



SPIS TREŚCI NUMERU 8 (519)

Historia powstania, początki
i stan obecny Instytutu
Matematyki Stosowanej
i Mechaniki

Grzegorz Łukasiewicz,
Andrzej Palczewski

str. 1

Matematyka jest strukturą
świata?

Mirosław Lachowicz

str. 2

30 lat addytywnej metody
Schwarza

Piotr Krzyżanowski

str. 4

⊗ Pokaż im to!

Przemysław Biecek

str. 6

Równania chemotaksji
i wybuchy rozwiązań

Dariusz Wrzosek

str. 8

W co grają kraje,
eksploatując środowisko?

Agnieszka

Wiszniewska-Matyszkiewicz

str. 10

Co ma wspólnego bryła
Wulffa z płatkami śniegu?

Piotr Rybka

str. 11

Porządek w stochastycznym
świecie

Jacek Miękiś

str. 13

Opcje i greckie parametry

Piotr Kowalczyk,

Andrzej Palczewski

str. 14

Hydrodynamika a hydraulika

Grzegorz Łukasiewicz

str. 16

O rybach i ufnosci

Wojciech Niemirowicz

str. 17

 Zadania

str. 18

 Co po Dolly?

Magdalena Fikus

str. 19

Klub 44

str. 20

Prosto z nieba: Ciężkie czarne
dziury o masach gwiazdowych


str. 22

Niebo w sierpniu

str. 22


Aktualności

str. 24

 Środek
przeciwprostokątnej

Joanna Jaszewska

str. 25

 Warsaw Center
of Mathematics
and Computer Science

wcmcs.edu.pl

W kolejnym numerze: dlaczego sudoku jest trudne?

7		3	2	8				1
9						3		
	6			7			4	
	5	2	4					
3	1						8	4
					8	2	3	
		3			6		9	
			1					6
6				2	5	4		3

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia; rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

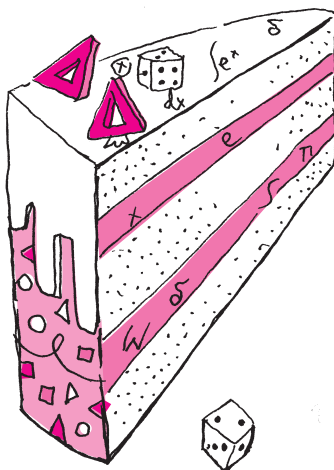
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Historia powstania, początki i stan obecny Instytutu Matematyki Stosowanej i Mechaniki

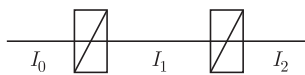
Grzegorz ŁUKASZEWICZ*, Andrzej PALCZEWSKI**

*Zakład Równań Fizyki Matematycznej
 **Zakład Matematyki Finansowej
 Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
 Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
 Uniwersytet Warszawski

Pisząc o prapoczątkach powstania IMSM, korzystaliśmy z wcześniejszych materiałów prof. Romana Dudy.



Rozwiązanie zadania F 933.
 Zgodnie z warunkami zadania $I_1/I_0 = k_1$, gdzie I_1 i I_0 – natężenia wiązki padającej i przechodzącej dla pierwszego polaryzatora.



Gdyby polaryzator nie pochłaniał światła, to natężenie wiązki spolaryzowanej byłoby równe połowie natężenia padającej wiązki niespolaryzowanej. To, że $k_1 < 1/2$ oznacza, że polaryzator częściowo pochłania światło. Jeżeli przepuszcza on, ze względu na pochłanianie, tylko k procent padającej wiązki, to $k_1 = k/2$. Gdy światło przechodzi przez dwa polaryzatory, to

$$k_2 = \frac{I_2}{I_0} = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{I_1}{I_0}$$

Aby obliczyć I_2/I_1 , skorzystamy z prawa Malusa, które mówi, że natężenia światła spolaryzowanego padającego na polaryzator I_p i z niego wychodzącego I_w związane są wzorem $I_w = I_p \cos^2 \phi$, gdzie ϕ jest kątem między płaszczyzną polaryzacji światła padającego i płaszczyzną polaryzacji polaryzatora. Dodatkowo musimy uwzględnić to, że także w drugim polaryzatorze światło jest pochłaniane. Mamy więc:
 $k_2 = k_1 k \cos^2 \alpha = 2k_1^2 \cos^2 \alpha$, a stąd
 $\cos \alpha = \sqrt{k_2/2k_1^2}$, co daje $\alpha = 30^\circ$.

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego obchodzi w tym roku 30-lecie swojego istnienia. Na łamach *Delty* chcemy opowiedzieć krótko o historii Instytutu, miejscu, jakie zajmuje w ramach Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, a także pokazać, jakimi problemami zajmują się dzisiaj jego pracownicy.

Pisząc o historii powstania Instytutu Matematyki Stosowanej i Mechaniki, należy cofnąć się do lat 1955/56, kiedy to na Wydziale Matematyki i Fizyki UW powstał Instytut Matematyki, a poza Instytutem Matematyki na Wydziale działały też od 1955 roku dwie katedry:

- Katedra Gazodynamiki i Hydrodynamiki, którą kierował prof. Julian Bonder;
- Katedra Teorii Sprężystości i Plastyczności, którą kierował prof. Witold Nowacki.

Powołanie tych katedr było nawiązaniem do przedwojennej tradycji katedry mechaniki prof. Przeborskiego i stało się początkiem rozwoju tego kierunku badań matematycznych.

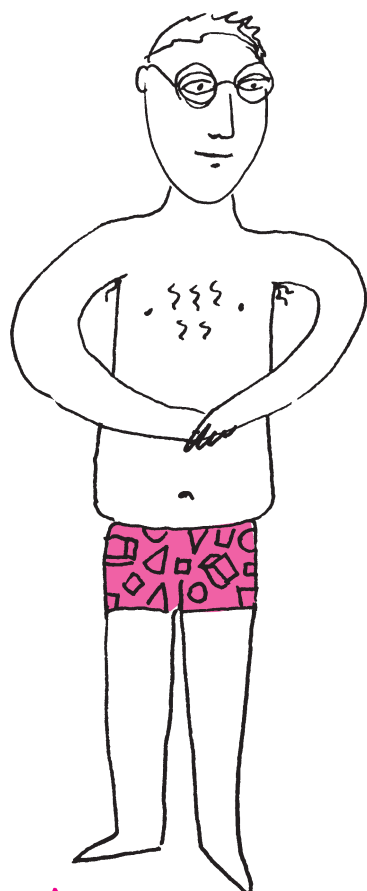
W 1968 roku Wydział Matematyki i Fizyki podzielił się na dwa wydziały, Wydział Fizyki oraz Wydział Matematyki i Mechaniki, ten ostatni złożony z dwóch instytutów: Matematyki oraz Mechaniki. W skład Instytutu Mechaniki weszły wspomniane wcześniej dwie samodzielne katedry. W 1970 roku nastąpiła likwidacja katedr, na których miejsce wprowadzono zakłady. Instytut Mechaniki miał więc dwa zakłady:

- Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów, w którym kierownictwo po prof. Bonderze przejął prof. Władysław Fiszdon;
- Zakład Mechaniki Ciała Stałego, w którym kierownictwo po prof. Nowackim przejął prof. Czesław Woźniak.

Już w pierwszej połowie lat 70. były oczekiwania rozszerzenia działalności Instytutu Mechaniki, np. w zakresie cybernetyki i biologii matematycznej. Stara kadra, mająca niewątpliwie poważny autorytet naukowy (profesorowie Nowacki, Fiszdon), a potem także profesorowie Woźniak i Olesiak, broniła się przed zmianami. W rezultacie w Instytucie panował stan wewnętrznych napięć: z jednej strony grupa mechaników „politechnicznych”, opierająca się na autorytetach starszych profesorów, z drugiej kilka osób, które przyszły z zewnątrz, dających nadzieję na zmiany. Były też napięcia zewnętrzne, gdyż Instytut Mechaniki był postrzegany jako słaby i niepasujący do reszty Wydziału.

W Instytucie Mechaniki wyraźny rozwój badań ściśle matematycznych nastąpił pod koniec lat 70., co wiązało się z przyjęciem do tego Instytutu prof. Adama Piskorka oraz z rozwojem badań nad modelami matematycznymi fizyki statystycznej (Miroslaw Lachowicz, Andrzej Palczewski, Tadeusz Płatkowski) i równaniem Naviera–Stokesa (Grzegorz Łukasiewicz). A w połowie lat 80. zaczął się dynamiczny rozwój zastosowań matematyki, zapoczątkowany uruchomieniem specjalności „zastosowania matematyki”. Inicjatywa wyszła od pracowników Instytutu Mechaniki (Andrzej Palczewski, Wiesław Szlenk), a dynamiczny rozwój zastosowań znalazł wyraz w przekształceniu Instytutu Mechaniki w Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki – właśnie 30 lat temu. W ramach przekształceń do nowego Instytutu został włączony Zakład Równań Fizyki Matematycznej z Instytutu Matematyki (Marek Burnat), a parę lat później dołączył Zakład Metod Numerycznych z Instytutu Informatyki (Andrzej Kielbasiński, Maksymilian Dryja, Henryk Woźniakowski).

Warto dodać, że poza strukturą instytutów Wydziału MIM w połowie lat 90. rozpoczął działalność dydaktyczną i naukową Zakład Matematyki Finansowej i Ubezpieczeniowej (Jacek Jakubowski, Piotr Jaworski, Karol Krzyżewski, Andrzej Palczewski), co oznacza nawiązanie do dawnych tradycji matematyki aktuarialnej w Warszawie i otwarcie na tę aktywnie rozwijającą się dziedzinę matematyki.



MODEL
MATE
MATY
CZNY

Początkowe, wizjonerskie działania zaowocowały wypracowaniem kierunków dalszych badań. W roku akademickim 1992/93 Instytut składał się z następujących zakładów (w nawiasach nazwiska kierowników zakładów):

- Zakład Analizy Numerycznej (prof. Henryk Woźniakowski);
- Zakład Mechaniki Ciała Stałego (prof. Zbigniew Olesiak);
- Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów (prof. Andrzej Palczewski);
- Zakład Równań Fizyki Matematycznej (prof. Adam Piskorek);
- Zakład Metod Probabilistycznych i Optymalizacji (prof. Wiesław Szlenk);
- Zakład Modeli Matematycznych Fizyki Technicznej (prof. Marek Niezgódka).

Na podkreślenie zasługują działania profesorów Marka Niezgódki (wicedyrektor w latach 1990–1993) i Wiesława Szlenka (wicedyrektor w latach 1993–95), którzy wprowadzili do Instytutu ducha badań interdyscyplinarnych i szeroko pojętego modelowania matematycznego. Istotnym wydarzeniem lat 90. było powstanie Zakładu Statystyki Matematycznej. Było to odrodzenie (po ponad 30 latach przerwy) badań w dziedzinie statystyki matematycznej na Wydziale MIM.

Zmiany kadrowe w drugiej połowie lat 90. doprowadziły do zmiany struktury Instytutu. W efekcie mamy obecnie następujące zakłady (w nawiasach nazwiska zatrudnionej kadry profesorskiej):

- Zakład Analizy Numerycznej (Leszek Plaskota, Henryk Woźniakowski);
- Zakład Biomatematyki i Teorii Gier (Miroslaw Lachowicz, Jacek Miękiś, Tadeusz Płatkowski);
- Zakład Równań Fizyki Matematycznej (Piotr Gwiazda, Grzegorz Łukaszewicz, Piotr Mucha, Andrzej Palczewski, Piotr Rybka, Dariusz Wrzosek);
- Zakład Statystyki Matematycznej (Wojciech Niemirow).

Obecny Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki jest silnym naukowo instytutem prowadzącym zaawansowane badania w zakresie dziedzin, które należą do obszaru zainteresowań działających w Instytucie zakładów. IMSM realizuje swoje badania, współpracując intensywnie z wieloma poważnymi ośrodkami w kraju i za granicą, a wyniki badań są publikowane w renomowanych czasopismach o międzynarodowym zasięgu.

Dla zapoznania się z badaniami i dydaktyką Instytutu Matematyki Stosowanej i Mechaniki zapraszamy do odwiedzenia strony internetowej Instytutu

imsm.mimuw.edu.pl

$$\frac{\partial x}{\partial t} \oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad \frac{\partial y}{\partial t} \quad H_{\lambda}^{\Phi} = \sum_{\nu \in I} \Phi_{\nu} \quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

Matematyka jest strukturą świata?

Miroslaw LACHOWICZ*

Matematyk, profesor Andrzej Lasota (1932–2006), w krótkim artykule

o **A. Lasota**, *Wprowadzenie do dyskusji: matematyka a filozofia*, w *Otwarta nauka i jej zwolennicy*, OBI, Kraków 1996, 51–61

stwierdził: ... wierzę, że matematyka jest strukturą świata. Nie opisem tej struktury, ale samą strukturą. Bez wątpienia matematyk może tworzyć bardzo dziwne obiekty i może mu się wydawać, że daleko odbiegł od rzeczywistości. To tylko pozór. Jeśli jest to dobra matematyka, to okaże się prędzej czy później, że jest ona fragmentem rzeczywistości. ... Gdyby świat był inny, to byłaby inna matematyka.

*Zakład Biomatematyki i Teorii Gier, IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski

Podobne zdanie ponad 150 lat wcześniej wygłosił J.-B.J. Fourier (1768–1830):

matematyka jest nie tylko językiem lub techniką odseparowaną od przyrody, ale jej istotą.

Matematyka we współczesnej nauce wydaje się najdoskonalszym i niezawodnym środkiem opisu. Wprawdzie w przypadku wielu zjawisk przyrodniczych – lub społecznych – dalecy jesteśmy od zadowalającego opisu matematycznego, jednak liczba niewątpliwych sukcesów jest znaczna. Dlaczego tak się dzieje? Jest to pytanie, z którym zmagają się wielu naukowców. W słynnym artykule

o **E.P. Wigner**, *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, Zagad. Filozof. w Nauce, XIII, OBI, Kraków 1991, 5–18

laureat Nagrody Nobla z fizyki, Eugen P. Wigner, stwierdza, że jest to rodzaj cudu, którego ani nie rozumiemy, ani nań nie zasługujemy. Zwolennicy ewolucyjnej teorii poznania z kolei uważają, że nie ma w tym żadnego cudu (oczywiście!), lecz ewolucyjne przystosowanie do świata. Matematyka – wytwór naszego umysłu – jest ewolucyjnie uwarunkowanym przystosowaniem. Zatem matematyka się sprawdza, bo sprawdzać się musi.

Problem ten, oczywiście, nie może być rozstrzygnięty, jak każdy (poważny) problem filozoficzny.

Matematyka sprawdziła się w opisie zjawisk fizycznych i nie jest dziwne, że staramy się rozszerzyć jej możliwości na zjawiska biologiczne, medyczne, psychologiczne czy społeczne. Jakże byłoby pięknie, gdyby zamiast męczyć pacjenta, lekarz mógł, poprzez analizę odpowiedniego układu dynamicznego, dokładnie określić najwłaściwszą terapię. Świat medyczny od razu uspokoję – analizę przeprowadzałyby matematyk (i komputer).

Na razie odlegli jesteśmy od takich możliwości. Prof. Lasota wręcz stwierdził (fakt, że ponad 20 lat temu!): *Próby zastosowania matematyki do opisu zjawisk społecznych są kompromitacją, a do opisu układów biologicznych przedsięwzięciem ponad siły matematyków.* Jednakże są sukcesy! Wymienię trzy osiągnięte przez matematyków polskich.

1) Praca M. Ważewskiej-Czyżewskiej (lekarzki) i Andrzeja Lasoty (wspomnianego wyżej matematyka)

o **M. Ważewska-Czyżewska, A. Lasota**, *Matematyczne problemy dynamiki układu krwinek czerwonych*, Mat. Stos. 6, 3, 1976, 23–40;

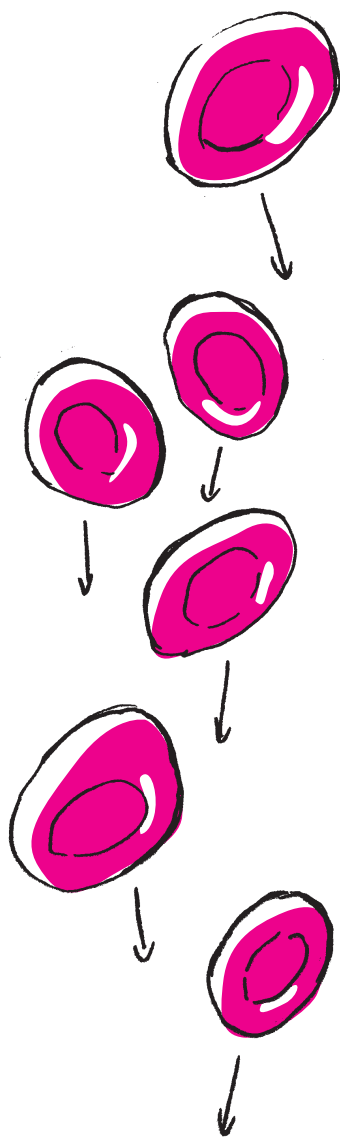
która, oparta na mocno niebanalnej matematyce (A. Lasota!), dawała szansę opracowania nowej terapii anemii pobiałaczkowej.

2) Wieloletnia współpraca grupy Andrzeja Świerniaka z Politechniki Śląskiej z grupą z Centrum Onkologii w Gliwicach, przy współudziale Marka Kimmla z Rice University w Houston. Efektem tej współpracy były zarówno prace o charakterze teoretycznym, jak i prace dotyczące biologii nowotworów. Dają one, w sposób bezpośredni, nowe możliwości terapii przeciwnowotworowej.

3) Na koniec nieskromnie wymienię warszawską grupę WarsawBiomatTeam, która dwukrotnie brała udział w sieciach zorganizowanych w ramach projektów europejskich poświęconych modelowaniu oddziaływania nowotworów z układem odpornościowym.

Podsumowując: to, czy matematyka skutecznie będzie mogła spełniać tę rolę, którą spełnia w fizyce, w takich dziedzinach jak biologia, medycyna, psychologia i nauki społeczne – decyduje się teraz. Idealna sytuacja dla ambitnego młodego człowieka, który chce zajmować się rzeczami wielkimi i pójść w ślady Keplera, Kopernika, Newtona i Einsteina.

www.obi.opoka.org/
zfn/013/zfn01301Wigner.pdf



Informacje na temat projektu
prowadzonego w Gliwicach przy
współudziale Politechniki Śląskiej można
znaleźć na stronie:
www.biofarma.polsl.pl/index.php/pl/
www.mimuw.edu.pl/~biolmat/

30 lat addytywnej metody Schwarza

Piotr KRZYŻANOWSKI*

*Zakład Analizy Numerycznej, IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski

Gotów jestem założyć się, Czytelniku, że wcześniej o niej nie słyszałeś. Tymczasem pod tą mało medialną nazwą kryje się metoda, dzięki której współczesne superkomputery pracują pełną parą, prowadząc skomplikowane symulacje. Łączy ona w sobie algorytmiczną efektywność z fizyczną intuicją, a bez wglądu w jej matematyczny sens, być może, nigdy byśmy jej nie poznali.

Miliony niewiadomych wokół nas

Każdy wie, jak rozwiązywać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi, np.

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 2y = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie układu trzech czy czterech równań również nie powinno sprawiać większego kłopotu – wszak łatwo sprowadzić go do rozwiązywania układu/układów dwóch równań. Ale jeśli musielibyśmy rozwiązać... układ miliona równań, z tyluż niewiadomymi?!

Skąd biorą się tak wielkie układy?

Precyzyjna prognoza pogody, wycena niektórych egzotycznych opcji finansowych, modelowanie wzrostu komórek nowotworowych lub rozwoju epidemii, projektowanie ultranowoczesnych kosmetyków, rozwój tanich żarówek LED, czy samochodów o niskiej emisji – te przykłady można mnożyć – są uzależnione od możliwości przeprowadzenia złożonych symulacji komputerowych modeli matematycznych sformułowanych w języku *równań różniczkowych cząstkowych*.

Aby rozwiązywać takie równania na komputerze, zwykle przybliża się je za pomocą zestawu wartości na siatce punktów (lub, w *metodzie elementu skończonego*, przez zestaw prościutkich elementów). Jest intuicyjnie jasne, że jeśli chcemy mieć dokładniejszy wynik, musimy wziąć pod uwagę więcej punktów siatki, czyli wyznaczyć więcej wartości. Niestety, gdy modelowany obiekt jest trójwymiarowy, liczba potrzebnych punktów szybko rośnie: już dla zwyczajnej sześcienniej kostki wzięcie zaledwie 100 punktów w każdym kierunku daje w rezultacie $100 \cdot 100 \cdot 100$, czyli milion punktów, a tym samym – milion wartości do wyznaczenia!

Dziesiątki tysięcy procesorów w szafie

Trudne zadanie obliczeniowe wymaga dostatecznie silnego komputera – najlepiej: komputera równoległego – czyli takiego, który składa się z wielu jednocześnie pracujących procesorów. Współczesna technologia przenosi równoległość także na poziom samego procesora, umieszczając w jednym procesorze kilka jednocześnie pracujących rdzeni obliczeniowych.

Jednak co innego mieć potencjał obliczeniowy, a co innego móc go efektywnie wykorzystać. Sytuacja jest podobna jak w ogrzonym zadaniu o kopaniu studni: jeśli jeden robotnik kopie studnię w 10 godzin, to w jakim czasie wykopie ją dwóch? A stu? A dziesięć tysięcy??? No właśnie... rzecz w tym, że wcale nie jest łatwo zrównoleglić zadanie kopania wąskiej studni. Dokładnie ten sam problem mamy w obliczeniach numerycznych na wielkich komputerach: aby mogły w pełni wykorzystać swoje możliwości, metoda kopania studni musi być *bardzo* specyficzna – albo zadanie musi być inne.

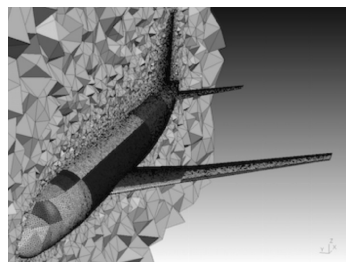
W niektórych przypadkach faktycznie łatwo sobie wyobrazić, jak można *dobrze* podzielić zadanie. Na przykład, wyznaczając rozkład naprężeń w napędzie roweru, lub temperatury we wchodzącym w atmosferę statku kosmicznym, wystarczy podzielić obiekt na mniejsze części i w każdym kawałku niezależnie znaleźć rozkład temperatury. Takie podejście nazywa się w numeryce **dekompozycją obszaru**.

Jednak w tym rozumowaniu jest haczyk: żeby znaleźć temperaturę wewnątrz każdego kawałka, trzeba też znać temperaturę na jego brzegu... A skoro dla

Konkret? Jedno z najbardziej podstawowych równań fizyki, równanie dyfuzji (opisujące np. rozkład temperatury), jest równaniem różniczkowym:

$$\partial_t u(t, x) - \Delta_x u(t, x) = f(t, x).$$

Z wyjątkiem kilku przypadków możemy je rozwiązać tylko w sposób przybliżony, na komputerze.



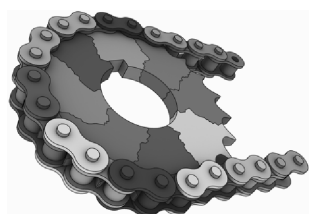
Rozkład naprężeń w kadłubie samolotu poznamy tym lepiej, im gęstsza będzie siatka punktów. (gms.h.info).

Najmocniejszy komputer na świecie – chiński Sunway TaihuLight – ma ponad 10 milionów rdzeni obliczeniowych, zamkniętych w 40 tysiącach procesorów, co daje nieprawdopodobną moc obliczeniową, wynoszącą maksymalnie 100 petaflopów (czyli 10^{17} działań arytmetycznych na sekundę).

Dla porównania, najmocniejszy komputer w Polsce znajdujący się w Krakowie, ma około 55 tysięcy rdzeni i moc około 2 petaflopów.

Dane z XI 2016, zob. www.top500.org.

O superkomputerach pisaliśmy w *Delcie* 7/2017.



industry.it4i.cz

Problemem jest wykazanie *istnienia* rozwiązania równania Laplace'a w obszarze o skomplikowanym kształcie. Oto zastosowanie **naprzemiennych metody Schwarza** dla dwóch obszarów: rozwiązujemy na przemian równanie, raz w pełnym kole, raz w całym prostokącie, za każdym razem uwzględniając brzegowe wartości rozwiązania z sąsiedniego obszaru. Zakładka (część wspólna obszarów) jest biała. Zbieżność naprzemiennych metody Schwarza w ogólnym przypadku udowodnił P.L. Lions, późniejszy laureat medalu Fieldsa.



Nazwa tej metody: **addytywna metoda Schwarza**, pochodzi stąd, że *dodajemy* wszystkie kawałki poprawki rozwiązania. Dociekliwy Czytelnik domyśli się, że dodawanie odbędzie się tylko na zakładkach, więc w dużym stopniu równoległe.

W ten sposób najkosztowniejsza część metody – rozwiązywanie równania na kawałkach – może wykonać się *w pełni* równoległe. Odwaga podejścia Dryji i Widlunda polegała na tym, że tak pomyślana iteracja nie musi być zbieżna do dokładnego rozwiązania, jednak... to nic nie szkodzi. Bo nie będzie wykorzystana wprost do rozwiązywania równania, tylko jako potężny akcelerator dla innej, prostej (i zazwyczaj bardzo wolno działającej) metody. Sprytnie łącząc ze sobą dwie metody iteracyjne: wcale nie zbieżną oraz kiepsko zbieżną, otrzymali – co zostało udowodnione w wymienionym wcześniej raporcie – metodę zbieżną, i to bardzo szybko.

Trzeba działać i lokalnie, i globalnie

W tej beczce miodu jest łyżka dziegciu, z czego już wtedy zdawali sobie sprawę Dryja i Widlund – i od razu podali sposób jej neutralizacji. Znow łatwiej będzie nam odwołać się do fizycznej intuicji.

Rozważmy długi pręt, który podgrzewamy na jednym z końców. Gdy podzielimy pręt na K małych, zachodzących na siebie kawałków i będziemy prowadzić iterację addytywnej metody Schwarza, to informacja o tym, że pierwszy kawałek jest podgrzewany, dotrze do ostatniego dopiero po K iteracjach – a przecież podgrzewanie pręta z jednego końca zmienia jego temperaturę wszędzie. Dlatego można spodziewać się – i faktycznie tak jest – że nasza metoda będzie działać tym gorzej, im więcej będzie kawałków, na które podzielimy interesujący nas obiekt: bo wymiana informacji między odległymi od siebie kawałkami będzie wymagać coraz więcej czasu.

Lekarstwem jest dodanie (w końcu to metoda *addytywna*...) mechanizmu przyspieszającego transfer informacji – choćby mało dokładnej – o zachowaniu

przecinających się kawałków przyjmuje te same wartości, to – na pierwszy rzut oka – uniemożliwia niezależne wyznaczenie temperatury na każdym z nich.

Na szczęście jest kilka sposobów ominięcia tej trudności; jeden został zaproponowany w 1869 roku (rzecz jasna, w zupełnie innym kontekście) przez niemieckiego matematyka, Hermanna Schwarza: zamiast poszukiwać rozwiązania wprost, należy do skutku je poprawiać, wielokrotnie powtarzając (czyli, mówiąc fachowo, *iterując*) ten sam schemat, który obecnie nazywamy naprzemienną metodą Schwarza (obok znajduje się jej opis).

Dwóch panów z ołówkami

Stosując naprzemienną metodę Schwarza i rozwiązując zadanie na kolejnym sąsiednim kawałku, należy uwzględnić świeżo wyznaczone wartości z poprzednich kawałków: tylko wtedy taka iteracja będzie zbieżna. To jednak nie pozwala szukać rozwiązań na *wszystkich* kawałkach jednocześnie – i tym samym poważnie psuje równoległość algorytmu...

Przełom przyszedł w 1987 roku, gdy w raporcie Courant Institute dwóch matematyków: Maksymilian Dryja z Uniwersytetu Warszawskiego i Olof Widlund z Uniwersytetu Nowojorskiego, zaproponowało zaskakujące uproszczenie metody.

Rozwiązujemy zadania we *wszystkich* kawałkach *jednocześnie*, a wartości na zakładkach bierzmy po prostu z *poprzedniej* iteracji! Na zakończenie każdej iteracji kawałki rozwiązania sklejamy, *dodając* poprawki.

się rozwiązywania w każdym z kawałków obiektu. Jest to konieczne, o ile chcemy zachować efektywność metody także wtedy, gdy obiekt zostaje podzielony na dziesiątki tysięcy części, z których każdą będziemy rozwiązywać na innym procesorze.

Jeśli Cię zaciekała ta *historia*, więcej o rozwoju metod Schwarza możesz przeczytać w przeglądowym, lecz technicznym artykule Martina Gandra i Gerharda Wannera *The Origins of the Alternating Schwarz Method*; www.unige.ch/~gander/preprints.php

Konstrukcja tego mechanizmu nie zawsze jest oczywista i mimo że przez ostatnich 30 lat wiele w tej sprawie już zrobiono, na horyzoncie wciąż pojawiają się nowe pytania – także dlatego, że zmienia się architektura komputerów równoległych i zmieniają się zadania, jakie chcemy rozwiązywać.

Liczba niewiadomych wciąż rośnie

Choć w roku, kiedy metodę wymyślono, za *masywnie* równoległy uważano każdy komputer, który miał aż(!) 16 procesorów, dziś addytywna metoda Schwarza pozwala rozwiązywać jedne z najtrudniejszych problemów obliczeniowych, gdy rutynowo uruchamia się symulacje na komputerach mających tysiące procesorów.

Nieprzypadkowo nagrodę Gordona Bella za rok 2016 (zob. awards.acm.org/bell) przyznano za przeprowadzenie na największym komputerze świata, Sunway TaihuLight, symulacji na potrzeby prognozowania pogody, wymagającej rozwiązywania układów równań zawierających aż 770 *miliardów* niewiadomych. Jej jądrem obliczeniowym była... (w wersji RAS, która dodatkowo ogranicza komunikację między procesorami) właśnie addytywna metoda Schwarza.

To oczywisty dowód na to, że nasza trzydziestolatka jest wciąż pełna wigoru!



mała delta

Więcej o technikach prezentowania danych można przeczytać w zbiorze esejów biecek.pl/Eseje.

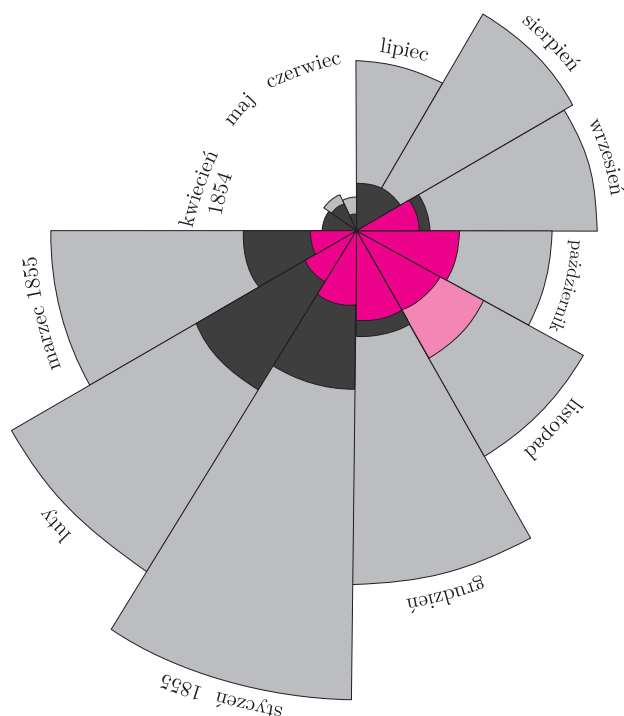
Pokaż im to!

Są takie problemy, w których najtrudniejsze jest znalezienie rozwiązania. Do tej klasy należy wiele zagadek matematycznych. Gdy już znajdziemy rozwiązanie, mamy całą maszynę pozwalającą na sprawdzenie, czy jest ono poprawne. Są jednak takie problemy, w których znalezienie rozwiązania to dopiero połowa drogi. Druga połowa, często trudniejsza, to przekonanie innych osób do przyjęcia rozwiązania. To dosyć częsta sytuacja w przypadku wyników analizy danych. Jak sobie z tym problemem radzić?

Zobaczmy, co zrobiła Florence Nightingale (1820–1910), pielęgniarka-statystyk. W czasach Florence pielęgniarka to nie było zajęcie dla wykształconych panien z dobrego domu. Ale Florence była upartą kobietą i nie zważała na opinie rodziny. W wieku 33 lat pojechała jako pielęgniarka na wojnę krymską, opiekowała się rannymi żołnierzami, a jej zaangażowanie sprawiło, że wśród chorych zaczęły krążyć o niej opowieści. *The Lady with the Lamp* – kobieta z lampą, takie przyłgnęło do niej określenie, ponieważ wieczorami z lampą robiła obchody, sprawdzając, czy niczego nie potrzeba rannym i chorym.

Pracując z rannymi, zauważyła, że więcej żołnierzy ginie w szpitalach z powodu niedożywienia, osłabienia i innych dolegliwości niż z powodu odniesionych ran. Jej zdaniem, wielu zgonów można by uniknąć, gdyby rannym zapewnić odpowiednią opiekę i wyżywienie. Zebrała dane, przygotowała raport i wysłała przełożonym. Niestety, w jej czasach panowało przekonanie, że losem żołnierza jest śmierć na froncie, a nie ciepła zupa w szpitalnym łóżku. Na rządzących nie robiły wrażenia tabelki z wyliczeniami, ilu to zgonom można by zapobiec przy lepszej opiece w połowach szpitalach.

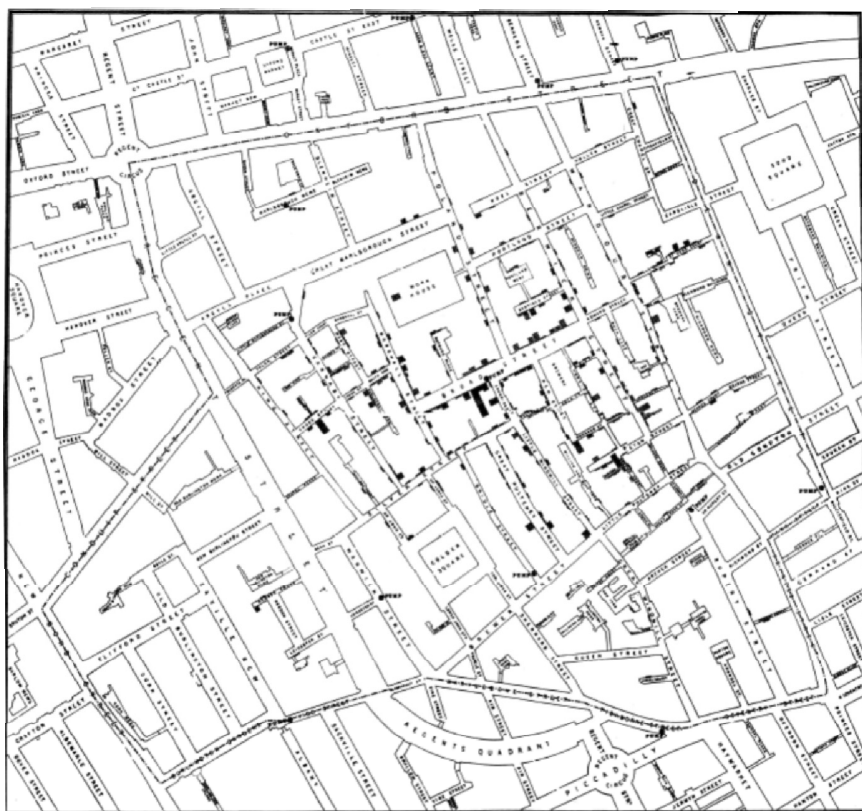
Ale jak już wiemy, Florence była uparta i nie zrażała się szybko. Opracowała wykres nazywany *różą Nightingale*, pokazujący ilukrotnie więcej ludzi umiera z przyczyn, które można by powstrzymać przy lepszej opiece. Wykres miał dużo silniejszą siłę przekazu niż tabela, sugestywnie doprowadził do zmian w finansowaniu szpitali polowych. Lepsze warunki w szpitalach ocaliły tysiące ludzkich istnień. Florence nazywana jest dzisiaj matką współczesnego pielęgniarstwa, jako pierwsza kobieta otrzymała brytyjski Order Zasługi, a medal Florence



Róża Nightingale: długości płatków, licząc od środka wykresu, odpowiadają liczbie zgonów w kolejnych miesiącach. Kolor – od ran wojennych, szary – choroby wyliczalne przy lepszej opiece w szpitalu, czarny – inne przyczyny. Lepsza opieka szpitalna zapobiegłaby ponad połowie zgonów.

Nightingale jest od ponad 100 lat najbardziej prestiżowym odznaczeniem dla pielęgniarzek.

Przypadek Florence Nightingale nie jest ani odosobniony, ani nawet pierwszy. Jedną z najbardziej znanych grafik statystycznych jest mapa opracowana przez ojca epidemiologii Johna Snowa (1813–1858). Osią tej historii jest epidemia cholery w 1854 roku w londyńskiej dzielnicy Soho. Epidemia wywołała taką panikę, że z Londynu uciekła jedna trzecia mieszkańców.

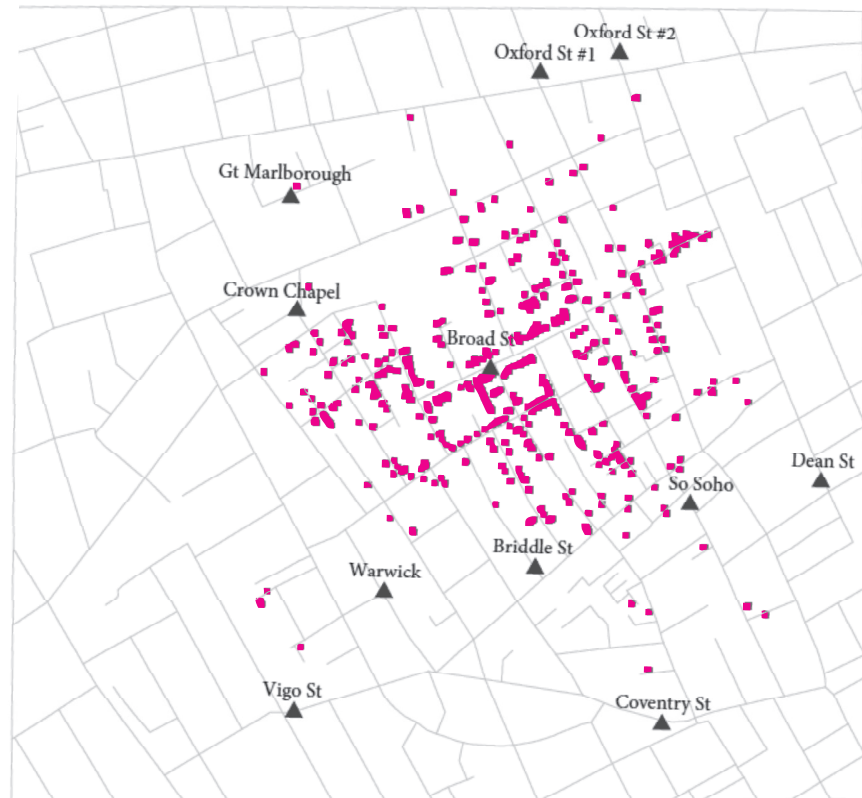


W tamtych czasach panowało powszechne przekonanie, że zarazki rozchodzą się przez zakażone powietrze. John Snow odwiedzał rodziny zmarłych na cholere i zbierał szczegółowe wywiady, gdzie chorzy pracowali, co jedli, skąd brali wodę. Na podstawie zebranych danych postawił hipotezę, że źródłem zarazy nie jest powietrze. Postulował, że choroba przenosi się przez zakażoną wodę. Dowodził, że źródłem zarazy jest ujęcie wody przy Broad Street. Dla jemu współczesnych takie przypuszczenie było niewiarygodne. Zaraza przenoszona przez wodę? Teorię zarazków rozwinął Louis Pasteur dopiero siedem lat później. A więc co zrobił John Snow, aby zwrócić uwagę na zagrożenie, jakim było ujęcie wody?

Przygotował mapę przedstawiającą miejsce zamieszkania ofiar epidemii oraz lokalizację ujęć wody. Związek jednego z drugim jest tak silny, że na wszelki wypadek władze dzielnicy zamknęły wskazane ujęcie wody, co zbiegło się z zakończeniem epidemii. Później udało się ustalić, że do ujęcia wody zarazki przeniknęły z pobliskiego szamba. Szybko rosnąca liczba mieszkańców Soho doprowadziła do niewydolności kanalizacji, wylewania nieczystości do rzeki i innych zachowań, niewyobrażalnych z punktu widzenia dzisiejszej wiedzy o higienie.

John Snow jest dziś uważany za ojca współczesnej epidemiologii. Podobnie jak w przypadku Florence Nightingale dokonał odkrycia, które stało się przełomowe dla jego dziedziny. W obu przypadkach początkowo te odkrycia spotkały się z dużą nieufnością. W obu przypadkach przemyślana prezentacja graficzna danych przekonała szerszą grupę odbiorców do racji odkrywców.

0 100 m



Mapa opracowana przez Johna Snowa i reprodukcja wykonana w programie R. Kolorowe kropki to miejsce zamieszkania ofiar epidemii, w samym środku jest ujęcie wody na Broad Street

*Małą Deltę przygotował Przemysław BIECEK**

*Zakład Statystyki Matematycznej, IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski

Równania chemotaksji i wybuchy rozwiązań

Dariusz WRZOSEK*

*Zakład Równań Fizyki Matematycznej, IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski

Przykładowym obiektem może być wybrany osobnik jakiejś populacji, a jako stan obiektu można wybrać masę ciała. Innym przykładem obiektu może być planeta, a stanem jej odległość od Słońca.

Na przykład zmiana prędkości, czyli przyspieszenie określające ruch planety, jest w klasycznej mechanice proporcjonalna do siły zależnej od położenia, czyli stanu planety.

W tym przypadku stanem procesu określającego rozmieszczenie komórek w naczyniu w danej chwili jest właśnie funkcja rozkładu gęstości, a proces, który nas interesuje, określa, jak taka funkcja gęstości zmienia się w czasie.

Jako przykłady można podać klucze ptaków wędrownych, ławice ryb czy agregacje komórek bakteryjnych na szalkach Petriego.

o C.S. Patlak, Random walk with persistence and external bias, *Bull. Math. Biophys.* (1953) 15, 311–338.
o E.F. Keller, L.A. Segel. Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as Instability, *J. Theor. Biol.* (1970) 26, 399–415.

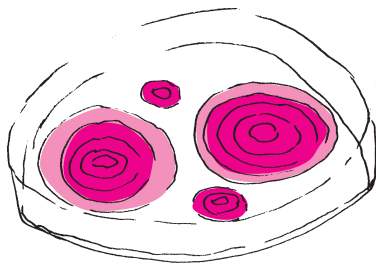
Wszystko to po to, aby się przemieścić, uformować coś na kształt kolumny, której szczyt wypełniony jest zarodnikami. Dalszy los śluzowca łatwo przewidzieć, wyniesione zarodniki rozwiewa wiatr i przenosi je w miejsce bardziej zasobne w pokarm.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Delta u(x, t) - \operatorname{div}(\chi u(x, t) \nabla v(x, t)),$$
$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \Delta v(x, t) + u(x, t) - v(x, t),$$

gdzie $x \in \Omega$, $t > 0$ to czas, Δ to operator dyfuzji, a $\chi > 0$ parametr określający intensywność chemotaksji. Układ uzupełniamy o warunek początkowy dla $t = 0$ oraz warunek izolacji na brzegu obszaru Ω .

Patrząc z bardzo ogólnego punktu widzenia, całą obserwowalną przyrodę ożywioną i nieożywioną można przedstawić jako wzajemnie powiązane procesy, czyli funkcje, które chwilom przyporządkowują stany różnych obiektów wyrażone poprzez wartości liczbowe. Aby przewidywać przebieg różnych procesów, tworzy się modele matematyczne, które określają w każdej chwili zmiany stanów procesów w zależności od samych stanów. Matematycznie zmianę funkcji opisuje jej pochodna (różniczka), która określa, jak wielkie są przyrosty ewentualnie spadki wartości funkcji w krótkich przedziałach czasu. Równania, których rozwiązaniami są owe procesy przyjmujące jakieś zadane stany początkowe, to równania różniczkowe zwyczajne. W zasadzie wszystkie prawa fizyki można zapisać w postaci układów równań różniczkowych. Wiele modeli biologicznych także daje się przedstawić w postaci układów równań różniczkowych. W tym miejscu trzeba podkreślić, że stany obiektów mogą być tylko w najprostszych przypadkach charakteryzowane za pomocą liczb rzeczywistych. Jest tak, na przykład, gdy obiektem naszych zainteresowań jest populacja komórek znajdujących się w jakimś naczyniu w wodnym roztworze, i interesuje nas, ile komórek znajduje się w jednostce objętości, np. mililitrze wody zaczerpniętej z tego naczynia. Jeśli jednak komórki w naczyniu są rozmieszczone nieregularnie, tak że ich lokalne zagęszczenia w różnych miejscach są różne, to wtedy stan takiej populacji w danej chwili lepiej oddaje funkcja określająca rozkład przestrzenny gęstości komórek w całym naczyniu, a nie liczba, która jest średnią wartością gęstości. By opisać tego typu procesy, stosuje się równania różniczkowe cząstkowe, zawierające pochodne cząstkowe funkcji, które określają, jak bardzo funkcja zmienia się w kierunkach wyznaczonych przez osie układu współrzędnych.

Bardzo wiele modeli matematycznych konstruuje się w celu wyjaśnienia powstawania różnych form i kształtów powstających z żywych organizmów tworzących grupy. Tego typu efekty uważa się za przejawy samoorganizacji, ale nie ma w tym nic metafizycznego i wiele z tych zjawisk można zrozumieć poprzez badanie nieliniowych modeli matematycznych. Jednym z takich modeli, który od ponad 50 lat z różną intensywnością przyciąga uwagę matematyków, jest układ Patlaka–Kellera–Segela opisujący zjawisko chemotaksji, powszechnie występujące w przyrodzie. Taksja to ukierunkowany ruch organizmu żywego w kierunku jakiegoś źródła sygnału. Jeśli źródłem jest światło – mówimy o fototaksji, jeśli jakiś związek chemiczny – mamy do czynienia z chemotaksją. Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy ów sygnałowy związek chemiczny, zwany atraktantem, ukierunkowuje ruch tych samych indywiduów, które są zdolne do jego emisji. Najbardziej znanym organizmem, u którego zaobserwowano tego typu efekt, jest *Dictostelium discoideum*, śluzowiec, który w warunkach dostatecznej obfitości związków odżywczych żyje w postaci osobnych komórek. Spadek poziomu związków odżywczych uruchamia, oparty o chemotaksję, proces gromadzenia się komórek i tworzenia agregatów zawierających nawet po kilkaset komórek, które po pewnym czasie różnicują się do tego stopnia, że ów agregat komórkowy nabiera cech autonomicznego organizmu przypominającego pelzającego ślimaka. Nas jednak interesuje początek tego złożonego procesu – powstawanie agregatów i tu z pomocą przychodzi model Patlaka–Kellera–Segela. Jest to układ dwóch równań różniczkowych cząstkowych, który omówimy, wskazując, co opisują poszczególne jego człony. Pierwsze równanie opisuje zmiany w czasie gęstości komórek u wywołane przez swobodną dyfuzję oraz ruch w kierunku wzrastającej gęstości atraktanta. Drugie równanie opisuje dyfuzję atraktanta v , jego degradację oraz, przede wszystkim, jego emisję przez komórki. Rzecz jasna tam, gdzie jest więcej komórek, tam większa emisja atraktanta, a więc silniejszy sygnał wskazujący kierunek ruchu dla pozostałych komórek.



W tym miejscu zaczyna się matematyka. Dodajmy tylko, że poszukujemy takich par funkcji (u, v) określonych na tym samym obszarze Ω , które są rozwiązaniami tego układu równań oraz spełniają warunek całkowitej izolacji, tzn. przez brzeg zbioru Ω nic nie wpływa ani nie wypływa. (Zatem całkowita masa komórek jest stała i równa masie początkowej.) Zgodnie z oczekiwaniami istnieją takie rozwiązania tego układu, które reprezentują wzrost gęstości komórek w otoczeniu określonych punktów zbioru Ω – to są właśnie te agregaty, których tworzenie chcemy opisać, ale rozwiązania okazują się mieć zdumiewające własności. Jeśli obszar Ω jest odcinkiem, to rozwiązania określone są dla wszystkich czasów $t > 0$ i dążą do stanów równowagi. Jeśli początkowo w okolicy pewnego punktu gęstość komórek była dostatecznie duża, będzie ona wzrastać, aż do utworzenia w tym miejscu wąskiej wysokiej górkę o wygładzonym szczycie. Jeśli początkowo nie było dostatecznie dużych skupisk komórek, dyfuzja wygrywa i gęstości u i v dążą do funkcji stałych, niwelując po drodze wszystkie górkę i dołki gęstości. Sytuacja zmienia się radykalnie, gdy zbiór Ω jest podzbiorem płaszczyzny lub przestrzeni trójwymiarowej. Można udowodnić, że w przypadku podzbioru płaszczyzny los rozwiązania zależy od masy początkowej komórek. Jeśli jest zbyt duża, to rozwiązanie „żyje” jako funkcja o wartościach rzeczywistych do pewnej chwili wyznaczającej maksymalny czas istnienia T_{MAX} , zależny od danych początkowych. Co się dzieje? Formuje się taka wąska, coraz wyższa górkę, ale jej szczyt, początkowo wygładzony, staje się coraz ostrzejszy, gdy czas zbliża się do T_{MAX} , aż przestaje być funkcją o wartościach rzeczywistych. Ale czy to naprawdę koniec? Tak, w pewnym sensie doszliśmy do kresu stosowności naszego modelu, a efekt, który tu opisujemy, nazywa się nawet wybuchem rozwiązania użytym w tytule tego artykułu. Matematyka jednak przekracza granice naszej wyobraźni, ukazując szerszą klasę rozwiązań, które wprawdzie nie są funkcjami o wartościach rzeczywistych, ale wciąż są funkcjami czasu o wartościach w szerszym zbiorze, zwanym przestrzenią miar. Ale wróćmy do naszego układu równań Patlaka–Keller–Segela. Dlaczego efekt wybuchu rozwiązań tego samego układu równań nie występuje nigdy w przypadku jednowymiarowej dziedzi, ale może występować w przypadku dwóch lub trzech wymiarów? Bez skomplikowanej analizy dostępnej dla specjalistów trudno to wyjaśnić, ale można spekulować, że jest to jakoś związane z tym, że osobliwość będąca przyczyną wybuchu w dwuwymiarowej przestrzeni ma istotnie więcej miejsca do uformowania się niż w przypadku jednowymiarowym.

Miary to też funkcje, ale określone na pewnym zbiorze podzbiorów zbioru Ω . Wtedy jednak definicję rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych trzeba, oczywiście, przeformułować. To trochę tak jak z szukaniem pierwiastków funkcji kwadratowej o współczynnikach rzeczywistych tylko wśród liczb rzeczywistych. Dobrze wiadomo, że dopiero rozszerzenie koncepcji rozwiązania i przyjęcie pojęcia liczb zespolonych daje możliwość znalezienia wszystkich rozwiązań.



Rozwiązanie zadania M 1538. Każdy ciąg dodatnich liczb całkowitych

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k),$$

których suma jest równa n , nazwiemy *kompozycją* liczby n .

Zauważmy, że k -elementowe kompozycje liczby n pozostają we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z $(k - 1)$ -elementowymi podzbiórmi zbioru $\{1, 2, \dots, n - 1\}$. Każdej takiej kompozycji a możemy przypisać zbiór

$$\{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}\}$$

i odwrotnie: każdy podzbiór, którego elementy są wypisane w porządku rosnącym, wyznacza w powyższy sposób pewną kompozycję. Zatem liczba wszystkich kompozycji liczby n jest równa liczbie podzbiorów zbioru $(n - 1)$ -elementowego, czyli 2^{n-1} .

Określmy funkcję f , która przyporządkowuje każdej kompozycji a liczby n pewną kompozycję następująco: jeżeli $a_1 = 1$, to

$$f(a) = (a_1 + a_2, a_3, \dots, a_k),$$

a jeżeli $a_1 > 1$, to

$$f(a) = (1, a_1 - 1, a_2, a_3, \dots, a_k).$$

Zauważmy, że $f(f(a)) = a$ dla każdej kompozycji a , więc f zadaje podział zbioru wszystkich kompozycji liczby n na pary. Wprost z definicji f wynika, że kompozycje w obrębie każdej pary różnią się parzystością liczby parzystych wyrazów. To oznacza, że liczba kompozycji zawierających parzystą liczbę parzystych jest równa połowie liczby wszystkich kompozycji, czyli 2^{n-2} .



Rozwiązanie zadania F 934. Gdybyśmy znali masę atmosfery ziemskiej, to znając średnią masę cząsteczkową powietrza, moglibyśmy obliczyć liczbę zawartych w niej cząsteczek. Atmosfera z *dolu* jest ograniczona powierzchnią Ziemi. Za jej *górną* granicę przyjmijmy sferę o promieniu $R + h$, gdzie h – wysokość 100 km, na której praktycznie nie występuje opór powietrza. Obliczmy, jak zmienia się przyspieszenie ziemskie w tak określonych granicach atmosfery:

$$g(h) = \frac{GM_z}{(R + h)^2} = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2},$$

gdzie M_z – masa Ziemi, G – stała grawitacji, g – przyspieszenie ziemskie na powierzchni Ziemi. Korzystając z tego, że $h/R \ll 1$, możemy przyjąć, że w pierwszym przybliżeniu

$$g(h) \approx g \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) \approx g.$$

Przy takim przybliżeniu wartość ciśnienia na powierzchni Ziemi, równa ciężarowi słupa powietrza o wysokości atmosfery, zawierającego masę powietrza m i mającego podstawę jednostkową wynosi $p = mg$. Całkowitą masę atmosfery m_0 znajdujemy, mnożąc m przez powierzchnię Ziemi: $m_0 = 4\pi R^2(p/g)$, a stąd znajdujemy liczbę zawartych w atmosferze cząsteczek powietrza

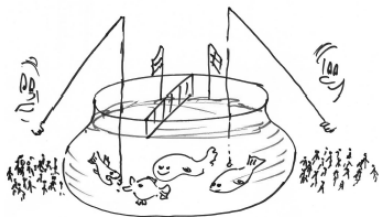
$$N = \frac{m_0}{\mu} N_A = \frac{4\pi R^2 p}{\mu \epsilon \mu} N_A,$$

gdzie N_A – liczba Avogadro. Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy $N \approx 10^{44}$.

W co grają kraje, eksploatując środowisko?

Agnieszka WISZNIEWSKA-MATYSZKIEL*

*Zakład Biomatematyki i Teorii Gier,
IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski



Gra: zbiór graczy $\{1, \dots, N\}$, ich strategie S_i , funkcje wypłat $\mathcal{P}_i(S) = \mathcal{P}_i(S_1, \dots, S_N)$.

W równowadze Nasha \bar{S} dla każdego gracza i i każdej jego strategii s , $\mathcal{P}_i(\bar{S}) \geq \mathcal{P}_i(\bar{S}_1, \dots, s, \dots, \bar{S}_N)$.

Profil strategii $(1, \dots, 1)$ maksymalizuje sumę wypłat graczy. Taką umowę w przypadku firm nazywa się znową lub kartelem i nie ma ona dobrej prasy. W przypadku krajów mówimy o porozumieniach międzynarodowych. Jak widać, są one niestabilne, więc bez dodatkowego przymusu nie mają szansy się utrzymać.

Garret Hardin, ojciec chrzestny tego zjawiska, jako rozwiązanie widział jedynie „wzajemny przymus, na który wzajem się zgadzamy”.

Paradoksalnie – dla graczy lepsza od wyjściowej jest gra, w której od ich wypłat odejmuje się podatek za przekroczenie limitu – ponieważ wówczas układ strategii z porozumienia staje się jedyną równowagą Nasha.

Cena pozwolenia będzie równa obliczonemu w 2. granicznemu podatkowi 5.

4 września 1958 roku islandzki statek patrolowy ICGV Ægir próbował zatrzymać brytyjski kuter rybacki połowiący w strefie 12 mil morskich od brzegów Islandii, został jednak staranowany przez brytyjski okręt wojenny HMS Russell. To był pierwszy incydent *pierwszej wojny dorszowej*. Co było przyczyną serii konfliktów, w których przeciwko jednej z największych marynarek wojennych Europy stanęła licząca siedem okrętów patrolowych i jeden wodolot flota Islandii? Czego broniła tak zaciekle?

Tytułowa eksploatacja zasobów to nie tylko zagadnienia związane z połowem ryb, ale także m.in. wycinanie lasów tropikalnych, emisja zanieczyszczeń, których nie zatrzymują naniesione na mapę granice, czy eksploatacja transgranicznych złóż ropy. Narzędzia do ich analizy są takie same – gry dynamiczne. Ponieważ te narzędzia są dość złożone, wprowadzimy je stopniowo. Dla ustalenia uwagi omówimy tę klasę zagadnień na przykładzie eksploatacji łowisk. Zaczniemy od definicji gry.

Gra jest to dowolna sytuacja podejmowania decyzji przez co najmniej dwóch decydentów (*graczy*), w której każdy działa we własnym celu (wyrażonym jako *maksymalizacja funkcji wypłaty*), ale na realizację celu przez gracza mają wpływ decyzje podjęte przez pozostałych (*funkcje wypłaty graczy zależą od całego układu strategii*).

Równowaga Nasha to taki układ strategii, że żaden z graczy nie może zwiększyć wypłaty przez zmianę strategii przy niezmiennych strategiach pozostałych. A więc równowaga Nasha to taki układ strategii, w którym żaden z graczy nie żałuje swojej decyzji, znając wybory innych.

Przykład 1. Pięciu rybaków z Jastarni, posiadających po 2 kutry, sprzedaje swój połów na wspólnym targu. Każdy użyty kuter wylawia 1 tonę śledzia. Cena, po której mogą sprzedać ryby, to $13 - q$ za tonę, gdzie q to łączna liczba wylowionych ton ryb. Koszt pracy każdego statku wynosi 1. Zysk gracza i to zatem

$$(13 - (S_1 + \dots + S_5)) \cdot S_i - 1 \cdot S_i,$$

gdzie S_i – liczba jego kutrów wysłanych na połów.

Zauważmy, że najlepsza odpowiedź każdego z graczy na strategię pozostałych to zawsze 2. Tak więc jedyną równowagą Nasha jest układ strategii $(2, 2, 2, 2, 2)$, w którym każdy z graczy dostaje wypłatę 4. Co by było, gdyby ograniczyli się i każdy wysłał po jednym statku? Wtedy każdy dostałby wypłatę 7! Wszyscy by skorzystali na takim porozumieniu. Jednak każdy z graczy jeszcze bardziej skorzystałby na wysłaniu dwóch statków, kiedy pozostali uczciwie trzymają się umowy (wtedy on dostałby 12, a pozostali po 6). To właśnie jest istota *tragedii wspólnych zasobów* (*the tragedy of the commons*) w najprostszej ujęciu (na razie wspólny jest jedynie rynek). Jak widać, „magiczna ręka rynku” w zagadnieniach wspólnych zasobów nie działa.

Jak wymusić kooperację?

1. Wiążące ograniczenia. Komisyjnie zamykamy po jednym statku każdego z graczy w porcie. W porównaniu z równowagą Nasha jest to lepsze dla wszystkich.

2. Podatek regulacyjny. Podatków nikt nie lubi. Jednak podatek czysto regulacyjny, płacony od przekroczenia zawartego w umowie limitu, jeśli umiejętnie obliczony (w naszym przypadku większy niż 5), nie jest płacony przez nikogo, a na pewno zadziała.

3. Pozwolenia zbywalne. Ustalamy limit statków na 5 i rozdzielamy go równo pomiędzy graczy. Każdy może łowić w ramach posiadanych pozwoleń, którymi gracze mogą swobodnie handlować między sobą. Cenę pozwolenia wyznacza rynek.

Strategie graczy w grze dynamicznej to funkcje $S_i(t, x)$. W czasie t gracz wylowi $S_i(t, X(t))$.

Stan łowiska opisuje równanie

$$X(t+1) = f(X(t), S(t, X(t)))$$

ze stanem początkowym $X(0) = x_0$.

Wyplata gracza i jest postaci

$$P_i(S) = \sum_{t=0}^T P_i(S(t, X(t)))\delta^t.$$

Horyzont czasowy T może być skończony bądź nie.

Można też rozważać analogiczne gry z czasem ciągłym (robi się to nawet częściej niż z czasem dyskretnym).

Gry dynamiczne są znacznie bardziej złożone od zwykłych – wiele problemów jest ciągle otwartych, w tym wiele zagadnień związanych z obliczaniem równowag Nasha.

Równowagę Nasha obliczamy, poczynając od końca, analizując wyplata w tym okresie. W czasie 1 przy stanie ε wyplata graczy są zerowe, przy dowolnym innym stanie najlepsza odpowiedź gracza na decyzje pozostałych graczy to 2, a wyplata to 4. Następnie cofamy się w czasie do okresu 0 i maksymalizujemy po decyzji w chwili 0 obecną wyplata gracza plus obliczoną wcześniej zdyskontowaną wyplata przyszłą. Analiza przypadków daje najlepszą odpowiedź $S_i(0, x_0) = 2$; przypadki, w których decyzje pozostałych graczy sumują się do 6 lub 7, analizujemy osobno – ze względu na „klamerkową” funkcję wyplata w przyszłym okresie. Metoda ta, w ogólnym przypadku bazująca na indukcji wstecznej, nazywana jest programowaniem dynamicznym albo metodą Bellmana.

Pierwsze modele gier dynamicznych opisujących eksploatację środowiska były zainspirowane wspomnianymi *wojnami dorszowymi*, które zakończyły się wydzieleniem 200-milowej wyłącznej strefy ekonomicznej Islandii, co dziś jest już standardem gwarantowanym prawem międzynarodowym. Warto jednak zauważyć, że taka „prywatyzacja” łowisk nie rozwiązuje w całości problemu, ponieważ formalne granice stref ekonomicznych są ignorowane przez ryby, które mogą przepływać tam, gdzie jest ich mniejsze zagęszczenie, a więc więcej pokarmu. Powoduje to, że każdemu z krajów opłaca się do pewnego poziomu zwiększać eksploatację w swojej strefie, zwłaszcza

Gry dynamiczne. Czego brakuje w tej analizie? Każdego dnia gracze mogą rozpocząć kolejną taką samą prostą grę. Być może dobrze opisywałaby ona rybołówstwo morskie w średniowieczu, ale nie przy obecnych możliwościach technicznych – nadmiernie poławianych ryb będzie coraz mniej, a w skrajnym przypadku mogą nawet wyginąć. Przyczyną *wojen dorszowych* było właśnie istotne zmniejszenie populacji łowisk.

Do pełniejszego opisu zjawiska potrzebujemy kolejnych punktów w czasie i nowej zmiennej – *zmiennej stanu*, oznaczającej liczbę lub biomasa ryb w łowisku. Strategie graczy opisują, co gracz robi w każdym momencie gry, ewentualnie w zależności od stanu łowiska. Gracze biorą pod uwagę nie tylko bieżącą wyplata, ale całkowity zysk (również przyszły) przy uwzględnieniu, że jedna złotówka zarobiona w przyszłości może mieć inną wartość – tzw. dyskonto.

Przykład 2. O ile pięciu rybaków z Jastarni nie może zagrozić populacji bałtyckiego śledzia, to pięć nadbałtyckich krajów już tak. Teraz graczami są kraje, a gra z przykładu 1 (oczywiście z nieco innymi jednostkami) toczy się przez dwa okresy, czynnikiem dyskontowym jest $\delta = \frac{1}{2}$. Jeśli łączna eksploatacja przekroczy 5, stan populacji ryb zmniejsza się z $x_0 = 1$ (populacja w niskim, ale stabilnym stanie) do $\frac{1}{2}$ (populacja mocno przetrzebiona), a jeśli natomiast łączna eksploatacja przekroczy 7, to stan zmniejsza się do pewnego małego $\varepsilon > 0$ (populacja na skraju wyginiecia). Przy stanie x każdy statek może złowić maksymalnie $2x$ jednostek ryb, ponadto koszty rosną $\frac{1}{x}$ razy. Przyjmujemy ε na tyle małe, że w tym stanie połowy stają się nieopłacalne. W tej grze, podobnie jak w przykładzie 1, w jedynej równowadze Nasha gracze łowią z maksymalną intensywnością w okresie początkowym, doprowadzając populację śledzia na skraj wyginiecia, mimo że oznacza to dla nich głodowanie w okresie 1. Wyplata każdego z graczy jest równa 4, podczas gdy w razie porozumienia każdy mógłby mieć 10,5.

W grach dynamicznych eksploatacji zasobów można stosować te same metody 1–3 wymuszania kooperacji, możliwe są też inne, specyficzne metody oparte na fakcie wielokrotnego wchodzenia w interakcję (np. porozumienia międzynarodowe, w których jedyną sankcją za wyłamanie się gracza z kooperacji jest groźba zerwania porozumienia i powrót do nieopłacalnej dla wszystkich równowagi Nasha).

jeśli pozostali postanowili ograniczyć eksploatację w swoich. Zagadnienie to staje się znacznie bardziej złożone, bo już sam fakt istnienia specjalnych stref ekonomicznych wymaga użycia wielowymiarowej zmiennej stanu i wzięcia pod uwagę opóźnienia, ponadto w morzach mamy więcej niż jeden gatunek ryb, a na szybkość rozmnażania się oprócz biomasy ma wpływ struktura wiekowa populacji. . . Widać więc, że nawet liczenie jedynie równowag Nasha w grach eksploatacji zasobów morskich, nie wspominając nawet o konstrukcji porozumień międzynarodowych, dzięki którym uda się wymusić kooperację, oznacza zajęcie dla matematyków na długie lata.

Co ma wspólnego bryła Wulffa z płatkami śniegu?

Piotr RYBKA*

*Zakład Równań Fizyki Matematycznej, IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski

Drogi Czytelniku, jeśli popatrzysz na płatki śniegu, to zobaczysz wielką ich różnorodność. Bogactwo znanych kolekcji zdjęć śnieżynek mówi nam, że nie ma dwóch identycznych płatków śniegu. Możesz zapytać, czy możemy skatalogować pokrój kryształków lodu i wyjaśnić ich kształt?

Ukichiro Nakaya żył w latach 1900–1962; znany jest z tego, że stworzył pierwszy sztuczny płatek śniegu.

Klasyfikacji służy diagram, którego autorem jest Ukichiro Nakaya, opisujący pokrój kryształka w zależności od dostępności pary wodnej i temperatury otoczenia. Próba wyjaśnienia tego pokroju odwołuje się do pojęcia energii

W przybliżeniu możemy uznać, że płatki śniegu mają symetrię sześciokąta foremnego.

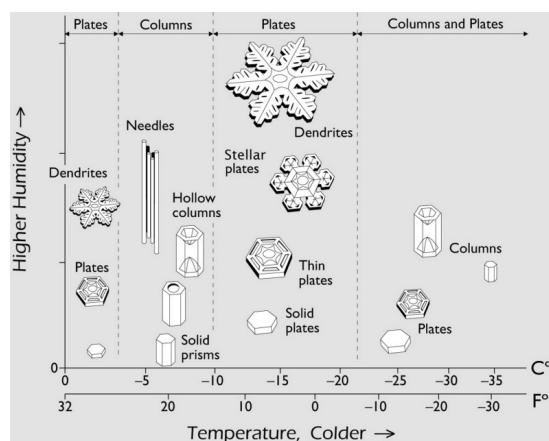


Diagram Nakai

Georg Wulff był bardzo ciekawą postacią. Żył w latach 1863–1925. W roku 1898 został kierownikiem katedry na Uniwersytecie Warszawskim.

- [1] G. Wulff, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen*, Zeitschrift f. Krystall. Mineral. **34**, (1901), 449–530.

powierzchniowej. Gdy oglądamy śnieżynkę ze środka jej symetrii, to widzimy, że nie we wszystkich kierunkach rośnie ona z taką samą prędkością. Innymi słowy, energia konieczna do zbudowania jednego metra kwadratowego powierzchni kryształka (lub metra bieżącego, jeśli mówimy o całkowicie płaskich śnieżynkach) zależy od kierunku \mathbf{n} . Tę energię będziemy oznaczali symbolem $\varphi(\mathbf{n})$.

Ograniczmy się tylko do płaskich śnieżynek. Możemy wtedy zapytać, czy znajomość gęstości energii powierzchniowej, φ , wystarcza do odtworzenia równowagowego kształtu śnieżynki. W uproszczeniu powiemy, że jest to stan, którego śnieżynka nie będzie chciała zmienić przy ustalonej wilgotności powietrza. Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Georg Wulff podał geometryczną konstrukcję bryły równowagowej, W_φ , nazywanej obecnie bryłą Wulffa. Konstrukcja została zamieszczona w pracy z początku XX wieku [1].

Do konstrukcji bryły Wulffa potrzebna jest, znana już nam, funkcja gęstości energii zależąca od kąta θ , jaki tworzy wektor jednostkowy \mathbf{n} z osią OX . Ścisła definicja jest następująca,

$$W_\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) \leq \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Geometrycznie rzecz ujmując, postępujemy następująco: w każdym punkcie \mathbf{z} należącym do wykresu biegunowego funkcji φ prowadzimy prostą prostopadłą do promienia. Wtedy bryła Wulffa składa się z punktów, które mogą być osiągnięte, gdy startujemy z początku układu współrzędnych, bez przekraczania żadnej z tych linii.

Konstrukcja Wulffa prowadzi do wypukłego zbioru W_φ , niezależnie od właściwości φ . Okazuje się, że W_φ jest kulą jednostkową w metryce powiązanej z φ .

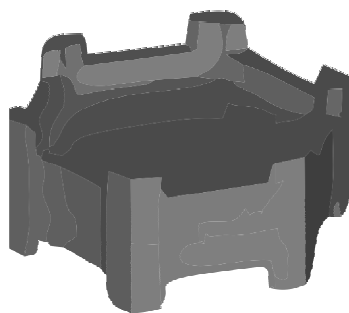
Kształt śnieżynki, wypuszczającej coraz to nowe gałęzie, wyraźnie wskazuje, że ma ona tendencję wzrostową. Nie ma ona kształtu równowagowego. Możesz zatem, Czytelniku, dociekać, jak te widoczne kształty uzyskać. Są dwie odpowiedzi na to pytanie: doświadczalna i teoretyczna.

Okazuje się, że używany obecnie zestaw doświadczalny do hodowania w domu płatków śniegu jest bardzo prosty i zasadniczo składa się ze styropianowej skrzyni, w której przechowujemy suchy lód, czyli zestalony dwutlenek węgla, plastikowej butelki po napojach, nitki i pyłu np. z dymu papierosowego. Po raz pierwszy płatki śniegu zostały wyhodowane w Japonii na zasypanej zimą śniegiem wyspie Hokkaido przez wspomnianego Nakayę w roku 1936.

Podejście teoretyczne wykorzystuje matematyczny opis procesu krystalizacji, który fachowo nazywa się jednofazowym zmodyfikowanym zagadnieniem Stefana z kinetycznym przechodzeniem. Jest to bilans masy i energii zapisany za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. Z uwagi na to, że wspomniany opis jest skomplikowany, pominiemy go całkowicie. Podkreślimy natomiast jedną ważną rzecz, że w skład tego opisu wchodzi człon opisujący krzywiznę krzywej będącej brzegiem śnieżynki. Ów człon jest zgodny z geometrią, w której bryła Wulffa jest kulą jednostkową.

Wspomniany opis można doprowadzić do postaci dyskretnej, takiej, z którą poradzi sobie komputer. Tę pracę wykonali John Barrett, Harald Garcke i Robert Nürnberg. Ich sukces polegał na tym, że odpowiednio dobierając parametry fizyczne, zdołali odtworzyć kształty spotykane w naturze. Niektóre z nich są naprawdę zaskakujące.

Morał z tej opowieści jest taki, że fizyka wspólnie z matematyką, wspomaganie komputerami, są zdolne całkiem dokładnie opisywać rzeczywistość. Naukowcy robią to nie tylko z ciekawości, ale i po to, aby nauczyć się sterować procesami przemysłowymi w optymalny sposób. Dziś naukowcy z Uniwersytetu Warszawskiego kontynuują dzieło rozpoczęte ponad sto lat temu przez Wulffa, zajmując się różnymi aspektami opisywanych wyżej procesów.

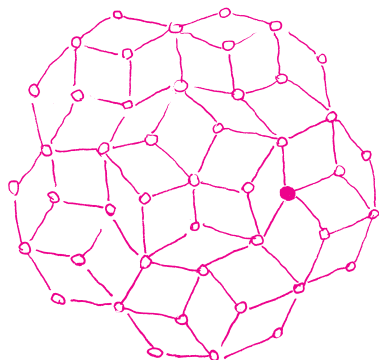


Bryła z poniższej pracy Barretta, Garckego, Nürnberga

- [2] J.W. Barrett, H. Garcke, R.Nürnberg, *Finite Element Approximation of One-Sided Stefan Problems with Anisotropic, Approximately Crystalline, Gibbs–Thomson Law*, Adv. Differential Equations **18** (2013), no. 3–4, 383–432

*Zakład Biomatematyki i Teorii Gier, IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski

Rozważmy dwie uporządkowane struktury, które są wynikiem optymalizacji pewnych deterministycznych wielkości: minimalizacji energii w stanach podstawowych oddziałujących cząstek oraz maksymalizacji wypłat w równowagach Nasha rywalizujących graczy. Zadajemy pytanie – czy porządek obecny w powyższych strukturach przetrwa stochastyczne zaburzenia zawsze obecne w rzeczywistych układach?



Przykład 1. Kwazikryształ

Wyobraźmy sobie regularną sieć kwadratową, w każdym węźle której znajduje się cząstka jednego z kilku typów. Każdej przestrzennej konfiguracji cząstek przypisana jest energia będąca sumą oddziaływań pomiędzy sąsiednimi cząstkami. Skonstruowano przykłady, dla których minimalizacja powyższego funkcjonału, zwanego Hamiltonianem, prowadzi do struktur nieokresowych, na przykład odpowiadających nieokresowemu parkietażom Penrose'a. Są to matematyczne modele kwazikryształów. Konfiguracje z minimalną energią nazywane są stanami podstawowymi. Nieokresowe stany podstawowe nie wykazują symetrii występujących w kryształach. Nie są jednak nieuporządkowane; ich długozasięgowy porządek skutkuje występowaniem dyskretnego widma dyfrakcyjnego. Fundamentalnym problemem jest skonstruowanie modelu oddziałujących cząstek, którego nieokresowy stan podstawowy jest stabilny ze względu na ruchy termiczne cząstek. Stan równowagowy w niezerowej temperaturze jest wynikiem rywalizacji energii i entropii, to jest minimalizacji tak zwanej energii swobodnej.

Problem Otwarty 1 – Rozstrzygnąć istnienie nieokresowych miar Gibbsa.

Skonstruować układ oddziałujących cząstek, dla którego minimalizacja energii swobodnej osiągnięta jest przez stany równowagowe, tak zwane miary Gibbsa na przestrzeni konfiguracji, które w odpowiednio niskich temperaturach przypisują prawdopodobieństwo bliskie jedności nieokresowym stanom podstawowym.

Przykład 2. Dylemat Więźnia

W grach ewolucyjnych zamiast cząstek oddziałują ludzie zwani agentami lub graczami, mający do dyspozycji różne strategie. Każdy z nich maksymalizuje wypłatę zależną od swojej strategii i strategii oponentów. Optimum jest osiągnięte w tak zwanych równowagach Nasha. Nie istnieje jednak funkcja na konfiguracjach graczy, która jest zawsze maksymalizowana w równowadze Nasha. Odróżnia to w sposób istotny równowagi Nasha od stanów podstawowych.

Rozważmy grę Dylemat Więźnia, gdzie obopólna kooperacja przynosi większe korzyści niż obopólna zdrada, ale największą wypłatę dostajemy, zdradzając osobę kooperującą. Pokusa powoduje, że łądujemy w jedynej równowadze Nasha, gdzie wszyscy zdradzają. Tym razem chcemy, aby losowe fluktuacje doprowadziły nas do kooperacji.

Umieścimy graczy w wierzchołkach grafu losowego Barabasi–Alberty. Graf taki tworzymy indukcyjnie, dodając do istniejących już wierzchołków następny wierzchołek, łącząc go krawędzią z jednym z istniejących już wierzchołków z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do jego stopnia. Wypłata gracza jest sumą wypłat z gier z sąsiadami; dodatkowo zakładamy, że każdy z graczy ponosi koszt utrzymania krawędzi łączących go z sąsiadami. Jedną z prostszych dynamik ewolucyjnych jest imitacja – w każdym dyskretnym momencie losowo wybrany gracz imituje z dużym prawdopodobieństwem strategię sąsiada, którego wypłata była największa w poprzedniej rundzie, a z małym prawdopodobieństwem popełnia błąd. Pokazaliśmy ostatnio, że istnieje krytyczny koszt, poniżej którego wszyscy kooperują, a powyżej którego liczba kooperantów maleje skokowo do około 20%. Ta gwałtowna zmiana w zachowaniu się populacji graczy jest podobna do przejścia fazowego krystalicznego lodu w ciekłą wodę.

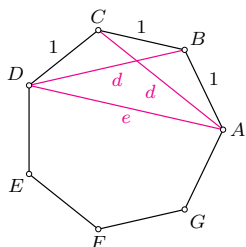
Problem Otwarty 2 – Wyjaśnić przyczyny i naturę przejścia fazowego w grze Dylemat Więźnia na grafie Barabasi–Alberty z kosztami krawędzi.

Zapraszam wszystkich zainteresowanych do współpracy w rozwiązywaniu dwóch powyższych problemów.

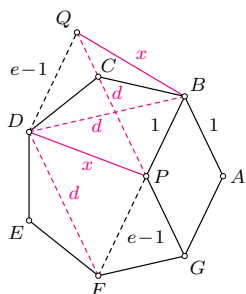


Rozwiązanie zadania M 1537.

Oznaczmy długość odcinka PD przez x , a krótszej i dłuższej przekątnej danego siedmiokąta foremnego odpowiednio przez d i e . Wówczas na mocy twierdzenia Ptolemeusza, zastosowanego do trapezu równoramiennego $ABCD$, uzyskujemy $d^2 = e + 1$.



Niech Q będzie takim punktem, że czworokąt $DFPQ$ jest równoległobokiem.



Wówczas $PQ = DF = BD$, więc trapez $BPDQ$ jest równoramienny. Stosując do niego twierdzenie Ptolemeusza, otrzymujemy

$$d^2 = x^2 + e - 1,$$

gdyż $BP = 1$ oraz $DQ = FP = e - 1$.

Łącząc uzyskane równości, mamy

$$x^2 + e - 1 = e + 1,$$

skąd $x = \sqrt{2}$.

Opcje i greckie parametry

Piotr KOWALCZYK*, Andrzej PALCZEWSKI**

*Zakład Matematyki Finansowej
 **Zakład Równań Fizyki Matematycznej,
 IMSM, WMIM, Uniwersytet
 Warszawski

Opcji używano od bardzo dawna w kontaktach handlowych. Trudno jest ustalić od jak dawna, ponieważ były to formy dwustronnych umów, po których nie pozostawały trwale ślady. Wiadomo, że były one znane już w średniowieczu, a w wieku XIX handlowano nimi w niemal wszystkich krajach europejskich oraz Stanach Zjednoczonych.

Na początku lat 2000. odkryto, że bardzo podobny wzór do wzoru Blacka-Scholesa wyprowadził już w 1908 roku Vinzenz Bronzin. Wyniki jego badań, opublikowane w niewielkiej książeczce, zostały jednak całkowicie zapomniane po I wojnie światowej.

Wzór na cenę opcji kupna (opcji pozwalającej kupić towar po ustalonej cenie K w momencie T) ma postać

$$(*) \quad \mathbb{E} \left[\exp(-rT) \max(S(T) - K, 0) \right].$$

Investowanie w opcje może być niezwykle opłacalne, ponieważ opcje są zwykle tanie, a mogą przynosić duży zysk w momencie realizacji. Jednak jeśli jedna strona dużo zarabia, to druga dużo traci. Oznacza to, że inwestowanie w opcje jest bardzo ryzykowne. Duże instytucje finansowe nie chcą ponosić takiego ryzyka, zmniejszając je przez odpowiednie inwestowanie w opcje oraz instrument, na który opcja jest wystawiona (instrument bazowy). Jakie powinny być proporcje takiej inwestycji, wskazują właśnie greckie parametry.

Opcje są kontraktami, które posiadaczowi dają prawo (ale nie obowiązek) zakupu (lub sprzedaży) określonego towaru w ustalonej chwili w przyszłości (termin realizacji) po ustalonej cenie (cena realizacji). Opcja jest więc umową, która jednej stronie (posiadaczowi) daje pewne prawa, które muszą być realizowane przez drugą stronę umowy (sprzedawcę opcji). Oczywiście, za uzyskane prawa posiadacz opcji musi zapłacić sprzedawcy określoną cenę.

Zasadniczym problemem przy kontraktach opcyjnych jest właściwa wycena takiego kontraktu. Przy braku odpowiedniego aparatu matematycznego robiono to intuicyjnie, co często prowadziło do znacznych błędów. Dopiero pod koniec XIX wieku zaczęto rozumieć czynniki, które wpływają na cenę opcji. Ważnym krokiem była praca L. Bacheliera z 1900 roku, w której ceny towaru, na który wystawiana jest opcja, były modelowane procesami stochastycznymi. Jednak dopiero w zaproponowanym w 1973 roku modelu F. Blacka i M. Scholesa znaleziono poprawny sposób wyceny opcji.

Model Blacka-Scholesa pozwala w postaci analitycznego wzoru zapisać cenę towaru, na który wystawiana jest opcja: $S(t) = S_0 \exp((r - \sigma^2/2)t + \sigma W(t))$. We wzorze tym za losowe zachowanie cen odpowiada proces Wienera $W(t)$. S_0 jest ceną w chwili $t = 0$, parametr r opisuje obowiązującą na rynku stopę procentową, a σ jest „zmiennością” ceny (duże σ odpowiada dużym fluktuacjom ceny). Kiedy znana jest cena towaru (instrumentu bazowego), to korzystając z odpowiedniego aparatu matematycznego, można obliczyć cenę opcji.

Na współczesnym rynku finansowym interesuje nas nie tylko cena opcji V , ale także tzw. greckie parametry, które są niczym innym jak pochodnymi ceny opcji po zmiennych, od których ta cena zależy. Mamy więc parametry: $\Delta = \partial V / \partial S_0$, $\Gamma = \partial^2 V / \partial S_0^2$, $\Theta = -\partial V / \partial T$ oraz kilka innych. Greckie parametry pełnią ważną funkcję na rynku finansowym, ponieważ są one wykorzystywane do zmniejszania ryzyka inwestycji w opcje.

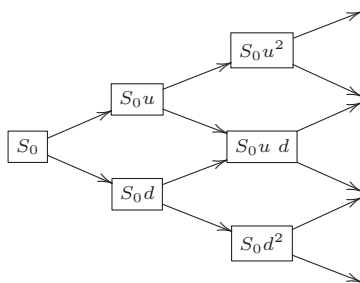
Analityczny wzór na cenę instrumentu bazowego można wyprowadzić tylko dla bardzo uproszczonego modelu rynku. Podany wyżej wzór zakładał, że r i σ są stałe. Mając taki wzór, można wyprowadzić także analityczny wzór na cenę opcji oraz greckie parametry. Modele takie są jednak zbyt uproszczonymi modelami rzeczywistego rynku. W bardziej zaawansowanych modelach przyjmuje się, że zmienność σ jest funkcją ceny instrumentu bazowego $S(t)$. W takich modelach nie daje się już zwykle wyprowadzić wzoru na cenę instrumentu bazowego. Wtedy do wyceny opcji oraz obliczenia jej greckich parametrów musimy wykorzystać metody numeryczne.

Jednym z najprostszych numerycznych algorytmów obliczania cen opcji jest algorytm drzewa dwumianowego. W modelu dwumianowym czas T do zapadalności opcji dzielimy na N okresów o długości $\tau = T/N$. Drzewo dwumianowe konstruowane jest dla momentów czasu $n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$. Jeśli S_n oznacza cenę instrumentu bazowego w węźle n , to cena w węźle $n + 1$ dana jest wzorem $S_{n+1} = S_n Z_n$, gdzie Z_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwupunktowym

$$Z_n = \begin{cases} u, & \text{z prawdopodobieństwem } p, \\ d, & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - p, \end{cases}$$

a u , d i p są dane, przy czym $d < u$.

Ponieważ S_0 jest znane, otrzymujemy drzewo dwumianowe pokazane na rysunku 1. Aby obliczyć na tym drzewie cenę opcji, należy prawdopodobieństwo p w definicji zmiennej Z_n zamienić na $p^* = \frac{e^{r\tau} - d}{u - d}$, które jest prawdopodobieństwem neutralnym względem ryzyka. Mając wyznaczone prawdopodobieństwo p^* , można szybko obliczyć cenę opcji. Dla opcji kupna z ceną K i terminem zapadalności T cena ta liczona jest „wstecz” na drzewie dwumianowym. Zauważmy w tym celu, że ceny instrumentu bazowego w węzłach odpowiadających czasowi zapadalności T mają postać $S_{jN} = S_0 u^j d^{N-j}$. Niech $V_{jN} = \max(S_{jN} - K, 0)$, $j = 0, \dots, N$. Wtedy,



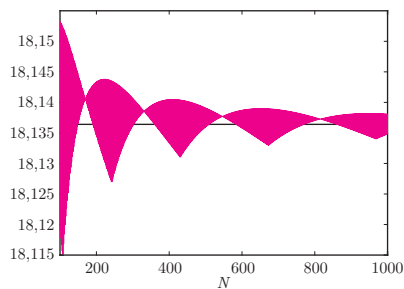
Rys. 1. Drzewo dwumianowe

Prawdopodobieństwo neutralne względem ryzyka ma tę własność, że zdyskontowane ceny instrumentu bazowego tworzą martyngał względem tego prawdopodobieństwa.

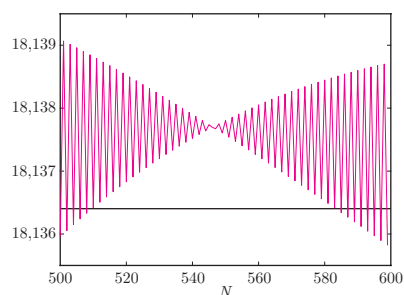
cofając się po węzłach drzewa od węzła N do węzła 0 , korzystamy ze wzoru

$$V_{ji} = e^{-r\tau} (p^* V_{j+1,i+1} + (1-p^*) V_{j,i+1}).$$

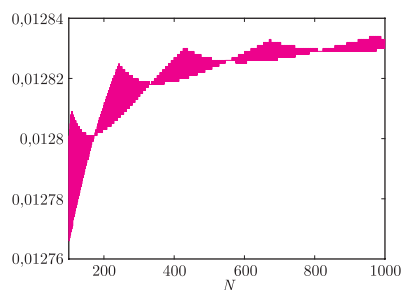
Obliczona z tego algorytmu wartość V_{00} jest poszukiwaną ceną opcji.



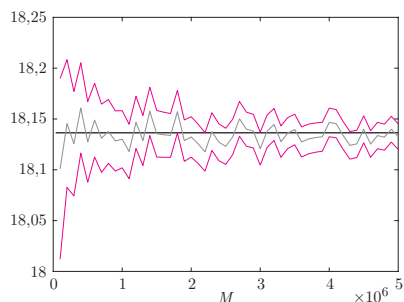
Rys. 2. Cena opcji – drzewo dwumianowe



Rys. 2a. Cena opcji – drzewo dwumianowe



Rys. 3. Wartość parametru Γ – drzewo dwumianowe



Rys. 4. Cena opcji – metoda Monte Carlo

Aby zilustrować działanie algorytmu drzewa dwumianowego, rozważmy model zwany modelem CEV, w którym $\sigma(S(t)) = \sigma_0 S(t)^{\beta-1}$, gdzie σ_0 jest stałą. W modelu tym nie można wyprowadzić analitycznego wzoru na $S(t)$, ale można wyprowadzić analityczny wzór na gęstość tego procesu. Niestety, wzór ten zawiera skomplikowaną całkę, którą należy obliczać numerycznie. Prostsze jest bezpośrednio numeryczne obliczenie ceny opcji. Konstrukcja drzewa dwumianowego wymaga ustalenia wartości d , u oraz p . Obliczamy je z danych uzyskanych z obserwacji zachowania się cen instrumentu bazowego na rzeczywistym rynku. W modelu CEV wzory są nieco bardziej skomplikowane niż w modelu Blacka–Scholesa i podobnie jak dla tego ostatniego modelu nie będziemy ich tutaj przedstawiali. Kiedy znamy już wartości d , u i p , to obliczenie ceny opcji (oraz jej greckich parametrów) wymaga ustalenia właściwej liczby węzłów N . Pozornie zadanie wydaje się łatwe – należy wybrać wielkość N tak, aby uzyskać cenę opcji z wymaganą dokładnością. Zobaczmy, jak wygląda cena opcji w modelu CEV dla różnej liczby węzłów N (patrz rys. 2).

Obraz na rysunku 2 jest dość zaskakujący. Spodziewaliśmy się obrazu krzywej, która każdej wartości N przypisuje cenę opcji. Tymczasem dostaliśmy jakieś „dziwne precle”. Dla zrozumienia, co naprawdę pokazuje rysunek 2, powiększmy jego fragment. Ten powiększony fragment jest pokazany na rysunku 2a (pozioma linia na obu rysunkach to dokładna cena opcji, którą otrzymaliśmy, obliczając numerycznie wspomnianą wcześniej całkę opisującą gęstość procesu $S(T)$). Teraz już widać, że dostaliśmy wykres, który każdej wartości N przypisuje jedną cenę opcji. Problem polega na tym, że ten wykres oscyluje między dwiema skrajnymi wartościami (obwiedniami). Podobnie wygląda obliczenie greckich parametrów. Rysunek 3 pokazuje wyniki obliczenia jednego z tych parametrów (Γ). Widać z tych rysunków, że obliczenie ceny opcji albo jej greckich parametrów dla jednej wartości N daje nam mało precyzyjną informację (nie wiemy, w jakim fragmencie oscylującej krzywej wylądowaliśmy). Optymistyczna informacja, jaka wynika z rysunków 2 i 3, jest taka, że przy wzroście N oscylacje mają zmniejszającą się amplitudę. Jeśli więc dokonamy obliczeń dla wielu wartości N , to będziemy znali położenie górnej i dolnej obwiedni oscylacji. Będziemy mogli wtedy wybrać takie N , dla którego amplituda oscylacji będzie mniejsza niż oczekiwana dokładność obliczenia ceny opcji albo jej greckich parametrów.

Czytelnik mógłby pomyśleć, że otrzymane na rysunkach 2 i 3 oscylacje to cecha użytej metody numerycznej, a inne metody będą dawały wyniki pozbawione takich mankamentów. Spróbujmy więc obliczyć cenę opcji, wykorzystując metodę Monte Carlo. W metodzie tej dokonując losowań z odpowiedniego rozkładu, możemy symulować trajektorie procesu $S(t)$ i wyznaczyć wartości końcowe $S(T)$ na każdej trajektorii. Symulując dostatecznie dużo trajektorii, możemy wartość oczekiwaną w podanym na marginesie wzorze (*) na cenę opcji zastąpić średnią po trajektoriach (pozwala na to prawo wielkich liczb). Prócz obliczenia średniej możemy także obliczyć średni błąd, który jest dobrym przybliżeniem wariancji zmiennej losowej $S(T)$ i pozwala wyznaczyć przedział ufności dla średniej. Wyniki takich obliczeń dla bardzo dużej liczby symulacji (do $5 \cdot 10^6$) pokazane są na rysunku 4. Zaznaczono na tym rysunku średnią oraz górną i dolną granicę przedziału ufności dla poziomu ufności 95% (to oznacza, że z prawdopodobieństwem 0,95 poprawny wynik leży w tym przedziale). Niestety, także dla metody Monte Carlo dostaliśmy oscylujący wykres. Oscylacje są, oczywiście, mniej gwałtowne niż dla drzewa dwumianowego. Ale to jest częściowo spowodowane faktem, że obliczenia robiliśmy dla kolejnych wartości M oddalonych od siebie. Gdyby obliczenia na drzewie dwumianowym robić dla oddalonych od siebie wartości N , to obraz byłby podobny jak na rysunku 4.

Dokładna wycena instrumentów finansowych nie jest więc sprawą prostą. Nawet jeśli wiemy, jakie pułapki na nas czyhają, musimy wykonać wiele obliczeń (dla różnych wartości N lub M), aby oszacować błąd otrzymanego rozwiązania. Wiedza, czyli znajomość pułapek, może nas jednak ustrzec przed wyciągnięciem zbyt optymistycznych wniosków z wyników uzyskanych dla małej liczby symulacji.

Hydrodynamika a hydraulika

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

*Zakład Równań Fizyki Matematycznej,
IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski

Hydrodynamika to teoretyczna mechanika płynów, którą zajmują się matematycy, a hydraulika to praktyczna mechanika płynów, którą zajmują się inżynierowie.

Pomiędzy tymi dziedzinami mechaniki płynów od początku istniały poważne napięcia. W skrócie, przyczyna leży w tym, że

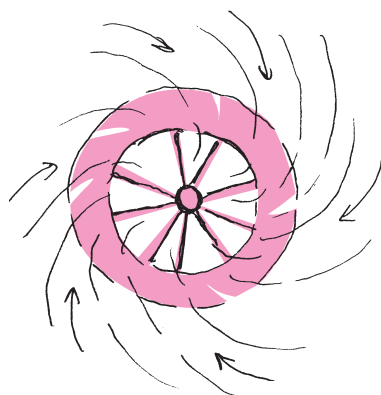
hydrodynamika wyjaśnia zjawiska, które nie mogą być obserwowane, a hydraulika obserwuje zjawiska, które nie mogą być wyjaśnione (parafraza nieco złośliwych, ale celnych słów laureata Nagrody Nobla z Chemii, Cyryla Hinshelwooda, Wikipedia: *D'Alembert's paradox*).

Pierwsze, ogólne równania klasycznej hydrodynamiki, równania Eulera (ok. 1755), nie brały pod uwagę zjawiska lepkości rzeczywistych płynów, stąd inżynierowie uważali je za bezużyteczne. Równania te generowały paradoksalne, bezsensowne rozwiązania. Było to trudne wyzwanie dla teoretyków. Proponowano różne poprawki, w końcu wypracowano (w okresie ok. 1820–1845) równania, które nazywamy dzisiaj równaniami Naviera–Stokesa. Uwzględniają one zjawisko lepkości płynów.

Przedstawienie historii hydrodynamiki na jednej stronie druku musi wywołać u Czytelnika uzasadniony niedosyt, dla pogłębienia jego wiedzy odsyłam do literatury podanej poniżej.

Czy przyczyna rozdźwięku została tym samym wyjaśniona? Nie do końca. Złożoność równań Naviera–Stokesa odstręczała inżynierów – rozsądnych praktyków, którzy stosowali dalej swoje metody (różne „chwyty” do poszczególnych zagadnień praktycznych), teoretycy, przywiązani do ogólnych zasad, zajęli się badaniem samych równań Naviera–Stokesa, nie przejmując się zbytnio, czy te równania opisują ruch jakiejś rzeczywistej cieczy. Idealnym rozwiązaniem byłaby, oczywiście, współpraca obu środowisk i określenie, co i dlaczego warto badać. Najwybitniejsi przedstawiciele obu środowisk zawsze mieli to poczucie, a także „nosa”, pozwalającego odróżnić problemy ważne od pseudoproblemów. Warto w tym miejscu wymienić parę nazwisk: Euler, Lagrange, Maxwell, von Neumann, Landau, Kołmogorow. Myśląc o tym, jakie cele stawiali sobie wyżej wymienieni (i wielu innych), ma się wrażenie, że mogliby się obrazić, gdyby ktoś chciał ich zaszufladkować do teoretyków czy praktyków. Warto o tym pamiętać.

Na zakończenie, dla przykładu, kilka ważnych hipotez dotyczących zjawiska turbulencji w płynach. Obserwujemy to zjawisko na co dzień, ale wciąż wymyka się ono językowi nauki. Obecny stan badań dotyczący turbulencji w płynach przypomina stan badań dotyczący zjawisk elektryczności i magnetyzmu sprzed (równań) Maxwella – oderwane kawałki, brak ogólnej teorii. A oto hipotezy, inspirujące, między innymi, badania prowadzone w IMSM UW:



KRECI
MI SIĘ
W GŁOWIE

[H1] Istnieje uniwersalna teoria turbulencji opisująca cały zakres zjawisk dotyczących turbulencji.

[H2] Równania Naviera–Stokesa opisują przepływy turbulentne.

[H3] Turbulencję można opisać w ramach teorii chaosu deterministycznego.

[H4] Osobliwości rozwiązań równań Naviera–Stokesa tłumaczą turbulencję.

[H5] Przepływy turbulentne można opisać za pomocą skończonej liczby parametrów.

Literatura:

G. Birkhoff: *Hydrodynamics. A Study in Logic, Fact and Similitude*, Princeton University Press, 1960.

O. Darrigol: *Worlds of flows. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005.

C. Truesdell: *Essays in the History of Mechanics*, Springer, 1968.

P. Davidson, *Turbulence. An Introduction to Scientists and Engineers*, Oxford University Press, 2004.

O rybach i ufności

Wojciech NIEMIRO*

*Zakład Statystyki Matematycznej,
IMSM, WMIM, Uniwersytet Warszawski,
Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
w Toruniu

W poprzednim numerze *Delty* przedstawiliśmy zgrabną metodę szacowania liczby ryb pływających w stawie. Przypomnijmy doświadczenie, na którym ta metoda się opierała: najpierw łowimy rybkę, potem rysujemy jej kreskę na ogonku, następnie na kartce zapisujemy liczbę kresek, jakie widzimy na ogonku trzymanej w ręce rybki, po czym wrzucamy ją z powrotem do stawu i całą procedurę powtarzamy n razy.

Niech r będzie (nieznana) liczbą ryb pływających w jeziorze. Poprzednio wykazaliśmy, że prawdopodobieństwo uzyskania na kartce konkretnego ciągu \mathbf{x} wynosi $g(\mathbf{x}) \frac{(r)_m}{r^n}$, gdzie m jest liczbą jedynek w tym ciągu (tzn. liczbą różnych, złowionych przez nas ryb), zaś $g(\mathbf{x})$ jest czynnikiem niezależnym od r . Wynika stąd, że m jest *statystyką dostateczną* i zawiera całą dostępną nam informację o r . Niech $P_r(m)$ oznacza prawdopodobieństwo wyłowienia dokładnie m różnych ryb. Nietrudno przekonać się, że $P_r(m) = \frac{(r)_m}{r^n} \binom{n}{m}$, gdzie $\binom{n}{m}$ jest liczbą podziałów zbioru n -elementowego na m rozłącznych podzbiorów (na tyle sposobów możemy złowić m różnych ryb przy n połowach).

Wybermy teraz „małą” liczbę $\alpha > 0$ (na przykład $\alpha = 0,1$) i zdefiniujmy przedział $[m_1(r), m_2(r)]$ w następujący sposób:

$$m_1(r) = \text{największa liczba } m_1, \text{ taka że } \sum_{m=1}^{m_1-1} P_r(m) \leq \alpha/2,$$

$$m_2(r) = \text{najmniejsza liczba } m_2, \text{ taka że } \sum_{m=m_2+1}^r P_r(m) \leq \alpha/2.$$

Wynika stąd, że

$$(1) \quad P_r(m_1(r) \leq m \leq m_2(r)) = \sum_{m=m_1(r)}^{m_2(r)} P_r(m) \geq 1 - \alpha.$$

Nierówność (1) mówi o tym, że z „dużym prawdopodobieństwem” $1 - \alpha$ losowa wielkość m należy do przedziału $[m_1(r), m_2(r)]$, który zależy od nieznanego r . Na rysunku pionowe odcinki przedstawiają przedziały obliczone dla $\alpha = 0,1$ i różnych wartości r (od 1 do 50). Przykładowo, dla $r = 21$ mamy $m_1(r) = 11$, $m_2(r) = 17$ i $P_r(11 \leq m \leq 17) = 0,9600163$.

Przedstawione zależności wynikają z patrzenia na nasz rysunek *pionowo*, czyli dla różnych, ale ustalonych wartości r . To jest punkt widzenia probabilisty. Punkt widzenia statystyka jest *poziomy*. Rozpatrujemy ustaloną (bo zaobserwowaną) wartość m . Zdefiniujmy dwie zależne od m liczby „na osi poziomej”:

$$r_1(m) = \text{najmniejsza liczba } r_1, \text{ taka że } m_2(r_1) \geq m,$$

$$r_2(m) = \text{największa liczba } r_2, \text{ taka że } m_1(r_2) \leq m.$$

Na przykład, dla $m = 15$ mamy $r_1(m) = 16$ i $r_2(m) = 44$. Przedział $[16, 44]$ na „wysokości” $m = 15$ jest na rysunku 2 wyróżniony.

Doszliliśmy teraz do najważniejszego miejsca naszych rozważań. Chwila zastanowienia prowadzi do wniosku, że następujące dwa warunki są równoważne:

$$r_1(m) \leq r \leq r_2(m) \quad \text{oraz} \quad m_1(r) \leq m \leq m_2(r).$$

W istocie, wynika to z definicji $r_i(m)$ i z faktu, że obie funkcje $m_i(r)$ są niemalejące, co nietrudno sprawdzić. Wynika stąd zatem, że dla każdego r

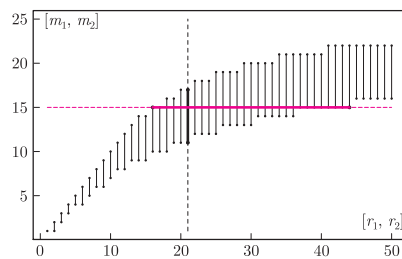
$$(2) \quad P_r(r_1(m) \leq r \leq r_2(m)) \geq 1 - \alpha.$$

Nierówność (2) mówi o tym, że dla dowolnego r , przedział $[r_1(m), r_2(m)]$ zawiera nieznaną liczbę r z dużym prawdopodobieństwem. Ten przedział możemy obliczyć, bo znamy m . Wspaniale! Wróćmy do naszych przykładowych danych, które pojawiły się na początku artykułu. Dla $m = 15$ (i ustalonego $n = 25$), przypomnijmy, $[r_1(m), r_2(m)] = [16, 44]$. A więc wydaje się, że następujące stwierdzenie jest zgodne z tym, co było powiedziane.

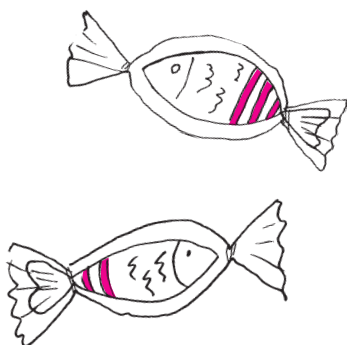
Liczba podziałów zbioru n -elementowego na m rozłącznych podzbiorów nosi nazwę *liczby Stirlinga II rodzaju*. Można tę liczbę obliczyć przy użyciu wygodnej rekurencji. Prawdziwa jest zależność

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + m \binom{n-1}{m}.$$

Dlaczego?



Konstrukcja przedziału ufności dla $m = 15$ i $n = 25$, na poziomie 90%. Pionowe linie są przedziałami o prawdopodobieństwie (co najmniej) 90%. Przedział dla $r = 21$ został wyróżniony tylko dla ułatwienia objaśnień. Poziomy odcinek jest przedziałem ufności.



Równie bezsensowne jest stwierdzenie „przedział

[3,141592653589793238461,

3,141592653589793238462]

zawiera liczbę π z prawdopodobieństwem co najmniej 0,90”. Albo zawiera, albo nie. Chwilowo mogę nie wiedzieć, która z alternatywnych możliwości zachodzi, ale o żadnym prawdopodobieństwie nie można mówić! Jak się zajrzy do Wikipedii, to się wyjaśni.

W języku potocznym – „gdybanie”.

): Przedział $[16, 44]$ zawiera nieznaną liczbę r z prawdopodobieństwem co najmniej 0,90.

Ale, ale, chyba się zagalopowaliśmy. Jeśli liczba r nie jest zmienną losową, to powyższe zdanie jest *bezsensowne*. Przedział $[16, 44]$ albo zawiera r , albo nie. Jak się jezioro osuszy, to się wyjaśni. Bez osuszania jeziora musimy nasz wniosek sformułować inaczej.

(: Przedział $[16, 44]$ jest przedziałem ufności dla nieznaney liczby r na poziomie ufności 0,90.

Jeśli o prawdopodobieństwie nie możemy mówić, to zastępujemy termin „prawdopodobieństwo” terminem „ufność”. Matematyczną definicją przedziału ufności jest nierówność (2). Kłopot w tym, że prawdopodobieństwo we wzorze (2) opisuje niepewność wyniku doświadczenia, w tym przypadku wyłowienia m różnych ryb, przed wykonaniem doświadczenia (przed połowem). Jak więc interpretować przedział $[16, 44]$ obliczony *po* wyłowieniu $m = 15$ ryb?

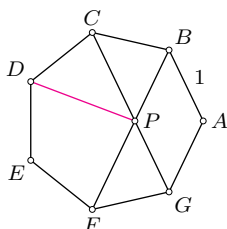
• Przedział ufności na poziomie $1 - \alpha$ jest to przedział obliczony na podstawie wyniku doświadczenia losowego w taki sposób, że jeśli by powtarzać doświadczenie wielokrotnie, to dla przynajmniej $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ doświadczeń, przedział obliczony tą samą metodą zawierałby nieznaną parametr.

Zwróćmy uwagę, jaką rolę w interpretacji przedziału ufności odgrywają zdania warunkowe i tryb przypuszczający. Jest to charakterystyczny dla Statystyka sposób myślenia – po wykonaniu doświadczenia losowego zastanawia się on: „z jakim prawdopodobieństwem to czy tamto by się mogło zdarzyć, gdyby nie to, że już się zdarzyło”.



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK



M 1537. Dany jest siedmiokąt foremny $ABCDEFG$ o boku długości 1. Przekątne BF i CG przecinają się w punkcie P . Znaleźć długość odcinka PD .
Rozwiązanie na str. 13

M 1538. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Znaleźć liczbę przedstawień liczby n w postaci sumy pewnej liczby dodatnich całkowitych składników, spośród których jest parzysta liczba liczb parzystych.
Rozwiązanie na str. 9

M 1539. Dana jest liczba $n \geq 1$ oraz pewien zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dodatnich liczb całkowitych. Na okręgu wyróżniono 2^n punktów i każdemu z nich przyporządkowano jedną z liczb ze zbioru A . Udowodnić, że iloczyn liczb znajdujących się na pewnym łuku tego okręgu jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. ??

Przygotował Michał NAWROCKI

F 933. Pewien polaryzator przepuszcza $k_1 = 30\%$ padającej na niego wiązki niespolaryzowanego światła, a dwa takie polaryzatory, ustawione jeden za drugim, przepuszczają $k_2 = 13,5\%$ światła. Ile wynosi kąt α między płaszczyznami polaryzacji tych polaryzatorów?
Rozwiązanie na str. 1

F 934. Ile wynosi w przybliżeniu liczba cząsteczek powietrza zawartych w atmosferze ziemskiej? Przyjąć, że średnie ciśnienie atmosferyczne na powierzchni Ziemi wynosi 1013 hPa, średni promień Ziemi wynosi 6400 km, średnia masa cząsteczkowa powietrza (azot i tlen) wynosi $\mu = 29$ g/mol. Skorzystać z informacji, że satelita krążący wokół Ziemi na wysokości 100 km praktycznie nie napotyka oporu powietrza.
Rozwiązanie na str. 9

Co po Dolly?

Wiadomość o sklonowaniu pierwszego ssaka (owcy) – było to w 1996 roku – zelektryzowała media i ich użytkowników. Natychmiast pojawiły się komentarze o tym, jak to na naszym progu staną zastępy ludzi sklonowanych przez wizjonerów i przestępców. Ale też od razu odezwali się biolodzy, lekarze, biotechnolodzy i etycy! Komentarzom nie było końca.

„Autorzy” zwierzęcia z klonu uświadomili nam, że badania nad klonami prowadzono od 30 lat i że pytania **jak? w jakim modelu? z jaką wydajnością?** i – co ważne – **po co?** nie dają się uchylić.

Najwcześniej stwierdzono, iż próby klonowania ludzi nie są podejmowane, są wręcz wykluczane w „cywilizowanym” świecie technologii naukowych, a nawet jeżeli (?) podejmowano je w krajach azjatyckich – to kończyły się niepowodzeniem. Pozostaliśmy zatem z owcą i kolejnymi próbami w obrębie innych gatunków. Od tego czasu opisano klonowanie m.in. krowy, świni, myszy, arktycznego wilka, wielbłąda, kojota, jelenia, psa, kota, kozy, muflona, rezusa, muła, królika, szczura. Niewątpliwie najważniejszym, fundamentalnym osiągnięciem naukowym przy tej mnogości udanych klonowań i różnorodności tkanek, z których komórka była dawcą jądra dla zarodka z klonu, jest potwierdzenie hipotezy, że każda komórka somatyczna (ciała) niesie w sobie cały genotyp danego osobnika. Z materiału genetycznego pojedynczej komórki somatycznej można odtworzyć cały organizm „z grubsza” identyczny z dawcą jądra komórkowego. Warto jednak pamiętać, że w wyniku procesów epigenetycznych, działających w trakcie życia jednostki, zwierzęta z klonu nie są absolutnie identyczne, mogą się różnić wzrostem, szczegółami umaszczenia. Wiemy o tym także, porównując ludzkie bliźnięta monozygotyczne (naturalny klon), szczególnie w miarę upływu ich życia.

Po co się klonuje? Bogaci ludzie odtwarzają swoich krócej od nich żyjących ulubieńców. Hodowcy usiłują w sposób kontrolowany odtworzyć korzystne jednostki: muła, krowę, konia, omijając naturalne krzyżówki, do których dołożyć się musi swoimi genami – obok czempiona – drugi osobnik/osobniczka.

Pierwszy klon konia urodził się w 2003 roku. I widać już, po co się klonuje konie: w finale mistrzostw Argentyny popularnej tam gry polo (grudzień 2016) zwyciężył zespół, w którym dosiadano **sześciu** klonów klaczy Dolfia Cuartetera. W polo mistrzowski koń musi mieć takie cechy jak odwaga, wytrzymałość, posłuszeństwo i doskonała współpraca z jeźdźcem. Dla hodowców ważne jest, że można uzyskać klony konia, także korzystając z komórek-dawców koni uprzednio – z powodów handlowych – wysterylizowanych. Takie konie startują obecnie na świecie w biegach długodystansowych. Klonowano konie z komórek pobranych od koni ze stadniny w Janowie Podlaskim – to droga zachcianka milionerów amerykańskich. Ocenia się, że w samym Teksasie żyje dziś 900 klonów koni – dokładne dane i metryki są tajemnicą handlową. Międzynarodowa Federacja Jeździecka dopuściła konie z klonów do igrzysk olimpijskich w 2012 roku.

Są też wyniki naukowe: klonując, sprawdzano wrażliwość komórek-dawców na podwyższone i niskie temperatury, komórki podgrzewano do 55°C przez 30 minut, pobierano po 16 latach od zamrożonej w –20°C myszy i po 10 latach z tkanek buhaja przetrzymywanych w –80°C. Potwierdzono możliwość klonowania z komórek martwego zwierzęcia kilka dni po uboju. Procedury klonowania nie uległy zasadniczym modyfikacjom od epoki Dolly: są wyrafinowane, wymagają subtelnej ręki doświadczalnika, są wrażliwe na wiele zewnętrznych czynników – krótko mówiąc, są trudne do stosowania. Czyta się o tym szybko, robi długo i mozolnie.

Często mówi się też o możliwości klonowania ginących gatunków, nawet z zamrożonych tkanek np. mamutów. Celowość tych pomysłów wydaje się wątpliwa, jeżeli choćby pomyśleć o niezwykłym dla takiego osobnika świecie, w którym by się urodził i do którego ewolucja go nie przygotowała. No i kto by był matką-nosicielką, jeżeli gatunek wymarł? Pojawia się też pytanie o nieśmiertelność (genów) – Teruhiko Wakayama z jednej myszy uzyskał 25 kolejnych klonalnych pokoleń i 558 osobników. Wszystko to zostawiam do rozmyślań wielbicielom literatury fantastycznej.

No, a czy geny pamiętają? Oto jest pytanie.

Magdalena FIKUS

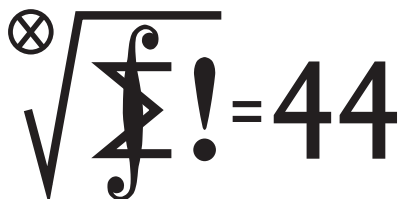
Zamieszczona w poprzednim numerze *Delty* lista Laureatów Olimpiady Fizycznej jest ponumerowana liczbami większymi o 5 od właściwych.

Bardzo za to Laureatów i Komitet Główny Olimpiady Fizycznej przepraszamy.

Redakcja

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
733 ($WT = 1,48$) i 734 ($WT = 2,11$)
z numeru 1/2017

Patryk Jaśniewski	Gdańsk	40,94
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,43
Roksana Słowik	Knurów	39,15
Adam Dzedzej	Gdańsk	39,12
Marcin Małogrosz	Warszawa	38,78
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Jerzy Cisło	Wrocław	34,72
Marcin Kasperski	Warszawa	34,38
Janusz Olszewski	Warszawa	30,15

739. Niech f będzie funkcją, spełniającą postawione warunki, i przyjmijmy, że funkcja $g(x) = f(x) - x$ nie jest stała. Istnieją więc liczby $a, b \in \mathbb{R}$ dla których $c = g(a) > d = g(b)$.

W drugim z warunków, podanych w zadaniu, przyjmujemy $a = x_0$ i tworzymy ciąg arytmetyczny $(x_0, x_1, x_2, \dots) = (a, f(a), ff(a), \dots)$. Skoro $f(a) = a + c$, zatem $x_n = a + nc$ (dla wszystkich n). Jednocześnie $f(x_n) = x_{n+1} = a + (n+1)c$, czyli

$$(1) \quad f(a + nc) = a + (n+1)c \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Analogicznie

$$(2) \quad f(b + nd) = b + (n+1)d \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

W myśl pierwszego z podanych warunków,

$$|f(a + nc) - f(b + nd)| \leq |(a + nc) - (b + nd)| = |a - b + n(c - d)|.$$

Po lewej stronie wstawiamy wyrażenia (1), (2) i dostajemy nierówności

$$(3) \quad |a - b + (n+1)(c - d)| \leq |a - b + n(c - d)| \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Dla dużych n wyrażenia ujęte w symbol wartości bezwzględnej mają wartość dodatnią (bo $c - d > 0$). Można więc opuścić moduły. Ale zależność (3) – po skasowaniu modułów – redukuje się do postaci $c - d \leq 0$; sprzeczność.

W konsekwencji funkcja $f(x) - x$ musi być stała.

Jasne, że każda funkcja postaci $f(x) = x + C$ spełnia wymagane warunki.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2017

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

739. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

- $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
- dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ ciąg (x_n) określony wzorami $x_0 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$ (dla $n = 1, 2, 3, \dots$) jest ciągiem arytmetycznym.

740. Obliczyć kres dolny wartości sumy

$$\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2},$$

gdy x, y, z mogą być dowolnymi liczbami dodatnimi, spełniającymi warunek $x + y + z = 1$.

740. Ustalmy liczby $x, y, z > 0$ o sumie równej 1. Funkcja $t \mapsto 1/t$ jest wypukła w przedziale $(0, \infty)$. Stosujemy do niej nierówność Jensena dla trójki punktów $1/(y^2 + z^2)$, $1/(z^2 + x^2)$, $1/(x^2 + y^2)$ z wagami x, y, z :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} \right)^{-1} \\ & \leq x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) = \\ & = xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) = \\ & = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx(1 - y) = \\ & = xy + yz + zx - 3xyz. \end{aligned}$$

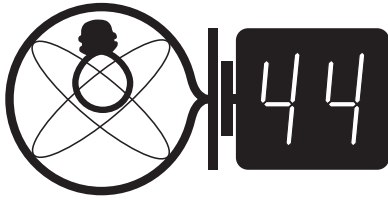
Można przyjąć, że $x \geq y$ oraz $x \geq z$. Wówczas $x \geq 1/3$ oraz

$$\begin{aligned} xy + yz + zx - 3xyz & = x(y + z) + yz(1 - 3x) \leq \\ & \leq x(y + z) = x(1 - x) \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

W ostatnim szacowaniu pierwsza nierówność staje się równością tylko dla $x = 1/3$, zaś druga – tylko dla $x = 1/2$. Stąd wniosek, że

$$\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} > 4 \quad \text{dla } x, y, z > 0.$$

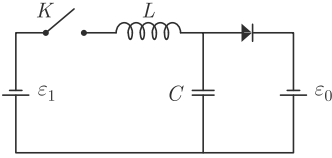
Gdyby dopuścić trójki liczb x, y, z , wśród których jedna jest zerem, rozważana suma nadal miałaby sens oraz przyjęłaby wartość 4 dla $x = y = 1/2$, $z = 0$. Przy założeniu, że $x, y, z > 0$, wartość 4 jest (jak widać) nieosiągalna; ale jest granicą badanej sumy np. dla $x = y = (1 - z)/2$, gdy $z \rightarrow 0$. Jest więc jej kresem dolnym.



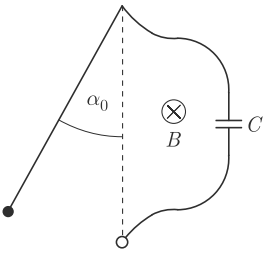
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2016

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

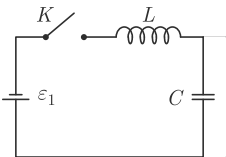
Przypominamy treść zadań:



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 630 ($WT = 2,85$), 631 ($WT = 3,5$), 632 ($WT = 2,45$), 633 ($WT = 3,55$) z numerów 1/2017 i 2/2017

Tomasz Wietecha	Tarnów	44+2,6 (12)
Michał Koźlik	Poznań	44+2,22 (4)
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,33
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Jan Zambrzycki	Białystok	37,23
Jacek Konieczny	Poznań	29,8
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77

637. Kondensator ładuje się podczas kontaktu z kulką, bo między końcami przewodzącej nici poruszającej się w polu magnetycznym powstaje różnica potencjałów. Zgodnie z prawem Faradaya, gdy wahadło przechodzi przez położenie równowagi, napięcie między końcami nici wynosi

$$(1) \quad U = \frac{1}{2} Bl^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega_0 Bl^2}{2},$$

gdzie ω_0 jest prędkością kątową wahadła w najniższym położeniu. Otrzymujemy ją z zasady zachowania energii, stosując przybliżenie małych kątów

$$(2) \quad \frac{m\omega_0^2 l^2}{2} = mgl(1 - \cos \alpha_0) \approx \frac{mgl\alpha_0^2}{2}.$$

Podczas ładowania kondensatora część energii kinetycznej wahadła zamienia się na energię pola elektrycznego w kondensatorze oraz wydziela się

636. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 mamy $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$. Jaki ładunek przepłynie przez źródło o sile elektromotorycznej ε_0 po zamknięciu klucza K ? Zakładamy, że opór omowy cewki i opory wewnętrzne źródeł są równe zero. Dioda jest idealna, czyli jej opór w kierunku przewodzenia wynosi zero, a w kierunku przeciwnym jest nieskończenie wielki. Przed zamknięciem klucza kondensator był nienaładowany.

637. Mała metalowa kulka o masie m , zawieszona na nieważkiej przewodzącej nici o długości l , wykonuje małe drgania z amplitudą kątową α_0 w płaszczyźnie pionowej, w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B (rys. 2). Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny drgań wahadła. Gdy wahadło przechodzi przez położenie równowagi, podłączony zostaje do niego za pomocą cienkich, wiotkich przewodów kondensator o pojemności C . Czas kontaktu jest bardzo krótki i można przyjąć, że w tym czasie kondensator zostaje całkowicie naładowany. Znaleźć nową amplitudę kątową drgań wahadła.

636. Rozważmy najpierw obwód przedstawiony na rysunku 3. Po zamknięciu klucza w chwili $t = 0$ natężenie prądu płynącego przez cewkę i ładunek na kondensatorze są równe zero. Spełnione są równania

$$\varepsilon_1 - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2 I}{dt^2} + \omega^2 I = 0,$$

gdzie $\omega = 1/\sqrt{LC}$. W obwodzie zachodzą drgania harmoniczne. Natężenie prądu płynącego przez cewkę osiąga maksymalną wartość, gdy znika jego pochodna po czasie, napięcie na kondensatorze równe jest wtedy sile elektromotorycznej źródła ε_1 . Kondensator ładuje się dalej kosztem energii pola magnetycznego w cewce. Gdy natężenie prądu $I = dQ/dt$ spada do zera, ładunek na kondensatorze osiąga maksymalną wartość Q_{\max} . Zgodnie z zasadą zachowania energii mamy $\varepsilon_1 Q_{\max} = Q_{\max}^2 / (2C)$, czyli maksymalne napięcie na kondensatorze wynosi $2\varepsilon_1$.

W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 dioda zaczyna przewodzić prąd, gdy napięcie na kondensatorze jest większe niż ε_0 . Gdy $\varepsilon_0 \geq 2\varepsilon_1$, przez źródło o sile elektromotorycznej ε_0 nie przepłynie żaden ładunek.

Niech $\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < 2\varepsilon_1$. Gdy napięcie na kondensatorze osiąga wartość ε_0 , prąd płynie przez diodę kosztem energii pola magnetycznego w cewce zgodnie z równaniem $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = LdI/dt$, czyli natężenie prądu maleje liniowo w czasie. Do chwili, gdy jego wartość spadnie do zera, napięcie na kondensatorze nie zmienia się. Oznaczmy przez q szukany ładunek przepływający przez źródło o sile elektromotorycznej ε_0 . Od chwili zamknięcia klucza do chwili, kiedy przez diodę przestaje płynąć prąd, przez źródło ε_1 przepływa ładunek $\varepsilon_0 C + q$. Bilans energetyczny dla całego procesu ma postać $\varepsilon_1(\varepsilon_0 C + q) = C\varepsilon_0^2/2 + q\varepsilon_0$. Stąd

$$q = \frac{C\varepsilon_0(2\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)}.$$

w postaci ciepła Q :

$$(3) \quad \frac{m\omega_0^2 l^2}{2} - \frac{m\omega_1^2 l^2}{2} = \frac{CU^2}{2} + Q.$$

Prędkość kątowa wahadła maleje do wartości ω_1 . Czas kontaktu kulki z kondensatorem jest bardzo krótki, możemy więc przyjąć, że napięcie U nie zmienia się podczas ładowania kondensatora. Źródło tego napięcia wykonuje zatem pracę qU , gdzie $q = CU$ jest ładunkiem, do jakiego naładował się kondensator. Stąd

$$(4) \quad \frac{CU^2}{2} + Q = CU^2 = \frac{C\omega_0^2 l^4 B^2}{4}.$$

Nową amplitudę kątową α_1 wahadła znajdujemy z równania $mgl\alpha_1^2/2 = m\omega_1^2 l^2/2$. Uwzględniając (2), (3) i (4), dostajemy

$$\alpha_1 = \alpha_0 \sqrt{1 - \frac{Cl^2 B^2}{2m}}.$$

Prosto z nieba: Ciężkie czarne dziury o masach gwiazdowych

Zjawisko zaszło w odległości 3 miliardów lat świetlnych stąd, czyli ponad dwukrotnie dalej niż układy odkryte poprzednio. Oznacza to, że detektory LIGO są dostatecznie czułe, by wykryć tego typu zjawiska w kuli o promieniu 1 Gpc! W tej objętości znajduje się 10^7 galaktyk podobnej do naszej.

Utrata masy jest proporcjonalna do zawartości pierwiastków cięższych od helu (odpowiedzialnych za nieprzezroczystość materii, a co za tym idzie, za ilość wiatru gwiazdowego zwiewanego z gwiazdy przez jej własne promieniowanie), gwiazdy musiałyby zawierać ich dużo mniej niż wynosi przeciętna w naszej Galaktyce.

Na początku czerwca zespoły naukowe LIGO (USA) i Virgo (projekt europejski, w którym uczestniczy także polska grupa badawcza) przedstawiły wyniki analizy trwającej wciąż kampanii obserwacyjnej O2: trzecią bezpośrednią detekcję fal grawitacyjnych. Sygnał został wykryty 4 stycznia 2017 i nazwany GW170104. Powstał on, podobnie jak poprzednie, w wyniku zapadnięcia się układu podwójnego masywnych czarnych dziur.

Masy składników oszacowano na 31 i 19 M_{\odot} . W wyniku ich połączenia powstała większa, wirująca (spin $\simeq 0,6$) czarna dziura o masie około 50 M_{\odot} . Oszacowanie masy znajduje się pomiędzy wartościami dla czarnych dziur w GW150914 i GW151226 i wynoszących, odpowiednio, 62 i 21 M_{\odot} . Masy te są znacznie większe niż znane z obserwacji promieniowania rentgenowskiego (emitowanego podczas akrecji materii ze zwykłej gwiazdy w układzie podwójnym) w naszej Galaktyce. Odkryliśmy zatem zupełnie niespodziewaną populację ciężkich czarnych dziur o masie „gwiazdowej”.

Najnowsza obserwacja dostarcza wskazówek o orientacji osi obrotu każdej z czarnych dziur. W zasadzie mogą się one obracać wokół osi dowolnie zorientowanych względem siebie i względem płaszczyzny, w której leżą ich orbity. Analiza danych sugeruje, że jeśli czarne dziury w GW170104 rotowały, to oś obrotu co najmniej jednej z nich nie jest równoległa do orbitalnego momentu pędu. To z kolei wywołuje pytanie, jak taki układ mógł powstać. Jedną z możliwości jest wspólna ewolucja dwóch masywnych gwiazd, które starzejąc się w układzie podwójnym, wybuchają kolejno jako supernowe, tworząc układ czarnych dziur. Emisja energii w falach grawitacyjnych zacieśnia orbitę aż do katastrofalnego końca obserwowanego jako GW170104. W tym przypadku spodziewalibyśmy się jednak raczej uporządkowanego (równoległego do orbitalnego momentu pędu) ustawienia osi rotacji czarnych dziur, odtwarzającego osie rotacji gwiazd, z których powstały. Alternatywnym sposobem wyprodukowania układu z losowo skierowanymi osiami obrotu jest przechwycenie jednej dziury przez drugą, np. w gęstym wnętrzu gromady kulistej. Obie możliwości są interesujące: wspólna ewolucja dwóch gwiazd oznacza, że musiały być bardzo masywne na początku ewolucji i zachować dostatecznie dużo masy do końca życia, należy jednak wyjaśnić niestandardową orientację osi obrotu. Tworzenie się układów podwójnych czarnych dziur w gromadach kulistych oznacza natomiast, że, być może, zyskują one masę stopniowo, przez kolejne kolizje.

Detekcja GW170104 posłużyła też do zbadania związku dyspersyjnego dla fal grawitacyjnych. Według ogólnej teorii względności fale podróżują zawsze z prędkością światła i nie ulegają dyspersji, ale ogólniejsze alternatywne teorie dopuszczają możliwość, że fale o różnych długościach poruszają się z różnymi prędkościami. Obserwacje bardzo mocno ograniczyły tę swobodę. Uzyskano także nowe górne ograniczenie na masę grawitonu: $7,7 \cdot 10^{-23} \text{ eV}/c^2$.

Michał BEJGER

Niebo w sierpniu

Sierpniowe noce słyną przede wszystkim z corocznego roju meteorów Perseidów, promieniujących prawie przez cały miesiąc nad wschodnim widnokregiem. Oprócz nich promieniuje jeszcze kilka dużo słabszych rojów, z których u nas dobrze widoczne są tylko κ Cygnidy mające swoje maksimum aktywności kilka dni po Perseidach. Oprócz meteorów na nocnym niebie świecą planety: Saturn na niebie wieczornym, Uran z Neptunem, gdy się już dobrze ściemni oraz Wenus na niebie porannym. Mars przebywa blisko Słońca i jest niewidoczny, natomiast Jowisza można obserwować

tylko tuż po zmierzchu, nisko nad horyzontem. Oczywiście warto śledzić wędrówkę Księżyca, który poza spotkaniami z planetami zakryje kilka dość jasnych gwiazd w gwiazdozbiorach Wieloryba i Byka. Srebrny Glob stanie się w sierpniu bohaterem dwóch zdarzeń widocznych na sporej części Ziemi: najpierw, 7 sierpnia, Księżyc w pełni zahaczy o cień naszej planety (nad Polską wездzie już zaćmiony), natomiast 21 sierpnia, podczas nowiu, zakryje on na krótki czas Słońce, doprowadzając do zaćmienia całkowitego. Tym razem Europa ma pecha, ponieważ zjawisko będzie widoczne

tylko z USA. W tym miesiącu dzień skraca się o dwie godziny. Stąd na obserwacje nocnego nieba można przeznaczać coraz więcej czasu.

Perseidy zaczynają pojawiać się pod koniec lipca i promieniają przez miesiąc. Początkowo zjawisk jest mało, lecz w okolicach maksimum aktywności, zawsze około 12 sierpnia, można spodziewać się nawet ponad 100 meteorów na godzinę. Niestety, w tym roku w obserwacjach roju przeszkadzał będzie silny blask Księżyca po pełni, przez co liczba zaobserwowanych zjawisk raczej nie osiągnie tego poziomu. Drugi z sierpniowych rojów, κ Cygnidy, maksimum swojej aktywności ma około 19 sierpnia, zatem w ich obserwacji Srebrny Glob nie będzie przeszkadzał. Jednak ten rój jest znacznie mniej obfity. Podczas maksimum można spodziewać się mniej niż 5 zjawisk na godzinę.

Z widocznych w sierpniu planet Układu Słonecznego bardzo dobre warunki ma tylko Saturn, który pod koniec miesiąca zmieni kierunek swojego ruchu z wstecznego na prosty, co oznacza, że jego najlepszy okres widoczności właśnie się kończy. Jednak jednocześnie ze zbliżaniem się Saturna do Słońca dzień się skraca, zatem pogarszanie się warunków jego obserwacji nastąpi stosunkowo wolno. Saturn w tym miesiącu prawie nie będzie zmieniał położenia względem okolicznych gwiazd, przebywając cały czas mniej niż 1° od gwiazdy 4. wielkości ξ Oph. Blask planety osłabnie w tym czasie z $+0,3$ do $+0,4^m$, tarcza zaś zmniejszy się z 18 do 17 sekund kątowych. Saturna czekają w sierpniu dwa spotkania z Księżycem: pierwsze 2 i 3 sierpnia, przy fazie Srebrnego Globu ponad 80%, drugie – 30 sierpnia, przy fazie o 20% mniejszej.

Przez prawie całe noce widoczne są ostatnie dwie planety Układu Słonecznego, czyli Neptun i Uran. Pierwsza z nich zbliża się do wrześniowej opozycji i wschodzi niedługo po zmierzchu. Druga natomiast wschodzi mniej więcej godzinę po pierwszej, a jej opozycja przypada w końcu drugiej dekady października. Neptun porusza się ruchem wstecznym, niedaleko dość jasnej gwiazdy λ Aquarii. W trakcie miesiąca Neptun zmniejszy dystans do niej ze 120 do 80 minut kątowych, będąc cały czas na wschód od niej. Blask planety to $+7,8^m$, stąd do jej zaobserwowania potrzeba przynajmniej lornetki. Uran zmieni kierunek swojego ruchu na początku sierpnia i przez cały miesiąc świecić będzie niewiele ponad 1° od gwiazdy 4. wielkości o Psc, przy czym jasność samej planety to $+5,7$ wielkości gwiazdowej. Zatem można ją dostrzec gołym okiem, ale lornetka na pewno ułatwi jej odszukanie i identyfikację. Księżyc spotka się z tymi planetami w środku miesiąca. Najpierw, 10 sierpnia, z Neptunem, przy fazie 95%. U nas oba ciała niebieskie oddzieli dystans ponad $1,5$ stopnia, natomiast na oceanie na południe od Afryki i na Antarktydzie dojdzie do zakrycia tej planety przez Księżyc. Z Uranem Srebrny Glob spotka się 3 dni później, przy tarczy oświetlonej w 73%.

Pojawiająca się na nieboskłonie w drugiej połowie nocy planeta Wenus przez cały miesiąc oddala się od Ziemi

i zbliża kątowo do Słońca, lecz czyni to powoli, stąd jej warunki obserwacyjne będą zmieniać się niewiele. W sierpniu blask planety wyniesie około -4^m . W trakcie miesiąca tarcza planety zmniejszy się z 15 do 12 sekund kątowych, faza zaś urośnie z 74 do 83%. Prawie cały miesiąc Wenus spędzi w gwiazdozbiorze Bliźniąt, przechodząc pod koniec sierpnia do Raka i zbliżając się do gromady otwartej gwiazd M44. 1 września Wenus minie ją w odległości nieco ponad 1° . Na 19 sierpnia planeta ma zaplanowane spotkanie z Księżycem w fazie 9%.

Srebrny Glob zacznie miesiąc w fazie po I kwadrze, 7 sierpnia przechodząc przez pełnię, 15 – przez ostatnią kwadrę, 21 – przez now i 29 sierpnia przez I kwadrę. Zatem jego blask nie będzie dokuczał w drugiej połowie miesiąca – nawet wtedy, gdy jego faza już sporo urośnie, a to ze względu na niekorzystne nachylenie ekliptyki do wieczornego widnokręgu, przez co Księżyc po nowiu zniknie z nieboskłonu zaraz po Słońcu. Oprócz spotkań z planetami Srebrny Glob zasłoni swoją tarczą kilka jasnych gwiazd. Niektóre z zakryć będzie można obserwować z Polski. Pierwsze z nich zdarzy się w nocy z 13 na 14 sierpnia, gdy tuż po godzinie 1 na prawie 60 minut za księżycową tarczą w fazie 62% zniknie gwiazda $\xi 2$ Cet, mająca jasność $+4,3^m$. Dobę później, tuż po godzinie 5. Księżyc w ostatniej kwadrze przesłoni jaśniejszą o $0,2^m$ gwiazdę 5 Tau, zaś jeszcze kolejnej nocy, z 15 na 16 sierpnia, Księżyc w fazie 36% przejdzie przez gromadę otwartą gwiazd Hiady. Seria zakryć jej jasnych gwiazd zacznie się po godzinie 1 od przesłonięcia świecącej z jasnością $+3,6^m$ gwiazdy γ Tauri, z tym że to zjawisko da się dostrzec jedynie na południowy wschód od linii, łączącej Dorohusk przez Dębicę z Nowym Targiem. Następnie, jeszcze z terenu Polski, widoczne będą zakrycia gwiazd 70, 71 oraz $\theta 1$ i 2 Tauri (ostatnie dwie gwiazdy już na jasnym tle nieba). Zakrycie Aldebarana nastąpi wtedy, gdy będzie on jeszcze nad widnokręgiem, lecz stanie się to w dzień, kilka minut po godzinie 9 naszego czasu. 17 sierpnia nad ranem Księżyc w fazie 27% zakryje gwiazdę 5. wielkości 115 Tau.

Jednak najciekawsze widoczne z Europy zjawisko związane z Księżycem w tym miesiącu to jego częściowe zaćmienie wieczorem 7 sierpnia. Pełne zaćmienie widoczne będzie w Australii, środkowej części Azji, wschodniej Afryce i na Antarktydzie. Faza maksymalna zaćmienia, około godziny 20:22 naszego czasu, wyniesie zaledwie 25%. O tej porze w wielu rejonach Polski Srebrny Glob będzie jeszcze pod widnokręgiem (np. w Łodzi Księżyc wejdzie w momencie maksymalnego zaćmienia). Zjawisko najlepiej widoczne będzie w Bieszczadach, gdzie w fazie maksymalnej Księżyc znajdzie się na wysokości 2° nad południowo-wschodnim widnokręgiem i będzie już 10 minut po zachodzie Słońca. Natomiast w Szczecinie przez fazę maksymalną Księżyc przejdzie jeszcze przed swoim wschodem. Jednak w całej Polsce nad widnokręgiem pojawi się wyraźnie wyszczerbiony Księżyc.

Ariel MAJCHER

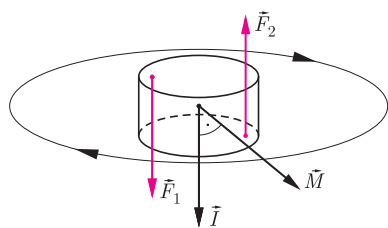
Fidget spinner okiem fizyka

Popularna ostatnio zabawka tzw. *fidget spinner* świetnie nadaje się do obserwacji zasady zachowania momentu pędu w praktyce. Budowa tej zabawki jest bardzo prosta: jej centralnym elementem jest łożysko, wokół którego obraca się płaski element, najczęściej trójramienny, ale występujący również w innych kształtach.

Zacznijmy od tego, czym różni się dobrze wykonany fidget spinner od źle wykonanego. Każdy, kto miał okazję pobawić się różnymi egzemplarzami, wie, że niektóre wprawione w ruch wirują bardzo stabilnie, bez wyczuwalnych drgań, można je postawić na stole, na nosie, czy gdzie tam jeszcze komuś przyjdzie do głowy. Niektóre natomiast wirując, drżą, co utrudnia wykonywanie sztuczek, ponieważ drżąc, łatwiej się zsuwają. Skąd biorą się te drgania?

Po pierwsze, oś obrotu, wyznaczona przez łożysko, może nie przechodzić przez środek masy wirującego elementu. Mając taki źle wykonany spinner, można zaobserwować, że aby łożysko nie drżało, musimy je trzymać bardzo mocno, dostarczając w ten sposób siły dośrodkowej, która jest konieczna, aby wymusić ruch obrotowy środka masy wirnika wokół osi łożyska. Kiedy uchwyt rozluźniamy, zabawka przechodzi do swobodnego ruchu wirowego wokół swojego środka masy, który nie pokrywa się z osią wyznaczoną przez łożysko, więc łożysko zatacza wtedy małe okręgi wokół środka masy zabawki, co kładąc sobie spinera na palcu, odczuwamy jako drgania. Podobny efekt obserwuje się zawsze, kiedy mamy do czynienia z obiektem wirującym wokół wyznaczonej osi, na przykład w kołach samochodowych. Dlatego zawsze po wymianie opon w samochodzie w celu wyeliminowania niepożądanych drgań należy je „wyważyć”, czyli przyczepić odpowiednie ciężarki w takim miejscu na obwodzie obręczy koła, aby jego środek masy pokrywał się z osią obrotu wyznaczoną przez łożysko.

Nawet jeżeli oś obrotu wyznaczona przez łożysko przechodzi przez środek masy wirującej części, to może się zdarzyć drugi rodzaj „usterki”, mianowicie oś obrotu



Momentu pędu \vec{I} spinera wirującego w kierunku ruchu wskazówek zegara (patrząc od góry) jest skierowany pionowo w dół. Aby zacząć pochylać go w stronę obserwatora, trzeba przyłożyć moment siły \vec{M} skierowany poziomo i celujący w obserwatora. Uzyskujemy to, przykładając parę sił oznaczonych kolorowymi strzałkami – jednym palcem naciskamy łożysko z prawej strony na dole, a drugim przyciskamy je z lewej strony na górze.

może nie pokrywać się z jedną z głównych osi tak zwanego *tensora bezwładności* wirnika. Każda bryła sztywna ma trzy prostopadłe osie zwane własnymi (bryły o pewnych symetriach mogą mieć nawet nieskończenie wiele osi własnych). Obrót wokół osi własnej wyróżnia się tym, że wektor momentu pędu i wektor prędkości kątowej mają ten sam kierunek. Jeżeli obrót odbywa się wokół osi, która nie jest osią własną, występuje zjawisko precesji – kierunek osi obrotu powoli się zmienia, zakreślając powierzchnię stożka. Precesja może występować w ruchu wirowym ciał swobodnych (np. oś obrotu Ziemi podlega precesji) lub może być wymuszona. Za pomocą spinera można również zaobserwować zjawisko precesji wymuszonej, podpierając go jednym palcem lub jeszcze lepiej (dla modeli z otworem w łożysku) nasadzając go na ołówek, który następnie stawiamy na czubku. Zaobserwujemy wtedy podobne chybotanie się (precesję), jak w przypadku staromodnego bąka, którymi dzieci bawiły się w dawnych czasach, na długo przed wynalezieniem spinnerów.

Wadliwie wyprodukowany spinner może więc przynajmniej czegoś nauczyć. Jeżeli jednak ktoś jest w posiadaniu idealnie wyważonego spinera, to może go łatwo „popsuć”, przyklejając kawałek plasteliny na jednym z ramion, i sprawdzić, jak to wpływa na jego ruch.

Jednak to, co dostarcza najwięcej zabawy ze spinnerami, to wykonywanie różnych sztuczek polegających na podrzucaniu, odbijaniu, łapaniu itp., tak aby zabawka cały czas wirowała. Wykonywanie tych ewolucji jest możliwe dzięki zasadzie zachowania momentu pędu. Gdyby nie opór powietrza i tarcie w łożysku, raz wprawiony w ruch wirowy spinner wirowałby dowolnie długo, ponieważ nie traciłby nadanego mu na początku momentu pędu, który ma nie tylko pewną wartość, ale również ustalony kierunek w przestrzeni. Dlatego podrzucając odpowiednio wirujący (wokół osi własnej) spinner, mamy gwarancję, że oś obrotu zachowa stałą orientację w przestrzeni w czasie lotu. Jest to tak zwany *efekt żyroskopowy* wykorzystywany w wielu urządzeniach mających „żyro” w nazwie.

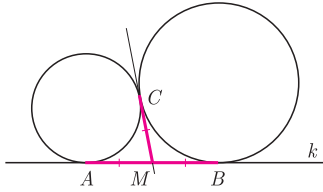
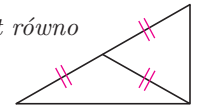
Zmiana kierunku osi obrotu oznacza zmianę momentu pędu i aby ją uzyskać, musimy zadziałać momentem siły. Łatwo to zaobserwować, wykonując prosty eksperyment: chwyć nieobracaający się spinner w dwa palce za łożysko i obróć go „do góry nogami”, a następnie zrób to samo z rozpędzonym spinnerem, a przekonasz się, że w drugim przypadku zabawka będzie stawać pewien „opór”, tym większy, im szybciej wiruje i im szybciej chcemy wykonać obrót. Obracając spinner szybko w tę i z powrotem, czujemy opuszkami palców, że siły, które musimy przyłożyć do łożyska, zmieniają się w zależności od kierunku obrotu. Przy pierwszym kontakcie z taką zabawką jej reakcja na próbę obrócenia wydaje się nieintuicyjna. Jest to związane z wektorową naturą momentu pędu i momentu siły, co zostało wyjaśnione na rysunku. Warto podkreślić, że trzymając za łożysko, przykładamy zawsze moment siły, którego kierunek jest prostopadły do kierunku wektora momentu pędu, dlatego zmienia się tylko jego kierunek, a nie wartość. Podobnie dzieje się w ruchu jednostajnym po okręgu, gdzie siła jest prostopadła do prędkości i zmienia tylko kierunek prędkości, nie zmieniając wartości.

Szymon CHARZYŃSKI

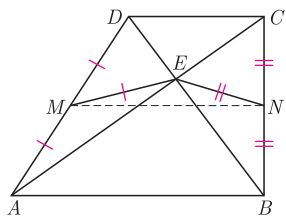
Środek przeciwprostokątnej

Joanna JASZUŃSKA

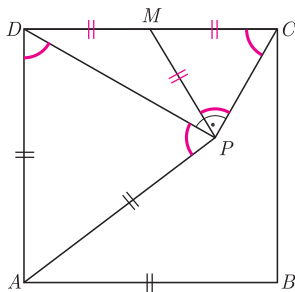
Fakt (*). W trójkącie prostokątnym środek przeciwprostokątnej jest równo odległy od wierzchołków. Również na odwrót, jeśli środek okręgu opisanego leży na boku trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.



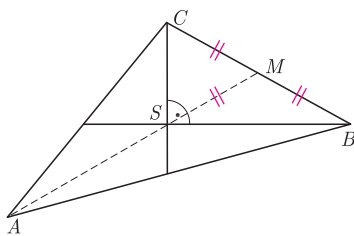
Rys. 1



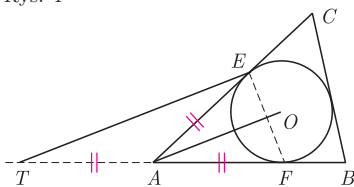
Rys. 2



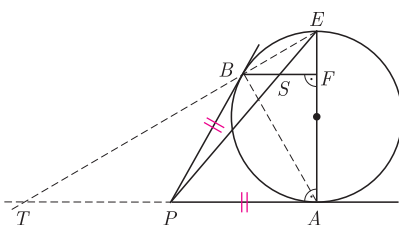
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Zadania 2 i 3 pochodzą odpowiednio z XII i XI gimnazjalnej Olimpiady Matematycznej. Polecam też artykuł w olimpijskiej gazecie Kwadrat nr 19.

Powyższy prosty fakt okazuje się bardzo przydatny w wielu zadaniach.

1. Dwa okręgi, styczne zewnętrznie w punkcie C , są styczne do prostej k w punktach A i B . Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.
2. Wykaż, że jeżeli przekątne pewnego trapezu są prostopadłe, to suma długości podstaw tego trapezu jest nie większa od sumy długości jego ramion.
3. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P , że $AP = AB$ oraz $\sphericalangle CPD = 90^\circ$. Wykaż, że $DP = 2 \cdot CP$.
4. W trójkącie ABC środkowe poprowadzone z wierzchołków B i C są prostopadłe oraz AD jest wysokością. Wykaż, że $AD \leq \frac{3}{2}BC$.
5. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AC i AB odpowiednio w punktach E i F . Punkt O jest środkiem tego okręgu, a punkt T jest symetryczny do punktu F względem punktu A . Wykaż, że proste ET i AO są równoległe.
6. Proste PA i PB są styczne do okręgu Γ odpowiednio w punktach A i B . Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu B na średnicę AE okręgu Γ . Wykaż, że środek odcinka BF leży na prostej EP .

Rozwiązania

R1. Niech M będzie punktem przecięcia prostej k z prostą styczną do obu okręgów, przechodzącą przez C (rys. 1). Wówczas $MA = MC = MB$ jako odcinki stycznych. Teza wynika z faktu (*). \square

R2. Oznaczmy odpowiednio przez M i N środki ramion AD i BC trapezu, a przez E punkt przecięcia jego przekątnych (rys. 2). Wówczas na mocy nierówności trójkąta $MN \leq ME + NE = \frac{1}{2}(AD + BC)$, przy czym ostatnia równość wynika z faktu (*). Jednocześnie w trapezie $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$, co kończy dowód. \square

R3. Trójkąt DAP jest równoramienny, gdyż $AP = AB = AD$ (rys. 3). Ponadto $\sphericalangle ADP = 90^\circ - \sphericalangle CDP = \sphericalangle DCP$. Niech M będzie środkiem boku CD trójkąta prostokątnego CDP . Wówczas trójkąt CMP jest równoramienny i na mocy powyższej równości kątów podobny do trójkąta DAP . Stąd $DP/CP = DA/CM = DC/CM = 2$, co kończy dowód. \square

R4. Niech M będzie środkiem boku BC , a S — środkiem ciężkości trójkąta ABC (rys. 4). Wówczas $AD \leq AM = 3SM = 3 \cdot \frac{1}{2}BC$. \square

R5. Trójkąt EAF jest równoramienny, gdyż $AE = AF$ jako odcinki stycznych do okręgu (rys. 5). Jego podstawa EF jest zatem prostopadła do dwusiecznej AO kąta EAF . Jednocześnie $AT = AF = AE$, więc z faktu (*) wynika, że proste EF i ET również są prostopadłe, co kończy dowód. \square

R6. Oznaczmy przez S punkt przecięcia prostych EP i BF , a przez T — punkt przecięcia prostych EB i AP (rys. 6). Obydwie proste BF i AP są prostopadłe do EA , więc trójkąty EBF oraz ETA są podobne i $BS/SF = TP/PA$. Wobec powyższego wystarczy dowieść, że P jest środkiem odcinka TA .

Kąt ABE jest prosty (gdyż EA jest średnicą okręgu), stąd także kąt ABT jest prosty. Odcinki PA i PB są równe jako styczne do okręgu. Wobec tego punkt P leży na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABT i zarazem na symetralnej jednej z przyprostokątnych, jest więc środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, czyli także środkiem boku TA , co kończy dowód. \square

Zadanie domowe

7. W czworoboku $ABCD$ zachodzą równości: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$, $AB = 10$, $CD = 6$. Wykaż, że odległość między prostymi AB i CD nie przekracza 4.