu.

Na moment wróćmy jeszcze do Minicryptu. Ładną własnością tego Wszechświata jest mnogość jego równoważnych definicji. Otóż okazuje się, że istnienie funkcji jednokierunkowych jest równoważne każdej z następujących hipotez.

- Istnieje generator pseudolosowy. To znaczy: istnieje funkcja (łatwo obliczalna) $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$, gdzie $m > n$ oraz taka, że (dla wielomianowej maszyny Turinga) jednostajnie wylosowany element z $\{0, 1\}^m$ jest nieodróżnialny od $f(U)$, gdzie U wylosowano również jednostajnie, ale z mniejszego zbioru $\{0, 1\}^n$.
- Istnieje permutacja pseudolosowa oraz funkcja pseudolosowa.
- Istnieje bezpieczne szyfrowanie symetryczne z kluczami krótszymi od wysyłanych wiadomości.
- Istnieją ukochane (jakieś osobiste wyznanie wiary jednak się tu znajdzie) przez autora niniejszego tekstu protokoły z wiedzą zerową (Zero-Knowledge Proofs).
- Istnieje bezpieczny podpis cyfrowy.

Jako się rzekło, wszystkie powyższe zdania są równoważne. Jednak, oczywiście, nie każda implikacja jest jednakowo interesująca. Niektóre z nich można potraktować jako ćwiczenia dla Czytelnika (np. jak z generatora pseudolosowego *zrobić* szyfrowanie symetryczne, a następnie: jak z szyfrowania *zrobić* funkcję jednokierunkową). Inne – były wyzwaniem dla badaczy tej dziedziny. Szczególnie ciekawa jest implikacja $\text{funkcja jednokierunkowa} \implies \text{generator pseudolosowy}$, czyli tak zwane twierdzenie HILL (od nazwisk Hastad, Impagliazzo, Levin, Luby).

Jak nietrudno zauważyć, powyższa lista równoważnych hipotez obejmuje niemal całą kryptologię. Niemal, bo nie zawiera kryptografii klucza publicznego. Jest to o tyle dziwne, że zawiera podpis cyfrowy, który *na oko* jest problemem podobnej klasy. A jednak! Nikt nie udowodnił jeszcze, że za pomocą funkcji jednokierunkowej potrafimy *zrobić* szyfrowanie asymetryczne. Gdyby było inaczej, okazałoby się, że definicja Impagliazzo Minicryptu jest wewnętrznie sprzeczna, a kryptolodzy powinni (co i tak zwykle robią) celować w Cryptomanię...

Ustalenie, który z opisanych wyżej Wszechświatów jest tym naszym, jest, być może, największym wyzwaniem informatyki w XXI wieku. Kto wie, w jakim Wszechświecie obudzimy się za kilka, kilkanaście lat...

Wbrew obiegowej opinii nie umiemy wykazać, że bezpieczeństwo kryptosystemu klucza publicznego RSA daje się zredukować do problemu trudności rozkładu na czynniki pierwsze. Zresztą trudność rozkładu jest również tylko hipotetyczna. Oba te poglądy stanowią jedno z prawd wiary kryptologów.

Czy możemy zobaczyć początek Wszechświata?

Paweł BIELEWICZ*

*Centrum Astronomiczne
im. M. Kopernika PAN

Skończona prędkość światła oznacza, że im dalsze obiekty astrofizyczne obserwujemy, tym są one młodsze. Obecnie przyjęty i potwierdzony przez liczne obserwacje model kosmologiczny, tzw. model Wielkiego Wybuchu postuluje skończony wiek Wszechświata wynoszący około 13,8 mld lat. Można zadać zatem pytanie, czy możemy zaobserwować promieniowanie wyemitowane na początku Wszechświata i zobaczyć sam początek?

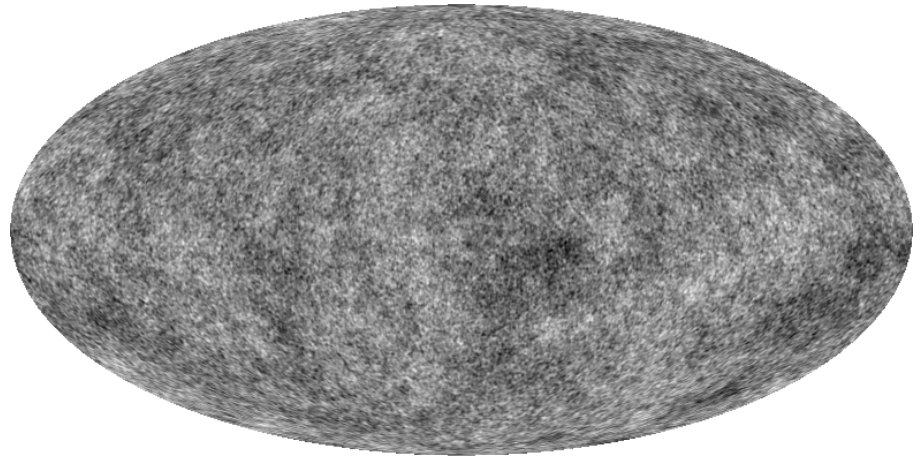
Zaraz po Wielkim Wybuchu materia była w niezwykle gęstym i gorącym stanie, tworząc rodzaj plazmy składającej się z cząstek elementarnych. Stan taki próbuje się obecnie odtworzyć w akceleratorach cząstek, takich jak Large Hadron Collider. Ze względu na dużą gęstość i intensywne oddziaływanie promieniowania z pozostałymi cząstkami elementarnymi Wszechświat w początkowym okresie nie był jednak przezroczysty dla fotonów. Dopiero wskutek rozszerzania się Wszechświata temperatura i gęstość materii spadły na tyle, że powstały neutralne atomy, głównie wodoru i helu, a promieniowanie elektromagnetyczne odłączyło się od materii. Moment ten, zwany rekombinacją, nastąpił około 380 tys. lat po Wielkim Wybuchu. Od tego czasu promieniowanie swobodnie podróżuje we Wszechświecie, nie oddziałując z materią. Ponieważ w momencie rekombinacji promieniowanie było w stanie równowagi termodynamicznej z materią, ma ono widmo ciała doskonale czarnego. Promieniowanie to nazywamy promieniowaniem reliktowym lub promieniowaniem tła, jako że wypełnia ono jak tło cały Wszechświat. W 1964 roku zostało przypadkowo odkryte w zakresie mikrofal przez Arno Penziasa i Roberta Wilsona. Na początku lat dziewięćdziesiątych satelita COBE potwierdził zgodność widma promieniowania z widmem ciała doskonale czarnego o temperaturze około 2,7 Kelvina. Najnowsza mapa rozkładu tego promieniowania na niebie (rys. 1) została wykonana dzięki obserwacjom satelity Planck. Przedstawia ona niewielkie, rzędu 10^{-5} , zaburzenia temperatury promieniowania wokół średniej temperatury. Możemy na niej zobaczyć moment rekombinacji sprzed 13,4 mld lat i zaburzenia rozkładu materii, wówczas odłączającej się od promieniowania, z których to zaburzeń później powstały galaktyki oraz gromady galaktyk.

Stan wzbudzony cząstek cyjanu, znajdujących się w przestrzeni międzygwiazdowej, wywołany oddziaływaniem z promieniowaniem reliktowym, został zaobserwowany już w roku 1941 przez Waltera Adamsa, jednak obserwacje te nie zostały poprawnie zinterpretowane.

Aby zobaczyć jeszcze wcześniejszy obraz Wszechświata, możemy wykorzystać cząstki elementarne, które odłączyły się od materii wcześniej niż fotony. Takimi cząstkami są neutrino. Przestały one oddziaływać z materią już około 1 sekundy po Wielkim Wybuchu. Podobnie jak promieniowanie reliktowe tworzą one tło wypełniające Wszechświat. Jednak ze względu na ich słabe oddziaływanie ze zwykłą materią nie zostały jeszcze bezpośrednio zaobserwowane przez obecnie funkcjonujące detektory neutrin. Niemniej jednak mamy pośrednie dowody na istnienie tła neutrinowego. Obecność relatywistycznych neutrin we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata zmienia historię jego ekspansji, jak również tłumy anizotropię promieniowania relikтового. Jak wskazują dane z satelity Planck, oba z tych efektów są widoczne w kątowym widmie mocy anizotropii promieniowania tła i są zgodne z przewidywaniami modelu standardowego zakładającego istnienie trzech rodzin neutrin.

Detekcja reliktowych neutrin jest celem prowadzonego obecnie eksperymentu PTOLEMY.

Odkryte ostatnio w eksperymencie Advanced LIGO fale grawitacyjne, wytworzone przez układ podwójny czarnych dziur, dają jeszcze jedną możliwość poznania, jak wyglądał początek Wszechświata i pozwalają sięgnąć jeszcze dalej w przeszłość. Jak przyjmuje się we współczesnej wersji teorii Wielkiego Wybuchu, na samym początku Wszechświat przeszedł etap gwałtownej ekspansji, tzw. inflacji, podczas którego zostały wygenerowane pierwotne fale grawitacyjne. Podobnie jak reliktowe neutrino i promieniowanie elektromagnetyczne wypełniają one dzisiaj Wszechświat. Niestety, amplituda pierwotnych fal o częstotliwościach mierzonych w eksperymencie Advanced LIGO jest dużo



Rys. 1. Mapa anizotropii temperatury promieniowania relikowego otrzymana z danych z satelity Planck.

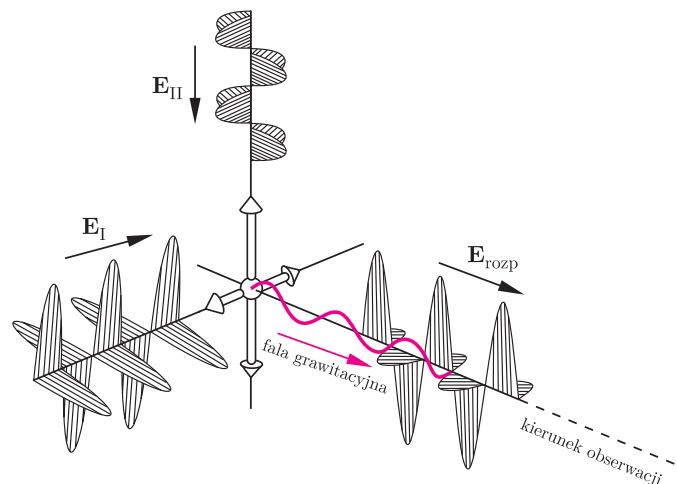
Rozpraszanie Thomsona powstaje w wyniku emisji promieniowania przez naładowaną cząstkę poruszaną przez padającą falę elektromagnetyczną, przy czym częstotliwość wyemitowanego promieniowania jest taka sama jak częstotliwość promieniowania padającego.

mniejsza niż czułość tego instrumentu. Dużo większą amplitudę mają fale o rozmiarach porównywalnych do rozmiarów obserwowalnego Wszechświata, jednakże aby je wykryć, potrzebowalibyśmy takich też rozmiarów detektora. Pierwotne fale grawitacyjne mają jednak wpływ na polaryzację promieniowania tła, tak więc promieniowanie to może pełnić rolę swoistego detektora. Promieniowanie tła zostaje częściowo spolaryzowane w wyniku rozpraszania Thomsona na swobodnych cząstkach naładowanych, przede wszystkim elektronach. Jednak, aby rozproszone fotony były spolaryzowane, padające na elektron promieniowanie musi mieć taki rozkład, aby kierunki odpowiadające maksymalnemu i minimalnemu natężeniu promieniowania były ustawione względem siebie pod kątem prostym (rys. 2). Przechodzące przez zjonizowany ośrodek fale grawitacyjne pozwalają wygenerować taki rozkład.

Kierunki polaryzacji promieniowania zrzucone na sferę niebieską obserwatora będą tworzyć pole bezźródłowe. Przez analogię z polem magnetycznym w elektromagnetyzmie ten rodzaj polaryzacji nazywany jest modami B, w przeciwieństwie do modów E generowanych przede wszystkim przez zwykłe zaburzenia skalarne. Detekcja modów B polaryzacji promieniowania relikowego byłaby pośrednim dowodem istnienia pierwotnych fal grawitacyjnych i potwierdzeniem epoki inflacji kosmologicznej we wczesnym Wszechświecie. Dzięki temu moglibyśmy się dowiedzieć, jak wyglądał Wszechświat zaledwie około 10^{-36} sekundy po początkowej osobliwości.

Detekcja modów B polaryzacji promieniowania tła jest jednym z najważniejszych celów prowadzonych obecnie i planowanych eksperymentów dotyczących promieniowania relikowego. W 2014 roku o takiej detekcji doniósł zespół eksperymentu BICEP2. Jednak dzięki danym z satelity Planck szybko się okazało, że zaobserwowane mody B są związane z polaryzacją promieniowania emitowanego przez naszą Galaktykę. Tak więc poszukiwanie śladów pierwotnych fal grawitacyjnych wciąż trwa. Brak detekcji pozwala jednak już dziś oszacować górną granicę energii, przy której mogła nastąpić inflacja. Granica ta wynosi około 10^{16} GeV, a więc jest kilka rzędów wielkości niższa niż energia Plancka, przy której grawitacja odłączyła się od pozostałych oddziaływań.

Odpowiedź na pytanie o jeszcze wcześniejsze momenty Wszechświata zależy od tego, co działo się przed epoką



Rys. 2. Polaryzacja promieniowania relikowego przez falę grawitacyjną.

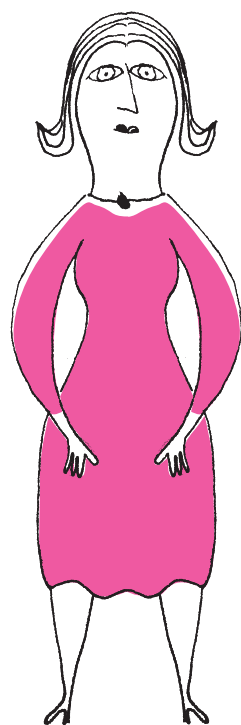
inflacji. Można przypuszczać, że przy wspomnianej już energii Plancka zaszły jakieś procesy fizyczne, których ślady mogą być utrwalone we własnościach promieniowania relikowego, tła neutrinowego lub pierwotnych fal grawitacyjnych. Jednak, żeby lepiej to zrozumieć, potrzebujemy teorii kwantowej grawitacji opisującej oddziaływania przy energii Plancka. Warto wspomnieć, że według niektórych teorii aspirujących do miana teorii kwantowej grawitacji w epoce o tak dużej gęstości energii traci sens znane nam pojęcie czasu, a najmniejsza jednostka czasu, mająca sens fizyczny, to około 10^{-44} sekundy.

Symetrie ciał i grupy: teoria Galois

Maria DONTEN-BURY*

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Tym, którym zarys nie wystarczy, polecamy *Elementy teorii Galois* Macieja Bryńskiego.



CIAŁO
SYMERYCZNE

Mówimy, że zbiór X jest zamknięty ze względu na pewne działanie, jeśli wynik tego działania wykonanego na elementach X jest elementem X . Na przykład zbiór \mathbb{Q} , jak i każde inne ciało, jest zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez niezerowe elementy. Natomiast zbiór liczb całkowitych nie jest zamknięty ze względu na dzielenie, więc nie jest ciałem.

Poniższa opowieść była na tyle ważna dla młodego, zaledwie dwudziestoletniego, matematyka Évariste'a Galois, że poświęcił ostatni dzień przed pojedynkiem, aby spisać ją w liście do przyjaciela. Niestety, nie dostał od losu szansy na kontynuowanie swoich prac, ale jakiś czas po jego śmierci matematycy zrozumieli znaczenie jego pomysłów. Ślady teorii, z której zarysem Czytelnik zapoznać się może w dalszej części artykułu, odnaleźć można w wielu gałęziach współczesnej matematyki. Jej bezpośrednim następstwem jest wiele efektywnych rozwiązań problemów, których ludzkość szukała przez setki lat: nierozwiązalność (przez pierwiastniki) równań wielomianowych stopnia 5 lub wyższego, niekonstruowalność pewnych wielokątów foremnych (cyrklem i linijką), a także niewykonalność klasycznych konstrukcji geometrycznych, czyli podwojenia sześcianu, trysekcji kąta i kwadratury koła.

Pierwiastki wielomianów. Zbiór liczb wymiernych \mathbb{Q} jest przydatny i przyjazny użytkownikowi, ale jednak mocno wybrakowany. Zwykle dostrzegamy jego braki, patrząc na dopuszczalne rozwinięcia dziesiętne: liczby wymierne mogą mieć tylko skończone lub okresowe od pewnego miejsca rozwinięcia. Tym razem spójrzmy na ten problem z punktu widzenia wielomianów. Znajdźmy, na przykład, pierwiastki wielomianu $x^2 - 2$. Dostajemy dwie możliwości: $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$. Żadna z nich nie jest liczbą wymierną – przeczyłoby to podstawowym własnościom podzielności. Stąd wniosek, że zbiór \mathbb{Q} jest za mały, żebyśmy mogli znaleźć wewnątrz niego rozwiązania dla wszystkich równań wielomianowych mających wymierne współczynniki, czyli w pewnym sensie pochodzących od tego zbioru.

Ta własność potrafi dawać jeszcze ciekawszy efekt: jeśli chcemy znaleźć pierwiastki wielomianu $x^2 + 1$, to musimy wyjść poza zbiór liczb rzeczywistych. Rozwiązaniami są jednostka urojona i oraz liczba do niej przeciwna $-i$, tak zwane *pierwiastki kwadratowe z minus jedynek*. Widzimy zatem, że pewne liczby niewymierne, a nawet nierzeczywiste, pojawiają się naturalnie w okolicach zbioru liczb wymiernych za sprawą wielomianów.

Rozszerzenia ciał. W tej sytuacji wygodnie byłoby rozważać zbiór liczb wymiernych z dodanymi $\pm\sqrt{2}$ lub $\pm i$, lub innym zestawem pierwiastków pewnego wielomianu. Tylko trzeba odpowiednio się za to zabrać – zadbać o zachowanie pewnych podstawowych własności algebraicznych. O zbiorze \mathbb{Q} mówimy, że jest *ciałem*, co oznacza, że jego elementy możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić (z wyjątkiem zera, przez które nie chcemy dzielić), i w wyniku tych działań zawsze otrzymujemy elementy tego samego zbioru, liczby wymierne. Jeśli teraz chcemy rozszerzyć ciało \mathbb{Q} o pewien element, to wymagamy, żeby efektem takiej operacji też było ciało. To oznacza, że będziemy rozważać zbiór otrzymany ze wszystkich możliwych wyników kombinacji czterech podstawowych działań na liczbach wymiernych i dodanym elemencie (lub elementach). Na przykład, jeśli rozszerzamy \mathbb{Q} o $\sqrt{2}$ (lub o $-\sqrt{2}$), to otrzymujemy ciało oznaczane $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, które składa się ze wszystkich liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$. Czytelnik Wnikliwy sprawdzi, że suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb tej postaci również jest tej postaci.

Ogólnie, rozszerzenie \mathbb{Q} o liczby a_1, \dots, a_k oznaczamy $\mathbb{Q}(a_1, \dots, a_k)$ i definiujemy jako najmniejszy zbiór zamknięty na operacje dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia zawierający cały zbiór \mathbb{Q} oraz a_1, \dots, a_k . Jeśli a_1, \dots, a_k są pierwiastkami pewnych wielomianów o współczynnikach wymiernych, to będziemy je nazywać *elementami algebraicznymi nad \mathbb{Q}* , a rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_k)$ – *rozszerzeniem algebraicznym*.

Stopień rozszerzenia. Przyjrzyjmy się dokładniej rozszerzeniom \mathbb{Q} o jeden element algebraiczny nad \mathbb{Q} , czyli ciałom postaci $\mathbb{Q}(a)$. To ograniczenie okazuje się w pełni uprawnione, ponieważ, jak mówi twierdzenie Abela, dowolne rozszerzenie algebraiczne można przedstawić jako rozszerzenie o jeden element. Znalezienie go może nie być łatwe, ale istnieją też proste przypadki.

Na przykład ciało $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ jest tym samym co $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Oczywiście $k_2 \subset k_1$, ponieważ \mathbb{Q} i element $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, który generuje rozszerzenie, należą do k_1 . A jak sprawdzić, że $k_1 \subset k_2$? Wystarczy przedstawić $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ jako elementy k_2 . Zauważmy, że $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in k_2$. Ponieważ mamy do dyspozycji wszystkie liczby wymierne i podstawowe działania, więc możemy otrzymać $\sqrt{6}$, nie wychodząc poza k_2 . Spójrzmy na wynik mnożenia $\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$. Odejmując od niego dwu- lub trzykrotność $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ i dzieląc przez liczbę całkowitą, dowiadujemy się, że $\sqrt{2} \in k_2$ i $\sqrt{3} \in k_2$, a zatem $k_1 \subset k_2$.

Dlaczego wolimy pracować z rozszerzeniami o jeden element? W tej sytuacji łatwiej jest opisać postać wszystkich elementów rozszerzenia algebraicznego i określić pewne jego parametry. Z definicji element a , o który rozszerzamy \mathbb{Q} , jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach w \mathbb{Q} . Ale takich wielomianów może być wiele... Na przykład, i jest pierwiastkiem $x^4 - 1$ (czyli jest pierwiastkiem 4 stopnia z 1), ale ten wielomian możemy zapisać jako iloczyn $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$, gdzie i jest pierwiastkiem drugiego czynnika. Który więc wybrać? Wystarczy powiedzieć, że bierzemy wielomian (o współczynnikach wymiernych) najniższego możliwego stopnia, którego a jest pierwiastkiem; nazwiemy go *wielomianem minimalnym* dla a . To określa go jednoznacznie z dokładnością do mnożenia przez stałą, więc wybieramy zawsze ten, który ma współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x równy 1.

Gdyby istniały dwa różne wielomiany minimalne dla elementu a , to biorąc ich różnicę, otrzymalibyśmy wielomian (niezerowy!) niższego stopnia, którego pierwiastkiem byłoby a . Czyli wcale nie zaczynalibyśmy od wielomianów minimalnych!

Można powiedzieć, że stopień rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a)$ to wymiar $\mathbb{Q}(a)$ jako przestrzeni liniowej nad \mathbb{Q} .

Stopniem rozszerzenia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a)$ będziemy nazywać po prostu stopień wielomianu minimalnego dla a . Ta liczba określa również liczbę różnych potęg a , których musimy użyć, żeby opisać wszystkie elementy ciała $\mathbb{Q}(a)$ bez dodatkowych mnożeń przez liczby inne niż wymierne. Dokładniej, jeśli $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a)$ jest rozszerzeniem stopnia n , to wszystkie elementy $\mathbb{Q}(a)$ są postaci $p_0 + p_1 a + p_2 a^2 + \dots + p_{n-1} a^{n-1}$, gdzie p_0, \dots, p_{n-1} są liczbami wymiernymi. Argument opiera się na spostrzeżeniu, że a^n umiemy tak przedstawić – w końcu a jest pierwiastkiem wielomianu $x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$ o współczynnikach z \mathbb{Q} .

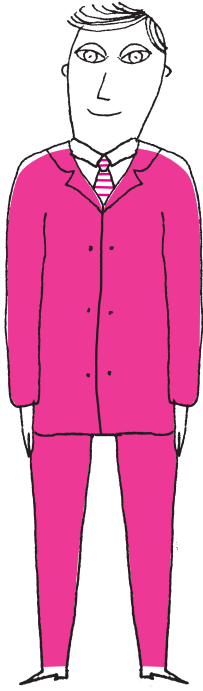
Wobec tego rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jest stopnia 2, a wielomianem minimalnym dla $\sqrt{2}$ jest $x^2 - 2$. Podobnie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$ jest rozszerzeniem stopnia 2. A czy rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_3)$ o pierwiastek trzeciego stopnia z 1 (czyli pierwiastek wielomianu $x^3 - 1$) jest stopnia 3? Otóż nie – to również jest rozszerzenie stopnia 2. Wielomian $x^3 - 1$ można rozłożyć na czynniki $(x^2 + x + 1)(x - 1)$, a pierwiastkami pierwszego czynnika są ζ_3 i ζ_3^2 . Zatem $x^2 + x + 1$ jest wielomianem minimalnym dla ζ_3 i dla ζ_3^2 .

Jeszcze ciekawszy przykład. Czy podobnie jest z pierwiastkiem trzeciego stopnia z 2? Nie, tym razem dostajemy rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ stopnia 3, a wielomian minimalny dla $\sqrt[3]{2}$ to $x^3 - 2$, którego pozostałymi pierwiastkami są $\zeta_3 \sqrt[3]{2}$ i $\zeta_3^2 \sqrt[3]{2}$. Zauważmy jednak, że $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nie zawiera tych dwóch pozostałych pierwiastków – to ciało jest zawarte w ciele liczb rzeczywistych, do którego $\zeta_3 \sqrt[3]{2}$ i $\zeta_3^2 \sqrt[3]{2}$ nie należą. Żeby otrzymać najmniejsze ciało zawierające wszystkie pierwiastki $x^3 - 2$, tak zwane *ciało rozkładu* tego wielomianu, trzeba rozszerzyć $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ o pozostałe pierwiastki (wystarczy wziąć jeden z nich). Tak samo, jak wcześniej rozszerzaliśmy \mathbb{Q} o pewne elementy algebraiczne, możemy rozszerzać dowolne inne ciało!

Czytelnik Wnikliwy sprawdzi, że jeśli element a jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$ o współczynnikach w \mathbb{Q} , to $w(x)$ jest podzielny przez wielomian minimalny dla a . Stąd można wywnioskować, że $x^3 - 2$ jest wielomianem minimalnym dla $\sqrt[3]{2}$.

Możemy też obliczyć stopień takiego rozszerzenia $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})(\zeta_3 \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2})$. W tym celu trzeba znaleźć wielomian minimalny dla $\zeta_3 \sqrt[3]{2}$ o współczynnikach w $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Oczywiście kandydatem jest $x^3 - 2$; ma współczynniki z dobrego ciała, jednak okazuje się za duży. Ale jeśli podzielimy go przez $x - \sqrt[3]{2}$, to dostaniemy szukany wielomian minimalny: $x^2 + \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2$. To oznacza, że badane rozszerzenie jest stopnia 2. Możemy też popatrzeć na oba rozszerzenia razem, czyli na wieżę rozszerzeń $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2})$, i, zapominając o środkowym ciele, rozważyć rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2})$. Ponieważ stopnie rozszerzeń w wieżach się mnożą, to rozszerzenie jest stopnia 6.

Symetrie, czyli automorfizmy. Jak zauważyliśmy wcześniej, rozszerzenie \mathbb{Q} o i oraz o $-i$ są tym samym. Co więcej, położenia tych elementów w ciele $\mathbb{Q}(i)$



Wielomian może mieć co najwyżej tyle pierwiastków, liczonych z krotnościami, ile jest równy jego stopień. A tak naprawdę zawsze ma dokładnie tyle, jeśli tylko szukamy pierwiastków w *cielu algebraicznie domkniętym* (czyli takim, którego nie da się rozszerzyć o żaden element algebraiczny) zawierającym jego współczynniki – tak mówi *zasadnicze twierdzenie algebry*. Znanym zapewne Czytelnikowi przykładem ciała algebraicznie domkniętego są liczby zespolone.

Sprzężenie w grupie zadane przez element $g \in G$ to automorfizm, który elementowi h przyporządkowuje wynik mnożenia ghg^{-1} . Wobec tego $H \subset G$ jest podgrupą normalną, jeśli dla dowolnych $h \in H$ i $g \in G$ zachodzi $ghg^{-1} \in H$.

są w pewnym sensie symetryczne. Dokładniej, umiemy tak przekształcić ciało $\mathbb{Q}(i)$ na nie samo, żeby zamienić i z $-i$. Oczywiście, to nie może być byle jakie przekształcenie – wymagamy, żeby było bijekcją i respektowało strukturę ciała, czyli podstawowe operacje. Przekształcenie σ musi zachowywać sumę: $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Q}(i)$, i analogicznie dla odejmowania, mnożenia i dzielenia (a stąd $\sigma(1) = 1$ i $\sigma(0) = 0$). Takie przekształcenie ciała nazywamy jego *automorfizmem*. W przypadku $\mathbb{Q}(i)$ okazuje się, że żądane własności ma sprzężenie liczb zespolonych: $\sigma(a + bi) = a - bi$. Zauważmy, że ten automorfizm trzyma w miejscu liczby wymierne: dla każdego $q \in \mathbb{Q}$ mamy $\sigma(q) = q$.

I tu pojawia się kolejna struktura algebraiczna: *grupa*. Spójrzmy na zbiór wszystkich automorfizmów wybranego ciała – możemy je składać i odwracać! Nietrudno sprawdzić, że przy obu tych operacjach będziemy dostawać przekształcenia zachowujące podstawowe działania. Mamy też automorfizm trywialny, przeprowadzający każdy element na niego samego; składanie z nim nic nie zmienia. To wszystko znaczy właśnie, że automorfizmy ciała tworzą grupę: zbiór z odwracalnym działaniem (nazywanym zwyczajowo mnożeniem).

Grupa automorfizmów ciała będącego rozszerzeniem algebraicznym \mathbb{Q} nie może być zbyt duża – liczba jej elementów nie przekracza stopnia rozszerzenia. Łatwo to wykazać, jeśli umiemy opisać rozszerzenie za pomocą jednego dodawanego elementu a . Co wtedy dzieje się z wielomianem minimalnym dla a przy automorfizmie σ ? Nic! Jego współczynniki pochodzą z ciała zachowywanego przez σ , więc wielomian pozostaje bez zmian. A ponieważ a jest jego pierwiastkiem, więc $\sigma(a)$ też musi być jego pierwiastkiem. Teraz wystarczy zauważyć, że wybór wartości $\sigma(a)$ określa σ jednoznacznie, mamy więc co najwyżej tyle różnych automorfizmów, ile (różnych) pierwiastków wielomianu minimalnego.

I wreszcie twierdzenia. Galois interesował się specjalnym rodzajem automorfizmów ciał. Dla ustalonego rozszerzenia $k_1 \subset k_2$ szukał takich automorfizmów ciała k_2 , które trzymają w miejscu wszystkie elementy k_1 . Tak wybrane automorfizmy też tworzą grupę, nazywaną *grupą Galois rozszerzenia* i oznaczaną $G(k_2/k_1)$, zwykle trochę mniejszą niż grupa wszystkich automorfizmów k_2 . Badał też przejście w drugą stronę, od grupy do rozszerzenia ciał. Dla dowolnej podgrupy $H \subset G(k_2/k_1)$, czyli mniejszej grupy zawartej w większej, można wyznaczyć zbiór wspólnych punktów stałych wszystkich automorfizmów H . Okazuje się, że to też będzie ciało k_H , leżące gdzieś pomiędzy k_1 i k_2 , a więc tworzące z nimi wieżę rozszerzeń $k_1 \subset k_H \subset k_2$.

Powiemy, że rozszerzenie $k_1 \subset k_2$ jest *rozszerzeniem Galois*, jeśli wykonanie kolejno obu tych operacji powoduje powrót do punktu wyjścia, czyli jeśli elementy ciała k_2 trzymane w miejscu przez każdy automorfizm z grupy $G(k_2/k_1)$ to dokładnie elementy ciała k_1 . Główny wynik Galois to obserwacja, że rozszerzenia Galois zachowują się bardzo porządnie względem opisanych dwóch operacji. Na tyle porządnie, że, w pewnym zakresie, zamiast badać duże zbiory o złożonej strukturze – ciała i ich rozszerzenia – możemy odczytywać informacje ze struktury ich grup symetrii, zwykle znacznie prostszej. A dokładnie, opisane operacje brania grupy Galois rozszerzenia i brania ciała punktów stałych grupy automorfizmów zadają wzajemnie jednoznaczność między ciałami k_H leżącymi w środku rozszerzenia Galois ($k_1 \subset k_H \subset k_2$) a podgrupami grupy Galois $H \subset G(k_2/k_1)$. Co więcej, ta odpowiedniość pozwala sprawdzić, kiedy rozszerzenie $k_1 \subset k_H$ jest rozszerzeniem Galois (natomiast $k_H \subset k_2$ zawsze jest Galois). Dzieje się tak wtedy, gdy podgrupa $H \subset G(k_2/k_1)$ ma dobre własności: jest tak zwaną *podgrupą normalną*, czyli niezmienniczą ze względu na pewną klasę automorfizmów $G(k_2/k_1)$, nazywanych sprzężeniami. Co ciekawe, pojęcie podgrupy normalnej pojawia się w bardzo wielu zagadnieniach algebraicznych, ale pierwszy raz zostało wyszczególnione właśnie przez Galois przy okazji powyższego twierdzenia.

Jak to wygląda w praktyce? Wróćmy do przykładu $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2})$, czyli ciała rozkładu $x^3 - 2$. W naszej sytuacji, czyli przy założeniu, że

Jeśli rozważane ciała nie są rozszerzeniami \mathbb{Q} , to twierdzenia Galois pozostają prawdziwe, a do niektórych omawianych po drodze wyników potrzebne jest założenie *rozdzielczości* rozszerzenia, co oznacza, że żaden wielomian rozkładalny w większym ciele nie może mieć w nim wielokrotnych pierwiastków.

wszystkie rozważane ciała zawierają \mathbb{Q} , bycie ciałem rozkładu wystarcza do bycia rozszerzeniem Galois. Grupa Galois tego rozszerzenia ma 6 elementów, ponieważ dla rozszerzenia Galois liczba jej elementów musi być równa stopniowi rozszerzenia. Wiemy ponadto, że automorfizm z grupy Galois może przeprowadzać pierwiastki wielomianu o współczynnikach z \mathbb{Q} tylko na inne pierwiastki tego wielomianu, czyli je permutuje. Wielomian $x^3 - 2$ ma trzy różne pierwiastki, które można spermutować na 6 sposobów. Ponadto każda permutacja wyznacza już jednoznacznie automorfizm $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2})$, ponieważ mówi, jakie mają być obrazy generatorów tego rozszerzenia. Wobec tego grupa Galois $G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ to grupa wszystkich permutacji trójelementowego zbioru!

Ponadto można sprawdzić, na przykład badając własności permutacji, że jedyną (nietrywialną) normalną podgrupą jest grupa cyklicznych permutacji trzech elementów. A wewnątrz $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2})$ możemy znaleźć ciało $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, ponieważ

$$i\sqrt{3} = (\zeta_3 \sqrt[3]{2} - \zeta_3^2 \sqrt[3]{2}) / \sqrt[3]{2}.$$

Okazuje się, że to dokładnie ciało punktów stałych podgrupy trójelementowych cykli, więc rozszerzenie $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ jest Galois – co zgadza się z faktem, że stanowi ono ciało rozkładu $x^2 + 3$.

Jak to powiązać z klasyczną geometrią? W przypadku konstrukcji geometrycznych kluczowym spostrzeżeniem jest to, że jeśli z pewnego zbioru punktów umiemy za pomocą cyrkla i linijki otrzymać nowy punkt, to jego współrzędne należą do rozszerzenia algebraicznego stopnia 2^n ciała zawierającego współrzędne danych punktów. Działanie cyrkla i linijki można opisać algebraicznie przez układy równań stopnia co najwyżej 2, więc każdy krok konstrukcji to rozszerzenie ciała o pierwiastek równania kwadratowego (lub brak rozszerzenia, jeśli nowe współrzędne już należą do ciała generowanego przez wcześniejsze). Wobec tego, jeśli mamy dany sześciąt o boku długości 1, to konstrukcja sześciąt o dwukrotnie większej objętości wymagałaby umiejętności otrzymania odcinka o długości $\sqrt[3]{2}$. Ta liczba, jak wiemy, jest stopnia 3 nad \mathbb{Q} , co nie pozwala jej znaleźć się w żadnym rozszerzeniu \mathbb{Q} stopnia 2^n .

Jak widać, konsekwencje teorii Galois stanowią nawet bardziej wdzięczny temat opowieści niż jej podstawy, więc o tym w *Delcie* już było, nawet nie raz! Zainteresowanych rozwiązaniami pozostałych klasycznych problemów odsyłamy więc do artykułów Macieja Bryńskiego *O tym, co się da, a czego się nie da rozwiązać* (*Delta* 9/2013) i *Równania algebraiczne* (*Delta* 9/2016).

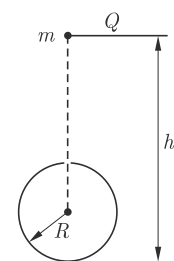


Zadania

Przygotował Michał NAWROCKI

F 937. Cylindryczne naczynie jest zamknięte tłokiem o masie M i polu powierzchni S . Na górnej powierzchni tłoka, bez straty energii, podskakuje N kulek, każda o masie $m \ll M$. Wysokość, na jaką podskakuje każda kulka, wynosi h , ciśnienie atmosferyczne jest równe p_0 . Ile wynosi ciśnienie gazu pod tłokiem?
Rozwiązanie na str. 15

F 938. Do sferycznego, metalowego naczynia o promieniu R , mającego na górze niewielki otwór, wpadają z wysokości $h > 2R$ naładowane krople rtęci. Masa każdej kropli wynosi m , a jej ładunek elektryczny wynosi Q . Jaki będzie kolejny numer n ostatniej kropli, która jeszcze wpadnie do naczynia?
Rozwiązanie na str. 15



Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1543. Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite n , dla których każda z liczb $9n + 16$ oraz $16n + 9$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 3

M 1544. Liczby rzeczywiste a, b, c są takie, że $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Sprawdzić, że wartość wyrażenia

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

nie zależy od wartości a, b, c .

Rozwiązanie na str. 3

M 1545. Niech \mathcal{S} będzie takim podzbiorem zbioru \mathbb{N} dodatnich liczb całkowitych, że dla każdej pary $x, y \in \mathcal{S}$ również $x + y \in \mathcal{S}$. Przypuśćmy, że zbiór $\mathbb{N} \setminus \mathcal{S}$ jest skończony i $\mathbb{N} \setminus \mathcal{S} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Udowodnić, że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n^2.$$

Rozwiązanie na str. 3

Dlaczego nie da się zobaczyć atomów?

Ewa ŁACIŃSKA*

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

We Wszechświecie istnieje dużo różnych ograniczeń, występujących w różnych dziedzinach. Mimo że, być może, nie jest to dla nas oczywiste i niekoniecznie mamy okazję dostrzec to w życiu codziennym, światło widzialne ograniczone jest pod wieloma względami. Długość fali wynosi od 380 nm dla światła fioletowego do 780 nm dla czerwieni. Światło w próżni musi poruszać się ze stałą prędkością wynoszącą

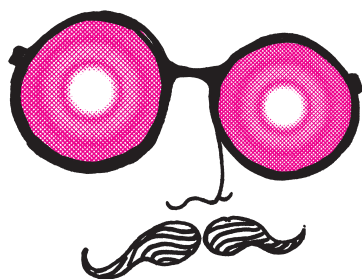
$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 300\,000 \text{ km/s.}$$

W związku z naturą światła i jego oddziaływaniem z materią mamy do czynienia również z innymi ograniczeniami. Skutkują one, między innymi, takimi zjawiskami jak aberracje czy też ograniczona rozdzielczość przyrządów optycznych.

Jednym z podstawowych ograniczeń związanych ze światłem jest fakt, że nie istnieje idealny przyrząd optyczny ogniskujący światło, np. idealna soczewka. Ogniskowanie światła jest potrzebne przykładowo do obrazowania optycznego i występuje w mikroskopach optycznych, aparatach fotograficznych, kamerach itp. Oczywiście, bardzo skomplikowanym narządem wykonującym obrazowanie jest również ludzkie oko. We wszystkich tych przykładach występują aberracje, które ograniczają ich możliwości poprawnego działania.

Przykładową aberracją, która wynika z natury światła, jest aberracja chromatyczna. Związana jest ona z cechą opisującą dany materiał, jaką jest jego współczynnik załamania n . Określa on, z jaką prędkością światło rozchodzi się w danym materiale w stosunku do jego prędkości w próżni, $v = c/n$. Przykładowo dla szkła n wynosi około 1,5, co oznacza, że światło porusza się w szkle półtora raza wolniej niż w próżni. Zgodnie z prawem Snella, współczynnik załamania określa również, jak bardzo ugnie się wiązka światła przy przechodzeniu z jednego ośrodka do drugiego. Kluczowym elementem pozwalającym zrozumieć, czym jest aberracja chromatyczna, jest fakt, że dla większości stosowanych materiałów (np. szkło) współczynnik załamania światła nie jest liczbą stałą dla wszystkich długości fali, lecz przyjmuje różne wartości dla różnych barw. Zjawisko to nosi nazwę dyspersji współczynnika załamania światła. Liczba n maleje wraz ze wzrostem długości fali, co oznacza, że dla światła widzialnego osiąga największą wartość dla koloru fioletowego, a najmniejszą dla czerwieni. W konsekwencji przy przechodzeniu z jednego ośrodka do drugiego światło fioletowe załamuje się pod największym kątem, a czerwone pod najmniejszym. Zjawisko to jest intencjonalnie wykorzystywane w pryzmatach, które rozszczepiają światło białe na wszystkie kolory tęczy.

WIDZĘ
DYSKI
DYSKI
WIDZĘ



Ale zastanówmy się nad konsekwencjami dyspersji współczynnika załamania światła przy pracy soczewki skupiającej światło. Wiązka światła przechodząca przez prosty układ optyczny, złożony z jednej soczewki, rozszczepi się zarówno na granicy powietrze/soczewka, jak i na granicy soczewka/powietrze, przy czym pamiętamy, że światło fioletowe i niebieskie ugnie się najbardziej, a czerwone najmniej. W konsekwencji ognisko nie będzie idealnie punktowe, jakbyśmy zakładali i bardzo chcieli, ale dla światła niebieskiego znajdzie się ono bliżej soczewki, dla czerwonego dalej, a reszta barw zogniskuje się gdzieś pośrodku. Skutkuje to tym, że na ekranie obserwujemy kolorową obwódkę wokół ogniska.

Aberrację chromatyczną można ograniczać, stosując np. dublet achromatyczny, czyli dwie połączone soczewki, jedną skupiającą i jedną rozpraszającą, o różnej dyspersji współczynnika załamania. Są one tak dobrane, aby ogniska dla światła niebieskiego i czerwonego wypadły w tym samym miejscu. Dla innych barw efekt ten nie jest aż tak widoczny, tak więc dla wielu zastosowań (np. lornetki, lunety) użycie dubletu achromatycznego wystarcza, aby skorygować aberrację chromatyczną. Należy jednak pamiętać, że nie da się jej zupełnie wyeliminować, można jedynie ją korygować do pewnego stopnia.



Rozwiązanie zadania F 937.

Każda kulka spadająca z wysokości h przy sprężystym zderzeniu z tłokiem przekazuje mu pęd $2mv = 2m\sqrt{2gh}$. Następuje to raz w ciągu czasu t pomiędzy dwoma kolejnymi zderzeniami, który jest równy sumie czasu wznoszenia i spadania kulki: $t = 2\sqrt{2h/g}$, gdzie g to przyspieszenie ziemskie. Stąd znajdujemy średnią wartość siły oddziaływania jednej kulki na tłok w ciągu czasu t , równą

$$F_1 = \frac{\Delta p}{t} = \frac{2mv}{t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{2h/g}} = mg.$$

Dla średniej siły oddziaływania N kulek na tłok znajdujemy

$$F_{\text{sr}} = NF_1 = Nmg.$$

(Zauważmy, że wielkość tej siły, równa całkowitemu ciężarowi kulek, nie zależy od wysokości, na jaką one podskakują, co wynika ze sprężystego charakteru zderzeń z tłokiem).

Ciśnienie gazu pod tłokiem znajdujemy jako sumę ciśnień:

$$p = p_0 + g(Nm + M)/S.$$



Rozwiązanie zadania F 938.

Każda kropla, wpadając do naczynia, powiększa jego ładunek o Q . Ładunek ten rozkłada się równomiernie na powierzchni sfery i wytwarza wokół niej pole elektryczne, które jest takie jak pole pochodzące od ładunku punktowego, równego ładunkowi sfery, umieszczonego w jej środku. Na spadającą kroplę działają więc dwie siły: przyspieszająca ruch kropli siła ciężkości i opóźniająca ten ruch siła elektrostatyczna. Przyjmijmy, że do naczynia wpadło n kropli, a więc jego ładunek wynosi nQ . Kropla $n' = n + 1$ już do naczynia nie wpadnie, jeżeli jej prędkość na wysokości otworu w naczyniu będzie równa zeru.

Prędkość tę znajdziemy, obliczając energię kinetyczną, jaką ma na wysokości $2R$ kropla spadająca z wysokości h . Będzie ona równa zmianie jej energii potencjalnej, na którą składa się energia pochodząca od pola grawitacyjnego i od pola elektrycznego przy spadku z wysokości h do wysokości $2R$:

$$\Delta E_p = mg(h - 2R) + \frac{nQ^2}{4\pi\epsilon_0(h - R)} - \frac{nQ^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Mamy więc

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h - 2R) - \frac{nQ^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{h - 2R}{R(h - R)},$$

a stąd

$$v^2 = 2g(h - 2R) - \frac{2nQ^2(h - 2R)}{4\pi\epsilon_0 m(h - R)R}.$$

Z warunku $v = 0$ dostajemy

$$n = 4\pi\epsilon_0 mgR(h - R)/Q^2,$$

a to oznacza, że ostatnia kropla, która wpadnie do naczynia, ma numer n , będący największą liczbą całkowitą spełniającą warunek:

$$n < 4\pi\epsilon_0 mgR(h - R)/Q^2.$$

Załóżmy jednak, że mamy do dyspozycji idealny przyrząd obrazujący, np. idealny mikroskop, pozbawiony aberracji chromatycznej. Czy oznacza to, że stosując dowolne powiększenie, możemy uzyskać obraz o dowolnej rozdzielczości, czyli zobaczyć obiekty dowolnie małe, np. cząsteczki chemiczne i atomy? Okazuje się, że nawet gdy zaniedbamy wszystkie wady przyrządów optycznych związane z obrazowaniem, pojawia się kolejne ograniczenie wynikające z samej natury światła. Mam tutaj na myśli zjawisko dyfrakcji i interferencji. Najprościej mówiąc, jeśli fala światła napotka na swojej drodze przeszkodę, to ulegnie ugięciu na niej, czyli zmieni się kierunek jej rozchodzenia – jest to zjawisko dyfrakcji. Natomiast gdy dwie fale spotykają się, to w zależności od faz, w których się znajdują, mogą się wzmocnić lub osłabić – jest to zjawisko interferencji. Tak więc, gdy przepuścimy wiązkę światła przez kołowy otwór, światło to ugnie się na granicy otworu, a ponadto, zgodnie z zasadą Huygensa, każdy punkt otworu będzie źródłem nowej fali kulistej. Fale pochodzące z różnych fragmentów otworu interferują i w konsekwencji, zamiast pojedynczego punktu na ekranie zaobserwujemy typowy obraz interferencyjno-dyfrakcyjny, okrągłą rozmytą plamkę wraz z kilkoma jasnymi pierścieniami.

Centralna jasna plamka zawiera około 85% energii światła i nazywa się plamką Airy'ego. Wokół niej występują kolejno pierścienie jasne i ciemne, oznaczające odpowiednio miejsca, w których fale się dodały konstruktywnie bądź destruktywnie. Zjawisko to ma ogromne znaczenie przy określaniu zdolności rozdzielczej przyrządów optycznych. Gdybyśmy chcieli mieć układ optyczny pozwalający na powiększenie naszego obrazu dowolną ilość razy, to teoretycznie, zgodnie z optyką geometryczną, jesteśmy w stanie to zrobić. Jednak w tej teorii soczewka ogniskuje światło w punkcie – w praktyce, jeśli weźmiemy pod uwagę efekty dyfrakcyjno-interferencyjne, obraz jest nieco większy. Tak więc obraz dwóch bardzo małych, punktowych przedmiotów jest tak naprawdę ich obrazem dyfrakcyjno-interferencyjnym. Zamiast dwóch punktów na ekranie w głównej mierze będziemy obserwować dwie plamki Airy'ego. Jeżeli łączna suma promieni plamek Airy'ego będzie większa niż odległość pomiędzy dwoma przedmiotami, to obrazy obiektów będą się nakładać. W efekcie przy dowolnie blisko położonych punktach przekrycie się plamek staje się na tyle duże, że nie będziemy w stanie ich odróżnić.

Zjawisko to nosi nazwę ograniczenia dyfrakcyjnego. Tak więc, o ile zgodnie z optyką geometryczną możemy oglądać każdy mały obiekt, to w praktyce nie będziemy w stanie go wystarczająco wyostrzyć. Mówi się, że przyrząd optyczny jest ograniczony dyfrakcyjnie, jeśli poprawa jego parametrów (np. użytych materiałów, zastosowanej konstrukcji) nie jest w stanie poprawić już jego zdolności rozdzielczej ze względu na występujące efekty dyfrakcyjne. Takim bardzo dobrze wykonanym przyrządem jest np. ludzkie oko. Powstaje więc pytanie, jakie najmniejsze obiekty jesteśmy w stanie zobaczyć przy użyciu mikroskopu optycznego? Z pomocą przychodzi nam kryterium Rayleigha, które określa maksymalną zdolność rozdzielczą, czyli minimalną odległość pomiędzy rozróżnialnymi punktami. Mówi ono, że dwa obiekty są wciąż widocznie odseparowane, jeśli maksimum obrazu dyfrakcyjnego (jasny prążek) pierwszego przedmiotu pokrywa się z minimum drugiego (ciemny krążek). Matematycznie możemy je opisać wzorem:

$$d \simeq 0,61\lambda \text{ NA},$$

gdzie: d – minimalna odległość pomiędzy rozróżnianymi punktami, λ – długość fali światła, NA – apertura numeryczna mikroskopu ($\text{NA} = n \sin \alpha$, n to współczynnik załamania światła dla materii pomiędzy obiektywem i obserwowanym obiektem, α – połowa kąta, pod jakim promienie światła mogą wchodzić do obiektywu). Przykładowo: dla długości fali 500 nm (światło zielone) i aperturze numerycznej równej 1 dostajemy $d \simeq 0,3 \mu\text{m}$, czyli tyle, ile wynosi średnica dużych wirusów albo małych bakterii. Jest to za mało i to w dodatku o jakieś trzy rzędy wielkości, aby zobaczyć atomy. Istnieją jednak urządzenia obrazujące, nazywane również mikroskopami, ale wykorzystujące inne zjawiska fizyczne zamiast światła, pozwalające „zobaczyć” to, co naprawdę małe. Jest to jednak temat na oddzielny artykuł.

Czy grawiton da się wykryć?

Michał BEJGER

Testy teorii Einsteina to m.in. wyjaśnienie precesji orbity Merkurego, ugięcie promieni światła gwiazd w polu grawitacyjnym Słońca, oraz przesunięcie ku czerwieni długości fal fotonów w polu grawitacyjnym, a także ruch orbitalny układów podwójnych gwiazd neutronowych i niedawne detekcje fal grawitacyjnych (zmiennych w czasie zaburzeń geometrii czasoprzestrzeni rozchodzących się z prędkością światła i wywołanych przez przyspieszony ruch masywnych ciał, w tym przypadku układów podwójnych czarnych dziur).

W elektromagnetyzmie jest to bezmasowy bozon zwany fotonem, w oddziaływaniu słabym masywne bozony W^\pm i Z^0 , a w silnym osiem gluonów.

Ponad 300 lat temu Newton sformułował teorię grawitacyjnego przyciągania się ciał i tym samym wprowadził do fizyki pojęcie pola grawitacyjnego. Pole to wypełnia przestrzeń wokół masywnych ciał i przekazuje pomiędzy nimi informacje, dzięki czemu masy „wiedzą”, z jaką siłą mają się przyciągać. W ogólnej teorii względności pole grawitacyjne jest natomiast wyznaczone przez rozwiązania równań Einsteina, a prawdziwy powód siły grawitacyjnej jest związany z efektem deformacji czterowymiarowej czasoprzestrzeni: siła grawitacyjna nie istnieje, a efekt przyciągania się ciał jest złudzeniem wywołanym przez ich swobodny ruch w zakrzywionej czasoprzestrzeni. Teoria Einsteina została w ciągu ostatnich 100 lat przetestowana na wiele sposobów. Istnienie czarnych dziur, a także fal grawitacyjnych jest dowodem na poprawność teorii grawitacji Einsteina w zakresie silnych pól grawitacyjnych. Mamy więc dobrze przetestowaną teorię odtwarzającą zachowanie się makroskopowych obiektów – planet, gwiazd i czarnych dziur. Jest to jednak teoria klasyczna, która nie jest w stanie opisać grawitacji w najmniejszych skalach, to znaczy na poziomie kwantowym. Można zatem spytać, czy da się stwierdzić istnienie kwantów pola grawitacyjnego, wiadomo bowiem, że trzy inne oddziaływania fundamentalne są przekazywane przez dobrze zdefiniowane cząstki elementarne. Jeśli grawitacja jest również teorią kwantową, to wydaje się naturalne, że powinien istnieć kwant pola grawitacyjnego przenoszący oddziaływania grawitacyjne – grawiton. Jak dowieść istnienia (lub nieistnienia) grawitonu? Pytanie to można rozumieć na kilka sposobów. Jeśli stwierdzimy, że wykrycie grawitonu jest *niemożliwe*, możemy mieć na myśli, że istnieje udowodnione twierdzenie mówiące, że jego detekcja jest sprzeczna z prawami fizyki. Można także zbadać własności możliwych detektorów grawitonów i wykazać, że nie mogą one działać w oparciu o znane prawa fizyki.

Tu skupimy się na sprawdzeniu, czy da się – teraz lub w odległej przyszłości – zbudować detektor podobny do interferometru laserowego LIGO lub Virgo, który byłby w stanie rejestrować pojedyncze grawitony, oraz rozważymy alternatywne pomysły. W szczególności oszacujemy, ile grawitonów zawiera fala grawitacyjna, jak duże zaburzenie czasoprzestrzeni odpowiada pojedynczemu grawitonowi, i jak czuły powinien być detektor, by takie zaburzenie zmierzyć. Następnie oszacujemy parametry idealnego interferometru.

Pisaliśmy o tym w *Delcie* 3/2017. Energia fali grawitacyjnej jest funkcją kwadratu amplitudy fali grawitacyjnej h_0 i kwadratu częstości emitowanej fali ω (częstość fali jest proporcjonalna do charakterystycznej częstości źródła, np. częstości orbitalnej układu podwójnego). Dokładniej, gęstość energii fali grawitacyjnej (ilość energii w jednostce objętości) jest równa

$$E = \frac{c^2}{32\pi G} \omega^2 h_0^2.$$

Fala o częstości ω równej 1 kHz i amplitudzie $h_0 = 10^{-21}$ (wartości częstości i amplitudy porównywalnych z rejestrowanymi ostatnio przez Advanced LIGO w przypadku zderzeń gwiazdowych czarnych dziur), odpowiada gęstości energii 10^{-17} J/cm³.

W podobny sposób w wannie nie da się wzbudzić fali o długości kilometra lub zagrać na skrzypcach niskiej nuty kontrabasu.

Stała Plancka h jest jedną z podstawowych stałych fizycznych; ma wymiar iloczynu odległości i pędu (energii i czasu) i wynosi $h = 6,626070040(81) \cdot 10^{-34}$ J·s. Zredukowana stała Plancka, $\hbar = h/2\pi$, zwana jest też stałą Diraca.

Z powodu swej falowej natury grawiton o częstości ω nie może znajdować się w objętości o rozmiarze mniejszym niż jego zredukowana długość fali, $\lambda \equiv \lambda/2\pi = c/\omega$.

Gęstość energii pojedynczego grawitonu jest najwyżej równa energii grawitonu $\hbar\omega$, gdzie \hbar to zredukowana stała Plancka, podzielonej przez objętość odpowiadającą zredukowanej długości fali:

$$E_s = \text{energia/objętość} = \hbar\omega \left(\frac{c}{\omega}\right)^{-3} = \hbar \frac{\omega^4}{c^3}.$$

Dla $\omega = 1$ kHz, E_s to najwyżej $3 \cdot 10^{-54}$ J/cm³, z czego wynika, że fala grawitacyjna o $h_0 = 10^{-21}$ zawiera co najmniej $3 \cdot 10^{37}$ grawitonów. By zarejestrować jeden grawiton, potrzeba czułości $3 \cdot 10^{37}$ razy lepszej, a praktycznie zapewne dużo lepszej, bo należy dodatkowo wziąć pod uwagę proces detekcji uwzględniający szum tła. Zgrubne oszacowanie czułości interferometru otrzymamy, porównując E i E_s , dostając amplitudę odpowiadającą pojedynczemu grawitonowi:

$$h_0 = \frac{L_p \omega}{c} (32\pi)^{1/2},$$

gdzie $L_p = (\hbar/c^3)^{1/2} \simeq 1,6 \cdot 10^{-35}$ m jest długością Plancka (najmniejszym, jak się wydaje, dopuszczalnym rozmiarem w kwantowym świecie). Pomiar amplitudy fali odbywa się w interferometrze poprzez pomiar zmiany odległości L pomiędzy swobodnymi testowymi masami, tzn. lustrami, od których odbija się światło lasera. Zgodnie z zasadą działania urządzenia długość ramienia L nie może przekraczać długości fali grawitonu, c/ω (interferometr nie zarejestrowałby zmian długości ramion pod wpływem fali o długości mniejszej od L , ponieważ wydłużenia i skrócenia wygaszałyby się wzajemnie; zob. też artykuł Izabeli Kowalskiej w *Delcie* 10/2010). W optymalnym przypadku $L = c/\omega$, zmianę odległości szacujemy na

$$\Delta L = h_0 L = (32\pi)^{1/2} L_p.$$

Z dokładnością do czynnika rzędu jedności wymagana dokładność pomiaru separacji pomiędzy masami testowymi jest równa długości Plancka i nie zależy od częstości grawitonu.

Czy interferometr typu LIGO lub Virgo jest w zasadzie w stanie zmierzyć odległości porównywalne ze skalą Plancka? Odpowiedź jest negatywna. By się o tym przekonać, rozważmy idealny przypadek urządzenia, którego elementy o masach M znajdują się dla uproszczenia w nieważkości. Używając zasady nieoznaczoności Heisenberga, można określić dopuszczalny przez prawa fizyki rozmiar L ,

$$\Delta x \Delta p_x = \underbrace{\Delta L}_{\text{nieoznaczoność położenia}} \cdot \underbrace{\frac{M \Delta L / \Delta t}{\Delta t}}_{\text{nieoznaczoność pędu}} \geq \hbar/2,$$

gdzie Δt oznacza czas trwania eksperymentu, $\Delta t = 2L/c$ (czas przelotu światła tam i z powrotem potrzebny do skomunikowania się elementów detektora). Biorąc $\Delta L = L_p$, dostajemy ograniczenie

$$L \leq GM/c^2.$$

Oznacza to, że separacja pomiędzy masami M jest mniejsza od promieni Schwarzschilda każdej z nich. Przyciągający potencjał grawitacyjny GM^2/L jest większy od Mc^2 , a **detektor zapada się do czarnej dziury jeszcze przed zakończeniem pomiaru.**

Interferometr nie jest, oczywiście, jedynym możliwym sposobem rejestracji obecności grawitonu. Dla częstości ω , równych 10^{15} Hz lub większych, energia $\hbar\omega$ grawitonu jest rzędu elektronowoltów, czyli na tyle duża, by „wybijać” elektrony z powłok atomowych. **Uwolniony z atomu elektron byłby następnie wykrywany standardowymi metodami używanymi np. w detektorach neutrin.** Trudno jest sobie, co prawda, wyobrazić makroskopowe źródło astrofizyczne o tak wysokiej częstotliwości wśród tych, na które „polują” interferometry LIGO/Virgo, to znaczy zapadających się układów podwójnych gwiazd neutronowych i czarnych dziur, niesymetrycznych rotujących gwiazd neutronowych czy wybuchających gwiazd supernowych. **Można jednak poszukać źródła grawitonów w gorących wnętrzach gwiazd.** Robert J. Gould oszacował całkowitą ilość energii wynoszonej przez termiczne grawitony produkowane w zderzeniach elektron-elektron oraz elektron-jon we wnętrzu Słońca [1]: wynosi ona 79 megawatów. Jeszcze lepszymi źródłami są wnętrza białych karłów (milion MW) lub gwiazd neutronowych (trylion MW). Te ostatnie są z praktycznego punktu widzenia najlepszymi źródłami grawitonów, **pozostaje jednak uporanie się z problemem odróżnienia grawitonów i neutrin, które są również emitowane w wielkich ilościach z wnętrza gwiazd.** W przypadku Słońca na każdy grawiton przypada 10^{14} neutrin, a przekrój czynny na oddziaływanie neutrino-elektron jest 10^{20} razy większe od przekroju czynnego dla grawitonu [2]. Problem detekcji grawitonu sprowadza się więc do odróżnienia interesującego nas zdarzenia od co najmniej 10^{34} innych, składających się na tło. Zbudowanie ekranu pochłaniającego neutrina nie wchodzi w grę; zakładając dla uproszczenia, że byłby on wykonany z materii o zwykłej gęstości, musiałby mieć grubość odpowiadającą co najmniej średniej drodze swobodnej neutrina rzędu 10^{15} km. **Ekran taki byłby więc na tyle masywny, że natychmiast zaczęłyby się zapadać do czarnej dziury.**

Powyższe, raczej pesymistyczne oszacowania wykorzystują argumenty przedstawione przez jednego z gigantów współczesnej fizyki, Freemana Dysona, podczas wykładu z okazji otrzymania przez niego nagrody im. Henri Poincarégo w 2012 roku [3]. Wyniki te nie są z pewnością ostatnim słowem w „tym temacie”, na koniec i na pocieszenie przywołajmy zatem maksymę Artura C. Clarke’a: *Kiedy poważany, a sędziwy naukowiec twierdzi, że coś jest możliwe, prawie na pewno ma rację. Gdy twierdzi, że coś jest niemożliwe, prawdopodobnie się myli.*

Zasada nieoznaczoności Heisenberga stwierdza, że istnieją pary wielkości (np. położenie x i pęd p_x , a także energia E i czas t), których nie da się jednocześnie zmierzyć z dowolną dokładnością:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2, \quad \Delta E \Delta t \geq \hbar/2.$$

Promień Schwarzschilda masy M , definiujący rozmiar horyzontu czarnej dziury o tej samej masie wynosi $R_s = 2GM/c^2$. Horyzont wyznacza sferę, wewnątrz której prędkość ucieczki jest większa od prędkości światła.

Dla porównania, elektromagnetyczna moc promieniowania Słońca to $4 \cdot 10^{20}$ MW.

1 mol węgla (12 gramów) zawiera liczbę Avogadro ($6,022 \cdot 10^{23}$) atomów, zatem 1 gram – w przybliżeniu 1 cm^3 – to $n = 5 \cdot 10^{22}$ atomów. Rząd wielkości przekroju czynnego na zderzenia wynosi dla neutrin 10^{-42} cm^2 , zatem droga swobodna to $l = (n\sigma)^{-1} \simeq 10^{20} \text{ cm}$, czyli jest rzędu parseków.

- [1] R. J. Gould, *The graviton luminosity of the Sun and other stars*, 1985, *Astrophysical Journal*, 288, 789
- [2] M. Fukugita and T. Yanagida, *Physics of Neutrinos and Applications to Astrophysics*, 2003, Springer Verlag (Berlin)
- [3] publications.ias.edu/sites/default/files/poincare2012.pdf

Informatyczny kącik olimpijski (108): *Hacker Cups and Balls*

W tym miesiącu omówimy zadanie o zagadkowym tytule *Hacker Cups and Balls*. Pojawiło się ono na obozie w Petrozawodsku, przygotowującym do finałów zawodów ACM ICPC. Treść opowiada o kubkach i kulkach. Jednak tak naprawdę mamy daną nieparzystą liczbę n oraz ciąg A będący permutacją liczb od 1 do n . Na wejściowym ciągu A wykonano w podanej kolejności m operacji sortujących pewne przedziały jego elementów. Dla każdej z operacji określone jest, w jakim przedziale indeksów zostały posortowane elementy oraz czy zostały posortowane rosnąco, czy też malejąco. Musimy stwierdzić, jaka wartość znajduje się na środkowej pozycji w ciągu po wykonaniu wszystkich operacji.

Początkowo chciałoby się symulować cały proces, nie zważając na fakt, iż wystarczy odzyskać tylko jeden element ostatecznego ciągu. Jednak nie tędy droga, jeśli nie chcemy stracić mnóstwo czasu na zaimplementowanie rozwiązania.

Weźmy dowolną liczbę naturalną x i zastanówmy się, czy potrafimy sprawdzić czy szukany środkowy element ciągu po m operacjach jest większy niż x . Jeśli uda nam się na pytania tego typu odpowiedzieć w czasie $\mathcal{O}((n+m)\log n)$, to za pomocą wyszukiwania binarnego rozwiążemy całe zadanie w czasie $\mathcal{O}((n+m)\log^2 n)$.

Mając dany x , zapomnijmy o dokładnych wartościach elementów ciągu A . Będziemy po kolejnych operacjach pamiętać tylko, które elementy ciągu A są większe niż x . Po pierwsze, zauważmy, że tę informację istotnie *da się* utrzymywać. Istotne jest tylko to, ile w sortowanym przedziale jest elementów większych niż x : tyle ostatnich (pierwszych) elementów przedziału po posortowaniu rosnąco (malejąco) będzie większych niż x , pozostałe natomiast będą mniejsze bądź równe x . Zakodujemy tę informację jako ciąg zer i jedynek – jedynka oznacza, że dany element jest większy niż x . Nasze operacje wyglądają więc następująco: sumujemy jedynki w przedziale, a następnie podstawiamy na odpowiednim jego podprzedziale jedynki, a na pozostałej części zera.

Istnieją różne struktury danych, które pozwalają na zaimplementowanie takich operacji w czasie $\mathcal{O}((n+m)\log n)$.

Pierwszym przykładem takiej struktury jest drzewo przedziałowe. W danym wierzchołku drzewa pamiętamy liczbę jedynek w odpowiednim przedziale bazowym. Wystarczy ona do określania w czasie $\mathcal{O}(\log n)$ liczby jedynek w sortowanym przedziale. Potrzebujemy ponadto operacji podstawienia konkretnej stałej na wszystkich elementach przedziału. Przy jej wykonywaniu, po zaktualizowaniu wartości w odpowiednich przedziałach bazowych, informacje w ich potomkach przestają być aktualne. Jednak zawsze na ścieżce od korzenia do przedziału bazowego z nieaktualną wartością jest przedział cały wypełniony zerami bądź cały wypełniony jedynekami.

Wystarczy więc, że zaimplementujemy drzewo w sposób rekurencyjny i zawsze, gdy napotkamy przedział bazowy, który zawiera same zera bądź same jedynki, aktualizujemy wartość w jego dzieciach. W przypadku

tego konkretnego zadania implementacja tego typu drzewa okazuje się jeszcze prostsza niż zwykle. Nie musimy bowiem pamiętać żadnych dodatkowych informacji. To, czy przedział jest cały wypełniony zerami bądź jedynekami, możemy sami wydedukować z liczby jedynek oraz długości przedziału.

Drugim podejściem, być może prostszym ideowo, ale wymagającym więcej ostrożności przy szczegółach implementacyjnych, jest utrzymywanie w strukturze `set` z języka C++ ciągu przedziałów zer oraz jedynek. Jedna operacja sortowania agreguje i usuwa wszystkie przedziały, które przecinają się z sortowanym. Następnie wstawia do struktury co najwyżej cztery nowe przedziały. Pierwszy i ostatni zawierają odpowiednio prefiks pierwszego i sufiks ostatniego agregowanego przedziału niemodyfikowany przez sortowanie. Dwa pozostałe zawierają odpowiedniej długości przedziały zer oraz jedynek powstałe przez sortowanie. Aby przeanalizować czas działania, musimy zamortyzować sumaryczny czas usuwania elementów. Zauważmy, że w trakcie działania algorytmu dodamy do struktury $\mathcal{O}(n+m)$ przedziałów, więc w sumie również co najwyżej tyle usuniemy i ostatecznie otrzymujemy złożoność $\mathcal{O}((n+m)\log n)$ na sprawdzenie jednej wartości x .

Te dwa rozwiązania wystarczają już do zaliczenia zadania w trakcie konkursu. Jednak czysto teoretycznie, w celach edukacyjnych, zarysujmy jeszcze rozwiązanie odzyskujące cały ostateczny ciąg i to w lepszej złożoności czasowej $\mathcal{O}((n+m)\log n)$. Pomysł będzie podobny do drugiej z naszych implementacji, ciąg A będzie podzielony na przedziały, z których każdy będzie jednym elementem struktury `set`. Każdy z tych przedziałów będzie odpowiadał monotonicznemu fragmentowi ciągu A . Oprócz tego, jaką monotoniczność ma dany przedział, będziemy również utrzymywać dokładny opis zbioru jego elementów na dynamicznym drzewie przedziałowym. Okazuje się, że łączenie, a w przypadku tego zadania i dzielenie takich dynamicznych drzew przedziałowych, nawet w dość bezpośredni sposób, niespodziewanie amortyzuje się do zadowalającego czasu. Zachęcamy Najwytrwalszych Czytelników do przeanalizowania tego fenomenu. Właściwym potencjałem powinna okazać się sumaryczna liczba wierzchołków we wszystkich dynamicznych drzewach przedziałowych.

Marcin SMULEWICZ

Od Nobla do Nobla, do Nobla...

Ponad 50 lat temu J. Watson, F. Crick i M. Wilkins (Nagroda Nobla 1962) sformułowali hipotezę ogólnej struktury materiału genetycznego – DNA – i hipoteza ta stała się ugruntowaną, niekwestionowaną teorią.

Struktura podwójnej helisy to spojrzeniem „z daleka” na cząsteczkę, bez precyzowania szczegółów budowy chemicznej. Helisa W-C-W składa się z dwu nici zbudowanych z nukleotydów i kolejność ich w jednej nici jednoznacznie określa kolejność w drugiej, nazwanej komplementarną. Innym badaczom odkrywcy pozostawili rozszyfrowanie kolejności (sekwencji) nukleotydów w konkretnych cząsteczkach DNA. W latach 50. ubiegłego stulecia było to zadanie przekraczające możliwości fizyki i chemii. Potrzeba było kolejnych 20 lat na opracowanie metod sekwencjonowania (Nagroda Nobla F. Sanger, M. Gilbert, P. Berg; 1980) i jeszcze dalszych dziesięciu, aby rozpoczęto budowę kolejnych generacji automatycznych przyrządów sekwencjonujących coraz szybciej wybrane fragmenty DNA.

Zaprzęgnięto najdoskonalsze metody informatyczne do analizy sekwencji. Postęp był bardzo szybki, w drugim dziesięcioleciu XXI wieku znane są sekwencje genomów dziesiątków tysięcy gatunków bakterii, tysięcy niższych eukariotów, kręgowców, wśród nich dla nas najważniejszego – człowieka. Sekwencjonowanie DNA weszło do codziennej praktyki diagnostyki medycznej, weterynaryjnej, do zakładów kryminalistyki, instytutów badawczych rolnictwa, archeologii, wreszcie stało się podstawą prób terapii niepłodności i chorób genetycznych.

Znajomość kodu genetycznego (Nagroda Nobla H.G. Khorana, R. Holey, M. Nirenberg; 1968) umożliwiła jednoczesne badania kodowanych przez określone genomy białek, ich doświadczalne badania i poznawanie funkcji, pozwoliła na poszukiwania i odkrycia licznych indywidualnych wariantów genetycznych, mutacji pożytecznych i szkodliwych, skutkujących istnieniem wielu wersji białek pełniących podobne funkcje. Te odkrycia to niewyczerpana skarbnica wiedzy o różnorodności świata żywego i podstawa do rozwoju molekularnego ewolucjonizmu, opartego o porównania genów i białek w całej palecie współczesnych nosicieli, a także ekstrapolacji ku początkom życia. Parę „znalezisk” ostatnich miesięcy i tygodni ilustruje powyższe uogólnienia.



Ćma *Neopalpa donaldtrumpi*

- Donaldowi Trumpowi systematycy zadedykowali nowo odkryty gatunek ćmy *Neopalpa donaldtrumpi* w nadziei, iż popierać on będzie (DT, nie gatunek) ochronę środowiska. Podobieństwo z fryzurą prezydenta uderzające!
- W genomie współczesnych psów zidentyfikowano region analogiczny do ludzkiego, który czyni się odpowiedzialnym za tworzenie przez osobnika przyjaznych więzi z otoczeniem. Taki układ genów nie występuje u wilków – to mutacje uczyniły psa naszym najlepszym przyjacielem.
- Z badań fizjologicznych ponad 150 tysięcy Europejczyków, którym sprawdzano siłę mięśni, udało się zidentyfikować u tych najsilniejszych 16 wspólnych sekwencji genowych. Czyżby był to początek genetycznych badań predyspozycji kandydata do uprawiania określonych sportów?
- Wykopaliska archeologiczne cmentarza w okolicach bizantyjskiej Troi ujawniły szkielet kobiety w ciąży, która zapewne zmarła w wyniku zakażeń dwiema odnalezionymi tam bakteriami (odzyskano charakterystyczne geny *Staphylococcus saprophyticus* i *Gardenerella vaginalis*).
- I wreszcie jedna z odkrywczyń zjawiska CRISPR/cas, Jennifer Doudna (moja kandydatka na Nagrodę Nobla 2017), znalazła gen wirusa bakterii *Listeria*, który wprowadzony do komórki ludzkiej koduje małe białko regulujące intensywność procesu CRISPR/cas (kontrolowane modyfikacje genów), a nawet może go wyłączyć. Nadzieje związane z przyszłością terapii CRISPR czynią taki w(y)łącznik niezwykle użytecznym.

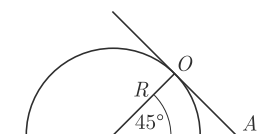
Magdalena FIKUS

Skrót regulaminu

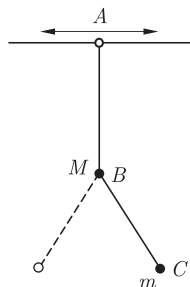
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



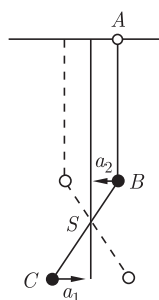
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2017



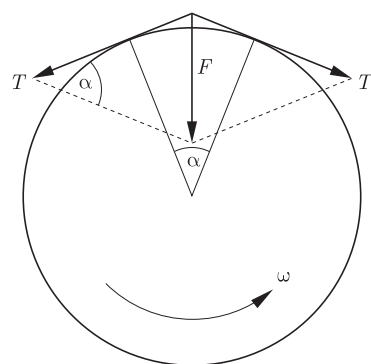
Rys.1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadania z fizyki nr 644, 645

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

644. Półwalec o promieniu R umocowany jest na poziomej płaszczyźnie (rys. 1). Jednorodny cienki pręt o długości $2R$ opiera się na walcu w połowie swojej długości, a jego dolny koniec A jest unieruchomiony. Po oswobodzeniu pręt ześlizguje się z walca. Nie ma tarcia. Jaka będzie prędkość górnego końca pręta B w chwili, gdy zetknie się on z powierzchnią walca?

645. Oszacować, jaka część ciepła parowania wody zużywana jest na zwiększenie jej energii wewnętrznej przy temperaturze $T = 373$ K? Ciepło parowania wody wynosi $q = 2,3 \cdot 10^6$ J/kg.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2017

Przypominamy treść zadań:

640. Do wahadła matematycznego AB (rys. 2) o masie M przyłączone jest wahadło matematyczne BC o masie m . Punkt zawieszenia A tego wahadła podwójnego drga harmonicznym wzłuż linii poziomej z częstością ω i małą amplitudą. Znaleźć długość nici dolnego wahadła, jeżeli górna nić przez cały czas pozostaje pionowa.

641. Gumowy kabel ma współczynnik sprężystości k , masę m i długość l . Okrąg zrobiony z tego kabla obraca się z prędkością kątową ω w płaszczyźnie poziomej wokół osi pionowej, przechodzącej przez środek okręgu. Wyznaczyć promień obracającego się pierścienia.

640. Jeżeli górna nić zachowuje przez cały czas kierunek pionowy, to wszystkie siły zewnętrzne działające na układ, czyli siła ciężkości i siła naciągu górnej nici, są pionowe. Wynika stąd, że środek masy S układu nie przemieszcza się w kierunku poziomym (rys. 3), a kulki w każdej chwili poruszają się w kierunkach przeciwnych. Stosunek ich przyspieszeń w kierunku poziomym wynosi $a_2/a_1 = m/M$. Oznaczmy szukaną długość dolnej nici przez l , a odległość dolnej kulki od środka masy przez d . Z rysunku 3 widać, że $a_2/a_1 = (l - d)/d$. Z porównania wzorów na stosunki przyspieszeń otrzymujemy $d = lM/(M + m)$. Ponieważ amplituda drgań punktu A jest mała, przemieszczenia środka masy układu w kierunku pionowym również są małe i dolna kulka zachowuje się w przybliżeniu jak wahadło matematyczne o długości d zawieszona w nieruchomym punkcie S . Częstość drgań tego wahadła jest taka sama jak częstość drgań punktu A i wynosi $\omega = \sqrt{g/d}$. Stąd dolna nić ma długość

$$l = \frac{g(1 + m/M)}{\omega^2}.$$

641. Oznaczmy promień obracającego się okręgu przez R . Rozważmy mały element tego okręgu o długości ΔL . Jego masa to $\Delta m = m\Delta L/L$, gdzie $L = 2\pi R$. Na wydzielony element na jego końcach działają dwie siły naprężenia T , skierowane stycznie do okręgu (rys. 4). Ich wypadkowa $F = 2T \sin(\alpha/2)$ nadaje rozważanemu elementowi przyspieszenie dośrodkowe $a = \omega^2 R$. Równanie ruchu tego elementu ma postać

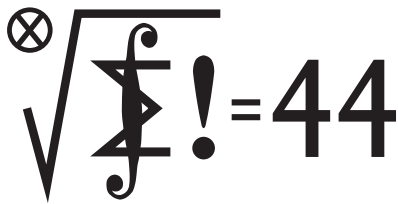
$$2T \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\omega^2 R m \Delta L}{L}.$$

Siła naprężenia kabla dana jest wzorem $T = k(2\pi R - l)$. Uwzględniając, że kąt α jest mały, czyli

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta L}{2R},$$

otrzymujemy szukany promień obracającego się okręgu:

$$R = 2\pi \frac{lk}{4\pi^2 k - m\omega^2}.$$



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2017

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 737 ($WT = 2,89$) i 738 ($WT = 1,21$) z numeru 3/2017

Adam Dzedzej	Gdańsk	43,22
Jerzy Cisło	Wrocław	41,85
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	40,94
Marcin Małogrosz	Warszawa	40,86
Roksana Słowik	Knurów	40,36
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Janusz Olszewski	Warszawa	39,15
Marcin Kasperski	Warszawa	37,67
Krzysztof Maziarz	Kraków	37,45

Gromadnie mijanie „44” zapowiada się niebawem...

Zadania z matematyki nr 747, 748

Redaguje Marcin E. KUCZMA

747. Funkcja f , o wartościach rzeczywistych, jest określona, wypukła i różniczkowalna na zbiorze wszystkich liczb dodatnich; przy tym $|f'(n^2)| \geq 1/n^2$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Udowodnić, że funkcja f jest nieograniczona.

748. Czy można w pola tablicy o rozmiarach 8×8 wpisać liczby $-1, 0, 1$ (w każde pole jedną liczbę) tak, by sumy liczb w wierszach oraz sumy liczb w kolumnach utworzyły układ 16 różnych wartości? Czy odpowiedź zmieni się, gdy będziemy rozważali tablicę 14×14 (i wymagali 28 różnych wartości)?

Zadanie 748 zaproponował pan Piotr Wiśniewski z Warszawy

Rozwiązania zadań z numeru 6/2017

Przypominamy treść zadań:

743. W zbiorze liczb rzeczywistych różnych od zera określamy działanie: $x \diamond y = (x/y) + (y/x)$. Niech a, b, c, d będą liczbami, spełniającymi równanie

$$(a \diamond b) + (b \diamond c) + (c \diamond d) + (d \diamond a) = (a \diamond c) + (b \diamond d) + ((ac) \diamond (bd)) + 2.$$

Czy a, b, c, d mogą być czterema różnymi liczbami? Czy mogą być wśród nich trzy różne liczby?

744. Dana jest liczba całkowita $k \geq 2$. Niech M będzie takim zbiorem dodatnich liczb całkowitych, że dla każdej pary różnych liczb $m, n \in M$ zachodzi nierówność $mn \leq k^2|m - n|$. Wykazać, że zbiorze M jest nie więcej niż $2k - 1$ liczb. Czy dla każdej liczby $k \geq 2$ istnieje $(2k - 1)$ -elementowy zbiór M o podanej własności?

743. Niech $L(a, b, c, d)$ oznacza lewą stronę podanego równania, pomnożoną przez $abcd$, i niech $P(a, b, c, d)$ oznacza prawą stronę tego równania, pomnożoną przez $abcd$. Są to wielomiany czterech zmiennych, jednorodnie, czwartego stopnia. Skontrolujmy ich wartości, gdy np. $c = d$:

$$\begin{aligned}
L(a, b, c, c) &= \left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + 2 + \frac{a^2 + c^2}{ac} \right) abc^2 = \\
&= (a^2 + b^2)c^2 + (b^2 + c^2)ac + 2abc^2 + (a^2 + c^2)bc; \\
P(a, b, c, c) &= \left(\frac{a^2 + c^2}{ac} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{abc^2} + 2 \right) abc^2 = \\
&= (a^2 + c^2)bc + (b^2 + c^2)ac + (a^2c^2 + b^2c^2) + 2abc^2;
\end{aligned}$$

te wartości są równe. To znaczy, że wielomian $F = P - L$ dzieli się przez dwumian $(c - d)$. Analogicznie (wobec niezmienniczości przy cyklicznym przesunięciu zmiennych) dzieli się przez dwumiany $(d - a)$, $(a - b)$, $(b - c)$. Stąd wniosek, że dzieli się przez iloczyn tych dwumianów, a iloraz jest pewną stałą. Biorąc dowolne różne liczby a, b, c, d , stwierdzamy, że ta stała to 1. Tak więc

$$F(a, b, c, d) = (a - b)(b - c)(c - d)(d - a)$$

(oczywiście można było tę tożsamość sprawdzić wprost, podstawiając wyrażenie określające rozważane działanie, przenosząc wszystko na jedną stronę i pracowicie przekształcając).

Dane w zadaniu równanie $F(a, b, c, d) = 0$ nie jest spełnione dla żadnej czwórki różnych liczb a, b, c, d , jest zaś spełnione dla wielu czwórek utworzonych z trzech różnych liczb (z jednym powtórzeniem).

744. Podany warunek przepisujemy równoważnie jako $|m^{-1} - n^{-1}| \geq k^{-2}$. Niech K będzie zbiorem odwrotności wszystkich liczb z zbioru M . Dowolne dwa elementy zbioru K są więc oddalone o co najmniej $1/k^2$. Zatem w każdym spośród k przedziałów

$$\left(0, \frac{1}{k^2}\right], \left(\frac{1}{k^2}, \frac{2}{k^2}\right], \left(\frac{2}{k^2}, \frac{3}{k^2}\right], \dots, \left(\frac{k-1}{k^2}, \frac{k}{k^2}\right]$$

może być co najwyżej jeden element zbioru K . Pozostałe liczby dodatnie tworzą przedział $(1/k, \infty)$, w którym są jedynie odwrotności liczb naturalnych $1, 2, \dots, k-1$. To pokazuje, że zbiór K (więc i zbiór M) może liczyć co najwyżej $2k - 1$ elementów.

Odpowiedź na drugie pytanie z zadania jest przecząca: na przykład dla $k = 9$ nie istnieje 17-elementowy zbiór M o podanej własności. Jak w przypadku ogólnym, zauważamy, że w każdym z przedziałów $(0, \frac{1}{81}]$, $(\frac{1}{81}, \frac{2}{81}]$, $(\frac{2}{81}, \frac{3}{81}]$ może być tylko jeden element zbioru K . Dalej, odwrotności liczb naturalnych, leżące w przedziale $(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}]$, rozbijamy na pięć podzbiorów: $\{\frac{1}{26}, \dots, \frac{1}{20}\}$, $\{\frac{1}{19}, \dots, \frac{1}{16}\}$, $\{\frac{1}{15}, \frac{1}{14}, \frac{1}{13}\}$, $\{\frac{1}{12}, \frac{1}{11}\}$, $\{\frac{1}{10}, \frac{1}{9}\}$ – każdy z nich ma średnicę mniejszą niż $\frac{1}{81}$, więc zawiera co najwyżej jeden element zbioru K . No i zostają jeszcze ułamki $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2}, 1$. Liczność zbioru K (więc i M) nie przekracza $3 + 5 + 8$, czyli 16.

Jednym z klasycznych przykładów obszarów, w których wciąż pojawiają się nowe gwiazdy, jest Wielka Mgławica w Orionie (znana również jako Messier 42), odległa od Ziemi o około 1340 lat świetlnych.

Astronomiczna tablica Mendelejewa jest w pierwszym przybliżeniu niezwykle prosta: Wszechświat składa się z wodoru, helu i pierwiastków cięższych, czyli „metali”. Im więcej „metali” w materii gwiazdy, tym więcej charakterystycznych częstotliwości związanych ze stanami energetycznymi elektronów, przy których następuje absorpcja promieniowania (linii absorpcyjnych). Absorpcja zwiększa nieprzezroczystość materii: powoduje silniejsze oddziaływanie promieniowania z materią, czyli mocniejszy „wiatr gwiazdowy”, a więc zwiększenie ilości materii wywiewanej z gwiazdy przez jej własne promieniowanie.

Prosto z nieba: O zdmuchiwanie dysków

Gwiazdy o różnych masach i rozmiarach powstają w podobny sposób w gęstych od gazu i pyłu obszarach *gwiazdotwórczych*. Narodziny gwiazdy poprzedza zapadnięcie się pod wpływem własnej grawitacji chmury składającej się głównie ze zjonizowanego wodoru, czemu towarzyszy wzrost gęstości chmury oraz przemiana grawitacyjnej energii potencjalnej w energię termiczną (rozgrzanie się materii). Po przekroczeniu krytycznej wartości temperatury rozpoczyna się fuzja jądrowa i nowo narodzona gwiazda zaczyna świecić, powstrzymując ciśnieniem własnego promieniowania dalsze zapadanie się.

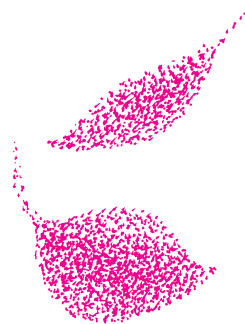
W zależności od tego, jak masywna jest gwiazda i z czego się składa, promieniowanie prowadzi do utraty mniejszej lub większej części masy gwiazdy. Jasność gwiazdy ma duży wpływ na warunki, w których powstają (lub nie) protoplanety. Nowo powstałą gwiazdę otaczają bowiem pozostałości pierwotnej chmury (dysk gęstego gazu i pyłu), z którego w procesie podobnym jak sama gwiazda wyłaniają się w sprzyjających okolicznościach samograwitujące zgręski, czyli zaczątki planet.

Wiadomo, że części protoplanetarnego dysku, znajdujące się zbyt blisko masywnej (co jednocześnie oznacza: jasnej) gwiazdy, „odparowują” pod wpływem promieniowania w przestrzeń międzygwiazdową, jak również, że istnieją przypadki protoplanetarnej kontroli urodzin, gdy pobliska jasna gwiazda „zdmuchuje” dysk otaczający gwiazdę mniej jasną, uniemożliwiając powstanie planet.

Niedawne obserwacje udoskonalają naszą wiedzę na temat najwcześniejszych etapów powstawania układów planetarnych wokół niewielkich gwiazd podobnych do Słońca. Gwiazda IM Lupi (typ spektralny M0, jasność prawie dwukrotnie większa od słonecznej, temperatura 3900 K), znajdująca się w gwiazdozborze Wilka, ma obecnie całkiem spory dysk o promieniu 400 jednostek astronomicznych (orbita Plutona to około 40 j.a.). Moc promieniowania IM Lupi jest rzędu wielkości mniejsza w porównaniu do gwiazd, wokół których obserwuje się znikające dyski, dlatego z zainteresowaniem przyjęto obserwacje rozciągniętego halo rozproszonej wokół niej materii. Pochodzenie halo jest naturalne: dysk rozciągał się kiedyś o wiele dalej, nawet do 700 j.a., gdzie stosunkowo słabe promieniowanie gwiazdy z łatwością radziło sobie z siłą grawitacyjną wiążącą gaz w dysku. IM Lupi ma około 1 miliona lat; według szacunków w czasie życia dysku, który oblicza się na około 10 milionów lat, zdmuchnie około 3000 M_{\oplus} materii. W tym czasie w gęstszych częściach dysku, w odległościach bardziej zbliżonych do obserwowanych w Układzie Słonecznym, będą powstawać planety.

Michał BEJGER

ZNOWU
DYSKI



Niebo w październiku

Październik to już pełnia jesieni, gdzie noce są wyraźnie dłuższe od dni. Są również coraz chłodniejsze, zwłaszcza w czasie rozpodogzeń i coraz częściej pochmurne lub zamglone, przez co liczba godzin, które można poświęcić na obserwowanie nieba, nie jest taka duża, jak mogłaby być, gdyby pogoda przypominała tę letnią. Podobnie jak we wrześniu, w tym miesiącu silny blask Księżyca przeszkodzi w obserwacjach innych ciał niebieskich na początku miesiąca, gdyż pełnia Srebrnego Globu przypada 5 października, 7 dni później Księżyc przejdzie przez ostatnią kwadrę, 19 października – przez now, natomiast 27 października – przez pierwszą kwadrę. Nachylenie ekliptyki do porannego widnokregu jest nadal bardzo duże, zatem Księżyc między ostatnią kwadrą a nowiem oraz widoczne rano przebywające blisko Słońca planety będą widoczne dobrze, tak samo, jak tzw. światło popielate Księżyca, czyli jego nocna część, oświetlona światłem słonecznym, odbitym od powierzchni Ziemi. Tym razem również Europa ma pecha do spotkań Księżyca z jasnymi gwiazdami oraz

planetami Układu Słonecznego. Naturalny satelita Ziemi dwukrotnie zakryje w październiku Neptuna, 3 i 30 dnia tego miesiąca (w fazach odpowiednio około 90 i 70%), lecz za każdym razem zjawisko da się obserwować z półkuli południowej: najpierw z Nowej Zelandii, Tasmanii i Antarktydy, z zakryciem brzegowym, widocznym z okolic Wysp Fidzi, Nowej Kaledonii oraz południowo-wschodnich wybrzeży Australii; drugie zakrycie również będzie widoczne z Antarktydy, poza tym z RPA oraz południowego Madagaskaru. 6 października Księżyc dzień po pełni spotka się z Uranem, mijając tę planetę w odległości 5° . 9 października Księżyc przejdzie przez Hiady. Sekwencja zakryć gwiazd tej gromady otwartej zacznie się od zakrycia gwiazdy γ Tauri, już po zachodzie Srebrnego Globu w Europie. Zjawisko będzie widoczne z USA i Kanady. Natomiast koniec sekwencji nastąpi wraz z zakryciem Aldebarana, co da się dostrzec ze wschodniej Azji. Gdy Księżyc pojawi się na polskim niebie, znajdzie się już prawie 1° na wschód od Aldebarana i jednocześnie niecałe 0,5 stopnia (brzeg tarczy tylko $12'$) na północ od pary gwiazd piątej wielkości $\sigma 1$ i $\sigma 2$ Tauri, z tarczą oświetloną w 79%. 15 października Srebrny Glob kilka dni przed nowiem, w fazie 19%, zakryje Regulusa, czyli najjaśniejszą gwiazdę Lwa. Zakrycie będzie widoczne z USA, Meksyku i na Karaibach, natomiast w Polsce o świcie Księżyc zbliży się do Regulusa na 3° , o godzinie 14 mijając go w odległości $40'$. 17 i 18 października bardzo już cienki sierp Księżyca spotka się z dwiema planetami Układu Słonecznego. Najpierw będzie to Mars, do którego Księżyc w fazie 7% zbliży się na naszym niebie na 3° . Dobę później Srebrny Glob, mając tarczę oświetloną w 3%, spotka się z planetą Wenus. Oba ciała Układu Słonecznego przedzieli dystans nieco większy od 2° . Tego ranka Księżycowi do nowiu zabraknie jedynie 38 godzin. Po nowiu Księżyc spotka się jeszcze z Saturnem. Wieczorem 24 października oba ciała niebieskie znajdą się około 3° od siebie, zaś księżycowa tarcza pokaże sierp w fazie 21%.

W poprzednim akapicie nie pojawiły się planety Merkury i Jowisz. Powód jest prosty: obie planety są w październiku niewidoczne. Pierwsza z planet 8 października przejdzie przez koniunkcję górną ze Słońcem, mijając naszą Gwiazdę Dzienną 1° na północ. Potem przejdzie na niebo wieczorne, dążąc do maksymalnej elongacji wschodniej 24 listopada. Jednak o tej porze doby ekliptyka jesienią jest nachylona niekorzystnie, dodatkowo Merkury znajdzie się z naszej perspektywy pod ekliptyką, co sprawi, że planeta przez cały ten okres będzie niewidoczna z dużych północnych szerokości geograficznych, mimo całkiem sporego oddalenia od Słońca (w dniu maksymalnej elongacji – prawie 22° , czyli więcej niż podczas dobrej widoczności porannej we wrześniu czy wieczornej na wiosnę). Jowisz swoją koniunkcję górną ze Słońcem ma zaplanowaną na 26 października, mijając je także w odległości 1° , i również jest przez cały miesiąc niewidoczny. Jednak już w drugiej dekadzie listopada, 3 tygodnie po koniunkcji, zacznie on pojawiać się na porannym niebie, gdzie m.in.

czeka go bliskie spotkanie z planetą Wenus, ale więcej o tym napiszę następnym razem.

Z pozostałych planet: Neptun jest miesiąc po opozycji, zaś Uran przejdzie przez opozycję 19 października, stąd obie planety można obserwować przez całą noc. Neptun w połowie miesiąca minie świecąca z jasnością obserwowaną $+3,7^m$ gwiazdę λ Aquarii w odległości $33'$, sam świecąc blaskiem o 4^m mniejszym. Planeta Uran świeci blaskiem $+5,7^m$ i w trakcie miesiąca zwiększy odległość od gwiazdy ρ Psc do ponad 2° . Saturna można obserwować wieczorem na tle gwiazdozbioru Wężownika, stale dążącego do koniunkcji górnej ze Słońcem pod koniec grudnia. W październiku Saturn zmniejszy swój blask do $0,5^m$, zaś średnica jego tarczy spadnie do $15''$. Na początku miesiąca planeta około godz. 20 świeci na wysokości 7° nad południowo-zachodnim widnokręgiem, na jego końcu będzie w tym momencie chować się za widnokrąg. Planety Wenus i Mars czeka bliskie spotkanie w dniach 5 i 6 października, gdy miną się w odległości $20'$. W pobliżu znajdzie się gwiazda czwartej wielkości σ Leonis. Do końca miesiąca obie planety przejdą do gwiazdozbioru Panny. Z tym, że Wenus dotrze prawie do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy tej konstelacji, natomiast Mars minie tylko gwiazdy β i η Vir. Przez cały miesiąc jasność Marsa wynosić będzie $+1,8$ wielkości gwiazdowej, a jego tarcza osiągnie rozmiar $4''$. Jasność Wenus też będzie prawie stała, $-3,9^m$, przy średnicy tarczy około $10''$ i fazie coraz bardziej zbliżającej się do pełni. 31 października wyniesie ona 96%.

W październiku wystąpią dwa dość obfite roje meteorów. Pierwszym z nich są Drakonidy, promieniujące od 6 do 10 października, z maksimum 8 dnia tego miesiąca. W tym roku w obserwacjach tego roju będzie przeszkadzał Księżyc w fazie 3 dni po pełni, stąd nie należy spodziewać się wielu zjawisk. Drugim rojem są Orionidy, promieniujące od 2 października do 7 listopada, z maksimum w okolicach 21 października. W tym przypadku Księżyc będzie w nowiu, zatem powinny być one widoczne bardzo dobrze. Radiant roju znajduje się nieco ponad 4° na zachód od Alheny, γ Gem i wschodzi po godzinie 21, górując przed 5 rano, na wysokości ponad 50° . Są to szybkie meteory, zderzają się z naszą atmosferą z prędkością 66 km/s. W maksimum można spodziewać się ponad 20 meteorów na godzinę.

Nie należy zapominać o gwiazdach zmiennych. Szczególnie warta polecenia jest miryda χ Cygni, która zmienia jasność od ponad 4 do $13,5^m$, z okresem 408 dni. W tym roku maksimum jej blasku spodziewane jest w okolicach 24 października i jeśli jej maksimum będzie należeć do tych jaśniejszych, na kilkanaście tygodni wyraźnie zmieni się kształt gwiazdozbioru Łabędzia, gdyż w jego szyi, między gwiazdami η (jasność $+3,9^m$) a β ($+3^m$) Cygni, pojawi się dodatkowa gwiazda, 2,5 stopnia na południe od pierwszej z nich. χ Cyg góruje około godz. 19:15 na wysokości około 70° i do prawie 5 rano jest bardzo dobrze widoczna po zachodniej stronie nieba.

Ariel MAJCHER

Napięcie powierzchniowe języka

Zastosowanie modelowania wzorowanego na fizyce statystycznej do opisu szeroko rozumianych interakcji międzyludzkich jest ograniczone tylko pomysłowością badaczy oraz dostępnością danych [1]. Jedną z dziedzin, w której otrzymano ciekawe wyniki, jest językoznawstwo.

W niedawno opublikowanej pracy [2] autor przekonuje o podobieństwie tworzenia się domen ferromagnetyka czy baniek mydlanych do kształtowania się obszarów, w których występuje dana odmiana wymowy – dialekt, gwara.

Proponowany model jest, z założenia, bardzo prosty. Wystarczy przyjąć, że ludzie rozmawiają głównie z tymi, których spotykają, czyli z tymi, którzy mieszkają niedaleko (około 10–20 km). Jeżeli mieszkają blisko jakiegoś skupiska (miasta), to częściej spotykają jego mieszkańców niż ludzi z zewnątrz, ponieważ częściej trafiają na tych pierwszych, którzy mieszkają „gęściej”.

Odmiany wymowy są reprezentowane poprzez tzw. zmienne lingwistyczne, które przyjmują tyle wartości, ile jest odmian (dwuwartościowa taka zmienna może mieć np. wartość „0” dla wymowy „życie” oraz „1” dla „zycie”).

W zaproponowanym (najprostszym) podejściu ewolucję przestrzennego rozkładu każdej takiej zmiennej rozpatruje się osobno. Jest ona związana z założonym podporządkowywaniem się sposobowi mówienia, z jakim dana jednostka się spotyka, połączonym z wykładniczym zapominaniem. Jak łatwo wykazać, prowadzi to po prostu do dyfuzji, skutkującej (po odpowiednio długim czasie) przestrzennym wymieszaniem się wszystkich wariantów w proporcjach odpowiadających początkowej częstości występowania danej odmiany (co odpowiada zasadzie zachowania masy). Natomiast po uwzględnieniu czynnika losowego prowadzi do ujednoczenia danej zmiennej.

Według autora publikacji [1] ani jedno, ani drugie nie odpowiada rzeczywistości, w której występuje regionalne zróżnicowanie wymowy potocznej. Pojawia się ono, jeżeli założy się odpowiedź nieliniową, tzn. przyjmie się, że prawdopodobieństwo użycia danego wariantu wymowy nie jest po prostu proporcjonalne do frakcji przypadków zetknięcia się z nim w przeszłości, lecz do tej frakcji podniesionej do pewnego większego od jeden wykładnika. Jest to sposób ilościowego ujęcia tendencji wybierania najczęściej słyszanego wariantu wymowy z prawdopodobieństwem większym od względnej częstości stykania się z nim.

Model jest rzeczywiście bardzo prosty, ale daje bardzo ciekawe wyniki. Okazuje się, że, praktycznie niezależnie od początkowego stanu uzyskuje się domeny, w których dominuje jakiś lokalny dialekt, a ich rozkład przestrzenny zależy tylko od rozkładu gęstości zaludnienia oraz kształtu granic badanego (izolowanego) obszaru.

W językoznawstwie granicę między dwoma dialektami nazywa się izoglosą. Ewolucja symulowanych zgodnie

z prezentowanym modelem izoglos prowadzi do uzyskania stabilnej formacji podobnej do piany. W jej trakcie izoglosy opisujące poszczególne zmienne lingwistyczne grupują się w wiązki. Proces ten jest zdominowany przez trzy efekty. Prostowanie się izoglos (minimalizacja energii napięcia „błony”), wypychanie izoglos na zewnątrz skupisk (formowanie się „bańki” o tym większym rozmiarze, im większe jest „ciśnienie populacji”), wędrowanie punktu styku izoglosy i granicy obszaru do miejsca, w którym kąty między izoglosą a granicą są takie same po obu stronach izoglosy (izoglosy układają się prostopadle do granicy lub „zaczepiają” o jej załamanie).

Model ten został przetestowany na kilku przykładach. Jednym z nich było odtworzenie rozkładu domen językowych Anglii. Przestrzenny rozkład gęstości zaludnienia został uzyskany poprzez lekkie rozmycie danych z angielskich urzędów pocztowych. Choć język kształtował się przez co najmniej kilkaset lat, to, w opinii autora, obecny rozkład względnej gęstości zaludnienia Anglii jest dobrym przybliżeniem jego przeszłych stanów. Okazało się, że wysymulowany rozkład domen jest bardzo podobny do rozkładu wyznaczonego przez językoznawców. W szczególności wyraźnie zarysowuje się izoglosa biegnąca od przejścia rzeki Severn w Kanał Bristolski (oddzielający Anglię od Walii) do ujścia rzeki Welland do zatoki Wash na wschodnim wybrzeżu (rzeka jest granicą między samodzielnym okręgiem (ang. *borough*) Bostonu a dystryktem South Holland, oba w hrabstwie Lincolnshire). Jest to linia łącząca dwa wyraźne wcięcia Wielkiej Brytanii.

Z innych przewidywań modelu warto odnotować językowy podział podługowatych obszarów na poprzeczne pasy (np. Laponia, Japonia), generowanie wąskich wachlarzowatych domen przez blisko leżące duże miasta, liczbę dialektów na wyspach z jednym lub kilkoma dużymi miastami. Za każdym razem podobieństwo obserwowanych domen językowych jest zadziwiająco podobne do wyników symulacji w ramach omawianego modelu.

Ciekawe, za co jeszcze wezmą się fizycy statystyczni.

Piotr ZALEWSKI

[1] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, *Statistical Physics of Social Dynamics*, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).

[2] J. Burridge, *Spatial Evolution of Human Dialects*, *Phys. Rev. X* **7**, 031008 (2017), DOI:10.1103/PhysRevX.7.031008



Kto da mniej?

Joanna JASZUŃSKA

Prezentujemy kilka zadań wraz z „rozwiązaniami” i... lepszymi rozwiązaniami.

1. Złośliwy czarodziej rzucił urok na jedną z 1000 beczek z winem – po wypiciu choćby kropli każdy zzielenieje w ciągu doby. Codziennie rano dysponujemy dokładnie 10 dzielnymi (i niezielonymi) rycerzami gotowymi ponieść ryzyko. Ile dni potrzeba, aby wykryć zaczarowaną beczkę?

2. Mamy 10 worków z monetami. W jednym z nich wszystkie monety są fałszywe, w pozostałych zaś wszystkie są prawdziwe. Prawdziwa moneta waży 10 gramów, a fałszywa 11. Ile ważeń na wadze elektronicznej trzeba wykonać, aby wykryć worek z fałszywymi monetami?

3. Jaś i Małgosia mają pozmywać, odkurzyć i zrobić pranie. Każdą z tych czynności może wykonywać jednocześnie tylko jedna osoba i każda zajmie jednej osobie godzinę. Ile co najmniej czasu zajmie im całe sprzątanie?

4. Mamy trzy zamknięte pudełka. W jednym są dwie niebieskie kulki, w jednym dwie czerwone, a w jednym – niebieska i czerwona. Na pudełka naklejono etykiety: 2N, 2C, NC, ale na żadnym pudełku nie znalazła się właściwa etykieta. Ile kulek trzeba obejrzyć, by móc uporządkować etykiety?

5. Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku. Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej, z powrotem zawsze ktoś musi ją przynieść. Wspólnie przez most mogą iść najwyżej dwie osoby i idą wtedy w tempie wolniejszej z nich. Pierwszej osobie pokonanie mostu zajmie 10 minut, drugiej 5, trzeciej 2, a czwartej 1 minutę. W jakim najkrótszym czasie wszystkie te osoby są w stanie przedostać się przez most?

„Rozwiązania”

R1. 3 dni: pierwszego dnia każdy rycerz pije z innych 100 beczek; jeden zzielenieje. Drugiego dnia każdy rycerz pije z 10 podejrzanych beczek, trzeciego każdy z jednej.

R2. 4 ważenia: najpierw ważymy jednocześnie 5 monet z 5 różnych worków i tym sposobem zawężamy grupę podejrzanych worków do 5. Następnie ważymy razem 2 monety z 2 spośród nich – zostają 2 lub 3 podejrzane worki. Dalej wystarczy zważyć pojedynczo jedną lub dwie monety.

R3. 2 godziny: Jaś robi dwie z rzeczy, a Małgosia trzecią.

R4. 3 kulki: jedną z pudełka NC, w którym muszą być dwie identyczne kulki (bo wiadomo, że etykieta jest zła), więc wystarczy sprawdzić kolor jednej z nich. Dodatkowo obie kulki z któregoś z pozostałych pudełek.

R5. 19 minut: najszybsza osoba po kolei przeprowadza każdą z pozostałych.

Rozwiązania

R1. 1 dzień: numerujemy beczki w systemie dwójkowym, czyli każdej przypisujemy inny 10-cyfrowy ciąg 0 i 1. Da się to zrobić, bo takich ciągów jest $2^{10} = 1024 > 1000$ (na każdym z 10 miejsc stoi 0 albo 1).

Każdy rycerz pije z tych i tylko tych beczek, których numery mają cyfrę 1 na jego miejscu, czyli np. z beczki podpisanej 0100010010 piją rycerze numer 2, 6 i 9 (zatem z każdej beczki pije inny podzbiór rycerzy).

Po dobie odczytujemy numer zaczarowanej beczki z kolorów rycerzy: jeśli np. zzielenieli rycerze 2, 6 i 9, to zaczarowana jest jedyna beczka, z której pili oni i tylko oni, a więc beczka numer 0100010010. □

R2. 1 ważenie: ważymy razem 45 monet – 1 z worka nr 1, 2 z worka nr 2, ..., 9 z worka nr 9. Jeśli są prawdziwe, ważą łącznie 450 gramów. Ostatnia cyfra wyniku wskazuje

numer worka z fałszywymi monetami, gdyż każda fałszywa moneta waży o 1 gram za dużo. □

R3. 1,5 godziny: Jaś pół godziny zmywa, a następnie odkurza przez godzinę. Małgosia najpierw przez godzinę robi pranie, a potem w pół godziny kończy zmywanie.

Szybciej się nie da – do wykonania są trzy godziny pracy na dwie osoby. □

R4. 1 kulka: z pudełka NC; założmy, że jest niebieska, czyli w tym pudełku są dwie niebieskie kulki. W pudełku 2C nie mogą być dwie niebieskie kulki (bo są już gdzie indziej) ani dwie czerwone (bo na etykiecie jest 2C). Zatem są w nim dwie różne kulki, a dwie czerwone kulki są w pudełku 2N.

0 kulek nie wystarczy – są dwa możliwe układy etykiet, w pudełku NC mogą być dwie czerwone kulki. □

R5. 17 minut (rozwiązanie opisano w *deltoidzie* 11/2014).