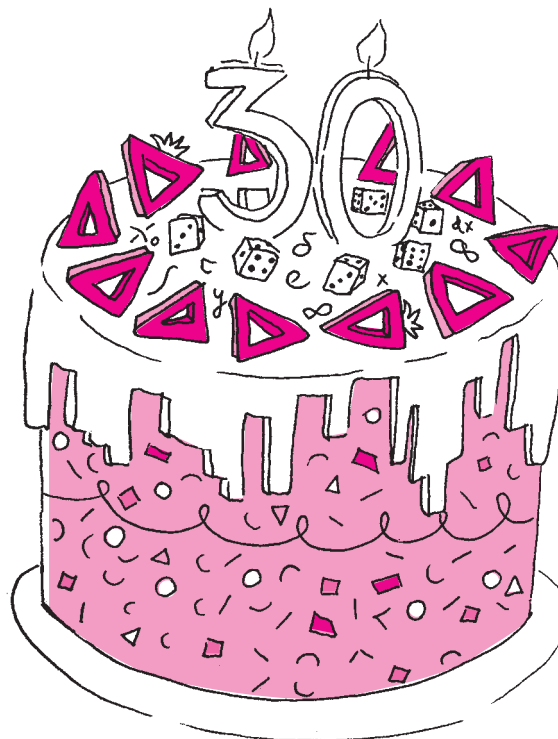


W kolejnym numerze napiszemy, kto ma 30. urodziny.



## SPIS TREŚCI NUMERU 7 (518)

Abakus – najstarsze urządzenie rachunkowe <i>Bartosz Klin</i>	str. 1
Liczenie ryb w jeziorze metodą statystyczną i śliczną, choć probabilistyczną <i>Wojciech Niemirowicz</i>	str. 4
Jak zwalczać losowość w grach <i>Bartłomiej Żak</i>	str. 6
O zastosowaniach <i>Combinatorial Nullstellensatz</i> <i>Jacek Dymel</i>	str. 8
 Zadania	str. 10
Wyniki olimpiad 2016/2017	str. 11
Superkomputery <i>Paweł Artymowicz</i>	str. 15
Migawka informatyczna: Algorytmy strumieniowe	str. 18
Najpiękniejsze zadanie geometryczne	str. 19
Klub 44	str. 20
Prosto z nieba: Czarna dziura rozmiaru M	str. 22
Niebo w lipcu	str. 23
Jedno zdanie	str. 24
 Wędrowanie po sześcianie <i>Joanna Jaszewska</i>	str. 25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia;  
rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl) lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Abakus – najstarsze urządzenie rachunkowe

Bartosz KLIN\*

\*Instytut Informatyki, Wydział MIMUW

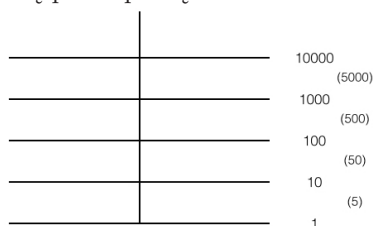
Każdy wie, że starożytni Rzymianie, a za nimi średniowieczni Europejczycy, zapisywali liczby nie cyframi znanymi nam dziś jako arabskie, a za pomocą tak zwanego systemu rzymskiego. W podstawowej wersji system ten opierał się na siedmiu znakach:

- I = 1,
- V = 5,
- X = 10,
- L = 50,
- C = 100,
- D = 500,
- M = 1000.

System ten do dziś jest stosowany na tyle często, że wciąż uczymy go dzieci w szkołach. Rzadko jednak zastanawiamy się nad tym, jak tak naprawdę rachowano na liczbach zapisywanych w ten sposób. Łatwo powiedzieć, że system rzymski ostatecznie odszedł do lamusa, bo był „niewygodny w użyciu nawet przy prostych działaniach”. Pamiętajmy jednak, że system ten niepodzielnie królował w Europie przez ponad tysiąc lat! Przez ten czas posługiwali się nim na co dzień kupcy, księgowi, intendenci i bankierzy i musieli mieć w tym dużą wprawę, mimo że z pewnością nie wszyscy mieli talent matematyczny. Jak sobie z tym radzili? Czy dzieci uczono na pamięć jakiejś rzymskiej tabliczki mnożenia, w której stało np.  $V \cdot V = XXV$  czy  $V \cdot X = L$ ?

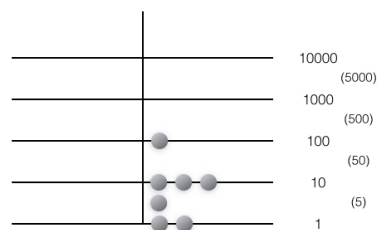
Nic z tych rzeczy. Dawni rachmistrze rzeczywiście liczili bardzo sprawnie, ale zupełnie innymi metodami niż znane nam dziś „metody pisemne”. Zamiast zapisywać po kolei częściowe rezultaty rachunków na papierze, posługiwali się urządzeniem zwanym *abakusem*, który był pierwowzorem znanych nam liczydeł.

Abakus to bardzo stary wynalazek, który po raz pierwszy pojawił się u Sumerów około 2700 lat p.n.e. i był stopniowo udoskonalany, aż w VIII–V wieku p.n.e. osiągnął dojrzałą formę. W najprostszej wersji jest to kilka równoległych linii przeciętych linią prostokątną.



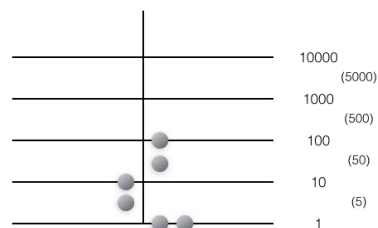
Na równoległych liniach umieszcza się kamyki (lub inne małe przedmioty) oznaczające odpowiednio jedność, dziesiątki, setki itd. Można je także umieszczać pomiędzy liniami, oznaczając w ten sposób piątki, pięćdziesiątki, pięćsetki itd. Kamienie umieszczone na lewo od pionowej linii środkowej oznaczają liczby *ujemne*. Dzięki nim można reprezentować tę samą liczbę na różne sposoby.

Przykładowo, liczbę 137 można przedstawić tak



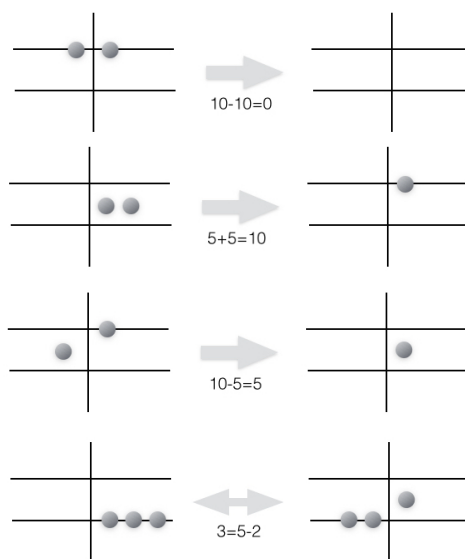
$$137 = 100 + (10 + 10 + 10) + 5 + (1 + 1)$$

albo tak

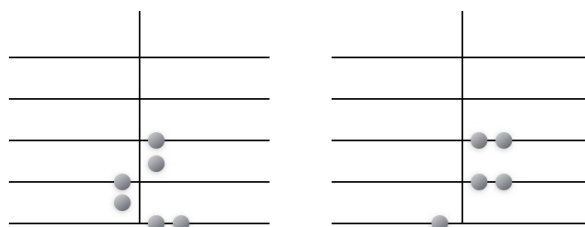


$$137 = 100 + 50 - 10 - 5 + (1 + 1).$$

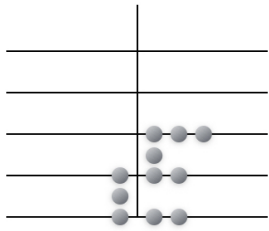
Można podać kilka prostych reguł przekładania kamieni, które upraszczają reprezentację, nie zmieniając wartości reprezentowanej liczby.



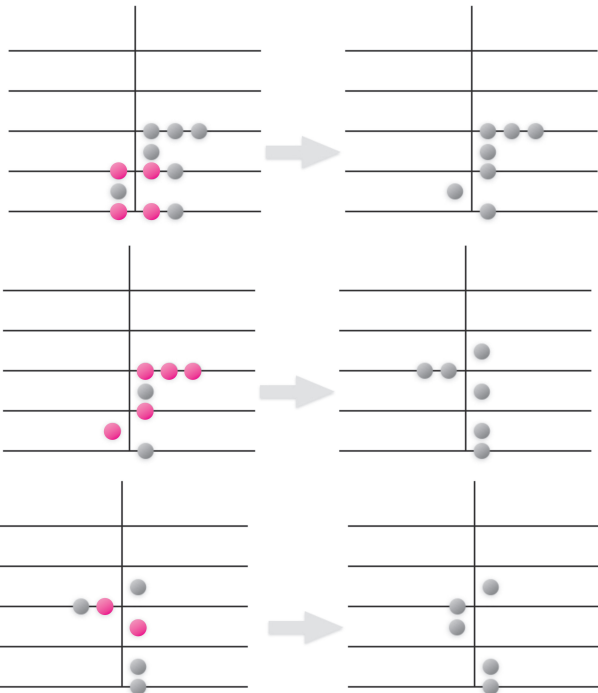
Korzystając z tych reguł, wprawny rachmistrz mógł szybko dodawać duże liczby. Przykładowo, aby dodać 137 do 219,



należało połączyć wszystkie kamienie reprezentujące obie liczby na abakusie,



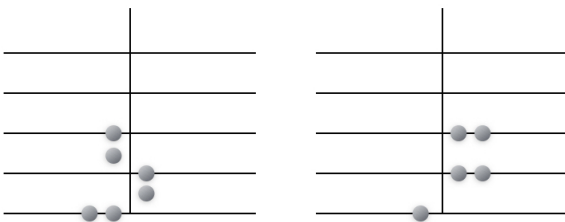
a następnie upraszczać zgodnie z regułami



i wreszcie odczytać wynik

$$500 - 100 - 50 + 5 + 1 = 356.$$

Odejmowanie jest równie łatwe: aby odjąć 137 od 219, wystarczy przedstawić odejmowaną liczbę symetrycznie, zamieniając lewą i prawą stronę,



a następnie postępować, jak przy dodawaniu.

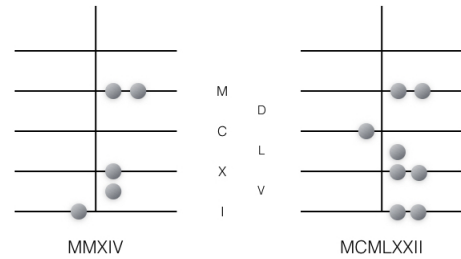
Zauważmy, że rachunki na abakusie całkiem dobrze pasują do rzymskiego systemu zapisywania liczb.

Przykładowo, aby wykonać odejmowanie

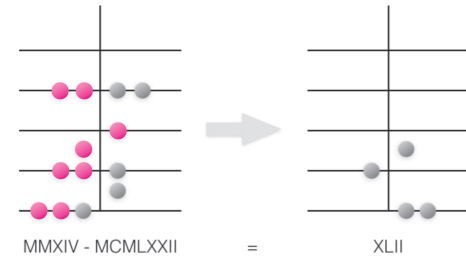
$$\text{MMXIV} - \text{MCMLXXII} = ?,$$

należy rozmieścić kamienie na abakusie, przestrzegając zasady, że cyfry, które występują przed cyframi odpowiadającymi większym liczbom (tak jak C występuje przed M w liczbie MCMLXXII),

kładziemy po „ujemnej” stronie abakusa

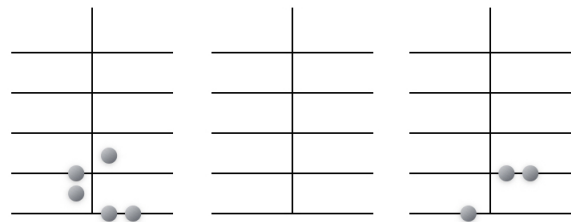


a następnie wykonać zwykle odejmowanie

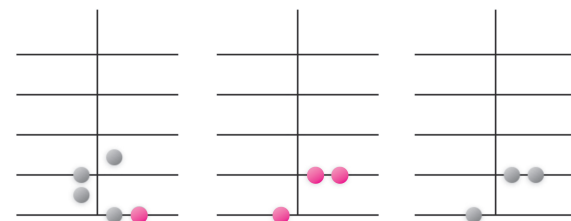


i odczytać wynik XLII.

Mnożenie na abakusie jest tylko nieco bardziej skomplikowane. Zilustrujemy je na przykładzie. Aby obliczyć iloczyn  $37 \times 19$ , użyjemy trzech abakusów. Na dwóch ustawimy czynniki, a na trzecim – środkowym – obliczymy wynik.



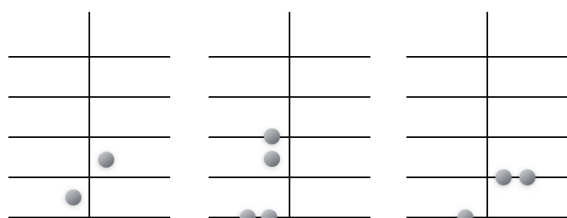
Mnożenie rozpoczynamy od wybrania z abakusa po lewej stronie jednego kamienia położonego na linii jedności. Zdejmujemy ten kamień, a na środkowym abakusie dokładamy kopię ustawienia z prawego abakusa.



Następnie powtarzamy tę operację dla wszystkich kamieni po lewej stronie na liniach jedności, dziesiątek, setek itd. (kamienie leżące pomiędzy liniami zostawiamy na razie w spokoju). Pamiętajmy przy tym, że:

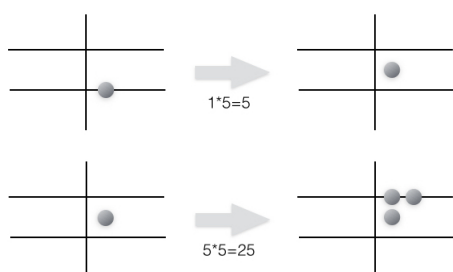
- jeżeli po lewej zdejmujemy kamień z linii dziesiątek, to liczbę z prawej strony kopiujemy na środek o jedną linię wyżej; jeżeli zdejmujemy kamień z linii setek, to kopiujemy o dwie linie wyżej itd.,
- jeżeli po lewej zdejmujemy kamień po lewej stronie pionowej linii, tzn. żeton „ujemny”, to kopiując liczbę z prawej na środek, zamieniamy lewą i prawą stronę.

W naszym przykładzie, po uproszczeniu, wygląda to tak

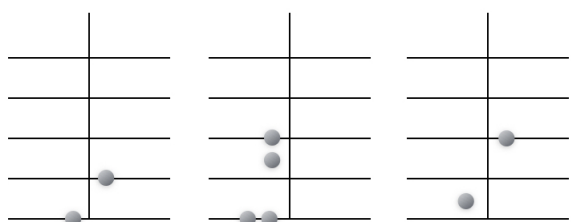


Doszlśmy do sytuacji, w której po lewej stronie nie ma już żadnego kamienia na żadnej linii. Aby poradzić sobie z kamieniami pomiędzy liniami (na pozycji piętek, pięćdziesiątek itd.), liczbę na lewym abakusie podzielimy przez 5, a na prawym – pomnożymy przez 5.

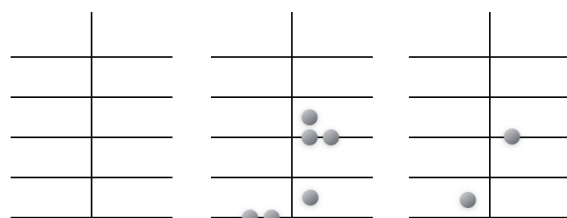
Dzielenie przez 5 po lewej jest bardzo łatwe, bo wszystkie kamienie leżą tam pomiędzy liniami. Wystarczy każdy z nich przesunąć w dół na najbliższą linię. Mnożenie przez 5 po prawej stronie nie jest dużo trudniejsze, wystarczy dla każdego kamienia zastosować jedną z poniższych reguł



i ewentualnie uprościć wynik. W naszym przykładzie otrzymujemy



Dalej postępujemy jak poprzednio, zdejmując po kolei kamienie z lewej strony, i za każdym razem upraszczając wynik. Na końcu otrzymujemy



Teraz wystarczy odczytać wynik ze środkowego abakusa

$$500 + (100 + 100) + 5 - (1 + 1) = 703 = 37 \times 19.$$

Dzielenie na abakusie nie jest dużo bardziej skomplikowane. Przy odrobinie wprawy wszystkie te obliczenia wykonuje się szybko i bez większego wysiłku. Nic dziwnego, że przez stulecia abakus, uzupełniony o podstawową obsługę ułamków, był podstawowym narzędziem pracy dla kupców i ekonomów.

Zaletą abakusa jest jego prosta konstrukcja.

Wystarczy mieć garść kamieni czy innych małych przedmiotów, narysować na piasku kilka linii i można zacząć rachunki. Nie trzeba też znać tabliczki mnożenia! Do prostych, codziennych obliczeń można tę konstrukcję jeszcze uprościć i zrezygnować z podziału na lewą (ujemną) i prawą (dodatnią) część. Praktyczni Rzymianie konstruowali w ten sposób przenośne, wygodne abakusy, do których żetony były przymocowane na stałe. Zamiast kłaść je i zdejmować z linii, można je było przesuwając, aby zaznaczyć, które z nich należą do reprezentowanej liczby. W ten sposób powstał pierwowzór dzisiejszych liczydeł.

Abakus przez stulecia niepodzielnie królował w Europie jako narzędzie rachunkowe. Zaczęło się to zmieniać dopiero w XII wieku, kiedy zawitał do Europy wynalazek z Indii: notacja pozycyjna i cyfry dziesiętne, zwane dziś arabskimi, wraz z zerem i z zupełnie nowymi metodami obliczania operacji arytmetycznych, dobrze nam dziś znanymi jako dodawanie, mnożenie i dzielenie pisemne „pod kreską”.

Nowe metody przyjmowały się z oporami. Europejczycy, przyzwyczajeni do tradycyjnych oznaczeń rzymskich, nieufnie podchodzili do nowych i niezrozumiałych znaków, które – co gorsza – pochodziły spoza świata chrześcijańskiego. Bankierom we Florencji w 1299 roku zakazano używania cyfr arabskich, a Uniwersytet w Padwie w 1348 roku zarządził, że cenniki sprzedawanych książek należy sporządzać „nie cyframi, a zrozumiałymi literami”. Spór między stosującymi nowe metody *algorystami* a konserwatywnymi *abakistami* trwał ponad trzy stulecia. Wreszcie jednak zalety zapisu pozycyjnego, a także upowszechnienie stosunkowo taniego papieru, na którym można było liczyć pisemnie, przeważały i w XVI wieku abakus, najstarsze urządzenie obliczeniowe, ostatecznie przeszedł do historii.

Rzymski system liczbowy natomiast, o czym świadczy choćby niniejsze zdanie, nawet w XXI wieku ma się dobrze.



Spór między algorystami (po lewej) i abakistami (po prawej), rycina z XVI wieku

# Liczenie ryb w jeziorze metodą statystyczną i śliczną, choć probabilistyczną

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wojciech NIEMIRO\*

W jeziorze pływa  $r$  ryb, ale liczby  $r$  nie znamy. Chcielibyśmy tę liczbę oszacować, nie uciekając się do osuszenia jeziora. Powiedzmy, że dysponujemy wędką, puszką farby i odrobiną wiedzy ze statystyki. Łowimy sobie jedną rybkę po drugiej i wrzucamy z powrotem do jeziora, krzywdy żadnej rybce nie czyniąc. Przed wrzuceniem do wody malujemy rybce kreseczkę na ogonku. Rybka złowiona powtórnie otrzymuje drugą kreseczkę. Jeśli zdarzy się złowić tę samą rybkę trzeci raz, domalowujemy trzecią kreseczkę i tak dalej. Wyniki naszych połowów zapisujemy w postaci ciągu  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $x_i$  oznacza liczbę kreszek na ogonku  $i$ -tej złowionej ryby przed wrzuceniem do jeziora. Jeśli, na przykład,

$$\mathbf{x} = (1, 1, 2, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2),$$

to powtarzaliśmy połów 25 razy, złowiliśmy 15 różnych ryb, w tym jedną czterokrotnie, dwie trzykrotnie i trzy dwukrotnie. Jasne, że ciąg  $\mathbf{x}$  zawiera pewną informację o nieznannej liczbie  $r$ . Duża liczba wyrazów ciągu różnych od jedynki (czyli ryb złowionych wielokrotnie) wskazuje na to, że  $r$  jest „prawdopodobnie małe”. Postaram się pokazać, jak to intuicyjne rozumowanie uściślić i sformułować wnioski w bardziej konkretnej, ilościowej postaci. Przy okazji zaprezentuję kilka ważnych idei, stojących u podstaw statystyki matematycznej.

## Model probabilistyczny

Oczywiście, życie w jeziorze jest bardziej skomplikowane niż matematyka. Żeby coś obliczyć i przeprowadzić porządne rozumowanie, trzeba przyjąć szereg upraszczających założeń.

- Założmy, że liczba  $r$  jest niezmienna (ryby nie giną ani nie rozmnażają się).
- Pomiędzy kolejnymi połowami ryby całkowicie „mieszają się”.  
Mówiąc dokładniej, zakładamy, że w każdym kolejnym połowie prawdopodobieństwo wyciągnięcia każdej z ryb jest jednakowe, równe  $1/r$ .

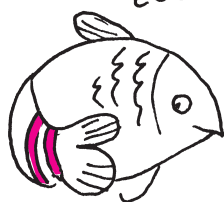
Wyidealizowany model pozwala obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania konkretnego wyniku połowu. Niech symbol  $P_r(\mathbf{x})$  oznacza prawdopodobieństwo otrzymania wyniku  $\mathbf{x}$  przy założeniu, że nieznaną liczbą ryb jest równa  $r$ . Dla przykładowych danych przytoczonych powyżej mamy

$$\begin{aligned} P_r(\mathbf{x}) &= P_r(1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2) \\ &= \frac{r}{r} \cdot \frac{r-1}{r} \cdot \frac{2}{r} \cdot \frac{r-2}{r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{r-3}{r} \cdot \frac{r-4}{r} \cdot \dots \cdot \frac{11}{r} \cdot \frac{3}{r} \cdot \frac{10}{r} \\ &= \frac{r(r-1) \cdot \dots \cdot (r-14)}{r^{25}} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 10) \\ &= \frac{(r)_{15}}{r^{25}} \cdot 1108800, \end{aligned}$$

gdzie użyliśmy oznaczenia  $(r)_m = r(r-1) \cdot \dots \cdot (r-m+1)$ . Zauważmy, że 15 jest liczbą jedynek w ciągu  $\mathbf{x}$  (liczbą różnych złowionych ryb). Łatwo wyjaśnić wyżej napisany wzór, przyglądając się kolejnym ułamkom w drugiej linii:

1. Pierwszy wyraz ciągu,  $x_1$ , zawsze musi być równy 1: na początku w jeziorze pływa  $r$  ryb i wszystkie są nieoznakowane. Pierwszy czynnik jest równy  $r/r = 1$ .
2. Po pierwszym połowie w jeziorze pływa  $r-1$  ryb nieoznakowanych i jedna ryba oznaczona jedną kreską. Stąd prawdopodobieństwo otrzymania  $x_2 = 1$  (wyłowienia nowej rybki) wynosi  $(r-1)/r$ .
3. Jeśli  $x_1 = 1$  i  $x_2 = 1$ , to po drugim połowie w jeziorze pływa  $r-2$  ryb nieoznakowanych i dwie ryby oznaczone jedną kreską. Prawdopodobieństwo otrzymania  $x_3 = 2$  (wyłowienia oznakowanej rybki) wynosi więc  $2/r$ .

CZY  
TO  
ZEJDZIE ?



## Rozwiązanie zadania M 1534.

Niech  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  będzie sześciokątem foremnym o boku 1, a  $O$  będzie środkiem okręgu opisanego na tym sześciokącie. Wówczas

$$S = \{O, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

jest siedmioelementowym zbiorem spełniającym warunki zadania, gdyż punkt  $A_i$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $OA_{i-1}A_{i+1}$  dla  $i = 1, 2, \dots, 6$  (przyjmujemy  $A_6 = A_0$  i  $A_7 = A_1$ ).

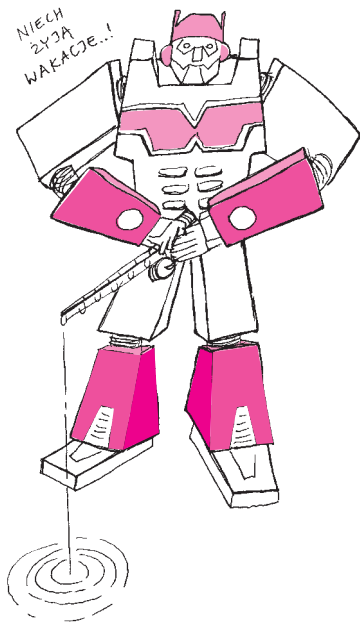
**Uwaga.** Powyższy przykład można zastosować do konstrukcji zbioru  $n$ -elementowego spełniającego zadane warunki dla dowolnego  $n \geq 7$ . Czytelnika zachęcamy do rozstrzygnięcia, czy istnieje odpowiedni zbiór mocy 6 lub mniejszej.

Oznaczmy przez  $B_i$  środek okręgu opisanego na trójkącie  $OA_iA_{i+1}$  dla  $i = 1, 2, \dots, 6$ , a przez  $\tau$  – dowolną translację o wektor długości większej od 2. Wówczas, jeżeli  $n = 7k + r$  dla  $k \geq 1$  oraz  $r \in \{0, 1, \dots, 6\}$ , to zbiór

$$\bigcup_{i=1}^r \{B_i\} \cup \bigcup_{\ell=0}^{k-1} \tau^\ell(S)$$

ma  $n$  elementów i spełnia warunki zadania ( $\tau^\ell$  oznacza  $\ell$ -krotne złożenie  $\tau$ ).





4. Jeśli  $x_1 = 1, x_2 = 1$  i  $x_3 = 2$ , to po trzecim połowie w jeziorze pływa  $r - 2$  ryb nieoznakowanych. Prawdopodobieństwo otrzymania  $x_4 = 1$  (wyłowienia jednej z tych nieoznakowanych) wynosi  $(r - 2)/r$ .
5. Jeśli  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$  i  $x_4 = 1$ , to po czwartym połowie w jeziorze pływa jedna ryba oznaczona dwiema kreskami. Prawdopodobieństwo otrzymania  $x_5 = 3$  (wyłowienia właśnie tej rybki) wynosi  $1/r$ .

I tak dalej. Proponuję, żeby Czytelnik samodzielnie prześledził pochodzenie dalszych ułamków w naszym wzorze.

### Wiarygodność

Wielkość  $P_r(\mathbf{x})$  jest funkcją dwóch argumentów:  $\mathbf{x}$  jest wynikiem doświadczenia losowego, a  $r$  jest nazywane parametrem. Możliwe są dwa punkty widzenia, charakteryzujące dwie różne dziedziny matematyki.

- Jeśli  $r$  jest ustalone (w domyśle – znane), to  $P_r(\mathbf{x})$  rozważane jako funkcja argumentu  $\mathbf{x}$  nazywa się *prawdopodobieństwem* (dokładniej – rozkładem prawdopodobieństwa). To jest punkt widzenia probabilistów.
- Jeśli  $\mathbf{x}$  jest ustalone (w domyśle – znane), to  $P_r(\mathbf{x})$  rozważane jako funkcja argumentu  $r$  nazywa się *wiarygodnością*. To jest punkt widzenia statystyków matematycznych.

W języku potocznym prawdopodobieństwo i wiarygodność są niemal synonimami, ale w naszych rozważaniach różnica między tymi pojęciami jest istotna. Zadanie, które postawiliśmy na początku tego artykułu: oszacowanie nieznaney liczby  $r$  na podstawie obserwacji  $\mathbf{x}$  – należy do domeny statystyki.

Nasuwa się pomysł, że rozsądnym oszacowaniem parametru  $r$  jest taka wartość  $\hat{r}$ , która maksymalizuje wiarygodność

$$P_{\hat{r}}(\mathbf{x}) = \max_r P_r(\mathbf{x}).$$

Mówimy, że  $\hat{r}$  jest *estymatorem największej wiarygodności* (ENW). Wróćmy do naszego przykładu. Dla ciągu  $\mathbf{x}$ , przytoczonego na początku artykułu, wiarygodność osiąga maksimum dla  $r = 21$ . Chciałoby się powiedzieć, że „21 jest najbardziej prawdopodobną liczbą ryb”. Ale, ale! *Nie wolno* tak mówić! W naszym modelu  $r$  nie jest wynikiem jakiegoś doświadczenia losowego, a więc nie można mówić o „prawdopodobieństwie otrzymania  $r$ ”. Wobec tego statystycy mówią: „21 jest najbardziej *wiarygodną* liczbą ryb”. Jest to wybieg językowy, który ukrywa dość zawiłą i niewygodną interpretację ENW. „Najbardziej prawdopodobny” po prostu znaczy „najczęściej pojawiający się w wielokrotnych powtórzeniach doświadczenia losowego”. Ale co znaczy „najbardziej wiarygodny”?

- ENW to jest taka wartość parametru, dla której, jeśliby wielokrotnie powtarzać doświadczenie losowe, to częściej otrzymywalibyśmy taki wynik, jaki w rzeczywistości otrzymaliśmy, w porównaniu z innymi możliwymi wartościami parametru.

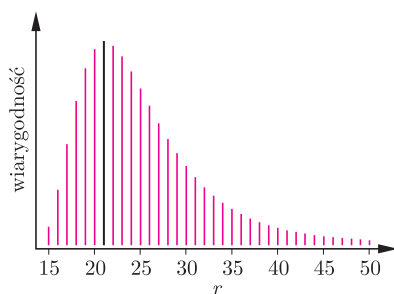
### Dostateczność

Jak wynika z naszych dotychczasowych rozważań, wzór na wiarygodność w naszym rybackim zadaniu ma postać

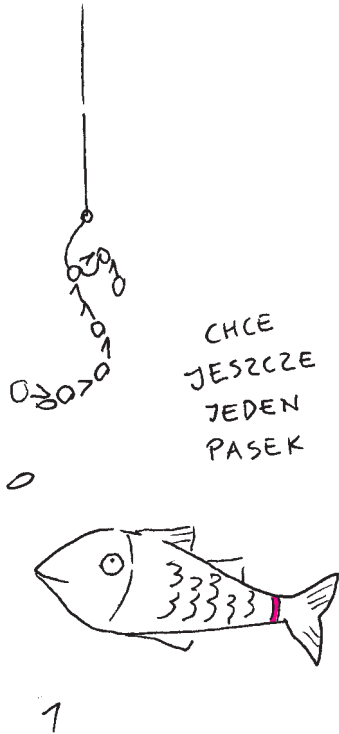
$$P_r(\mathbf{x}) = P_r(x_1, \dots, x_n) = \frac{\binom{r}{m}}{r^n} \cdot g(\mathbf{x}),$$

gdzie  $m = m(\mathbf{x})$  jest liczbą jedynek w ciągu  $\mathbf{x}$ , zaś  $g(\mathbf{x})$  jest funkcją  $\mathbf{x}$ , niezależną od nieznanego  $r$ . Co prawda, ta funkcja jest raczej skomplikowana, ale nie będzie nam potrzebna! Zauważmy, że ENW możemy obliczyć, maksymalizując wyrażenie  $P_r(\mathbf{x})$  z pominiętym czynnikiem  $g(\mathbf{x})$ . W rezultacie otrzymane oszacowanie  $\hat{r} = \hat{r}(\mathbf{x})$  zależy tylko od  $m = m(\mathbf{x})$ . Okazuje się, że tylko  $m$ , liczba jedynek, zawiera informację o nieznaney liczbie  $r$ , wszystkie inne wielkości związane z wektorem  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  są nieistotne! Mówimy, że  $m = m(\mathbf{x})$  jest *statystyką dostateczną*. Następujące piękne rozumowanie przekona nas, że tak jest naprawdę. Ponieważ mamy

$$P(\mathbf{x}|r) = L(r, m(\mathbf{x})) \cdot g(\mathbf{x})$$



Wykres wiarygodności dla  $m = 15$  i  $n = 25$ . Grubsza czarna linia wskazuje ENW  $\hat{r} = 21$ .



dla pewnej funkcji  $L(r, m)$ , to zgodnie z definicją prawdopodobieństwa warunkowego

$$P_r(\mathbf{x}|m) = \frac{P_r(\mathbf{x})}{P_r(m)} = \frac{P_r(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x}':m(\mathbf{x}')=m} P_r(\mathbf{x}')} = \frac{L(r, m) \cdot g(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x}':m(\mathbf{x}')=m} L(r, m) \cdot g(\mathbf{x}')} = \frac{g(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x}':m(\mathbf{x}')=m} g(\mathbf{x}')} = P(\mathbf{x}|m).$$

Prawdopodobieństwo warunkowe  $P_r(\mathbf{x}|m)$  nie zależy od  $r$ , dlatego na końcu opuściliśmy indeks  $r$ . Przeprowadźmy następujące doświadczenie myślowe. Wyobraźmy sobie, że po dokonaniu połowu zapamiętaliśmy liczbę  $m = m(\mathbf{x})$ , a potem zgubiliśmy kartkę z zapisanym wektorem  $\mathbf{x}$ . Możemy odtworzyć zgubiony wynik doświadczenia, znając tylko  $m$ . Wylosujemy mianowicie fikcyjny wynik  $\mathbf{x}'$  z prawdopodobieństwem  $P(\mathbf{x}'|m)$ , bo do tego nie jest potrzebna znajomość  $r$ . Chwila zastanowienia prowadzi do wniosku, że  $\mathbf{x}'$  ma ten sam rozkład prawdopodobieństwa co  $\mathbf{x}$ . Skoro sposób naszego losowania nie zależał już od  $r$ , to uzyskany wynik nie mógł ze sobą nieść żadnej dodatkowej informacji o  $r$ . W tej sytuacji cała nasza wiedza o tym parametrze musi być „ukryta” w liczbie  $m$ !

Na zakończenie dodam, że tytuł tego artykułu zapożyczyłem z pięknego opowiadania Stanisława Lema *O królewiczu Ferrycym i królowie Krystali* – opowieść z cyklu *Dzieła Cyfrotikon, czyli o dewijacjach, superfiksacjach, a wariacjach serdecznych*.

## Jak zwalczać losowość w grach

Bartłomiej ŻAK\*

\*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

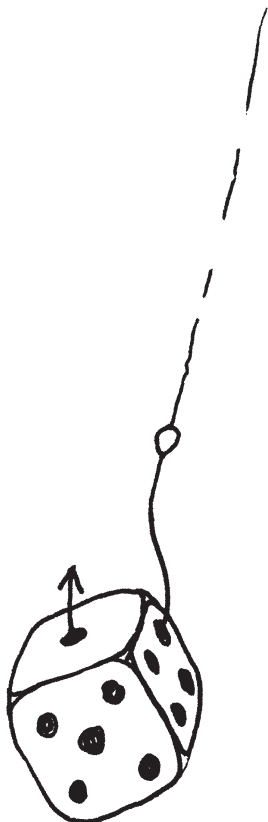
Losowość w grach karcianych, planszowych i komputerowych często budzi wiele kontrowersji. Sprawia ona, że gracz słabszy grający z lepszym ma szansę wygrać. Jest to pożądane w przypadku gier towarzyskich i frustrujące w przypadku gier profesjonalnych. W obu przypadkach nadmiar losowości jest zły, gdy za często zdarza się, że przewaga gracza pierwszego, wynikająca z jego inteligentnej gry, jest niwelowana przez szczęście drugiego. W moim artykule pokażę, jak z losowością można walczyć na przykładzie jednej z najbardziej losowych gier, czyli Chińczyka, którego, mam nadzieję, wszyscy znają.

Mój sposób mierzenia losowości jest zasadny dla gier z kategorii „wyścigów planszowych”. Takie gry w uproszczeniu polegają na tym, że kolejno losujemy liczby (na przykład rzucając kością) i chcemy, by suma naszych wylosowanych wartości jak najszybciej osiągnęła lub przekroczyła pewien pułap. Na przykład w Chińczyku, rzucając kośćmi ruszamy pionkiem o wylosowaną liczbę oczek, a żeby wygrać, musimy przesunąć pionki o 166 oczek (jeśli nie zbito naszego pionka). Te gry łączy jedno: nawet jeśli jesteś genialnym strategiem, jeśli będziesz miał pecha, to przegrasz.

W takich grach to, o ile zwiększy się nasza suma, warunkuje pewna zmienna losowa odpowiadająca jednemu losowaniu: będziemy o niej myśleć jak o obiekcie matematycznym, który przyjmuje różne wartości, każdą z pewnym prawdopodobieństwem, a prawdopodobieństwa te sumują się do jedynki. Dla przykładu, jeżeli zmienna losowa  $D$  reprezentuje wynik rzutu kością sześciocenną, to wartości tej zmiennej razem z prawdopodobieństwami wystąpienia wyglądają tak

$x$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(D = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Do opisu zmiennych losowych często używamy następujących pojęć: wartości oczekiwanej ( $\mathbb{E}$ ) oraz wariancji ( $\text{Var}$ ). Wartość oczekiwana to suma możliwych





### Rozwiązanie zadania M 1535.

Przyjmijmy, że taki (skończony) zbiór  $S$  istnieje. Spośród wszystkich odcinków o obu końcach w zbiorze  $S$  wybierzmy taki, który ma najmniejszą długość i nazwijmy go  $AB$ . Ponieważ zbiór  $S$  nie jest zawarty w prostej, więc poza prostą  $AB$  jest co najmniej jeden punkt zbioru  $S$  – spośród wszystkich takich punktów wybierzmy taki punkt  $C$ , dla którego miara kąta  $ACB$  jest największa.

Jeżeli  $\sphericalangle ACB \geq 90^\circ$ , to  $AB$  jest najdłuższym bokiem trójkąta  $ABC$ , co przeczy wyborowi odcinka  $AB$ . Z kolei jeżeli  $\sphericalangle ACB < 90^\circ$ , to środek  $O$  okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  należy do  $S$ , przy czym

$$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB > \sphericalangle ACB,$$

co przeczy wyborowi punktu  $C$ . Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje zbiór  $S$  o zadanych własnościach.

wartości zmiennej losowej pomnożonych przez prawdopodobieństwo ich uzyskania i odpowiada „przeciętnie” wyrzucanej wartości. Wariancja zmiennej to wartość oczekiwana kwadratu odstępstwa od wartości oczekiwanej tej zmiennej. Dla rzutu kością sześciocenną wartości te są równe

$$\mathbb{E}D = \frac{21}{6} = 3,5 \quad \text{oraz} \quad \text{Var } D = \frac{35}{12}.$$

Wariancja zawiera informację, jak zachowują się odchylenia od normy po kilku losowaniach. Należy pamiętać, że obie sumy oczek graczy odchylają się od normy, więc większa wariancja oznacza, że będą się bardziej odchyłać od siebie nawzajem, czyli częściej będzie dochodziło do frustracji. Ma ona jednak pewną słabość: założmy, że grając w grę, zamiast liczenia wyniku rzutu kością liczymy podwojony wynik rzutu kością. Wtedy wariancja będzie 4 razy większa, natomiast co do zasady nasza gra nie ulegnie przecież specjalnej zmianie. W związku z tym sensownie jest rozważać „unormowaną” wariancję, losowość określoną następującym wzorem

$$\mathbb{L}A = \frac{\text{Var } A}{(\mathbb{E}A)^2}.$$

Wyliczając wartość losowości rzutu kością  $D$ , otrzymujemy  $\mathbb{L}D = \frac{10}{42} \approx 0,238$ .

Powróćmy do Chińczyka. W grze rzucamy kością, by zdecydować, jak daleko przesuwamy pionek. Jest to wbudowane w mechanikę gry, nie można do końca na to narzekać. Jednak są dodatkowe zasady, które tej losowości jeszcze pomagają. Ja na przykład często grałem w wariant, w którym gdy gracz wyrzuci szóstkę, to dostaje dodatkowy ruch. Jak zmienia to losowość? Zobaczmy. Niech  $D_6$  będzie zmienną losową, odpowiadającą sumom liczb oczek, które możemy otrzymać, wykonując ruch. Zmiennej tej odpowiada następująca tabelka

$x$	1, 2, ..., 5	6	7, 8, ..., 11	12	13, 14, ..., 17	18	19, ...	(...)
$\mathbb{P}(D_6 = x)$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{216}$	0	$\frac{1}{1296}$	(...)

Podobnie, jak poprzednio, możemy obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i losowość (choć tym razem wymagałoby to od nas umiejętności sumowania nieskończonego ciągu geometrycznego)

$$\mathbb{E}(D_6) = \frac{21}{5}, \quad \text{Var}(D_6) = \frac{266}{25}, \quad \mathbb{L}(D_6) = \frac{266}{441} \approx 0,603.$$

Czyli (drodzy miłośnicy zasady z dodatkowym rzutem) losowość rośnie. Trudno dokładnie powiedzieć, jak wpływa to na doznania płynące z gry, no ale Chińczyk sam w sobie jest losowy, nie dokładajmy mu. Jeżeli jednak ktoś uważa, że zwykle rzucanie kostką jest nudne, to może zmienić tę zasadę: niechaj dodatkowy ruch przysługuje po wyrzuceniu jedynki. Czy takie losowanie jest lepsze? Zobaczmy. Nazwijmy je  $D_1$ . Odpowiednia tabelka dla tej zmiennej wygląda następująco

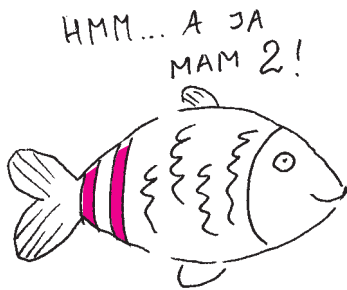
$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	(...)
$\mathbb{P}(D_1 = x)$	0	0,1667	0,1944	0,1991	0,1999	0,2000	0,0333	0,0056	(...)

Jaka jest wartość oczekiwana, wariancja i losowość?

$$\mathbb{E}(D_1) = \frac{21}{5}, \quad \text{Var}(D_1) = \frac{56}{25}, \quad \mathbb{L}(D_1) = \frac{56}{441} \approx 0,127.$$

Losowość zmalala, więc widać, że dodanie fikuśnej zasady z podwójnym ruchem nie musi psuć gry. Równość wartości oczekiwanych  $D_6$  i  $D_1$  może natomiast wydawać się zaskakująca – zwróćmy bowiem uwagę, że w tym pierwszym przypadku za każdym powtórzonym rzutem przesuwamy się o więcej niż w drugim przypadku. Zauważmy jednak, że wartość oczekiwana  $k$ -tego rzutu jest w obu przypadkach taka sama i wynosi 3,5. Ponadto prawdopodobieństwo wystąpienia  $k$ -tego rzutu też jest w obu przypadkach to samo i wynosi  $(1/6)^{k-1}$ . W tej sytuacji wartości oczekiwane sumarycznej liczby wyrzuczonych oczek również muszą się zgadzać.

Mam nadzieję zagrać w Chińczyka na tych zasadach i zobaczyć, czy odczuję różnicę. Polecam Czytelnikom zmienianie dobrze znanych im gier w imię zmniejszenia losowości.



Z formalnego punktu widzenia, przedstawiliśmy zmienną  $D$  w postaci nieskończonej sumy  $\sum_{k=1}^{\infty} R_k$ , gdzie  $R_k$  to liczba oczek wyrzuczonych w  $k$ -tym rzucie (równa 0, jeśli do  $k$ -tego rzutu nie doszło). Wartość oczekiwana  $D$  jest zatem sumą wartości oczekiwanych  $R_k$  (choć ze względu na nieskończoną liczbę składników kryje się w tym również pewna subtelność), a te są takie same dla  $D_6$  i  $D_1$  (i są równe wartości oczekiwanej pierwszego rzutu pomnożonej przez prawdopodobieństwo wystąpienia  $k$ -tego rzutu, czyli  $3,5 \cdot (1/6)^{k-1}$ ).



# O zastosowaniach *Combinatorial Nullstellensatz*

\*Nauczyciel, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Jacek DYMEL\*

Zadanie 6 z 48. Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (IMO) z 2007 roku było jednym z najtrudniejszych w historii Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Oto jego treść.

**Zadanie.** Niech  $n$  będzie dodatnią liczbą naturalną. Przyjmijmy, że

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

jest zbiorem  $(n + 1)^3 - 1$  punktów w przestrzeni trójwymiarowej. Wyznacz najmniejszą możliwą liczbę płaszczyzn, których suma mnogościowa zawiera  $S$ , ale do której nie należy  $(0, 0, 0)$ .

Zadanie rozwiązało tylko pięciu zawodników: Konstantin Matwiejew z Rosji, Peter Scholze z Niemiec, Danylo Radchenko z Ukrainy, Iurie Boreico z Mołdawii i Pietro Verteci z Włoch. W zasadzie tylko znajomość twierdzenia *Combinatorial Nullstellensatz* (kombinatoryczne twierdzenie o rozmieszczeniu zer, nawiązujące do twierdzenia Hilberta o zerach), któremu poświęcony jest ten artykuł, umożliwiały szybkie rozwiązanie zadania. Noga Alon opublikował swój artykuł *Combinatorial Nullstellensatz* [1] w 1999 roku, a już w 2007 roku kilku uczestników IMO stosowało metodę w nim opisaną. Wspomniane twierdzenie jest naturalnym uogólnieniem dobrze znanego uczniom twierdzenia, że wielomian jednej zmiennej stopnia  $n$  o współczynnikach rzeczywistych ma co najwyżej  $n$  pierwiastków rzeczywistych, a jego treść jest następująca:

**Twierdzenie (Combinatorial Nullstellensatz).** Niech  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  będzie niezerowym wielomianem  $n$  zmiennych stopnia  $\sum_{i=1}^n m_i$ , w którym współczynnik przy  $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$  jest różny od zera. Wówczas dla dowolnych zbiorów  $S_1, \dots, S_n \subset \mathbb{R}$  spełniających warunki  $|S_i| > m_i$  dla  $1 \leq i \leq n$ , istnieją takie  $c_i \in S_i$ , że  $P(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ .

*Dowód.* Przeprowadzimy indukcję ze względu na stopień wielomianu  $P$ . Nietrudny dowód początku indukcji ( $\deg P = 1$ ) pozostawiam Czytelnikowi Spragnionemu Ćwiczeń jako ćwiczenie.

Załóżmy teraz, że  $k > 1$ , oraz że teza zachodzi dla wszystkich wielomianów stopnia niższego niż  $k$ . Niech wielomian  $P$  ma stopień  $k$ . Bez straty ogólności można przyjąć, że  $m_1 > 0$ . Wybierzmy  $a \in S_1$ . Podobnie, jak w przypadku wielomianów jednej zmiennej, możemy podzielić wielomian  $P$  przez wielomian  $(x_1 - a)$ , otrzymując

$$P(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - a)Q(x_1, \dots, x_n) + R(x_2, \dots, x_n),$$

gdzie  $R(x_2, \dots, x_n) = P(a, x_2, \dots, x_n)$  jest wielomianem  $n - 1$  zmiennych, natomiast  $Q$  musi zawierać nieznikający jednomian postaci  $x_1^{m_1-1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  oraz  $\deg Q = k - 1$ . Dla dowodu nie wprost załóżmy, że wielomian  $P$  nie spełnia tezy. Wówczas dla dowolnych  $a_2 \in S_2, \dots, a_n \in S_n$  zachodzi równość  $P(a, a_2, \dots, a_n) = 0$ , co oznacza, że także  $R(a_2, \dots, a_n) = 0$ .

Wybierzmy teraz dowolnie  $a_1 \in S_1 \setminus \{a\}$ . Otrzymujemy równości:

$$0 = P(a_1, \dots, a_n) = (a_1 - a)Q(a_1, \dots, a_n) + R(a_2, \dots, a_n).$$

Ponieważ  $(a_1 - a) \neq 0$  oraz  $R(a_2, \dots, a_n) = 0$ , więc  $Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ . Wielomian  $Q$  ma stopień  $k - 1$  i niezerowy współczynnik przy  $x_1^{m_1-1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$  oraz przyjmuje wartość zero dla wszystkich  $a_1 \in S_1 \setminus \{a\}, a_2 \in S_2, \dots, a_n \in S_n$ , co jest sprzeczne z założeniem indukcyjnym. Uzyskana sprzeczność kończy dowód indukcyjny.  $\square$

Poniżej przedstawię zastosowania *Combinatorial Nullstellensatz* do zadań olimpijskich, aby w końcu pokazać rozwiązanie zadania z IMO z 2007 roku, które było pretekstem do opowiedzenia o tej metodzie.

**Zadanie (Rosja 2007).** W każdy wierzchołek wypukłego  $2n$ -kąta wpisano dwie różne liczby rzeczywiste. Udowodnić, że można z każdego wierzchołka usunąć po jednej liczbie w taki sposób, aby liczby w każdym dwóch sąsiednich wierzchołkach były różne.

Przedstawiony dowód można znaleźć w pracy [3], której autorem jest Mateusz Michałek, zdobywca srebrnego medalu na IMO w 2004 roku.



**Rozwiązanie zadania F 931.**

Dla uzyskania dobrej izolacji cieplnej należy zredukować przewodzenie ciepła przez gaz znajdujący się pomiędzy ściankami termosu. Przewodzenie ciepła odbywa się poprzez zderzenia cząsteczek, a więc ciśnienie gazu powinno być dobrane tak, aby średnia droga między zderzeniami była większa niż odległość między ściankami. Zgodnie z równaniem stanu gazu doskonałego  $pV = nRT$ , gdzie  $V$  oznacza objętość gazu,  $n$  liczbę moli gazu, a  $T$  temperaturę w skali Kelvina. Liczba cząsteczek gazu w jednostce objętości  $\rho = nN_A/V$ . Korzystając z równania stanu oraz warunku  $\lambda > d$  otrzymujemy:

$$p < \frac{RT}{\sqrt{2}\pi a^2 d N_A} \approx 1,78 \text{ Pa} \approx 1,34 \cdot 10^{-2} \text{ mmHg}$$

*Rozwiązanie.* Niech  $S_i$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) będzie dwuelementowym zbiorem liczb wpisanych w  $i$ -ty wierzchołek. Określmy wielomian  $P(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \cdots (x_{2n} - x_1)$ . Wielomian  $P$  jest stopnia  $2n$ , współczynnik przy wyrażeniu  $x_1 \cdots x_{2n}$ , które jest stopnia  $2n$ , jest równy 2. Na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* istnieją  $a_1 \in S_1, a_2 \in S_2, \dots, a_{2n} \in S_{2n}$ , takie że  $P(a_1, \dots, a_{2n}) \neq 0$ . To oznacza, że każda z różnic:  $(a_1 - a_2), (a_2 - a_3), \dots, (a_{2n} - a_1)$  jest różna od 0, czyli istnieje taki wybór liczb ze zbiorów  $S_1, \dots, S_{2n}$ , że  $a_1 \neq a_2, a_2 \neq a_3, \dots, a_{2n} \neq a_1$ .  $\square$

**Zadanie** (5th NIMO Winter Contest 2014). Zdefiniujmy taką funkcję  $\xi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , że  $\xi(n, k) = 1$ , gdy  $n \leq k$  oraz  $\xi(n, k) = -1$ , gdy  $n > k$  i zdefiniujmy wielomian

$$P(x_1, \dots, x_{1000}) = \prod_{n=1}^{1000} \left( \sum_{k=1}^{1000} \xi(n, k) x_k \right).$$

Wyznacz współczynnik przy  $x_1 \cdots x_{1000}$  w wielomianie  $P$ .

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że wielomian  $P$  jest stopnia 1000. Załóżmy, że współczynnik przy  $x_1 x_2 \cdots x_{1000}$  jest różny od 0. Zdefiniujmy zbiory  $S_1 = S_2 = \dots = S_{1000} = \{-1, 1\}$ . Wówczas korzystając z *Combinatorial Nullstellensatz*, otrzymujemy takie elementy  $c_i \in S_i$ , gdzie  $i \in \{1, \dots, 1000\}$ , że  $P(c_1, \dots, c_{1000}) \neq 0$ . Z drugiej strony sumy częściowe  $C_1 = c_1, C_2 = c_1 + c_2, C_3 = c_1 + c_2 + c_3, \dots$  definiują pewien „spacer po liczbach całkowitych”, kończący się na  $C = C_{1000}$ . Liczba  $C$  musi być parzysta, dlatego spacer ten w pewnym momencie osiągnie  $C/2$ , zatem dla pewnego  $k \leq 1000$  zachodzi  $C_k = C/2$ . Oznacza to jednak, że  $k$ -ty czynnik w definicji wielomianu  $P$  wynosi 0, co przeczy stwierdzeniu  $P(c_1, \dots, c_{1000}) \neq 0$ . Zatem współczynnik przy  $x_1 x_2 \cdots x_{1000}$  musi być równy 0.  $\square$

Przejdziemy teraz do rozwiązania przytoczonego na początku artykułu zadania 6 z IMO 2007, które jest trudniejsze niż poprzednie zadania.

*Rozwiązanie (Danylo Radczenko).* Niech  $k \in \mathbb{N}_+$  i  $k < 3n$ . Weźmy  $k$  parami różnych płaszczyzn, których suma mnogościowa zawiera zbiór  $S$  i żadna z tych płaszczyzn nie przechodzi przez punkt  $(0, 0, 0)$ . Niech  $i$ -ta płaszczyzna będzie określona równaniem  $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$ , gdzie  $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$  oraz  $d_i \neq 0$ . Rozważmy wielomian  $P$  postaci

$$P(x, y, z) = \prod_{i=1}^k (a_i x + b_i y + c_i z - d_i) - \alpha \prod_{j=1}^n (x - j)(y - j)(z - j),$$

gdzie  $\alpha$  jest tak dobrane, że  $P(0, 0, 0) = 0$ . Wielomian  $P(x, y, z)$  przyjmuje wartość 0 dla każdego elementu należącego do zbioru  $S$ . Dla  $k < 3n$  współczynnik przy  $x^n y^n z^n$  nie jest równy 0, gdyż jest równy  $\alpha \neq 0$ . Dla zbiorów  $S_1 = S_2 = S_3 = \{0, 1, \dots, n\}$  zachodzą warunki:  $|S_1| > n, |S_2| > n, |S_3| > n$ , więc na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* istnieje taki punkt  $(a, b, c) \in \{0, 1, \dots, n\}^3$ , że  $P(a, b, c) \neq 0$ . Zatem istnieje punkt  $(a, b, c) \in S$ , dla którego  $P(a, b, c) \neq 0$ . Otrzymaliśmy sprzeczność. Wobec tego  $k \geq 3n$ .

Wystarczy jeszcze wskazać przykład  $3n$  płaszczyzn, które spełniają warunki zadania. Są nimi

$$x = 1, x = 2, \dots, x = n, y = 1, y = 2, \dots, y = n, z = 1, z = 2, \dots, z = n. \quad \square$$

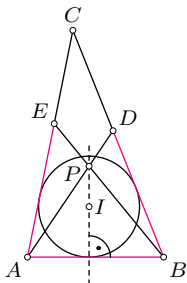
Powyższe zadanie jest pewną wariacją na temat problemu, jaki postawił Peter Komjáth: ile potrzeba hiperpłaszczyzn, aby pokryć wszystkie, z wyjątkiem jednego, wierzchołki kostki jednostkowej w przestrzeni  $n$ -wymiarowej. Rozwiązanie tego problemu pojawiło się przed 1993 rokiem, ale dopiero Noga Alon i Zoltan Füredi w 1993 roku w pracy [2] przedstawili krótkie i eleganckie rozumowanie. Poniższy dowód pochodzi z pracy [1].

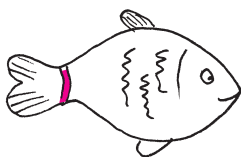
**Twierdzenie.** Niech  $H_1, \dots, H_m$  będzie rodziną hiperpłaszczyzn w  $\mathbb{R}^n$ , których suma zawiera wszystkie, z wyjątkiem jednego, wierzchołki kostki jednostkowej, czyli zbiór  $\{0, 1\}^n$ . Wówczas  $m \geq n$ .

*Dowód.* Bez straty ogólności możemy przyjąć, że usuniętym wierzchołkiem jest punkt  $(0, \dots, 0)$ . Niech hiperpłaszczyzna  $H_i$  dana będzie równaniem  $\langle a_i, x \rangle = b_i$ , gdzie  $x = (x_1, \dots, x_n)$  i  $\langle a, b \rangle$  jest standardowym iloczynem skalarnym  $a$  i  $b$ . Dla

**Rozwiązanie zadania M 1536.**

Zauważmy, że prosta  $AI$ , jako dwusieczna kąta między ramionami trójkąta równoramiennego  $BAE$ , jest prostopadła do podstawy  $BE$ . Podobnie prosta  $BI$  jest prostopadła do prostej  $AD$ . Wobec tego punkt  $I$  jest ortocentrum trójkąta  $ABP$ , a zatem  $PI \perp AB$ .





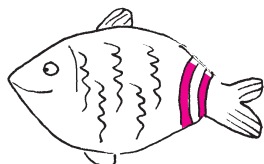
każdego  $i \in \{1, \dots, m\}$  zachodzi warunek  $b_i \neq 0$ , gdyż żadna z hiperpłaszczyzn nie przechodzi przez punkt  $(0, \dots, 0)$ . Załóżmy dla dowodu nie wprost, że  $m < n$  i zdefiniujmy wielomian

$$P(x) = (-1)^{n+m+1} \prod_{j=1}^m b_j \prod_{i=1}^n (x_i - 1) + \prod_{i=1}^m (\langle a_i, x \rangle - b_i).$$

Wielomian  $P$  ma stopień  $n$  i współczynnik przy  $x_1 \cdots x_n$  równy

$$(-1)^{n+m+1} \prod_{j=1}^m b_j,$$

zatem różny od 0. Na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* dla  $m_1 = \dots = m_n = 1$  oraz  $S_1 = \dots = S_n = \{0, 1\}$ , istnieje taki punkt  $c \in \{0, 1\}^n$ , że  $P(c) \neq 0$ . Punkt  $c$  jest różny od  $(0, \dots, 0)$ , gdyż wielomian  $P$  przyjmuje wartość 0 dla  $x = (0, \dots, 0)$ , a zatem punkt  $c$  należy do zadanego zbioru i nie należy do żadnej z hiperpłaszczyzn. Otrzymaliśmy sprzeczność, wobec tego  $m \geq n$ . Teraz wystarczy wskazać  $n$  hiperpłaszczyzn spełniających warunki zadania; są one zadane równaniami  $x_1 = 1, \dots, x_n = 1$ .  $\square$



#### Literatura

- [1] N. Alon: *Combinatorial Nullstellensatz*, *Combinatorics Probability and Computing* 8 (1999), 7–29.
- [2] N. Alon, Z. Füredi, *Covering the cube by affine hyperplanes*, *European Journal of Combinatorics* 14 (1993), 79–83.
- [3] M. Michałek: *A short proof of Combinatorial Nullstellensatz*, *American Mathematical Monthly* 117 (2010), 821–823.

Mam nadzieję, że powyższe przykłady przekonały Cię, Drogi Czytelniku, o użyteczności *Combinatorial Nullstellensatz* w rozwiązywaniu problemów z pozoru z nim niezwiązanych. Na zakończenie chciałbym zauważyć, że to wspaniałe twierdzenie jest słuszne dla wielomianów o współczynnikach z dowolnego ciała. Dotychczas używaliśmy jedynie ciała liczb rzeczywistych. Drugim w kolejności naturalnym wyborem ciała jest ciało  $\mathbb{Z}_p$  – ciało reszt z dzielenia przez liczbę pierwszą  $p$  z dodawaniem i mnożeniem modulo  $p$ . Zastosowanie *Combinatorial Nullstellensatz* w tej sytuacji prowadzi do niezwykle eleganckich dowodów bardzo pięknych twierdzeń z teorii liczb. Niestety, w tym artykule brakuje już miejsca na przedstawienie przykładów, obiecuję jednak zaprezentować je w numerze wrześniowym w nadziei, że oczekiwanie zaostreży apetyt nie tylko Czytelnika Bardzo Zainteresowanego.



## Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

**M 1534.** Czy na płaszczyźnie można wskazać taki skończony zbiór  $n \geq 3$  punktów  $S$ , że dla każdego  $O \in S$  istnieją  $A, B, C \in S$  o tej własności, że punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ ?

Rozwiązanie na str. 4

**M 1535.** Czy na płaszczyźnie można wskazać taki niezawarty w prostej, co najmniej trzejelementowy, zbiór punktów  $S$ , że dla każdych trzech niewspółliniowych punktów  $A, B, C \in S$  środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  również należy do  $S$ ?

Rozwiązanie na str. 7

**M 1536.** Odcinek  $AB$  jest najkrótszym bokiem trójkąta  $ABC$  opisanego na okręgu o środku w punkcie  $I$ . Na bokach  $BC, CA$  znajdują się odpowiednio takie punkty  $D, E$ , że  $EA = AB = BD$ . Odcinki  $AD$  i  $BE$  przecinają się w punkcie  $P$ . Wykazać, że proste  $AB$  i  $PI$  są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 9

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 931.** Podwójne ścianki szklanego naczynia termosu są posrebrzane w celu zmniejszenia przekazywania ciepła przez promieniowanie. Pomiędzy ściankami znajduje się rozrzedzony gaz. Ile wynosi maksymalne ciśnienie  $p$  tego gazu w temperaturze  $T = 20^\circ\text{C}$ , aby izolacja cieplna była skuteczna, jeżeli gazem jest azot, a odległość między podwójnymi ściankami termosu wynosi  $d = 5 \text{ mm}$ ? Średnica  $a$  cząsteczki azotu wynosi około  $3,2 \text{ \AA}$ , stała Avogadro  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , stała gazowa  $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ .

**Wskazówka:** Jak wynika z teorii kinetycznej potwierdzonej licznymi doświadczeniami, w rozrzedzonym gazie, pomiędzy dwoma zderzeniami, cząsteczka przebywa średnio odległość  $\lambda = 1/(\pi a^2 \rho \sqrt{2})$ , gdzie  $\rho$  oznacza liczbę cząsteczek gazu w jednostce objętości.

Rozwiązanie na str. 9

**F 932.** Dwie identyczne kostki lodu o temperaturze  $T = -20^\circ\text{C}$  zderzają się. Ile, co najmniej, musiałaby wynosić prędkość każdej z kostek, aby w wyniku tego zderzenia kostki w całości wyparowały? Przyjmij, że w przybliżeniu ciepło właściwe lodu  $c_L = 2,1 \text{ J}/(\text{g} \cdot \text{K})$ , ciepło właściwe wody  $c_W = 4,2 \text{ J}/(\text{g} \cdot \text{K})$ , ciepło topnienia lodu  $L_L = 330 \text{ J}/\text{g}$ , ciepło parowania wody  $L_W = 2250 \text{ J}/\text{g}$ .

Rozwiązanie na str. 22

# Wyniki Olimpiad 2016/2017



## LXVIII Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1495 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 632 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 154 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 5 kwietnia br. postanowił przyznać 27 tytułów laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):

### Nagrody stopnia pierwszego

**Mariusz Trela** (30) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

### Nagroda stopnia drugiego

**Bartłomiej Bollin** (24) – Zespół Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu.

**Jan Fornal** (23) – LO im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie.

### Nagrody stopnia trzeciego

**Radomił Baran** (18) – LO im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie.

**Jakub Boguta** (18) – I LO im. Stanisława Staszica w Lublinie.

**Jakub Brojacz** (18) – VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach.

**Damian Burczyk** (18) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

**Maciej Dziuba** (18) – II LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Końskich.

**Jakub Kamiński** (18) – LO nr III im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu.

**Łukasz Kamiński** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Piotr Kowalewski** (18) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

**Aleksandra Kowalska** (18) – Gimnazjum im. ks. Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Głogowie Małopolskim.

**Adrian Koźluk** (18) – XIII LO w Szczecinie.

**Jakub Kubacki** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Jędrzej Kula** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

**Jan Lebioda** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Tomasz Przybyłowski** (18) – Zespół Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu.

**Jacek Salata** (18) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

**Michał Siennicki** (18) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Szymon Stolarczyk** (18) – II LO im. Cypriana Kamila Norwida w Ostrołęce.

**Jakub Węgrecki** (18) – III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie.

**Radosław Żak** (18) – Katolickie Gimnazjum im. Świętej Rodziny z Nazaretu w Krakowie.

**Jadwiga Agnieszka Czyżewska** (17) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Stanisław Strzelecki** (17) – XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie.

**Antoni Żewierzejew** (17) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni.

### Nagrody stopnia czwartego

**Jan Kociniak** (14) – I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim.

**Maciej Maruszczak** (14) – XIII LO w Szczecinie.

Nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie zadania z finału LXVIII Olimpiady Matematycznej otrzymały następujące osoby:

**Philip Smolenski-Jensen** (zadanie 4) – XIII LO w Szczecinie.

**Szymon Stolarczyk** (zadanie 4) – II LO im. Cypriana Kamila Norwida w Ostrołęce.

**Mariusz Trela** (zadanie 2) – V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali finalistom w przygotowaniach do zawodów.





# LX Olimpiada Astronomiczna

## Laureaci

- I. **Zofia Kaczmarek**, III klasa Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu
- II. **Bartosz Dzięcioł**, III klasa XIII Liceum Ogólnokształcącego w Szczecinie
- III. **Michał Wójcik**, III klasa III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie
- IV. ex aequo **Patryk Rachwał**, III klasa III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu
- IV. ex aequo **Dawid Borys**, III klasa V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- VI. ex aequo **Błażej Rozwoda**, III klasa V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- VI. ex aequo **Zbigniew Przygoda**, III klasa XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- VI. ex aequo **Bartosz Salwiczek**, I klasa I LO im. Mikołaja Kopernika w Kołobrzegu
- IX. **Kornel Księżak**, II klasa XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie

## Finaliści (w kolejności alfabetycznej)

- **Jakub Adamski**, III klasa II LO im. Generałowej Zamoyskiej w Poznaniu
- **Krzysztof Druciarek**, I klasa XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie
- **Miłosz Dudek**, II klasa I LO im. Bolesława Chrobrego w Pszczynie
- **Adam Gonstal**, II klasa I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku
- **Mariusz Janosz**, III klasa I LO im. Bolesława Chrobrego w Pszczynie
- **Wojciech Kolesiński**, I klasa XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie
- **Krzysztof Lisiecki**, II klasa LO im. Władysława Łokietka w Radziejowie
- **Anna Olechowska**, II klasa II Społeczne LO im P. Jasienicy w Warszawie
- **Kamil Siemionek**, III klasa I Liceum Ogólnokształcące w Radzynie Podlaskim
- **Grzegorz Uriasz**, III klasa I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie
- **Sonia Wittek**, III klasa V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- **Wiktor Włodarczyk**, II klasa XIII Liceum Ogólnokształcące w Szczecinie

Strona internetowa  
Olimpiady Astronomicznej:  
<http://www.planetarium.edu.pl/oa.htm>

# XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

W XII Olimpiadzie Matematycznej Juniorów, adresowanej do uczniów gimnazjum, wzięło udział 12154 uczniów z 1157 szkół. Do zawodów drugiego stopnia awansowało 1104 uczniów z 478 szkół, a do zawodów finałowych 173 uczniów z 94 szkół.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów postanowił przyznać 85 osobom z 58 szkół tytuł laureata pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy:

## Laureaci I stopnia

Stanisław Piotr Hauke, Aleksandra Łucja Kowalska, Marcelina Marjankowska, Iwo Pilecki-Silva, Tomasz Ślusarczyk, Radosław Żak, Jakub Maciej Baranowski, Paweł Franciszek Gadziński, Kacper Harasimowicz, Łukasz Marek Orski, Jakub Franciszek Piotrowicz, Rafał Piotr Pyzik, Michał Umiński

## Laureaci II stopnia

Dominik Oskar Bałaban, Juliusz Banecki, Adam Stanisław Barański, Cezary Mikołaj Botta, Jagoda Maria Bracha, Antoni Buraczewski, Dominik Bysiewicz, Dominik Paweł Chmura, Bartłomiej Cieślak, Mieszko Jakub Grodzicki, Justyna Joanna Jaworska, Gabriel Marian Kiciński, Tymoteusz Kucharek, Piotr Michał Lisicki, Paweł Łacek, Filip Nogaj, Franciszek Stanisław Nowak, Krzysztof Marek Olejniczak, Justyna Maja Palikowska, Witold Pietroń, Mateusz Kamil Sabat, Mateusz Scharmach, Jakub Sprawka, Dawid Sula, Joanna Maria Wojciechowska, Mateusz Wróblewski, Kacper Zieniuk, Mikołaj Tomasz Znamierowski

## Laureaci III stopnia

Jakub Franciszek Adamek, Natalia Agnieszka Adamska, Piotr Aksamit, Mieszko Baszczak, Daniel Bernatowicz, Jan Bogucki, Aleksander Robert Bosek, Adam Dankowiakowski, Oskar Dąbkowski, Damian Wojciech Dąbrowski, Jan Paweł Dobrakowski, Wojciech Jan Drozd, Julia Helena Filip, Krystyna Maria Gasińska, Krzysztof Mikołaj Gąciarz, Robert Higgins, Igor Kamiński, Kosma Jan Kasprzak, Julian Jacek Kocerka, Krzysztof Tomasz Kosson, Mateusz Franciszek Krajewski, Patryk Marszałek, Tomasz Modzelewski, Mateusz Jakub Nowak, Michał Józef Nowak, Jakub Nowakowski, Piotr Adam Pomagalski, Julia Radzio, Paweł Sajdak, Szymon Sobczak, Michał Staniewski, Michał Jan Stankiewicz, Szymon Szecówka, Michał Sławomir Szwej, Jakub Terlikowski, Aleksander Jan Walenciak, Kacper Wasiak, Dominik Wawszczak, Michał Antoni Wiliński, Antoni Maciej Wiśniewski, Marek Zbysiński, Piotr Zygmunt



Zadania oraz pełną wersję komunikatu można znaleźć na stronie [www.omj.edu.pl](http://www.omj.edu.pl).

Komitet Główny OMJ pragnie serdecznie podziękować Fundacji mBanku, Instytutowi Matematycznemu PAN, Szkole Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie oraz Wydziałowi Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej za wsparcie organizacji Olimpiady, a także Fundacji mBanku, Panu Franciszkowi Hutten-Czapskiemu oraz redakcji czasopisma *Delta* za ufundowanie nagród dla laureatów OMJ.





## LXVI Olimpiada Fizyczna

W dniach 21–25 kwietnia br. odbył się w Warszawie finał LXVI Olimpiady Fizycznej. Do tegorocznych zawodów trzeciego stopnia zakwalifikowało się 72 zawodników. W sobotę 22 kwietnia zawodnicy w dwóch turach rozwiązywali zadanie doświadczalne, którego celem było wyznaczenie prędkości dźwięku w aluminiowej rurce. Zadanie to wymagało starannego wykonania, najtrudniejsze jednak okazało się dla zawodników zaproponowanie opisu zjawiska rozchodzenia się zaburzeń mechanicznych w rurce, który miałby związek z eksperymentem możliwym do wykonania przy użyciu dostarczonych materiałów i narzędzi.

W niedzielę 23 kwietnia zawodnicy zmierzyli się z zadaniami teoretycznymi. Pierwsze z nich polegało na szczegółowej analizie zderzenia dwóch sztywnych ciał. Jakkolwiek do poprawnego rozwiązania wystarczyło użyć zupełnie elementarnych pojęć, wielu zawodników pogubiło się w dyskusji tarcia statycznego i dynamicznego. W efekcie, ku zdziwieniu organizatorów i sprawdzających, średnie oceny punktowe za to zadanie były bardzo niskie.

W drugim zadaniu należało przeanalizować przepływ prądu w kondensatorze wypełnionym dwiema warstwami materiałów różniących się przenikalnością elektryczną i przewodnością. Rozwiązanie tego zadania wykorzystywało w zasadzie proste wzory elektrostatyki i własności układów RC.

W trzecim, najbardziej rozbudowanym zadaniu, należało przeprowadzić analizę dość ekstrawaganckiej elektrowni kosmicznej. Zadanie to łączyło elementy optyki geometrycznej i termodynamiki. Największym wyzwaniem okazała się dla rozwiązujących jego złożoność, wymagająca przeprowadzenia wieloetapowego rozumowania i obliczeń.

Redaktorzy zadań finałowych Olimpiady Fizycznej starają się zawsze, by rozwiązania składały się z elementarnych kroków niewykraczających poza omawiany w szkole zakres materiału, ale wymagających „pogłótkowania” i uświadomienia sobie istoty fizycznej rozważanego problemu. W tym roku zadania finałowe wykorzystywały wiele zagadnień, jakie pojawiły się na pierwszym, korespondencyjnym etapie Olimpiady. Spowodowało to, że zawodnicy byli stosunkowo dobrze przygotowani do zawodów i mogli skupić się na analizie treści fizycznych. Treści zadań wraz z wzorcowymi rozwiązaniami można znaleźć na stronie Komitetu Głównego OF [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl).

Tegoroczny finał miał szczególną oprawę, połączony był bowiem ze świętowaniem 50. rocznicy pierwszej Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej, która odbyła się w 1967 roku w Warszawie. Z tej okazji z zawodnikami spotkał się w dniu 24 kwietnia wiceminister edukacji narodowej, pan Maciej Kopeć, który wziął udział w roboczym spotkaniu poświęconym omawianiu rozwiązań zadań finałowych. Na galę finałową organizatorzy zaprosili zaś wielu byłych olimpijczyków, w tym zwycięzcę Olimpiady sprzed półwiecza, Bogdana Cichockiego, dziś profesora na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, który podzielił się z publicznością swymi wspomnieniami i refleksjami.

Laureatami LXVI Olimpiady Fizycznej zostali  
(w kolejności zajętych miejsc):

6. **Jakub Boguta**  
I LO im. S. Staszica w Lublinie
7. **Wojciech Szymański**  
VI LO im. J. Kochanowskiego w Radomiu
8. **Juliusz Neuman**  
Publiczne LO Politechniki Łódzkiej w Łodzi
9. **Mateusz Turowski**  
I LO im. M. Kopernika w Krośnie
10. **Jakub Skórka**  
V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie
11. **Dominik Borys**  
ZSO nr 2 im. G. Morcinka w Rudzie Śl.
12. **Filip Bojdecki**  
VI LO im. T. Reytana w Warszawie
13. **Tomasz Cheda**  
VI LO im. J. Kochanowskiego w Radomiu
14. **Bartosz Godycki-Ćwirko**  
LO im. Kazimierza Wielkiego w Kole
15. **Wojciech Kosior**  
I SLO im. htm. J. Tarnowskiego w Tarnobrzegu
16. **Andrzej Oreszczuk**  
VI LO im. J. Kochanowskiego w Radomiu
17. **Radosław Grabarczyk**  
III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
18. **Mikołaj Kałdan**  
VI LO im. J. i J. Śniadeckich w Bydgoszczy

Nagrody dla nauczycieli zostały ufundowane przez Polskie Towarzystwo Fizyczne dzięki wsparciu Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego.



## XXIV Olimpiada Informatyczna

W dniach 10–13 kwietnia 2017 r. w Warszawie odbyły się zawody III stopnia XXIV Olimpiady Informatycznej. Zostało do nich zakwalifikowanych 94 zawodników. W ciągu dwóch dni zawodów finałowych zawodnicy mieli do rozwiązania w sumie pięć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Komitet Główny przyznał tytuły laureata I, II i III miejsca zawodnikom, którzy w zawodach finałowych uzyskali, odpowiednio, co najmniej 400, 300 i 200 punktów, i wyróżnił zawodników, którzy w finale uzyskali co najmniej 150 punktów. Poniżej publikujemy listę tych zawodników (w nawiasach liczba zdobytych punktów oraz szkoła). Lista wszystkich finalistów jest dostępna na stronie <http://oi.edu.pl>.



### Laureaci I miejsca

1. **Mariusz Trela** (450, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków)
2. **Jan Olkowski** (449, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
3. **Stanisław Strzelecki** (444, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)

### Laureaci II miejsca

4. **Mieszko Grodzicki** (385, Publiczne Gimnazjum z Oddziałami Integracyjnymi nr 2 im. Adama Mickiewicza, Pionki)
5. **Anadi Agrawal** (382, Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław)
6. **Maciej Nadolski** (369, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
7. **Damian Burczyk** (365, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
8. **Krzysztof Małyśa** (360, XIII Liceum Ogólnokształcące, Szczecin)
9. **Rafał Łyżwa** (354, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego, Radom)
- 10.–12. **Franciszek Budrowski** (344, I Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza, Białystok)  
**Kacper Kluk** (344, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)  
**Artur Puzio** (344, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
13. **Jan Lebioda** (336, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
14. **Krzysztof Pióro** (334, III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza, Tarnów)
15. **Tomasz Ponitka** (329, Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław)
16. **Juliusz Pham** (324, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
- 17.–18. **Michał Górniak** (312, I Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki, Legnica)  
**Paweł Pawlik** (312, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Warszawa)
19. **Jakub Boguta** (306, I Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica, Lublin)

20. **Kacper Walentynowicz** (304, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)

### Laureaci III miejsca

21. **Paweł Burzyński** (282, III LO, Gdynia)
22. **Przemysław Podleśny** (281, II LO, Lubartów)
23. **Mateusz Gienieczko** (279, III LO, Gdynia)
- 24.–25. **Wojciech Bączkowski** (274, III LO, Gdynia)  
**Paweł Charyło** (274, I LO, Białystok)
26. **Michał Siennicki** (262, XIV LO, Warszawa)
27. **Paweł Anikiel** (260, III LO, Gdynia)
28. **Stanisław Szczepniak** (258, XIV LO, Warszawa)
29. **Kamil Piechowiak** (254, VIII LO, Poznań)
30. **Piotr Kowalewski** (251, III LO, Gdynia)
- 31.–32. **Krzysztof Potępa** (250, V LO, Kraków)  
**Bartłomiej Waclawik** (250, V LO, Kraków)
33. **Piotr Borowski** (241, I LO, Lublin)
34. **Piotr Nawrot** (240, VI LO, Radom)
35. **Jacek Salata** (235, V LO, Kraków)
36. **Jakub Kubacki** (233, XIV LO, Warszawa)
37. **Antoni Żewierzejew** (231, III LO, Gdynia)
38. **Filip Gobis** (223, III LO, Gdynia)
39. **Krzysztof Król** (222, VI LO, Radom)
40. **Wojciech Szymański** (208, VI LO, Radom)
41. **Mateusz Rzepecki** (203, LO nr III, Wrocław)
42. **Zuzanna Opała** (200, Liceum Akademickie UMK, Toruń)

### Finaliści z wyróżnieniem

Mateusz Orda (190, LO nr III, Wrocław),  
Grzegorz Gawryał (187, III LO, Tarnów),  
Iwona Kotlarska (185, XIV LO, Warszawa),  
Rafał Czarnecki (178, I LO, Białystok),  
Michał Łopata (178, I LO, Białystok),  
Konrad Staniszewski (172, VI LO, Radom),  
Karolina Gabara (170, III LO, Gdynia),  
Mateusz Cegiełka (168, XIV LO, Warszawa),  
Tomasz Nowak (167, XIV LO, Warszawa),  
Paweł Sawicki (162, III LO, Gdynia),  
Adam Pawłowski (161, VIII LO, Poznań),  
Karol Górski (160, XIV LO, Warszawa),  
Arkadiusz Kozdra (158, LO nr XIV, Wrocław),  
Jakub Bartmiński (152, XIV LO, Warszawa),  
Konrad Czapliński (152, I LO, Białystok),  
Rafał Maj (152, I LO, Białystok),  
Patryk Pęczak (152, I LO, Legnica)

# Superkomputery

Paweł ARTYMOWICZ

University of Toronto

*Superkomputery pomagają w badaniach przyrody, projektowaniu urządzeń i leków. Czym są, jak działają, jakich używają procesorów, jak szybko liczą? Odpowiedzi na te pytania zilustrujemy przykładami kilku superkomputerów, w tym czterech najszybszych na świecie oraz największego w Polsce.*

## Zdefiniujmy superkomputer

W latach 60. (to starożytna epoka technik obliczeniowych; geometryczny postęp technologii komputerowej opisaliśmy w *Delcie* 5/2017) uznawano za superkomputery maszyny firm Cray i CDC. Były 3 do 10 razy szybsze niż inne komputery. Później nazywano tak wszelkie systemy zdolne do obliczeń o rząd wielkości szybszych niż pojedynczy, średni komputer. Pod koniec XX wieku międzynarodowa grupa informatyków podjęła się uaktualniania dwa razy na rok szczegółowej listy 500 najszybszych systemów obliczeniowych świata. Jeśli przyjąć treść listy za ich definicję, to wiadomo ściśle, ile jest superkomputerów (500). Listę TOP500 łatwo jest odszukać w sieci.

## Od chaosu do Linuxa

Do pierwszych lat obecnego wieku panowała trudna dziś do wyobrażenia różnorodność i konkurencja kilkunastu rodzajów procesorów. Mikroprocesory o architekturze x86 korporacji Intel zdobyły w ostatniej dekadzie całkowitą przewagę w dziedzinie wysokowydajnych obliczeń HPC (*High Performance Computing*), pozostawiając konkurencyjnej (także amerykańskiej) architekturze Power firmy IBM mniej niż 10% rynku. To samo nastąpiło wśród maszyn domowych. Np. komputery Apple miały kiedyś procesory Motoroli, potem PowerPC, ale od 2005 r. przeszły na procesory z rodziny x86. Tylko w telefonach przewagę zyskały procesory ARM (o zredukowanym słowniku komend procesora). Azja i Europa (mimo że ta druga nie produkuje wiodących procesorów) myślą o zaojowaniu w następnej dekadzie z pomocą oszczędnej architektury ARM rynku superkomputerów.

Podobna unifikacja zaszła w oprogramowaniu podstawowym superkomputerów. Z chaosu dawnych zmagani wyłonił się jako zwycięzca system operacyjny Linux (potomek Unixa). System Windows nie jest spotykany w świecie HPC. Linux jest nie tylko bardziej logiczny i niezawodny, ale jest też systemem otwartym i darmowym. Mikroprocesory Intela są natomiast niezawodne, szybkie i popularne, ale pilnie strzeżone patentami i drogie. Produkcja odbywa się w 75% w USA, a reszta w Irlandii, Izraelu i Chinach, po czym wysyłane są zwykle do końcowej integracji i testowania w Malezji. Zamiana piasku (krzemu) na procesory to działalność opłacalna, lecz kapitałochłonna. Skoro mowa o pieniądzach, to Intel oferuje zwykle studentom wszystkich uczelni świata za darmo swoje drogie oprogramowanie. Warto skorzystać!

## Anatomia superkomputera: rdzenie, pamięci i łącza

W dawnych czasach superkomputer miał 4 do 8 niezależnych procesorów (rdzeni) i unikatowy system

łącz danych. Mieścił się w jednym dużym monolicie. Obecne superkomputery są zupełnie inne: to klastry, czyli bardzo liczne ( $\sim 10^4$ ) węzły obliczeniowe umieszczone w standardowego wymiaru szafach komputerowych, połączone szybkimi łączami. Węzeł ma kilka procesorów obliczeniowych (1–8), a z fizycznej konieczności uzasadnionej w wyżej cytowanym artykule *Delty* każdy procesor ma wiele rdzeni liczących równocześnie (od 4 do 240). Duży superkomputer ma dziś zatem wiele milionów rdzeni obliczeniowych, z których każdy może wykonywać kilka równoległych wątków obliczeń. Zadanie musi zostać podzielone na mnóstwo współbieżnych części, dopasowanych jak najlepiej do wielopoziomowej hierarchii zarówno kalkulatorów, jak i pamięci: od pamięci podręcznej (*cache*, do kilkudziesięciu MB) i pamięci operacyjnej (10 do 100 GB, tj. gigabajtów), aż po najwolniejsze i najbardziej pojemne pamięci stałe lub dyskowe (czasami w sumie kilka petabajtów, PB =  $10^{15}$ B). Szybkość dostępu do pamięci z dowolnego procesora jest zasadnicza, dlatego łącza komunikacyjne są niesłychanie ważne, będąc potencjalnie wąskim gardłem obliczeń. W najpopularniejszych łączach Infiniband wiązką drutów lub światłowodem płynie strumień danych 50–100 GB/s. Komputer ma więcej łączy niż węzłów, np. w topologii wielowymiarowego torusa. Dane rozpoczynają płynąć szerokim strumieniem już po mikrosekundzie od wysłania komendy. W największych instalacjach w czasie sekundy transmitowany jest siecią łącz petabajt, tj. zawartość trzeciej co do wielkości na świecie biblioteki na Uniwersytecie Toronto (54 miliony dokumentów). Gdy porównamy ten strumień liczb ( $\sim 10^{14}$  liczb/s) z sumarycznym tempem działań arytmetycznych w superkomputerze (prawie 100 PFLOP/s =  $10^{17}$ /s), to zrozumiemy, że rdzenie obliczeniowe dużo szybciej produkują wyniki działań, niż pozyskują dane. Sztuka HPC sprowadza się do tego, by liczyć jak najbardziej lokalnie, nie dając się rdzeniom nudzić w oczekiwaniu na dane z odległej pamięci. Pomagają w tym nieco kompilatory, tłumaczące program w jednym z języków komputerowych (C++, Fortran i in.) na binarne instrukcje w kodzie x86. Optymalizacja nie odbywa się jeszcze w pełni automatycznie. Nadal ważną rolę odgrywają umiejętności programisty decydującego o strukturach danych i programu.

## Platformy obliczeniowe i systemy

Superkomputer umieszczony jest w odpowiednio zaprojektowanym budynku, w sali o powierzchni 100–600 m<sup>2</sup>. Zużywa do kilkunastu MW mocy, a jego potężny układ chłodzenia wodnego lub powietrznego znajduje się w innej części budynku. Pracuje w komputerze tyle wentylatorów i pomp, że na uszach trzeba mieć ochraniacze, jeśli przebywa się w pobliżu ponad 15 minut dziennie.

W czołówce najpotężniejszych maszyn (pierwsze 3 wiersze tabeli na następnej stronie) większość obliczeń robią nie procesory główne (CPU), lecz dodatkowe koprocesory, każdy



o dużej liczbie rdzeni, choć o wolniejszych od CPU zegarach taktowych, ze względu na limit energii. Omawiając tabelę, poznamy dwa główne rodzaje platform obliczeniowych nazywanych MIC i GPU. W tabeli figurują: rok budowy systemu i ówczesne miejsce w rankingu, liczba rdzeni obliczeniowych, moc zasilania, rodzaj głównej platformy obliczeniowej i dwie miary prędkości:  $P$ , największa

prędkość w testach, i  $P_{\max}$ , prędkość osiągalna teoretycznie (w jednostkach petaflop/s,  $PF = 10^{15}$  operacji podwójnej precyzji na sekundę). Podajemy też koszt systemu i koszt względny (stosunek koszt/prędkość w tysiącach dolarów za 1 teraflop/s). Największe systemy nie są, jak widać, tanie, ale dla porównania – nie są droższe niż samolot pasażerski Airbus A380.

Niektóre superkomputery (styczeń 2017 roku). Pierwsze cztery to najszybsze obecnie systemy.

kraj	nazwa	ranking, w roku	rdzeni	$P$ [PF]	$(P_{\max})$ [PF]	zasil. [MW]	rodzaj proc.	koszt [mln \$]	koszt/ $P$
Chiny	Sunway TaihuLight	1, 2016	0,6 mln	93	(125)	15	MIC	237	2,5
Chiny	Tianhe-2	1, 2013	3,1 mln	34	(55)	18	MIC	390	11
USA	Tytan	1, 2012	0,6 mln	18	(27)	8	GPU	97	5
USA	Sekwoja	1, 2012	1,6 mln	17	(20)	7	CPU	250	13
Polska	Prometeusz	38, 2015	41 tys.	1,7	(2,3)	0,9	CPU	12	7
Kanada	SciPhi	>500, 2016	3,4 tys.	0,07	(0,08)	0,02	MIC+GPU	0,06	0,9

### Systemy tradycyjne oparte na CPU: Prometeusz i Sekwoja

Najszybszym komputerem w historii Polski, przez pewien czas 38. na świecie (dziś 59.), jest Prometeusz, zainstalowany w 2015 r. w krakowskiej Akademii Górniczo-Hutniczej przez firmę Hewlett-Packard. Jest oparty na CPU serii Haswell Intela i osiąga 1,7 PF. Na powierzchni zaledwie 13 m<sup>2</sup> mieści 15 szaf sprzętowych z 30 t sprzętu zużywającego prawie megawat mocy elektrycznej. Podobnie jak poprzedni superkomputer AGH, Zeus (ciągle na liście TOP500), pomaga polskim naukowcom w badaniach podstawowych i stosowanych, zwłaszcza w zakresie chemii fizycznej, medycyny i bioinformatyki, a także fizyki i inżynierii. Tym zajmują się też wszystkie inne superkomputery na świecie. Większym odpowiednikiem Prometeusza jest amerykańska Sekwoja, przez pół 2012 roku najszybszy superkomputer świata, który zawiera 16-rdzeniowe procesory centralne IBM PowerPC i mieści się w 98 szafach w laboratorium Lawrence Livermore koło San Francisco. To był zapewne ostatni najszybszy system zbudowany wyłącznie z CPU o niewielkiej liczbie rdzeni. Jego najbardziej znanymi osiągnięciami były symulacja kosmologiczna z 3,6·10<sup>12</sup> cząstkami oraz symulacja elektrofizjologii serca. Sekwoja ma intrygująco podwójną osobowość: projektuje broń jądrową, a jednocześnie stara się uchronić ludzkość od skutków ocieplenia klimatu.

### Obliczenia nietradycyjne: Tianhe-1A i Tytan

Pierwszy najszybszy komputer oparty nie na CPU, lecz głównie na GPU (*Graphics Processing Unit*, czyli procesor graficzny) powstał w 2010 roku w ChRL; był to niewymieniony w naszej tabeli Tianhe-1A (Droga Mleczna 1A) w mieście Tiancin. Dwa lata później podobną maszynę numer 1 zbudowała firma Cray w ośrodku jądrowym w Oak Ridge, Tennessee. Tianhe-1A miał 7 tys. kart graficznych Nvidia Tesla generacji Fermi, zaś Tytan 19 tys. kart Nvidia Tesla generacji Kepler. Nieprzypadkowo te właśnie procesory znajdują się w użytkowych kartach graficznych do gier komputerowych. GPU rozwinęły się, kiedy CPU przestał być wystarczająco wydajny, aby tworzyć kadry animacji kilkadziesiąt razy na sekundę. GPU stały się wielordzeniowe

i bardzo wielowątkowe. Paradoksalnie na początku obecnego wieku CPU w komputerze naukowca nie nadawał w arytmetyce za GPU służącym do zabawy. Brakowało jednak możliwości łatwego programowania GPU. Problem ten rozwiązała inżynierowie Nvidii 10 lat temu. Do obliczeń naukowo-technicznych na swych kartach graficznych firma udostępniła darmowo rozszerzenie języka C o nazwie CUDA, dodając stopniowo całą gamę pomocy dla programistów, takich jak biblioteki współbieżnego oprogramowania matematycznego. Później powstał OpenCL (*Open Compute Language*), w zamierzeniu język programowania wszystkich urządzeń obliczeniowych. Naukowcy przy użyciu masowej paralelizacji swych symulacji, gdzie liczba równoległych wątków sięga wielu tysięcy, dokonywali niemal cudów. GPU nie są co prawda tak inteligentne, jak CPU, lecz masowo powtarzając proste, identyczne sekwencje instrukcji na zmieniających się danych, są najefektywniejsze. Jednak programowanie GPU jest bardziej złożone niż programowanie CPU, a pewne zadania wręcz nie znoszą rozdrobienia. Obiad dla jednej rodziny kilku kucharzy zrobi szybciej niż jeden, ale dwustu powolnych i niezbyt inteligentnych kucharzy tylko spowolni tę pracę. Tytan ma setki tysięcy „kucharzy”, dlatego receptury (programy) dla niego są wybierane bardzo uważnie. Liczy naraz tylko około 5 zoptymalizowanych zadań; w sumie tylko około 30 rocznie. Symulowano m.in. fizykę spalania w projektowanych silnikach diesla, elektrownie jądrowe, nowe polimery, przewidywano zmiany klimatu. Symulowano wybuchy supernowych oraz dynamikę naszej Galaktyki tak dokładnie, że każda z 200 mld gwiazd miała odpowiedniczkę w komputerze!

### Droga Mleczna-2 i procesory MIC

Tianhe-2, obecnie numer 2 w rankingu, oparto w 2013 roku na nowej platformie obliczeniowej MIC (*Many Integrated Cores*, liczne zintegrowane rdzenie). To klasa procesorów firmy Intel, znana też jako Xeon Phi (koprocessor KNC, czyli Knights Corner z 2013 r., oraz procesor KNL, czyli Knights Landing z 2016 r., który ma wszystkie zasadnicze funkcje CPU i może zastępować CPU). MIC to doprowadzony

do granic efektywności schemat CPU, o standardowej architekturze 64-bitowej x86, z liczbą rdzeni pomiędzy 57 a 72. Rdzenie są bardziej złożone niż w GPU, ale prostsze niż w CPU. Nie mają, na przykład, zdolności przestawiania kolejności instrukcji w programie dla jego przyspieszenia ani przewidywania, jak potoczy się dalsze wykonanie programu, aby zawczasu zażądać danych i instrukcji z pamięci. Dlatego MIC „lubi” pracochłonne, ale nieskomplikowane rodzaje obliczeń, np. niektóre macierzowe, i jest w nich około dwukrotnie szybszy niż CPU zbliżonej generacji. Warto porównać tu procesory MIC i GPU. W biologii zachodzi zjawisko ewolucji konwergentnej, kiedy zupełnie różne gatunki przybierają zbliżony wygląd i zachowanie zgodne z wymaganiami środowiska. Podobna ewolucja MIC i GPU spowodowała, że mimo niekompatybilnych schematów budowy wewnętrznej ich karty obliczeniowe trudno odróżnić, zawierają równie wielką liczbę tranzystorów (5–10 mld), zbliżone liczby fizycznych rdzeni (nazywanych w GPU SMP, multiprocessorami symetrycznymi), mają to samo ograniczenie na zużywaną moc i wymuszoną przez to częstotliwość zegara  $f = 1\text{--}1,5$  GHz, i w końcu – różniącą się zazwyczaj nie więcej niż dwukrotnie moc obliczeniową. To świadczy dobrze o inżynierach, którzy i w MIC, i w GPU optymalnie wykorzystują tranzystory dostępne w danej technologii procesorowej. Są jednak istotne dla użytkownika różnice. CPU i MIC liczą zarówno w pojedynczej, jak i podwójnej precyzji (7 i 15 dziesiętnych miejsc znaczących). Projektanci GPU poświęcali natomiast podwójnej precyzji niewiele obwodów (są niepotrzebne do gier ani do sztucznej inteligencji) i to spowalnia karty graficzne w zastosowaniach naukowych. W odróżnieniu od kart graficznych karty Xeon Phi uruchamiają odchudzony system operacyjny Linux, stając się komputerami wewnątrz komputera, z własnym adresem sieciowym. Z czasem różnice między CPU i MIC znikną, nie zajdzie to zaś w przypadku GPU (innych niż firmy Intel).

Wracając do Tianhe-2, warto zauważyć, że użyto w nim koprocessorów MIC z 57 rdzeniami w tak zmasowanej liczbie (3 mln rdzeni), że detronizacja tego systemu z pierwszego

miejsca rankingu zajęła nietypowo długo, bo aż 3 lata. Historia Tianhe-2 jest frapująca. Intel planował rozszerzyć swe wpływy w Azji, oferując procesory KNC instytutowi Ludowej Armii Chin. Tianhe-2 powstał tam na bazie chińskich łącz i płyt głównych oraz najnowszych produktów Doliny Krzemowej. Na rok 2015 zaplanowano podwojenie mocy obliczeniowej. Intel zaczął produkcję dodatkowych procesorów. Wtedy władze USA, nie tłumacząc, czy chodzi o ekonomię, czy bezpieczeństwo, zakazały eksportu technologii MIC Intela do „czarnej listy” odbiorców w ChRL. Kiedyś taka reakcja miała szansę powodzenia. Obecnie, jak zobaczymy, spaliła na panewce. Intel pozbywając się po niskiej cenie nadmiarowych procesorów do Tianhe-2, pozwolił autorowi niniejszego tekstu zbudować eksperymentalny klastery wyszczególniony w ostatniej linii tabeli jako SciPhi, oparty na MIC, GPU i CPU. Ma moc obliczeniową równą 1/25 Prometeusza i nie potrafiłby realizować wszystkich zadań przez niego wykonywanych, za to jest aż 200 razy tańszy.

### *Sunway TaihuLight, obecny lider rankingu*

Chiny rozwinęły produkcję własnych procesorów o parametrach konkurencyjnych w stosunku do objętych embargiem mikroprocesorów Xeon Phi. Jesienią 2016 roku dwie godziny drogi na zachód od Szanghaju, w mieście Wuxi, powstał największy superkomputer świata Sunway TaihuLight, oparty na 41 tys. chińskich procesorów SW26010. Jest szybszy od Tianhe-2 aż o czynnik 3. Po pół roku działania umożliwił zespołowi fizyków, meteorologów i programistów obliczenie na 10 mln rdzeni dynamiki atmosfery, przy użyciu nowego algorytmu wyróżnionego nagrodą Gordona Bella, przyznawaną za najlepsze obliczenia równoległe. Komputer pomoże inżynierom w projektowaniu budowli i symulacji nowych technologii, chemikom w badaniu trójwymiarowej struktury wielkich molekuł ważnych dla życia, a ekonomistom w prognozowaniu zmian gospodarki. TaihuLight jest znakiem nowych czasów: po raz pierwszy ChRL posiadała w 2016 r. nie tylko dwie największe maszyny, ale też więcej komputerów na liście TOP500, o większej sumarycznej mocy obliczeniowej niż USA.

### **W niedalekiej przyszłości**

Przewaga Chin chwilowo może się dodatkowo zwiększyć, gdy obecny rząd USA zrealizuje zapowiedź głębokich cięć budżetowych. Jednak zmiany są bardziej długofalowe i nieuniknione: udział USA w obliczeniach superkomputerowych zmniejszył się w ciągu ostatniej dekady o połowę, do 31%, podczas gdy Chin – wzrósł z 3% do 37%. Ameryka będzie walczyła o odzyskanie pierszeństwa, ale jak to powiedział kiedyś bejsbolista amerykański L. Berra, „przyszłość nie jest już taka, jak kiedyś”. A Polska? Porównanie polskich zasobów superkomputerowych do światowych nie wypadło w 2016 roku najgorzej. Udział Polski w mocy obliczeniowej 500 superkomputerów wyniósł około 1%. To 3 razy mniej niż wkład Wielkiej Brytanii albo Francji, i 5 razy mniej niż Niemiec. Jednak Polska wyprzedziła m.in. Kanadę, Hiszpanię, Szwecję, Indie i Rosję, zajmując 11. miejsce w rankingu krajów. To powód do zadowolenia, choć to na pewno nie nasz kraj zbuduje pierwszy system o wydajności eksaflopowej (eksa =  $10^{18}$ , chodzi więc o miliard miliardów działań na sekundę – dla porównania, eksa to więcej niż liczba sekund, które upłynęły od Wielkiego Wybuchu). Kilka krajów: Chiny, Japonia i USA, są na drodze do realizacji tego symbolicznego celu w roku 2020. W następnym odcinku z tej serii przedstawimy superkomputer w zupełnie innej skali, do zrealizowania u siebie w domu i zastosujemy go do słynnego problemu grawitacyjnego N ciał.





## Algorytmy strumieniowe

W dzisiejszym świecie cyfrowym mamy do czynienia z olbrzymią ilością danych, wielu Czytelników słyszało zapewne modne ostatnio hasło „Big Data”. I trzeba sobie z tym radzić, a problemy mogą pojawiać się w nieoczekiwanych miejscach. Przyzwyczajeni jesteśmy do myślenia, że programy mają pewne dane na wejściu i te dane są tam na stałe, program może je w dowolnym momencie przeczytać. Czasami jednak nie do końca przystaje to do rzeczywistości. Wyobraźmy sobie, że analizujemy kamerę online, która transmituje obraz 24 godziny na dobę i chcemy po miesiącu wydobyć pewne statystyki z tego, co nagrała. Możemy, oczywiście, zapisać całość na dysk i potem obliczyć to, co trzeba. Łatwo sobie jednak wyobrazić, że potrzeba na to wiele pamięci, którą niekoniecznie zamierzamy właśnie na to przeznaczać. Dobrze byłoby na bieżąco obliczać to, co chcemy, i nie zapisywać całego filmu – pamiętać tylko statystyki z przeszłości i uaktualniać je w czasie rzeczywistym. Podobne problemy spotykamy w wielu miejscach, gdy rozważamy duży strumień danych, przykładowo film lub dźwięk, ale również inne, jak ruch pakietów TCP/IP w sieci. Taka jest geneza powstania dziedziny algorytmów strumieniowych, czyli działających na strumieniu danych i obliczających na bieżąco pewne jego własności. Jej matematyczne podstawy są, moim zdaniem, wyjątkowo piękne.

Załóżmy, że nasz strumień danych to ciąg  $a_1, \dots, a_m$  dla pewnego dużego  $m \in \mathbb{N}$ , oraz że  $a_i \in \{1, \dots, n\}$  dla każdego  $i$ . Niech  $m_i$  będzie liczbą wystąpień liczby  $i$  w całym strumieniu. Naszym celem będzie obliczenie pewnych własności strumienia w pamięci istotnie mniejszej niż  $\mathcal{O}(m)$ .

Na początek przyjrzyjmy się następującej zagadce. Rozważmy strumień, w którym pewna wartość występuje więcej niż na połowie miejsc. Czyli istnieje  $i$  takie, że  $m_i > m/2$ . Jak wtedy znaleźć  $i$ ? Nie jest jasne, jak to zrobić bez trzymania aktualnych wartości  $m_i$  dla wszystkich  $i$  podczas przeglądania strumienia. Okazuje się, że działa algorytm naprawdę banalny. W każdej chwili pamiętamy parę liczb. Pierwsza liczba to kandydat na odpowiedź, a druga liczba to coś jakby jego przewaga nad resztą. Inicjalizujemy parę jako  $(0, 0)$ . Powiedzmy, że po przeczytaniu  $a_1, \dots, a_j$  pamiętamy parę  $(i, c)$ . Są dwie możliwości. Jeśli  $c = 0$ , to po przeczytaniu  $a_{j+1}$  ustawiamy parę na  $(a_{j+1}, 1)$ . Jeśli natomiast  $c > 0$ , to rozważamy dwa przypadki. Jeżeli  $a_{j+1} = i$ , to zwiększamy przewagę, czyli ustawiamy  $(i, c + 1)$ . Jeśli natomiast  $a_{j+1} \neq i$ , to ustawiamy  $(i, c - 1)$ . Na końcu zwracamy pierwszy element z pary. Zauważmy jednak, że algorytm wcale nie trzyma prawdziwego dotychczasowego rekordzisty wraz z jego przewagą. Po przeczytaniu pierwszych sześciu elementów ciągu 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3 będzie trzymał parę  $(2, 0)$ , a więc po przeczytaniu ostatniego wyrazu parę  $(3, 1)$ . Dlaczego więc działa poprawnie? Przypomnijmy, że pewien element  $i$  występuje na więcej niż połowie miejsc. Niech wartość pary  $(j, c)$  będzie równa  $c$ , o ile  $i = j$  oraz  $-c$ , o ile  $i \neq j$ . Zauważmy, że napotkanie elementu  $i$  zawsze zwiększa o jeden wartość pary, a innego niż  $i$  – zmniejsza ją lub zwiększa o jeden. Na początku wartość pary to 0. Zatem po przeczytaniu całego ciągu wartość pary będzie dodatnia, czyli pierwszy jej element to faktycznie  $i$ .

Ważnej informacji o własnościach strumienia dostarczają liczby  $F_k$  zdefiniowane jako  $\sum_{i=1}^m m_i^k$ . Dla  $k = 0$  to liczba

różnych elementów, dla  $k = 1$  to po prostu  $m$ , a dla  $k = 2$  jest to ważna miara równomierności występowania wartości w ciągu. Bardzo ładny i elegancki jest przybliżony algorytm liczenia wartości  $F_2$  w pamięci jedynie  $\mathcal{O}(\log n + \log m)$ . My najpierw pokażemy, jak to zrobić w pamięci  $\mathcal{O}(n + \log m)$ , co nie jest takie złe, bo to zwykle  $m$  jest olbrzymie, a  $n$  może być niewielkie. Algorytm używa losowości. Dla każdego  $i \in \{1, \dots, n\}$  losujemy wartość  $x_i \in \{-1, 1\}$  tak, że  $\mathbb{P}(x_i = 1) = \mathbb{P}(x_i = -1) = 1/2$  oraz losowania są niezależne. Na początek ustalamy licznik  $c$  na 0 i zaczynamy przeglądać strumień. Gdy czytamy element  $i$ , to zwiększamy licznik o  $x_i$ . Na końcu zwracamy  $c^2$ , twierdząc, że jest to dobre przybliżenie  $F_2$ . Algorytm prosty, ale dlaczego to w ogóle ma działać? Najpierw zauważmy, że każde  $i$  zwiększyło wartość  $c$  o  $x_i$ , czyli w sumie wszystkie  $i$  zwiększyły go o  $x_i m_i$ . A więc na końcu  $c = \sum_{i=1}^n x_i m_i$ . Obliczmy wartość oczekiwaną  $c^2$ . Mamy  $\mathbb{E}(c^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i m_i\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^n x_i x_j m_i m_j\right) = \sum_{i,j=1}^n m_i m_j \cdot \mathbb{E}(x_i x_j)$ . Zauważmy, że  $\mathbb{E}(x_i x_j) = 0$ , o ile tylko  $i \neq j$ , bo  $x_i$  oraz  $x_j$  są niezależne. A zatem  $\mathbb{E}(c^2) = \sum_{i=1}^n m_i^2 \cdot \mathbb{E}(x_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i^2 \cdot 1 = F_2$ . I ten fakt wydaje się najciekawszy. Wypadałoby jeszcze wykazać, że błąd tego obliczenia (czyli wariancja) jest nie za duży. My tutaj jedynie podamy na wiarę, że  $\text{Var}(c^2) \leq F_2^2$ . Ambitnych Czytelników zachęcamy do przerechowania. Błąd możemy łatwo zmniejszyć, uruchamiając 1000 takich samych algorytmów równocześnie, a na końcu uśredniając ich wyniki rezultat oznaczmy  $\bar{c}^2$ . Wówczas wartość oczekiwana się nie zmieni, a wariancja zmaleje 1000 razy. Przypomnijmy nierówność Czebyszewa:  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > t) \leq \text{Var}(X)/t^2$  dla dowolnego  $X$ . Dostajemy więc  $\mathbb{P}(|\bar{c}^2 - F_2| > F_2/10) \leq 1/10$ , czyli wynik wychodzi całkiem niezły.

Przypomnijmy, że nasz algorytm działa w pamięci  $\mathcal{O}(n + \log m)$ , a jednak  $n$  czasem może być duże. Liczba  $n$  bierze się stąd, że przez cały czas przeglądania strumienia pamiętamy  $n$  zmiennych  $x_i$ . Wydaje się to nieuniknione przy tej technice. Okazuje się jednak, że stosunkowo łatwo można zamienić  $n$  na  $\log n$ , używając bardzo pomysłowej metody. Przypomnijmy, jaka własność zmiennych  $x_i$  była nam potrzebna. Mianowicie chcieliśmy, by  $\mathbb{E}(x_i x_j) = 0$  dla  $i \neq j$ , czyli by były one parami niezależne. Przy szacowaniu wariancji przydaje się ponadto niezależność czwórkami, dzięki której wiele ze składników postaci  $\mathbb{E}(x_i x_j x_k x_\ell)$  znika. Można skonstruować obiekt wielkości  $\mathcal{O}(\log n)$ , z którego można wydobyć  $n$  zmiennych czwórkami niezależnych. My pokażemy jedynie, że da się tak zrobić dla zmiennych parami niezależnych. Zachęcamy Ambitnego Czytelnika do uogólnienia tego faktu. Dla uproszczenia załóżmy, że  $n = 2^k - 1$ , w tym przypadku mamy  $k = \mathcal{O}(\log n)$ . Wówczas pamiętamy  $k$  niezależnych zmiennych losowych  $y_1, \dots, y_k$ , takich, że  $\mathbb{P}(y_i = 1) = \mathbb{P}(y_i = -1) = 1/2$ . Dla dowolnego niepustego podzbioru  $S \subseteq \{1, \dots, k\}$  definiujemy zmienną  $x_S = \prod_{i \in S} y_i$ . Łatwo sprawdzić, że  $x_S$  i  $x_T$  istotnie są niezależne dla dwóch różnych zbiorów  $S$  i  $T$ .

Algorytm obliczający przybliżoną wartość  $F_2$  został opublikowany w 1999 roku przez Alona (patrz też str. 8), Matiasa i Szegedego jako chyba najbardziej zaskakujący wynik ich przełomowej pracy. Praca ta położyła fundamenty pod bardzo szybko rosnącą dziedzinę algorytmów strumieniowych, a autorzy otrzymali prestiżową nagrodę Gödla.

Wojciech CZERWIŃSKI

## Najpiękniejsze zadanie geometryczne

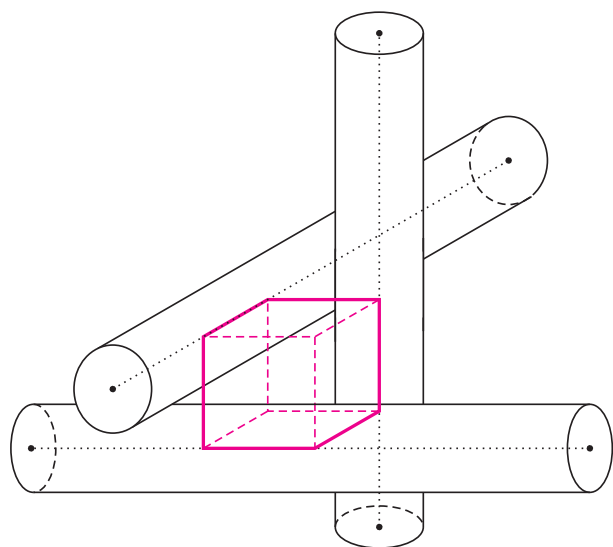
Znam takie zadanie. Jego autorem jest Igor Fiodorowicz Szarygin.

Jego treść jest nieskomplikowana:

*jak szeroki walec można włożyć pomiędzy trzy jednakowe, parami prostopadłe walce?*

Purysta zażądałby doprecyzowania. Ale człowiek rozsądny nie będzie miał wątpliwości, że chodzi o rezultat ekstremalny, a więc o najmniej korzystną dla wkładanego walca sytuację. A więc walce o osiach parami prostopadłych mają być styczne (bo wtedy miejsca na wkładany walec będzie najmniej).

W rozwiązaniu tego zadania kluczowe jest dostrzeżenie w danych trzech walcach sześcianu. Odkrywa się jego istnienie w następujący sposób.

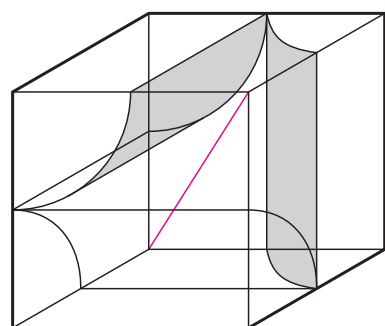


Rys. 1

Osie dwóch walców to proste skośne. Dla prostych skośnych zaś istnieje łączący je odcinek prostopadły do obu z nich – to najkrótsze ich połączenie.

**Tu dygresja dla niedowiarków.** Gdy proste  $k$  i  $l$  są skośne, przez dowolny punkt prostej  $k$  prowadzimy prostą  $l'$  równoległą do  $l$ , a przez dowolny punkt prostej  $l$  prostą  $k'$  równoległą do  $k$ . Płaszczyzny  $\lambda$  zawierająca proste  $k$  i  $l'$  oraz  $\mu$  zawierająca proste  $l$  i  $k'$  są równoległe. Płaszczyzna  $\pi$  zawierająca prostą  $k$  i prostopadła do  $\lambda$  i płaszczyzna  $\rho$  zawierająca prostą  $l$  i prostopadła do płaszczyzny  $\mu$  przecinają się wzdłuż odcinka łączącego  $k$  z  $l$  i prostopadłego do nich obu. Nieprawdaż?

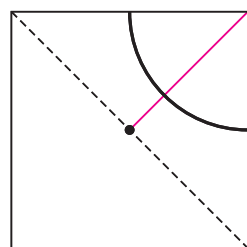
Odcinki prostopadłe łączące osie walców dla stycznych walców o promieniu  $R$  mają więc długość  $2R$ . Co więcej, ich końce na każdej z osi walców są odległe też o  $2R$  – połączmy je. Powstaje w ten sposób łamana złożona z sześciu odcinków (na rysunku 1 ciągle odcinki kolorowe). Uzupełnienie jej do sześcianu nie sprawi nikomu kłopotu.



Rys. 2

Sześcian ten zawiera w sobie wszystko, co może mieć związek z wkładanym między walce poszukiwanym walcem. Jeśli narysujemy (wyobrazimy sobie), co się dzieje we wnętrzu sześcianu, zobaczymy trzy „ćwiartki” walców (rys. 2). Tu następne kluczowe (ile jeszcze tych kluczy?) spostrzeżenie – te ćwiartki mają oś obrotową: prosta łącząca dorysowane na rysunku 1 wierzchołki sześcianu ma tę własność, że obracając wokół niej owe ćwiartki (można to robić razem z sześcianem), otrzymujemy tę samą sytuację. Zauważmy, że owa oś jest też osią obrotową dla danych na początku walców. Jest ona, oczywiście, jednakowo odległa od każdej z ćwiartek, a każda inna prosta, biegnąca między ćwiartkami, jest w mniejszej odległości od co najmniej jednej z nich.

Tak więc znaleźliśmy oś poszukiwanego walca, a jego promień to jej odległość od którejkolwiek z ćwiartek.



Rys. 3

No to kolejne kluczowe spostrzeżenie: przy zrzutowaniu w kierunku równoległym do powierzchni ćwiartki odległość jej od osi nie powiększa się. I tak nasze stereometryczne zadanie zredukowało się do zadania płaskiego (rys. 3): jaka jest odległość przekątnej kwadratu u boku  $2R$  od okręgu mającego środek w wierzchołku kwadratu i promień  $R$ .

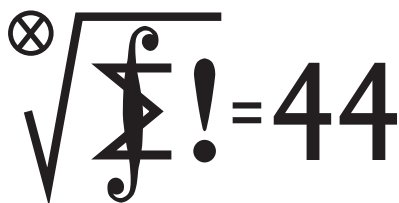
To, że wynikiem jest  $(\sqrt{2} - 1)R$ , nie budzi wątpliwości.

Zadanie to podziwiam dlatego, że prezentuje rzecz dla mnie w matematyce najpiękniejszą – redukcję zawłości do sedna sprawy.

Marek KORDOS

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2017

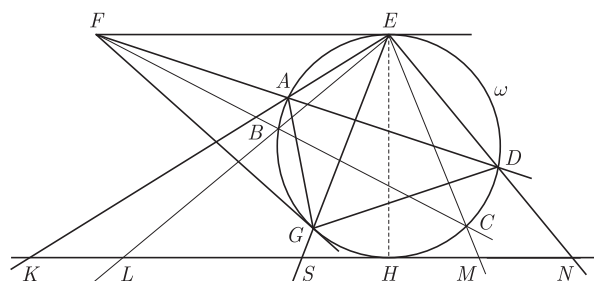
Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

**737.** Pięciokąt  $ABCDE$  jest wpisany w okrąg  $\omega$ , przy czym proste  $BC$  i  $AD$  przecinają się w takim punkcie  $F$ , że prosta  $EF$  jest styczna do  $\omega$ . Druga prosta styczna do okręgu  $\omega$ , równoległa do  $EF$ , przecina proste  $EA, EB, EC, ED$  odpowiednio w punktach  $K, L, M, N$ . Udowodnić, że odcinki  $KL$  i  $MN$  mają jednakową długość.

**738.** Wypisując, jedna za drugą, wszystkie liczby całkowite dodatnie, mające (w systemie dziesiętnym) co najwyżej  $n$  cyfr, piszemy łącznie  $c_n$  cyfr (np.  $c_1 = 9, c_2 = 189$ ); w tym  $z_n$  zer (np.  $z_1 = 0, z_2 = 9$ ). Czy równość  $z_n = c_{n-1}$  jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych  $n \geq 2$ ?

**737.** Prowadzimy z punktu  $F$  prostą różną od  $FE$ , styczną do okręgu  $\omega$  w punkcie  $G$ . Prosta przechodząca przez punkty  $K, L, M, N$  jest styczna do okręgu w punkcie  $H$  i przecina prostą  $EG$  w punkcie  $S$ . Pokażemy, że  $S$  jest środkiem odcinka  $KN$ .



Ponieważ

$$|\sphericalangle EKS| = 90^\circ - |\sphericalangle HEA| = |\sphericalangle EHA| = |\sphericalangle EGA|,$$

uzyskujemy podobieństwa

$$\triangle EKS \sim \triangle EGA; \quad \text{i analogicznie} \quad \triangle ENS \sim \triangle EGD.$$

Stąd wynikają proporcje  $|KS| : |GA| = |ES| : |EA|$  oraz  $|NS| : |GD| = |ES| : |ED|$ ; a z nich –

$$(1) \quad \frac{|KS|}{|NS|} = \frac{|GA| \cdot |ED|}{|EA| \cdot |GD|}.$$

Dalej, zauważamy kolejne pary trójkątów podobnych (odpowiednie kąty równe):

$$\triangle EDF \sim \triangle AEF \quad \text{oraz} \quad \triangle AGF \sim \triangle GDF.$$

To daje proporcje  $|ED| : |EA| = |DF| : |EF|$  oraz  $|GA| : |GD| = |GF| : |DF|$ , z których wynika, że prawa strona wzoru (1) jest równa  $|GF| : |EF|$ , czyli 1.

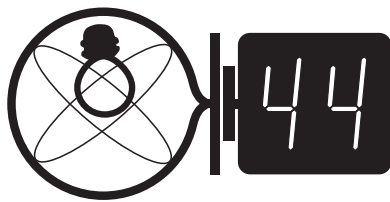
Punkty  $K, L$  leżą po jednej stronie punktu  $S$ ; punkty  $M, N$  po drugiej. Uzyskana równość  $|KS| : |NS| = 1$  oznacza, że  $S$  jest środkiem odcinka  $KN$ . Przez analogię, ten sam punkt  $S$  jest też środkiem odcinka  $LM$ . Stąd wniosek, że odcinki  $KL$  i  $MN$  są przystające.

**738.** Różnica  $c_n - c_{n-1}$  to liczba cyfr użytych do zapisania wszystkich liczb  $n$ -cyfrowych. Jest tych liczb  $10^n - 10^{n-1}$ , czyli  $9 \cdot 10^{n-1}$ ; zatem  $c_n = c_{n-1} + n \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$ . W zapisie każdej z nich cyfra wiodąca jest różna od zera; po jej odrzuceniu, pozostała część zapisu to *dowolny* ciąg długości  $n - 1$ , złożony z *dowolnych* cyfr (formalnie – słowo z alfabetu 10-elementowego).

Jest tych słów  $9 \cdot 10^{n-1}$ , jest w nich więc  $(n - 1) \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$  cyfr, a wszystkie cyfry są równouprawnione. Dziesiąta część spośród nich to zera. To znaczy, że w zapisie wszystkich liczb  $n$ -cyfrowych mamy  $(n - 1) \cdot 9 \cdot 10^{n-2}$  zer. Tak więc  $z_n = z_{n-1} + (n - 1) \cdot 9 \cdot 10^{n-2}$ . Pisząc  $c'_n = z_{n+1}$  widzimy, że ciągi  $(c_n)$  i  $(c'_n)$  spełniają identyczną zależność rekurencyjną. Ponieważ  $c'_1 = z_2 = 9 = c_1$ , wynika stąd, że  $c'_n = c_n$  (dla  $n \geq 1$ ), czyli  $z_n = c_{n-1}$  (dla  $n \geq 2$ ).

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
731 ( $WT = 3,13$ ) i 732 ( $WT = 1,78$ )  
z numeru 12/2016

Roksana Słowik	Knurów	38,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,39
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	37,77
Adam Dzedzej	Gdańsk	35,68
Marcin Małogrosz	Warszawa	35,19
Jerzy Cisko	Wrocław	31,28
Marcin Kasperski	Warszawa	30,79



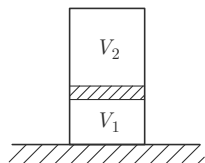
## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2016

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

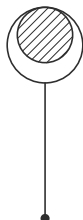
Przypominamy treść zadań:

**634.** W pionowym, zamkniętym naczyniu znajduje się tłok, który może przemieszczać się bez tarcia (rys. 1). Z obu stron tłoka znajdują się jednakowe masy tego samego gazu doskonałego. W temperaturze  $T_0$ , jednakowej w całym naczyniu, objętość gazu nad tłokiem jest  $k$  razy większa niż objętość gazu pod tłokiem. Jaki będzie stosunek tych objętości, gdy temperatura wzrośnie do wartości  $T$ ?

**635.** Do dolnego końca pręta o długości  $l$  przyczepiono małą kulkę o masie  $m$ , a do górnego końca rurkę w kształcie walca o wewnętrznym promieniu  $R$ . Masy pręta i rurki są zaniedbywalne. Rurka nasunięta jest luźno na nieruchomą, poziomą oś (rys. 2). Współczynnik tarcia między wewnętrzną powierzchnią rurki i osią jest równy  $\mu$ . Dla jakich wartości kąta  $\varphi$  odchylenia pręta od pionu tak skonstruowane wahadło może znajdować się w równowadze?



Rys. 1



Rys. 2

**634.** Oznaczmy przez  $p_1$  i  $p_2$  ciśnienia w dolnej i górnej części naczynia w temperaturze  $T_0$ , a przez  $p_3$  i  $p_4$  odpowiednie ciśnienia w temperaturze  $T$ . Różnica ciśnień związana jest z ciężarem tłoka i nie zależy od temperatury

$$(1) \quad p_2 - p_1 = p_4 - p_3.$$

Całkowita objętość naczynia wypełniona gazem nie zmienia się, zatem

$$(2) \quad V_1(k+1) = V_3(x+1),$$

gdzie  $V_1$  i  $V_3$  to początkowa i końcowa objętość gazu w dolnej części naczynia, a  $x$  jest szukanym stosunkiem objętości w stanie końcowym. Masy gazu w obu częściach naczynia są takie same, z równań Clapeyrona wynikają więc związki  $p_2 = p_1/k$  oraz  $p_4 = p_3/x$ . Podstawiając je do równania (1), otrzymujemy

$$(3) \quad \frac{p_1}{p_3} = \frac{k(x-1)}{x(k-1)}.$$

Stosując równania Clapeyrona do gazu w dolnych częściach naczynia oraz uwzględniając równania (2) i (3), dostajemy

$$\frac{p_1 V_1}{p_3 V_3} = \frac{T_0}{T} = \frac{k(x^2-1)}{x(k^2-1)}.$$

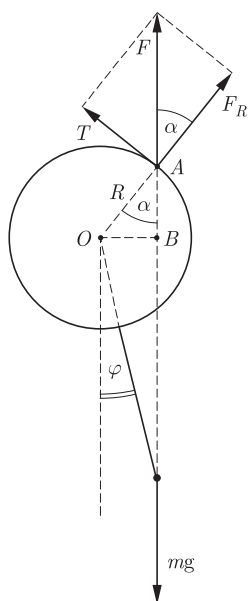
Wprowadzając oznaczenie  $a = \frac{T_0(k^2-1)}{Tk}$ , możemy napisać równanie kwadratowe na szukaną wielkość  $x$  w postaci  $x^2 - ax - 1 = 0$ . Dodatni pierwiastek tego równania ma postać  $x = (a + \sqrt{a^2 + 4})/2$ . Dla  $k = 1$ , co odpowiada nieważkiemu tłokowi,  $x = 1$ , czyli objętości gazów nad i pod tłokiem są takie same. Dla dowolnego  $k > 1$ , gdy temperatura dąży do nieskończoności, wartość  $x$  również dąży do 1. W bardzo wysokiej temperaturze ciśnienia gazów w obu częściach naczynia są na tyle duże, że wpływ siły ciężkości tłoka można pominąć.

**635.** Na wahadło odchyłone od pionu działają trzy siły: siła ciężkości  $mg$  zaczepiona w środku kulki oraz siły reakcji  $F_R$  i tarcia  $T$  w punkcie  $A$  styczności osi z wewnętrzną powierzchnią rurki (rys. 3). Suma momentów tych sił względem dowolnego punktu wynosi zero, zatem proste, wzdłuż których działają siły, muszą się przecinać w jednym punkcie. Wynika stąd, że punkt  $A$  leży na przecięciu prostej pionowej, przechodzącej przez środek masy kulki z wewnętrzną powierzchnią rurki. Gdy środek kulki przemieszczony jest w prawo lub w lewo na odległość większą niż promień  $R$ , równowaga jest niemożliwa.

Gdy kąt  $\varphi$  odchylenia wahadła od pionu jest maksymalny, tarcie statyczne osiąga największą możliwą wartość  $T = \mu F_R$ . Ponieważ w stanie równowagi wypadkowa  $F$  sił tarcia i reakcji skierowana jest pionowo w górę, zachodzi związek  $\tan \alpha = T/F_R = \mu$ . Odcinek  $OB$  na rysunku 3 możemy wyrazić przez kąty  $\varphi$  i  $\alpha$  wzorem  $(l+R) \sin \varphi = R \sin \alpha$ , stąd

$$\sin \varphi = \frac{\mu R}{(l+R)\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Wartość kąta granicznego  $\varphi$  nie zależy od masy kulki. Dla  $\mu \rightarrow 0$  stan równowagi możliwy jest tylko dla pionowego położenia wahadła. Gdy  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow \pi/2$  i  $\sin \varphi = R/(l+R)$ , wtedy maksymalne odchylenie kulki w prawo dąży do  $R$ . Gdy występuje tarcie w osi, wahadło może znaleźć się w równowadze także w położeniu odwróconym, kiedy kulka znajduje się powyżej osi.



Rys. 3



## Prosto z nieba: Czarna dziura rozmiaru M

Wypada w tym miejscu dodać, że w nieeuklidesowych geometriach nie ma jednokładności: przykładowo, trójkąty równoboczne nie są podobne, ponieważ ich prawdziwy, niepłaski kształt zależy od miejsca, w którym się znajdują, czyli od lokalnej krzywizny.

Niedawna obserwacja fal grawitacyjnych GW150914 pochodzących z zapadnięcia się układu podwójnego czarnych dziur o masach około  $30 M_{\odot}$  dowodzi natomiast, że mogą istnieć miejsca, w których powstają gwiazdowe czarne dziury dużo masywniejsze niż te z naszej Galaktyki.



### Rozwiązanie zadania F 932.

Cała energia kinetyczna ruchu obu kostek może być zamieniona na ich energie wewnętrzne, gdy zderzenie jest centralne, a suma pędów kostek jest równa zeru. Przy jednakowych masach oznacza to, że początkowe prędkości będą miały te same wartości i były przeciwnie skierowane. Suma energii kinetycznych musi wówczas wystarczyć na ogrzanie lodu do  $0^{\circ}\text{C}$ , stopnienie lodu, podgrzanie wody do  $100^{\circ}\text{C}$  i odparowanie wody:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} > > 2m(|T|_{cL} + L_L + 100\text{K} \cdot c_W + L_w).$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy  $v > 2471 \text{ m/s}$ .

Czarne dziury są, być może, najdziwniejszymi obiektami badań współczesnej astrofizyki. W geometrycznym opisie grawitacji Alberta Einsteina każda masa zakrzywia (ugina) czasoprzestrzeń tym mocniej, im jest większa i bardziej „skoncentrowana” w jednym miejscu. Zwarte obiekty, to znaczy takie, dla których stosunek masa-promień jest duży, są źródłami lokalnie większego zakrzywienia. Zwartość, definiowana jako  $\eta = 2GM/Rc^2$  jest maksymalna dla czarnej dziury, dla której wynosi 1 niezależnie od jej rozmiaru. Zależność ta definiuje także promień horyzontu (promień Schwarzschilda) – każdy bardziej zwarty obiekt o tej samej masie znajduje się już wewnątrz horyzontu czarnej dziury, czyli jest z definicji nieobserwowalny. Czarna dziura jest zatem „niematerialna” dla obserwatora na zewnątrz horyzontu: jest niezależna od własności materii znajdującej się wewnątrz horyzontu. Do jej opisu wystarczy jedynie znać parametry geometryczne, z których dedukuje się odpowiadającą jej masę  $M$ . Promień horyzontu czarnej dziury o masie Słońca wynosi jedynie 2,95 km.

Najbliższe czarnym dziurom relatywistyczne kuzynki – gwiazdy neutronowe – mają, w zależności od przyjętego promienia wynoszącego około 10–15 km,  $\eta$  około 0,3–0,5. Dla porównania,  $\eta$  Słońca to  $4,25 \cdot 10^{-6}$ , a Ziemi  $1,4 \cdot 10^{-9}$ . Mimo że wartości te są małe, efekty wykrzywionej czasoprzestrzeni obserwuje się jako ugięcia torów światła odległych gwiazd przechodzących w pobliżu Słońca bądź jako konieczność wprowadzania poprawek do newtonowskich rozwiązań orbit satelitów wykorzystywanych w GPS.

Znane astronomom czarne dziury można podzielić na dwie kategorie: obiekty „gwiazdowe” o masach kilku-kilkunastu  $M_{\odot}$ , wykrywane podczas obserwacji promieniowania rentgenowskiego w naszej Galaktyce, oraz supermasywne czarne dziury znajdujące się w centrach galaktyk, ważące miliony lub nawet miliardy  $M_{\odot}$  („nasza” supermasywna czarna dziura waży „zaledwie”  $4 \cdot 10^6 M_{\odot}$ , zmieściłaby się zatem z powodzeniem wewnątrz orbity Merkurego). Ponadto przewiduje się istnienie dziur o masach pośrednich (*intermediate-mass black hole*, IMBH) od 100 do 10000  $M_{\odot}$ , jednak do tej pory nie przedstawiono niezbitych dowodów obserwacyjnych potwierdzających tę hipotezę.

Ciemne ciała, takie jak czarne dziury, wykrywa się poprzez ich oddziaływanie z okoliczną materią np. w czasie akrecji gazu w układzie podwójnym, lub obserwując ruch gwiazd w ich otoczeniu. Niedawne badania gromady kulistej 47 Tucanae dostarczają pośrednich dowodów na istnienie czarnej dziury o masie około 2200  $M_{\odot}$ . 47 Tucanae jest gromadą gwiazd położoną w odległości 13000 lat świetlnych od Ziemi; jest prawie tak stara jak Wszechświat (12 miliardów lat) i składa się z tysięcy gwiazd stłoczonych w kuli o promieniu 120 lat świetlnych. Oprócz gwiazd zawiera także ponad dwadzieścia pulsarów radiowych.

Poszukiwania czarnych dziur w gromadzie 47 Tucanae w sposób opisany powyżej zakończyły się niepowodzeniem – gromada składa się ze starych gwiazd i nie zawiera wiele swobodnego gazu, który mógłby rozgrzewać się i świecić w pobliżu czarnej dziury, centrum gromady jest natomiast zbyt gęsto wypełnione gwiazdami, by można było wykryć podejrzany ruch którejs z nich. Przejawy istnienia średniomasywnej czarnej dziury znaleziono podczas analizy ruchu gwiazd całej gromady, porównując go z symulacjami numerycznymi: masywniejsze gwiazdy znajdują się przeważnie bliżej centrum gromady, mają więc więcej szans na oddziaływanie z czarną dziurą. Bliskie spotkanie tego typu może czasami skutkować efektem „grawitacyjnej procy”, to znaczy wyrzuceniem niektórych gwiazd na znaczne odległości z nieprzeciętnie dużymi prędkościami, co widać w rozkładzie prędkości składników gromady. W podobny sposób zachowują się też wspomniane wcześniej radiopulsary. Odległość od centrum gromady niektórych z nich jest większa niż w modelach, w których nie uwzględniono czarnej dziury.

Dlaczego czarne dziury o masach pośrednich są ciekawe? Najprawdopodobniej są przysłowiowym „brakującym ogniwem” w ewolucji od pierwotnych czarnodziurowych zarodki o masie zbliżonej do gwiazdowej, które powstały we wczesnym Wszechświecie, do czarnych dziur wagi ciężkiej spoczywających obecnie w centrach galaktyk.

Michał BEJGER



## Niebo w lipcu

Lipiec to pełnia lata, lecz Słońce chowa się za widnokrąg już coraz wcześniej i coraz głębiej. Na początku miesiąca nie jest to jeszcze bardzo odczuwalne, ale 23 lipca Słońce przekroczy równoleżnik  $20^\circ$  deklinacji w drodze na południe i od tego momentu dzień skraca się bardzo wyraźnie. Wraz z końcem lipca kończy się w naszym kraju sezon na zjawisko łuku okołohoryzontalnego oraz białych nocy astronomicznych i na kolejny trzeba poczekać aż do trzeciej dekady maja następnego roku. 3 lipca Ziemia przejdzie przez aphelium, czyli najdalej oddalony od Słońca punkt swojej orbity. Dzięki temu lato na półkuli północnej naszej planety trwa dłużej niż zima, ponieważ Ziemia porusza się wolniej wokół Słońca i pokonanie tego samego odcinka orbity zajmuje jej więcej czasu.

Więcej o tym zjawisku można poczytać na stronie [www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm](http://www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm)

Srebrny Glob w tym miesiącu najbardziej dokuczał będzie w pierwszej połowie miesiąca, gdyż lipiec zacznie od I kwadry w Pannie i spotkania z Jowiszem. 9 lipca Księżyc przejdzie przez pełnię, 16 lipca – przez ostatnią kwadrę, 23 lipca – przez now, zaś 30 lipca – ponownie przez I kwadrę. 1 lipca wieczorem Księżyc znajdzie się w odległości prawie  $6^\circ$  na wschód od Jowisza, który tego wieczoru będzie miał jasność  $-2^m$ . W tym samym momencie około  $7^\circ$  na południowy wschód od niego świecić będzie Spica, najjaśniejsza gwiazda Panny. 6 lipca bliski już pełni Srebrny Glob spotka się z Saturnem, mijając go w odległości około  $3^\circ$ . 14 lipca Księżyc czeka spotkanie z Neptunem (również w odległości około  $3^\circ$ ), natomiast 3 dni później – z Uranem, w odległości o  $2^\circ$  większej. Przed nowiem, 20 i 21 lipca, Księżyc przejdzie przez znaną gromadę otwartą gwiazd Hiady (niestety, gdy wędziedzie nad Europą, minie już jej najjaśniejsze gwiazdy), a w tych dniach towarzyszą Srebrnemu Globowi dotrzyma bardzo jasna Venus. W ostatnich dniach lipca Księżyc ponownie pojawi się na niebie wieczornym, ale będzie widoczny słabiej niż na początku miesiąca, ponieważ ekliptyka ułoży się już niekorzystnie względem linii widnokregu. 28 lipca Księżyc drugi raz w tym miesiącu spotka się z Jowiszem (w odległości  $2,5$  stopnia).

W trakcie swojej wędrówki po niebie Księżyc zakrywa sporo gwiazd. Już 4 lipca Księżyc w fazie 84% zakryje gwiazdę 4. wielkości  $\gamma$  Lib. Na terenie Polski gwiazda zniknie za księżycową tarczą jeszcze podczas dnia, lecz odkrycie – niestety za jasnym brzegiem – będzie widoczne w całym kraju, około godziny 22 ( $\pm$  kilka minut, w zależności od położenia: w Polsce południowo-zachodniej – wcześniej, w północno-wschodniej – później). Na kolejne zakrycie dość jasnej gwiazdy w tym miesiącu trzeba będzie poczekać do 14 lipca. Tej nocy Księżyc już po pełni, w fazie 79% zakryje gwiazdę  $\chi$  Aquarii. Tym razem lepiej widoczny będzie początek zjawiska, około 2 w nocy, zaś odkrycie nastąpi około 3:10 przy ciemnym brzegu. 20 lipca Księżyc 3 dni przed nowiem, w fazie 16% przejdzie przez Hiady, a z Polski da się dostrzec odkrycie gwiazdy  $\sigma 2$  Tauri, o jasności obserwowanej  $+4,9^m$ . Niestety, zjawisko zajdzie tuż po wschodzie Księżycy, ale będzie efektowne, ponieważ gwiazda po godzinie 2 pojawi się przy ciemnym brzegu księżycowej tarczy. Ostatnim

zakryciowym lipcowym akcentem będzie dzienne zakrycie Merkurego 25 lipca, zatem już po nowiu, przy fazie 6%. Przez północną Polskę przejdzie południowa granica zakrycia, zatem zjawisko będzie można obserwować tylko na północ od linii łączącej Słubice na zachodzie Polski przez Inowrocław po Ostrołękę i Białystok na wschodzie Polski. Zakrycie zajdzie około godziny 9:40, zaś odkrycie – mniej więcej 20 minut później. Merkury będzie miał wtedy jasność  $+0,2^m$ , a całe zjawisko zajdzie  $27^\circ$  na południowy wschód od Słońca. Zatem przy próbie jego obserwacji trzeba być bardzo ostrożnym, żeby przez przypadek w polu widzenia teleskopu nie znalazło się Słońce.

W lipcu Merkury znajdzie się w maksymalnej elongacji wschodniej (dokładnie stanie się to 30 lipca). Jednak, niestety, nie oznacza to, że będzie on dobrze widoczny z naszego kraju. W tym miesiącu ekliptyka jest już nachylona niekorzystnie do wieczornego horyzontu, wskutek czego planeta cały miesiąc zachodzić będzie niecałą godzinę po Słońcu i nie da się jej obserwować z Polski. Jednak osoby przebywające gdzieś bliżej równika powinny pamiętać o tej planecie, gdyż tam da się ją dostrzec bez kłopotu. Jowisz też jest już słabo widoczny. Na początku świtu żeglarskiego (około godziny 23) zajmie pozycję na wysokości mniejszej niż  $10^\circ$  nad zachodnim widnokregiem. W lipcu jego jasność spadnie do  $-1,9^m$ , a tarcza zmaleje do  $34''$ . Dobrze widoczna jest planeta Saturn, która w połowie czerwca przeszła przez opozycję względem Słońca i świeci przez większą część nocy na tle gwiazdozbioru Wężownika. Średnica kątowna Saturna w lipcu to  $18''$ , zaś jego jasność spadnie z  $+0,1$  do  $+0,2$  wielkości gwiazdowej. W drugiej połowie nocy można obserwować Neptuna w Wodniku ( $\sim 2^\circ$  na wschód od świecącej z jasnością  $+3,7^m$  gwiazdy  $\lambda$  Aquarii), gdzie będzie świecił z jasnością  $+7,9^m$  oraz Urana w Rybach (jasność  $+5,8^m$ ), niewiele ponad  $1^\circ$  na północ od gwiazdy o Psc (jasność  $+4,3^m$ ). Nad samym ranem widoczna jest planeta Venus, która przez cały miesiąc wędruje przez gwiazdozbiór Byka. Na początku lipca przejdzie ona  $7^\circ$  na południe od Plejad, 13 lipca minie w małej odległości gwiazdę  $\epsilon$  Tauri, a następnie przejdzie nieco ponad  $3^\circ$ ; na północ od Aldebarana, zaś 27 lipca w odległości mniejszej niż  $0,5$  stopnia minie ona gwiazdę 3. wielkości  $\zeta$  Tauri. W trakcie miesiąca jasność Venus spadnie z  $-4,1$  do  $-4^m$ , jej tarcza zmaleje z 18 do 15 sekund kątowych, zaś faza urośnie z 63 do 74%. Planeta Mars przebywa przez cały miesiąc blisko Słońca (27 lipca koniunkcja górna ze Słońcem) i jest niewidoczna.

Ostatniego dnia lipca maksimum swojej aktywności mają meteory z roju  $\delta$ -Akwarydów. Są to dość szybkie meteory, ich prędkość zderzenia z Ziemią wynosi 41 km/s. Radiant roju góruje przed godziną 3, na wysokości ponad  $20^\circ$ ,  $3,5$  stopnia na zachód od gwiazdy Skat ( $\delta$  Aquarii). W tym roku Księżyc nie będzie przeszkadzał w obserwacjach meteorów z tego roju, a można się spodziewać około 20 meteorów na godzinę. W drugiej połowie lipca zaczynają promieniować meteory ze słynnego roju Perseidów. Początkowo będzie ich mało, ale z każdą kolejną nocą – coraz więcej.

Ariel MAJCHER

## Jedno zdanie

Nieparzysta liczba pierwsza  $p$  może być przedstawiona jako suma dwóch kwadratów liczb naturalnych

$$(1) \quad p = x^2 + y^2$$

wtedy i tylko wtedy jeśli  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Taką hipotezę postawił w 1625 roku Albert Girard, a w 1640 roku również Pierre de Fermat i to z jego powodu ten fakt nazywany jest teraz twierdzeniem Fermata o sumie dwóch kwadratów.

Jednak żaden z powyższych matematyków nie udowodnił postawionej hipotezy. Zrobił to dopiero w 1747 roku Leonard Euler, jego dowód był jednak dosyć skomplikowany. Potem pojawiały się kolejne, coraz prostsze dowody, udział wzięli m.in. Lagrange w 1775 roku i Dedekind w 1877 roku. Aż w końcu parę lat temu, w roku 1990, Don Zagier, amerykański matematyk, przedstawił dowód, który miał dokładnie *jedno* zdanie. Aby je zobaczyć polecam spojrzeć tu:

[people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.2307/2323918/fulltext.pdf](http://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.2307/2323918/fulltext.pdf).

Przedstawimy tutaj ten dowód w nieco większej, ale wciąż małej liczbie zdań. Po pierwsze, zauważmy, że jeśli  $p \not\equiv 1 \pmod{4}$  i  $p$  jest nieparzysta, to  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Zatem w oczywisty sposób  $p$  nie jest sumą dwóch kwadratów, bo każdy kwadrat przystaje do 0 lub 1 modulo 4.

Ustalmy taką liczbę  $p$ , że  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Do dowodu twierdzenia wystarczy wykazać, że równanie  $p = x^2 + y^2$  ma przynajmniej jedno rozwiązanie. Przyjrzyjmy się dokładniej innemu równaniu

$$(2) \quad p = x^2 + 4yz.$$

Wykażemy, że ma ono nieparzyście wiele rozwiązań. Nim to jednak zrobimy zobaczymy, jak z tego wynika, że  $p = x^2 + y^2$  ma rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli  $(x, y, z)$  jest rozwiązaniem (2), to  $(x, z, y)$  również. A więc rozwiązania równania (2) łączą się w pary, oprócz takich rozwiązań, że  $(x, y, z) = (x, z, y)$ , czyli gdy  $y = z$ . Ponieważ, jak wykażemy wkrótce, rozwiązań (2) jest nieparzyście wiele, to nie wszystkie mogą połączyć się w pary i istnieje pewne rozwiązanie takie, że  $y = z$ . A to oznacza, że mamy  $p = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2$ , czyli również (1) ma rozwiązanie.

Żeby wykazać, że (2) ma nieparzyście wiele rozwiązań, stosujemy podobną metodę co poprzednio. Rozważmy przekształcenie

$$(3) \quad f(x, y, z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & \text{jeśli } x \leq y - z \\ (2y - x, y, x - y + z) & \text{jeśli } y - z < x \leq 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y) & \text{jeśli } x > 2y. \end{cases}$$

Okazuje się, że jeśli  $(x, y, z)$  rozwiązuje równanie (2), to  $f(x, y, z)$  również, ponadto po dwukrotnym zastosowaniu funkcji  $f$  do trójki  $(x, y, z)$  otrzymujemy ponownie  $(x, y, z)$ , co Czytelnik Cierpliwy może sprawdzić samodzielnie. A więc funkcja  $f$  może nam posłużyć do sparowania rozwiązań równania (2):  $(x, y, z)$  jest w parze z  $f(x, y, z)$ . Jedyne rozwiązania, które nie stoją w parach, to te, dla których  $(x, y, z) = f(x, y, z)$ . Okazuje się, że takie rozwiązania można jedynie otrzymać za pomocą środkowej linii definicji (3), czyli dla

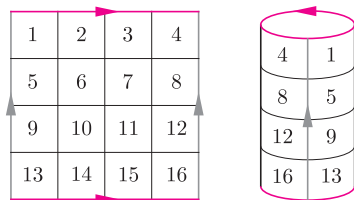
$$(4) \quad (x, y, z) = (2y - x, y, x - y + z).$$

Łatwo sprawdzić, że linia pierwsza i trzecia dawałaby  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , co oczywiście nie spełnia równania (2). Dla (4) otrzymujemy  $x = y$ , czyli  $p = x^2 + 4xz = x(x + 4z)$ . Musi to oznaczać  $x = 1$ , więc  $y = 1$  oraz  $z = \frac{p-1}{4}$ , czyli jest tylko jedno rozwiązanie (2), które nie stoi w parze:  $(1, 1, \frac{p-1}{4})$ . A zatem rozwiązań (2) jest nieparzyście wiele, co kończy dowód.

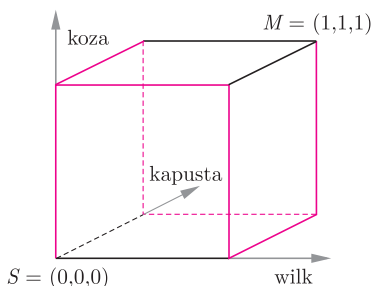
Wojciech CZERWIŃSKI



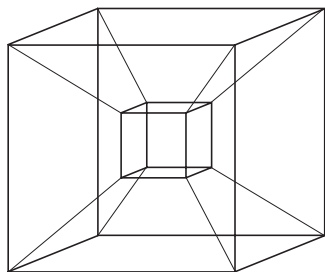
Polecam w sprawie kłopotów farmera zajrzeć też do *Delty* 6/2017.



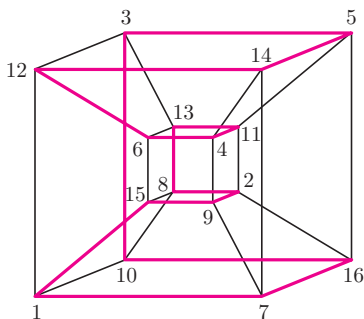
Rys. 1. Boki oznaczone tym samym kolorem sklejono zgodnie ze strzałkami. Konik może teraz skoczyć np. z pola 1 na pole 12.



Rys. 2. Kolorem oznaczono dobre krawędzie.



Rys. 3. Czwierowymiarowy hipersześcian. Czwarty wymiar symbolicznie reprezentowany jest „do wewnątrz”.



Rys. 4. Numery wierzchołków to numery pól szachownicy, kolorem oznaczono cykl Hamiltona.

Literatura: Ian Stewart, *Another Fine Math You've Got Me Into*, New York: W.H. Freeman and Company, 1992.

Zadanie 5 pochodzi z XXIII Olimpiady Matematycznej.

## Wędrowanie po sześcianie

Joanna JASZUŃSKA

1. Farmer ma wilka, kozę, kapustę i łódkę zdolną pomieścić wraz z nim tylko jedno z nich. Jak może przepłynąć się z całym swym dobytkiem na drugi brzeg rzeki, jeśli nie wolno zostawić bez opieki ani wilka z kozą, ani kozy z kapustą?

2. Farmer ma wilka, kozę, kapustę, smoka i łódkę zdolną pomieścić wraz z nim tylko jedno z nich. Jak może przepłynąć się z całym swym dobytkiem na drugi brzeg rzeki, jeśli nie wolno zostawić bez opieki ani wilka z kozą, ani kozy z kapustą, ani też smoka z wilkiem, chyba że w towarzystwie łagodzącej ich usposobienie kapusty?

3. Czy konik szachowy może odwiedzić dokładnie jeden raz każde pole szachownicy o wymiarach  $4 \times 4$  i wrócić do punktu wyjścia?

Pojedynczy skok konika to dwa pola w jedną stronę i jedno w kierunku prostopadłym.

4. Szachownicę  $4 \times 4$  zwinięto w rurkę i sklejono przeciwległe brzegi (rys. 1). Następnie sklejono końce tej rurki, uzyskując torus. Konik szachowy skacze po tym torusie zgodnie ze zwykłymi regułami opisanymi powyżej. Czy może on odwiedzić każde pole dokładnie raz i wrócić do punktu wyjścia?

5. Udowodnij, że wszystkie podzbiory zbioru skończonego można ustawić w ciąg, którego kolejne wyrazy różnią się jednym elementem.

### Rozwiązania i wskazówki

**R1.** Rozważmy wszystkie trójki  $(x, y, z)$  zer i jedynek oznaczających kolejno położenie wilka, kozy i kapusty: 0 – na pierwszym brzegu rzeki, 1 – na drugim. W przestrzeni trójki te to współrzędne wierzchołków sześciangu, przy czym wierzchołek  $S = (0, 0, 0)$  to położenie początkowe dobytku farmera, a  $M = (1, 1, 1)$  – docelowe (rys. 2).

Ponieważ łódkę można wozic najwyżej jedno stworzenie naraz, krawędzie tego sześciangu to wszystkie możliwe przewozy. Niektóre jednak są złe, np. krawędź  $(0, 0, 0) - (0, 0, 1)$  oznacza, że farmer pozostawił wilka z kozą bez opieki i wiezie kapustę, co skończy się źle dla kozy. Zadanie sprowadza się więc do połączenia punktów  $S$  i  $M$  wzdłuż dobrych krawędzi, a to już łatwo zrobić na rysunku 2.  $\square$

**R2.** Zadanie można rozwiązać podobnie jak poprzednie. Wystarczy rozważyć wszystkie czwórki  $(x, y, z, s)$  zer i jedynek, które tym razem są wierzchołkami czterowymiarowego hipersześcianu (rys. 3). Po usunięciu złych krawędzi łatwo znaleźć drogę od  $(0, 0, 0, 0)$  do  $(1, 1, 1, 1)$ .  $\square$

**Wskazówka 3.** Jak konik może dotrzeć do dwóch przeciwległych rogów szachownicy?

**R4.** Tak. Z każdego pola konik ma dokładnie cztery możliwe ruchy. Ilustrują je krawędzie czterowymiarowego hipersześcianu, a szukana droga odwiedzająca wszystkie jego wierzchołki (pola szachownicy) i wracająca do punktu wyjścia to tzw. cykl Hamiltona (rys. 4).  $\square$

Cykl z rysunku 4 powstał z dwóch osobnych cykli Hamiltona dla sześciangów trójwymiarowych (zewnątrznego i wewnętrznego), które połączono, usuwając z nich po jednej krawędzi (1-12 i 15-6) i dodając krawędzie 1-15 oraz 12-6. Podobnie cykl dla każdego trójwymiarowego sześciangu powstał z połączenia dwóch cykli dla kwadratów (podstaw tego sześciangu). Analogicznie można tworzyć cykle Hamiltona dla hipersześcianów  $n$ -wymiarowych, gdzie  $n > 4$ .

**R5.** Każdy podzbiór  $n$ -elementowego zbioru  $A$  można opisać ciągiem  $n$  zer i jedynek, gdzie 1 na  $k$ -tym miejscu oznacza, że  $k$ -ty element zbioru  $A$  należy do rozważanego podzbiory, a 0 – że nie należy. Wtedy podzbiory  $A$  to wierzchołki  $n$ -wymiarowego hipersześcianu, przy czym podzbiory różniące się jednym elementem połączone są krawędzią.

Szukany ciąg można wyznaczyć przez cykl Hamiltona na tym hipersześcianie, podobnie jak na rysunku 4 (ostatni i pierwszy podzbiór w takim ciągu też różnią się jednym elementem).  $\square$