




W następnym numerze:

## SPIS TREŚCI NUMERU 4 (515)

DOWÓD – jak to robią w Krakowie	str. 1
O kul rozmnażaniu	str. 2
Sprawdź wymiary!	str. 4
Od Pascala do Pitagorasa i dalej	str. 5
Jak się pozbyć losowości?	str. 6
Intuicjonizm i to, co po nim	str. 8
 Zadania	str. 8
Dedukcja lokalna – na przykładzie	str. 9
Twierdzenie o niepustym barze, czyli zmechanizowana naturalna dedukcja	str. 10
Problem Stopu	str. 12
Indukcja pozaskończona	str. 12
Dwa dowody jednego twierdzenia	str. 14
Małe Twierdzenie Fermata	str. 15
Interpretacja kombinatoryczna	str. 15
W dowodzie (chyba) był błąd	str. 16
Na ścieżce rezolucji	str. 17
 Tytuł <i>Magdalena Fikus</i>	str. 19
Informatyczny kącik olimpijski (104): Obcy <i>Jakub Łączki</i>	str. 20
Klub 44	str. 22
Prosto z nieba: Światło odległych planet	str. 24
Niebo w kwietniu	str. 24
 Niemożliwe wycinanki <i>Joanna Jaszewska</i>	str. 25
<hr/>	
Miesięcznik <i>Delta</i> – <i>matematyka, fizyka, astronomia, informatyka</i> jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.	
Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.	
Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.	
Adres do korespondencji: Instytut Matematyki UW, Redakcja <i>Delty</i> , ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: <a href="mailto:delta@mimuw.edu.pl">delta@mimuw.edu.pl</a> tel. 22-55-44-402.	
Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia; rysunki techniczne: Stanisław Walczak.	
Skład systemem T <sub>E</sub> X wykonała Redakcja.	
Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.	
<hr/>	
PRENUMERATA	
<b>Garmond Press:</b> <a href="http://www.garmondpress.pl">www.garmondpress.pl</a>	
<b>Kolporter:</b> <a href="http://www.kolporter.com.pl">www.kolporter.com.pl</a>	
<b>RUCH S.A.:</b> <a href="http://www.ruch.com.pl">www.ruch.com.pl</a> , infolinia 804-200-600	
<b>Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:</b> Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.	
Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie <a href="http://www.prenumerata.ruch.com.pl">www.prenumerata.ruch.com.pl</a>	
Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: <a href="mailto:prenumerata@ruch.com.pl">prenumerata@ruch.com.pl</a> lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7 <sup>00</sup> –17 <sup>00</sup> . Koszt połączenia wg taryfy operatora.	
<hr/>	

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# DOWÓD – jak to robią w Krakowie

Tym, co czyni matematyków pewnymi swoich racji, jest **dowód** – niepoddające się żadnym wątpliwościom uzasadnienie głoszonych stwierdzeń (Kartezjusz: *jedni tylko matematycy zdołali znaleźć jakieś dowody, to znaczy jakieś racje pewne i oczywiste*).

Przekonajmy się więc, jakich to metod dowodzenia używa się w najstarszej polskiej *Alma Mater*, na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Oto spis sporządzony przez Józefa Piórka z Instytutu Matematyki Najwspółcześniejszej.

Najczęściej spotykamy dowód

- przez ogląd (*wystarczy popatrzeć*),
- przez polechtanie ambicji słuchaczy (*to dla Państwa jest proste*),
- przez kalendarz (*to było w zeszłym roku*),
- przez sugestię (*Państwo widziecie*),
- przez sakramenty (*ochrzczymy to sobie*),
- przez sztuciec (*a nuż wyjdzie*),
- iluzjonistyczny (*zrobimy teraz małą sztuczkę*),
- suflerski (*proszę mi odpowiedzieć*),
- harcerski (*stosujemy podchody dokoła dowodu*),
- cybernetyczny (*to automatycznie wynika z . . .*),
- psychologiczny (*Państwo sami sprawdzą*),
- plenarny (*czy Państwo się zgadzają?*),
- dogmatyczno-autorytatywny (*tak jest w podręczniku*),
- samowystarczalny (*Państwo sobie sprawdzą we własnym zakresie*),
- teologiczny
  - a) przez odwołanie się do sił nieczystych (*diabli wiedzą, jak to udowodnić*),
  - b) przez odwołanie się do sił pozytywnych (*Jezus, Maria, przecież to banalne!*).

Nieco rzadziej spotykany jest dowód

- przez analogię,
- przez odpowiednie twierdzenia,
- przez sprowadzanie na manowce,
- przez presję moralną,
- przez opowiadanie,
- przez nadużycie symboli.

Pewnej finezji wymaga dowód

- przez zaprzeczenie założenia,
  - przez ciągłość oznaczeń (ciągłe oznaczamy),
- oraz
- familijny (bierzemy rodzinę zbiorów).

Każdy jednak musi przyznać, że jedyny naprawdę skuteczny jest **dowód przez założenie tezy**.

## Bibliografia

Koło Matematyków Studentów Uniwersytetu Jagiellońskiego, im. Prof. Stanisława Zaremby, *Rozmaitości absurdalne wraz z elementami logiki nieformalnej*, wyd. V, Wydawnictwo „jak”, Kraków 2000.

Krzysztof Ciesielski, Zdzisław Pogoda, *Bezmiar matematycznej wyobraźni*, wyd. II, Prószyński i S-ka, Warszawa, 2005.

**W dalszej części numeru  
zamieścimy kilka nieco innych propozycji.**

*Redakcja*

# O kul rozmnażaniu

**Paradoks Banacha–Tarskiego** (1924 r.). *Kulę można rozłożyć na skończenie wiele części, z których da się zbudować dwie takie same kule.*

**Rozkład** w używanym tu sensie to dowolny podział figury na rozłączne części (niekoniecznie ma ich być skończenie wiele). Dopuszczamy zatem części o dowolnie dziwnych kształtach, na przykład jednopunktowe lub niemierzalne. Jeśli figurę  $A$  możemy rozłożyć w tym sensie na części, z których następnie można złożyć figurę  $B$ , to mówimy, że  $A$  i  $B$  są *równoważne przez rozkład* i oznaczamy to  $A \sim B$ . Nietrudno sprawdzić, że rzeczywiście jest to relacja równoważności. Okazuje się, że takie podziały nie muszą zachowywać miar figur i stąd właśnie biorą się pozorne paradoksy, a dokładniej mówiąc, fakty sprzeczne z naszą intuicją.

Zbiór  $E$  jest *paradoksalny*, jeśli zawiera rozłączne podzbiory  $A, B$  takie, że  $A \sim E$  oraz  $B \sim E$ , czyli, mówiąc obrazowo, jeśli z pewnych dwóch rozłącznych części zbioru możemy zbudować dwie jego pełnowartościowe kopie. Chodzi więc o takie rozkłady, które są sprzeczne z naszą intuicją dotyczącą pola lub objętości. W dalszej części tekstu rozważamy tylko rozkłady skończone.

Po wyjaśnieniu, na czym polega problem, kolej na wskazanie narzędzi – będą właściwie dwa: łatanie dziur i grupa wolna.

**Łatanie dziur** pokażemy na przykładzie dziury w okręgu. Rozłożymy okrąg  $S^1$  bez punktu na dwie części, zastosujemy do nich odpowiednio dobrane obroty i w rezultacie uzyskamy cały okrąg. Niech  $T$  będzie brakującym punktem okręgu,  $\varphi$  zaś niech będzie obrotem wokół środka o ustalony kąt niewspółmierny z  $2\pi$ . Wówczas ciąg  $\varphi(T), \varphi^2(T), \varphi^3(T), \dots \in S^1$  jest nieskończony i są to różne punkty. Niech to będzie pierwszy z naszych dwóch zbiorów, a pozostała część okręgu niech będzie drugim. Zauważmy, że obrót w przeciwną stronę o ten sam kąt, czyli  $\varphi^{-1}$ , przeprowadza powyższy ciąg na ciąg  $T, \varphi(T), \varphi^2(T), \dots$ , a więc pozwala załatać dziurkę. Pozostała część okręgu jest nieruchoma (to też obrót). Stąd  $S^1 \sim S^1 \setminus \{T\}$ .

**Grupa wolna**  $F_2$  o dwóch generatorach  $a$  i  $b$  to zbiór słów (czyli skończonych ciągów znaków) nad alfabetem  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ , zredukowanych (czyli bez fragmentów postaci  $xx^{-1}$ ), z elementem neutralnym  $e$  (słowo puste), bez relacji (dwa zredukowane słowa o różnym zapisie są różne) i z działaniem konkatencji (dopisywania). Zauważmy, że ponieważ rozpatrujemy tylko słowa skończone, grupa  $F_2$  ma przeliczalnie wiele elementów. Rysuje się je często jako wierzchołki grafu (rysunek). Taki graf nie ma cykli, ponieważ w grupie wolnej nie ma relacji.

Niech  $S(x)$  oznacza zbiór słów zaczynających się literą  $x$ . Zauważmy, że  $F_2$  jest rozłączną sumą

$$\{e\} \cup S(a) \cup S(b) \cup S(a^{-1}) \cup S(b^{-1}).$$

Jednocześnie

$$F_2 = S(a) \cup aS(a^{-1}) \quad \text{oraz} \quad F_2 = S(b) \cup bS(b^{-1}).$$

Grupa wolna  $F_2$  jest zatem paradoksalna (dopisanie słowa na początku drugiego słowa to działanie grupy  $F_2$  na zbiorze swoich elementów).

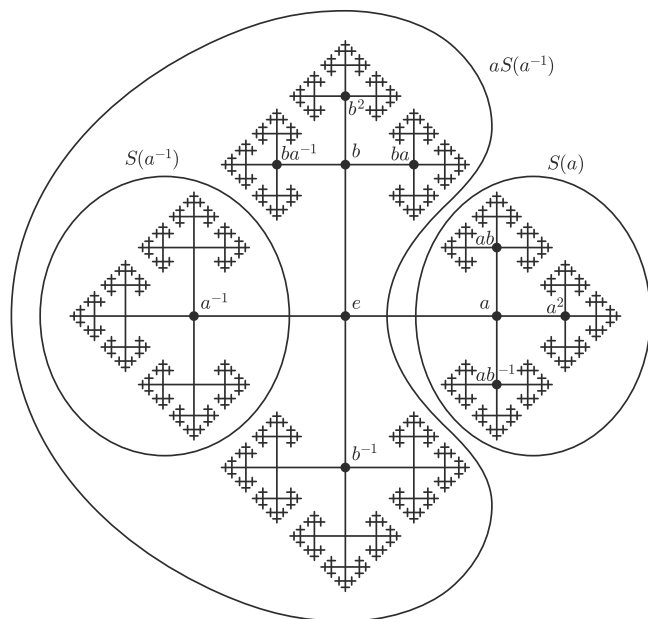
**Wolną podgrupę  $F_2$  możemy znaleźć w grupie  $G_3$  izometrii przestrzeni trójwymiarowej.** Konkretnie, niech  $\alpha$  będzie kątem dwuściennym czworokątna foremna, czyli  $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ . Niech  $a$  oraz  $b$  będą obrotami  $\mathbb{R}^3$  o kąt  $\alpha$  w odpowiednio dobranym kierunku i odpowiednio wokół osi  $x$  oraz  $z$ . Można sprawdzić, że takie  $a$  i  $b$  generują grupę wolną  $F_2$ .

**Od grupy do zbioru.** Umiemy wykazać, że  $F_2$  jest paradoksalna i umiemy wskazać podgrupę  $G_3$  izomorficzną z  $F_2$ . Docelowo chcielibyśmy jednak skonstruować nie grupę, lecz zbiór paradoksalny.

**Grupa** to zbiór  $G$  z określonym w nim działaniem  $\times$ , które ma element neutralny  $1$  (czyli dla każdego  $z \in G$  jest  $z \times 1 = 1 \times z = z$ ), jest łączne (czyli  $z \times (t \times u) = (z \times t) \times u$ ) i dla każdego  $z \in G$  istnieje element odwrotny  $z^{-1}$  (czyli  $z \times z^{-1} = z^{-1} \times z = 1$ ). Często zamiast  $x \times y$  piszemy  $xy$ . Przykładami grup są np. zbiór liczb całkowitych z dodawaniem lub zbiór wszystkich izometrii przestrzeni trójwymiarowej ze składaniem.

Grupa  $G$  **działa na zbiorze**  $X$ , jeśli dla dowolnych  $g \in G, x \in X$  mamy zdefiniowane działanie  $g(x) \in X$ , spełniające warunki  $g_2(g_1(x)) = (g_2g_1)(x)$  oraz  $id(x) = x$ . Na przykład grupa  $G_3$  izometrii przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  działa na zbiorze  $X = \mathbb{R}^3$  tak:  $g(x)$  to obraz punktu  $x$  przy izometrii  $g$ .

W przypadku grupy  $G$  przekształceń jakiegoś zbioru  $X$  orbitą dowolnego elementu  $x \in X$  nazywamy zbiór  $\{g(x) : g \in G\}$ . Orbitsy dwóch punktów są równe lub rozłączne.



Okazuje się, że paradoksalność grupy daje się przenieść na zbiór, na którym ta grupa działa. Prześledźmy tę ogólną prawidłowość na przykładzie działania grupy  $F_2 \subseteq G_3$  na sferę  $S^2$  (o środku w początku układu współrzędnych) z wyłączonym zbiorem  $D$  tych punktów, w których osie obrotów, z jakich się składa  $F_2$ , przebijają tę sferę.

Pewnik wyboru (przyjmowany aksjomatycznie w teorii mnogości) gwarantuje istnienie zbioru (zwanego selektorem), do którego należy dokładnie po jednym elemencie z każdego zbioru danej rodziny niepustych zbiorów rozłącznych.

Każdy zapewne już dostrzegł, że zupełnie w ten sam sposób można wykazać, że cała przestrzeń  $\mathbb{R}^3$  jest paradoksalna.

Więcej wysiłku wymaga wykazanie, że nie tylko kula jest równoważna przez rozkład z dwiema takimi samymi kulami, lecz także, że można rozciąć kulę na pięć części, które po przemieszczeniu ułożą się w dwie kule identyczne z pierwszą.

Ogólniejszy wynik głosi, że równoważne przez rozkład są dowolne dwa ograniczone podzbiory  $\mathbb{R}^3$  o niepustym wnętrzu.

$S^2 \setminus D$  rozpada się na orbity przy działaniu  $F_2$ . Wybierzmy (tu działa *pewnik wyboru* i bez niego ani rusz) zbiór  $M$  reprezentantów tych orbit i zastosujmy do niego grupę  $F_2$ . Zauważmy, że tak otrzymane przeliczalnie wiele rozłącznych obrazów zbioru  $M$  daje w sumie całe  $S^2 \setminus D$ . Odpowiednio je grupując i przemieszczając, uzyskujemy paradoksalny rozkład  $S^2 \setminus D$ .

Grupa wolna już swoją rolę odegrała, pora na łatanie dziur. Jak już zauważyliśmy, grupa  $F_2$  jest przeliczalna, a każda oś obrotu przebija sferę w dwóch punktach, stąd zbiór  $D$  również jest przeliczalny. Stosując opisaną wyżej metodę łatania dziur, można wykazać, że  $S^2 \setminus D \sim S^2$ .

**Dokończenie dowodu paradoksu Banacha–Tarskiego.** Wiemy już, że dla odpowiednio dobranego zbioru  $D$  zbiór  $S^2 \setminus D$  jest paradoksalny, oraz że  $S^2 \setminus D \sim S^2$ . Ponieważ zbiór równoważny ze zbiorem paradoksalnym też jest paradoksalny, więc **sfera jest paradoksalna**.

Zauważmy, że kula bez środka to „cebulka” złożona ze sfer współśrodkowych. Skoro każda z nich jest paradoksalna, to kula bez środka również jest paradoksalna (bo punkty każdego promienia możemy skleić i przemieszczać wspólnie).

Weźmy teraz dowolny okrąg przechodzący przez środek kuli  $T$  i całkowicie w niej zawarty. Wiemy, że  $S^1 \sim S^1 \setminus \{T\}$ , zatem umiemy załatać dziurkę, czyli kula bez środka jest równoważna całej kuli. A to kończy dowód, że **kula jest paradoksalna**.

O tym, że powyższą metodą nie można uzyskać analogicznych paradoksalnych rozkładów w  $\mathbb{R}^1$  ani w  $\mathbb{R}^2$  łatwo się przekonać, sprawdzając, że  $F_2$  nie jest podgrupą grupy  $G_1$  izometrii prostej ani grupy  $G_2$  izometrii płaszczyzny. Przyjrzyjmy się dokładniej, dlaczego tak jest.

Izometrie prostej to przesunięcia i symetrie względem punktu. Wobec tego kwadrat każdej izometrii jest przesunięciem, przesunięcia zaś są przemienne. Stąd dla dowolnych dwóch izometrii  $g, h$  zachodzi relacja  $g^2 h^2 g^{-2} h^{-2} = id$ , czyli w  $G_1$  nie ma podgrupy wolnej rzędu 2.

Na płaszczyźnie każda izometria jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych (twierdzenie Chaslesa). Wynika z tego, że kwadraty elementów  $G_2$  to izometrie parzyste, a więc przesunięcia lub obroty. Wobec tego dla dowolnych dwóch izometrii  $g, h$ , złożenia  $g^2 h^2 g^{-2} h^{-2}$  oraz  $g^2 h^{-2} g^{-2} h^2$  są przesunięciami (bo kąty ewentualnych obrotów się redukują). Przesunięcia są przemienne, zatem

$$(g^2 h^2 g^{-2} h^{-2})(g^2 h^{-2} g^{-2} h^2)(g^2 h^2 g^{-2} h^{-2})^{-1}(g^2 h^{-2} g^{-2} h^2)^{-1} = id,$$

co po uproszczeniu daje relację

$$g^2 h^2 g^{-2} h^{-2} g^2 h^{-2} g^{-2} h^4 g^2 h^{-2} g^{-2} h^{-2} g^2 h^2 g^{-2} = id,$$

czyli w  $G_2$  także nie ma podgrupy wolnej rzędu 2.

Ale innej metody na znalezienie paradoksalnych rozkładów w  $\mathbb{R}^1$  i  $\mathbb{R}^2$  nie ma, albowiem Stefan Banach udowodnił, że podane wyżej tożsamości pociągają za sobą istnienie *miary uniwersalnej*, czyli mierzącej wszystkie zbiory i będącej rozszerzeniem zwykłego mierzenia długości czy pola.

Bo przecież zbiory paradoksalne nie mogą mieć miary w zwykłym sensie, o czym, jak sądzę, nikogo przekonywać nie trzeba.

*Jest to streszczenie skrótu świetnego zapisu znakomitego odczytu Joanny JASZUŃSKIEJ na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej. Obszerniejszą wersję można znaleźć na stronie [www.msn.uph.edu.pl/smp/?strona=msn](http://www.msn.uph.edu.pl/smp/?strona=msn)*

Dowód twierdzenia Chaslesa można znaleźć np. w *Delcie* 11/2015.

## Sprawdź wymiary!

Idea analizy wymiarowej pochodzi od Fouriera. Jean Fourier jest, oczywiście, najbardziej znany jako twórca analizy fourierowskiej, wprowadzonej w pracy *Analityczna teoria ciepła* i opublikowanej po raz pierwszy w 1822 roku w Paryżu. W tej samej pracy Fourier wprowadził też analizę wymiarową. On pierwszy tak otwarcie napisał, że każda wielkość fizyczna „ma swój własny wymiar i wyrazy w tym samym równaniu nie mogą być porównywane, jeśli nie mają tej samej potęgi wymiaru”. Fourier pisał wprost, że wprowadził pojęcie wymiaru, aby sprawdzać wyniki obliczeń.

Weźmy pod uwagę wahadło matematyczne: punkt materialny o masie  $m$  zawieszony na nierozciągliwej nici o długości  $l$ . Jest to, oczywiście, model matematyczny fizycznego wahadła, gdzie zaniedbujemy rozmiary ciała zawieszzonego na nici. Jeśli zgodzimy się na taki model, to tarcie powietrza pomijamy i ruch wahadła może zależeć jedynie od masy, długości nici i przyspieszenia ziemskiego  $g$ . Zapytajmy o okres wahań wahadła. Wielkość o wymiarze czasu można dostać tylko na jeden sposób

$$T \sim \sqrt{\frac{l}{g}},$$

a więc okres nie może zależeć od masy wahadła, gdyż nie ma jak pozbyć się kilogramów! Oczywiście, analiza wymiarowa nie pozwala na znalezienie bezwymiarowego współczynnika proporcjonalności w powyższym wzorze. Można go znaleźć, wykonując, na przykład, pomiar okresu wahań dla wahadła o zadanej długości w miejscu o znanej wartości  $g$ . W ogólności zależy on od początkowego kąta odchylenia wahadła (też wielkość bezwymiarowa, a więc niepoddająca się analizie wymiarowej). Dla małych wahań wahadła współczynnik ten wynosi  $2\pi$ .

Drugi przykład, który rozpatrzmy, jest bardziej skomplikowany. Rozważmy problem siły oporu cieczy lepkiej działającej na płynący statek. Jakie wielkości fizyczne mogą mieć wpływ na siłę oporu? Intuicja (doświadczenie) podpowiada nam, że siła oporu może zależeć od wielu czynników. Spróbujmy ograniczyć się do najważniejszych (budujemy więc model matematyczny): siła oporu  $F$  [kgm/s<sup>2</sup>], prędkość statku  $v$  [m/s], rozmiary statku  $l$  [m], współczynnik lepkości cieczy  $\mu$  [kg/(ms)], gęstość cieczy  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>], przyspieszenie ziemskie  $g$  [m/s<sup>2</sup>], przy czym w nawiasach podaliśmy jednostki określające wymiary. W naszych rozważaniach pominiemy napięcie powierzchniowe cieczy, prędkość wiatru, wielkość fal na powierzchni cieczy itp. Oznacza to, że otrzymane wyniki nie będą stosować się do ruchu owadów ślizgających się po powierzchni cieczy, żaglówek, ruchu statków w czasie silnych sztormów itp. Pomijamy też detale budowy statku, wprowadzając tylko jeden parametr charakteryzujący jego rozmiary, to znaczy naszym statkiem będzie kula o promieniu  $l$ .

Ruch cieczy lepkiej opisywany jest równaniami Naviera–Stokesa, których w ogólnym przypadku nie

Ten okrzyk często rozlega się na lekcjach fizyki. Czy warto sprawdzać wymiary? Przecież na lekcjach matematyki, gdzie też rozwiązuje się mnóstwo zadań, czegoś takiego się nie robi. Otóż warto. Z kilku powodów. W fizyce mamy do czynienia z wieloma wielkościami fizycznymi, mierzonymi w różnych jednostkach. Nie można porównywać wielkości mierzonych w różnych jednostkach, tak jak nie można porównywać jabłek i gruszek. Jeśli szukaną wielkością w jakimś problemie jest, na przykład, prędkość, a w wyniku dostajemy kilogram na sekundę, to wiadomo, że zrobiliśmy błąd w naszych obliczeniach. Sprawdzenie wymiarów pozwala zorientować się bardzo szybko, czy otrzymany wynik może być sensowny.

Analiza wymiarów pozwala nie tylko na sprawdzenie rachunków. Dzięki niej można znaleźć sposób na zapamiętanie różnych formułek, a nawet na ich wyprowadzanie. Na tym naprawdę polega siła analizy wymiarowej. Na podstawie uważnej analizy wymiarów wielkości fizycznych, mających wpływ na badane zjawisko, można czasem zgadnąć formułę matematyczną opisującą to zjawisko. Rozpatrzmy dwa przykłady: pierwszy – bardzo prosty i drugi – bardziej skomplikowany.

potrafimy rozwiązać. Zastosujmy więc analizę wymiarową. Mamy do dyspozycji sześć wielkości:  $F$ ,  $l$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $g$  i  $v$ . Może warto wytłumaczyć, dlaczego nie rozpatrujemy masy statku jako niezależnej wielkości fizycznej. Otóż, zgodnie z prawem Archimidesa, masa statku jest równa masie wypartej cieczy, a to z kolei jest rzędu  $\rho l^3$ .

Zauważmy, że mamy jedynie trzy podstawowe jednostki: kilogram, metr i sekundę, w których mierzy się sześć wielkości. Jedynie trzy bezwymiarowe ich kombinacje mogą być niezależne. Wybierzmy je w następujący sposób:

$$C_D = \frac{F}{\rho v^2 l^2}, \quad R = \frac{vl\rho}{\mu}, \quad N_F = \frac{v^2}{lg}.$$

Oczywiście, dowolna ich kombinacja też jest bezwymiarowa, ale wybraliśmy je tak, gdyż każda z nich wiąże się z inną cechą badanego problemu. Stała Reynoldsa  $R$  związana jest z lepkością cieczy  $\mu$ , stała Froude'a  $N_F$  wiąże siły bezwładności ( $\sim mv^2$ ) z siłami ciężkości ( $\sim mg$ ) w przepływie cieczy. Stała  $R$  charakteryzuje, na przykład, fale i zawirowania na powierzchni cieczy spowodowane ruchem statku. W końcu współczynnik oporu czołowego  $C_D$  nie zależy ani od  $\mu$ , ani od  $g$ .

Analiza wymiarowa mówi nam, że bezwymiarowy współczynnik oporu czołowego  $C_D$  musi być pewną funkcją dwóch pozostałych bezwymiarowych wielkości, to znaczy

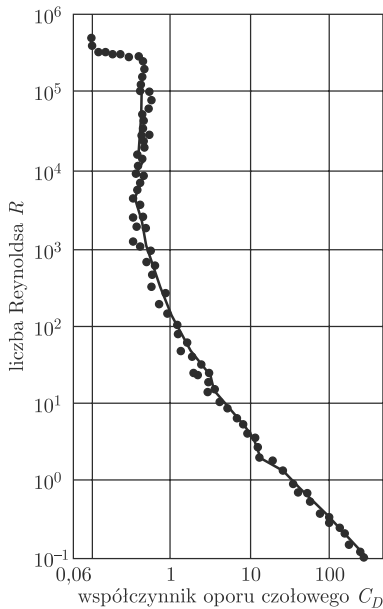
$$C_D = f(R, N_F).$$

Załóżmy teraz, że efekt fal tworzonych na powierzchni cieczy przez płynący statek jest zaniedbywalny (krajowym przykładem będzie okręt podwodny). Wówczas stała  $g$ , odpowiedzialna za fale na wodzie, nie powinna wejść do rozwiązania, a więc stała Froude'a w powyższym wzorze może być pominięta. W języku wyjściowych wielkości wymiarowych dostajemy więc ostateczny wzór na siłę oporu

$$(*) \quad F = \rho v^2 l^2 f(vl\rho/\mu).$$

W tym momencie można powiedzieć: no dobrze, ale przecież nie znamy funkcji  $f$ , więc jaki jest pożytek z otrzymanego wyniku? Żeby zrozumieć korzyść z naszych rozważań, zauważmy, że jeśli odłożyć na wykresie wartość siły  $F$  w zależności od długości  $l$ , to otrzymamy wiele różnych krzywych dla różnych cieczy, z których nic ciekawego nie da się odczytać. Jeśli natomiast odłożyć  $C_D$  w zależności od  $R$ , to wszystkie punkty powinny ułożyć się na jednej krzywej dla różnych cieczy i różnych rozmiarów statków!





Współczynnik oporu czołowego dla ruchu kulki w zależności od liczby Reynoldsa. Dane układają się na jednej krzywej.

Zauważmy, że z przedstawionego przez nas prawa skalowania wynika, że stosunek siły oporu do masy statku maleje ze wzrostem jego rozmiarów liniowych, gdyż

$$\frac{F}{m} \sim \frac{1}{l}.$$

W XIX wieku była to bardzo ważna obserwacja pokazująca, że opłacało się budować duże statki parowe do przewozu towarów.

Na rysunku przedstawione są wyniki pomiarów dla kul o różnych średnicach poruszających się w różnych cieczach.

Dane rzeczywiście układają się na jednej krzywej dla  $R$  zmieniającego się o 7 rzędów wielkości. Tego typu krzywa nosi nazwę krzywej skalowania. Znamy ją z wyników pomiarów. Zauważmy, że znalezione prawo skalowania (\*) pozwala wyciągnąć wnioski o ruchu wielkich statków ( $l \rightarrow \infty$ ) z zachowania się małych statków poruszających się z dużymi prędkościami ( $v \rightarrow \infty$ ), gdyż oba graniczne przypadki opisane są tą samą funkcją  $f(R)$ . Ściśle mówiąc, nie jest to prawda, gdyż dla bardzo dużych prędkości statków należy uwzględnić nowe parametry, na przykład prędkość dźwięku w cieczy, zjawiska termiczne spowodowane tarcieniem itp. Powyższa obserwacja jest podstawą teorii modelowania, tak ważnej przy projektowaniu statków, samolotów, dużych budowli itp. z użyciem tuneli aerodynamicznych.

Użycie starannie dobranych zmiennych pozwala więc na przedstawienie wyników doświadczeń w sposób wskazujący bezpośrednio na fizykę badanych zjawisk. Odkrycie prawa skalowania jest często punktem wyjścia do budowy nowej teorii fizycznej. Pod koniec lat sześćdziesiątych J.D. Bjorken wysunął hipotezę, że w rozpraszaniu elektronów na nukleonach odpowiednio zdefiniowane wielkości, zwane funkcjami struktury nukleonu, powinny zależeć jedynie od jednej bezwymiarowej kombinacji dwóch zmiennych wymiarowych (tak zwana hipoteza skalowania Bjorkena).

Na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych hipoteza skalowania została potwierdzona doświadczalnie. Można by zapytać znowu: i co z tego? Otóż, można teoretycznie wyprowadzić skalowanie Bjorkena jedynie wówczas, jeśli założy się, że nukleony składają się z punktowych, swobodnych składników – kwarków! W ten sposób hipoteza skalowania przyczyniła się do ugruntowania roli kwarków (wprowadzonych wcześniej jako hipotetyczne obiekty tłumaczące niektóre właściwości cząstek elementarnych) jako rzeczywistych składników materii. W tym sensie kwarki zostały zaobserwowane doświadczalnie.

Analiza wymiarowa i skalowanie jest integralną częścią fizyki od ponad stu lat. Zastosowanie jej metod czterdzieści lat temu w fizyce jądrowej i fizyce cząstek elementarnych spowodowało radykalne zmiany w naszym rozumieniu podstawowych składników materii i przyczyniło się do przyjęcia kwantowej teorii pól jako podstawy do budowy teorii oddziaływań fundamentalnych. Sprawdzajcie więc wymiary!

*Jest to skrót artykułu Jana KALINOWSKIEGO, który ukazał się w Delcie 1/1992. Pełny tekst można znaleźć w książce „O kwantach i smokach. Fizyka według Deltę” wydanej w listopadzie 2016.*

## Od Pascala do Pitagorasa i dalej

Twierdzenie Pascala o równomiernym ciśnieniu gazu na ścianki naczynia pociąga za sobą twierdzenie Pitagorasa i jego uogólnienie, czyli twierdzenie kosinusów.

Wyobraźmy sobie pudełko w kształcie trójkąta prostokątnego i o głębokości  $\lambda$ . Pudełko to jest położone poziomo i przymocowane w jednym z wierzchołków doskonałym łożyskiem do pionowej osi. Pudełko wypełniamy gazem, który prze na każdą ściankę. Parcie na górną i dolną jest jednakowe, więc one się znoszą. Jednak znosić się muszą i parcia na ścianki boczne. Przyjrzyjmy się im. Zgodnie z prawem Pascala mamy (rys. 1)

$$|u| = a\lambda p, \quad |v| = b\lambda p, \quad |w| = c\lambda p, \quad \text{gdzie } p \text{ to ciśnienie gazu.}$$

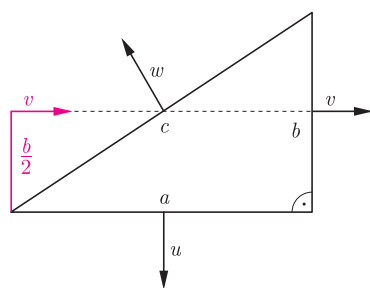
Równość momentów tych sił to  $\frac{a}{2}a\lambda p + \frac{b}{2}b\lambda p = \frac{c}{2}c\lambda p$ , czyli  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Dla trójkąta nieprostokątnego otrzymujemy (rys. 2)

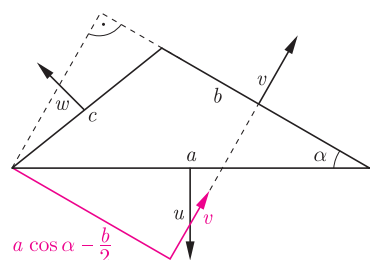
$$\frac{a}{2}a\lambda p = (a \cos \alpha - \frac{b}{2})b\lambda p + \frac{c}{2}c\lambda p, \quad \text{czyli } a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2,$$

a więc **twierdzenie kosinusów**.

Na tym przykładzie widać przewagę fizyki nad matematyką, bo z twierdzenia Pitagorasa, a nawet kosinusów, twierdzenia Pascala wyprowadzić się raczej nie da.



Rys. 1



Rys. 2

Marek KORDOS

## Szansa na sukces

*Metoda probabilistyczna* gościła już na łamach *Delty* (np. w numerach 12/2006 i 4/2015), byłyby jednak nieprawdopodobnie głupio pominąć ją w numerze poświęconym dowodom. W najbardziej podstawowej wersji może się ona okazać przydatna w sytuacji, gdy chcemy wykazać istnienie obiektu spełniającego określone warunki – wówczas możemy spróbować przedstawić schemat losowania badanych obiektów, w którym z dodatnim prawdopodobieństwem wynik będzie spełniał przedstawione żądania. Opis ten może brzmieć dość enigmatycznie, powinien stać się bardziej zrozumiały po lekturze poniższego rozumowania, uchodzącego za jeden z pierwszych przykładów zastosowania metody probabilistycznej.

Podgraf danego grafu powstaje przez usunięcie z niego pewnej liczby wierzchołków wraz ze wszystkimi przylegającymi do nich krawędziami.

Więcej o liczbach Ramseya przeczytać można w *Delcie* 3/2008.

Rozważmy graf pełny, którego każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią w kolorze niebieskim bądź czerwonym. Okazuje się, co udowodnił Frank Ramsey w 1930 roku, że dla dowolnie zadanych liczb naturalnych  $k, l$ , jeśli liczba wierzchołków w grafie pełnym jest dostatecznie duża, istnieje w nim podgraf o  $k$  wierzchołkach połączonych wyłącznie niebieskimi krawędziami lub podgraf o  $l$  wierzchołkach, z których każde dwa połączone są krawędziami czerwonymi.

Najmniejszy z tych „dostatecznie dużych” rozmiarów wyjściowego grafu nazywamy *liczbą Ramseya* i oznaczamy przez  $R(k, l)$ .

W 1947 roku Paul Erdős przedstawił następujące oszacowanie z dołu liczby  $R(k, k)$

$$(*) \quad \binom{R(k, k)}{k} \geq 2^{\binom{k}{2}-1}.$$

Oto jak uzyskał ten wynik: rozważmy graf o  $n$  wierzchołkach, gdzie  $n$  jest „niedostatecznie duże”, czyli  $\binom{n}{k} < 2^{\binom{k}{2}-1}$ . Pokażemy, że możemy pokolorować krawędzie tego grafu w taki sposób, by nie istniał podgraf rozmiaru  $k$  o wszystkich krawędziach w tym samym kolorze; zatem natychmiastowym wnioskiem będzie nierówność (\*).

Każdą z krawędzi naszego grafu pomalujmy na niebiesko z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  lub na czerwono z tym samym prawdopodobieństwem. Wybierzmy dowolny podgraf o  $k$  wierzchołkach – wówczas zdarzenie, polegające na pomalowaniu wszystkich krawędzi wybranego podgrafu (których jest  $\frac{k(k-1)}{2}$ , inaczej  $\binom{k}{2}$ ) na ten sam kolor, ma prawdopodobieństwo  $2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$ . Podgrafów o  $k$  wierzchołkach jest jednak  $\binom{n}{k}$ . Szansa na to, że pewien z tych podgrafów ma krawędzie pomalowane na jeden kolor, nie przekracza  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$ , zatem zgodnie z założeniem o „niedostatecznie dużym”  $n$  jest mniejsza od 1. W tej sytuacji szansa na to, że żaden z podgrafów o  $k$  wierzchołkach nie ma wszystkich krawędzi w tym samym kolorze, jest dodatnia, co dowodzi istnieniażądanego kolorowania.

Skorzystaliśmy z fundamentalnej nierówności rachunku prawdopodobieństwa, zgodnie z którą prawdopodobieństwo (przeliczalnej) alternatywy zdarzeń nie przekracza sumy prawdopodobieństw tych zdarzeń.

Lukasz RAJKOWSKI

## Jak się pozbyć losowości?

W informatyce *losowość* jest bardzo przydatna. Często bardzo ułatwia rozumowania, pozwala na piękne i klarowne argumenty używające, na przykład, metody probabilistycznej. Nieraz łatwo znaleźć algorytm używający losowości (*randomizowany*) i działający szybko, podczas gdy znalezienie szybkiego algorytmu deterministycznego jest trudne lub w ogóle takiego nie znamy. Z losowością jest jednak pewien problem. Chciałoby się wiedzieć coś na pewno, a nie tylko z dużą dozą prawdopodobieństwa. Szczęśliwie okazuje się, że czasami da się tę losowość wprowadzić, a potem wyeliminować. Ta ostatnia operacja, eliminacja losowości, nazywa się *derandomizacją*.

Przedstawimy dwie metody derandomizacji. Zrobimy to na przykładzie, choć użyte techniki będą zdecydowanie bardziej ogólne. Rozważmy graf

**Rozwiązanie zadania M 1525.**

Przeprowadzimy dowód nie wprost.

Przypuśćmy, że  $n + 1$  jest nieparzystą liczbą pierwszą. Wówczas z małego twierdzenia Fermata wynika, że liczba  $2^n - 1$  jest podzielna przez  $n + 1$ , a zatem również

$$n(2^n - 1) + (n + 1) = n2^n + 1$$

jest liczbą podzielną przez  $n + 1$ . To przeczy pierwszości liczby  $n2^n + 1$ , gdyż  $n2^n + 1 > n + 1$ .

Podobnie, jeżeli  $n + 2$  jest nieparzystą liczbą pierwszą, to z małego twierdzenia Fermata wynika, że liczba  $2^{n+1} - 1$  jest podzielna przez  $n + 2$ . Wobec tego również liczba

$$(n + 2)2^n - (2^{n+1} - 1) = n2^n + 1$$

jest podzielna przez  $n + 2$ , ale  $n2^n + 1 > n + 2$  na mocy nierówności  $n(2^n - 1) > 1$  prawdziwej dla  $n > 1$ . □

**Uwaga.** Najmniejszą liczbą  $n \geq 2$ , dla której  $n2^n + 1$  jest liczbą pierwszą, jest 141. Liczby postaci  $n2^n + 1$  nazywane są liczbami Cullena.

**Rozwiązanie zadania M 1526.**

Przeprowadzimy dowód konstruktywny – zidentyfikujemy rozwiązania danego równania.

Zauważmy, że jeżeli  $|x| > 2$ , to

$$|f(x)| = x^2 - 2 > 2|x| - 2 > 2|x| - |x| = |x|,$$

skąd wynika, że dane równanie nie może być spełnione. Wobec tego  $|x| \leq 2$ ,

a zatem  $x = 2 \cos \varphi$  dla pewnego (a właściwie dwóch)  $\varphi \in [0, \pi]$ .

Zauważmy, że skoro  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ , to

$$f(2 \cos \alpha) = 4 \cos^2 \alpha - 2 = 2 \cos 2\alpha,$$

wobec czego

$$f(f(f(\dots f(f(2 \cos \varphi)) \dots))) = 2 \cos 2^n \varphi.$$

Dane równanie przybiera wówczas postać  $\cos \varphi = \cos 2^n \varphi$ , czyli

$$0 = \cos \varphi - \cos 2^n \varphi =$$

$$= 2 \sin \frac{2^n - 1}{2} \varphi \sin \frac{2^n + 1}{2} \varphi,$$

skąd  $\varphi = 2k\pi/(2^n - 1)$  lub

$\varphi = 2k\pi/(2^n + 1)$  dla pewnej liczby całkowitej  $k$ . Pozostaje zauważyć, że

jeżeli  $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$ , to

$0 \leq 2k\pi/(2^n - 1) \leq \pi$ , jeżeli zaś

$0 \leq k \leq 2^{n-1}$ , to  $0 \leq 2k\pi/(2^n + 1) \leq \pi$ ,

przy czym rozwiązania są różne, o ile

tylko  $k \neq 0$ . Tym samym otrzymujemy

łącznie  $2^{n-1} + 2^{n-1} + 1 - 1 = 2^n$

różnych rozwiązań postaci  $x = 2 \cos \varphi$ . □

$G = (V, E)$ . Dla podzbioru wierzchołków  $S \subseteq V$  nazwiemy jego *cięciem* zbiór  $\{(u, v) \in E \mid u \in S, v \notin S\}$ , czyli zbiór krawędzi, które mają dokładnie jeden koniec w  $S$ . Problem znajdowania  $S$  o największym cięciu jest NP-zupełny. Rozważmy jednak podobny problem: **znajdowania  $S$  takiego, że jego cięcie jest wielkości co najmniej połowy zbioru wszystkich krawędzi, czyli  $|E|/2$ .**

Na pierwszy rzut oka nie jest wcale jasne, czy taki  $S$  istnieje. A więc na rozgrzewkę udowodnimy to. Zachęcamy Czytelników do samodzielnej próby przed przeczytaniem rozwiązania. Rozwiązanie zaś jest zadziwiająco proste. Wylosujmy  $S$ , to znaczy każdy wierzchołek wrzucimy niezależnie do  $S$  z prawdopodobieństwem  $1/2$ . Wówczas każda krawędź z  $E$  będzie należała do cięcia  $S$  z prawdopodobieństwem  $1/2$ . A zatem średnia wielkość cięcia  $S$  to  $|E|/2$ , czyli na pewno musi istnieć  $S$  taki, że jego cięcie ma wielkość przynajmniej  $|E|/2$ . Powyższy dowód jest jednak *niekonstruktywny*, nie wynika z niego wcale, jak takie cięcie znaleźć. Oczywiście, możemy przejrzeć wszystkie możliwe zbiory  $S$ , ale to zajmie czas rzędu  $2^n$ , gdzie  $|V| = n$ , a my chcemy znaleźć algorytm wielomianowy względem  $n$ .

Podamy dwie metody. Pierwsza nazywa się metodą *warunkowych wartości oczekiwanych*. Przypuśćmy, że przejrzelśmy już pewien zbiór wierzchołków  $U \subseteq V$  i dla każdego z nich zdecydowaliśmy, czy będzie on należał do  $S$ , czy nie. Jaka jest średnia wielkość cięcia  $S$  po tym ustaleniu? Przez  $E(T, T')$  oznaczmy zbiór krawędzi między zbiorami  $T$  i  $T'$ . Na razie wiemy, że do cięcia na pewno będzie należała każda krawędź z  $E(U \cap S, U \cap \bar{S})$ , gdzie  $\bar{S}$  to dopełnienie zbioru  $S$ . Jeśli chodzi o krawędzie jeszcze nieustalone, to każda krawędź z  $E(U \cap S, \bar{U})$  będzie należała do cięcia z prawdopodobieństwem  $1/2$ . A zatem średnia wartość cięcia po ustaleniu, co się stanie z wierzchołkami z  $U$ , wynosi  $|E(U \cap S, U \cap \bar{S})| + 1/2 \cdot |E(U \cap S, \bar{U})|$ . Umiemy to obliczyć w czasie wielomianowym, znając  $U$  oraz decyzję odnośnie  $S$  na nim, czyli  $U \cap S$  oraz  $U \cap \bar{S}$ . Teraz już tylko krok do rozwiązania. Gdy bowiem decydujemy o pierwszym wierzchołku, czy wrzucić go do  $S$ , czy nie, to obliczamy, jaka będzie średnia wartość cięcia w obu przypadkach. Ponieważ średnia z tych dwóch liczb jest większa lub równa  $|E|/2$  (w tym przypadku równa), to jedna z nich też będzie większa lub równa. Wybieramy więc tę lepszą opcję i zabieramy się za drugi element. Przy dorzucaniu każdego nowego elementu wybieramy tę opcję, która daje większą średnią i w ten sposób po podjęciu decyzji dla wszystkich elementów  $V$  otrzymujemy pewien zbiór  $S$ , którego cięcie będzie większe lub równe  $|E|/2$ .

Drugie rozwiązanie jest jeszcze bardziej zaskakujące. Zauważmy, że tak naprawdę nie potrzebujemy wcale, by każdy wierzchołek z  $V$  był brany do  $S$  niezależnie. **Do tego, by każda krawędź  $(u, v)$  znalazła się w cięciu  $S$  z prawdopodobieństwem  $1/2$ , wystarczy, by wierzchołki  $u$  i  $v$  były wzięte do  $S$  niezależnie**, czyli wystarczy nam, by wybory były parami niezależne. A to jest dużo słabsze wymaganie! Co więcej, okazuje się, że z  $k$  niezależnych zmiennych losowych  $X_1, \dots, X_k$  o wartościach w  $\{0, 1\}$  można łatwo skonstruować  $2^k$  zmiennych losowych parami niezależnych o wartościach w  $\{0, 1\}$ . Po prostu dla każdego podzbioru  $A \subseteq \{1, \dots, k\}$  zmienna  $X_A$  jest zdefiniowana jako xor (alternatywa wykluczająca) zmiennych  $X_i$  takich, że  $i \in A$ . Nietrudno zauważyć, że dla dowolnych  $A, B \subseteq \{1, \dots, k\}$ ,  $A \neq B$  zmienne  $X_A$  i  $X_B$  są niezależne. Dla uproszczenia przyjmijmy, że  $|V| = n$  jest potęgą dwójki. A więc nasz algorytm możemy zamienić na taki, który losuje najpierw  $\log n$  bitów  $X_i$  dla  $i \in \{1, \dots, \log n\}$ , a potem gdy podejmuje losową decyzję, czy wrzucić jakiś wierzchołek z  $V$  do zbioru  $S$ , korzysta ze zmiennych  $X_A$ . Taki algorytm też w średnim przypadku skonstruuje cięcie wielkości  $|E|/2$ . Zauważmy jednak, że zamiast losować te  $\log n$  wartości możemy po prostu sprawdzić wszystkie możliwości ich wylosowań, których jest  $2^{\log n} = n$ . Czyli faktycznie otrzymaliśmy wielomianowy algorytm deterministyczny: przegląda on wszystkie możliwości na  $X_1, \dots, X_{\log n}$ , dla każdej symuluje działanie losowego algorytmu, a na koniec wybiera najlepsze rozwiązanie.

Wojciech CZERWIŃSKI



# Intuicjonizm i to, co po nim

Udowodnijmy lub obalmy twierdzenie: *istnieją takie liczby niewymierne  $a$  i  $b$ , że  $a^b$  jest liczbą wymierną.*

Rozważmy liczbę  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Jeśli jest ona wymierna, szukanymi liczbami są  $\sqrt{2}$  i  $\sqrt{2}$ . Jeśli natomiast  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  jest niewymierna, to wraz z nią szukaną liczbą jest  $\sqrt{2}$ , bowiem  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ .  $\square$

Tego rodzaju dowód ma szczególną cechę: dowodzimy istnienia jakichś obiektów, nie umiając stwierdzić „co one za jedno”. Patrząc głębiej, widzimy, że wykorzystaliśmy tu tzw. zasadę wyłączonego środka: liczba  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  jest wymierna albo jest niewymierna.

Wypada zdradzić tajemnicę: liczba  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  jest nie tylko niewymierna, ale nawet niealgebraiczna, co wynika z twierdzenia Gelfonda-Schneidera: *jeśli liczby  $a$  i  $b$  są algebraiczne, przy czym  $a$  nie jest zerem ani jednością i liczba  $b$  jest niewymierna, to liczba  $a^b$  jest niealgebraiczna.*

Równość  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  dla  $p$  i  $q$  całkowitych pociąga za sobą równość  $p^2 = 2q^2$ , co jest niemożliwe, bo rozkład lewej strony na czynniki pierwsze zawiera parzystą liczbę dwójek, a prawej – nieparzystą.

Równość  $\log_2 9 = \frac{p}{q}$  dla  $p$  i  $q$  całkowitych pociąga za sobą równość  $9 = 2^{p/q}$ , czyli  $3^{2q} = 2^p$ , co jest niemożliwe, bo w rozkładzie lewej strony są same trójki, a prawej – same dwójki.

Pojawianie się, począwszy od drugiej połowy XIX wieku, sytuacji krępujących matematyków, obiektów, których własności były nadmiernie paradoksalne, skłoniło część z nich (podpuszczaną zresztą przez Poincarégo) do narzucenia sobie (i zalecenia innym) ostrożności w dowodzeniu zwłaszcza istnienia jakichś obiektów: dowody  *$X$  istnieje, bo gdyby nie istniał, to ołaboga!* zostały wykluczone. Nurt, którego ojcem założycielem okrzyknięto Luitzena Brouwera, nazwano *intuicjonizmem*. Jego rozwój przysporzył matematyce takich pojęć, jak funkcje obliczalne, algorytmy, a nawet maszyna Turinga. Dziś intuicjonizm, pod nazwą *konstrukttywizmu* jest filozoficznym aspektem informatyki, ale to już inna historia.

Dowiedźmy jednak początkowe twierdzenie zgodnie z intuicjonistami: takimi liczbami są  $\sqrt{2}$  i  $\log_2 9$ , bo  $\sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\log_2 3} = 3$ .

Marek KORDOS



## Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

**M 1525.** *Udowodnić*, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej  $n \geq 2$  liczba  $n2^n + 1$  jest pierwsza, to liczby  $n + 1$  oraz  $n + 2$  są złożone.

Rozwiązanie na str. 7

**M 1526.** Niech  $f(x) = x^2 - 2$ . *Udowodnić*, że dla każdego  $n \geq 1$  równanie

$$\underbrace{f(f(f(\dots f(f(x))\dots)))}_{n\text{-krotne złożenie } f} = x$$

ma  $2^n$  różnych rozwiązań rzeczywistych.

Rozwiązanie na str. 7

**M 1527.** Na przyjęcie przyszło  $n$  osób w kapeluszach ( $n \geq 2$ ). Następnie każde dwie osoby przywitały się dokładnie raz, przy czym każde powitanie polegało na zamianie kapeluszami, które w danej chwili witające się osoby miały na głowach. Okazało się, że po nastąpieniu wszystkich powitań każdy miał z powrotem swój kapelusz. *Udowodnić*, że taka sytuacja jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4.

Rozwiązanie na str. 14

Przygotował Michał NAWROCKI

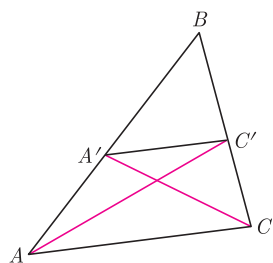
**F 925.** Na zawieszoną na nitce o długości  $l = 1$  m doskonale odbijającą płytkę o masie 10 mg pada, prostopadle do jej powierzchni, wiązka światła laserowego. Jaka musiałaby być moc  $S$  padającego światła, aby pod jego działaniem wahadło, którym jest zawieszona na nitce płytka, wychyliło się o kąt  $\alpha = 1^\circ$  z położenia równowagi?

Rozwiązanie na str. 13

**F 926.** Nurek mający masę  $m = 80$  kg nabrał pełno powietrza do płuc ( $v = 5$  l) i wskoczył do wody. Z jakiej maksymalnej głębokości  $H$  nurek może wypłynąć, nie wykonując żadnych ruchów? Objętość ciała nurka to  $V = 82$  l.

Rozwiązanie na str. 13

## Dedukcja lokalna – na przykładzie



To twierdzenie (i jego dowód) to Twierdzenie 2 z szóstej księgi *Elementów* Euklidesa.

Twierdzenie Talesa dowieść można bez trudu.

Mamy wykazać, że jeśli prosta równoległa do jego boku  $AC$  przecina trójkąt  $ABC$  w punktach  $A', C'$ , to  $\frac{|AA'|}{|A'B|} = \frac{|CC'|}{|C'B|}$ .

Oto ten dowód.

$$\frac{|AA'|}{|A'B|} = \frac{|\Delta(AA'C')|}{|\Delta(A'BC')|} = \frac{|\Delta(A'C'A)|}{|\Delta(BC'A)|} = \frac{|\Delta(A'C'C)|}{|\Delta(BC'A)|} = \frac{|\Delta(CC'A)|}{|\Delta(C'BA)|} = \frac{|CC'|}{|C'B|}. \quad \square$$

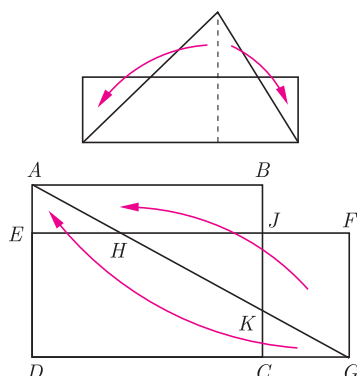
Pierwsza i piąta równość bierze się stąd, że mamy trójkąty o podstawach na jednej prostej i wspólnym trzecim wierzchołku, druga i czwarta to tylko permutacja wierzchołków w każdym trójkącie z osobna. Kluczowa jest równość trzecia: mianownik jest ten sam, a w liczniku mamy trójkąty o podstawie  $A'C'$  – mają one równe wysokości, bo  $AC \parallel A'C'$ .

Z tak sformułowanego twierdzenia Talesa wynikają już dość mechanicznie wszystkie jego inne postacie, w tym ta, nazywana w szkole twierdzeniem odwrotnym.

Fundamentalista zakrzyknie: *tu jest wykorzystany wzór na pole trójkąta – a skąd go wziąć?*

Proszę bardzo, oto dowód, że każdy trójkąt da się pociąć na kawałki, z których ułoży się kwadrat – nietrudno się zorientować, że jego pole (nawet fundamentaliści chyba zgodzą się co do wartości pola kwadratu) będzie takie samo dla trójkątów, których tradycyjnie obliczone pola uważamy za równe.

Trójkąt tniemy na trzy kawałki, które przez przemieszczenie dają prostokąt. Już Starożytni wiedzieli jak, ale dopiero dziewiętnastowieczni Farkas Bolyai i Paul Gerwien nadali swoje imię pocięciu prostokąta tak, by uzyskać dowolny inny prostokąt o tym samym polu – w szczególności więc kwadrat.



Ponieważ zdarzają się i Czytelnicy Leniwi, dla nich ten dowód:

Oznaczmy  $|AB| = |CD| = a$ ,  
 $|BC| = |DA| = b$ ,  $|DE| = |FG| = p$ ,  
 $|EF| = |GD| = q$ .

Z założenia mamy  $ab = pq$ , z czego wynika  $\frac{a}{q} = \frac{p}{b}$  i to jest pierwsza równość wypisana obok.

Z tego wynika też  $\frac{p}{b} = \frac{a-p}{q-b}$ , a to jest druga równość.

No to może jeszcze pytanie: co zrobić, gdy odcinek  $AG$  pobiegnie ponad  $J$ ?

Aby uzyskać przedstawione na rysunku przesunięcia trójkąta  $KCG$  o wektor  $\vec{CE}$  na  $AEH$  i trójkąta  $FGH$  o wektor  $\vec{FB}$  na  $BKA$ , trzeba wykazać, że oba te wektory są równoległe do  $AG$ .

Założona równość pól to  $|AB| \cdot |BC| = |ED| \cdot |DG|$ .

Z niej Czytelnik Niedowierzający wyprowadzi bez trudu równość

$$\frac{|AD|}{|DG|} = \frac{|ED|}{|DC|} = \frac{|BJ|}{|JF|},$$

która na mocy twierdzenia Talesa (właśnie w tej odwrotnej postaci) daje żądane równoległości.

To co – mamy błędne koło? Bynajmniej: twierdzenie Bolyaia–Gerwiena i twierdzenie Talesa są równoważne... no właśnie: na jakim gruncie?

I tu dotykamy rzeczy najbardziej istotnej dla działań matematyków. Faktycznie nie posługują się oni dowodzeniem twierdzeń, wychodząc od aksjomatyki, ale od pewnego, zawsze bogatego zbioru faktów, o których tak oni, jak ich koledzy po fachu, są przekonani, że to już ktoś kiedyś udowodnił. Oni dokonują po prostu kolejnego kroku na drodze matematycznego poznania, taki krok nazywa się **dedukcją lokalną**. Takiego sposobu dowodzenia wymaga się (tu i ówdzie zapewne) od uczniów w szkole i żąda od olimpijczyków.

Pełnej dedukcji z aksjomatów w żadnej sensownej gałęzi matematyki nie wymaga się od uprawiających ją na tej samej zasadzie, jak nie wymaga się od programisty pisania instrukcji dla komputera przez wystukiwanie samych jedynek i zer.

Przykład obrałem z geometrii dlatego, że w jej przypadku przekonanie o istnieniu dającej się używać przez ogół aksjomatyki jest dość powszechne, a na dodatek utwierdzone przez czczone przez uczonych (nie tylko matematyków) *Elementy* Euklidesa – genialne w swoich rozumowaniach, ale niespełniające naszych dzisiejszych wyobrażeń o formalnych dowodach.

W sprawie aksjomatyki geometrii polecam zajrzeć do mojego artykułu *Próżny trud* w *Delcie* 1/2015.

Marek KORDOS

# Twierdzenie o niepustym barze, czyli zmechanizowana naturalna dedukcja

Sprawdzanie poprawności dowodów matematycznych często wymaga sporej wiedzy i ogromu nużącej pracy. O ile dochodzenie do zrozumienia istoty dowodu, czyli dlaczego dane twierdzenie matematyczne zachodzi, może sprawiać Czytelnikowi dużo satysfakcji, o tyle weryfikowanie wszystkich szczegółów dowodu jest zajęciem dość niewdzięcznym. Z tego powodu od wielu już lat trwają badania nad zaprzęgnięciem komputerów do tej żmudnej części pracy. Aktualnie nie istnieją programy, które potrafią rozumieć dowody matematyczne napisane po polsku lub po angielsku (i ogólnie, w żadnym języku naturalnym). Istnieją za to systemy z własnym językiem opisu dowodu, mniej lub bardziej oddalonym od języka naturalnego. Jednym z takich systemów jest Coq, rozwijany głównie we Francji, w instytucie naukowym INRIA. Jest to interaktywny system pozwalający na poszukiwanie dowodów twierdzeń za pomocą zwięzłych komend, nazywanych *taktykami*.

Każda taktyka odpowiada z grubsza zastosowaniu pewnej reguły dowodzenia zwanej *naturalną dedukcją*. Coq nie służy do automatycznego dowodzenia twierdzeń, do działania potrzebuje ludzkich podpowiedzi. Każdą podpowiedzianą taktykę stosuje bezbłędnie, uzyskując wszystkie możliwe wnioski i sprawdzając, co jeszcze należy udowodnić, żeby dowód analizowanego twierdzenia był kompletny. W niniejszym artykule zaprezentujemy dowód w Coqu, wykonany z użyciem reguły naturalnej dedukcji, następującego twierdzenia:

*W każdym niepustym barze jest taka osoba, że jeśli ona pije, to wszyscy piją.*

Choć twierdzenie brzmi absurdalnie, jednak da się je udowodnić. Przyczyny tego dysonansu omówimy później, a teraz rozważmy dwa dowody.

*Naturalna dedukcja to opracowany w latach 30. XX wieku przez polskiego logika Stanisława Jaśkowskiego i (niezależnie) przez niemieckiego matematyka Gerharda Gentzena, zestaw formalnych zasad, które dla każdego spójnika logicznego (takiego jak np. alternatywa, implikacja, kwantyfikatory) mówią, jak w dowodzie wykorzystać zdanie zbudowane przy użyciu tego spójnika oraz jak udowodnić takie zdanie.*

## Dowód ludzki

- a Z zasady wyłączonego środka wiadomo, że w barze albo istnieje osoba, która nie pije, albo nie istnieje taka osoba.
- b Rozpatrzmy dwa przypadki.
- c Jeśli istnieje osoba, która nie pije, to
- d spełnia ona implikację „jeśli ona pije, to wszyscy piją”,
- e gdyż niespełniony jest poprzednik implikacji.
- f W przeciwnym przypadku wiemy, że nie ma osoby, która nie pije,
- g a zatem wszyscy piją,
- h czyli konkluzja naszej implikacji jest spełniona.
- i A ponieważ bar nie jest pusty,
- j więc istnieje osoba, dla której ta implikacja jest spełniona.

## Dowód wsparty komputerem

```
1 From Coq Require Import Classical.
2 Parameter Bar: Type.
3 Parameter Pije: Bar → Prop.
4 Parameter gosc: Bar.
5 Theorem SuperGosc: exists x, (Pije x → forall y, Pije y).
6 Proof.
7   assert ((exists x, ~Pije x) ∨ ~ (exists y, ~Pije y)) as H by apply classic.
8   destruct H.
9   + destruct H.
10    exists x.
11    intro.
12    contradiction.
13  + exists gosc.
14    intro.
15    apply not_ex_not_all.
16    assumption.
17 Qed.
```

Na początku dowodu w Coqu twierdzenie zostaje sformalizowane. Po pierwszej technicznej linii, wczytującej zestaw twierdzeń logiki klasycznej, deklarujemy typ `Bar` (linia 2) rozumiany tak, że `x:Bar` oznacza, że osoba `x` jest w barze, i wprowadzamy predykat `Pije`, który rozumiemy tak, że `Pije x` oznacza, że osoba `x` pije. Niepustość baru zapewnia nam stała `gosc` (linia 4), oznaczająca pewną osobę, która siedzi w barze.

Po *zrozumieniu* treści twierdzenia (linia 5) Coq przechodzi w tryb dowodu, w którym oczekuje komend od użytkownika – instrukcji, jaką regułę wnioskowania ma zastosować. Po każdej komendzie Coq wyświetla aktualną sytuację dowodową, czyli co jeszcze należy pokazać i przy jakich lokalnych założeniach, aby ukończyć dowód twierdzenia.

Pierwsza taktyka naszego dowodu w Coqu (linia 7) powoduje wzmocnienie lokalnych założeń o alternatywę wynikającą z prawa wyłączonego środka. To tak samo, jak w dowodzie ludzkim w punkcie a. Prawo wyłączonego środka w Coqu nosi nazwę `classic`, a przywołane założenie otrzymuje nazwę `H`. Po tej linii sytuacja dowodowa

wygląda następująco<sup>a</sup>:

$$\begin{array}{l} H : (\text{exists } x : \text{Bar}, \sim \text{Pije } x) \vee \\ \quad \sim (\text{exists } y : \text{Bar}, \sim \text{Pije } y) \end{array}$$
$$\text{exists } x : \text{Bar}, \text{Pije } x \rightarrow \text{forall } y : \text{Bar}, \text{Pije } y$$

Przy założeniach widocznych nad podwójną linią (aktualnie jest tylko jedno założenie – o nazwie H) mamy udowodnić formułę znajdującą się poniżej linii.

Taktyka **destruct** H odpowiada regule użycia głównego spójnika założenia H. W przypadku linii 8 założenie H to alternatywa. Jej reguła użycia odpowiada dowodowi przez rozbitcie na przypadki (patrz punkt b z dowodu ludzkiego), – rozdzielenie dowodu na dwa wątki, których początki zaznaczone są znakiem + (w dowodzie ludzkim wątki te zaczynają się w punktach c i f). Odpowiadająca pierwszemu wątkowi sytuacja dowodowa (po + w linii 9) jest następująca:

$$H : \text{exists } x : \text{Bar}, \sim \text{Pije } x$$
$$\text{exists } x : \text{Bar}, \text{Pije } x \rightarrow \text{forall } y : \text{Bar}, \text{Pije } y$$

Komenda z linii 8 spowodowała zastąpienie poprzedniego założenia H przez założenie odpowiednie dla wątku – czyli w tym przypadku pierwszy człon alternatywy. Kolejna komenda **destruct** H tym razem odpowiada użyciu formuły z kwantyfikatorem egzystencjalnym. Polega ono na wprowadzeniu do dowodu nowej zmiennej  $x$ , zwanej „świadkiem” (istnienia osoby niepijącej) oraz jego własności  $\sim \text{Pije } x$ . Tak jak poprzednio, użyte założenie H znika, a nazwa ta zostaje wykorzystana ponownie.

Zauważmy, że ponieważ wprowadzono do kontekstu dowodowego nazwę  $x$ , zmienna związana w formule poniżej podwójnej linii została przemianowana na  $x0$ .

$$\begin{array}{l} x : \text{Bar} \\ H : \sim \text{Pije } x \end{array}$$
$$\text{exists } x0 : \text{Bar}, \text{Pije } x0 \rightarrow \text{forall } y : \text{Bar}, \text{Pije } y$$

Powyższy krok dowodowy nie ma bezpośredniego odzwierciedlenia w dowodzie ludzkim. Odpowiada mu to, że do „osoby”, wymienionej w punkcie c, można odwoływać się w dalszej części tego wątku dowodu (punkty d i e). Zwykle w dowodach w języku naturalnym nie odróżnia się zdania egzystencjalnego jako całości od istnienia świadka (co wynika z tego zdania) i jego własności, które mogą być wykorzystane w dalszej części dowodu.

Kolejna taktyka, **exists**  $x$  z linii 10 odpowiada kanonicznej regule dowodzenia formuły egzystencjalnej z naturalnej dedukcji: wskazujemy świadka  $x$  i przechodzimy do dowodu, że świadek żadaną własność faktycznie spełnia.

$$\begin{array}{l} x : \text{Bar} \\ H : \sim \text{Pije } x \end{array}$$
$$\text{Pije } x \rightarrow \text{forall } y : \text{Bar}, \text{Pije } y$$

<sup>a</sup>Zauważmy, że Coq dopisał  $:\text{Bar}$  w kilku miejscach, ponieważ widząc wyrażenia  $\text{Pije } x$  i  $\text{Pije } y$ , domyślił się, że  $x$  i  $y$  oznaczają gości baru. Poza tym Coq usunął kilka niepotrzebnych według niego nawiasów. Oczywiście, znaczenie formuł nie uległo zmianie.

Formuła, którą mamy teraz do udowodnienia, jest implikacją i znów używamy stosownej reguły kanonicznego dowodu z naturalnej dedukcji – za pomocą komendy **intro** w linii 11. Po tej komendzie okazuje się, że nasz zbiór lokalnych założeń jest sprzeczny.

$$\begin{array}{l} x : \text{Bar} \\ H : \sim \text{Pije } x \\ H0 : \text{Pije } x \end{array}$$
$$\text{forall } y : \text{Bar}, \text{Pije } y$$

Coq zauważa to po wprowadzeniu komendy **contradiction** (linia 12), zamyka wtedy bieżący wątek dowodu (powyższe dwie komendy odpowiadają punktom d i e).

This subproof is complete, but there are some unfocused goals.

Sytuacja początkowa drugiego wątku dowodu w Coqu (po znaku + w linii 13) jest następująca:

$$H : \sim (\text{exists } y : \text{Bar}, \sim \text{Pije } y)$$
$$\text{exists } x : \text{Bar}, \text{Pije } x \rightarrow \text{forall } y : \text{Bar}, \text{Pije } y$$

Dowód przebiega analogicznie do dowodu ludzkiego, z tym że kolejność kroków rozumowania musi być zgodna z regułami naturalnej dedukcji: najpierw wskazujemy świadka formuły egzystencjalnej (linia 13 odpowiada punkt j), następnie przechodzimy do dowodu następnika implikacji (linia 14), a na koniec, korzystając z odpowiedniego prawa de Morgana, nazwanego w Coqu `not_ex_not_all`, zamieniamy kwantyfikowany ogólnie cel na formułę, która jest jednym z naszych założeń. To ostatnie spostrzeżenie przekazujemy Coqowi instrukcją **assumption** w linii 16, po której następuje już zamknięcie całego dowodu komendą **Qed**.

W dowodzie ludzkim, korzystając z elastyczności języka naturalnego, można sobie pozwolić na podanie uzasadnienia dla następnika implikacji (punkt h) jeszcze przed wskazaniem świadka dla formuły egzystencjalnej (punkt j).

Na koniec wyjaśnijmy, dlaczego twierdzenie intuicyjnie fałszywe daje się udowodnić. Wynika to z drobnego oszustwa opartego na niejednoznaczności języka naturalnego. Podane twierdzenie w języku polskim rozumiemy intuicyjnie tak: w każdym niepustym barze jest taka osoba, że *zawsze* jeżeli ona pije, to wszyscy piją – co jest oczywistą nieprawdą. Natomiast zdanie to rozumiane w języku matematyki, jak i dowodzona w Coqu formuła logiczna, opisuje (każdą) pojedynczą chwilę. I dlatego, jak pokazują dowody, jest prawdziwe.

Jacek CHRZAŚCZ

Coq można pobrać ze strony <http://coq.inria.fr> (wersja wymagająca instalacji). Eksperymentalna wersja on-line jest dostępna na stronie <https://x80.org/collacoq/>. Po załadowaniu (co może potrwać nawet minutę) w prawym dolnym rogu (Packages) należy kliknąć w chmurkę `coq-base`, powodując załadowanie odpowiedniego pakietu. Następnie do lewego panelu można wpisać treść dowodu w Coqu i poruszać się po nim, używając strzałek w prawym panelu.



## Problem Stopu

Tak zwany Problem Stopu to problem decyzyjny, którego wejściem jest jakiś program  $Q$  i jakieś dane  $D$ , a którego rozwiązaniem (wyjściem) jest stwierdzenie, czy program  $Q$  uruchomiony na danych  $D$  zakończy swoje działania w skończonym czasie.

**Twierdzenie.** *Problem Stopu jest nierozstrzygalny.*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że Problem Stopu jest rozstrzygalny, a więc, że istnieje program  $P(Q,D)$ , który zawsze (a więc w skończonym czasie dla każdego danych) rozstrzyga Problem Stopu. Rozważmy teraz następujący program  $P'$ , którego wejściem jest jakiś inny program  $X$ :

```
boolean P' (program X)
{
  if (P(X, X))
    { while (true) do {}; } //wymuszamy pętlenie się
  else
    { return true; }
}
```

Będziemy się zastanawiać, czy wykonanie  $P'(P')$  zatrzyma się, czy nie.

Najpierw załóżmy, że się zatrzyma. Wtedy oczywiście (z definicji  $P$ )  $P(P',P')$  zwraca `true`. Jednak wówczas z kodu programu  $P'$  (spójrzmy na warunek po `if`) wynika, że  $P'(P')$  się pętli w nieskończoność. Sprzeczność.

Z drugiej strony: załóżmy, że  $P'(P')$  się nie zatrzyma. To jednak (znów analizujemy kod  $P'$ ) implikuje, że  $P(P',P')$  zwraca `true`, ale to przecież oznacza, że  $P'(P')$  się zatrzymuje. Ponownie uzyskaliśmy sprzeczność, co kończy dowód.  $\square$

*Tomasz KAZANA*

## Indukcja pozaskończona

Indukcja pozaskończona wykorzystywana jest w dowodach istnienia różnych obiektów matematycznych. Główną częścią tego typu dowodu jest definicja indukcyjna (inaczej: rekurencyjna) funkcji.

Definicje funkcji przez indukcję pozaskończoną są uogólnieniem rekurencyjnych definicji ciągów. Rekurencyjna definicja ciągu  $(a_n)$  składa się z określenia wyrazu  $a_0$  (lub kilku początkowych wyrazów) tego ciągu, a następnie pokazania, w jaki sposób każdy kolejny wyraz  $a_n$  ( $n > 0$ ) zależy od wyrazów wcześniejszych  $a_i$ ,  $i < n$ . Taką strukturę ma następująca definicja indukcyjna ciągu Fibonacciego:  $a_0 = a_1 = 1$ ,  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  dla  $n > 1$ . Jest intuicyjnie oczywiste, że powyższa definicja w jednoznaczny sposób definiuje ciąg: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

W następnym przykładzie definicja indukcyjna pewnego ciągu posłuży nam do dowodu istnienia funkcji  $f$  ze zbioru liczb wymiernych w liczby wymierne (oznaczane przez  $\mathbb{Q}$ ), która liczby wymierne każdego przedziału  $(s, t)$ , gdzie  $s, t \in \mathbb{Q}$  i  $s < t$ , przekształca na cały zbiór  $\mathbb{Q}$ . Zatem funkcja  $f$  ma mieć tę własność, że dla każdej trójki liczb wymiernych  $(s, t, q)$ , gdzie  $s < t$  (oznaczmy zbiór wszystkich takich trójek przez  $T$ ), istnieje taka liczba  $p \in (s, t) \cap \mathbb{Q}$ , że  $f(p) = q$ .

Skorzystamy z tego, że  $T$  jest zbiorem przeliczalnym, czyli takim, którego elementy można ponumerować liczbami naturalnymi. Innymi słowy, istnieje



### Rozwiązanie zadania F 925.

Każdy foton odbity od płytki dostarcza jej pęd równy  $\Delta p = p_1 - p_2$ , gdzie  $p_1$  to pęd fotonu padającego, a  $p_2$  – pęd fotonu odbitego. Dla powierzchni doskonale odbijającej pędy  $p_1$  i  $p_2$  mają tę samą wartość  $p_1$ , ale różnią się zwrotem, stąd zmiana pędu płytki wynosi  $\Delta p = 2p_1$ . Energia  $W$  padających na płytkę w ciągu 1 s fotonów jest z definicji równa padającej na płytkę mocy  $S$ . Ponieważ pęd  $p$  fotonu wiąże się z jego energią  $W$  wzorem  $p = W/c$ , gdzie  $c$  to prędkość światła, więc suma pędów fotonów padających na płytkę w czasie 1 s wynosi  $S/c$ , a pęd uzyskany przez płytkę w ciągu 1 s wynosi  $2S/c$ . Zmiana pędu płytki w ciągu 1 s, na mocy drugiej zasady dynamiki, jest równa działającej sile, więc  $F = 2S/c$ . Ponieważ wychylenie wahadła wiąże się z siłą wzorem  $\text{tg } \alpha = mg/F$ , znajdujemy, że potrzebna moc to  $S = m \cdot g \cdot \text{tg } \alpha \cdot c/2$  (przyjęliśmy, że dla  $\alpha = 1^\circ$  kąt padania wiązki nie zmienia się). Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy  $S = 300$  W. Dla wiązki światła laserowego o średnicy 1 mm daje to gęstość mocy około  $40 \text{ kW/cm}^2$ , czyli z zakresu gęstości mocy stosowanych w technologiach cięcia i spawania metali.



### Rozwiązanie zadania F 926.

Przy zanurzeniu na szukaną głębokość  $H$  średnia gęstość nurka powinna być równa gęstości wody, a więc jego objętość powinna być równa  $m/\rho = 80$  l, gdzie  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  to gęstość wody. Zmniejszenie objętości ciała o wielkość  $\Delta v = V - m/\rho = 2$  nastąpi – praktycznie biorąc – tylko w efekcie sprężenia powietrza w płucach, którego objętość zmaleje do  $v - \Delta v = 3$  l. Przyjmując, że sprężenie następuje w stałej temperaturze, można zastosować prawo Boyle'a–Mariotte'a:

$$p_0 v = (p_0 + \rho g H)(v - \Delta v),$$

gdzie  $p_0 = 10^5$  Pa to ciśnienie atmosferyczne. Stąd otrzymujemy, że nurek może wypłynąć, nie wykonując żadnych ruchów, z głębokości nieco mniejszej od

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_0}{\rho g} \cdot \frac{\Delta v}{v - \Delta v} = \\ &= \frac{p_0}{\rho g} \cdot \frac{\rho V - m}{m - \rho(V - v)} \approx 7 \text{ m.} \end{aligned}$$

ciąg trójek  $(s_n, t_n, q_n)$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ , którego zbiorem wyrazów jest  $T$ . Za jego pomocą indukcyjnie zdefiniujemy ciąg  $(p_n)$  taki, że  $p_n \in (s_n, t_n) \cap \mathbb{Q}$  oraz  $p_n \neq p_m$  dla wszystkich  $n, m \in \mathbb{N}$ , o ile  $n \neq m$ . Mianowicie, określamy najpierw  $p_0$  jako dowolną liczbę wymierną z przedziału  $(s_0, t_0)$  (np.  $p_0 = \frac{t_0 + s_0}{2}$ ). Następnie, jeśli  $n > 0$  i dane są już wyrazy  $p_i$  dla  $i < n$ , to definiujemy  $p_n$  jako jedną z tych liczb wymiernych przedziału  $(s_n, t_n)$ , które są różne od każdego  $p_i$  dla  $i < n$ . Wybór  $p_n$  jest możliwy, ponieważ w każdym niepustym przedziale otwartym jest nieskończenie wiele liczb wymiernych.

Mając dany ciąg  $(p_n)$ , określamy funkcję  $f$  na wszystkich jego wyrazach jako  $f(p_n) = q_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ . To gwarantuje, że funkcja  $f$  ma żadaną własność: każda trójka  $(s, t, q) \in T$  jest postaci  $(s_n, t_n, q_n)$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$  i wówczas  $p = p_n$  jest tą liczbą wymierną z przedziału  $(s, t)$ , dla której  $f(p) = q$  (na pozostałych liczbach wymiernych, jeśli takie istnieją, można określić wartości funkcji  $f$  jakkolwiek).

Zmodyfikujemy teraz powyższe rozumowanie tak, by uzyskać funkcję  $g$  ze zbioru liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste (oznaczane przez  $\mathbb{R}$ ), która każdy przedział  $(a, b)$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$  i  $a < b$ , przekształca na cały zbiór  $\mathbb{R}$ . Znanych jest wiele dowodów istnienia takiej funkcji. Przedstawimy tu argument oparty na indukcji pozaskończonej.

Niech  $W$  będzie zbiorem wszystkich takich trójek liczb rzeczywistych  $(a, b, y)$ , że  $a < b$ . Jest on nieprzeliczalny, nie możemy więc jego elementów ponumerować liczbami naturalnymi. Skorzystamy jednak z tego, że istnieje (czego nie będziemy tu dowodzić) wygodny z punktu widzenia naszej sytuacji odpowiednik zbioru liczb naturalnych, mianowicie zbiór, który oznaczymy przez  $\mathfrak{c}$ , wraz z relacją  $\preceq$ , ustalającą pewien liniowy porządek jego elementów, o następujących własnościach:

1. Wszystkie elementy zbioru  $W$  można poindeksować za pomocą elementów zbioru  $\mathfrak{c}$ , czyli ustawić w ciąg pozaskończony trójek  $(a_\alpha, b_\alpha, y_\alpha)$ , gdzie  $\alpha \in \mathfrak{c}$ .
2. Jeśli  $\alpha$  jest dowolnym elementem zbioru  $\mathfrak{c}$  oraz  $\{x_\beta : \beta \prec \alpha\}$  jest dowolnym zbiorem złożonym z liczb rzeczywistych, poindeksowanych elementami zbioru  $\mathfrak{c}$ , mniejszymi w sensie porządku  $\preceq$  od  $\alpha$ , to w każdym przedziale  $(a, b)$ , gdzie  $a < b$ , znajdzie się liczba różna od wszystkich liczb  $x_\beta$  dla  $\beta \prec \alpha$ .
3. W każdym niepustym podzbiórze zbioru  $\mathfrak{c}$  istnieje element najmniejszy w sensie porządku  $\preceq$ .

Z pomocą ciągu pozaskończonego  $(a_\alpha, b_\alpha, y_\alpha)$  (zob. warunek 1) przez indukcję pozaskończoną zdefiniujemy taki ciąg pozaskończony  $(x_\alpha)$ , że  $x_\alpha \in (a_\alpha, b_\alpha)$  oraz  $x_\beta \neq x_\alpha$  dla wszystkich  $\alpha, \beta \in \mathfrak{c}$ , o ile  $\beta \neq \alpha$ . Postępujemy zgodnie ze schematem wcześniejszej konstrukcji ciągu  $(p_n)$ . Mianowicie, jeśli  $\mathbf{0}$  oznacza najmniejszy w sensie porządku  $\preceq$  element zbioru  $\mathfrak{c}$  (taki element istnieje na mocy warunku 3), to określamy najpierw  $x_{\mathbf{0}} = \frac{b_{\mathbf{0}} + a_{\mathbf{0}}}{2}$ . Następnie, jeśli  $\mathbf{0} \prec \alpha$  i dane są już wyrazy  $x_\beta$  dla  $\beta \prec \alpha$ , to definiujemy  $x_\alpha$  jako jedną z tych liczb z przedziału  $(a_\alpha, b_\alpha)$ , które są różne od każdego  $x_\beta$  dla  $\beta \prec \alpha$ . Wybór  $x_\alpha$  jest możliwy na mocy warunku 2.

Wymaga jeszcze uzasadnienia, dlaczego opisana powyżej definicja indukcyjna prowadzi do jednoznacznego przypisania wartości  $x_\alpha$  wszystkim  $\alpha \in \mathfrak{c}$ . Nieco upraszczając, gdyby zbiór tych  $\alpha \in \mathfrak{c}$ , którym powyższa definicja indukcyjna nie przypisała wartości, był niepusty, to na mocy warunku 3. istniałby w nim najmniejszy element, powiedzmy  $\alpha_0$ . Wówczas  $\mathbf{0} \prec \alpha_0$ , gdyż wyraz  $x_{\mathbf{0}}$  został zdefiniowany. Ponadto, na mocy definicji  $\alpha_0$  zdefiniowane byłyby wszystkie wyrazy  $x_\beta$  dla  $\beta \prec \alpha_0$ . To jednak – jak widzieliśmy powyżej – umożliwiałoby zdefiniowanie wyrazu  $x_{\alpha_0}$ , co prowadziłoby do sprzeczności z definicją elementu  $\alpha_0$ .

Na koniec, mając dany ciąg pozaskończony  $(x_\alpha)$ , określamy funkcję  $g$  na wszystkich jego wyrazach jako  $g(x_\alpha) = y_\alpha$  dla każdego  $\alpha \in \mathfrak{c}$  (por. warunek 1). Podobnie jak w przypadku funkcji  $f$  to już wystarczy, by funkcja  $g$  miała żadaną własność, co kończy dowód.  $\square$

Piotr ZAKRZEWSKI

## Dwa dowody jednego twierdzenia

Przypomnijmy: zbiory  $A$  i  $B$  są równoliczne, gdy istnieje funkcja różnowartościowa z  $A$  na  $B$  (lub – równoważnie – z  $B$  na  $A$ ).

**Twierdzenie.** *Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych  $\mathbb{N}$ .*

### Dowód przekątniowy

Gwoli jednoznaczności przyjmijmy, że każdą niezerową liczbę z przedziału  $[0, 1]$  reprezentujemy przez jej rozwinięcie dziesiętne, w którym jest nieskończenie wiele cyfr niezerowych (a więc, na przykład,  $1/4$  jest reprezentowana przez  $0,24(9)$ , a nie  $0,25$ ). Wówczas każda liczba rzeczywista z przedziału  $[0, 1]$  ma dokładnie jedną reprezentację dziesiętną. Niech  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  będzie dowolną funkcją z  $\mathbb{N}$  w przedział domknięty  $[0, 1]$ , czyli ciągiem o wyrazach rzeczywistych należących do tego przedziału, i niech  $f(k) = 0, a_{k1}a_{k2}a_{k3} \dots$ , gdzie  $a_{km}$  oznacza  $m$ -tą cyfrę po przecinku liczby  $f(k)$ . Niech dalej

$$b_k = 4, \text{ gdy } a_{kk} \neq 4 \quad \text{oraz} \quad b_k = 5, \text{ gdy } a_{kk} = 4.$$

Wówczas liczba  $b = 0, b_1b_2b_3 \dots$  należy do przedziału  $[0, 1]$  i nie jest wyrazem ciągu  $f$ . Rzeczywiście:  $b \neq f(1)$ , bo  $b_1 \neq a_{11}$ , podobnie  $b \neq f(2)$ , bo  $b_2 \neq a_{22}$  i tak dalej. Ogólniej, dla każdej liczby naturalnej  $k$ ,  $b_k \neq a_{kk}$ , co oznacza, że  $b \neq f(k)$ .

Wobec dowolności wyboru funkcji  $f$  możemy stwierdzić, że nie istnieje funkcja z  $\mathbb{N}$  w  $[0, 1]$ , której zbiór wartości wyczerpywałby przedział  $[0, 1]$ ; tym bardziej nie istnieje funkcja z  $\mathbb{N}$  na całe  $\mathbb{R}$ .  $\square$

### Dowód analityczny

Jak poprzednio, niech  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  będzie dowolną funkcją z  $\mathbb{N}$  w przedział domknięty  $[0, 1]$ , czyli

ciągami o wyrazach rzeczywistych należących do tego przedziału.

Niech  $f(k) = c_k$  dla  $k \in \mathbb{N}$ . Podzielmy przedział  $[0, 1]$  na trzy domknięte podprzedziały o długości  $1/3$  każdy i niech  $[a_0, b_0]$  będzie takim z nich, do którego nie należy  $c_0$ . Tak więc  $[a_0, b_0] \subset [0, 1]$ ,  $b_0 - a_0 = \frac{1}{3}$  oraz  $c_0 \notin [a_0, b_0]$ . Załóżmy, że dla  $k \in \mathbb{N}$  zdefiniowaliśmy już przedział  $[a_k, b_k]$  tak, że  $[a_k, b_k] \subset [0, 1]$ ,  $b_k - a_k = \frac{1}{3^{k+1}}$  oraz  $c_k \notin [a_k, b_k]$ . Wówczas dzielimy przedział  $[a_k, b_k]$  na trzy domknięte podprzedziały równej długości i definiujemy  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$  jako ten podprzedział, do którego nie należy  $c_{k+1}$ . Mamy wtedy:

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k], \quad b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{3^{k+2}}$$

$$\text{oraz } c_{k+1} \notin [a_{k+1}, b_{k+1}].$$

W ten sposób na mocy indukcji otrzymujemy taki ciąg przedziałów  $[a_n, b_n]$ , że dla każdej liczby naturalnej  $n$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [0, 1], \quad b_n - a_n = \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$\text{oraz } c_n \notin [a_n, b_n].$$

Ciąg  $(a_n)$  jest niemalejący i ograniczony z góry przez 1, ciąg  $(b_n)$  jest nierosnący i ograniczony z dołu przez 0, zatem oba te ciągi są zbieżne i mają wspólną granicę, gdyż ciąg  $(b_n - a_n)$  dąży do 0; nazwijmy ją  $c$ . Ponadto dla każdej liczby naturalnej  $n$ ,  $c \in [a_n, b_n]$ , podczas gdy  $c_n \notin [a_n, b_n]$ . Wniosek:  $c \neq c_n$  dla każdego  $n$ .

Tak więc nie istnieje funkcja z  $\mathbb{N}$  w  $[0, 1]$ , której zbiór wartości wyczerpywałby przedział  $[0, 1]$ ; tym bardziej nie istnieje funkcja z  $\mathbb{N}$  na całe  $\mathbb{R}$ .

Wiktor BARTOL



**Rozwiązanie zadania M 1527.** Aby udowodnić równoważność, wykażemy osobno dwie implikacje.

Ponumerujmy osoby obecne na przyjęciu liczbami od 1 do  $n$  oraz oznaczmy liczbę wszystkich powitań przez  $M = n(n-1)/2$ . Niech  $\kappa_m$  będzie permutacją zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ , która liczbie  $i$  przyporządkowuje numer osoby, mającej na głowie kapelusz  $i$ -tej osoby po  $m$ -tym powitaniu. Mamy więc  $\kappa_0 = \text{id}$  oraz  $\kappa_\ell = (i j)\kappa_{\ell-1}$ , gdzie  $(i j)$  jest transpozycją, a  $i, j$  to numery osób uczestniczących w  $\ell$ -tym powitaniu.

Wobec tego  $\kappa_M$  jest iloczynem  $M$  transpozycji (wszystkich możliwych par elementów zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ ). Z drugiej strony, w myśl warunków zadania,  $\kappa_M = \text{id}$ . Ponieważ identyczność jest permutacją parzystą, więc wynika z tego, że  $2 \mid M$ , skąd uzyskujemy  $4 \mid n(n-1)$ . To oznacza, że jeżeli opisana sytuacja jest możliwa, to  $n$  daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4.

Aby uzasadnić, że dla każdego  $n$  dającego resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4 istnieje kolejność powitań prowadząca do opisanej w treści zadania sytuacji, przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Jeżeli  $n = 4$ , to bezpośrednio sprawdzamy, że

$$(2\ 3)(1\ 4)(2\ 4)(1\ 3)(3\ 4)(1\ 2) = \text{id},$$

więc wystarczy, że najpierw przywitają się osoby 1 i 2, potem 3 i 4 itd.

Przypuśćmy, że dla pewnego  $n = 4k$  mamy odpowiednią kolejność powitań, czyli odpowiedni iloczyn transpozycji. Aby uzyskać odpowiednią kolejność dla  $n+1 = 4k+1$ , dokonajmy następujących zmian w tym iloczynie:

$$(i\ i+1) \mapsto (n+1\ i)(i\ i+1)(n+1\ i+1)$$

dla  $i = 1, 3, 5, \dots, n-1$ . W ten sposób uzupełniliśmy iloczyn o  $n$  transpozycji (odpowiadających powitaniom z „nową” osobą numer  $n+1$ ) i łatwo sprawdzić, że warunki zadania dla nowej kolejności są spełnione.

Z kolei aby uzyskać odpowiednią kolejność dla  $n+4 = 4(k+1)$  osób, dokonujemy podobnych zmian:

$$(i\ i+1) \mapsto (n+4\ i)(n+3\ i)(n+2\ i)(n+1\ i)(i\ i+1)(n+1\ i+1) \\ (n+2\ i+1)(n+3\ i+3)(n+4\ i+4)$$

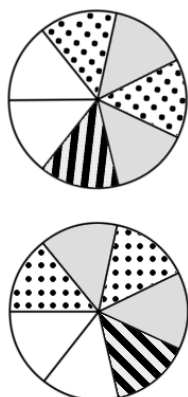
dla  $i = 1, 3, 5, \dots, n-1$  oraz dołączamy (w dowolnym miejscu) zestaw sześciu kolejno po sobie następujących powitań czterech nowych osób:

$$(n+2\ n+3)(n+1\ n+4)(n+2\ n+4)(n+1\ n+3)$$

$$(n+3\ n+4)(n+1\ n+2).$$

W ten sposób rozszerzyliśmy kolejność powitań w taki sposób, że znów po nastąpieniu wszystkich każdy ma znów swój kapelusz przy  $4(k+1)$  osobach. To kończy dowód indukcyjny.  $\square$

Zaprezentowane tu rozumowanie pochodzi z książki Henryka Pawłowskiego pt. „Kółko Matematyczne dla Olimpijczyków”, która dla autora tego tekstu jest po prostu ważna.



## Małe Twierdzenie Fermata

**Twierdzenie.** Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  oraz dowolnej liczby pierwszej  $p$  liczba  $n^p - n$  dzieli się przez  $p$ .

*Dowód.* Będziemy rozważać „koła fortuny” o  $p$  segmentach. Pytamy, ile istnieje różnych takich kół, przy założeniu, że mamy dostępne  $n$  kolorów. Oczywiście, gdyby koło było nieruchome, mielibyśmy  $n^p$  takich kół (każdy z  $p$  segmentów kolorujemy niezależnie na jeden z  $n$  kolorów).

Gdy uwzględniamy możliwość obracania koła, zauważamy, że metoda podana wyżej nie może być poprawna, bo niektóre koła liczone są więcej niż raz. Konkretniej: prawidłowo (a więc jednokrotnie) liczone są tylko koła jednobarwne. Natomiast każde koło niejednobarwne liczone jest dokładnie  $p$  razy — każdy kolejny obrót o jeden segment daje inny obrazek (dlaczego?).

Skoro kół jednobarwnych jest  $n$ , to różnych kół niejednobarwnych liczonych przy założeniu nieruchomości jest  $n^p - n$ . To oznacza, że różnych prawdziwych (obrotowych) niejednobarwnych kół fortuny jest dokładnie  $\frac{n^p - n}{p}$ . Ostatnia liczba jest, oczywiście, całkowita, a to kończy dowód tezy.  $\square$

**Wniosek:** jeśli  $n$  nie dzieli się przez liczbę pierwszą  $p$ , to zachodzi  $p \mid n^{p-1} - 1$ . Czasem sam ten wniosek nazywa się Małym Twierdzeniem Fermata.

Tomasz KAZANA

## Interpretacja kombinatoryczna

W tym artykule chcemy zaprezentować pewną technikę dowodową zwaną *interpretacją kombinatoryczną*. Metoda ta pokazana będzie w działaniu: podajemy dwa zadania wraz z rozwiązaniami, które są ilustracją tematu.

1. Wyznacz liczbę podzbiorów zbioru  $\{1, \dots, 3n\}$ , które nie zawierają dwóch liczb różniących się o  $n$ .

ODP. Dla każdego  $i \in \{1, \dots, n\}$  jest dokładnie pięć możliwości opisujących, które z liczb  $i, i + n, i + 2n$  należą do podzbioru spełniającego warunek zadania. Mianowicie:

- (a) żadna z nich nie należy;
- (b) tylko  $i$  należy;
- (c) tylko  $i + n$  należy;
- (d) tylko  $i + 2n$  należy;
- (e) liczby  $i$  oraz  $i + 2n$  należą (natomiast  $i + n$  nie należy).

Ponieważ dla różnych  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  możliwości te są niezależne, to liczba szukanych podzbiorów wynosi  $5^n$ .

2. Udowodnij tożsamość  $\sum_k \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$  ( $F_n$  oznacza  $n$ -tą liczbę Fibonacciego, czyli rozwiązanie równania rekurencyjnego  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  dla  $n \geq 2$ , a zarazem liczbę pokryw paska  $1 \times (n - 1)$  kwadratami  $1 \times 1$  i prostokątami  $1 \times 2$ ).

ODP. Zgodnie z uwagą wyżej, prawa strona to liczba pokryw paska  $1 \times (2n - 1)$  kwadratami  $1 \times 1$  i prostokątami  $1 \times 2$ . Każde takie pokrycie musi zawierać co najmniej  $n$  elementów, w tym co najmniej jeden kwadrat. Jeśli w pokryciu wśród pierwszych  $n$  elementów jest dokładnie  $k$  kwadratów ( $i - k$  prostokątów  $1 \times 2$ ), to można je rozmieścić na  $\binom{n}{k}$  sposobów i pokrywają one w sumie prostokąt  $1 \times (k + 2(n - k))$ . Pozostały fragment paska  $1 \times (k - 1)$  można pokryć na  $F_k$  sposobów. Tę drugą interpretację opisuje lewa strona tożsamości, stąd teza.  $\square$

Adam MALINOWSKI



## W dowodzie (chyba) był błąd

Tomasz z Akwinu (1225–1274), jeden z najznakomitszych teologów w historii Kościoła, kanonizowany w 1323 roku.

Jego najważniejsze dzieło *Summa Theologiae* (1268–1273) od pontyfikatu Leona XIII (1878–1903) uznane jest za fundamentalne dla teologii katolickiej.

Jan z Damaszku (675–749), ostatni wspólny teolog i święty katolików i prawosławnych. Jego także Leon XIII podniósł do godności doktora Kościoła.

Arystoteles wyjaśnia to na przykładzie kamiennego posągu: jego przyczyną materialną jest kamień. Podobnie, aby dać przykład nieco bardziej współczesny, materialną przyczyną *Delty* jest papier o gramaturze 80 g i farba drukarska.

W przypadku posągu przyczyną formalną jest jego kształt, w przypadku *Delty* – treść jej artykułów.

Dla posągu przyczyną sprawczą jest rzeźbiarz lub on i zamawiający, a ściślej decyzja rzeźbiarza, by wykonać posąg. Przyczynę sprawczą *Delty* redakcja nam wykreśliła. Przyczyną celową posągu jest ozdobienie parku, a w przypadku *Delty*? – to pozostawmy Czytelnikom.

Sławny problem „ile diabłów mieści się na ostrzu szpilki” istotnie był rozpatrywany, z tym że takie sformułowanie problemu jest już dziełem renesansowych prześmiewców. Poważnie problem ten rozpatrywał Tomasz z Akwinu w *Summa Theologiae*, część II (*O aniołach*), rozdział LII §3: *Czy wielu aniołów może być równocześnie w tem samym miejscu?*

Niektórych Czytelników może zaskoczyć ta zmiana: chodzi ostatecznie o diabły czy anioły? Nie ma tu żadnej zmiany! Każdy diabeł jest również aniołem, jak to wynika z tego, co pisze wspomniany Tomasz z Akwinu, zwany z racji swej wiedzy o aniołach Doctor Angelicus, w rozdziale LXII §1 oraz LXIII §8 i §9.

Dużo poważniejsza zmiana mogła umknąć uwagi wielu Czytelników: w jednym sformułowaniu mówi się o ostrzu szpilki, a w drugim o miejscu. Jest to różnica bardzo istotna: ostrze szpilki ma symbolizować punkt, natomiast o pojęciu miejsca Akwinas mówi (LII, §2): *Jednak co do tego pomylili się niektórzy. Jedni bowiem, nie potrafiąc wyjść poza wyobrażnię, przypuścili niepodzielność anioła na sposób niepodzielności punktu i dlatego myśleli, że anioł może być tylko w miejscu, które jest punktem. Lecz jest oczywiste, że się omylili; punkt bowiem jest czymś niepodzielnym, mającym położenie, lecz anioł jest niepodzielny istniejąc poza rodzajem ilości i położenia. Stąd nie potrzeba, by anioł miał określone jedno miejsce niepodzielne co do położenia, lecz czy to podzielne, czy niepodzielne, czy większe, czy mniejsze, według tego, jak z wolnej woli stosuje swą moc do ciała większego lub mniejszego. W tej sytuacji przez miejsce będziemy rozumieli dowolny podzbiór trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.*

Gdy będziemy rozpatrywać, ilu aniołów może być w jednym miejscu, musimy wiedzieć, co to znaczy, że anioł jest w jakimś miejscu. Doctor Angelicus mówi (*ibidem*):

... anioł jest w miejscu, przez zastosowanie swej mocy do tego miejsca,...

Jeszcze dobitniej wyraża tę myśl Damascen (*II de Fid. Orth. cap. 3*):

... gdzie anioł działa, tam jest.

Tomasz powołuje się zresztą (LII §2) na ten cytat. Możemy zatem powiedzieć:

**(1) Anioł jest w miejscu  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest przyczyną zdarzeń zachodzących w tym miejscu.**

Na tytułowe pytanie Akwinas odpowiada następująco (*ibidem* §3):

... **dwaj aniołowie nie istnieją równocześnie w tem samym miejscu.**

Do takiego wniosku doprowadza go (*ibidem*) następujące rozumowanie:

(\*) *A ta jest tego przyczyna, że jest niemożliwym, by dwie przyczyny zupełne były bezpośrednimi przyczynami jednej i tej samej rzeczy. Jest to jasnym w każdym rodzaju przyczyn...*

Aby wyjaśnić szczegóły tego rozumowania, wyjaśnić owo *Jest jasnym...*

zajrzyjmy do Arystotelesa (*Fizyka* II §3, str. 194b–195a), gdzie znajduje się klasyfikacja przyczyn. Filozof podaje tam następujące przyczyny:

1) **Przyczyna materialna** – ma to być materia, z której zrobiony jest skutek. Oczywiście

**(2) anioł nie może być przyczyną materialną zjawisk cielesnych, ponieważ sam jest niecielesny.**

Tomasz w zapowiedzi rozdziału L pisze: *Następnie należy rozważać [...] o stworzeniu czysto duchowem, które w Piśmie Św. nazywa się aniołem,...*

2) **Przyczyna formalna** – ma to być forma, jaką przybiera skutek.

**(3) Anioł nie może być przyczyną formalną zjawisk cielesnych.**

3) **Przyczyna sprawcza** – jest to istota lub zjawisko, które powoduje skutek.

4) **Przyczyna celowa** – jest to to, po co zdarzenie zachodzi.

Wróćmy do Tomaszowego rozumowania. Mamy zatem wykazać, że w dowolnym miejscu może być tylko jeden anioł, czyli musimy wykazać, że jeśli anioły  $A_1$  i  $A_2$  są w miejscu  $X$ , to  $A_1 = A_2$ , czyli że  $A_1$  i  $A_2$  to ten sam anioł.

Założmy, że  $A_1$  i  $A_2$  są w miejscu  $X$ . Oznacza to po prostu, że anioły  $A_1$  i  $A_2$  są przyczynami zjawisk zachodzących w miejscu  $X$ . Wobec założeń **(2)** i **(3)** możliwe są trzy przypadki, oznaczmy je a), b) i c).

a) Oba anioły są przyczynami sprawczymi.

Ten przypadek zdaje się wynikać ze słowa *zupelny* w cytacie (\*). Jak się zdaje, Tomasz przyjmuje w tym miejscu założenie:

(4) Jeśli anioł  $A_1$  jest przyczyną sprawczą zdarzeń w miejscu  $X$ , a anioł  $A_2$  jest przyczyną sprawczą w tym samym miejscu, to  $A_1$  i  $A_2$  są tym samym aniołem.

b) Oba anioły są przyczynami celowymi.

W tym przypadku rozumowanie opiera się o pewne prawa działań celowych:

(5) Każde działanie jest celowe.

(6) Każde działanie ma tylko jeden cel.

Gdyby zatem różne anioły były przyczynami celowymi zdarzeń w miejscu  $X$ , musiałyby odbywać się w miejscu  $X$  dwa działania, a więc dwaj aniołowie musieliby być przyczynami sprawczymi w miejscu  $X$ . Możliwość ta została wykluczona w przypadku a).

c) Jeden z aniołów jest przyczyną sprawczą, a drugi celową.

Jak nam się wydaje, przypadek ten został przez Akwinatę przeoczony. Przyjęcie odpowiedniego założenia nie jest dostatecznie uzasadnione tekstem *Summa Theologiae*. Być może więc Doctor Angelicus popełnił w tym miejscu błąd w rozumowaniu.

Marcin MOSTOWSKI, Lesław W. SZCZERBA  
Jest to nieznaczący skrót artykułu z *Delty* 12/1979.

## Na ścieżce rezolucji

Naszą wiedzę o zjawiskach lub przedmiotach wygodnie jest zapisywać w postaci koniunkcji wyrażanej za pomocą spójnika „i” (np. w ten sposób można powiedzieć, że kaczki mają skrzydła i latają). Niestety, taki format nie sprawdza się dobrze, gdy nasz słownik do opisu rzeczywistości jest niepełny, a własności zmieniają się w zależności od obserwacji (np. jeśli nie mamy w słowniku możliwości mówienia o młodych kaczkach, a widzimy, że takie nie latają, to pozostaje nam opisać tę rzeczywistość stwierdzeniem korzystającym z alternatywy wyrażanej za pomocą spójnika „lub”: kaczka lata lub nie lata i ma skrzydła). Ujmując to symbolicznie, możemy przyjąć, że wiedzę wygodnie się zapisuje w formie koniunkcji alternatyw

$$(\varphi_1^1 \vee \dots \vee \varphi_{i_1}^1) \wedge \dots \wedge (\varphi_1^n \vee \dots \vee \varphi_{i_n}^n)$$

gdzie każde z  $\varphi_j^i$  jest *literalem*, czyli albo *zdaniem atomowym* (inaczej zwanym *faktem*), albo zaprzeczeniem zdania atomowego. Taką postać zdania logicznego nazywamy *koniunkcyjną postacią normalną*. Tego rodzaju wyrażenia można też zapisać w postaci

$$\{\varphi_1^1, \dots, \varphi_{i_1}^1\}, \dots, \{\varphi_1^n, \dots, \varphi_{i_n}^n\}$$

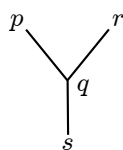
zwanej *klauzulową postacią* formuły, przy czym wyrażenia  $\{\varphi_1^j, \dots, \varphi_{i_j}^j\}$  nazywa się *klauzulami*.

Zbudujmy teraz małą *bazę faktów* (którą można też nazywać *bazą danych*) ujętych w postaci klauzul. Ta nasza baza będzie opisywała widoczny tu obok graf złożony z czterech wierzchołków  $p, q, r, s$  oraz trzech krawędzi  $(p, q), (r, q), (s, q)$ . Będziemy starali się w tym grafie wypatrzyć ścieżkę Hamiltona (której tam zresztą nie ma). Dla tych, którzy nie wiedzą, albo nie pamiętają: *ścieżka Hamiltona* to ciąg wszystkich wierzchołków grafu, w którym (1) każde kolejne wierzchołki są połączone krawędzią, (2) nie mogą występować powtórzenia. Baza będzie operowała faktami postaci  $p_i, q_i, r_i, s_i$ , które oznaczają, że odpowiedni wierzchołek znajduje się na  $i$ -tym miejscu hipotetycznej ścieżki Hamiltona. Oto jak wygląda zawartość bazy:

- $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{r_1, r_2, r_3, r_4\}, \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$   
(każdy wierzchołek musi się pojawić na ścieżce),
- $\{\neg p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, \neg p_3\}, \dots, \{\neg p_3, \neg p_4\}, \dots, \{\neg s_3, \neg s_4\}$   
(żaden wierzchołek nie pojawia się na ścieżce dwa razy),
- $\{p_1, q_1, r_1, s_1\}, \{p_2, q_2, r_2, s_2\}, \{p_3, q_3, r_3, s_3\}, \{p_4, q_4, r_4, s_4\}$   
(każda pozycja na ścieżce musi być zajęta),

Tu warto poszperać w Internecie na temat angielskojęzycznego terminu *duck typing*.

Wiadomo, że zapis klauzulowy ma charakter pełny – wszystkie zdania klasycznego rachunku zdań dają się równoważnie zapisać w koniunkcyjnej postaci normalnej, a więc w postaci klauzulowej.



4.  $\{\neg p_1, \neg q_1\}, \dots, \{\neg r_1, \neg s_1\}, \dots, \{\neg r_4, \neg s_4\}$   
(żadne dwa różne wierzchołki nie zajmują tego samego miejsca w ciągu),
5.  $\{\neg p_1, \neg r_2\}, \{\neg p_1, \neg s_2\}, \{\neg p_2, \neg r_3\}, \{\neg p_2, \neg s_3\}, \{\neg p_3, \neg r_4\}, \{\neg p_3, \neg s_4\}, \dots, \{\neg s_3, \neg r_4\}$   
(wierzchołki niepołączone krawędzią nie mogą sąsiadować na ścieżce).

Przedstawiona tutaj konstrukcja da się uogólnić tak, by dała dowód tzw. redukcji problemu braku ścieżki Hamiltonowskiej do problemu dowodliwości w rachunku zdań. Oba problemy należą do klasy tzw. problemów co-NP-zupełnych. Dla problemów z tej klasy nie są znane algorytmy rozwiązujące je w czasie wielomianowym.

Możemy teraz pobawić się jej zawartością. Do tego wykorzystamy *regulę rezolucji*, która ma następującą postać:

$$\frac{\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \neg p, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n\}, \{\psi_1, \dots, \psi_{l-1}, p, \psi_{l+1}, \dots, \psi_m\}}{\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_{l-1}, \psi_{l+1}, \dots, \psi_m\}}$$

Powyższe wzory mają następujące znaczenie: Jeśli w bazie faktów mamy dwie klauzule, z których jedna zawiera fakt, a druga jego negację, to można te klauzule połączyć, pozbywając się przy tym owego faktu i jego negacji. Nowo powstała klauzula jest dokładana do bazy. Istotę działania tej reguły łatwiej zrozumieć, jeśli uświadomimy sobie, że w logice klasycznej formuła  $\neg p \vee \text{RESZTA}$  jest równoważna implikacji „jeśli  $p$ , to RESZTA”. Taką właśnie postać ma pierwsza przedstawiona jawnie klauzula w regule rezolucji. Skoro zatem w drugiej klauzuli mamy w alternatywie  $p$ , to zastąpienie tegoż przez coś, co z  $p$  wynika, powinno dać wniosek spójny z dotychczasową wiedzą.

Spójne z naszym rozumieniem powyższej bazy faktów byłoby dojście do sprzeczności, która w formalizmie klauzulowym jest reprezentowana jako pusta klauzula  $\{\}$ . Można zatem teraz postawić konkretne zadanie: jak za pomocą rezolucji dojść do bazy danych, w której będziemy mieli taką pustą klauzulę?

Gdybyśmy mieli przeprowadzić rozumowanie udowadniające brak ścieżki Hamiltonowskiej, zapewne postąpilibyśmy jakoś tak. Gdyby ścieżka zaczynała się od  $p$ , wiodłaby do  $q$ , a potem do  $r$  lub  $s$ . W pierwszym przypadku nie moglibyśmy dojść do  $s$ , w drugim nie moglibyśmy dojść do  $r$ . Zatem ścieżka Hamiltonowska nie mogłaby się zaczynać od  $p$ . Ze względu na symetrię grafu analogiczny argument zadziała dla  $r$  i  $s$ . Gdyby ścieżka zaczynała się od  $q$ , to prowadziłaby po pierwszym kroku do  $p$ ,  $r$  lub  $s$ . W każdym z tych przypadków nie mogłaby dojść do innych wierzchołków, w szczególności odpowiednio do  $r$ ,  $s$  i  $p$ . Skoro rozważyliśmy wszystkie możliwe początki i dla żadnego z nich ścieżki nie było, to taka ścieżka nie istnieje.

Tego rodzaju rozumowania nie da się uprościć (zmniejszyć liczby analizowanych przypadków) za pomocą reguły rezolucji, bo nie pozwala ona na uwzględnienie symetrii. Zatem dowód z niej korzystający będzie musiał rozważyć bezpośrednio wszystkie przypadki. Jest ich dużo, spróbujmy jednak je sobie przynajmniej w części wyobrazić.

Dla zmęczonych ręcznym poszukiwaniem klauzuli: na stronie [logictools.org](http://logictools.org) znajduje się automat, który korzystając z zasady rezolucji, dochodzi do oczekiwanej tutaj sprzeczności.

W powyższym szkicu istotne znaczenie ma sytuacja, gdy stwierdzamy, że nie może być ścieżki postaci  $p, q, r, s$ . Wiedza ta jest opisywana klauzulą  $\{\neg p_1, \neg q_2, \neg r_3, \neg s_4\}$ . Spróbujmy zobaczyć, jak ją uzyskać. Możemy wyjść z klauzuli  $\{p_2, q_2, r_2, s_2\}$  z grupy (3) i użyć rezolucji z klauzulą  $\{\neg p_1, \neg r_2\}$  z grupy (5). Uzyskamy w ten sposób  $\{\neg p_1, p_2, q_2, s_2\}$ . Następne dwa kroki polegające na połączeniu klauzul  $\{\neg p_1, \neg s_2\}, \{\neg p_1, \neg p_2\}$  z kolejnymi klauzulami wynikowymi doprowadzają nas do  $\{\neg p_1, q_2\}$ . Nieco inną drogą z  $\{p_2, q_2, r_2, s_2\}$  dostajemy  $\{q_2, \neg r_3\}$ , zaś z  $\{p_3, q_3, r_3, s_3\}$ , klauzulę  $\{\neg s_4, q_3\}$ . Tak uzyskane trzy klauzule połączone przez rezolucję z  $\{\neg q_2, \neg q_3\}$  z grupy (2) dadzą oczekiwaną  $\{\neg p_1, \neg q_2, \neg r_3, \neg s_4\}$  (tu trzeba zwrócić uwagę, że klauzule są zbiorami, więc możemy skorzystać z trzech kopii  $\neg q_2$  w klauzuli  $\{\neg q_2, \neg q_3\}$ ).

Jak widać, za pomocą małych kroczków rezolucji da się wykonywać większe kroki rozumowania. Jest to żmudne i wymaga nieco pomysłowości (chwilę trzeba pomyśleć, aby zgadnąć, od której klauzuli zacząć; a tak przy okazji: ciekawą łamigłówką jest pytanie, jak dojść do klauzuli mówiących, że nieemożliwe są ścieżki startujące od  $q$ ; jeszcze ciekawszą – jak wykonać za pomocą przedstawionych tutaj klauzul mówiących o braku ścieżek, ostatni krok, dochodzący do sprzeczności). To wada, ale zaletą jest prostota metody – łatwo to zaprogramować. Ze żmudnością komputery jakoś sobie radzą. Stąd metoda rezolucji jest jedną z podstawowych technik w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

Aleksy SCHUBERT



Koło Naukowe Statystyki  
Matematycznej GAUSS z Wydziału  
Matematyki Politechniki Wrocławskiej  
organizuje już VII edycję konkursu

### NOMAD

Niezależne Ogólnopolskie Mistrzostwa  
w Analizie Danych.

Celem konkursu jest zwrócenie uwagi  
uczestników na ciekawe zagadnienie,  
jakim jest statystyczna analiza danych  
i jej zastosowania.

Udział w tym konkursie mogą wziąć  
trzyosobowe zespoły uczniów lub  
studentów.

Mistrzostwa przebiegają w dwóch  
etapach. Pierwszy jest internetowy  
(27 V 2017), a drugi – dla najlepszych  
8 drużyn uczniowskich i 8 studenckich  
– na Politechnice Wrocławskiej  
(10 VI 2017).

[nomad.im.pwr.wroc.pl](http://nomad.im.pwr.wroc.pl)

Rejestracja spotkań, o których piszę,  
znajduje się na stronie domowej Centrum  
Nauki Kopernik.

## Geny i medycyna

Kilka kolejnych spotkań w Centrum Nauki Kopernik pod wspólnym tytułem „Drogi do życia” poświęcono konfrontacjom współczesnych nauk molekularnych w zakresie biologii z postęпами medycyny w dość węzłowych kwestiach: nowotwory, krew i odporność, szczepienia ochronne i antybiotyki, genetyczne podstawy chorób, w tym neurologicznych, i wreszcie perspektywy leczenia i regeneracji rdzenia kręgowego. Przywołując pamięć o tych spotkaniach, czuję, że dotknięto naprawdę ważnych zagadnień, szczegółów różnorodnych rozwiązań. Mówiono także o nadziei.

Najogólniej – sumując wrażenia – utrwalił mi świadomość, że większość, właściwie wszystkie nasze dolegliwości i choroby, mają albo jako przyczynę, albo jako tło – geny. Nic w tym dziwnego, bo „nie ma życia” – ani na poziomie komórki, ani narządu, ani organizmu – bez działających genów. Póki działają prawidłowo, to zupełnie o nich nie myślimy. Kłopot zaczyna się wtedy, kiedy one mają kłopoty.

Geny mogą ulegać bardzo różnorodnym uszkodzeniom (zmianom chemicznym). I wtedy komórka przystępuje do ich naprawiania. Są różne uszkodzenia i są różne systemy naprawcze. System – to układ enzymów, które albo usuwają uszkodzony fragment, albo przywracają jego stan prawidłowy. Systemy w komórkach człowieka naprawiają stale tysiące powstających w ciągu dnia uszkodzeń. Nienaprawione uszkodzenie, przekazywane po podziałach komórkowych do komórki potomnej – to może być początek zjawiska, który po 10 latach lekarz nazwie nowotworem. Zadziwiające – ile trzeba różnorodnych reakcji komórkowych, aby się to źle dla nas kończyło. Jak się tego słucha, spokojnie opowiedzianego przez specjalistę, to dziw bierze, że w ogóle finalnie rozwija się choroba. W przypadku raka płuc, trwa to 10–15 lat, dla nas w utajeniu!

Z genami mamy do czynienia, chorując na choroby zakaźne. Geny „gospodarza” związane z układem odpornościowym usiłują zwalczyć atakującego patogena. Patogen – bakteria, wirus, grzyb – usiłuje umknąć przed tą obroną. Właśnie jestem w stadium wychodzenia z obrzydliwego „zaziębienia”, kaszląc i kichając – nie dałam sama rady. Ale dostałam antybiotyk (o tym też słuchałam w programie „Drogi”) i w tym przypadku antybiotyk pomógł. Z tym że wykładowca powiedział, o czym wielokrotnie słyszeliśmy z różnych źródeł, iż era antybiotyków jako skutecznych leków przeciwbakteryjnych właśnie dobiega końca w wyniku wspaniale pomyślanych przez naturę sposobów obronnych bakterii i niefrasobliwego nadużywania antybiotyków przez nas, „mądrych” ludzi.

Skoro już wszyscy wiemy, że o wszystkim decydują geny, to często dowiadujemy się z mediów, że właśnie znaleziono gen „na coś”. Sama stykałam się z pytaniami o gen „na otyłość”, gen „na inteligencję”. W miarę rosnącej bezradności w stosunku do chorób mózgu oczekujemy odkrycia genów na przykład „na”: schizofrenię. . . Nawet nie czytając tekstów naukowych, mogę ze 100% pewnością odpowiedzieć, że takich pojedynczych genów nie ma. Są wielkie, skomplikowane, czasem z tysięcy genów składające się sieci, sprzyjające inteligencji (cokolwiek by to miało znaczyć) czy otyłości. Odnosząc się do wykładu na „Drogach”, spojrzałam do kilku bieżących prac dotyczących schizofrenii.

Praca z 2012 r.: . . . od głębokiego zrozumienia genetyki schizofrenii do możliwości przewidywania. . .

Praca z 2014 r.: . . . przebadano 108 obszarów genomu związanych ze schizofrenią. . .

Praca z 2016 r.: . . . pewien gen rozjaśnia rozumienie mechanizmów schizofrenii. . .

Praca z 2017 r.: Przebadano genomy 41 321 osobników (połowa to zdrowi).

U chorych występują częstsze niż u zdrowych powtórzenia grup genów.

W badaniach uczestniczyły 173 ośrodki naukowe, nie widziałam sensu w liczeniu autorów, musiało być ich ponad 1000.

Kiedyś schizofrenię, podobnie jak chorobę Alzheimera, parkinsonizm, stwardnienie rozsiane, zrozumiemy na podstawie analiz genetycznych i warunków im towarzyszących. Na razie pozostaje nam bezradne rozłożenie rąk specjalistów. Tym, w odróżnieniu od kolorowych magazynów, należy wierzyć.

Magdalena FIKUS



## Informatyczny kącik olimpijski (104): Obcy

W tym odcinku prezentujemy najtrudniejsze zadanie z zeszłorocznej Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej.

Nad obcą planetą ma przelecieć statek badawczy, którego załoga chce sfotografować interesujące obszary planety. Na powierzchnię planety naniesiono kwadratową siatkę o rozmiarach  $m \times m$  podzieloną na pola rozmiaru  $1 \times 1$ . Statek badawczy będzie poruszać się nad *główną przekątną* tej siatki, to znaczy od lewego górnego do prawego dolnego rogu. Każde wykonane zdjęcie obejmie kwadratowy obszar, który składa się z pewnej liczby całych pól i którego przekątna leży na głównej przekątnej całej siatki. Na potrzeby opisu każdy taki kwadratowy obszar nazwiemy *poprawnym kwadratem*.

Danych jest  $n$  interesujących pól. Naszym celem jest tak zaplanować wykonanie  $k$  zdjęć, by każde interesujące pole zostało sfotografowane. Dodatkowo naszym celem jest zminimalizowanie kosztu rozwiązania, za który przyjmujemy łączną liczbę sfotografowanych pól, przy czym wielokrotnie sfotografowane pola liczymy tylko raz. Wartości  $n$ ,  $m$  i  $k$  są rzędu 100 000.

Zacznijmy od prostego spostrzeżenia. Rozważmy pewne interesujące pole  $r$  i najmniejszy poprawny kwadrat  $t$ , który je zawiera. Wówczas poprawne kwadraty zawierające pole  $r$  to dokładnie te, których główna przekątna zawiera główną przekątną  $t$ .

Dzięki takiemu spojrzeniu nasz problem staje się poniekąd jednowymiarowy. Każde interesujące pole wyznacza pewien przedział na prostej zawierającej główną przekątną siatki. Łącznie danych jest  $n$  takich przedziałów. Naszym celem jest zaznaczenie  $k$  odcinków na tej prostej (każdy odcinek wyznacza jeden sfotografowany obszar) w taki sposób, by każdy przedział był w pełni zawarty w jednym z odcinków. Technicznie rzecz biorąc, przedział i odcinek na prostej to to samo, jednak dla jednoznaczności dane odcinki będziemy nazywać przedziałami. Nieco trudniej wyrazić w tym języku wartość, którą powinniśmy zminimalizować – do tego problemu wrócimy za chwilę.

Zauważmy teraz, że jeśli jeden z danych przedziałów  $x$  zawiera się w innym przedziale  $y$ , przedział  $x$  możemy usunąć z danych wejściowych. Usuwamy więc zbędne przedziały, a następnie sortujemy pozostałe przedziały rosnąco względem ich lewych końców. Dzięki wykonaniu pierwszego kroku przedziały będą posortowane również względem swoich prawych końców.

Teraz czas na pierwsze rozwiązanie zadania. Oznaczmy lewe końce przedziałów przez  $l_1, \dots, l_n$  a prawe przez  $p_1, \dots, p_n$ . Skorzystamy z metody programowania dynamicznego. Oznaczmy przez  $d[i][j]$  minimalny koszt pokrycia pierwszych  $i$  przedziałów za pomocą  $j$  odcinków.

Zastanówmy się, jak skonstruowane jest rozwiązanie odpowiadające wartości  $d[i][j]$ . Pokrywamy  $q$  pierwszych przedziałów (dla pewnego  $q$ ) za pomocą  $j - 1$  odcinków, a przedziały od  $q + 1$  do  $i$  musimy pokryć osobnym odcinkiem. Wartość  $q$  jest, oczywiście, dobrana tak, by zminimalizować koszt. Stąd, dla  $j \geq 1$  otrzymujemy

$$d[i][j] = \min_{0 \leq q < i} d[s][j - 1] + (p_i - l_{q+1})^2 - \max(0, (p_q - l_{q+1})^2),$$

gdzie ostatni składnik odpowiada za odjęcie pól sfotografowanych wielokrotnie. Poza tym przyjmujemy  $d[0][0] = 0$ ,  $d[i][0] = \infty$  dla  $i > 0$  oraz  $p_0 = l_1$ . Za pomocą

tego wzoru możemy wyznaczyć wartość  $d[n][k]$  i gotowe. Problem w tym, że to rozwiązanie działa zdecydowanie zbyt wolno. W szczególności, jeśli minimum obliczać będziemy w czasie liniowym od  $i$ , to otrzymamy rozwiązanie działające w czasie  $\Theta(n^2 k)$ .

Obliczanie minimum w podanym wzorze można jednak zrealizować znacznie szybciej. Rozważmy następujący problem. Dany jest zbiór funkcji liniowych, w którym  $q$ -ta funkcja opisana jest wzorem  $y = a_q \cdot x + b_q$  (wartości  $a_q$  oraz  $b_q$  są dane). Naszym zadaniem jest zbudowanie struktury danych, która pozwoli obliczać minimum tych funkcji w każdym punkcie. Innymi słowy, zadaniem struktury danych jest obliczenie wartości funkcji  $h(x) = \min_q a_q \cdot x + b_q$  dla podanej wartości  $x$ . Ponadto struktura powinna pozwalać na dodawanie nowych funkcji do zbioru.

Zastanówmy się najpierw, jakie dane powinna przechowywać struktura danych. Spójrzmy na rysunek 1, gdzie przedstawiono kilka przykładowych funkcji i wyznaczoną przez nie funkcję  $h$ . Wykres funkcji  $h$  składa się z pewnej liczby *fragmentów*, gdzie każdy fragment to odcinek, półprosta lub prosta (w przypadku, gdy mamy tylko jeden fragment). Każdy fragment leży na jednej z prostych ze zbioru: kolejne (od lewej) fragmenty leżą na prostych o coraz mniejszych wartościach współczynnika  $a_i$ .

Aby reprezentować wykres funkcji  $h$ , struktura danych pamięta listę  $L$  kolejnych fragmentów (od lewej do prawej). Naturalny sposób reprezentacji polega na opisaniu każdego fragmentu przez punkty na jego końcach, jednak nie polecamy tego podejścia. Wymaga ono specjalnego traktowania fragmentów będących prostymi i półprostymi oraz odpowiedniej reprezentacji liczb wymiernych. Znacznie łatwiej pamiętać listę prostych  $L = P_1, \dots, P_t$ , które wyznaczają kolejne fragmenty tworzące wykres  $h$ . Każdą prostą reprezentujemy tutaj przez parę liczb  $(a_i, b_i)$ . Mówiąc konkretniej, lista  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$  oznacza, że wykres funkcji  $h$  przebiega najpierw po prostej  $y = a_1 \cdot x + b_1$ , następnie po  $y = a_2 \cdot x + b_2$  i wreszcie po  $y = a_3 \cdot x + b_3$ . Co ciekawe, nie musimy tu wcale pamiętać, na jakim przedziale wykres  $h$  pokrywa się z każdą z prostych – to możemy obliczać w miarę potrzeby. Korzystamy tu z faktu, że prosta  $P_i$  pokrywa się z wykresem  $h$  od punktu, w którym  $P_{i-1}$  przecina się z  $P_i$ , aż do punktu, w którym  $P_i$  przecina się z  $P_{i+1}$ .

Aby obliczyć wartość  $h(x)$ , skorzystamy z wyszukiwania binarnego elementów listy  $L$ . Chcemy na tej liście znaleźć prostą  $P_j$ , która w punkcie  $x$  pokrywa się z wykresem funkcji  $h$ . Aby zrealizować wyszukiwanie binarne, musimy umieć dla każdej prostej  $P_i$  szybko stwierdzić, czy jej indeks  $i$  jest mniejszy, równy, czy też większy od  $j$ . To potrafimy rozstrzygnąć bez trudu. Jeśli, na przykład,  $i > 1$  oraz pierwsza współrzędna punktu przecięcia prostych  $P_{i-1}$  i  $P_i$  jest większa od  $x$ , wnioskujemy, że  $j < i$ . Analogicznie możemy rozpoznać pozostałe przypadki. Co ważne, przy naszej reprezentacji potrzebne warunki możemy sprawdzić, wykonując jedynie operacje na liczbach całkowitych, o ile tylko odpowiednio przekształcimy niezbędne wzory. Tym samym obliczenie wartości  $h(x)$  zrealizować możemy w czasie  $O(\log n)$ , gdzie  $n$  to liczba funkcji liniowych w zbiorze.

Pozostaje powiedzieć, jak dodawać nowe proste do zbioru. Rozważymy tu nieco uproszczony przypadek, gdy

rozpoczynamy od pustego zbioru prostych i następnie dodajemy proste o coraz mniejszych współczynnikach kierunkowych, tj. kolejno dodawane proste są „coraz bardziej pochylone w prawo”. Jak się później okaże, taką własność będą miały proste, które będziemy dodawać do zbioru, gdy wykorzystamy strukturę danych do rozwiązania naszego zadania.

Spójrzmy na rysunek 2, który pokazuje, jak zmienia się wykres funkcji  $h$  po dodaniu nowej prostej do zbioru. Aby zaktualizować listę  $L$ , musimy najpierw usunąć pewną liczbę prostych z końca listy  $L$ , a następnie dopisać na jej końcu właśnie dodaną prostą.

Usuwanie prostych łatwo zrealizować w pętli, powtarzając następujący krok. Jeśli punkt przecięcia dodawanej prostej z przedostatnią prostą na liście  $L$  leży na lewo od punktu przecięcia przedostatniej i ostatniej prostej z listy  $L$ , usuwamy ostatnią prostą z listy  $L$  (patrz rysunek 3). W przeciwnym razie kończymy pętlę i dopisujemy dodawaną prostą na końcu listy  $L$ . Dodanie jednej prostej do zbioru może spowodować usunięcie wielu prostych z listy  $L$ . Niemniej jednak każda prosta zostaje dopisana do listy  $L$  raz i może być z niej usunięta co najwyżej jednokrotnie. Wobec tego łączny czas potrzebny na aktualizację listy  $L$  w trakcie dodawania  $n$  prostych do początkowo pustego zbioru wynosi  $O(n)$ . Na tym kończymy opis pomocniczej struktury danych.

Pokażemy teraz, jak wykorzystać powyższą strukturę danych do rozwiązania oryginalnego zadania. Problematicznym elementem wzoru na  $d[i][j]$  może się wydawać funkcja kwadratowa, jednak to tylko pozorna trudność. Zmienimy nieco wzór na  $d[i][j]$ :

$$\begin{aligned} d[i][j] &= \min_{0 \leq q < i} d[q][j-1] + p_i^2 - 2p_i l_{q+1} + l_{q+1}^2 - \\ &\quad - (\max(0, (p_q - l_{q+1})))^2 \\ &= p_i^2 + \min_{0 \leq q < i} p_i (-2l_{q+1}) + d[q][j-1] + l_{q+1}^2 - \\ &\quad - (\max(0, (p_q - l_{q+1})))^2 \end{aligned}$$

Oznaczmy  $a_q = -2l_{q+1}$  oraz

$$b_q = d[q][j-1] + l_{q+1}^2 - (\max(0, (p_q - l_{q+1})))^2.$$

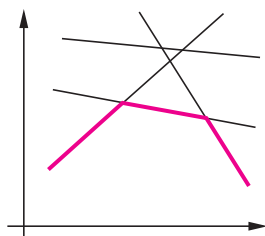
Przy takich oznaczeniach mamy

$$d[i][j] = p_i^2 + \min_{0 \leq q < i} a_q \cdot p_i + b_q.$$

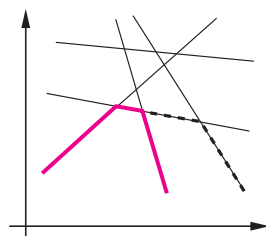
co pozwala nam skorzystać z opisanej powyżej struktury danych. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie działające w czasie  $O(nk \log n)$ . To już lepiej, jednak brakuje nam jeszcze jednego kroku.

Główną przeszkodę na drodze do efektywnego rozwiązania stanowi sztywne ograniczenie na liczbę zdjęć, które można wykonać. Przyjmijmy na chwilę, że zadanie sformułowane jest nieco inaczej, a mianowicie wykonanie każdego zdjęcia wiąże się z kosztem  $c$ . W tej sytuacji nie potrzebujemy już tablicy dwuwymiarowej. Oznaczmy przez  $d[i]$  minimalny koszt rozwiązania pokrywającego pierwsze  $i$  przedziałów. Modyfikując poprzedni wzór, otrzymujemy:

$$d[i] = \min_{0 \leq s < i} d[s] + (p_i - l_{s+1})^2 - (\max(0, (p_s - l_{s+1})))^2 + c.$$



Rys. 1



Rys. 2

Teraz wystarczy użyć algorytmu analogicznego do tego powyżej. Do obliczenia mamy jednak jedynie  $n$  wartości, dlatego poszukiwaną wartość  $d[n]$  obliczyć możemy w czasie  $O(n \log n)$  i, jak się za chwilę okaże, przyda się to nam do zaprezentowania ostatecznego rozwiązania.

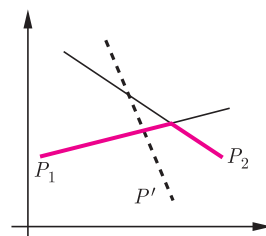
Wróćmy do pierwotnego problemu i oznaczmy przez  $f(x)$  minimalny koszt rozwiązania, w którym wykonujemy dokładnie  $x$  zdjęć. Naszym zadaniem jest wyznaczenie wartości  $f(k)$ . Klucz do rozwiązania stanowi wypukłość funkcji  $f$ . Oznacza to tyle, że przez każdy punkt wykresu  $f$  można poprowadzić taką prostą  $l$ , by cały wykres znalazł się ponad prostą  $l$  lub na niej. Możemy też spojrzeć na tę własność od innej strony: zwiększanie limitu zdjęć  $k$  zmniejsza koszt rozwiązania, jednak zysk z każdego kolejnego dodatkowego zdjęcia jest coraz mniejszy. Dowód tej własności jest dosyć skomplikowany i techniczny (a przynajmniej dowód znany autorowi tego tekstu), dlatego nie będziemy go tu podawać. Czytelnikom, którzy chcieliby zdobyć choćby minimalne przekonanie o prawdziwości tej własności, polecamy wykonanie kilku eksperymentów na kartce.

Algorytm opiszemy nietypowo, zaczynając od graficznej interpretacji jego działania (patrz rysunek 4). Naszym celem jest wyznaczenie wartości  $f(k)$ . Na początku rysujemy wykres funkcji  $f$ . Następnie rysujemy prostą  $l$  poniżej wykresu  $f$  i przesuwamy  $l$  do góry (zachowując jej nachylenie) do momentu, gdy dotknie ona wykresu  $f$ , tj. napotka pewien punkt  $(k', f(k'))$ . Naszym celem jest tak dobrać nachylenie prostej  $l$ , by trafić w punkt  $(k, f(k))$ . Wypukłość funkcji  $f$  pozwala nam zastosować wyszukiwanie binarne. Jeśli prosta  $l$  trafia w punkt  $(k', f(k'))$  i  $k' > k$ , z wypukłości funkcji  $f$  wiemy, że jej współczynnik kierunkowy (wyznaczający nachylenie) jest zbyt duży. W przeciwnym razie ( $k' < k$ ) współczynnik jest za mały. Dzięki temu w  $O(\log m)$  iteracjach takiego algorytmu możemy znaleźć współczynnik kierunkowy, dla którego prosta  $l$  trafi w  $(k, f(k))$ .

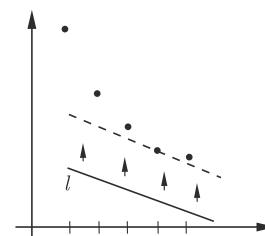
Pozostaje powiedzieć, jak zrealizować jedną iterację powyższego algorytmu. Rozważmy prostą o równaniu  $y = a \cdot x + b$  i ustalmy nachylenie tej prostej, czyli wartość współczynnika kierunkowego  $a$ . Wówczas szukamy najmniejszej wartości  $b$ , dla której prosta przechodzi przez pewien punkt  $(k', f(k'))$ , czyli  $x = k'$  a  $y = f(k')$ . Innymi słowy, szukamy najmniejszej wartości  $b$ , dla której  $f(k') = a \cdot k' + b$  dla pewnego  $k'$ . To z kolei jest równoważne ze znalezieniem minimum funkcji  $g(x) = f(x) - a \cdot x$ .

Przyjrzyjmy się bliżej funkcji  $g$ . Wartość  $g(x)$  oznacza koszt rozwiązania używającego  $x$  kwadratów pomniejszony o  $a \cdot x$ . Zatem minimum  $g$  to koszt optymalnego rozwiązania, jeśli wykonanie każdego zdjęcia kosztuje nas  $-a$ . Koszt ten, jak przed chwilą pokazaliśmy, potrafimy obliczyć w czasie  $O(n \log n)$ , co daje nam rozwiązanie zadania w czasie  $O(n \log n \log m)$ .

Jakub ŁĄCKI



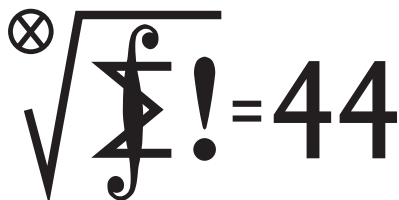
Rys. 3



Rys. 4

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2017

### Zadania z matematyki nr 739, 740

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**739.** Znaleźć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o następujących własnościach:

- $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$  dla  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- dla każdej liczby  $a \in \mathbb{R}$  ciąg  $(x_n)$  określony wzorami  $x_0 = a$ ,  $x_n = f(x_{n-1})$  (dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) jest ciągiem arytmetycznym.

**740.** Obliczyć kres dolny wartości sumy

$$\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2},$$

gdy  $x, y, z$  mogą być dowolnymi liczbami dodatnimi, spełniającymi warunek  $x + y + z = 1$ .

Zadanie 740 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

### Rozwiązania zadań z numeru 12/2016

Przypominamy treść zadań:

**731.** Znaleźć wszystkie funkcje  $f$ , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera, przyjmujące wartości w tym samym zbiorze, i spełniające równanie funkcyjne

$$f(xy f(x + y)) = f(x) + f(y)$$

dla każdej pary liczb  $x, y \neq 0$  takiej, że  $x + y \neq 0$ .

**732.** Ciąg liczb naturalnych  $a_0, a_1, a_2, \dots$  jest określony wzorem rekurencyjnym:  $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ ; wyraz początkowy  $a_0$  jest liczbą pierwszą. Dowieść, że dla każdego  $n$  różnica  $a_{n+1} - 1$  jest podzielna przez  $a_n$ .

**731.** Ustalmy liczbę rzeczywistą  $a \neq 0$  i przyjmijmy  $b = 1/f(a)$ . Załóżmy, że  $a \neq b$ . Możemy wówczas podstawić w podanym równaniu  $x = b$ ,  $y = a - b$  (bo  $x, y \neq 0$ ), otrzymując związek

$$f(b(a - b)f(a)) = f(b) + f(a - b).$$

Ale  $bf(a) = 1$ , więc liczba po lewej stronie jest równa  $f(a - b)$ . Prawa strona ma inną wartość, skoro  $f(b) \neq 0$  (wartości funkcji  $f$  są z założenia niezerowe).

Sprzeczność dowodzi, że  $a = b$ , czyli  $f(a) = 1/a$ . Wobec dowolności liczby  $a \neq 0$  znaczy to, że funkcja  $f$  jest dana wzorem  $f(x) = 1/x$  dla wszystkich  $x \neq 0$ . Sprawdzenie, że ta funkcja spełnia zadane równanie, jest natychmiastowe. Jest ona zatem jedynym rozwiązaniem tego równania.

**732.** Teza zadania:  $a_{n+1} \equiv 1 \pmod{a_n}$  – po wprowadzeniu określenia liczby  $a_{n+1}$  i dodaniu stronami jedynek – ma postać

$$(*) \quad 2^{a_n} \equiv 2 \pmod{a_n}.$$

Liczba  $a_0$  jest pierwsza, więc  $(*)$  zachodzi dla  $n = 0$  (małe twierdzenie Fermata). Dalej indukcja: przyjmijmy słuszność  $(*)$  dla pewnego  $n \geq 0$ ; istnieje zatem liczba  $k \in \mathbb{N}$ , dla której  $2^{a_n} = 2 + ka_n$ . Odejmujemy stronami jedynek i mamy  $a_{n+1} = 1 + ka_n$ . Z określenia  $a_{n+1}$  wynika ponadto, że  $2^{a_n} \equiv 1 \pmod{a_{n+1}}$ . Tak więc

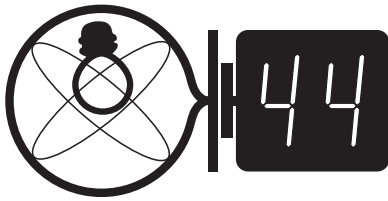
$$2^{a_{n+1}} = 2 \cdot 2^{ka_n} = 2(2^{a_n})^k \equiv 2 \pmod{a_{n+1}}.$$

Uzyskaliśmy zależność  $(*)$  z  $n$  zastąpionym przez  $n + 1$ . To kończy dowód indukcyjny.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 725 ( $WT = 1,86$ ) i 726 ( $WT = 2,00$ ) z numeru 9/2016

Tomasz Wietecha	Tarnów	45,97
Witold Bednarek	Łódź	40,72
Zbigniew Skalik	Wrocław	39,62
Roksana Słowik	Knurów	38,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08

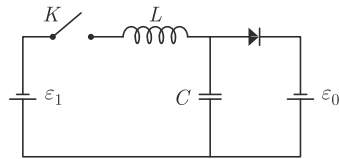
Tomasz Wietecha – w lidze fizycznej i matematycznej (łącznie) nie ma sobie równych. W samej matematycznej właśnie ukończył jedenaste okrążenie.



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2017

## Zadania z fizyki nr 636, 637

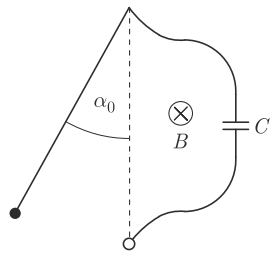
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



Rys. 1

**636.** W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 mamy  $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$ . Jaki ładunek przepłynie przez źródło o sile elektromotorycznej  $\varepsilon_0$  po zamknięciu klucza  $K$ ? Zakładamy, że opór omowy cewki i opory wewnętrzne źródeł są równe zeru. Dioda jest idealna, czyli jej opór w kierunku przewodzenia wynosi zero, a w kierunku przeciwnym jest nieskończenie wielki. Przed zamknięciem klucza kondensator był nienaładowany.

**637.** Mała metalowa kulka o masie  $m$ , zawieszona na nieważkiej przewodzącej nici o długości  $l$ , wykonuje małe drgania z amplitudą kątową  $\alpha_0$  w płaszczyźnie pionowej, w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$  (rys. 2). Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny drgań wahadła. Gdy wahadło przechodzi przez położenie równowagi, podłączony zostaje do niego za pomocą cienkich, wiotkich przewodów kondensator o pojemności  $c$ . Czas kontaktu jest bardzo krótki i można przyjąć, że w tym czasie kondensator zostaje całkowicie naładowany. Znaleźć nową amplitudę kątową drgań wahadła.



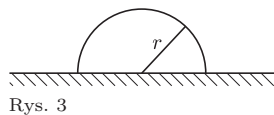
Rys. 2

## Rozwiązania zadań z numeru 12/2016

Przypominamy treść zadań:

**628.** Rura o promieniu  $r$  zakopana jest do połowy w ziemi (rys. 3). Z jaką minimalną prędkością powinna odbić się od ziemi żaba, która chce przeskoczyć przez tę rurę?

**629.** Kondensator naładowano do napięcia  $U_0$  i po odłączeniu od źródła napięcia podłączono do niego opornik. W pewnym przedziale czasu na oporniku wydzielona została energia  $W_1$ , a w następnym takim samym przedziale czasu energia  $W_2$ . Znaleźć pojemność kondensatora.



Rys. 3

**628.** Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że tor lotu żaby powinien być styczny do rury w jej najwyższym punkcie. Rozważmy jednak tor symetryczny względem osi pionowej przechodzącej przez środek rury i styczny do niej w dwóch punktach. Niech prędkość  $v$  żaby w punkcie styczności tworzy z poziomem kąt  $\alpha$  (rys. 4). Z równań ruchu dla rzutu ukośnego otrzymujemy związek  $v^2 = \frac{gr}{\cos \alpha}$ . Zasada zachowania energii ma postać

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgr \cos \alpha,$$

gdzie  $v_0$  jest prędkością żaby w chwili odbicia. Aby znaleźć jej wartość minimalną, musimy odpowiedzieć na pytanie, dla jakiego kąta  $\alpha$  funkcja

$$E(\alpha) = mgr \left( \cos \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) = mgr \sqrt{2} \frac{(\sqrt{2} \cos \alpha)^2 + 1}{2\sqrt{2} \cos \alpha}$$

ma minimum. W tym celu wystarczy obliczyć jej pochodną i przyrównać ją do zera. Możemy też skorzystać z nierówności  $(a - b)^2 \geq 0$  i wynikającej z niej  $\frac{a^2 + b^2}{2ab} \geq 1$ . Widzimy, że energia jest minimalna, gdy  $\sqrt{2} \cos \alpha = 1$ . Szukana

minimalna prędkość żaby wynosi  $v_{0\min} = \sqrt{2\sqrt{2}gr}$ . Dla kąta  $\alpha = 0$ , gdy tor żaby styka się w najwyższym punkcie z rurą,  $v_0 = \sqrt{3gr}$ .

**629.** Z zasady zachowania energii mamy związek

$$\frac{U_0^2}{2c} = W_1 + \frac{U_1^2}{2c},$$

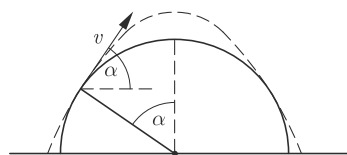
gdzie  $U_1$  jest napięciem na kondensatorze po upływie czasu  $t$ . Gdy kondensator rozładowuje się przez opornik, natężenie prądu maleje wykładniczo w czasie

$$I = U/R = \left( U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \right) / R.$$

Moc chwilowa jest iloczynem kwadratu napięcia początkowego i funkcji czasu, zatem stosunek energii wydzielonych na oporniku w jednakowych przedziałach czasowych jest proporcjonalny do kwadratów napięć początkowych

$W_1/W_2 = U_0^2/U_1^2$ . Szukana pojemność kondensatora wynosi

$$c = \frac{2W_1^2}{U_0^2(W_1 - W_2)}.$$



Rys. 4



## Prosto z nieba: Światło odległych planet

Obserwacje planet pozasłonecznych mają, jak na astronomię, względnie krótką historię. Pierwsze planety poza naszym układem odkryli w 1992 roku Andrzej Wolszczan i Dale Frail, analizując radiowe obserwacje pulsarów (odkrycie nastąpiło przez przypadek, ponieważ nikt nie spodziewał się planet krążących wokół martwej pozostałości po supernowej). Pierwszą planetą związaną z „prawdziwą” gwiazdą (i to gwiazdą Ciągu Głównego) jest 51 Pegasi. Przez pierwsze dziesięć lat XXI wieku sporadycznie odkrywano pojedyncze układy, przeważnie z planetami-gigantami. Prawdziwy przełom przyniosła rozpoczęta w 2011 roku misja satelitarna Kepler, która dostarczyła tysięcy nowych odkryć. Obecnie skatalogowano już ponad 3,5 tysiąca planet pozasłonecznych i jedno jest pewne: liczba ta z pewnością będzie rosła.

Niedawnym przykładem postępu w dziedzinie są niezwykle obserwacje wykonane z użyciem koronografu

## Niebo w kwietniu

Kilka nocy po pełni Księżyca, wypadającej 11 IV, warto wykonać obserwacje gromady kulistej M3, zwanej również NGC 5272. Gromada ta odkryta została w 1794 roku i przyczyniła się do podjęcia przez Messiera decyzji o stworzeniu katalogu obiektów mgławicowych. M3 jest jedną z najjaśniejszych ( $6,4^m$ ) i największych gromad (składa się z ponad 500 tysięcy gwiazd). Obiekt znajduje się w konstelacji Psów Gończych,  $12^\circ$  na północny-zachód od Arktura, przy granicy z gwiazdozbiorami Warkocza Bereniki i Wolarza (współrzędne: rektascensja  $13,7h$ , deklinacja  $+28^\circ 22'$ ). M3 widoczna będzie przez całą noc, a górować około północy. Tuż przed świtem znajdzie się  $45^\circ$  nad horyzontem zachodnim. Do obserwacji przyda się lornetka lub lunetka.

Czytelnicy obserwujący w zeszłym miesiącu planetę karłowatą Makemake będą mieli w kwietniu okazję do podziwiania kolejnego obiektu tego typu, Haumei. Dnia 13 IV Haumea znajdzie się w opozycji względem Słońca, czyli w położeniu najlepszym do obserwacji. Planetka została odkryta w 2003 roku i początkowo nazwana Santa, czyli Święty Mikołaj. Jej obecna nazwa jest imieniem bogini płodności i pochodzi z mitologii Hawajów. Ze względu na szybką rotację jest wyraźnie spłaszczona. Obiekt ten ma dwa naturalne księżyce Hi'iaka oraz Namaka, które początkowo także nosiły nazwy związane ze Świętym Mikołajem i jego zaprzęgiem reniferów, mianowicie Rudolf i Blitzen. Haumea będzie widoczna od zmierzchu ( $28^\circ$  nad horyzontem wschodniego nieba) aż do świtu ( $41^\circ$  nad południowo-zachodnim niebem) na tle gwiazdozbioru Wolarza. Ze względu na niewielką jasność, wynoszącą  $17,2^m$ , jest celem dla niewielkich teleskopów.

Kwietniową atrakcją nocnego nieba dla miłośników spadających gwiazd będą Lirydy. Rój ten jest

CHARIS (ang. *Coronagraphic High Angular Resolution Imaging Spectrograph*), który służy do bezpośredniej obserwacji światła odbitego od powierzchni planet.

Koronografów używa się najczęściej do przesłonięcia dysku Słońca i obserwacji *korony*, zewnętrznej, najgorętszej części atmosfery słonecznej, składającej się z rozrzedzonej plazmy o temperaturze milionów stopni Kelvina (dla porównania, powierzchnia Słońca ma temperaturę około  $5800\text{ K}$ ).

CHARIS, przymocowany do teleskopu Subaru na Hawajach (rozmiar lustra  $8,2\text{ m}$ ), umożliwia „zasłonięcie” jasnego dysku gwiazdy i śledzenie o wiele słabszego od niej światła planet. Obecnie możliwe jest obserwowanie planet rozmiaru Jowisza. Wyizolowanie światła pochodzącego z powierzchni planety jest podobne do zdjęcia odcisku palca – możliwe jest wtedy analizowanie składu atmosfery, wieku planety oraz jej rozmiaru. Wstępne wyniki są bardzo obiecujące.

Michał BEJGER

związany z kometa Thatcher, która obiega Słońce z okresem wynoszącym aż 415 lat. Lirydy będzie można obserwować w dniach 19–25 IV, a ich aktywność powinna wynieść około 10 śladów na godzinę. Maksimum roju przypadnie na 22–23 VI, gdy Księżyc będzie tuż przed nowiem, wypadającym 26 VI, co stanowi dobre warunki zarówno do obserwacji, jak i do astrofotografii. Zwyczajowe maksimum Lirydów wynosi około 25 śladów na godzinę, jednak zdarzały się dużo obfitsze deszcze, np. w 1982 roku 90 meteorów na godzinę, a na początku XIX wieku nawet ponad 800! Radiant Liryd wypada w okolicach Węgi znajdującej się w gwiazdozbiorze Lutni, a najkorzystniejszy czas do obserwacji to druga połowa nocy.

W kwietniową pełnię, wypadającą 11 IV, warto obserwować bliskie spotkanie Jowisza z Księżycem. Oba ciała niebieskie znajdą się pół godziny po północy w odległości raptem  $2^\circ 03'$ , natomiast widoczne będą od godziny 19:44 ( $7^\circ$  nad horyzontem wschodniego nieba), aż do godziny 5:03 ( $8^\circ$  patrząc w kierunku południowego nieba). Obserwacje i fotografie można będzie wykonać nawet z centrum miast, gdyż Księżyc osiągnie jasność  $-12,6^m$ , a Jowisz  $-2,5^m$ . Ze względu na zbyt dużą separację obserwowana para nie zmieści się w polu widzenia teleskopu, ale powinna być świetnie widoczna przez lornetkę.

Kilka nocy później, 16 IV, warto też spojrzeć na spotkanie naszego naturalnego satelity z Saturnem na tle gwiazdozbioru Strzelca. Separacja wyniesie w tym przypadku  $3^\circ 13'$ , jednak spotkanie będzie trudniejsze do obserwacji, gdyż z terenu Polski para znajdzie się maksymalnie  $15^\circ$  nad horyzontem, w dodatku tuż przed samym świtem. Jasności Księżyca i Saturna wyniosą odpowiednio  $-12,2^m$  oraz  $0,1^m$ .

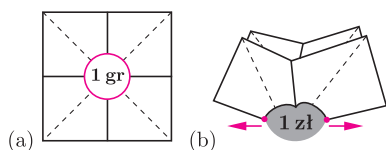
Karolina BĄKOWSKA



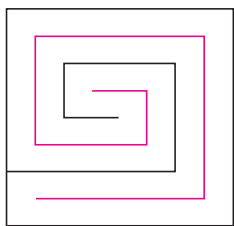
# Niemożliwe wycinanki

Joanna JASZUŃSKA

1. Czy można wyciąć w kartce dziurę w kształcie monety 1 gr, a następnie przełożyć przez tę dziurę monetę 1 zł?
2. Mamy kartkę o wymiarach  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$  i nożyczki. Czy można wyciąć taką dziurę, przez którą przejdzie człowiek?
3. Czy w sześcianie o krawędzi 20 zmieści się kwadrat o boku 21?
4. Czy w sześcianie o krawędzi 20 można wywiercić tunel, przez który da się przesunąć sześcian o krawędzi 21?



Rys. 1. Wzdłuż linii ciągłych zginamy w jedną stronę, wzdłuż przerywanych – w drugą.



Rys. 2. Uproszczony schemat, należy wycinać gęstszą spiralę.

## Rozwiązania

Wszystkie odpowiedzi są pozytywne. Oto przepisy, jak te wycinanki zrealizować.

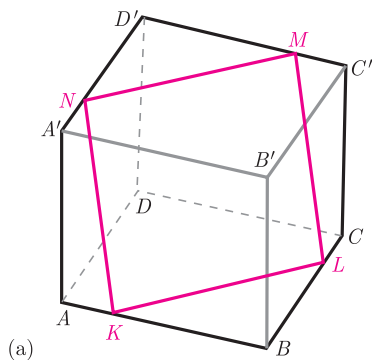
**R1.** Po wycięciu dziury warto utworzyć cztery pomocnicze zagięcia (rys. 1(a)). Następnie kartkę złożyć w pół wzdłuż jednego z nich i odciągnąć od siebie końce dziury (rys. 1(b)), uzyskując dłuższy, wąski otwór.  $\square$

**R2.** Kartkę można np. najpierw rozciąć wzdłuż spiralnej linii, uzyskując bardzo długi, poskręcany pasek (rys. 2), a następnie naciąć wzdłuż prawie całej długości tego paska, otrzymując w nim wystarczająco dużą dziurę.  $\square$

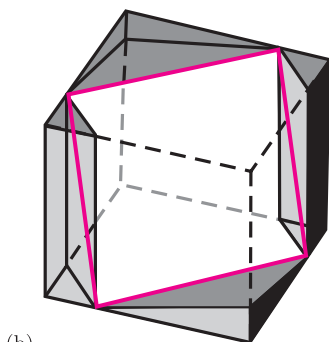
**R3.** Niech punkty  $K, L, M, N$  leżą na krawędziach  $AB, BC, C'D', D'A'$  sześcianu  $ABCD A'B'C'D'$  tak, że  $AK/AB = CL/CB = C'M/C'D' = A'N/A'D' = 1/4$  (rys. 3(a)). Wówczas  $KL = 3/4 \cdot AC = 3/4 \cdot 20\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$ , podobnie  $MN = KL$  i odcinki te są równoległe, więc punkty  $K, L, M, N$  leżą w jednej płaszczyźnie, a wobec symetrii problemu równoległobok  $KLMN$  jest prostokątem.

Korzystając dwukrotnie z twierdzenia Pitagorasa (kolejno dla trójkątów  $AA'N$  oraz  $AKN$ ) obliczamy, iż również  $KN = 15\sqrt{2}$ , zatem  $KLMN$  jest kwadratem o boku długości  $15\sqrt{2} > 15 \cdot 1,4 = 21$ .

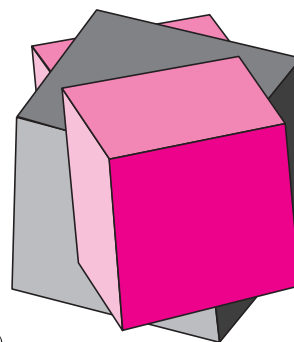
Jeśli każdy z jego wierzchołków przybliżymy do jego środka o taką samą odpowiednio małą odległość, uzyskamy w rezultacie kwadrat  $K'L'M'N'$  o krawędzi 21, którego wierzchołki leżą wewnątrz danego sześcianu.  $\square$



Rys. 3 (a) Kwadrat o boku  $> 21$



(b) Tunel o przekroju  $KLMN$



(c) Kolorowy sześcian przesuwany przez tunel w szarym sześcianie

**R4.** Wywiercimy tunel, którego przekrojem poprzecznym jest kwadrat  $K'L'M'N'$  z poprzedniego zadania (wygląda to prawie jak na rys. 3(b)). Zauważmy, że tunel ten nie ma punktów wspólnych z żadną z krawędzi sześcianu składających się na łamaną zamkniętą  $ABCC'D'A'A$  (zaznaczoną na czarno na rys. 3(a)), istotnie więc część sześcianu pozostająca wokół tunelu nie rozpada się i tworzy wielościanową obręcz, przez którą da się przesunąć sześcian o krawędzi 21 (rys. 3(c)).  $\square$

Tunel o przekroju  $KLMN$  pozwala przesunąć przez dany sześcian największy możliwy inny sześcian (o krawędzi o około 6% większej), nazywany *sześcianem księcia Ruperta*. Polecam animację na stronie <https://www.youtube.com/watch?v=-2jJgHsxEu4>