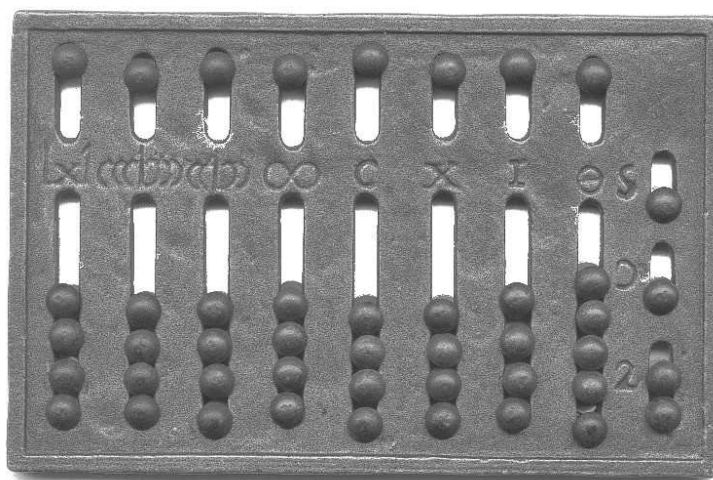



W następnym numerze chwalimy:



## SPIS TREŚCI NUMERU 6 (517)


Krzyżak litewski	str. 1
Wielościan w zeszyście	str. 1
Pętle na niebie	str. 2
Zadanie Alhazena	str. 2
Dwie sfery w jednym miejscu	str. 3
 Zadania	str. 3

Stawka większa niż...? <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 4
---	--------

Liczby pierwsze jako niewiadome <i>Mariusz Skalba</i>	str. 6
--	--------

Z samą liniijką na okrąg Styczna do okręgu Brakujący punkt	str. 7
--	--------

Ujemny współczynnik załamania <i>Grzegorz Derfel</i>	str. 8
---	--------

 Elektrodynamiczne dziecięcy i huśtawki <i>Stanisław Bednarek</i>	str. 10
---	---------

Pitagoras w zawiasach	str. 11
-----------------------	---------

Obsesja dużych liczb <i>Karol Gryszka</i>	str. 12
--	---------

Posłowie Naprawdę duże liczby Dowód nierozstrzygalności Ortografia	str. 16
---	---------

Język Scratch <i>Antoni Gawlikowski</i>	str. 16
--	---------

Zadania o przeprawie przez rzekę <i>Tomasz Kazana</i>	str. 18
--	---------


 Żądła rządzą <i>Magdalena Fikus</i>	str. 19
--	---------

Informatyczny kącik olimpijski (106): Waga <i>Marcin Smulewicz</i>	str. 20
---	---------

Aktualności	str. 21
-------------	---------

Klub 44	str. 22
---------	---------

Niebo w czerwcu	str. 24
-----------------	---------

 Warto (się) rozwijać <i>Joanna Jaszuńska</i>	str. 25
---	---------

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia;  
rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA  
**Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)**

**Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)**

**RUCH S.A.: [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600**

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

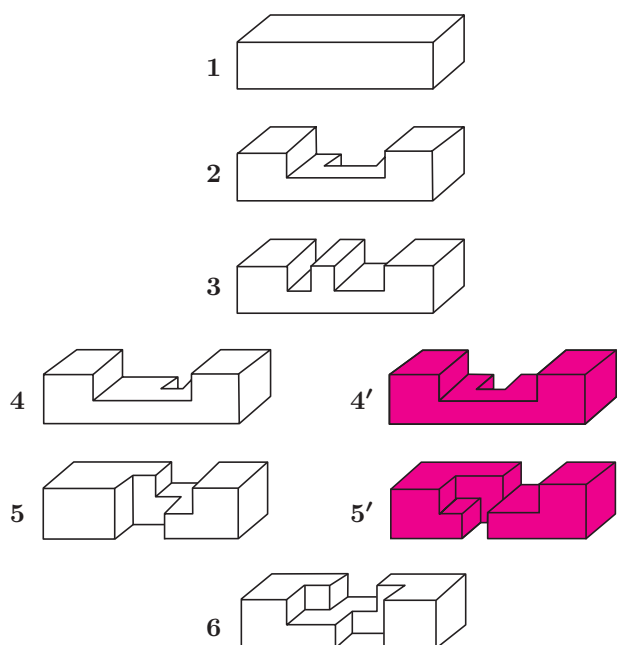
**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)**

**Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)**

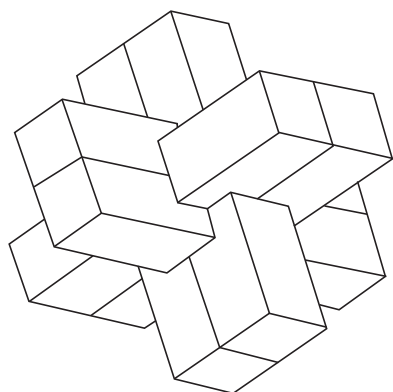
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

## 8 Krzyżak litewski

to nie tylko Konrad Wallenrod, lecz także łamigłówka popularna wśród litewskich drwali. Redakcja *Delty* ma wystrugane przez jednego z nich sześć drewnienek, takich jak na rysunku,



z których można złożyć widoczny niżej krzyżak, choć nie jest to zadanie łatwe.



Proponujemy Czytelnikowi, aby wystrugał sobie takie drewnienka i sam spróbował je złożyć (w dzisiejszych czasach zadanie może być trudne i z tego powodu, że posługiwanie się smartfonem jest dużo sprawniejsze niż scyzorykiem – tylko się nie pokaleczcie!).

Najciekawsze jest to, że wewnątrz tego krzyżaka nie ma żadnej luki. Powstaje pytanie, czy przedstawiony wyżej komplet drewnienek jest jedynym spełniającym te warunki: można złożyć z nich krzyżak bez luki wewnątrz. Odpowiedź jest negatywna. Znamy nieco inny komplet, w którym dwa drewnienka mają inny kształt niż w naszym (to te kolorowe).

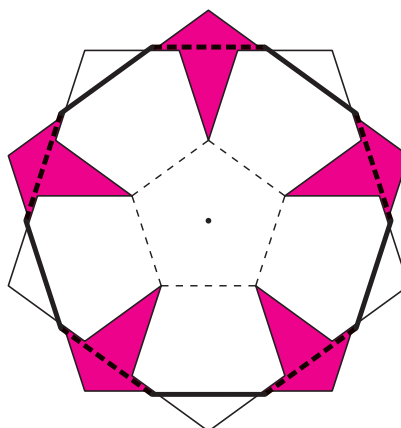
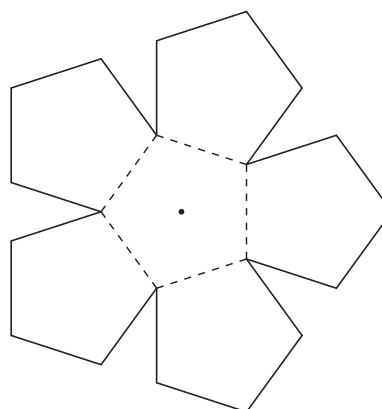
Ale nie wiemy, czy na dwóch możliwościach się kończy.

## 8 Wielościan w zeszytcie

Prawie każdy wielościan ma talię (to wśród nich jest nawet częstsze niż u ludzi!), czyli pewien jego płaski przekrój ma obwód mniejszy od sąsiednich (dokładniej: niewielka zmiana płaszczyzny tnącej daje wielokąt o większym obwodzie – a bardziej po ludzku: nałożona w takim miejscu gumka recepturka nie zsunie się). Dla sześcianu taką talią jest jego przekrój będący sześciokątem foremnym (narysuj ją!).

Można to wykorzystać do zrobienia sobie dwunastościanu foremnego mieszczącego się (potajemnie!) w zeszytcie co najmniej stukartkowym – gdy taki zeszyt otworzymy, stanie trójwymiarowy dwunastościan.

Z tekturki wytnij dwie takie figury, jak niżej – czyli sześć pięciokątów foremnych (bok 3 cm) – i powyginaj wzdłuż przerywanych linii.



Następnie połóż jedną na drugiej tak, by rogi dolnej jednakowo wystawały spod górnej i przyciskając środek palcem, nałóż recepturkę tak, by była nad rogami górnej i pod rogami dolnej.

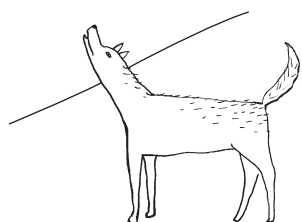
Gdy podniesiesz palec – dwunastościan przybierze klasyczną trójwymiarową postać.

Można tę konstrukcję włożyć do zeszytu (nawet przykleić do wnętrza tylnej okładki), który powinien być dość ciężki, by wielościan sam go nie otworzył.

M. K.

M. K.

## 5 Pętle na niebie



**Wprowadzenie.** Zapewne każdy zetknął się z informacją, że planety kreślą na niebie tajemnicze pętle. Spodziewamy się, że nie dzieje się to „w oczach”, bo takie zjawiska toczą się dość majestatycznie. Jeżeli jednak ktoś ma cierpliwość, to owe pętle może osobiście zaobserwować. Powiedzmy sobie szczerze od razu, że nie będzie to żadne epokowe odkrycie, będzie to samodzielne powtórzenie pracy, którą wykonali już dawno starożytni astronomowie. A była to praca ogromnie ważna, tylko że dwa tysiące lat temu nie umieli oni wyników obserwacji właściwie zinterpretować. Może więc warto tę rzecz prześledzić – powtarzam – osobiście.

**Warsztat pracy.** Będzie potrzebna mapa nieba. Brzmi to groźnie, ale atlasy nieba bywają po prostu w księgarniach, a potrzebną do naszego celu mapę można sporządzić samemu. Wystarczy raz na tydzień (lub nawet rzadziej) wieczorem nanieść na papier konfigurację gwiazd z tej strefy nieba, przez którą domyślnie przechodzi Słońce. Tych wygwieżdżonych wieczorów z pewnością nie będzie zbyt wiele, bo często będzie przeszkadzać Księżyc, no i pogoda. Za to jeżeli któraś gwiazda będzie z tygodnia na tydzień zmieniać położenie względem niezmiennego tła gwiazd pozostałych, to znaczy, że zobaczyliśmy planetę!

**Interpretacja obserwacji.** Wynikiem takich obserwacji będzie mapa nieba z naniesionymi na nią punktami kolejnych położenia jakiejś planety, które ułożą się – jeżeli obserwatorowi starczy cierpliwości – nawet w pętli. Na gruncie heliocentrycznego modelu Układu Słonecznego wyjaśnienie tego faktu jest natychmiastowe. Ziemia i górna planeta (czyli mająca orbitę obszerniejszą) obiegają Słońce w tym samym kierunku, tyle że planeta biegnie wolniej. Wobec tego co jakiś czas Ziemia planetę wyprzedza, przez co jej obraz na niebie musi się cofać względem położenia zaobserwowanych wcześniej. Jeżeli jeszcze uwzględnimy fakt, że orbity tych dwu ciał nie leżą dokładnie w jednej płaszczyźnie, to mamy wytłumaczenie, dlaczego obserwowane cofanie się planety odbywa się po torze niedokładnie pokrywającym się z przebytych dotychczas – czyli możemy widzieć pętli! Powstawanie pętli w ruchu planet dolnych (obiegających Słońce wewnątrz orbity Ziemi, a więc szybciej) można bez trudu przewidzieć.

Mam nadzieję, że obserwator przyzna, że do zdobycia tej wiedzy wystarczy nawet odręczna mapa nieba i że nie są tu potrzebne żadne przyrządy. Przyczyny takiego akurat ruchu planet zostały poznane dużo później, gdy odkryto prawo powszechnego ciążenia. Wtedy zaszło to, o co zawsze chodzi w naukach przyrodniczych, mianowicie zgodność teorii z obserwacjami (i możliwość przewidywania nowych zjawisk). Hipoteza heliocentryczna stała się prawdziwym obrazem Układu Słonecznego.

*Tomasz KWAST*

## 5 Zadanie Alhazena

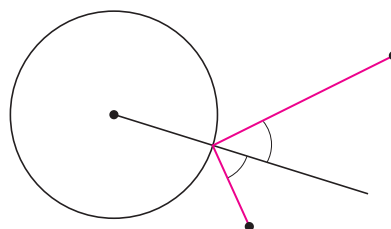
Gdy na lustrzaną sferę pada promień światła, odbija się on tak, że kąt między nim a przedłużeniem promienia sfery przechodzącego przez punkt, w którym promień pada, jest równy kątowi między tym przedłużeniem a promieniem odbitym, przy czym wszystko odbywa się w jednej płaszczyźnie wyznaczonej przez padający promień i środek sfery. Geometrycznie sytuacja jest więc dwuwymiarowa.

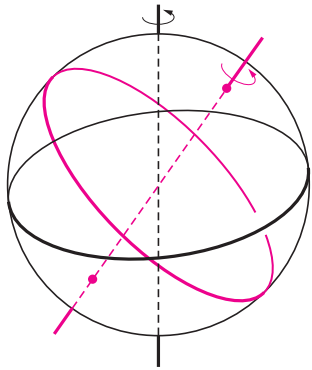
Mając promień padający i środek sfery, wykreślić promień odbity jest łatwo. Wybitny arabski astronom i matematyk, Al-Haitham (965–1039), znany w Europie jako Alhazen, postawił problem bardzo podobny, ale znacznie trudniejszy.

Dana jest sfera i dwa punkty (albo oba na zewnątrz, albo oba wewnątrz kuli ograniczonej tą sferą). Znaleźć kierunek promienia wysłanego z jednego punktu tak, by po odbiciu od sfery oświetlił drugi punkt.

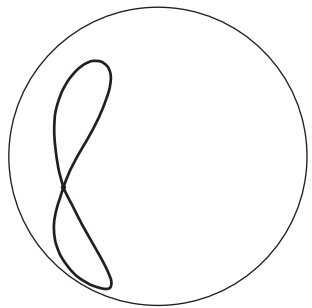
Polecamy to zadanie naszym Czytelnikom, bo – jak sądzimy – mimo niezwyklej prostoty pozwoli ono spędzić nad rozwiązaniem wiele godzin. Nie jest nawet wcale oczywiste, czy istnieje taka konstrukcja wykonalna cyrklem i linijką. Rozwiązanie rachunkowe (dane współrzędne punktów i środka sfery oraz promień tej sfery) prowadzi do równania wysokiego stopnia i nie wiadomo, czy da się je zredukować do ciągu równań kwadratowych, co, jak wiadomo, dowodziłoby klasycznej konstruowalności.

*M. K.*





Rys. 1



Rys. 2. Sfera i walec są wewnętrznie styczne, gdy są styczne z jednej strony do płaszczyzny, przy czym punkt styczności sfery jest jednym z punktów styczności walca.

## Dwie sfery w jednym miejscu

W IV wieku przed naszą erą za sprawą Platona panowało powszechne przekonanie, że sfera niebieska – jako doskonała – dopuszcza jedynie doskonałe ruchy planet, jedynych ruchomych obiektów na niej. Ruchy doskonałe to ruchy jednostajne i odbywające się po doskonałych trajektoriach. Doskonała trajektoria to taka, która może ślizgać się po sobie – na sferze tę własność mają tylko okręgi. Powstawał więc problem, jak wytłumaczyć nieregularności ruchu planet na niebie, a w szczególności powstawanie pętli, o jakich jest mowa na sąsiedniej stronie.

Eudoksos (408 p.n.e.–355 p.n.e.) – niewątpliwie najwybitniejszy matematyk swoich czasów (to on wprowadził liczby rzeczywiste!) – podszedł do sprawy tak, jak to zazwyczaj robią matematycy: problem uogólnił i zadał pytanie, czy z dopuszczalnych ruchów da się na sferze wyprodukować jakiegokolwiek pętli.

A oto jego odpowiedź.

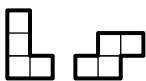
Ponieważ sfera składa się z punktów, a one nie mają rozmiarów, więc w jednym miejscu mogą się znajdować dwie identyczne sfery. Nadajmy jednej z nich ruch obrotowy (względem dowolnie obranej osi), w niej zamocujemy oś drugiej sfery i nadajmy jej też ruch obrotowy względem tej osi. Oba ruchy niech odbywają się z tą samą prędkością kątową. Odpowiedzmy teraz na pytanie, jaką trajektorię względem zewnętrznego obserwatora zakreślać będzie dowolnie ustalony punkt równika drugiej sfery.

Czytelnik Ambitny udawać będzie, że nie widzi rysunku 2 i sam znajdzie rozwiązanie, które jest na tym rysunku. Ta pętla dwa tysiące lat później zostanie nazwana oknem Vivianiego. Ale nawet patrząc na ten rysunek, niełatwo jest zauważyć, że owa pętla to przecięcie sfery z wewnątrz do niej stycznym walcem.

M. K.



## Zadania



Redaguje Łukasz BOŻYK

**M 1531.** Punkty  $A, B, C, D$  są takimi czterema wierzchołkami pewnego prostopadłościanu, że żadne dwa z nich nie są połączone krawędzią. Sfery  $s_A, s_B, s_C$  o środkach odpowiednio w punktach  $A, B, C$  są parami styczne. Udowodnić, że istnieje sfera  $s_D$ , o środku w punkcie  $D$ , która jest styczna do sfer  $s_A, s_B, s_C$ .

Rozwiązanie na str. 5

**M 1532.** Z pewnej liczby płytek o polu 4 typu  $L$  lub  $S$  (rysunek) ułożono prostokąt. Wykazać, że liczba wykorzystanych płytek typu  $L$  jest parzysta. *Uwaga.* Płytki można obracać oraz odwracać na drugą stronę.

Rozwiązanie na str. 6

**M 1533.** Na tablicy napisano liczby całkowite  $a, b, c$  większe od 1. Następnie na kartce zapisano w przypadkowej kolejności cztery liczby, będące wynikami działań  $a + bc, b + ca, c + ab$  oraz  $a + b + c$ . Czy znając liczby napisane na kartce można jednoznacznie określić, jakie trzy liczby znajdują się na tablicy?

Rozwiązanie na str. 5

Przygotował Michał NAWROCKI

**F 929.** W jakim przypadku natężenie  $I$  wypadkowego drgania powstałego w wyniku dodawania się dwóch fal elektromagnetycznych o takiej samej częstotliwości i o natężeniach  $I_1$  i  $I_2$  będzie równe sumie natężeń drgań składowych niezależnie od różnicy faz między nimi?

Rozwiązanie na str. 15

**F 930.** Z dna jeziora o głębokości  $h = 2$  m wydzielają się pęcherzyki gazu o średnicy  $d_1 = 0,05$  mm. Jaka będzie średnica  $d_2$  tych pęcherzyków, gdy osiągną one powierzchnię wody? Napięcie powierzchniowe wody wynosi  $\sigma = 0,073$  N/m. Dla ciśnienia atmosferycznego przyjąć wartość  $p_0 = 1000$  hPa.

Rozwiązanie na str. 18

Jacek z Plackiem od młodości  
Czasem grali sobie w kości.  
Ten, kto dziesięć wygrał tur,  
Otrzymywał ciastek wór.

Dnia pewnego, moi mili,  
Grę zbyt wcześnie zakończyli.  
Wielką rozpętali drakę,  
Jak podzielić ciastek pakę.

– To rzecz jasna! – Jacek rzecze  
– Ja pięć tur wygrałem przecież.  
Ty wygrałeś tylko trzy,  
Cały worek oddaj mi!

Na to Placek – Hola, hola!  
Wara mi od tego wora!  
Wygrać każdy jeszcze mógł,  
Wór dzielimy więc na pół.

– Wolne żarty! – krzyczy Jacek  
– Zaraz zrobię z Placka placek!  
A gdy bracia się kłócili,  
Trzej uczeni się zbliżyli.

– Spokój. – rzecze głos dostojny  
– Mamy dosyć Waszej wojny.  
Jam uczony jest Pacciola  
I zarządzę podział wora.

**Wynik** mówi: w tym chaosie  
Zróbcie z ciastek stosów osiem.  
Trzy z nich niech dostanie Placek,  
Pozostałe pięć zaś Jacek.

Wtem rozbrzmiewa śmiechu salwa  
– Oj, straszliwy z ciebie bahwan!  
Trzeba wziąć to pod uwagę,  
Ile **braknie** do wygranej!

Temu brakło punktów siedem,  
Pięć tamtemu, dajcie kredę,  
Przeprowadzę Wam rachunek,  
Jak dostać dobry stosunek.

Ten, co wyszedł z taką radą,  
Nazywany był Cardano.  
Gdy odpowiedź miał gotową,  
Trzeci przybysz wszedł mu w słowo.

Jestem Pascal; moim zdaniem  
Ciasteczkowe to wyzwanie  
Jedną ważną ma szukaną:  
Jest to **szansa** na wygraną!

Jak wyznaczyć ją należy?  
Niechaj każdy mi uwierzy,  
Iż my wnet to uczynimy,  
Przedtem jednak pomyślimy.

Najpierw przyjmijmy, że gracze,  
Gdy już któryś wygrać raczy,  
Nie przestają rzucać kości.  
Ot, dla własnej przyjemności.

Trzy do pięciu w tej minucie  
Zatem, gdyby dalej grali,  
To po jedenastym rzucie  
Któryś z nich byłby wygranym.

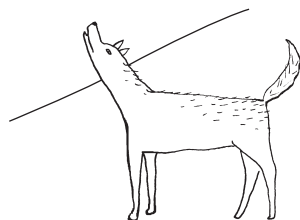
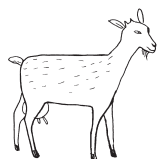
Pozostaje nam po prostu  
Obliczenie szans dokładnie,  
Że wśród rzutów jedenastu  
Jacek wygra pięć co najmniej.

Jak nietrudno zauważyć,  
By wygranych było  $k$   
To, co miałoby się zdarzyć,  
Prawdopodobieństwo ma  $\binom{11}{k}/2^{11}$ .

Stąd już blisko rozwiązanie:  
Suma, dla  $k$  najmniej pięciu,  
Liczb powyższych wynik daje.  
Wydzie zatem, w mym pojęciu  
 $(\binom{11}{5} + \binom{11}{6} + \dots + \binom{11}{11})/2^{11} \approx 0,73$ .

– Niech tak będzie! – Jacek krzyknął  
I jął żegnać mądrych gości.  
Spostrzegł wtem, że Placek zniknął  
A wraz z Plackiem wór słodkości.

Z tej bajeczki morał taki:  
Studiuj światłych głosów chór  
Lecz gdy dojdzie już do draki,  
Szybko chwytaj ciastek wór.



\*

Powyższa historyjka przedstawia tzw. *problem podziału stawki* – jedno z zadań, jakimi żywił się raczkujący rachunek prawdopodobieństwa u początków swojego istnienia. W źródłach europejskich pojawia się on po raz pierwszy w podręczniku *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportioni, et Proportionalita* włoskiego franciszkanina, Luki Paccioli (1445–1517). Paccioli uważał, że w sytuacji opisanej w historyjce nagroda powinna zostać podzielona w stosunku takim, jak stosunek liczby punktów zdobytych przez graczy, czyli 3 do 5 (0,625 puli przyznajemy Jackowi). Innego zdania był Girolamo Cardano (1501–1576), ten sam, którego imię noszą (nie do końca słusznie) wzory na rozwiązania równań 3. i 4. stopnia. W swym dziele *Practica Arithmeticae Generalis* stwierdza, że w sytuacji, gdy jednemu z graczy brakuje do zwycięstwa  $a$  punktów,



### Rozwiązanie zadania M 1531.

Z warunków zadania wynika, że  $AB = CD$ ,  $AC = BD$  oraz  $AD = BC$ , gdyż są to pary przekątnych przystających prostokątów.

Oznaczmy przez  $r_X$  promień sfery  $s_X$ . Jeżeli sfery  $s_A, s_B, s_C$  są parami styczne, to pewne dwie z nich – bez straty ogólności  $s_A$  i  $s_B$  – są styczne zewnętrznie, czyli  $AB = r_A + r_B$ . Jeśli  $s_C$  jest styczna zewnętrznie do  $s_A$  i  $s_B$ , to  $AC = r_A + r_C$ ,  $BC = r_B + r_C$  i wystarczy przyjąć

$$r_D = r_A + r_B + r_C.$$

Wówczas sfera  $s_D$  będzie styczna wewnętrznie do pozostałych trzech sfer, gdyż

$$AD = BC = r_B + r_C = r_D - r_A$$

i analogicznie  $BD = r_D - r_B$ ,  $CD = r_D - r_C$ . Jeżeli zaś sfera  $r_C$  jest styczna wewnętrznie do  $s_A$  i  $s_B$ , to  $AC = r_C - r_A$ ,  $BC = r_C - r_B$  i tym razem wystarczy przyjąć

$$r_D = r_A + r_B - r_C.$$

Wówczas  $AD = r_A + r_D$ ,  $BD = r_B + r_D$ ,  $CD = r_C - r_D$ , więc sfera  $s_D$  będzie styczna zewnętrznie do  $s_A$  i  $s_B$  oraz styczna wewnętrznie do  $s_C$ .



### Rozwiązanie zadania M 1533.

Wykażemy, że odtworzenie liczb jest możliwe. Zauważmy, że jeżeli  $x \geq 2$  oraz  $y \geq 2$ , to

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 1,$$

wobec czego  $x + y \leq xy$ . To oznacza, że

$$\begin{aligned} a + bc &\geq a + b + c, \\ b + ca &\geq a + b + c, \\ c + ab &\geq a + b + c, \end{aligned}$$

więc najmniejsza z czterech liczb napisanych na kartce jest równa  $a + b + c$ ; oznaczmy tę liczbę przez  $s$ . Pozostałe liczby oznaczmy przez  $x, y, z$  i przyjmijmy (bez straty ogólności, z uwagi na symetrię ról liczb z tablicy), że  $x = a + bc$ ,  $y = b + ca$ ,  $z = c + ab$ . Wówczas

$$\begin{aligned} x - s + 1 &= (b - 1)(c - 1), \\ y - s + 1 &= (c - 1)(a - 1), \\ z - s + 1 &= (a - 1)(b - 1), \end{aligned}$$

a skoro liczby  $a, b, c$  są większe od 1, to

$$a = 1 + \sqrt{\frac{(y - s + 1)(z - s + 1)}{(x - s + 1)}},$$

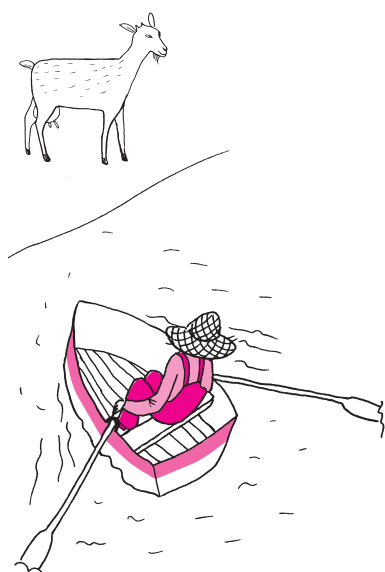
$$b = 1 + \sqrt{\frac{(z - s + 1)(x - s + 1)}{(y - s + 1)}},$$

$$c = 1 + \sqrt{\frac{(x - s + 1)(y - s + 1)}{(z - s + 1)}}.$$

a drugiemu  $b$  punktów, cała stawka powinna być podzielona w stosunku  $(1 + 2 + \dots + b) : (1 + 2 + \dots + a)$ , czyli u nas 15:28 (do Jacka wędruje  $\approx 0,651$  stawki). Wśród próbujących rozwikłać problem podziału należy wymienić jeszcze słynnego antagonistę Cardana, czyli Niccolò Tartaglię. Zwraca on słusznie uwagę, że podejście Luki Pacciolięgo nie może być sensowne, gdyż przy wyniku 0:1 kazałoby przeznaczyć całą stawkę jednemu z graczy, chociaż drugi ma niewiele mniejszą szansę na wygraną. Odpowiedź proponowana przez Tartaglię nie jest jednak specjalnie lepsza, gdyż proponuje on, by zwycięzca otrzymał pół stawki powiększone o połowę względnej różnicy w punktach (czyli w tym przypadku  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5-3}{10} = 0,6$ ). Nie jest to jednak dobre podejście, gdyż podzieliłoby stawkę w ten sam sposób przy wyniku 9:7, w którym (jak nietrudno obliczyć) szansa drugiego gracza na wygraną wynosi  $\frac{7}{8}$ . Problem podziału stawki doczekał się prawidłowego (tzn. opartego na prawdopodobieństwach wygranych poszczególnych graczy) rozwiązania dopiero w połowie XVII wieku, kiedy został podsunięty Blaise'owi Pascalowi (1623–1662) przez Antoine'a Gombauda (1607–1684), znanego szerzej jako kawaler de Mére. Pascal korespondował na ten temat z Pierrem Fermatem (1601–1665) i wspólnie udało im się wskazać rozwiązanie (rozumowanie opisane w wierszyku pochodzi od Fermata, rozwiązanie Pascala nie wymagało „przedłużania” gry po wygranej któregoś z graczy, wykorzystywało natomiast pewne własności trójkąta Pascala).

Inną zagadką, zadaną Pascalowi przez kawalera de Mére, było pytanie o najmniejszą liczbę rzutów dwiema kośćmi, potrzebną do tego, aby z prawdopodobieństwem przewyższającym  $\frac{1}{2}$  wyrzucić za którymś razem dwie szóstki. De Mére potrafił rozwiązać to zadanie w przypadku rzutu jedną kością – w tym celu wystarczy skoncentrować uwagę na zdarzeniu przeciwnym do rozważanego, czyli pytaniu o najmniejszą liczbę rzutów, przy której szansa na uniknięcie szóstki jest **mniejsza** od  $\frac{1}{2}$ . Ponieważ w pojedynczym rzucie szansa na uniknięcie szóstki wynosi  $\frac{5}{6}$ , zatem szansa na niewyrzucenie szóstki w  $n$  rzutach wynosi  $(\frac{5}{6})^n$ . Szukamy zatem najmniejszej wartości  $n$ , dla której  $(\frac{5}{6})^n$  jest mniejsze od  $\frac{1}{2}$ ; nietrudno sprawdzić, że liczba ta wynosi 4. W jaki sposób rozszerzyć to rozumowanie na rzut dwiema kośćmi? Tutaj kawaler de Mére napotkał trudności, gdyż był zdania, że stosunek szukanej „wartości granicznej” do liczby wszystkich możliwości powinien być stały, zatem skoro w przypadku jednego rzutu był on jak 4 (wartość graniczna) do 6 (liczba możliwości), to skoro przy dwóch rzutach mamy 36 równo prawdopodobnych możliwości (z czego de Mére zdawał sobie sprawę), poszukiwana „wartość graniczna” w tym przypadku wynosi 24. De Mére nie poprzestał jednak na teorii i postanowił sprawdzić ją w praktyce – ta miała jednak inne zdanie na ten temat i mocno sugerowała, że po 24 rzutach dwie szóstki zdarzają się rzadziej niż częściej. O tej rozbieżności poinformował Pascala, twierdząc, że jego odkrycie oznacza sprzeczność arytmetyki. Pascal nie miał jednak trudności w dostrzeżeniu, w czym tkwi paradoks. Kluczem do rozwiązania jest najrozsądniejsza ocena szansy na uniknięcie dwóch szóstek w jednym, podwójnym rzucie – jest to, oczywiście,  $\frac{35}{36}$  (gdyż szansa na dwie szóstki to  $\frac{1}{36}$ ). W tej sytuacji, podobnie jak poprzednio, szukamy najmniejszej wartości  $n$ , dla której  $(\frac{35}{36})^n < \frac{1}{2}$  – tym razem wychodzi 25. Szansa na wyrzucenie dwóch szóstek po takiej liczbie rzutów wynosi w przybliżeniu 0,506, podczas gdy szansa na dwie szóstki po 24 rzutach to około 0,491. Kawaler de Mére musiał zatem wykonać całkiem pokaźną liczbę doświadczeń, aby stwierdzić, że w praktyce liczba 24 jest zbyt mała. . .

Przedstawione problemy opierają się na pojęciach współcześnie elementarnych (jak np. prawdopodobieństwo), z którymi ludzkość oswajała się dość długo i które w czasach, w jakich były „wykuwane”, dostarczały trudności z dzisiejszego punktu widzenia elementarnych. Ciekawie jest zastanowić się, czy za paręset lat, w jubileuszowym, pięcioletnim numerze *Delty*, przyszli autorzy artykułów będą mogli z pewnym rozbawieniem opisywać nasze mniej lub bardziej udolne próby rozwiązania pewnych skomplikowanych dziś problemów, które już wtedy będą uznawane za zupełnie banalne. . .



# Liczby pierwsze jako niewiadome

Mariusz SKAŁBA

W historii ludzkiego poznania mało jest tak fascynujących pojęć jak liczby pierwsze. Chociaż dzisiaj wiemy o nich znacznie więcej niż 120 lat temu, to jeszcze więcej dotyczących ich pytań pozostaje bez odpowiedzi. Celem tej notki jest pokazanie, że trudno jest ocenić na pierwszy rzut oka, czy pytanie dotyczące liczb pierwszych jest łatwe, czy też bardzo trudne – poza zasięgiem współczesnej nauki. Rozważmy najpierw następujące równanie z dwiema niewiadomymi:

$$(1) \quad p^2 - 2q^2 = 1.$$

Szukamy rozwiązań w liczbach pierwszych  $p, q$ . Jeśli  $q = 2$ , to  $p = 3$ . Jeżeli natomiast  $q > 2$ , to obie  $p, q$  są nieparzyste, a więc

$$p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Wynika stąd, że

$$1 = p^2 - 2q^2 \equiv 1 - 2 \equiv 3 \pmod{4},$$

co jest absurdem. Jedynym rozwiązaniem równania (1) w liczbach pierwszych  $p, q$  jest zatem para  $p = 3, q = 2$ .

Zajmiemy się teraz podobnym równaniem:

$$(2) \quad p^2 - 2q^2 = -1.$$

Można zgadnąć, że para  $(7, 5)$  jest rozwiązaniem (2) w liczbach pierwszych. W przypadku jeszcze większej determinacji natrafimy na rozwiązanie  $(41, 29)$  (proszę sprawdzić!) ale co robić dalej! Już teraz widać, że ewentualny dowód (ewentualnego) „twierdzenia”, iż równanie (2) ma tylko skończenie wiele rozwiązań w liczbach pierwszych  $p, q$ , nie może być całkiem banalny, gdyż musiałyby on wychwycić znalezione rozwiązania. Podejźmy więc do problemu bardziej systematycznie i bez żadnych uprzedzeń. Zauważmy przede wszystkim, że pary  $(a_n, b_n)$ , określone wzorem

$$a_n + b_n\sqrt{2} := (1 + \sqrt{2})^n, \text{ gdzie } n = 1, 3, 5, 7, \dots,$$

spełniają równanie (2), gdyż ze wzoru dwumianowego Newtona wynika, że

$$(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2},$$

a zatem

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^n(1 - \sqrt{2})^n = (-1)^n = -1,$$

gdyż  $n$  jest nieparzyste. Łatwo sprawdzić, że zgadnięte wcześniej rozwiązania w liczbach pierwszych to  $(a_3, b_3)$  oraz  $(a_5, b_5)$ . Z pomocą komputera sprawdziliśmy rozwiązanie  $(a_n, b_n)$  dla wszystkich  $n \leq 60$ : tylko dla  $n = 3, 5, 29, 59$  otrzymujemy obie liczby pierwsze.

$n$	$a_n$	$b_n$
1	1	1
3	7	5
5	41	29
29	63018038201	44560482149
59	19175002942688032928599	13558774610046711780701
?	?	?

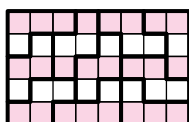
Ale możemy zaryzykować hipotezę, że równanie (2) ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach pierwszych  $p, q$ . Raczej nie zachęcamy Cię, Czytelniku, abyś się nią zajmował, ale do studiowania matematyki teoretycznej jak najbardziej :)



## Rozwiązanie zadania M 1532.

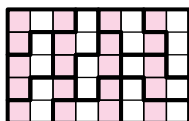
Jeżeli prostokąt  $m \times n$  został ułożony z pewnej liczby opisanych płytek, to jego powierzchnia jest liczbą podzielną przez 4, wobec czego co najmniej jeden z wymiarów jest liczbą podzielną przez 2. Przypuśćmy bez straty ogólności, że  $m = 2k$ .

Sposób 1. Pomalujmy prostokąt w paski o wymiarach  $2k \times 1$ .



Zauważmy, że każda kostka typu  $S$  zawiera parzystą liczbę kolorowych pól (dokładnie dwa), a każda kostka typu  $L$  zawiera nieparzystą liczbę kolorowych pól (jedno lub trzy). Ponieważ liczba kolorowych pól w całym prostokącie jest parzysta (jako wielokrotność liczby  $2k$ ), więc łączna liczba kostek zawierających nieparzystą liczbę kolorowych pól musi być parzysta.

Sposób 2. Pomalujmy prostokąt w paski o wymiarach  $1 \times n$ .

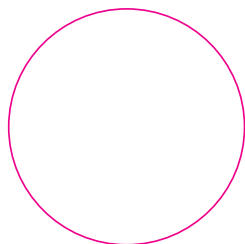


Zauważmy, że pól każdego koloru jest po tyle samo zarówno w całej tablicy (po  $kn$ ), jak i w obrębie dowolnej płytki typu  $S$ . Tymczasem każda z płytek typu  $L$  jest zdominowana przez pewien kolor (w stosunku pól  $3 : 1$ ). Wobec tego liczba płytek zdominowanych przez kolor biały musi być równa liczbie płytek zdominowanych przez kolor, a zatem łączna liczba płytek typu  $L$  jest parzysta.

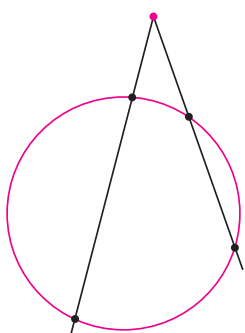
## 8 Z samą linijką na okrąg

### Styczna do okręgu

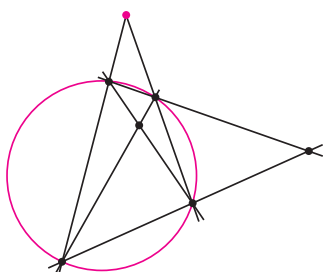
Dany jest okrąg i punkt na zewnątrz.



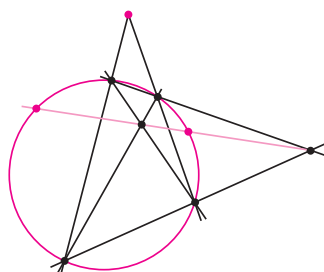
Przez ten punkt prowadzimy dwie sieczne różnej długości.



Punkty przecięcia tych siecznych z okręgiem łączymy prostymi w pary na pozostałe dwa sposoby.



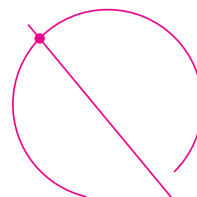
Przez nowo powstałe punkty przecięcia prowadzimy prostą



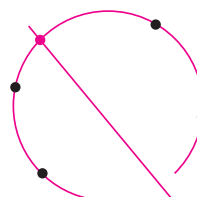
Jeśli punkty otrzymane z jej przecięcia z okręgiem połączymy z początkowym punktem, to uzyskamy styczne do okręgu.

### Brakujący punkt

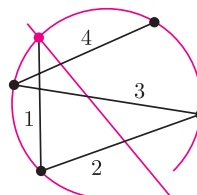
Dany jest okrąg, ale nie cały, i prosta przecinająca go, ale przechodząca też przez dziurę.



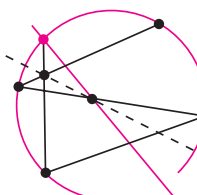
Drugi punkt przecięcia okręgu z daną prostą znajdujemy, dobierając na okręgu jeszcze cztery punkty



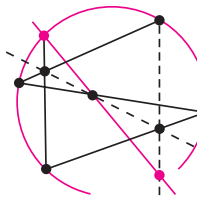
i łącząc je łamaną (dla ułatwienia ponumerujemy kolejno jej odcinki).



Punkt przecięcia prostych zawierających odcinki 1 i 4 łączymy z punktem przecięcia danej prostej z prostą zawierającą odcinek 3



i przez punkt przecięcia tej prostej z prostą zawierającą odcinek 2 prowadzimy prostą z ostatniego wierzchołka łamanej.



Przecina ona daną prostą w punkcie leżącym na danym okręgu.

Obie te konstrukcje korzystają z twierdzeń geometrii rzutowej, której nie omawia się w szkole. Ale przecież nikt nam nie każe posługiwać się w życiu tylko tym, co poznaliśmy na lekcjach. Obie powyższe konstrukcje bez zmian stosują się też do elips i hiperbol.

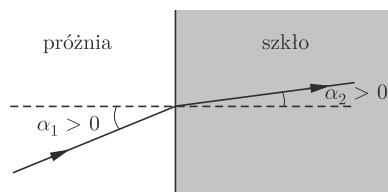
M. K.



# Ujemny współczynnik załamania

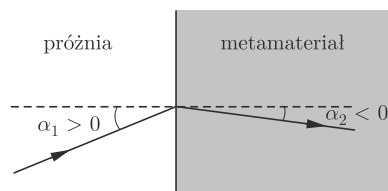
Grzegorz DERFEL\*

\*Politechnika Łódzka, Instytut Informatyki



Rys. 1

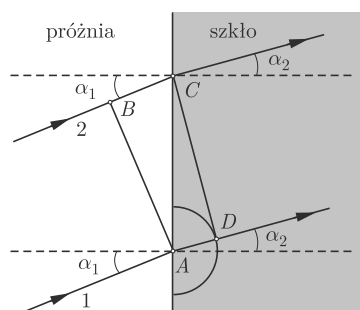
Światło dochodzące do granicy oddzielającej dwa ośrodki częściowo odbija się od niej, a częściowo przechodzi przez nią, zmieniając kierunek, co określamy mianem załamania. Najprostszy przypadek załamania ma miejsce, gdy promień światła pada z próżni na powierzchnię ośrodka izotropowego, np. szkła. Zjawisko to opisane jest prawem załamania Snella: promienie padający i załamany oraz prosta prostopadła do powierzchni (zwana normalną) leżą w jednej płaszczyźnie (zwanej płaszczyzną padania), a stosunek sinusów kąta padania  $\alpha_1$  do sinusów kąta załamania  $\alpha_2$  jest stały (rys. 1). (Na wszystkich rysunkach pominięto promienie odbite.) Kąty padania i załamania mierzone są między normalną a odpowiednim promieniem. Danemu kątowi można przypisać znak, np. dodatni, jeśli dla pokrycia się promienia z normalną trzeba ten promień obrócić zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, a ujemny, gdy w tym celu konieczny jest obrót w przeciwnym kierunku. Jeśli do ośrodka materialnego światło przechodzi z próżni, to stosunek sinusów nosi nazwę bezwzględnego współczynnika załamania tego ośrodka i bywa oznaczany symbolem  $n$ . Zwróćmy uwagę, że gdy promienie padający i załamany biegną po przeciwnych stronach normalnej, to kąty padania i załamania mają jednakowe znaki i współczynnik załamania jest dodatni. Wartość bezwzględna współczynnika załamania jest zawsze równa stosunkowi prędkości światła  $c$  w próżni, do prędkości światła w ośrodku  $v$ ,  $|n| = c/v$ . Ponieważ prędkość światła w ośrodkach materialnych jest mniejsza niż prędkość światła w próżni, to ich współczynniki załamania mają wartość większą od 1.



Rys. 2

Dopuszczamy jednak możliwość załamania rządzonego ujemnym współczynnikiem. Koncepcja takiego zjawiska została przeanalizowana teoretycznie w 1967 r. przez rosyjskiego fizyka Wiktora Wiesiela. Kąty padania i załamania miałyby wtedy przeciwne znaki, a więc promień załamany znajdowałby się po tej samej stronie normalnej co promień padający (rys. 2). Materiały o ujemnym współczynniku, określane mianem metamateriałów, miałyby niezwykle właściwości będące źródłem zaskakujących efektów, stwarzając pole dla spekulacji na temat ich praktycznych zastosowań. Najciekawsze zjawiska można uzyskać w przypadku otrzymania cieczy o ujemnym współczynniku załamania. Obraz zanurzonej części np. ołówka, umieszczonego skośnie w szklance z taką cieczą, byłby skierowany w przeciwną stronę niż dla standardowej cieczy, a pozorny obraz ryby pływającej w stawie wypełnionym taką cieczą, mógłby być widoczny ponad powierzchnią stawu. Poza zadziwiającymi efektami wizualnymi takie materiały miałyby zastosowanie praktyczne w optyce. Tutaj wpływ ujemnego współczynnika załamania przejawia się tym, że soczewki wypukłe mogłyby rozpraszać wiązkę światła, a wklęsłe skupiać. Dodatkowo płytki równoległe mogłyby skupiać światło, co dla standardowych materiałów nie jest możliwe. Tak skonstruowana soczewka byłaby pozbawiona przeszkadzających efektów dyfrakcji, które nie pozwalają na obrazowanie przedmiotów o mniejszych wymiarach niż długości fali użytego światła. Jak dotąd otrzymano prototypy materiałów o ujemnym współczynniku załamania w zakresie mikrofal, tworząc sztuczne struktury kompozytowe o złożonej budowie.

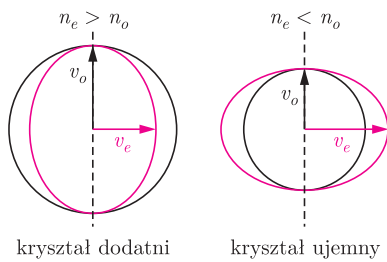
Okazuje się jednak, że załamanie światła z ujemnym współczynnikiem występuje także w ośrodkach naturalnych, jakimi są pewne kryształy istniejące w przyrodzie lub wyhodowane sztucznie. W tym artykule przyjrzymy się temu zjawisku.



Rys. 3. Wyznaczając sinusy kątów  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  z trójkątów  $ABC$  i  $ADC$ , można łatwo wyprowadzić prawo Snella.

Załamanie światła można uzasadnić, uwzględniając jego falową naturę i stosując obowiązującą dla fal zasadę Huygensa. Mówi ona, że każdy punkt, do którego dotarła fala, jest źródłem nowej fali o kulistym czole (w ośrodku izotropowym). Obwiednia tych wszystkich wtórnych fal tworzy czoło fali wypadkowej. W ten sposób powstaje np. płaski front falowy padającej wiązki światła. Dla wyznaczenia kierunku wiązki załamanej pomocne jest określenie wypadkowego czoła fali związanej z tą wiązką. Rysunek 3 przedstawia przydatną do tego konstrukcję opartą na zasadzie Huygensa. Uwidocznione są dwa skrajne promienie wiązki padającej z próżni na powierzchnię szkła. Załóżmy, że w pewnej chwili promień 1 dociera do powierzchni granicznej w punkcie A. Promień 2 dochodzi wtedy do punktu B. Po czasie  $t = |BC|/c$  promień 2 osiąga powierzchnię graniczną, po czym cała wiązka rozchodzi się już w szkło. Punkt A jest źródłem fali, która rozchodzi się z prędkością  $v = c/n$  jako wtórna fala kulista i po czasie  $t$  dociera do miejsc odległych o  $vt$  od punktu A. Prosta wystawiona z punktu C i styczna do półkuli w punkcie D jest obwiednią wszystkich fal kulistych wychodzących ze wszystkich punktów odcinka AC i stanowi czoło CD fali załamanej. Odcinek AD wytycza kierunek wiązki załamanej. Zauważmy, że jest on prostopadły do czoła fali wypadkowej.

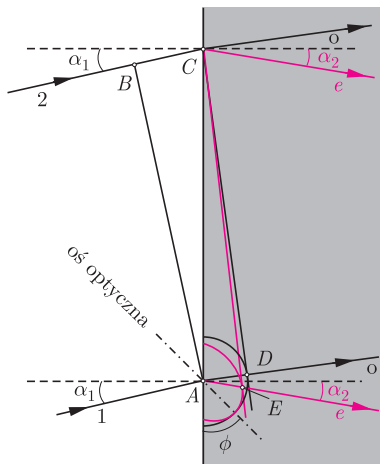
Opisany przypadek jest mało skomplikowany, a to dzięki temu, że po załamaniu światło rozchodzi się w ośrodku izotropowym, w którym żaden kierunek nie jest wyróżniony. Inaczej przedstawia się sprawa w niektórych kryształach (a także w polimerach i ciekłych kryształach), których właściwości fizyczne zależą od kierunku. Z punktu widzenia optyki klasyfikuje się je jako ośrodki dwójłomne. Na ich powierzchniach zachodzi tzw. podwójne załamanie, bardziej złożone niż załamanie na powierzchniach ośrodków izotropowych. W wyniku podwójnego załamania promień padający rozdziela się na dwa promienie biegnące w różnych kierunkach, z różną prędkością i spolaryzowane liniowo w różnych płaszczyznach. Istnieją dwa rodzaje materiałów dwójłomnych. W tzw. ośrodkach jednoosiowych istnieje jeden szczególny kierunek, zwany osią optyczną, wzdłuż którego oba promienie załamane mają tę samą prędkość. W ośrodkach dwuosiowych istnieją dwa takie kierunki. W tym artykule ograniczymy się do przedstawienia zjawiska załamania w ośrodkach jednoosiowych.



Rys. 4

Jeden z promieni załamanych, zwany zwyczajnym, podlega prawu załamania Snella. Kąt załamania określony dla niego jest stałym współczynnikiem zwanym współczynnikiem załamania promienia zwyczajnego danego ośrodka,  $n_o$ . Promień zwyczajny ma tę samą prędkość  $v_o = c/n_o$  niezależnie od kierunku propagacji. Można to zilustrować kulistą powierzchnią o promieniu  $v_o$  reprezentującą tę wartość prędkości we wszystkich kierunkach, zwaną powierzchnią normalnych. Kuliste są także czoła fal wtórnych składające się na płaskie czoło fali związanej z wiązką promieni zwyczajnych.

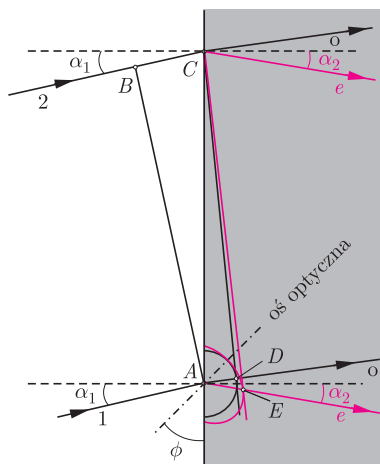
Drugi promień, zwany nadzwyczajnym, nie spełnia prawa załamania, ponieważ stosunek sinusów nie jest stały, lecz zależy od wzajemnej orientacji promienia padającego, osi optycznej i powierzchni granicznej. Są sytuacje, w których promień nadzwyczajny nie leży w płaszczyźnie padania, a także takie, w których jego kąt załamania jest różny od zera nawet przy padaniu prostopadłym, a szczególną anomalię stanowi ujemny kąt załamania, o czym jest mowa poniżej. Prędkość promienia nadzwyczajnego ilustruje powierzchnia normalnych w kształcie elipsoidy obrotowej, której oś symetrii pokrywa się z osią optyczną. Prędkość w dowolnym kierunku określona jest długością odcinka, który wytycza dany kierunek, łączącego środek elipsoidy z punktem na elipsoidzie. Półoś równoległa do osi optycznej wyznacza wartość prędkości w kierunku osi,  $v_o = c/n_o$ , a półoś prostopadła – wartość w kierunku do osi prostopadłym,  $v_e = c/n_e$ , gdzie  $n_e$  nazywany jest współczynnikiem załamania promienia nadzwyczajnego. Jeśli wartość  $n_e$  jest większa niż  $n_o$ , to ośrodek nazywa się optycznie dodatnim. W przeciwnym przypadku ośrodek jest optycznie ujemny. Rysunek 4 pokazuje powierzchnie normalnych w obu przypadkach.



Rys. 5

Bieg obu promieni załamanych w ośrodku dwójłomnym można znaleźć, adaptując konstrukcję Huygensa dla zjawiska podwójnego załamania. Zastosujemy tę metodę do przedstawienia szczególnego, nieopisywanego w podręcznikach optyki kryształów przypadku, w którym realizuje się załamanie z ujemnym współczynnikiem.

Niech wiązka światła pada pod kątem  $\alpha_1$  na powierzchnię ośrodka optycznie dodatniego, którego oś optyczna leży w płaszczyźnie padania i tworzy kąt  $\phi$  z normalną (rys. 5). Najpierw promień 1 dociera do powierzchni granicznej w punkcie A, a po czasie  $t = |BC|/c$  powierzchnię tę osiąga promień 2. Z punktu A rozchodzą się dwie fale wtórne – zwyczajna i nadzwyczajna. Po czasie  $t$  wtórna fala zwyczajna osiąga leżące na półkuli punkty oddalone od A o  $v_o t$ , a wtórna fala nadzwyczajna dociera do punktów elipsoidy odległych od A o  $v_e t$ . Odtąd w kryształach rozchodzą się już dwie wiązki biegnące w różnych kierunkach. Kierunek promienia zwyczajnego można znaleźć w taki sam sposób jak w przypadku izotropowym. Jest prostopadły do wypadkowego czoła  $CD$ . Kierunek promienia nadzwyczajnego wynika z analogicznej konstrukcji. Prosta wystawiona z punktu C, styczna do elipsoidy w punkcie E, jest obwiednią fal kulistych wychodzących ze wszystkich punktów odcinka AC i stanowi czoło fali  $EC$ . Odcinek  $AE$  wytycza kierunek wiązki załamanej. Zauważmy, że tym razem kierunek ten nie jest prostopadły do czoła fali. Ponadto promień nadzwyczajny biegnie po tej samej stronie normalnej co promień padający. Oznacza to, że kąt padania i kąt załamania dla promienia nadzwyczajnego mają różne znaki. Stosunek ich sinusów jest ujemny, a więc można przyjąć, że załamaniem promienia nadzwyczajnego rządzi w tym przypadku ujemny współczynnik załamania. Na rysunku 6 zilustrowane jest to samo zjawisko występujące w kryształach optycznie ujemnym.



Rys. 6

Załamanie z ujemnym współczynnikiem ma swoje źródło w anizotropii optycznej ośrodka. Warunkiem jego wystąpienia jest odpowiednia orientacja osi optycznej względem powierzchni załamującej. Możliwość zaistnienia tego zjawiska w zwykłych kryształach dwójłomnych została zademonstrowana (przy użyciu ujemnego optycznie kalcytu,  $\text{CaCO}_3$ , i dodatniego optycznie wanadanu itru,  $\text{YVO}_4$ ) stosunkowo niedawno, bo w roku 2003, mimo że dwójłomność kryształów znana jest od XVII wieku. Odkrycie to uzupełniło znany obraz zjawisk optycznych występujących w kryształach.

## Elektrodynamiczne dziecięła i huśtawki

Stanisław BEDNAREK\*

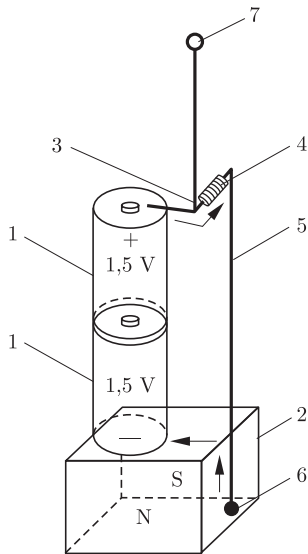
Siła elektrodynamiczna jest powszechnie wykorzystywana do wprawiania w ruch silników elektrycznych. My spróbujemy wykorzystać ją do napędu dwóch interesujących zabawek, które do złudzenia przypominają dziecięła i huśtawkę.

Do przeprowadzenia doświadczeń potrzebne będą: miedziany drut bez izolacji o długości około 1,5 m i średnicy 0,5–1,5 mm, magnes neodymowy w kształcie prostopadłościanu o rozmiarach około  $4 \times 3 \times 1,5$  cm, dwie duże, okrągłe baterie o sile elektromotorycznej 1,5 V (typu R20) – najlepiej alkaliczne i wcześniej nieużywane, koralik albo kulka drewniana o średnicy około 1 cm z otworem, taśma klejąca, marker, lutownica, cyna i szczypce uniwersalne (tzw. kombinerki). Magnes powinien być namagnesowany wzdłuż najkrótszego boku.

Sposób wykonania elektrodynamicznego dziecięła został przedstawiony na rysunku 1. Z drutu odcinamy dwa kawałki o długości kilku cm. Część pierwszego z tych kawałków nawijamy na drugim drucie, układając 10–15 zwojów równo jeden obok drugiego. W ten sposób uzyskujemy tulejkę o długości 1–1,5 cm, która będzie stanowiła łożysko dla korpusu kiwającego się dziecięła. Drugi kawałek drutu wysuwamy z tulejki i wyginamy koniec pierwszego, zgodnie z rysunkiem 1, a następnie odcinamy niepotrzebne końcówki. Dzięki temu mamy wspornik, który przylutowujemy do dodatniego bieguna jednej z baterii R20. Przez tulejkę przekładamy kawałek drutu o długości około 30 cm i zaginamy go po obu stronach pod kątem prostym, tak żeby odgięte odcinki miały długość kilkunastu centymetrów.

Na magnesie neodymowym ustawiamy drugą baterię R20, a na niej umieszczamy baterię ze wspornikiem. Obie baterie będą utrzymywane razem dzięki siłom przyciągania magnetycznego ich stalowych osłon. Dla zwiększenia pewności połączenia możemy owinąć baterie taśmą klejącą. Posługując się magnesem neodymowym, należy zachować ostrożność, żeby nie przycisnął nam skóry palców do baterii lub innego przedmiotu stalowego. Na odgiętej w dół części drutu (nazwijmy ją „ogonem” dziecięła) zaznaczamy markerem odcinek sięgający nieco powyżej dolnej krawędzi magnesu. Zdejmujemy baterię z magnesu, odcinamy drut w miejscu zaznaczenia i nakładamy na jego dolny koniec kroplę cyny, która zapewni nam dobry kontakt z magnesem. Na górny koniec drutu nakładamy kulkę lub koralik i przyklejamy kawałkiem taśmy. Ponownie ustawiamy obie baterie na magnesie. Kulka z cyny powinna dotykać bocznej powierzchni magnesu. Gdyby tak nie było, należy wygiąć drut wspornika w odpowiednią stronę. Jeden z dziecięł, wykonany zgodnie z podanym opisem, jest pokazany na fotografii 1.

Gdy kropla cyny dotyka bocznej powierzchni magnesu, wtedy obserwujemy drgania drutu w płaszczyźnie pionowej, przypominające ruchy dziecięła kującego drzewo. Przyczyną tych drgań jest przepływ prądu elektrycznego – od dodatniego bieguna górnej baterii przez tulejkę, ogon dziecięła, cynową kulkę i powierzchnię magnesu do ujemnego bieguna dolnej baterii. Ponieważ ogon dziecięła znajduje się w polu magnetycznym, to działa na niego siła elektrodynamiczna odpychająca go od magnesu. Powoduje to odsunięcie ogona wraz z kroplą cyny od magnesu i przerwanie obwodu oraz zanik siły elektrodynamicznej. Wtedy ogon szybko opada pod własnym ciężarem, co powoduje ponowne zamknięcie obwodu i przepływ prądu. W konsekwencji tego odbywają się drgania, podczas których słychać uderzenia cynowej kulki o magnes, przypominające stukanie dziecięła. Wahający drut z kulką przypomina z kolei ruchy górnej części tułowia dziecięła. Są to drgania relaksacyjne, charakteryzujące się tym, że wykres zależności wychylenia od czasu ma kształt podobny do zębów piły. Używając zbudowanej zabawki, możemy przeprowadzić szereg doświadczeń o charakterze ilościowym, np. zbadać zależność częstotliwości stukania dziecięła od położenia koralika na drucie lub od długości jego ogona. Można też zbudować dziecięła, używając innej liczby baterii niż dwie.

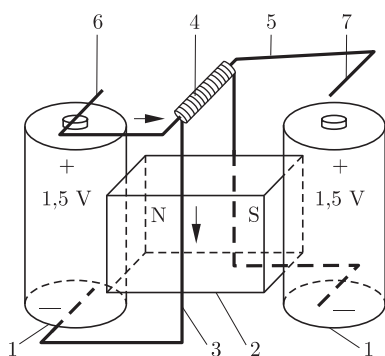


Rys. 1. Budowa elektrodynamicznego dziecięła; 1 – bateria alkaliczna 1,5 V (typu R20), 2 – prostopadłościenny magnes neodymowy, 3 – wspornik z drutu miedzianego, 4 – tulejka zwinięta z drutu na końcu wspornika, 5 – ogon dziecięła, 6 – kulka z cyny, 7 – koralik lub kulka, N, S – bieguny magnesu, strzałki wskazują kierunek przepływu prądu.



Fot. 1. Przykład wykonania elektrodynamicznego dziecięła

\*Instytut Fizyki, Uniwersytet Łódzki



Rys. 2. Huśtawka elektrodynamiczna; 1 – bateria alkaliczna 1,5 V (typu R20), 2 – prostokątny magnes neodymowy, 3 – wspornik wygięty z drutu miedzianego, 4 – tulejka zwinięta z drutu, 5 – ramię, 6, 7 – końcówki ramienia z drutu miedzianego, N, S – bieguny magnesu, strzałki wskazują kierunek przepływu prądu w przypadku przechylenia ramienia w lewo.

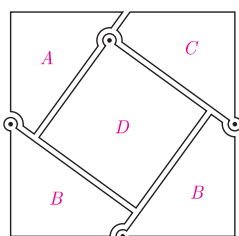


Fot. 2. Wygląd zbudowanej huśtawki elektrodynamicznej

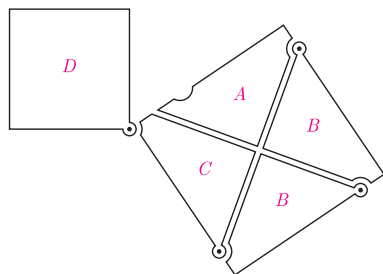
Sposób wykonania elektrodynamicznej huśtawki przedstawia rysunek 2. W tym układzie dwie baterie alkaliczne typu R20 są przyłożone do przeciwnych ścianek używanego poprzednio prostokątnego magnesu neodymowego. Na magnes nałożony jest wspornik z tulejką, w części środkowej wygięty z drutu miedzianego. Wykonując tulejkę i wspornik, należy postępować w sposób podobny jak poprzednio. Dolne końce wspornika zostały zagięte pod kątem prostym i dotykają od spodu ujemnych biegunów baterii. Przez tulejkę wspornika przechodzi poziome ramię zagięte dwukrotnie pod kątem prostym, dzięki temu jego końcówki mogą dotykać do dodatnich biegunów baterii. Wysokość wspornika jest nieco większa niż wysokość baterii. Skutkiem tego w dowolnej chwili tylko jedna końcówka ramienia po jego przechyleniu może dotykać baterii. Jeden ze zbudowanych modeli huśtawki pokazano na fotografii 2.

Działanie huśtawki jest następujące. Jeżeli końcówka ramienia po którejś stronie dotknie dodatniego bieguna baterii, wówczas zamknie ona obwód elektryczny. Przez połowę ramienia, znajdującego się po stronie dotknięcia, popłynie prąd w kierunku tulejki, wspornika i ujemnego bieguna baterii. Ramię znajduje się w polu magnetycznym, skierowanym do niego prostopadle, więc ta połowa ramienia zostanie odepchnięta ku górze. Spowoduje to otwarcie obwodu i utworzenie zamkniętego obwodu po stronie przeciwnej, gdzie powtórzy się opisana sytuacja. W ten sposób ramię będzie przechylało się raz w jedną, raz w drugą stronę, podobnie jak dwuosobowa huśtawka. W przypadku tej huśtawki również zachodzą drgania relaksacyjne. Bardziej dociekliwi Czytelnicy mogą wykorzystać tę zabawkę do doświadczeń o charakterze ilościowym, np. badając zależność między częstotliwością drgań i masą każdego z ramion, którą łatwo zmieniać, umieszczając na nim ciężarki o znanej masie, np. małe, mosiężne nakrętki. Można też zastanowić się, czy dzięcioł i huśtawka będą działały po odwróceniu magnesu i zamianie miejscami jego biegunów? Kończąc, warto dodać, że drgania relaksacyjne są bardzo często spotykanym rodzajem drgań i zachodzą m.in. podczas skrzywienia przesuwanych po sobie ciał, a także gry na instrumentach smyczkowych.

## 8 Pitagoras w zawiasach



Oczywiście, w niektórych wierzchołkach czworokątów dodane są kółeczka (mające środek w wierzchołkach, a w innych są wycięcia, które należy zrobić promieniem o 1 mm większym od kółeczek).



Czy do podziału kwadratu trzeba koniecznie użyć środków boków?

Zabawmy się Pitagorasem, budując urządzenie przedstawione obok... W tym celu wytnijmy z grubego kartonu lub z cienkiej sklejki figury narysowane na tylnej stronie okładki (w ilościach tam wskazanych) oraz

- przyklejmy do części  $A_s$  z góry i z dołu części  $A$ ,
- podobnie do części  $B_s$  z góry i z dołu części  $B$ ,
- tak samo z  $C$  i  $D$ .

Tak uzyskane figury trzywarstwowe zestawmy tak, jak na rysunku obok. Wtedy wystające z figury  $A_s$  kółko wejdzie pomiędzy wystające kółka figur  $B$  i tak dalej. Następnie przez wszystkie kropki przetknijmy druciki (np. od spinacza), elementy powinny utworzyć jedną nierozzerwalną całość – praca konstruktorska skończona.

Teraz otrzymane urządzenie będzie można przez pociągnięcie za część  $A$  *pitagorasić*, czyli doprowadzić do tego, że z kwadratu zrobią się dwa (*pitagorejski rozkład kwadratu*).

Gdy zechcemy mieć inny podział tego samego kwadratu na dwa (a przecież możemy sobie tego życzyć, ponieważ istnieje bardzo wiele trójkątów prostokątnych o zadanej przeciwprostokątnej), musimy nieco popracować. Mianowicie, należy ze środka boku kwadratu (tego, który chcemy podzielić na dwa mniejsze – oznaczmy jego długość przez  $p$ ) poprowadzić prostą aż do przecięcia z prostą poprowadzoną pod tym samym kątem ze środka kolejnego boku itd. Wówczas wewnątrz danego kwadratu powstanie mniejszy kwadrat (oznaczmy długość jego boku przez  $q$ ), a cztery czworokąty, na jakie podzielona zostanie „reszta”, złożą się na kolejny kwadrat.

Te czworokąty mają dwa kąty proste. Przy jednym z nich oba ramiona są tej samej długości – ich długość to  $p/2$ . Przy drugim kącie prostym ramiona mają długość

$$\frac{\sqrt{p^2 - q^2} + q}{2} \quad \text{i} \quad \frac{\sqrt{p^2 - q^2} - q}{2}.$$

Na okładce długości boków czworokątów to 5, 5, 7 i 1.

K. Ł.

# § Obsesja dużych liczb

\*Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Karol GRYSZKA \*

Kiedy miałem kilka, kilkanaście lat, wraz ze starszym bratem często graliśmy w grę. Należało w swojej kolejce podać liczbę większą od wskazanej przez poprzednika. Przegrywał oczywiście ten, kto nie był w stanie podać liczby większej. Czasami ponosiła nas fantazja i mówiliśmy „nieskończoność” albo „nieskończoność plus nieskończoność”. Dziś już wiem, że nieskończoność liczbą nie jest, a działania na nieskończonościach są bardziej wyrafinowane, niż podejrzewałem. Gdyby i Tobie, drogi Czytelniku, przyszło kiedyś wymienić (albo usłyszeć) jakąś dużą liczbę, możesz sięgnąć do poniższej listy. Nie są to bowiem byle jakie liczby...

$\pi = 3,1415926535897932384$   
626433832795028841971...

Jeden z przykładów dowodu twierdzenia Pitagorasa, w wersji mechanicznej, można znaleźć na okładce numeru.

Dane szacunkowe – stan na sierpień 2016.

Wspomniane 200 terabajtów to mniej więcej tyle, ile wynoszą zasoby elektroniczne Biblioteki Kongresu – amerykańskiej biblioteki w Waszyngtonie, będącej największą tego typu instytucją na świecie. Poza materiałami elektronicznymi znajduje się w niej m.in. 142 mln dokumentów, 29 mln książek, 12 mln fotografii oraz ponad pół miliona filmów. Materiały zajmują w sumie około 856 km pól.

Tylko 1/3 wszystkich orientacji rogów i tylko połowa wszystkich orientacji krawędzi jest dopuszczalna. Wśród wszystkich permutacji krawędzi i rogów (bez zmiany orientacji!) tylko połowa jest dopuszczalna (jest to tak zwany problem parzystości), stąd dzielimy przez  $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ .

**40.** Choć znamy wiele miliardów cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby  $\pi$ , to pierwsze 40 wystarcza, aby zmierzyć rozmiary znanego nam Wszechświata z dokładnością do rozmiaru atomu wodoru – najmniejszego atomu występującego w przyrodzie. Dokładność jest więc istic imponująca!

**370** – istnieje co najmniej tyle różnych metod dowodzenia Twierdzenia Pitagorasa. Jest to rekordzista dowodowy wśród twierdzeń matematycznych.

**7 400 000 000** – tylu jest w przybliżeniu mieszkańców planety Ziemia. Dokładna liczba nie może być podana, gdyż, po pierwsze, nie jest znana, a po drugie, ulega częstej zmianie (statystycznie kilka razy na sekundę). Według szacunków ONZ liczba ta do końca wieku wzrośnie do około 11 miliardów.

**106 000 000 000** ( $106 \cdot 10^9$ ) – szacunkowa liczba wszystkich ludzi, jacy kiedykolwiek żyli na Ziemi. Zaczynamy nasze obliczenia dziesiątki tysięcy lat wstecz i uwzględniamy wszystkie osoby zmarłe aż do dnia dzisiejszego – oczywiście nie zapominamy o ponad siedmiu miliardach żyjących obecnie. Zauważmy, że aktualnie żyje aż 7% wszystkich osób, jakie kiedykolwiek się urodziły.

**219 902 325 555 200** bajtów (około 200 terabajtów) – takiej mniej więcej ilości danych użyto do rozstrzygnięcia hipotezy *dwukolorowości trójek pitagorejskich*. Zajęło to w sumie 35 000 godzin pracy komputerów – na szczęście pracowało nad tym wiele komputerów równocześnie. Treść problemu jest następująca: czy jest możliwe pokolorowanie każdej liczby naturalnej na czerwono lub niebiesko w taki sposób, by żadna trójka  $a, b, c$ , spełniająca równanie  $a^2 + b^2 = c^2$ , nie była jednokolorowa. Na przykład, jeżeli 5 i 12 są niebieskie, to 13 musi być czerwone. Hipoteza ta jest fałszywa, daje się wskazać sposób pokolorować liczby naturalne od 1 do 7824 (nawet na parę sposobów), ale gdy dołączymy liczbę 7825, odpowiednie kolorowanie nie istnieje co sumiennie sprawdziły komputery.

**43 252 003 274 489 856 000** (około 43 tryliony lub  $43 \cdot 10^{18}$ ) – to wszystkie możliwe konfiguracje elementów na kostce Rubika. Na całym świecie oryginalną kostkę oraz jej warianty sprzedano w kilkuset milionach egzemplarzy, co czyni ją najpopularniejszą zabawką w historii.

Jak wyznaczyć liczbę konfiguracji? Każdy róg (element trój kolorowy) może być ustawiony w jednym z ośmiu miejsc i w jednej z trzech orientacji, co daje łącznie  $8! \cdot 3^8$  możliwości. Każda krawędź (element dwukolorowy) może być ustawiona w jednym z dwunastu miejsc i w jednej z dwóch orientacji – łącznie  $12! \cdot 2^{12}$  ustawień. Każdy środek (element jednokolorowy) ma stałe położenie względem ustalonej orientacji, wobec tego jest tylko jeden istotny sposób na ich ustawienie. Ostatecznie otrzymujemy liczbę  $8! \cdot 12! \cdot 2^{12} \cdot 3^8$ .

Ale nie jest to poprawna odpowiedź. Istnieją ograniczenia narzucane przez mechanizmy, które redukują liczbę dopuszczalnych możliwości.

Ostateczna liczba zmniejsza się dwunastokrotnie, a  $8! \cdot 11! \cdot 2^{12} \cdot 3^8$  to właśnie 43 252 003 274 489 856 000.

**808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000** (około 808 oktyliardów lub  $808 \cdot 10^{51}$ ). W XX wieku ważnym zagadnieniem w matematyce (dokładniej teorii grup) była kwestia opisanego, klasyfikacji pewnych obiektów (tak zwanych skończonych grup prostych, cokolwiek to oznacza).

Pełna klasyfikacja została osiągnięta nakładem pracy wielu matematyków oraz ponad dziesięciu tysięcy stron publikacji. Jej efektem było wyróżnienie „cegiełek”, elementów, z których można zbudować wszystkie obiekty klasyfikowane. Okazało się również, że istnieje największa taka cegiełka – grupa mająca tyle elementów, ile wynosi liczba otwierająca poprzedni akapit. Grupa ta nazywa się po angielsku *Monster group*, co możemy dość swobodnie przetłumaczyć na *grupę potworną* (żartobliwie i pieszczotliwie nazywaną również *potworkiem*).

**$10^{80}$**  (100 tridecyliionów). Szacowana liczba atomów w obserwowalnym Wszechświecie. Nie jesteśmy w stanie dokładnie ich policzyć, bazujemy jedynie na średniej gęstości materii w stosunku do znanych rozmiarów Wszechświata i na tej podstawie wyznaczamy wspomnianą liczbę. Jak ogromna jest to liczba? Przypuśćmy, że atomy ustawiliśmy w linii prostej. Każdy z nich ma średnicę około jednego nanometra (czyli  $10^{-9}$  metra). Wszystkie utworzą linię długości około  $10^{68}$  kilometrów czyli  $10^{55}$  lat świetlnych.

**$10^{100}$**  (10 seksdecyliardów lub *googol*) razem z  $10^{\text{googol}}$ , czyli *googolplexem* zdobyły popularność w różnych teleturniejach. W brytyjskim wydaniu „Milionerów” w pytaniu za milion funtów padło: Jak jest nazywana liczba 1 ze stoma zerami?

Prędkość światła w próżni to w przybliżeniu 300 000 km/s, a rok juliański to 31 557 600 sekund. Ich iloczyn to 9 467 280 000 000 km, czyli w przybliżeniu  $10^{13}$  kilometrów na każdy rok. Wielkość ta nosi nazwę *roku świetlnego*.

Ogólnie liczby postaci  $2^p - 1$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą, nazywamy *liczbami Mersenne’a*.

Liczba cyfr liczby naturalnej  $n$  wynosi  $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$ . Wyznaczmy, ile cyfr ma liczba  $M_{74207281}$ :

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{74207281} &= 74207281 \cdot \log_{10} 2 = \\ &= 74207281 \cdot 0,30102999566398 \dots = \\ &= 22338617,47766 \dots \end{aligned}$$

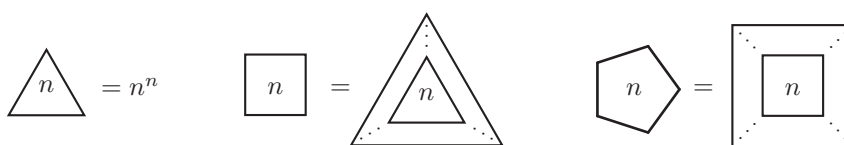
Zatem największa znana liczba pierwsza ma

$$\lfloor 22338617,47766 \dots \rfloor + 1 = 22338618 \text{ cyfr}$$

( $\lfloor x \rfloor$  oznacza część całkowitą z liczby  $x$ ). Od początkowej liczby nie zostało odjęte 1, ale nie ma to wpływu na liczbę cyfr.

**$2^{74207281} - 1$**  oznaczana także jako  $M_{74207281}$ . Jest największą znaną liczbą pierwszą, składa się z 22 338 618 cyfr. Gdybyśmy wydrukowali tę liczbę na papierze, mieszcząc 50 linii na stronie i 100 cyfr w każdej linii, zadrukowalibyśmy 4 468 stron. Taki plik kartek miałby około pół metra grubości i ważył kilka kilogramów. Papierowa wersja została zaprezentowana przez Matta Parkera na kanale YouTube „Numberphile”.

**Mega i Liczba Mosera.** Wprowadzimy notację, pochodząca od Hugona Steinhausa, rozszerzoną później przez Leo Mosera.



Liczba  $n$  w kwadracie oznacza liczbę  $n$  w  $n$  zagnieżdżonych trójkątach (w wieży potęgowej jest  $2^n$  takich samych liczb). Podobnie w dalszej części mamy  $n$  wzajemnie zagnieżdżonych kwadratów. Ogólnie można zdefiniować liczbę  $n$  wpisaną w wielokąt o  $k$  bokach jako liczbę  $n$  wpisaną w  $n$  zagnieżdżonych wielokątach o  $k - 1$  bokach.

Steinhaus upodobał sobie szczególnie: *mega* – dwójka w pięciokącie – oraz *megiston* – dziesiątka w pięciokącie. Te dwie liczby czasami zamiast w pięciokącie zapisuje się w okręgu.

*Liczba Mosera* to 2 w wielokącie, którego liczba boków jest równa liczbie mega (wielokąt taki nazywamy *megagonem*). Żeby móc porównać te liczby z dotychczasowymi, podamy oszacowanie (choćby grube). Jeżeli  $a \uparrow\uparrow b$  oznacza  $a^{a^{\dots^a}}$ , gdzie wieża potęgowa liczba  $a$  zawiera  $b$  liczb, to

$$10 \uparrow\uparrow 257 < \text{mega} < 10 \uparrow\uparrow 258.$$

$$\boxed{2} = \triangle_2 = \triangle_4 = 4^4$$

$$\boxed{3} = ?$$

$$\boxed{4} = ?$$

**Liczba Grahama.** Rozszerzamy notację strzałkową, będziemy pisali

$$\uparrow^n = \underbrace{\uparrow \dots \uparrow}_n,$$

gdzie

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} ab, & \text{dla } n = 0, \\ 1 & \text{dla } n \geq 0 \text{ oraz } b = 0, \\ a \uparrow^n b = \underbrace{a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^{n-1} (\dots \uparrow^{n-1} a))}_{b \text{ kopii } a} & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3 \uparrow^3 3 &= 3 \uparrow^2 (3 \uparrow^2 3) \\ 3 \uparrow^2 3 &= 3 \uparrow^3 = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987 \\ a \uparrow^4 b &= \underbrace{a \uparrow^3 (a \uparrow^3 (\dots \uparrow^3 a))}_{b \text{ kopii } a} \end{aligned}$$

Niech teraz  $f(n) = 3 \uparrow^n 3$ , wtedy **liczba Grahama** zdefiniowana jest jako  $G = f^{64}(4)$ , gdzie potęga przy funkcji oznacza liczbę powtórzeń. Liczba ta wystąpiła w badaniach nad uogólnionym problemem Ramseya.

Ciekawostka:  $G$  jest „znacznie” większe od liczby Mosera. Pokazano, że ta ostatnia nie jest większa od  $f^3(4)$ .

## Posłowie I: Naprawdę duże liczby

Pojęciem dualnym do wspomnianego obok jest *złożoność Kolmogorowa* (od Andrieja Kolmogorowa) liczby  $n \in \mathbb{N}$  – długość najkrótszego programu, który zwraca liczbę  $n$ .

**Jaką największą liczbę może zwrócić program długości co najwyżej  $k$  (o co najwyżej  $k$  znakach)?**

Przez  $\text{gener}(k)$  oznaczymy odpowiedź na powyższe pytanie ( $k \in \mathbb{N}$ ). Program, który ma 100 znaków, może zwrócić liczbę zdecydowanie większą niż 100. Program złożony z 1000 znaków może zwrócić liczbę bardzo zdecydowanie większą niż 1000, ale jak bardzo zdecydowanie? Jak szybko rosną możliwości programu wraz ze wzrostem liczby jego znaków?

Znaków, których możemy użyć do napisania programów, jest skończenie wiele. Stąd programów o długości co najwyżej  $k$  również jest skończenie wiele, a tylko niektóre z nich będą działać poprawnie i zwracać liczby. Niewątpliwie któryś z nich wygeneruje liczbę największą.

Może zdarzyć się, że żaden program o długości co najwyżej  $k$  nie zwraca liczby. W takiej sytuacji ustalmy, że  $\text{gener}(k) = 0$ . To się zdarzy tylko dla małych  $k$ .

Okazuje się, że  $\text{gener}(i)$  dla niedużych  $i \in \mathbb{N}$  są naprawdę pokaźne, przy nich liczby Mosera lub Grahama to zupełne mikrussy. Co ciekawe, kiedy wybierzemy konkretne  $i$ , wartość  $\text{gener}(i)$  jest *nieobliczalna*, nie da się obliczyć jej dokładnej wartości – wyjaśnienie w tekście na sąsiedniej stronie. Można natomiast pokazać, od jakiej liczby  $\text{gener}(i)$  na pewno jest większe – stąd śmiałość w nazywaniu liczby Mosera mikrusem. Przyjrzyjmy się poniższemu programowi.

```

1 Function arrow(a, n, b, k)
2   if (k > 1) then
3     | return arrow(a, n, arrow(a, n, b, k - 1), 1)
4   else if (n == 0) then
5     | return ab
6   else if (b == 0) then
7     | return 1
8   else
9     | return arrow(a, n - 1, a, b - 1)
10 return arrow(3, 4, 3, 64)

```

Funkcja  $\text{arrow}(a, n, b, k)$  zwraca liczbę  $\underbrace{a \uparrow^n (a \uparrow^n (\dots (a \uparrow^n b) \dots))}_{k \text{ strzałek}$ . Przyjrzyjmy

się dlaczego tak jest. Linie 4-9 rozpisują definicję notacji strzałkowej, opisanej we wcześniejszym artykule. Co się dokładnie dzieje w programie?

- Linie 2-3 – rozważamy przypadek, gdy liczba strzałek  $k$  jest większa niż 1. Wtedy trzeba zrobić jedną strzałkę, a potem jeszcze  $k - 1$ .
- Zachodzi  $a \uparrow^0 b = ab$ , co obsługują linie 4-5 oraz  $a \uparrow^n 0 = 1$ , co obsługują linie 6-7.
- $a \uparrow^n b = \underbrace{a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^{n-1} (\dots (a \uparrow^{n-1} a) \dots))}_{b - 1 \text{ strzałek}}$ , co implementują linie 8-9.



W powyższym programie, po zdefiniowaniu funkcji *arrow*, w ostatniej linii pytamy program o wartość *arrow(3, 4, 3, 64)*, czyli o liczbę Grahama. Program ma dokładnie 201 znaków. A więc wiadomo, że  $\text{gener}(201) \geq G$  – być może istnieje program o takiej długości zwracający większą liczbę. A co powiecie o  $\text{gener}(G)$ ?

W. C.

## Posłowie II: Dowód nierozstrzygalności

Spróbujmy ściśle uzasadnić, że funkcja *gener*, o której mowa wyżej, jest faktycznie *nieobliczalna*. Bardziej formalnie: chcemy udowodnić, że nie może istnieć program komputerowy *P* taki, który dla danej na wejściu liczby *n* obliczy  $\text{gener}(n)$ .

Nasze rozumowanie prowadzić będziemy nie wprost. Zakładamy więc, że jednak taki program *P* istnieje. Jego długość (okaże się bardzo ważna) oznaczmy przez *k*. (To znaczy: kod programu *P* jest zapisany jako ciąg *k* znaków.)

Rozważmy teraz program (a raczej *szablon* programu)  $Q_n$  zdefiniowany następująco:

```

1 Function Z(i)
2 | kod programu P
3 return Z([wpisana na sztywno stała n])

```

Dla jasności czym jest szablon, napiszmy kod *konkretnego* programu  $Q_{83}$ :

```

1 Function Z(i)
2 | kod programu P
3 return Z(83)

```

Programy z szablonu  $Q_n$  są dziwaczne: mają wbudowany program *P* jako wewnętrzną funkcję *Z*; nie przyjmują żadnego wejścia oraz w swoim kodzie mają wpisana „na sztywno” stałą *n*. Zastanówmy się, jaką długość ma sam program  $Q_n$ . W kod  $Q_n$  wchodzi kod *P*, więc tutaj zużywamy *k* znaków. Poza tym mamy jakąś niewielką liczbę innych znaków (jak „r”, „e”, „t”, „u”, „r”, „n” itd.) oraz stałą, której zapis zużyje  $\lceil \log_{10} n \rceil$  znaków „0”, „1”, „2”, ..., „9”. Łącznie:  $k + c + \lceil \log_{10} n \rceil$  znaków dla pewnego  $c \in \mathbb{N}$ .

Jak widać, program  $Q_n$  oblicza liczbę  $P(n)$ . A zatem mamy, że  $\text{gener}(k + c + \lceil \log_{10} n \rceil) \geq P(n)$  oraz, oczywiście,  $\text{gener}(n) = P(n)$ . Jednak funkcja *gener* jest niemalejąca, czyli musiałoby być  $k + \lceil \log_{10} n \rceil + c \geq n$  dla dowolnego *n*, a to jest, oczywiście, sprzeczność dla dostatecznie dużych *n*.

T. K.

## Posłowie III: Ortografia

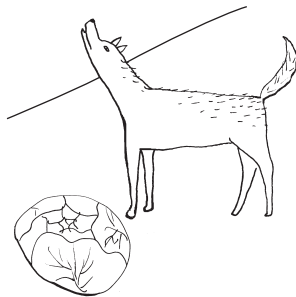
W tekście „Naprawdę duże liczby” zostało użyte następujące rozumowanie: *Skoro znaków używanych do napisania programu jest skończenie wiele i skoro program ma ograniczoną długość, to liczb definiowanych przez ten program może być też tylko skończenie wiele, a więc wśród nich musi być największa*. Powstaje pytanie, jakie dodatkowe założenia muszą zostać użyte w tym rozumowaniu, by było ono poprawne i dawało prawdziwy wniosek.

O tym, że takie pytanie ma rację bytu świadczy następujący przykład rozumowania dość podobnego do przytoczonego wyżej: *W języku polskim używamy skończonej liczby liter, więc utworzonych z nich napisów ograniczonej długości jest skończenie wiele. W szczególności skończenie wiele jest napisów używających co najwyżej stu liter. Znacznie mniej (czyli też skończenie wiele) jest wśród nich napisów sensownych, a jeszcze mniej tych, które oznaczają liczbę. Liczb dających się tak zapisać jest zatem skończenie wiele, a więc jest też największa taka liczba*.

Jak to pogodzić z faktem, że napis *liczba co najmniej o jeden większa od każdej, którą można zapisać za pomocą co najwyżej stu liter* ma tylko osiemdziesiąt liter?

Owe dodatkowe założenia użyte w cytowanym tekście to reguły ortograficzne (tak, ortograficzne!), których musimy przestrzegać przy pisaniu programów.

M. K.



Liczba *n* ma  $\lceil \log_{10} n \rceil$  cyfr w zapisie dziesiętnym.



### Rozwiązanie zadania F 929.

Niech jednej fali odpowiadają drgania wektora pola elektrycznego  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10} \cos \omega t$ , a drugiej  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20}(\cos \omega t + \delta)$ , gdzie  $\delta$  jest różnicą faz między drganiami. Drganie wypadkowe będzie dane wzorem

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{10} \cos \omega t + \mathbf{E}_{20} \cos(\omega t + \delta)$ , a stąd

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{10}^2 \cos^2 \omega t + \mathbf{E}_{20}^2 \cos^2(\omega t + \delta) + 2\mathbf{E}_{10}\mathbf{E}_{20} \cos \omega t \cos(\omega t + \delta).$$

Natężenie drgań będzie równe średniej względem czasu wartości  $\mathbf{E}_2$ , czyli

$$I = 1/2\mathbf{E}_{10}^2 + 1/2\mathbf{E}_{20}^2 + 2\mathbf{E}_{10}\mathbf{E}_{20}(\cos \omega t \cos(\omega t + \delta)),$$

gdzie  $\langle \rangle$  oznacza średnią względem czasu. Wyrażenie to będzie równe zero niezależnie od wartości przesunięcia fazowego  $\delta$  jeżeli iloczyn skalarny  $\mathbf{E}_{10}\mathbf{E}_{20}$  będzie równy zero, a to oznacza, że kierunki drgań muszą być względem siebie prostopadłe.



# Język Scratch

Antoni GAWLIKOWSKI

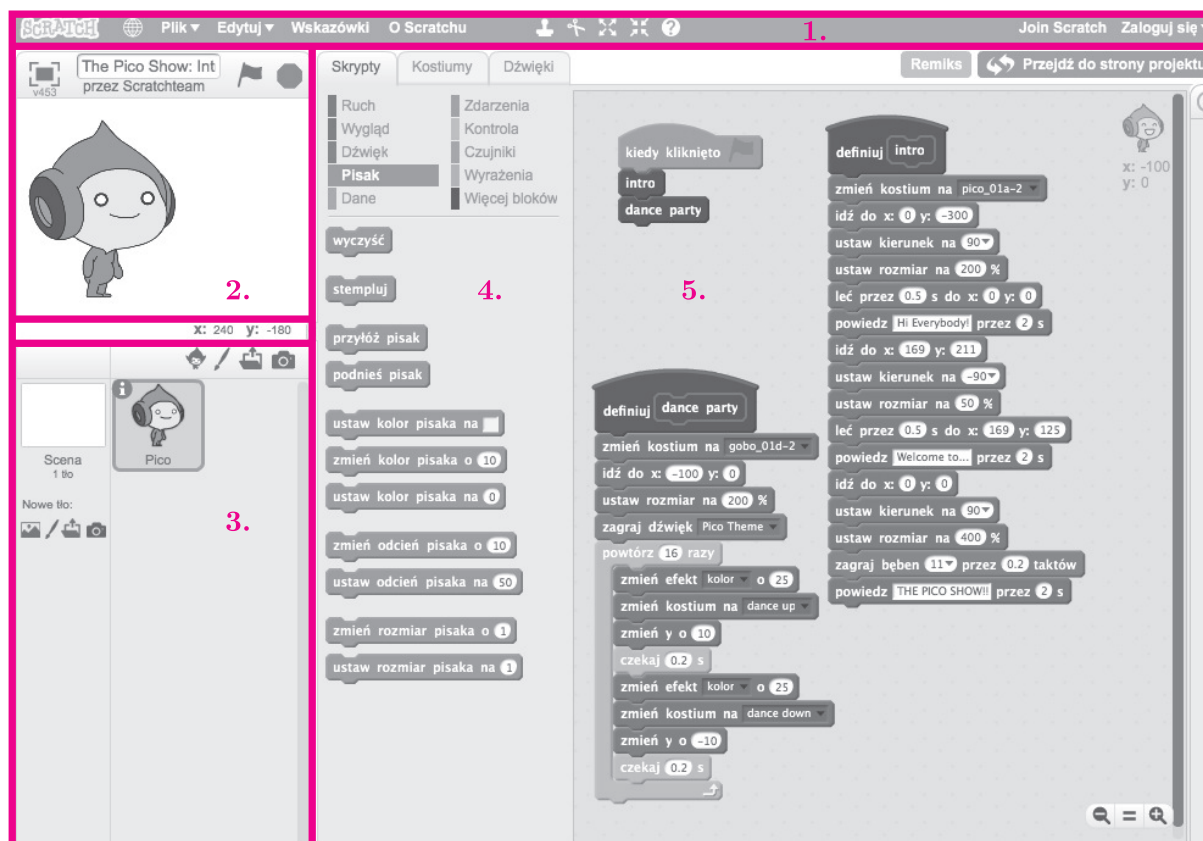
Programowanie, czyli tworzenie programów i gier, to świetny sposób na rozwijanie kreatywnego, a zarazem logicznego myślenia. Wielu wydaje się ono skomplikowane, ale wcale nie musi być trudne! Jednym z narzędzi, które pozwala w prosty i ciekawy sposób nauczyć się podstaw, jest Scratch – środowisko stworzone przez naukowców z MIT, dzięki któremu bez znajomości specjalistycznego języka każdy może spróbować swoich sił w tworzeniu gier czy animacji.

Wspólnie postaramy się stworzyć prostą grę, w której zadaniem gracza będzie bezpieczne przeprowadzenie księcia przez most, nad którym latają smoki, i uratowanie księżniczki.

## Interfejs

Na początek kilka słów o samym środowisku. Aby móc z niego korzystać, wystarczy wejść na stronę <https://scratch.mit.edu>

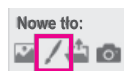
Okno Scratcha składa się z kilku podstawowych obszarów i elementów pokazanych na rysunku poniżej:



1. **Pasek narzędzi** – tutaj możemy przede wszystkim zapisać/wczytać plik czy udostępnić go na stronie internetowej. Klikając w ikonę globusa, możemy zmienić język interfejsu.
2. **Scena** – tutaj zobaczymy wszystko, co stworzyliśmy.
3. **Duszki** – to miejsce pokazuje wszystkich bohaterów naszej sceny, w Scratchu nazywanych duszkami.
4. **Paleta** – tutaj znajdują się wszystkie polecenia, jakich możemy używać, podzielone na kilka grup, takich jak ruch, wygląd, dźwięk itp.
5. **Pole projektu** – tutaj będziemy tworzyć wszystkie nasze skrypty poprzez umieszczanie odpowiednich bloków.

## Grafika

Zacniemy od namalowania tła. Akcja naszej gry toczyć się będzie na moście, dlatego musimy stworzyć jego widok od góry. W tym celu należy w panelu duszków kliknąć na ikonkę pędzla poniżej naszego obecnego pustego tła:



Po prawej pojawi się pole, w którym możemy zacząć malować. Możecie, oczywiście, posłużyć się również gotowym obrazkiem np. z Internetu.

Następnie dodamy naszego księcia. Postaci w Scratchu nazywane są duszkami. Można je stworzyć na jeden z trzech sposobów – namalować własne, użyć gotowego obrazka lub skorzystać z wbudowanej biblioteki.

W naszej grze będziemy korzystać z dostępnych w Scratchu duszków. Jednak nic nie stoi na przeszkodzie, abyście korzystając z edytora kostiumów, stworzyli własne postaci!

Aby dodać nowego duszka, należy w panelu duszków kliknąć w przycisk wybierania duszka z biblioteki:



Przechodzimy do zakładki „zamek” i wybieramy postać księcia. Obrazek jest trochę za duży na nasze potrzeby, więc będziemy musieli go zmniejszyć, ale zajmujemy się tym już podczas kodowania.

W podobny sposób dodajemy również księżniczkę oraz przeciwników, czyli smoki.

## Sterowanie

W Scratchu tworzymy skrypty, czyli małe programy dla każdego duszka osobno. Ponadto każdy duszek może mieć kilka działających jednocześnie, niezależnych od siebie skryptów.

Zacniemy od sterowania. Skorzystamy przy tym z pętli „zawsze” i w niej będziemy sprawdzać, czy którakolwiek ze strzałek została wciśnięta. Przy okazji na początku skryptu dodamy bloczek, który zmniejszy duszka do pożądanego rozmiarów oraz ustawi go w odpowiedniej pozycji:



Podobnie dodajemy obsługę pozostałych kierunków.

Musimy również zmienić sposób obrotu naszego duszka, tak by po zmianie kierunku ruchu nie zmieniał on swojej orientacji. W tym celu klikamy w małą niebieską literkę „i” na naszym duszku, a następnie zmieniamy styl obrotu „brak”:



## Przeciwnicy

Chcemy, aby smoki latały ponad zamkiem i ziały ogniem, gdy napotkają księcia. Najpierw zajmujemy się ich ruchem. Znow w tym celu skorzystamy z pętli oraz bloczka pozwalającego zmienić kierunek ruchu po napotkaniu krawędzi ekranu:



Ponownie powinniśmy zmienić styl obrotu, tym razem wybierając „w dwie strony”:



Chcemy również, aby po zetknięciu z duszkiem księcia smok zatrzymywał się i ział ogniem. Dodajemy zatem do naszego warunek „jeżeli dotyka prince”:

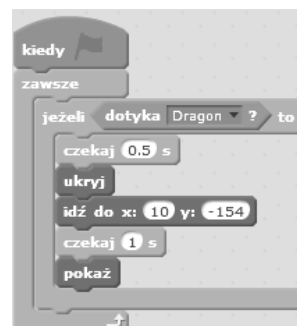
Pamiętajcie, że jest to bardzo podstawowa wersja gry. Bardzo zachęcam Was do eksperymentowania i jej rozwinięcia!



Mając jednego przeciwnika, w prosty sposób możemy go zduplikować i tym samym stworzyć dowolną ich ilość bez konieczności ponownego tworzenia skryptów. Aby to zrobić, wystarczy kliknąć prawym przyciskiem myszy na smoka w oknie duszków i wybrać „duplikuj”.

## Spotkanie ze smokiem

Musimy również dodać skrypt do duszka księcia, który wykryje spotkanie ze smokiem. Chcielibyśmy, aby w tym przypadku księżę zniknął i pojawiał się w miejscu startowym. Tworzymy zatem nowy skrypt:



Jeśli mamy więcej niż jednego przeciwnika, trzeba pamiętać, aby dodać podobny warunek dla każdego z nich.

## Księżniczka

Ostatnim brakującym elementem naszej gry jest, oczywiście, warunek wygranej, czyli dotarcia księcia do księżniczki. W tym celu dodajemy jeszcze jeden warunek w skrypcie księcia:



# 8 Zadania o przeprawie przez rzekę

Tomasz KAZANA

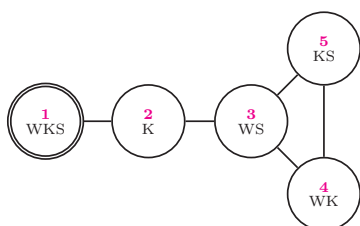
Słowo „starą” naprawdę nie jest użyte na wyrost. Zagadka (ta, jak i kolejne) pochodzi z ósmowiecznego zbioru zadań napisanego przez błogosławionego Alkuina z Yorku.

Przypomnijmy starą zagadkę:

**Zagadka 1.** Przewoźnik musi przeprowadzić się przez rzekę. Wiezie wilka, kozę i kapustę. Jego łódka umożliwi mu wzięcie ze sobą na pokład jednocześnie tylko jednego elementu inwentarza. Dodatkowo jeśli zostawi na brzegu bez opieki wilka z kozą, to wilk pożre kozę. Podobnie kapusta nie przetrwa pozostawiona z kozą. Czy przewoźnik jest w stanie przewieźć cały inwentarz na drugi brzeg?

Ten problem rozwiązujemy za pomocą teorii grafów. Rozważamy możliwe „stany”, czyli opisy tego, co się znajduje po której stronie rzeki i analizujemy, z których do których stanów da się przejść (przeplłynąć?).

Pomysł zmniejszenia (o połowę!) liczby stanów pochodzi od Michała Wojciechowskiego. W dobie komputerów może dużego znaczenia to nie ma, ale gdy chcemy zagadkę rozwiązać na papierze czy tablicy, to taka wskazówka jest nieoceniona.



Rys. 1. Oznaczenia: W – wilk, K – koza, S – kapusta; cykl nieparzystej długości: 1, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 1 (7 krawędzi).



## Rozwiązanie zadania F 930.

Na dnie jeziora na ciśnienie wewnątrz pęcherzyka składa się ciśnienie atmosferyczne  $p_0$ , ciśnienie słupa wody  $p_h = \rho gh$  ( $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $\rho$  – gęstość wody) i ciśnienie wynikające z napięcia powierzchniowego  $p_n$ . Przy powierzchni wody na ciśnienie w pęcherzyku składa się ciśnienie atmosferyczne  $p_0$  i ciśnienie wynikające z napięcia powierzchniowego  $p_n$ .

Dodatkowe ciśnienie w pęcherzyku wywołane przez napięcie powierzchniowe możemy znaleźć posługując się następującym rozumowaniem: wyobraźmy sobie pęcherzyk o promieniu  $R$ . Jeżeli powiększymy jego promień o  $\Delta R$  to powierzchnia wzrośnie o

$$\Delta S = \Delta(4\pi R^2) = 8\pi R\Delta R.$$

Spowoduje to wzrost energii powierzchni pęcherzyka o  $\Delta E = \Delta S\sigma$ . Powiększenie promienia pęcherzyka jest skutkiem wykonania pracy

$$W = S\Delta p\Delta R = 4\pi R^2\Delta p\Delta R.$$

Korzystając z tego, że  $W = \Delta E$  otrzymujemy na dodatkowe ciśnienie wyrażenie  $\Delta p = 2\sigma/R$ .

Korzystając z prawa Boyle’a–Mariotte’a mamy

$$(p_0 + p_h + p_n)\left(\frac{4}{3}\pi d_1^3\right) = (p_0 + p_n)\left(\frac{4}{3}\pi d_2^3\right)$$

czyli

$$(p_0 + \rho gh + 2\sigma/d_1)d_1^3 = (p_0 + p_n)d_2^3.$$

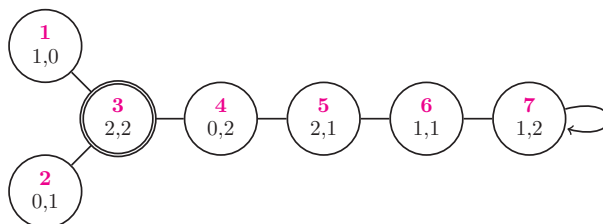
Stąd znajdujemy  $d_2 \approx 0,053$  mm. Zauważmy, że wkład od napięcia powierzchniowego jest znacznie mniejszy od ciśnienia atmosferycznego i może być pominięty.

Aby zmniejszyć ilość stanów, umawiamy się, że opisem stanu będzie zbiór tych elementów, które znajdują się tam, gdzie łódka i przewoźnik. Czytelnik Zaniepokojony może protestować. Przecież w takiej definicji niektóre sytuacje „sklejają się”, tzn. są opisane przez ten sam stan! Istotnie, jeśli stan nie koduje informacji o tym, po której stronie rzeki znajduje się łódka, to ustawienia symetryczne są dla nas nieodróżnialne. W szczególności sytuacja początkowa i docelowa opisana jest tym samym stanem – zbiorem wszystkich elementów. To jednak nie jest problem. Wystarczy sobie uświadomić, że każdy ruch zmienia pozycję łódki. A więc każda ścieżka, która zaczyna się na jednej stronie rzeki, a kończy na drugiej, musi być nieparzystej długości.

Powyższa obserwacja w zasadzie kończy opis tego rozumowania. Po prostu rysujemy graf możliwych przejść i przekonujemy się, że istnieje w nim cykl nieparzystej długości przechodzący przez stan początkowy (rys. 1).

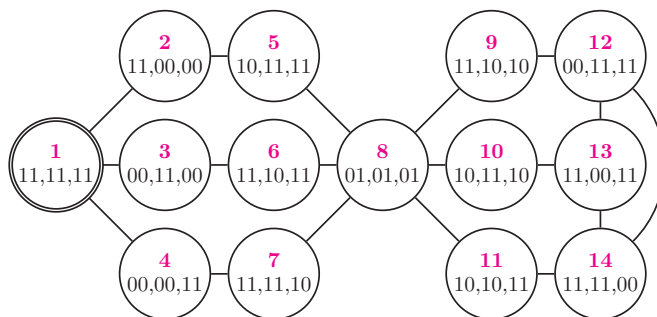
Zupełnie analogicznie rozwiązujemy kolejne zagadki (rys. 2, 3).

**Zagadka 2.** Przez rzekę chce się przeprowadzić dwoje dorosłych i dwoje dzieci. Mają tratwę, w której mieści się albo jeden dorosły, albo dwójka dzieci (albo oczywiście jedno dziecko). Czy cała grupa może bezpiecznie przedostać się na drugi brzeg?



Rys. 2. Napis  $i, j$  oznacza  $i$  dorosłych oraz  $j$  dzieci; cykl nieparzystej długości: 3, 4, 5, 6, 7, 7, 6, 5, 4, 3 (9 krawędzi).

**Zagadka 3.** Przez rzekę chcą się przeprowadzić trzy pary rodzeństwa typu brat-siostra. Ich tratwa może pomieścić tylko dwie osoby. Musimy zachować następujące ograniczenie: żaden z braci nie pozwoli, aby jego siostra przebywała w obecności jakiegokolwiek innego mężczyzny, jeśli on sam nie jest przy tym obecny. Czy cała grupa może bezpiecznie przedostać się na drugi brzeg?



Rys. 3. Opis stanu: pary bitów oddzielone przecinkami opisują kolejne rodzeństwa; pierwszy bit określa obecność brata, drugi – siostry; cykl nieparzystej długości: 1, 3, 6, 8, 10, 13, 12, 14, 13, 10, 8, 6, 3, 1 (13 krawędzi).

## Żądła rządzą

Zainteresowałam się trzmielami kilka lat temu za sprawą uczennicy ze Słupska, a ostatnio pod wpływem świetnej książki brytyjskiego przyrodnika Dave Goulsona pod powyższym tytułem. Staram się od takich pszczoło-podobnych owadów nie oganiać, ale i na nich nie siadać. A z wyżej wspomnianej książki dowiedziałam się, że w niektórych miejscach na Ziemi trzmiel jest gatunkiem inwazyjnym, choć na razie uważanym za pożyteczny.

Definicja: **Gatunek inwazyjny** rozprzestrzeniający się naturalnie lub z udziałem człowieka stanowi zagrożenie dla fauny i flory danego ekosystemu, konkurując z lokalnymi gatunkami o niszę ekologiczną, a także przyczyniając się do wyginięcia gatunków miejscowych. Gatunki inwazyjne stanowią drugie – zaraz po niszczeniu siedlisk – największe zagrożenie dla światowej bioróżnorodności.

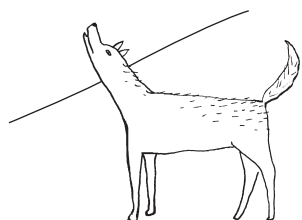
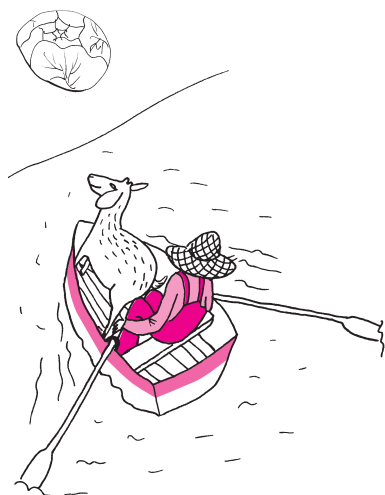
Australijscy osadnicy w XVIII wieku dziwili się tamtejszej faunie i brak im było niektórych, znanych im z Europy, okazów. Wiedziałam o królikach, teraz dowiaduję się o trzmielach. W pierwszym transporcie parowcem z Anglii w 1875 roku dwa gniazda trzmieli nie przeżyły głodu i upałów podróży (trzeba coś wiedzieć o więźniu, nim się go transportuje). Udany import 8 lat później statkiem z chłodnią wprowadził trzmiel na pola koniczyny w Nowej Zelandii i są tam do dziś. Z 542 trzmieli królowych podróż przeżyło 97. Ich potomstwo wypełnia zaplanowane zadanie: zapylają swoją ulubioną koniczynę, która służy jako pasza dla koni i bydła. Taki zmyślny jest człowiek, najaktywniejszy na świecie gatunek inwazyjny!

Ocenia się, że trzmiel może przelecieć średnio 1 km od gniazda. Dalsze wprowadzanie obcych gatunków w tamtym regionie Pacyfiku zostało zakazane, jednak są one na Tasmanii, zatem należy przypuszczać, że ich przodkowie przybyli tam nielegalnie, z człowiekiem. Goulson, nie zważając na zalety trzmieli jako zapylaczy czerwonej koniczyny, rozważa także, na ile trzmiel może zaszkodzić lokalnym gatunkom roślin i owadów. Ten fragment, jak i całą książkę polecam uwadze obserwatorów przyrody. Każdy z nas z gatunkami inwazyjnymi spotkał się, nie podejrzewając, że ma do czynienia z najeźdźcą. Z roślin, z długiego spisu Wikipedii wybieram miododajną nawłóć (zarosła mi pół ogrodu, nim się zorientowałam, że trzeba z nią podjąć walkę), barszcz Sosnowskiego, klon jesionolistny, niecierpek drobnokwiatowy, czeremchę amerykańską, irgę błyszczącą, a ze zwierząt – rybę babkę, jenota, norkę amerykańską, stonkę kukurydzianą (czy to te stonki zbierali obrońcy socjalizmu z plaż Bałtyku zawierając informacji, że zrzucane były z amerykańskich samolotów?).

A jak się ma do tej historii uczennica ze Słupska? Chodzi o Monikę Leończyk, która za pracę badawczą o trzmielach, przedstawioną w konkursie Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci, zdobyła w 2014 roku jedną z pierwszych nagród i reprezentowała Polskę podczas finałów międzynarodowych, uzyskując nagrodę specjalną (staż badawczy w instytucie Joint Reserche Centre we Włoszech). Monika budowała dla trzmieli niebieskie budki, które za porozumieniem z ogrodnikiem umieściła w tunelu foliowym z pomidorami, a trzmiel zapylał te pomidory tak, że zwiększyły plony i jakość owoców w porównaniu z pomidorami w tunelu bez trzmieli. Monika przeprowadziła też wywiad z panem L. Szramowiakiem z Ośrodka Doradztwa Rolniczego oraz z ogrodnikiem panem J. Nowakiem, nawiązała kontakt z Fundacją Greenpeace, Specjalistycznym Gospodarstwem Hodowlanym „Polski Trzmiel”, a także panem P. Moszczyńskim, założycielem strony [www.trzmiel.pl](http://www.trzmiel.pl). Przeprowadziła ankietę z mieszkańcami Słupska oraz uczniami II Liceum Ogólnokształcącego. Na tym nie koniec, ponieważ poprowadziła również zajęcia w szkole dotyczące znaczenia i zagrożenia trzmieli. Jako juror konkursu pracą tą się zachwyciłam, ponieważ obok waloru edukacyjnego i badawczego świadczy o społecznym zaangażowaniu młodzieży badaczki.

Goulson wydał książkę w 2013 roku, w tym samym roku swoje obserwacje przeprowadziła Monika Leończyk. Spotkali się na pewno w intelektualnej chmurze, która otacza kulę ziemską.

Magdalena FIKUS



## Informatyczny kącik olimpijski (106): Waga

W tym miesiącu omówimy zadanie *Waga* z finału Potyczek Algorytmicznych 2016. Opowiada ono o dziwnej wadze Bajtazara, która wyświetla rezultat ważenia zaokrąglony do najbliższej wielokrotności  $c$  gramów, lub błąd, gdy masa ważonych przedmiotów wynosi co najmniej  $k \cdot c$  gramów. Oprócz wagi Bajtazar posiada jeszcze  $n$  innych przedmiotów. Nie zna ich mas, więc chce je ważyć, używając swojej wagi. Nie określi on oczywiście dokładnych mas swoich przedmiotów. Jednak – być może – ważąc ich podzbiory, dla niektórych par przedmiotów będzie mógł stwierdzić, który z nich jest cięższy. I właśnie o to jesteśmy proszeni: mamy wyznaczyć liczbę takich par, mając dane dokładne masy przedmiotów.

Przeanalizujmy, w jaki sposób Bajtazar może porównywać wagi dwóch przedmiotów. Oznaczmy ich masy przez  $a$  oraz  $b$ . Weźmy pewien podzbiór pozostałych przedmiotów o masie  $x$ . Jeśli wskazanie wagi będzie inne w przypadku ładunku o masie  $a + x$  niż dla ładunku o masie  $b + x$ , to z całą pewnością można odróżnić wybrane przedmioty.

Załóżmy teraz, że naszych dwóch przedmiotów nie da się porównać w powyższy sposób. Czyli że dla każdego podzbioru pozostałych przedmiotów o masie  $x$  wskazania wagi dla mas  $a + x$  oraz  $b + x$  będą takie same. Zauważmy ponadto, że takie samo wskazanie wagi otrzymamy dla ładunku o masie  $\frac{a+b}{2}$ . Jeśli zmienimy masy obu rozpatrywanych przedmiotów na  $\frac{a+b}{2}$ , to z punktu widzenia Bajtazara nic się nie zmieni! Dla każdego podzbioru przedmiotów Bajtazar otrzyma przecież dokładnie to samo wskazanie wagi zarówno przed i po takiej zmianie. Dowodzi to, że nie może on w żaden sposób rozróżnić mas tych dwóch przedmiotów, gdyż – z jego punktu widzenia – istnieje możliwość, w której ważą one dokładnie tyle samo, czyli  $\frac{a+b}{2}$ .

Wiemy już, w jaki sposób Bajtazar może porównywać masy przedmiotów. Do skonstruowania naszego pierwszego algorytmu rozwiązującego zadanie brakuje nam już tylko jednego prostego spostrzeżenia: jeśli wskazania wagi są różne dla ładunków o masach  $q$  i  $p$ , to będą różne również dla ładunków  $q - c$  oraz  $p - c$ .

Aby sprawdzić, czy Bajtazar może porównać konkretne dwa przedmioty, wystarczy teraz wyznaczyć dla każdego  $r$  z przedziału  $[0, c)$  najmniejszą masę podzbioru pozostałych przedmiotów postaci  $c \cdot l + r$ , a potem sprawdzić, czy któraś z nich jest szukanym  $x$ , rozróżniającym masy  $a$  i  $b$ . Można zrobić to za pomocą programowania dynamicznego. Przy jego obliczaniu zaktualizowanie informacji o nowy przedmiot zajmuje czas  $O(c)$ . Sprawdzenie jednej pary przedmiotów zadziała w czasie  $O(c \cdot n)$ , a całe zadanie potrafimy rozwiązać w czasie  $O(c \cdot n^3)$ . Złożoność ta nie jest jednak satysfakcjonująca.

Toteż musimy analizować nasz problem dalej. Ustalmy trzy takie przedmioty, że pierwszy jest nieporównywalny zarówno z drugim, jak i z trzecim. Oznaczmy ich masy odpowiednio  $x$ ,  $y$  oraz  $z$ . Możemy

teraz zmienić masy pierwszych dwóch przedmiotów na  $\frac{x+y}{2}$ , ponieważ są one nieporównywalne i z punktu widzenia Bajtazara nic to nie zmienia. Pierwszy i trzeci przedmiot nadal są nieporównywalne i oczywiście każda inna para przedmiotów o masach  $\frac{x+y}{2}$  oraz  $z$  również. Ostatecznie Bajtazar nie może rozróżnić masy drugiego i trzeciego przedmiotu. Taka własność relacji bycia nieporównywalnym jest nazywana w matematyce przechodnością. Wraz z innymi w naszym przypadku oczywistymi własnościami zwrotności i symetryczności oznacza to, że mamy do czynienia z relacją równoważności.

Abstrahując jednak od matematycznej nomenklatury, oznacza to po prostu, że przedmioty da się podzielić na rozłączne zbiory (nazywane klasami abstrakcji), takie że dwa przedmioty są nieporównywalne wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tego samego zbioru.

Udowodnijmy ponadto, że przedmioty należące do tej samej klasy abstrakcji tworzą spójny przedział wag. Weźmy trzy przedmioty o masach  $x$ ,  $y$  oraz  $z$ , takie że  $x < y < z$  oraz przedmioty o masach  $x$  i  $z$  są nieporównywalne. Wystarczy pokazać, że przedmiot o masie  $x$  jest nieporównywalny z przedmiotem o masie  $y$ . Nie zmieniając instancji problemu z punktu widzenia Bajtazara, możemy zmienić masę pierwszego przedmiotu na  $y$ , a trzeciego na  $z + x - y$ . Zachęcamy czytelnika do sprawdzenia, iż wskazanie wagi dla dowolnego podzbioru przedmiotów pozostanie po tej zmianie takie samo.

Możemy teraz trochę poprawić nasz algorytm. Najpierw posortujmy przedmioty ze względu na ich masy, a następnie dla każdej pary kolejnych stwierdzmy, czy są one porównywalne. Wystarcza to do wyznaczenia rozmiarów klas abstrakcji, a w szczególności również szukanej liczby par. Otrzymujemy w ten sposób algorytm działający w czasie  $O(c \cdot n^2)$ .

Jednak taka złożoność nadal nie wystarcza. Można ją poprawić, używając techniki nazywanej „Plecak bez jednego”. Dla każdej pary kolejnych przedmiotów chcemy otrzymać tablicę programowania dynamicznego z dodanymi wszystkimi pozostałymi przedmiotami. Zdefiniujmy rekurencyjną procedurę  $f(l, r, dp)$ , obliczającą wyniki dla par przedmiotów o indeksach z przedziału  $[l, r)$ , mając daną tablicę programowania dynamicznego  $dp$  dla przedmiotów spoza danego przedziału. Niech  $m = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$ . Najpierw zaktualizujemy  $dp$  o przedmioty z przedziału  $[m, r)$  i wykonajmy rekurencyjnie  $f$  dla przedziału  $[l, m)$ . Następnie pierwotne  $dp$  zaktualizujemy o przedmioty z przedziału  $[l, m)$  i wykonajmy rekurencyjnie  $f$  dla przedziału  $[m, r)$ . Obliczymy również wynik dla pary przedmiotów o indeksach  $m - 1$  oraz  $m$ , osobno aktualizując  $dp$  o wszystkie pozostałe przedmioty. Czas działania  $f$  opisuje następujące równanie rekurencyjne  $\mathcal{T}(l, r) = O(c \cdot (r - l)) + \mathcal{T}(l, m) + \mathcal{T}(m, r)$ . Rozwiązując je, dochodzimy do wniosku, iż złożoność czasowa naszego ostatecznego algorytmu wynosi  $O(c \cdot n \log n)$ .

Marcin SMULEWICZ

## Rozwiązła bezwładność sznurówek

Jednym z dziecięcych wyzwań jest opanowanie wiązania butów. Z czasem przychodzi automatyzm i problem przestaje istnieć, przynajmniej pozornie. Bo nawet dobrze zawiązane buty potrafią się rozwiązać i to w najbardziej niedogodnym momencie. Dla fanów skutecznego wiązania butów, wywodzących się głównie z rosnącej rodziny miłośników biegania, najbardziej symptomatyczne było zdobycie złotego medalu olimpijskiego (i jednocześnie pobicie rekordu świata biegu na 100 m) przez Usaina Bolta na olimpiadzie w Pekinie w 2008 roku z rozwiązany butem [1].

Jeżeli pominiemy kwestie odpowiedniego zaciśnięcia węzła, to dobrze zawiązana kokardka od zawiązanej źle różni się względną chiralnością dwóch przeplotów. Dobry węzeł, w wersji bez pętelek nazywany prostym (niekiedy opisuje się go jako płaski, choć taką nazwę, przynajmniej w żeglarskim, nosi trochę bardziej skomplikowany węzeł), ma przeploty o przeciwnych chiralnościach, a zły, o tych samych. Zły trudno mocno zaciśnąć, a jak już się to uda, to (w wersji bez pętelek) bardzo trudno go rozwiązać.

Do wiązania butów używamy, oczywiście, wersji z pętelkami (w polskiej terminologii żeglarskiej węzeł prosty z jedną pętelką nazwany jest refowym, choć do refowania poleca się jednak węzeł prosty bez pętelek, *ref knot*).

Dobry węzeł ma kokardkę ułożoną poprzecznie do nogi, a zły wzdłużnie. Pomijając kontrowersyjne kwestie estetyczne, węzeł zły dużo łatwiej samoistnie rozwiązuje się w trakcie biegania i chodzenia. Taka przynajmniej panuje opinia. Niektórzy nawet (błędnie) uważają, że tylko zły się rozluźnia, natomiast dobry zaciąga podczas chodzenia.

Choć matematyczna teoria węzłów rozwija się bardzo dynamicznie, prowadzone są badania nad wytrzymałością różnego rodzaju węzłów (np. z użyciem spaghetti) czy też analizowana jest niezawodność szwów chirurgicznych, to tematem rozwiązujących się butów nikt się nie zajął. Do niedawna, bo lukę tę postanowili zagospodarować autorzy pracy [2].

Demonstracja tego dobrze znanego zjawiska pokazana jest na dołączonym do publikacji filmie [3]. Po sztucznej biegni biegni ochotnik. Po pierwsze, widać, że tuż przed zetknięciem z ziemią stopa nie tylko doznaje przyspieszenia o zwrocie przeciwnym do kierunku biegu (co jest oczywiste: musi zahamować, żeby mieć zerową prędkość względem ziemi), ale nawet porusza się w tym przeciwnym kierunku (z czego raczej nie zdajemy sobie sprawy). Zmiana kierunku przyspieszenia powoduje wyrzut luźnej części węzła (obu pętelek i obu końcówek) w kierunku ruchu (na skutek działania pozornej siły bezwładności). Przy zetknięciu z ziemią następuje wstrząs, po którym przyspieszenie zmienia się na zgodne z kierunkiem ruchu, co powoduje ruch luźnych części węzła w kierunku przeciwnym do kierunku biegu. Węzeł najpierw się rozluźnia, żeby nagle całkowicie się rozwiązać. Jedną z końcówek wyciąga swoją pętelkę po którejś kolejnej zmianie zwrotu przyspieszenia

na przeciwny do kierunku ruchu, czyli tuż przed postawieniem nogi.

W artykule opisane jest badanie z użyciem sztucznej, przytupująco-majtającej się nogi, z zawiązanym węzłem. Okazuje się, że źle zawiązany węzeł rzeczywiście dużo łatwiej się rozwiązuje niż zawiązany dobrze, ale rozwiązują się oba. Przy czym zdarza się, choć rzadko, że to pętelka wyciąga końcówkę, a nie na odwrót.

Na pytanie, dlaczego tak się dzieje, udzielona jest tylko odpowiedź jakościowa. Pętelka jest sztywniejsza niż końcówka i nie majta się aż tak gwałtownie. Przy czym jak już węzeł zaczyna się rozwiązywać całkowicie (tzn. końcówka wyciąga pętelkę) albo połowicznie (tzn. pętelka wyciąga końcówkę), to efekt już tylko narasta, a decydujący akt rozgrywa się niemal w jednym kroku. Autorom to stopniowe narastanie, prowadzące do szybkiego zakończenia, skojarzyło się z tym, jak jeden z bohaterów powieści *Słońce też wschodzi* Hemingwaya opisał, jak doszło do jego bankructwa: „stopniowo, a potem nagle”.

Wracając do opisu zjawiska, to samo machanie nogami albo samo przytupywanie nie prowadzi do rozwiązania kokardki. Wystarczy natomiast samo chodzenie bez biegania. Wynika stąd, że zjawisko wymaga obu jego aspektów: przytupywania i majtania.

Abstrahując od naukowego opisu zagadnienia, można się zastanowić, jak temu zjawisku zaradzić. Dość skuteczne jest stosowanie tzw. podwójnej kokardy, czyli robienie jeszcze jednego przeplotu pętelkami. Jest to sposób dość powszechnie stosowany przez sportowców. Ponieważ sam stosuje ten węzeł od bardzo dawna, więc mogę dodać, że on też potrafi się czasami sam rozwiązać. Niektórzy esteci uważają w dodatku, że jest on brzydki. Wtedy rady można szukać na stronie, która jest prowadzona przez człowieka, który wiązaniu butów poświęcił się bez reszty [4], albo zrezygnować z używania sznurówek.

Piotr ZALEWSKI

[1] <http://www.runners-world.pl/media/lib/1808/bolt.png>

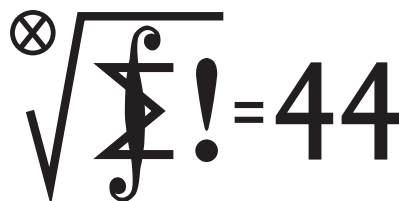
[2] C.A. Daily-Diamond, C.E. Gregg oraz O.M. O'Reilly, *The roles of impact and inertia in the failure of a shoelace knot*, *Proc. R. Soc A*, 2017, 473, 20160770, DOI: 10.1098/rspa.2016.0770

[3] C.A. Daily-Diamond, C.E. Gregg oraz O.M. O'Reilly, *Supplementary material from "The roles of impact and inertia in the failure of a shoelace knot"*, <https://doi.org/10.6084/m9.figshare.c.3738116.v1>

[4] Ian Fieggen, <https://www.fieggen.com/shoelace/>

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2017

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 729 ( $WT = 2,34$ ) i 730 ( $WT = 1,87$ ) z numeru 11/2016

Marek Spychała	Warszawa	45,09
Zbigniew Skalik	Wrocław	44,50
Witold Bednarek	Łódź	44,19
Roksana Słowik	Knurów	38,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08
Patryk Jaśniewski	Gdańsk	35,99
Adam Dzedzej	Gdańsk	35,68

No i odnotowujemy trzy jednoczesne przejścia magicznej linii 44 p.

Z tej trójki nikt nie jest nowicjuszem:

**Marek Spychała** – po raz drugi;

**Zbigniew Skalik** – po raz trzeci – mamy więc kolejnego Weterana; wszelako tytuł ten, choć nobliwy, błędnie, gdy spojrzymy na staż samego uczestnictwa w Lidze:

**Witold Bednarek**, obecny w Lidze od roku 1981(!) właśnie zamyka siódme okrzęcenie.

**735.** Gdy  $\alpha$  przebiega przedział  $(0, \pi/2)$ , wartość  $\operatorname{tg} \alpha$  przebiega zbiór wszystkich liczb dodatnich. Należy więc znaleźć kres górny funkcji  $f(x) = a^x + a^{1/x}$  zmiennej  $x \in (0, \infty)$ . Ponieważ  $f(x) = f(1/x)$ , kres górny na przedziale  $(0, \infty)$  jest taki sam, jak na przedziale  $[1, \infty)$ . Pochodna funkcji  $f$  ma po prostym przekształceniu postać

$$f'(x) = (-a^x \ln a)(x^{-2} a^{\varphi(x)} - 1), \quad \text{gdzie } \varphi(x) = \frac{1}{x} - x.$$

Skoro  $a < 1$ , czynnik w pierwszym nawiasie jest stale dodatni. Czynnik w drugim nawiasie ma taki sam znak jak wyrażenie

$$g(x) = \ln(x^{-2} a^{\varphi(x)}) = -2 \ln x + (\ln a) \left( \frac{1}{x} - x \right).$$

Teraz badamy funkcję  $g$  w przedziale  $[1, \infty)$ . Jej pochodna:

$$g'(x) = (-x^{-2} \ln a) \left( x^2 + \frac{2}{\ln a} \cdot x + 1 \right).$$

I znów, czynnik w pierwszym nawiasie jest dodatni.

W drugim nawiasie widzimy trójmian kwadratowy, którego pierwiastki (rzeczywiste lub nie) mają iloczyn równy 1; w przedziale  $(1, \infty)$  może być co najwyżej jeden pierwiastek. Dla dużych  $x$  trójmian ma wartości dodatnie. Zatem wartości  $g'(x)$  albo są dodatnie w całym przedziale  $(1, \infty)$ , albo są – przedziałami – najpierw ujemne, potem dodatnie. Funkcja  $g$

### Zadania z matematyki nr 743, 744

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**743.** W zbiorze liczb rzeczywistych różnych od zera określamy działanie:  $x \diamond y = (x/y) + (y/x)$ . Niech  $a, b, c, d$  będą liczbami, spełniającymi równanie

$$(a \diamond b) + (b \diamond c) + (c \diamond d) + (d \diamond a) = (a \diamond c) + (b \diamond d) + ((ac) \diamond (bd)) + 2.$$

Czy  $a, b, c, d$  mogą być czterema różnymi liczbami? Czy mogą być wśród nich trzy różne liczby?

**744.** Dana jest liczba całkowita  $k \geq 2$ . Niech  $M$  będzie takim zbiorem dodatnich liczb całkowitych, że dla każdej pary różnych liczb  $m, n \in M$  zachodzi nierówność  $mn \leq k^2|m - n|$ . Wykazać, że zbiorze  $M$  jest nie więcej niż  $2k - 1$  liczb. Czy dla każdej liczby  $k \geq 2$  istnieje  $(2k - 1)$ -elementowy zbiór  $M$  o podanej własności?

Zadanie 744 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Kubit z Krakowa.

### Rozwiązania zadań z numeru 2/2017

Przypominamy treść zadań:

**735.** Dana jest liczba dodatnia  $a < 1$ . Obliczyć kres górny zbioru wartości wyrażenia  $a^{\operatorname{tg} \alpha} + a^{\operatorname{ctg} \alpha}$ , gdy zmienna  $\alpha$  przebiega przedział  $(0, \pi/2)$ .

**736.** Rozważamy słowa binarne (ciągi zerowyjnkowe) długości  $n$ . Niech  $A_n$  będzie liczbą takich słów, w których nie pojawia się blok 010, zaś  $B_n$  liczbą takich słów, w których w żadnym miejscu blok 00 nie sąsiaduje z blokiem 11. Dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 3$  wyznaczyć wartość stosunku  $A_n/B_{n+1}$ .

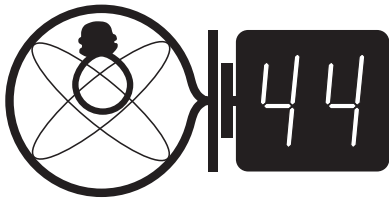
jest więc albo rosnąca, albo (kolejno) malejąca–rosnąca. A ponieważ  $g(1) = 0$  oraz  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ , wynika stąd, że także wartości  $g(x)$  są albo stale dodatnie, albo (przedziałami, od lewej) ujemne–dodatnie.

Funkcja  $g$  ma taki znak, jak  $f'$ , wobec czego możemy powtórzyć rozumowanie: funkcja  $f$  jest albo rosnąca, albo (kolejno) malejąca–rosnąca. W każdym przypadku jej kresem górnym na przedziale  $[1, \infty)$  jest jej wartość lub granica w jednym z końców przedziału. Otrzymujemy wynik:

$$\sup_{x \in (0, \infty)} f(x) = \sup_{x \in [1, \infty)} f(x) = \max\{f(1), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\} = \max\{2a, 1\}.$$

**736.** Słowu  $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  długości  $n + 1$  przyporządkujemy słowo  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  długości  $n$ , przyjmując  $y_i = |x_i - x_{i-1}|$ . Znając słowo  $Y$  oraz element  $x_0$ , jednoznacznie odtwarzamy słowo  $X$ .

Obecność bloku 010 w słowie  $Y$  oznacza obecność bloku 0011 lub 1100 w słowie  $X$ , i na odwrót. Liczba słów  $X$  bez bloków 0011, 1100, z elementem początkowym  $x_0 = 0$ , jest taka sama, jak tych z elementem początkowym  $x_0 = 1$ ; i jest, w myśl poprzedniego spostrzeżenia, taka sama, jak liczba słów  $Y$  bez bloku 010. Stąd wniosek, że  $B_{n+1} = 2A_n$ .



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2017

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
626 (WT = 1,98), 627 (WT = 3,18)  
628 (WT = 3,55), 629 (WT = 3,18)  
z numerów 11/2016 i 12/2016

Michał Koźlik	Poznań	42,91
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,37
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,33
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Jan Zambrzycki	Białystok	32,58
Andrzej Idzik	Bolesławiec	32,22
Jacek Konieczny	Poznań	29,51
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77

## Zadania z fizyki nr 640, 641

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**640.** Do wahadła matematycznego  $AB$  (rys. 1) o masie  $M$  przyćepione jest wahadło matematyczne  $BC$  o masie  $m$ . Punkt zawieszenia  $A$  tego wahadła podwójnego drga harmonicznie wzdłuż linii poziomej z częstością  $\omega$  i małą amplitudą. Znaleźć długość nici dolnego wahadła, jeżeli górna nić przez cały czas pozostaje pionowa.

**641.** Gumowy kabel ma współczynnik sprężystości  $k$ , masę  $m$  i długość  $l$ . Okrąg zrobiony z tego kabla obraca się z prędkością kątową  $\omega$  w płaszczyźnie poziomej wokół osi pionowej, przechodzącej przez środek okręgu. Wyznaczyć promień obracającego się pierścienia.

## Rozwiązania zadań z numeru 2/2017

Przypominamy treść zadań:

**632.** Dielektryczna kula o promieniu  $b$  naładowana jest ze stałą gęstością objętościową  $\rho > 0$ . Wewnątrz kuli znajduje się uziemiona, metalowa sfera o promieniu  $a$  (rys. 2). Znaleźć ładunek indukowany na tej sferze.

**633.** Cienka soczewka rozpraszająca o ogniskowej  $f$  i zwierciadło sferyczne wklęsłe mają wspólną oś optyczną (rys. 3). Środek zwierciadła znajduje się w jednym z ognisk soczewki. Układ daje rzeczywisty obraz przedmiotu  $S$  umieszczonego w dowolnej odległości na prawo od soczewki. Znaleźć ogniskową zwierciadła.

**632.** Pole elektrostatyczne układu jest złożeniem pola od kuli dielektrycznej i pola od uziemionej sfery.

Oznaczmy natężenie pola od kuli przez  $E_1(r)$ , gdzie  $r$  jest odległością od środka kuli. Dla  $r > b$  mamy zgodnie z prawem Gaussa  $4\pi\epsilon_0 r^2 E_1(r) = 4\pi b^3 \rho/3$ , czyli pole  $E_1(r) = b^3 \rho / (3\epsilon_0 r^2)$  jest takie, jak od ładunku punktowego równego ładunkowi kuli i umieszczonego w środku kuli. Potencjał od kuli w rozważanym obszarze jest również taki, jak od ładunku punktowego i wynosi  $V_1(r) = b^3 \rho / (3\epsilon_0 r)$ . Dla  $0 \leq r \leq b$  mamy  $E_1(r) = \rho r / (3\epsilon_0)$ . Aby otrzymać potencjał w tym obszarze, do potencjału  $V_1(b) = \rho b^2 / (3\epsilon_0)$  musimy dodać pracę pola elektrycznego przy przenoszeniu jednostkowego ładunku z punktu oddalonego o  $r$  od środka kuli do punktu na powierzchni kuli:

$$V_1(r) = V_1(b) + (E_1(r) + E_1(b)) \frac{b-r}{2} = \rho \frac{3b^2 - r^2}{6\epsilon_0}.$$

Pole od uziemionej sfery dla  $r > a$  dane jest wzorem  $E_2(r) = Q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ , gdzie  $Q$  jest ładunkiem indukowanym na sferze. Potencjał w tym obszarze jest równy  $V_2(r) = Q / (4\pi\epsilon_0 r)$ . Wypadkowy potencjał uziemionej sfery to

$$V(a) = V_1(a) + V_2(a) = 0,$$

stąd szukany ładunek indukowany wynosi

$$Q = -2\pi\rho a \frac{3b^2 - a^2}{3}.$$

**633.** Niech  $x_1$  oznacza odległość przedmiotu  $S$  od soczewki. Zgodnie ze wzorem soczewkowym odległość obrazu od soczewki dana jest wzorem  $y_1 = fx_1 / (x_1 - f)$  (rys. 4) i dla

przedmiotu rzeczywistego, gdy  $0 \leq x_1 \leq \infty$ , spełnia warunki

$$(1) \quad f \leq y_1 \leq 0.$$

Soczewka rozpraszająca daje zawsze obraz pozorny przedmiotu rzeczywistego. Obraz ten jest przedmiotem rzeczywistym dla zwierciadła, odległym od niego o  $x_2 = -f - y_1$ . Zgodnie z (1)

$$(2) \quad -f \leq x_2 \leq -2f.$$

Obraz w zwierciadle musi być przedmiotem pozornym dla soczewki, zatem jego odległość od zwierciadła spełnia warunek  $y_2 \geq -f$ . Soczewka rozpraszająca daje rzeczywisty obraz przedmiotu pozornego, gdy odległość tego przedmiotu  $x_3 = -(y_2 + f)$  spełnia warunek  $fx_3 / (x_3 - f) \geq 0$ , czyli  $x_3 \geq f$ . Stąd  $y_2 \leq -2f$ . Zatem spełnione są warunki

$$\frac{-1}{2f} \leq \frac{1}{y_2} \leq \frac{-1}{f}.$$

Korzystając z równania zwierciadła

$$\frac{1}{y_2} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{x_2},$$

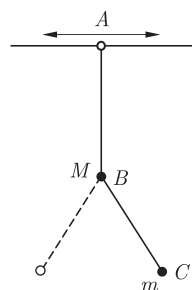
gdzie  $f_1$  jest ogniskową zwierciadła, otrzymujemy następujące ograniczenia:

$$-\frac{1}{2f} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{f_1} \leq -\frac{1}{f} + \frac{1}{x_2},$$

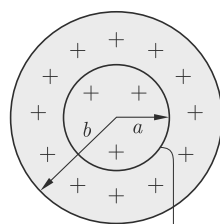
a biorąc pod uwagę warunek (2), dostajemy

$$-\frac{1}{2f} - \frac{1}{f} \leq \frac{1}{f_1} \leq -\frac{1}{f} - \frac{1}{2f}.$$

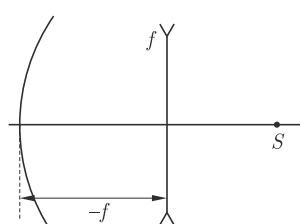
Ostatecznie szukana ogniskowa zwierciadła jest równa  $f_1 = -2f/3$ .



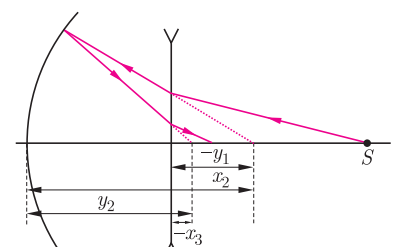
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



## Niebo w czerwcu

21 czerwca zacznie się astronomiczne lato, jednak najwcześniejszy wschód Słońca będzie miał miejsce kilka dni wcześniej, 18 czerwca, a najpóźniejszy zachód – kilka dni po przesileniu letnim, 25 czerwca. W tym miesiącu brak nocy astronomicznych, czyli rozjaśnienie północnego horyzontu nawet w najciemniejszym momencie nocy, jest najbardziej odczuwalny. Zjawisko to jest najlepiej widoczne nad Bałtykiem, zaś w górach – praktycznie niezauważalne, gdyż południowe granice Polski są bardzo blisko południowej granicy występowania tzw. białych nocy astronomicznych. Jednak niezbyt głębokie położenie Słońca pod widnokregiem ma też swoje zalety. W czerwcu polecamy obserwacje tzw. obłoków srebrzystych, czyli tworzących się wysoko w atmosferze chmur typu cirrus, które nawet o północy są oświetlane promieniami Słońca i ładnie się prezentują, rozświetlając od czasu do czasu północny nieboskłon. Ten miesiąc jest również środkiem sezonu na podziwianie łuku okołohoryzontalnego (więcej o tym zjawisku można poczytać na stronie [www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm](http://www.atoptics.co.uk/halo/cha2.htm)), czyli zjawiska rozproszenia światła słonecznego na drobnych kryształkach lodu, co skutkuje powstaniem małej, lecz intensywnej tęczy, około  $45^\circ$  na południe od Słońca. Niestety, aby zjawisko zaszło, Słońce musi znajdować się na wysokości co najmniej  $58^\circ$  nad widnokregiem, zatem szansa by to zobaczyć w Polsce występuje jedynie przez 2–3 godziny przed i po południu prawdziwym. Aby zaobserwować łuk okołohoryzontalny, należy wpatrywać się w niebo zasnutę cirrusami, na wysokości kilkunastu stopni nad południowym horyzontem. Oczywiście, im bliżej równika, tym sezon trwa dłużej, gdyż Słońce dłużej przebywa na odpowiedniej wysokości. Warto zatem, przy wyprawie wakacyjnej gdzieś na południe od Polski, pamiętać o tym zjawisku. Warunek położenia Słońca co najmniej  $58^\circ$  nad widnokregiem oznacza, że łuku okołohoryzontalnego nie da się zobaczyć z miejsc położonych dalej niż  $\sim 55^\circ$  na północ i południe od równika. W Polsce szansa na jego wystąpienie pojawia się tylko od mniej więcej połowy maja do początku sierpnia.

W czerwcu dobrze widoczne będą dwie planety Układu Słonecznego: świecący z jasnością  $-2,1^m$  Jowisz w gwiazdozbiornie Panny (w pierwszej połowie nocy) oraz Saturn w Wężowniku ( $0^m$ , widoczny przez całą noc). W drugiej części czerwcowych nocy można obserwować Neptuna w Wodniku ( $+7,9^m$ ), natomiast nad samym ranem Urana w Rybach ( $+5,9^m$ ) i Wenus w Baranie (jasność tej planety spadnie w ciągu miesiąca z  $-4,3^m$  do  $-4,1^m$ ). 3 czerwca Wenus osiągnie maksymalną elongację zachodnią,  $46^\circ$  od Słońca, jednak ze względu na niezbyt korzystne nachylenie ekliptyki do porannego widnokregu przez cały miesiąc będzie ona wędrować nisko nad horyzontem. Tego samego dnia Wenus przejdzie niecałe  $2^\circ$  na południe od Urana. 10 czerwca Jowisz zmieni kierunek ruchu z wstecznego na prosty (patrz str. 1), co oznacza, że najlepszy okres widoczności tej planety w tym sezonie obserwacyjnym właśnie się kończy. Tej samej nocy Jowisz świecić będzie  $3^\circ$  na wschód od Porymy, jednej z jaśniejszych gwiazd Panny. Pięć dni później Saturn znajdzie się w opozycji do Słońca, stąd czerwiec będzie najlepszym w tym roku miesiącem do jego obserwacji. Dzień później to Neptun zmieni kierunek swojego ruchu, ale w przeciwieństwie do Jowisza zmieni ruch z prostego na wsteczny, a więc dla niej rozpocznie się najlepszy okres widoczności w roku 2017, z opozycją na początku września.

Dwie pozostałe planety, czyli Merkury i Mars, w czerwcu przebywają blisko Słońca i są niewidoczne.

Księżyc zacznie miesiąc I kwadrą, 9 czerwca przejdzie przez pełnię, 17 czerwca – przez ostatnią kwadrę, natomiast 24 czerwca znajdzie się w nowiu, zaś 1 lipca – ponownie w I kwadrze. Z tego względu początek miesiąca będzie rozświetlony nie tylko przez Słońce wędrujące płytko pod widnokregiem, lecz również przez jasno świecący Księżyc. 3 czerwca, zaraz po zmierzchu, Księżyc zakryje Porymę, czyli jasną gwiazdę znajdującą się tuż na prawo od Jowisza, a kilka godzin później przejdzie niewiele ponad  $2^\circ$  na północ od największej planety Układu Słonecznego. Dobę później, w okolicach północy, Księżyc zakryje jeszcze gwiazdę piątej wielkości, 74 Virginis. 16 czerwca Srebrny Glob zakryje również Neptuna, Hiady i Aldebarana (22 czerwca) oraz Regulusa i  $\rho$  Leonis (28 czerwca), lecz wszystkie te zjawiska zajdą albo w dzień naszego czasu, albo daleko od Europy.

12 czerwca kometa C/2015 V2 (Johnson) przejdzie przez peryhelium, w odległości 1,6 AU od Słońca, a kilka dni wcześniej minie Ziemię w odległości 0,8 AU. Jasność tej komety prognozuje się na około  $+7$  magnitudo, powinna być zatem widoczna nawet za pomocą lornetki. Przez cały miesiąc kometa kierować się będzie na południe, schodząc coraz niżej z prawie  $60^\circ$  na początku miesiąca do mniej niż  $15^\circ$  pod jego koniec. Na początku czerwca przejdzie ona  $5^\circ$  na wschód od Arktura, a w drugiej części miesiąca wejdzie do Panny, kończąc miesiąc  $12^\circ$  na wschód od Spiki.

W tym miesiącu blisko maksimum swojego blasku będą dwie długookresowe gwiazdy zmienne klasy miryd: R Hya (znajdująca się  $2,5^\circ$  na wschód od gwiazdy 3. wielkości  $\gamma$  Hya i jednocześnie  $12^\circ$  na południe od Spiki – najjaśniejszej gwiazdy Panny, zmieniająca jasność z okresem 389 dni) oraz R And ( $\sim 5^\circ$  na zachód od Galaktyki Andromedy o okresie 409 dni). Maksimum R Hya przypadło w tym roku 25 maja, ale w czerwcu wciąż może ona mieć jasność nawet  $+3,5^m$ , dzięki czemu będzie widoczna gołym okiem. Niestety czerwiec nie jest już dobrym miesiącem na obserwacje tego fragmentu nieba (najlepiej widać go na przełomie marca i kwietnia, gdy góruje około północy, ale i tak wtedy wznosi się na maksymalnie około  $15^\circ$  nad widnokregiem), w połowie miesiąca, dwie godziny po zachodzie Słońca, R Hya znajdzie się na wysokości zaledwie  $9^\circ$  nad południowo-zachodnim widnokregiem. Maksimum jasności R And ( $+5,8^m$ ) wypada 9 czerwca. Należy pamiętać, że jasność tych gwiazd nie za każdym razem jest taka sama i może nie osiągać maksymalnej obserwowanej historycznie jasności. Gwiazdy te są wdzięcznym obiektem obserwacji, ponieważ ze względu na długi okres zmienności wystarczy mierzyć ich jasność raz na kilka dni, żeby otrzymać ładną krzywą blasku.

Nie należy zapominać o meteorach. Choć noce są krótkie i jasne, to w czerwcu promieniują meteory z roju Bootydów. Są to jedne z wolniejszych takich zjawisk w ciągu roku, ich prędkość zderzenia z atmosferą wynosi zaledwie 18 km/s. Radiant roju znajduje się na północ od głównej figury gwiazdozbioru Wolarza, kilka stopni do radiantu styczniowego roju Kwadrantydów. Bootydy promieniują od 22 czerwca do 2 lipca z maksimum 27 czerwca. Przy odrobinie szczęścia można liczyć nawet na 100 meteorów na godzinę.

Ariel MAJCHER

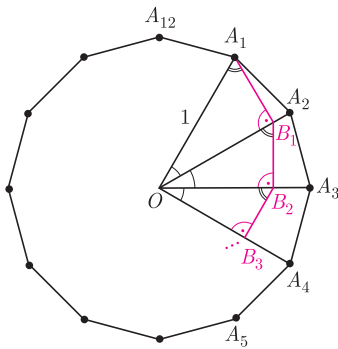
Jeśli chcemy wyznaczyć długość pewnej krzywej lub łamanej, często warto ją rozwinąć albo w inny sposób rozprostować.

1. Winorośl wyrasta u podnóża drzewa i pnąc się równomiernie, owija jego pień siedmiokrotnie. Obwód pnia jest równy 3 m, a winorośl dorasta do wysokości 20 m. Jaka jest jej długość?

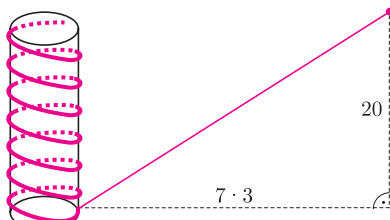
2. Okrąg  $O_1$  jest wpisany w trójkąt  $ABC$ , w którym  $AB = 10$  i  $AC = BC = 13$ . Okręgi  $O_2, O_3, O_4, \dots$  są styczne do boków  $AC, BC$  oraz dla każdego  $n \geq 2$  okrąg  $O_n$  jest styczny zewnętrznie do okręgów  $O_{n-1}$  i  $O_{n+1}$ . Wyznacz sumę obwodów wszystkich okręgów  $O_1, O_2, O_3, \dots$

3. Dany jest dwunastokąt foremny  $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$  o środku  $O$ , przy czym  $OA_1 = 1$ . Punkt  $B_1$  jest rzutem  $A_1$  na odcinek  $OA_2$ , punkt  $B_2$  jest rzutem  $B_1$  na  $OA_3$ , punkt  $B_3$  jest rzutem  $B_2$  na  $OA_4$  itd. (rys. 1). Wyznacz długość łamanej  $A_1B_1B_2B_3 \dots$

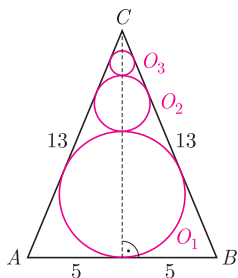
4. Kolejne wierzchołki pewnego czworokąta leżą na kolejnych bokach kwadratu o boku 2,5. Wykaż, że obwód tego czworokąta jest większy od 7.



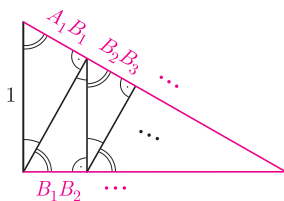
Rys. 1



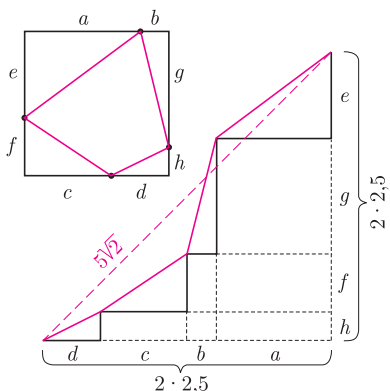
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

### Rozwiązania

**R1.** Przetoczmy pień o siedem pełnych obrotów tak, by odwinąć z niego winorośl. Skoro pięła się ona równomiernie, to po takim rozwinięciu utworzy prosty odcinek, będący przeciwprostokątną trójkąta o przyprostokątnych 20 m i  $7 \cdot 3 \text{ m} = 21 \text{ m}$  (rys. 2). Stąd na mocy twierdzenia Pitagorasa długość winorośli to 29 m.  $\square$

**R2.** Suma długości średnic danych okręgów równa jest wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka  $C$  (rys. 3), która z kolei z twierdzenia Pitagorasa ma długość 12. Okrąg o średnicy  $2r$  ma obwód  $2\pi r$ , zatem szukana suma obwodów wszystkich okręgów to  $12\pi$ .  $\square$

**R3.** Trójkąty  $OA_1B_1$  oraz  $OB_iB_{i+1}$  mają kąty po  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ , gdyż każdy z nich z założenia jest prostokątny i ma kąt  $360^\circ/12 = 30^\circ$ . Można wobec tego ułożyć je w sposób przedstawiony na rysunku 4. Kąt pomiędzy sąsiadującymi teraz odcinkami rozważanej łamanej jest wówczas równy  $90^\circ + 30^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ .

Stąd otrzymana figura także jest trójkątem o kątach  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ , przy czym jedna jego przyprostokątna ma długość 1, a suma pozostałych dwóch boków to szukana długość łamanej. Jest ona wobec tego równa  $2 + \sqrt{3}$ , gdyż trójkąt ten jest połową trójkąta równobocznego o boku 2.  $\square$

Zadanie można też rozwiązać, sumując szereg  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \dots$

**R4.** Przystawmy fragmenty kwadratu tak, jak na rysunku 5. Obwód rozważanego czworokąta to teraz długość kolorowej łamanej. Jest ona nie mniejsza od odcinka łączącego jej końce, czyli od  $5\sqrt{2}$ , co z kolei jest większe od 7.  $\square$

O innych zastosowaniach podobnych obrazków przeczytać można w *deltoidzie* 1/2012.

### Zadania domowe

5. Na stole stoi stożek, w pewnym jego punkcie siedzi pająk. Chciałby on przespacerować się najkrótszą możliwą drogą dookoła stożka i wrócić do punktu wyjścia. Którędy powinien pójść?

6. Na stole stoi szklanka, jej dno jest lepkie od soku. W pewnym miejscu wewnątrz siedzi mucha, w innym pająk. Pająk chce dotrzeć do muchy najkrótszą możliwą drogą, ale omijając sok. Którędy powinien pójść? W jaki sposób zmienić się rozwiązanie, jeśli mucha siedzi wewnątrz, a pająk na zewnątrz szklanki?

*Wskazówki do zadań 5 i 6.* Warto rozciąć i rozwinąć daną powierzchnię boczną. Nie zawsze jednak najkrótsza droga odpowiada odcinkowi łączącemu odpowiednie dwa punkty tak uzyskanej płaskiej figury! Ku przestrodze polecam *deltoid* 7/2015.