







Nagrodę Dziekanów za najlepszy artykuł *Delta*
w roku akademickim 2015/6 otrzymały
Barbara Ciesielska i Agnieszka Kowalczyk
za tekst

*Tam gdzie matematyka, sztuka i magia
łączą swoje siły,
czyli słów kilka o origami*

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (513)

Maszyna różnicowa <i>Piotr Chrzastowski-Wachtel</i>	str. 1
System wyborczy Chamberlina–Couranta <i>Piotr Skowron</i>	str. 4
 Uroki starości <i>Magdalena Fikus</i>	str. 7
Jak długa jest kula? <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 8
 Znajomi moich znajomych <i>Krzysztof Piecuch</i>	str. 10
<i>Delta</i> i fizyka cząstek elementarnych (VII): LHC, cząstka Higgsa, stare i nowe problemy, nowe idee <i>Piotr Chankowski</i>	str. 12
 Zadania	str. 15
Informatyczny kącik olimpijski (102): Nim 3 <i>Marcin Smulewicz</i>	str. 16
Nim obliczysz, pomyśl! <i>Renata Juraszewska</i>	str. 17
Aktualności	str. 18
Klub 44	str. 19
Prosto z nieba: Trzęsienia Merkurego	str. 24
Niebo w lutym	str. 24
 Od rysowania kopert do otwierania sejfów <i>Joanna Jaszewska</i>	str. 25

W następnym numerze
o matematyce pisze
nietypowy,
choć znany autor:
Cyprian Norwid



Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartoł, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwika Graphic Design & Serigrafia.
Rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

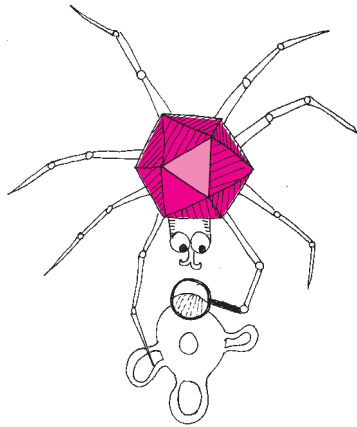
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania M 1519.

Niech d będzie początkową cyfrą każdej z liczb 2^n i $9 \cdot 5^n$. Przypuścimy ponadto, że liczba 2^n ma $k + 1$ cyfr, a liczba $9 \cdot 5^n$ ma $\ell + 1$ cyfr (k i ℓ to liczby całkowite nieujemne). Wówczas

$$d \cdot 10^k < 2^n < (d + 1) \cdot 10^k$$

oraz

$$d \cdot 10^\ell < 9 \cdot 5^n < (d + 1) \cdot 10^\ell.$$

Wymnażając powyższe nierówności, uzyskujemy

$$d^2 \cdot 10^{k+\ell} < 9 \cdot 10^n < (d + 1)^2 \cdot 10^{k+\ell},$$

skąd

$$d^2 < 9 \cdot 10^{n-k-\ell} < (d + 1)^2.$$

Wobec nierówności $1 \leq d \leq 9$ mamy więc $n - k - \ell \in \{0, 1\}$, a zatem $d^2 < 9 < (d + 1)^2$ lub $d^2 < 90 < (d + 1)^2$. Tylko w drugim przypadku istnieje rozwiązanie: $d = 9$.

Można sprawdzić (na przykład za pomocą komputera), że $n = 53$ jest najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania.

Maszyna różnicowa

Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL*

Dlaczego w szkole tak dużo uczymy się o wielomianach? Są dwa podstawowe powody. Pierwszy z nich – całkiem zrozumiały – po prostu jest to niemal największa klasa funkcji, których wartości umiemy obliczać. Potrafimy jeszcze dzielić wartości wielomianów, ale z pozostałymi funkcjami, które występują w programie szkolnym, a później na studiach, w zasadzie mielibyśmy sporo problemów. Co by było, gdybyśmy, porwani przez jakichś wrogich, a potężnych Marsjan, zostali postawieni w takiej sytuacji: ludzkość zostanie ocalona, jeśli wykażemy się odpowiednią inteligencją matematyczną i, dysponując jedynie kartką papieru i ołówkiem, obliczymy w ciągu jednego dnia wartość $\sin 1^\circ$ z dokładnością do 10 cyfr po przecinku? Kto z absolwentów liceów poradziłby sobie z takim wyzwaniem? Chyba niewielu Czytelników potrafiłoby aż z taką dokładnością wyznaczyć poprawną wartość: 0,0174524064. Na pewno nie za pomocą cyrkla, linijki i ołówka. Zresztą podobnie trudno by było, gdyby ci podli Marsjanie kazali nam obliczyć np. $\log_2 10$ czy 2^π z tą samą dokładnością. Powstaje pytanie: jak sobie radzili z tymi problemami nasi poprzednicy, którzy wieki temu drukowali tabele różnych funkcji matematycznych: pierwiastków, sinusów i logarytmów z zaskakująco dobrymi dokładnościami, sięgającymi nieraz 8 cyfr znaczących?

Dochodzimy tu do drugiej niezwyklej własności wielomianów. Otóż, o czym dowiadują się studenci pierwszego roku kierunków ścisłych, wielomiany mają jeszcze jedną sympatyczną własność. Za ich pomocą możemy dowolnie dokładnie przybliżać wszystkie funkcje dostatecznie gładkie, czyli takie, których wykres jest linią ciągłą bez żadnych załamań (konkretnie funkcje klasy C^∞ , czyli nieskończenie wiele razy różniczkowalne), a do nich należą właśnie funkcje trygonometryczne, logarytmy, funkcje wykładnicze. Konkretnie: w każdym skończonym przedziale możemy tak dobrać współczynniki wielomianu, żeby wartości w tym przedziale różniły się od wartości interesującej nas funkcji o mniej, niż z góry zadana wartość. Dla funkcji sinus i dla przedziału $[0, \pi/4]$ wystarczy wziąć wielomian

$$P(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \frac{1}{39916800}x^{11} + \frac{1}{6227020800}x^{13}$$

(w tym wzorze w mianownikach mamy silnie wykładników, a x jest podane w mierze łukowej), aby otrzymać wartości $\sin x$ z dokładnością do 10 cyfr dziesiętnych po przecinku dla każdego x z tego przedziału. Znając ten wzór i dysponując paroma godzinami, na pewno byśmy sobie z marsjańskim problemem poradzili.

No to do roboty! Jak jednak wyznaczyć wiele wartości wielomianu tak, aby się jak najmniej napracować? Postawmy się w sytuacji autora tabel matematycznych dwa wieki temu – nie mamy komputerów, chcemy osiągnąć dużą dokładność i obliczyć wartości takiej funkcji, jak sinus, powiedzmy, co $\frac{1}{10000}$ radiana. Ile trzeba będzie wykonać mnożeń? One w końcu sprawiają więcej kłopotu niż dodawanie i odejmowanie. Powiedzmy, że zajmiemy się wielomianem stopnia n , postaci $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Na pierwszy rzut oka wygląda na to, że dla każdej wartości x trzeba obliczyć wszystkie potęgi x od 2 do n , co kosztuje $n - 1$ mnożeń, potem otrzymane wartości x^k przemnożyć przez współczynniki a_k dla $k = 1, \dots, n$ (kolejne n mnożeń) i uzyskane liczby zsumować. Razem mamy więc $2n - 1$ mnożeń i n dodawań.

Dość łatwo można ten wynik poprawić, stosując schemat Hornera. Jeśli przedstawimy nasz wielomian w postaci

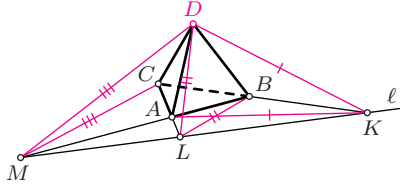
$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\dots + x(a_{n-1} + xa_n)\dots))),$$

wówczas – o dziwo! – liczba mnożeń spadnie nam do n , a liczba dodawań się nie zmieni. W tej metodzie obliczenia zaczynamy od wewnątrz: mnożymy x przez a_n , dodajemy a_{n-1} , mnożymy przez x , dodajemy a_{n-2} itd., aż dodamy na końcu a_0 . Wydaje się, że tego wyniku poprawić już nie można.

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**Rozwiązanie zadania M 1520.**

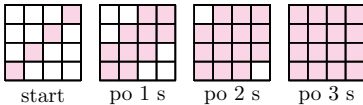
Niech D będzie takim punktem w przestrzeni, że czworokąt $ABCD$ jest foremny. Wówczas trójkąt DKC jest przystający do trójkąta AKC , gdyż jest jego obrazem przy obrocie wokół prostej BC przeprowadzającym punkt A na punkt D . Wobec tego $AK = DK$.



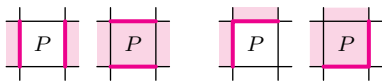
W pełni analogicznie uzasadniamy przystawanie par trójkątów DLA , BLA oraz DMB , CMB i wynikające stąd równości $BL = DL$ oraz $CM = DM$. Za P wystarczy teraz przyjąć obraz punktu D przy takim obrocie wokół prostej ℓ , który posyła D w płaszczyznę trójkąta ABC (są dwa takie punkty).

**Rozwiązanie zadania M 1521.**

Udowodnimy, że n jest szukaną najmniejszą liczbą pól. Zauważmy najpierw, że jeżeli początkowo zarazonych będzie n pól znajdujących się na jednej z przekątnych tablicy, to po $n - 1$ sekundach wszystkie pola tablicy będą zarazone.



Przypuśćmy, że początkowo zarazonych jest $k < n$ pól. Odcinkiem granicznym nazwijmy odcinek będący bokiem dokładnie jednego zarazonego pola. Zauważmy, że zainfekowanie nowego pola P nie zmienia liczby odcinków granicznych lub zmniejsza ich liczbę (jeżeli w danej sekundzie któryś z dotąd niezainfekowanych sąsiadów pola P również staje się zarazony) — w każdym razie liczba odcinków granicznych się nie zwiększa.



Początkowo liczba odcinków granicznych jest równa co najwyżej $4k$, a w sytuacji, gdy wszystkie pola są zarazone, jest równa obwodowi tablicy, czyli $4n$. Ponieważ $4k < 4n$, więc nie jest możliwe zarazenie wszystkich pól.

A jednak! Przedstawimy teraz sposób, za pomocą którego będziemy obliczali wartości wielomianu w kolejnych liczbach, nie wykonując, poza kilkoma początkowymi wartościami, żadnego mnożenia! Metodę zilustrujemy na przykładzie konkretnego wielomianu $V(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 7$. Będziemy wyznaczać wartości tego wielomianu dla kolejnych liczb naturalnych. Pierwsze cztery wartości to, dla $x = 0, 1, 2, 3$, odpowiednio **7, 4, 11, 40**, co obliczamy w pamięci lub schematem Hornera.

Teraz pora na magię. Obliczmy różnice między tymi wartościami: będą to kolejno liczby $-3, 7, 29$. Powtórzmy to jeszcze raz, tym razem dla tych trzech wartości: **10, 22**. Na koniec jeszcze raz obliczmy różnicę między tymi dwiema wartościami: **12**. Zapamiętajmy tę wartość, będziemy z niej wielokrotnie korzystać. Jesteśmy już przygotowani do wyznaczenia wartości $V(4)$ za pomocą 3 dodawań. Skupiamy się na ostatnich wartościach z przedstawionych tutaj ciągów, zapisanych w odwrotnej kolejności, czyli **12, 22, 29, 40**. Dalsze trzy wartości otrzymamy, sumując je w następujący sposób: $12 + 22 = 34$, $34 + 29 = 63$, $63 + 40 = 103$. Ostatnia otrzymana wartość to właśnie $V(4)$. Teraz, żeby otrzymać $V(5)$, powtarzamy nasz algorytm dla właśnie wygenerowanych liczb, zaczynając od tej samej dwunastki, co poprzednio i dostajemy kolejno $12 + 34 = 46$, $46 + 63 = 109$, $109 + 103 = 212$, więc $V(5) = 212$. Biorąc znowu dwunastkę i sumując ostatnio otrzymane wyniki, otrzymamy kolejno wartości **58, 167, 379**, z których ostatnia liczba jest, jak się już domyślamy, równa $V(6)$. Następnie tą samą metodą wyznaczamy po kolei $V(7), V(8), V(9) \dots$, za każdym razem wykonując tylko trzy dodawania i żadnego mnożenia!

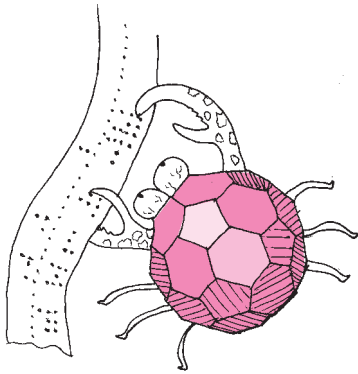
Co się tu dzieje? Wszystko dzięki niepozornemu operatorowi różnicy skończonej, który oznaczmy przez Δ . Ten operator działa na wielomianach i tworzy z nich nowe wielomiany według następującego wzoru: $\Delta(P(x)) = P(x + 1) - P(x)$ dla dowolnego wielomianu $P(x)$. Czyli dla każdego argumentu x wartość $\Delta(P(x))$ jest równa przyrostowi wartości wielomianu, gdy argument zwiększymy o 1. Obliczmy zatem dla naszego wielomianu

$$\begin{aligned} \Delta(V(x)) &= 2(x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 4(x + 1) + 7 - 2x^3 + x^2 + 4x - 7 = \\ &= 6x^2 + 4x - 3. \end{aligned}$$

Okazuje się, że otrzymaliśmy wielomian stopnia o jeden niższego niż oryginał. Chwila zastanowienia i widzimy, że tak będzie dla każdego wielomianu trzeciego stopnia. Operator Δ , działając na taki wielomian, zmniejszy jego stopień do kwadratowego. I ogólnie, jeśli wielomian $P(x)$ jest stopnia n , to $\Delta(P(x))$ będzie wielomianem stopnia $n - 1$. Można to sprawdzić, rozwijając $P(x + 1)$ ze wzoru dwumianowego Newtona; współczynnik przy najwyższej potędze to a_n , więc wyraz z x^n skróci się przy odjęciu $P(x)$. Jeszcze krótki namysł i zobaczymy, że współczynnikiem przy najwyższej potędze (czyli przy x^{n-1}) wielomianu $\Delta(P(x))$ będzie $n \cdot a_n$.

Wprowadźmy teraz potęgi operatora Δ ze względu na składanie. Ustalmy, że Δ^0 jest operatorem identycznościowym, czyli z definicji $\Delta^0(P(x)) = P(x)$. Przyjmijmy, że $\Delta^{n+1}(P(x)) = \Delta(\Delta^n(P(x)))$ dla $n \geq 0$. Co się stanie, jeśli będziemy iterować operator Δ dla wielomianu $P(x)$? Pierwsza iteracja — to już wiemy — będzie wielomianem stopnia $n - 1$ o współczynniku przy najwyższej potędze równym na_n . Druga — wielomianem stopnia $n - 2$ z najwyższym współczynnikiem równym $n(n - 1)a_n$, trzecia da nam wielomian stopnia $n - 3$ o najwyższym współczynnikiem równym $n(n - 1)(n - 2)a_n$ i tak dalej, aż w końcu n -ta iteracja, czyli $\Delta^n(P(x))$ będzie wielomianem stopnia zerowego o współczynniku przy najwyższej potędze (czyli wyrazie stałym) równym $n(n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!a_n$. Zatem postać wielomianu $\Delta^n(P(x))$ zależy jedynie od stopnia tego wielomianu i od współczynnika a_n . Jest więc dość łatwa do wyliczenia. Przykładowo, dla naszego wielomianu $V(x)$ mamy

- $\Delta^0(V(x)) = 2x^3 - x^2 - 4x + 7$,
- $\Delta^1(V(x)) = 6x^2 + 4x - 3$,



- $\Delta^2(V(x)) = 12x + 10$,
 - $\Delta^3(V(x)) = 12$ (co było do przewidzenia od samego początku, bo $12 = 3! \cdot 2$)
- i kolejne iteracje Δ dadzą już tylko wielomiany zerowe.

Teraz pora na najważniejsze. Widzimy, że bezpośrednio z definicji operatora Δ wynika wzór

$$P(x+1) = P(x) + \Delta(P(x)),$$

co zapiszemy w dogodniejszej dla dalszych rozważań postaci

$$P(x) = P(x-1) + \Delta^1(P(x-1)).$$

Ale $\Delta^1(P(x-1))$ to też wielomian zmiennej x , więc proces możemy iterować, bo w szczególności $\Delta^1(P(x-1)) = \Delta^1(P(x-2)) + \Delta^2(P(x-2))$. Idąc tak dalej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x-1) + \Delta^1(P(x-2)) + \Delta^2(P(x-2)) = \\ &= \Delta^0(P(x-1)) + \Delta^1(P(x-2)) + \Delta^2(P(x-3)) + \Delta^3(P(x-3)) = \dots \\ &= \Delta^0(P(x-1)) + \Delta^1(P(x-2)) + \dots + \Delta^{n-1}(P(x-n)) + \Delta^n(P(x-n)), \end{aligned}$$

a ostatni wyraz, jak wiemy, równy jest $n! \cdot a_n$. Widać więc, że do wyznaczenia wartości $P(x)$ wystarczy do wartości $P(x-1)$ dodać wartości wszystkich i -tych potęg Δ dla argumentów $x-i$, gdzie i przebiega zbiór $\{1, \dots, n\}$. A te wartości możemy wyznaczać kolejno, wykonując n dodawań.

Stwórzmy więc dla naszego wielomianu $V(x)$ tabelę takich wartości. Zaczniemy od obliczenia „na piechotę” wartości $V(0), V(1), V(2), V(3)$.

x	$V(x)$	$\Delta^1(V(x))$	$\Delta^2(V(x))$	$\Delta^3(V(x))$
0	7			
1	4			
2	11			
3	40			

Obliczmy teraz wartości $\Delta(V(x))$ dla $x = 0, 1, 2$.

x	$V(x)$	$\Delta^1(V(x))$	$\Delta^2(V(x))$	$\Delta^3(V(x))$
0	7	-3		
1	4	7		
2	11	29		
3	40			

Następnie wyznaczmy wartości $\Delta^2(x)$ dla $x = 0, 1$; więcej nam nie potrzeba. Od razu wstawmy dla porządku 12 w miejsce $\Delta^3(V(x))$ dla $x = 0$ – wiemy, że będzie to $12 = 2 \cdot 3!$, ale gdybyśmy nie dowierzali, zawsze możemy tę wartość uzyskać z ostatniej wypełnionej kolumny, odejmując 10 od 22.

x	$V(x)$	$\Delta^1(V(x))$	$\Delta^2(V(x))$	$\Delta^3(V(x))$
0	7	-3	10	12
1	4	7	22	
2	11	29		
3	40			

W powyższej tabeli została wytłuszczona przekątna, za pomocą której będziemy generowali kolejną przekątną. Zaczniemy od domyślnej dwunastki w ostatniej kolumnie (cała kolumna składa się z samych dwunastek), którą wstawimy dla $x = 1$. Teraz, poczynając od góry, będziemy

do każdego z wytłuszczonych elementów przekątnej dodawali jego prawego sąsiada i wynik zapisywali pod spodem, wytłuszczając go:

x	$V(x)$	$\Delta^1(V(x))$	$\Delta^2(V(x))$	$\Delta^3(V(x))$
0	7	-3	10	12
1	4	7	22	12
2	11	29	34	
3	40	63		
4	103			

Proszę! Wykonaliśmy trzy dodawania i mamy wartość $V(4)$. Jedziemy dalej:

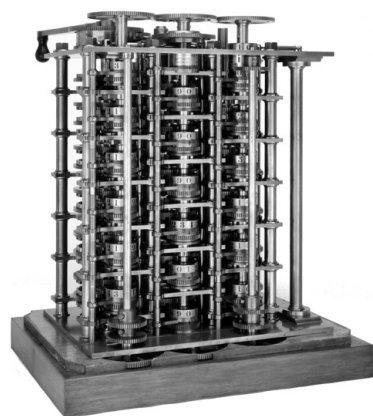
x	$V(x)$	$\Delta^1(V(x))$	$\Delta^2(V(x))$	$\Delta^3(V(x))$
0	7	-3	10	12
1	4	7	22	12
2	11	29	34	12
3	40	63	46	
4	103	109		
5	212			

I jeszcze $V(6)$, skoro nam tak dobrze idzie:

x	$V(x)$	$\Delta^1(V(x))$	$\Delta^2(V(x))$	$\Delta^3(V(x))$
0	7	-3	10	12
1	4	7	22	12
2	11	29	34	12
3	40	63	46	12
4	103	109	58	
5	212	167		
6	379			

Działa! Trzy dodawania i mamy obliczoną kolejną wartość wielomianu trzeciego stopnia.

Pamiętajmy, że na niewymiernych liczbach praktycznie nie potrafimy wykonywać tego typu obliczeń. Możemy albo robić to symbolicznie, albo po prostu przybliżać liczby niewymierne ich wymiernymi odpowiednikami i dalej już jest prosto. I tak zazwyczaj robią to nasze kalkulatory, komputery i inne urządzenia, które muszą wykonywać działania arytmetyczne. Stąd $\pi_{„} = 3,14$, a $\sqrt{2}_{„} = 1,41$.



(źródło zdjęcia: Science Museum)

Pierwsza maszyna różnicowa Babbage'a.

No dobra. To było proste, ale mieliśmy sytuację komfortową, kiedy to wartości wielomianu obliczaliśmy dla kolejnych liczb naturalnych. Co by jednak było, gdyby argumenty były wymierne? Otóż nic by się nie zmieniło. Okazuje się, że jeśli operator Δ zastąpimy operatorem Δ_ε dla dowolnego wymiernego dodatniego ε i zdefiniujemy $\Delta_\varepsilon(P(x)) = P(x + \varepsilon) - P(x)$, to zachowamy podstawową cechę operatora Δ : zastosowanie tego operatora zmniejsza stopień wielomianu o 1. To nam wystarczy do tego, żeby powtórzyć naszą procedurę dla dowolnego początkowego x i dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Obliczenie kolejnych M wartości dla argumentów różniących się o ε góry ustaloną stałą dla dowolnego wielomianu stopnia n wymaga zatem obliczenia jego n kolejnych wartości „na piechotę”, a następnie zastosowania $M - n$ razy naszego schematu, za każdym razem wymagającego jedynie n dodawań, bez wykonywania jakiegokolwiek mnożenia! Niewiarygodne!

Na to, żeby metodę opisaną powyżej wykorzystać do budowy maszyny, przypuszczalnie wpadł jako pierwszy inżynier heskiej armii Johann Helfrich von Müller (1742–1830). Pomysł ten rozwinął i częściowo zrealizował angielski matematyk Charles Babbage (1791–1871). Jest to bohater niezwykle, wizjoner, twórca modelu komputera w postaci, której praktycznie dziś powszechnie używamy. Żył długo, choć jego życie nie było usłane różami. Dość młodo został profesorem matematyki w Cambridge, głównie za prace w dziedzinie kryptografii – ciągnęło go zawsze w kierunku zastosowań matematyki w informatyce, choć informatyki wtedy jeszcze nie było. W latach 20. XIX wieku wpadł na pomysł skonstruowania maszyny, która wykonywałaby automatycznie działania prowadzące do wyznaczania kolejnych wartości wielomianów według podanej wyżej metody. Sam mechanizm arytmetometru był znany od prawie 200 lat dzięki konstrukcjom Schickarda, Pascala i Leibniza. Chodziło o to, żeby ustawić kilka arytmetometrów tak, aby mogły sobie nawzajem przekazywać obliczone sumy w odpowiedniej kolejności. Efektem prac Babbage'a była maszyna różnicowa, której model przedstawiony jest na zdjęciu obok. Wymagała ona ręcznego wykonania początkowych czynności. Babbage na tym nie poprzestął. Zaczął budowę kolejnej wersji maszyny różnicowej, która byłaby znacznie większa i... nigdy jej nie ukończył. Nie dlatego, żeby napotkał jakieś nieoczekiwane przeszkody. Po prostu w trakcie prac nad nią wpadł na pomysł, który tak go pochłonął, że zarzucił zaczęte prace. Ale jest to temat na osobną historię.



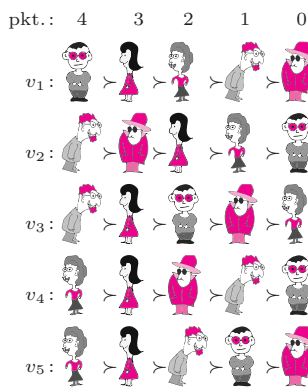
System wyborczy Chamberlina–Couranta

Piotr SKOWRON*

System Chamberlina–Couranta nie jest jedynym alternatywnym systemem wyboru komitetów względem systemów partyjnych. Zainteresowanym Czytelnikom polecamy zapoznanie się z systemem pojedynczego głosu przechodniego oraz z systemami opartymi o aprobatę [2], m.in. z systemem opartym o proporcjonalną aprobatę.

Rozważmy scenariusz, w którym wyborcy głosują na kandydatów w celu wyłonienia zwycięskiego komitetu (podzbioru kandydatów o ustalonej liczebności). Przykładami takiego scenariusza są wybory parlamentarne, wybory samorządowe, wybory do rad nadzorczych itp. W wielu przypadkach wynik takich wyborów zależy nie tylko od preferencji wyborców względem kandydatów, ale również od systemu wyborczego, czyli od metody używanej do wyłaniania zwycięzców. Różne systemy wyborcze mają także różny wpływ na późniejsze zachowanie członków wybranego komitetu. Przykładowo w systemach wyboru parlamentu, w których obywatele pośrednio lub bezpośrednio głosują na partie polityczne, istnieje ryzyko, że wybrani politycy będą silniej związani z macierzystymi partiami niż z własnym elektoratem. Ta obserwacja zainspirowała dwóch amerykańskich politologów, Johna Chamberlina i Paula Couranta, do zaprojektowania nowego systemu wyborczego, alternatywnego do systemów partyjnych [1].

*University of Oxford



Rys. 1. Rysunek ilustruje przykładowe wybory. Dla wyborcy v_1 najbardziej preferowanym kandydatem jest 👤_0 . Jeżeli 👤_0 byłby reprezentantem dla v_1 , to zadowolenie v_1 osiągnęłoby 4 punkty ($z_{\text{Bor}}(\text{👤}_0) = 4$). Drugim w kolejności preferencji jest 👤_1 (zadowolenie v_1 z takiego reprezentanta wynosiłoby 3 punkty, $z_{\text{Bor}}(\text{👤}_1) = 3$), trzecim 👤_2 (z zadowoleniem wynoszącym 2 punkty, $z_{\text{Bor}}(\text{👤}_2) = 2$), itd.

Zanim opiszemy system Chamberlina–Couranta, wprowadźmy kilka oznaczeń i pomocniczych definicji. Niech $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ i $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ oznaczają odpowiednio zbiór wyborców i zbiór kandydatów. Niech k oznacza rozmiar komitetu, który chcemy wybrać spośród kandydatów. Każdy wyborca oddaje głos poprzez uszeregowanie zbioru kandydatów od najbardziej do najmniej preferowanego. Przykładowe wybory przedstawione są na rysunku 1. Dla wyborcy v i kandydata c przez $\text{pos}_v(c)$ oznaczmy pozycję kandydata c w rankingu preferencji wyborcy v . Przykładowo, jeżeli c jest ulubionym kandydatem v , to $\text{pos}_v(c) = 1$, jeżeli c jest drugi na liście preferencji v , to $\text{pos}_v(c) = 2$ itd. Zdefiniujemy zadowolenie wyborcy v z kandydata c za pomocą metody Bordy: $z_{\text{Bor}}(v, c) = m - \text{pos}_v(c)$.

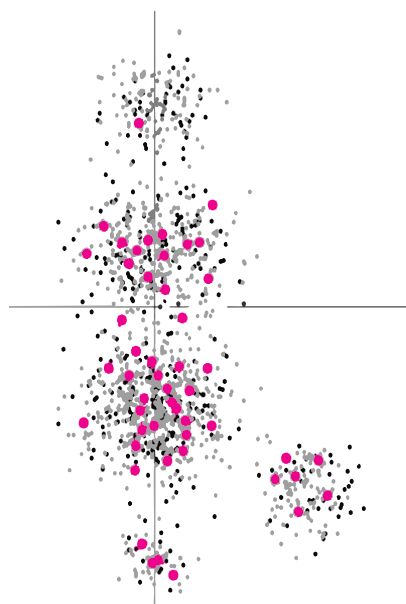
Dla każdego wyborcy v i dla każdego k -elementowego podzbioru kandydatów S , przez $\text{repr}(v, S)$ oznaczmy najbardziej preferowanego względem v członka S , tzw. *reprezentanta v w S* . Przykładowo, dla wyborcy v_1 z rysunku 1 oraz dla komitetu $S = \{\text{👤}_0, \text{👤}_1, \text{👤}_2\}$, mamy $\text{repr}(v_1, S) = \text{👤}_0$. Zdefiniujmy teraz zadowolenie wyborcy v z komitetu S jako zadowolenie wyborcy z jego reprezentanta w S : $z_{\text{Bor}}(v, S) = z_{\text{Bor}}(v, \text{repr}(v, S))$. Dla naszego poprzedniego przykładu mamy więc:

$$z_{\text{Bor}}(v_1, \{\text{👤}_0, \text{👤}_1, \text{👤}_2\}) = z_{\text{Bor}}(v_1, \text{👤}_0) = m - \text{pos}_{v_1}(\text{👤}_0) = 5 - 3 = 2.$$

Zdefiniujmy wynik punktowy k -elementowego komitetu $S \subseteq C$ jako sumę zadowoleń poszczególnych wyborców: $\text{pkt}(S) = \sum_{v \in V} z_{\text{Bor}}(v, S)$. System Chamberlina–Couranta wybiera komitet z najwyższym wynikiem punktowym $\text{argmax}_{S \subseteq C: |S|=k} \text{pkt}(S)$. Innymi słowy, w systemie Chamberlina–Couranta zwycięzcą zostaje komitet, który minimalizuje średnią pozycję reprezentanta w rankingu wyborcy. Dla przykładu z rysunku 1 i dla $k = 2$ zwycięzcą zostaje $\{\text{👤}_0, \text{👤}_1\}$ z wynikiem punktowym $\text{pkt}(\{\text{👤}_0, \text{👤}_1\}) = 2 + 4 \cdot 4 = 18$. W tym przypadku reprezentant wyborcy v_1 znajduje się na trzeciej pozycji w jego rankingu preferencji, zaś pozostali czterej wyborcy mają jako reprezentantów swoich ulubionych kandydatów. Dla tego komitetu średnia pozycja reprezentanta w rankingu wyborcy wynosi $\frac{\sum_{v \in V} \text{pos}_v(\text{repr}(v, S))}{n} = \frac{3+4 \cdot 1}{5} = 1,4$.

Intuicyjnie, w systemie Chamberlina–Couranta zwycięski komitet w pewnym sensie najlepiej reprezentuje elektorat wyborczy. Intuicję tę potwierdza rysunek 2, opisujący pewne przykładowe społeczeństwo, gdzie wyborcy i kandydaci reprezentowani są przez punkty na płaszczyźnie. Położenie punktów można interpretować na wiele sposobów. Przykładowo, położenie na osi „x” może odzwierciedlać preferencje wyborców względem polityki ekonomicznej państwa (punkty bardziej przesunięte w lewą stronę odpowiadają wyborcom/kandydatom o bardziej socjalnych poglądach, zaś te przesunięte w prawą stronę – bardziej liberalnym). Położenie na osi „y” możemy interpretować jako preferencje światopoglądowe wyborców (wyborcy konserwatywni *vs.* liberalni). Rzeczywiście, punkty odpowiadające zwycięskiemu komitetowi (kolorowe punkty) pokrywają płaszczyznę „podobnie” do punktów odpowiadających wyborcom (czarne punkty). Jednak czy zawsze jest możliwe wybranie komitetu, który będzie dobrze reprezentował wyborców? Niżej spróbujemy odpowiedzieć na to nurtujące pytanie.

Przypomnijmy, że funkcja W Lamberta jest zdefiniowana tak, aby dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodziło $a = W(a)e^{W(a)}$. W szczególności dla $a > e$ zachodzi $W(a) < \ln(a)$. Przyjmijmy $x = \frac{mW(k)}{k}$ i rozważmy rankingi wyborców obcięte do pierwszych x pozycji. Rozważmy następującą iteracyjną procedurę: w pierwszym kroku wybieramy kandydata, który występuje najczęściej wśród pierwszych x pozycji. Nazwijmy takiego kandydata a_1 . Następnie dla każdego wyborcy, dla którego a_1 występuje na jednej z pierwszych x pozycji, zaznaczamy, że a_1 będzie jego tymczasowym reprezentantem; ponadto usuwamy wszystkich takich wyborców, tzn. wyborców, którzy mają przypisanego tymczasowego reprezentanta. W drugim kroku wybieramy kandydata, który występuje najczęściej wśród pierwszych x pozycji dla pozostałych (nieusuniętych)



Rys. 2. Czarne punkty reprezentują wyborców, szare – kandydatów, a kolorowe – zwycięski komitet. Zakładamy preferencje geometryczne, czyli wyborca preferuje kandydatów, którzy odpowiadają bliższym mu punktom.

System Monroe. W 1995 Burt Monroe zauważył, że system Chamberlina–Couranta jest w pewnym stopniu niedoskonały. Spójrzmy na przykładowe wybory poniżej:

$$\begin{aligned} v_1: c_1 \succ c_2 \succ c_3 \succ \dots \succ c_{100} \\ v_2: c_1 \succ c_2 \succ c_3 \succ \dots \succ c_{100} \\ \dots \\ v_{999}: c_1 \succ c_2 \succ c_3 \succ \dots \succ c_{100} \\ v_{1000}: c_{100} \succ c_2 \succ c_3 \succ \dots \succ c_1 \end{aligned}$$

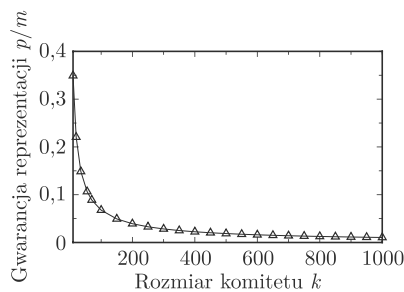
Dla $k = 2$ zwycięskim komitetem jest $\{c_1, c_{100}\}$ – w tym przypadku każdy wyborca ma swojego ulubionego kandydata jako reprezentanta. Jednak społeczne poparcie dla kandydata c_{100} jest zdecydowanie niższe niż dla c_1 . Czy aby na pewno c_{100} powinien być członkiem zwycięskiego komitetu? Burt Monroe zasugerował, aby każdy członek wybranego komitetu reprezentował mniej więcej taką samą liczbę wyborców, czyli $\lfloor \frac{m}{k} \rfloor$ lub $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ wyborców. Obliczając wynik punktowy dla komitetu S , staramy się znaleźć możliwie najlepsze przyporządkowanie członków komitetu do wyborców, tak aby kryterium Monroe'a zostało spełnione. Np. gdy $S = \{c_1, c_2\}$, optymalne przypisanie członków komitetu do wyborców to np. takie, gdzie pierwszych 500 wyborców jest reprezentowanych przez c_1 , a następnych 500 przez c_2 . Wtedy komitet $\{c_1, c_2\}$ ma wynik punktowy:

$$\text{pkt}_{\text{Mon}}(\{c_1, c_2\}) = 500 \cdot 99 + 500 \cdot 98.$$

Dla komitetu $\{c_1, c_{100}\}$ ten wynik wynosi tylko:

$$\text{pkt}_{\text{Mon}}(\{c_1, c_{100}\}) = 500 \cdot 99 + 1 \cdot 99.$$

Podobnie jak w systemie Chamberlina–Couranta w systemie Monroe zwycięski komitet to ten z najwyższym wynikiem punktowym. Ćwiczenie dla zainteresowanych Czytelników: czy w przypadku systemu Monroe również możemy znaleźć górne ograniczenie na średnią pozycję reprezentanta wyborcy?



Rys. 3. Stosunek $\frac{p}{m}$ dla zmieniającego się rozmiaru komitetu k . Dla $k = 460$ stosunek $\frac{p}{m}$ wynosi mniej niż 0,02, co oznacza, że średnio reprezentant wyborcy jest z jego punktu widzenia lepszy niż 98% kandydatów.

Literatura

- [1] J. Chamberlin and P. Courant, *Representative deliberations and representative decisions: Proportional representation and the borda rule*, American Political Science Review, 77(3):718–733, 1983.
- [2] D. M. Kilgour, *Approval Balloting for Multi-winner Elections*, pages 105–124, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [3] P. Skowron, P. Faliszewski, and A. Slinko, *Achieving fully proportional representation: Approximability results*, Artificial Intelligence, 222:67–103, 2015.

wyborców – nazwijmy go a_2 . Podobnie jak poprzednim razem, przypisujemy a_2 jako tymczasowego reprezentanta dla wyborców, dla których a_2 występuje wśród pierwszych x pozycji, a następnie usuwamy tych wyborców. Całą procedurę powtarzamy k razy.

Wykażemy teraz przez indukcję, że po i -tym kroku powyższej procedury co najwyżej $n(1 - \frac{W(k)}{k})^i$ wyborców nie ma przypisanego tymczasowego reprezentanta. Dla $i = 0$ nie został usunięty żaden wyborca, czyli pozostało ich $n = n(1 - \frac{W(k)}{k})^0$; dowodzi to kroku bazowego indukcji. Niech n_i oznacza liczbę wyborców, którzy zostali bez tymczasowych reprezentantów po i -tym kroku. Tacy wyborcy mają wśród swoich pierwszych x pozycji kandydatów, którzy do i -tego kroku nie zostali jeszcze wybrani przez naszą iteracyjną procedurę (jest dokładnie $(m - i)$ takich kandydatów). Z zasady szufladkowej Dirichleta wnioskujemy, że po i -tej iteracji jeden z pozostałych kandydatów występuje na pierwszych x pozycjach w listach preferencji dla co najmniej $\frac{n_i x}{m - i}$ nieusuniętych wyborców. Oznacza to, że w $(i + 1)$ -szym kroku usuniemy co najmniej $\frac{n_i x}{m - i}$ wyborców. Zatem

$$n_{i+1} \leq n_i - \frac{n_i x}{m - i} \leq n_i \left(1 - \frac{x}{m}\right) = n_i \left(1 - \frac{W(k)}{k}\right).$$

Zakładając, że nasza hipoteza indukcyjna jest spełniona dla pewnego i , czyli zakładając, że $n_i \leq n(1 - \frac{W(k)}{k})^i$, wnioskujemy

$$n_{i+1} \leq n_i \left(1 - \frac{W(k)}{k}\right) \leq n \left(1 - \frac{W(k)}{k}\right)^i \left(1 - \frac{W(k)}{k}\right) = n \left(1 - \frac{W(k)}{k}\right)^{i+1}.$$

Dowodzi to poprawności kroku indukcyjnego. W rezultacie dla $i = k$ otrzymujemy

$$n_k \leq n \left(1 - \frac{W(k)}{k}\right)^k \leq n \left(\frac{1}{e}\right)^{W(k)} = \frac{nW(k)}{k}.$$

Podsumowując: w komitecie wybranym przez naszą iteracyjną procedurę co najmniej $(n - \frac{nW(k)}{k})$ wyborców ma reprezentantów z pierwszych x pozycji.

Pozostałych $\frac{nW(k)}{k}$ wyborców może mieć reprezentantów na dowolnych pozycjach. Niech p będzie średnią pozycją reprezentanta w wybranym komitecie (liczoną względem wszystkich wyborców). Wówczas

$$p \leq \frac{1}{n} \left[\left(n - \frac{nW(k)}{k}\right)x + \frac{nW(k)}{k}m \right] \leq x + \frac{W(k)}{k}m = \frac{2mW(k)}{k}.$$

Czy $\frac{p}{m} \leq \frac{2W(k)}{k}$ to dobra jakość reprezentacji? Gdyby użyć systemu Chamberlina–Couranta do polskich wyborów parlamentarnych, gdzie $k \approx 460$, a $m \approx 6000$, otrzymalibyśmy $\frac{p}{m} \leq 0,02$. Oznacza to, że niezależnie od preferencji wyborców, średni wyborca byłby reprezentowany przez kogoś spośród 2% swoich ulubionych kandydatów. Rysunek 3 przedstawia stosunek $\frac{p}{m}$ dla zmieniających się wartości rozmiaru komitetu k .

Na koniec zauważmy, że opisana powyżej iteracyjna procedura pozwala wytypować bardzo dobre (choć, być może, nieoptymalne) komitety. W niektórych przypadkach procedura ta może zostać użyta zamiast oryginalnego systemu Chamberlina–Couranta. Jej zaletą jest to, że zwycięski komitet może zostać łatwo znaleziony. Dla oryginalnego systemu Chamberlina–Couranta obecnie najefektywniejsza metoda znajdowania zwycięskiego komitetu polega na sprawdzeniu wyników punktowych wszystkich możliwych $\binom{m}{k}$ komitetów. Dla $k \approx 460$ i $m \approx 6000$, liczba $\binom{m}{k}$ ma 704 cyfry – w takim przypadku liczba wszystkich komitetów, które należy sprawdzić, jest zbyt duża nawet dla najnowocześniejszych komputerów. Wówczas zastosowanie rozwiązania przybliżonego to jedyna alternatywa. Czytelników zainteresowanych podobnymi pytaniami i bardziej szczegółową analizą odsyłamy do oryginalnego artykułu [3], a jako ćwiczenie proponujemy analizę systemu, w którym każdy wyborca powinien mieć r reprezentantów: zadowolenie wyborcy ze zbioru r reprezentantów definiujemy jako sumę zadowoleń z poszczególnych reprezentantów. Czy w takim systemie możemy znaleźć dolne ograniczenie na zadowolenie wyborców?

Uroki starości

Myślmy o ludziach starych jako o zręczących i niemających nic ciekawego do powiedzenia. W szczególności nam, młodym, żyjącym w zupełnie innej epoce. A oto przyjazny los i autorka położyły mi na stół książkę *Spojrzenie wstecz. Rozmowy*. Justyna Dąbrowska miała oryginalny pomysł, aby porozmawiać o życiu z ludźmi, których łączy fakt urodzenia się „przed wojną”. Tą drugą. I oto okazało się, że nie są to narzekający staruszkowie. Ci ludzie mają nam coś do powiedzenia, a robią to niezwykle subtelnie. Nie pouczają, czego się zawsze boimy. W całej serii rozmów powtarza się stabilizowanie własnej wiedzy o życiu i własnego „rośnięcia” z upływem lat. Też wbrew obiegowej opinii, ludzie ci łagodnieją, choć ich poglądy są coraz bardziej stabilne. Ale nie ZWALCZAJĄ cudzych – po prostu wyjaśniają swoje.

I, gdy czytałam te rozmowy, narastała we mnie świadomość potrzeby istnienia w życiu społecznym autorytetów. To bardzo ulotna potrzeba, nie każdy ją ma, ale wielu z nas się wydaje, że „oooo, kiedyś to tacy byli, a teraz tylko młodość, uroda i sukces”. Pewno tak mówimy, bo nie bardzo dostrzegamy ludzi obok nas, siedzących na ławce na przystanku i uważnie patrzących wokół. Justyna Dąbrowska zauważyła, porozmawiała i okazało się, że są, tylko coraz rzadziej ich słuchamy.

Ci ludzie „sprzed wojny” już odchodzą. Ich życie, między innymi przez tę wojnę, było często dramatyczne, często uniemożliwiła im ona, ta wojna i Polska, która nastąpiła po wojnie, taki rozwój, o jakim marzyli. Zatem warto dowiedzieć się, jak sobie dali radę. Każdy inaczej.

Zmarły niedawno wielki, światowej miary embriolog Andrzej Tarkowski, wysłany był jako magistrant do Puszczy Białowieskiej i tam doszedł do wniosku, że wołałby jednak badać ssacze zarodki niż życie żubrów. Pozwolono mu wrócić do Warszawy z uwagą, żeby sobie stwarzał własny zespół, tak jak umie.

We wspomnieniach jego ówczesnej studentki pozostało prowadzenie hodowli zarodków myszy na bardzo wczesnym etapie rozwoju, stadium pojedynczych komórek, na płytkach hodowlanych. W atmosferze hodowli powinien być dwutlenek węgla o określonym stężeniu (zdaje się 5%). Dziś wytwarzają to dokładnie regulowane maszyny. W tamtych czasach doktor Tarkowski zalecił przez rurkę wydychać własne powietrze z płuc. Poćwiczyć: wdech i rurka na wydech. Wdech i rurka. . . Właściwie mam oczy na mokrym miejscu, gdy czytam te wspomnienia. Tak, pracując z zespołem podobnych pasjonatów, profesor dotarł do pozycji bliskiej Nagrody Nobla. Gdyby był z Anglii i prowadził badania „po tamtej stronie żelaznej kurtyny”, to pewno by dostał, bo za badania embriologiczne prowadzące do technik rozmnażania *in vitro* nagrody przyznano.

Życie zetknęło mnie dużo później z Profesorem Tarkowskim. To już była „nowa” Polska, ale nadal biedna. Robiliśmy badania na pojedynczych komórkach, trzeba je było fotografować, a my nie mieliśmy odpowiedniej nasadki na mikroskop. Całość „warsztatu badawczego” zbieraliśmy po całej Warszawie, zostawiając kwity pobrania. Wyjątkową nasadkę mieli tylko w Zakładzie „u Tarkowskiego”, udałam się więc do Niego z długą mową, jak bardzo ważne są nasze badania i jak bardzo zależne od posiadania nasadki. Profesor otworzył szufladę, wyjął to cudo, odebrał pokwitowanie, a ja zaniósłam je do zaprzyjaźnionego instytutu, gdzie składaliśmy, z czego się dało, układ badawczy.

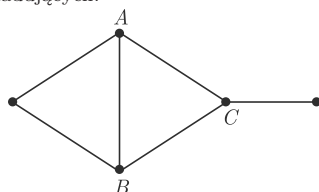
Po paru latach Profesor upomniał się o nasadkę (miał pokwitowanie), tymczasem zaprzyjaźniony instytut zlikwidował pracownię i nakładka zaginęła. Przez wiele lat, gdy tylko spotykałam Profesora Tarkowskiego, wypominał mi tę zgubę. Czulałam się jak uczennica, która nie sprostала prostemu zadaniu.

Do Panteonu Justyny Dąbrowskiej ludzi z autorytetem dopisuję Andrzeja Tarkowskiego. Niestety, już z Nim nie przeprowadzi rozmowy.

Zmarł 23 września 2016.

Magdalena FIKUS

Oto przykład grafu, w którym ponad połowa wierzchołków ma stopień większy niż średnia stopni wierzchołków z nimi sąsiadujących.

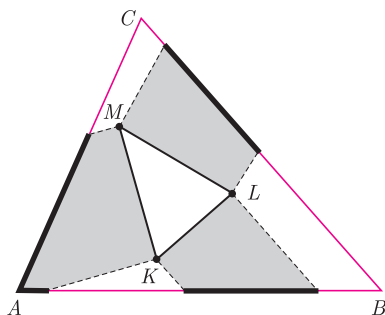


Każdy z wierzchołków A , B i C ma stopień równy 3, podczas gdy średnia stopni jego sąsiadów jest mniejsza niż 3. Niemniej jednak w tym grafie średnia stopni wynosi 2,4, a średnia ze średnich stopni sąsiadów wynosi 2,7(3).

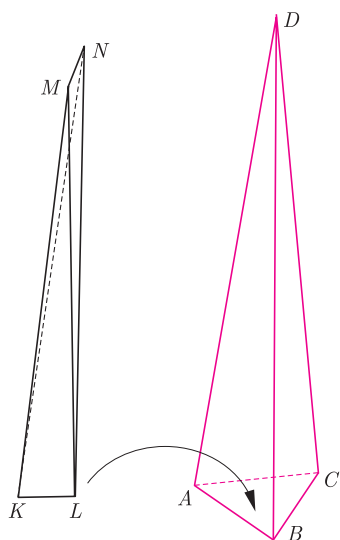
Jak długa jest kula?

Łukasz RAJKOWSKI*

Wyobraźmy sobie, że wewnątrz trójkąta ABC umieściliśmy trójkąt KLM . Wówczas pole KLM nie przekracza, oczywiście, pola ABC . Czy możemy stwierdzić to samo o obwodach tych trójkątów? W tym przypadku słowo „oczywiście” również wydaje się uprawnione, Czytelnicy *Delty* z pewnością wiedzą jednak, jak łatwo o nadużycie tej formułki. Szczęśliwie w tej sytuacji nie pociągałoby to za sobą tragicznych konsekwencji, gdyż istotnie, również obwód trójkąta KLM nie przekracza obwodu trójkąta ABC . Jeden ze sposobów uzasadnienia tego faktu jest następujący: dla każdego boku trójkąta KLM wyobraźmy sobie słońce świecące prostopadłe do wybranego boku, umiejscowione po stronie pozostałej części trójkąta KLM . Wówczas na brzegu trójkąta ABC pojawią się rozłączne cienie boków trójkąta KLM , o długościach nie mniejszych od długości odpowiadających im boków KLM (rysunek obok powinien rozjaśnić wszelkie niejasności tego słonecznego opisu).



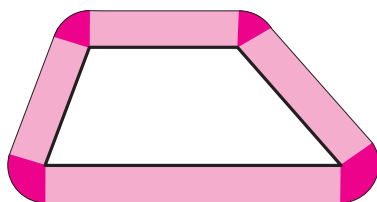
Czy przedstawiona własność przysługuje również innym wielokątom? Chwila namysłu pozwala stwierdzić, że nie – jeśli wewnętrzny wielokąt jest dostatecznie „połamany”, jego obwód może śmiało przewyższyć obwód wielokąta zewnętrznego. Nietrudno jednak naprawić tę przykrość, gdyż wystarczy zażądać, aby rozważane wielokąty były wypukłe i wówczas przedstawiony wcześniej argument o „rozłączności cieni” pozostaje w mocy.



Dla tych, którzy mają cień wątpliwości, dodatkowe wyjaśnienie: odcinek MN musi być tak krótki, by zmieścił się w czworokącie $ABCD$, mimo, iż krawędzie KM , ML , LN i NK są tylko niewiele krótsze od krawędzi AD , DB i DC .

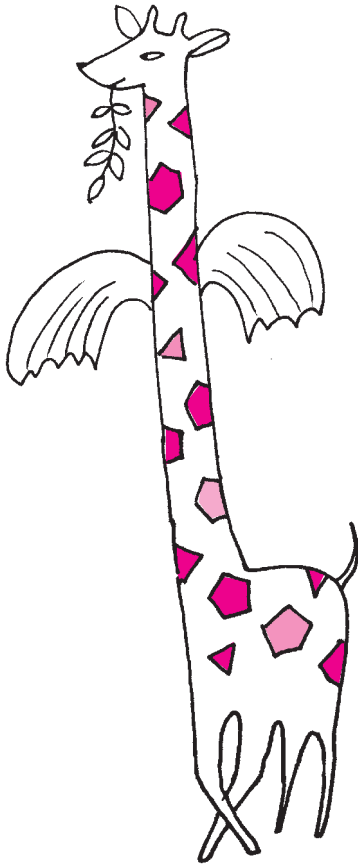
Skoro tak dobrze poszło nam na płaszczyźnie, spróbujmy naszych sił w trzech wymiarach. Jeśli pewien wielościan wypukły jest zawarty w innym, to objętość zawartego jest nie większa od objętości zawierającego. Odnośnie pól powierzchni tych wielościanów, możemy zastosować rozumowanie analogiczne do dwuwymiarowego – teraz rozłączne cienie będą rzucane przez ściany wewnętrznego wielościanu (ponownie kluczowe jest założenie o wypukłości rozważanych obiektów). Kolejnym naturalnym zadaniem jest porównanie sumy długości krawędzi bohaterów naszych rozważań. Zapewne, nawet jeśli nie spotkałeś się wcześniej, Czytelniku, z tym problemem, zdążyłeś już pewnie kątem oka dostrzec rysunek na marginesie, który bez cienia wątpliwości dowodzi, że sumy długości krawędzi wielościanów – nawet wypukłych – nie porównują się już w sposób tak elegancki, jakby sugerowały to nasze wcześniejsze przemyślenia. Czy istnieje sposób na uratowanie choćby części naszych przypuszczeń?

Okazuje się, że tak! Wystarczy każdej krawędzi badanych wielościanów przypisać wagę równą zewnętrznemu kątowi między ścianami spotykającymi się wzdłuż tej krawędzi. Aby się o tym przekonać, rozpocznijmy od słynnego zadania o żyrafie, którym bawione są kolejne pokolenia uczniów. Brzmi ono następująco: wybieg dla żyrafy jest otoczony płotem w kształcie trapezu o obwodzie 100 metrów i polu 300 m^2 . Żyrafa ma szyję długości dwóch metrów i bardzo duży apetyt; oblicz pole powierzchni obszaru znajdującego się w zasięgu żyrafiej paszczy.



Na pierwszy rzut uczniowskiego oka problem wydaje się mieć podejrzanie mało założeń, chwila analizy rysunku na marginesie pozwala jednak stwierdzić, że istotnie żadnej innej informacji nam do szczęścia nie potrzeba. Dostępny dla żyrafy obszar spoza wybiegu można podzielić na prostokąty o wysokości 2 i podstawach będących którymś z boków wybiegu oraz fragmenty kół o promieniu 2 i środkach w wierzchołkach wybiegu. Suma pól wspomnianych prostokątów to przemnożony przez 2 obwód wybiegu, czyli 200, fragmenty kół natomiast sumują się do pola całego koła o promieniu 2, czyli 4π . Ostateczna odpowiedź na pytanie to $300 + 100 \cdot 2 + \pi \cdot 2^2$. Warto zauważyć, że przedstawione rozumowanie pozostaje słuszne, jeśli o wybiegu założymy tylko, że jest wielokątem wypukłym – dzięki temu wymienione wcześniej części badanego obszaru są rozłączne, a odpowiednie fragmenty kół składają się na jedno pełne koło.

Popuśćmy teraz wodze fantazji i wyobraźmy sobie *żyratoperze*, czyli żyrafy fruujące radośnie w powietrzu dzięki ogromnym, nietoperzowym skrzydłom.



Wybieg dla żyratoperzy to ogromny, wiszący w powietrzu drucziany wielościan \mathcal{A} , o „okach” pozwalających żyratoperzom na przecięnięcie ich szyi o długości d . Tym razem obszar, z którego żyratoperze mogą podjadać smakołyki, można podzielić na sam wybieg, prostopadłościany o wysokości d i podstawach będących ścianami wybiegu, fragmenty walców, których wysokości to krawędzie wybiegu, a podstawy to wycinki koła o promieniu d oraz fragmenty kul o środkach w wierzchołkach wybiegu i promieniu d .

Podobnie jak poprzednio, objętości wspomnianych prostopadłościaków sumują się do powierzchni wielokąta pomnożonej przez d , natomiast objętości fragmentów kul – do objętości całej kuli o promieniu d . Co z fragmentami walców? Nietrudno zauważyć, że każdy z nich ma podstawę o powierzchni $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi d^2$, gdzie α jest kątem zewnętrznym między ścianami spotykającymi się wzdłuż krawędzi będącej wysokością danego fragmentu walca. Jeśli więc przez $V_3(\mathcal{A})$, $V_2(\mathcal{A})$, $V_1(\mathcal{A})$ oznaczymy odpowiednio objętość \mathcal{A} , jego pole powierzchni oraz sumę długości krawędzi przemnożonych przez kąt zewnętrzny między odpowiednimi ścianami, otrzymamy

$$(*) \quad V_3((\mathcal{A})_d) = V_3(\mathcal{A}) + V_2(\mathcal{A}) \cdot d + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{A}) \cdot d^2 + \frac{4}{3} \pi d^3,$$

gdzie $(\mathcal{A})_d$ to obszar dostępny żyratoperzom o długości szyi wynoszącej d . Oczywiście, jeśli wybieg żyratoperzy zostanie zmniejszony do wielościanu \mathcal{B} , znajdującego się wewnątrz \mathcal{A} , to obszar w zasięgu ich żarłocznych paszcz również ulegnie zmniejszeniu i w tej sytuacji

$$V_3(\mathcal{A}) + V_2(\mathcal{A}) \cdot d + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{A}) \cdot d^2 \geq V_3(\mathcal{B}) + V_2(\mathcal{B}) \cdot d + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{B}) \cdot d^2$$

lub równoważnie

$$\frac{V_3(\mathcal{A})}{d^2} + \frac{V_2(\mathcal{A})}{d} + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{A}) \geq \frac{V_3(\mathcal{B})}{d^2} + \frac{V_2(\mathcal{B})}{d} + \frac{1}{2} V_1(\mathcal{B}).$$

Widać, że wraz z wydłużaniem się żyratoperzych szyi rola składników związanych z objętościami i powierzchniami wielościanów w powyższym wzorze staje się zaniedbywalnie mała. W tej sytuacji otrzymujemy nierówność $V_1(\mathcal{A}) \geq V_1(\mathcal{B})$, na której tak nam zależało.

Wielkość $V_1(\mathcal{A})$ nosi nazwę *1-wymiarowej objętości wewnętrznej* wielościanu \mathcal{A} i dzięki wykazanej powyżej monotoniczności ze względu na zawieranie może być również określona dla dowolnego ciała wypukłego \mathcal{K} w przestrzeni poprzez przybliżanie ciała \mathcal{K} wielościanami w nim zawartymi. Posługując się tą definicją, trudno nam będzie jednak wyznaczyć tytułową „długość kuli”, czyli $V_1(\mathbf{B}_r)$, gdzie \mathbf{B}_r jest kulą o promieniu r . W sukurs przychodzi nam wzór $(*)$, dziedziczony przez zbiory wypukłe po wielościanach, który po wykorzystaniu oczywistej zależności $(\mathbf{B}_r)_d = \mathbf{B}_{r+d}$ przyjmuje postać

$$\frac{4}{3} \pi (r+d)^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 + 4\pi r^2 d + \frac{1}{2} V_1(\mathbf{B}_r) d^2 + \frac{4}{3} \pi d^3.$$

Równość ta po redukcji daje $4\pi r d^2 = \frac{1}{2} V_1(\mathbf{B}_r) d^2$, czyli $V_1(\mathbf{B}_r) = 8\pi r$. To więcej czy mniej od 1-wymiarowej objętości wewnętrznej sześcianu o tej samej, co kula, objętości?



Rozwiązanie zadania F 921. Przyjmijmy, że wirnik odrzuca do dołu strumień powietrza o polu przekroju $\pi d^2/4$ z prędkością v . Jeżeli gęstość powietrza wynosi ρ , to w czasie Δt wirnik nadaje powietrzu o masie $\Delta m = \rho \pi d^2 v \Delta t/4$ pęd $\Delta p = \rho \pi d^2 v^2 \Delta t/4$ i energię kinetyczną $\Delta W = \rho \pi d^2 v^3 \Delta t/8$. Aby helikopter się wzniósł, wirnik musi wytworzyć siłę ciągu równą ciężarowi helikoptera z pilotem: $\Delta p/\Delta t = Mg$, a potrzebna do tego moc wynosi $P = \Delta W/\Delta t$ (g – przyspieszenie ziemskie). Korzystając z tego, że w warunkach normalnych objętość jednego mola gazu to $V_n = 22,4$ litra, znajdujemy, że gęstość powietrza

wynosi $\rho = \mu/V_n \approx 1,3 \text{ kg/m}^3$ i otrzymujemy $v = \frac{2}{d} \cdot \sqrt{\frac{Mg}{\pi \rho}} \approx 3,5 \text{ m/s}$.

Stąd moc niezbędna dla uniesienia helikoptera z pilotem to

$$P = Mgv/2 \approx 1400 \text{ W}.$$

Ponieważ wymagana moc jest prawie dziesięciokrotnie większa od mocy, jaką może rozwinąć pilot przy długotrwałej pracy mięśni – helikopter nie wznieśnie się.



Rozwiązanie zadania F 922. Przyjmijmy, że komar macha skrzydłami z częstością f . Załóżmy, że amplituda machnięć jest rzędu długości skrzydła l i że skrzydła opuszczają się płasko, a podnoszą się krawędzią tak, że opór powietrza przy podnoszeniu można pominąć. Średnia prędkość powietrza odrzucanego skrzydłami w dół wynosi $v = fl$. Posługując się analizą wymiarową, znajdujemy, że $R = A\rho_1 S v^2/2$, gdzie $S = ld$ to powierzchnia skrzydła (współczynnik $A = 1/2$ z warunków zadania). Siła unosząca F jest równa średniej czasowej sile oporu działającej na skrzydło, pomnożonej przez liczbę skrzydeł i podzielonej przez dwa, ponieważ opór powietrza działa na skrzydło tylko przy jego ruchu w dół. Stąd $F = 2R/2 = \rho_1 S v^2/2 = \rho_1 f^2 l^3 d/2$. Siła ta musi równoważyć ciężar komara, więc $\rho_1 f^2 l^3 d/2 = mg = \rho_2 l d^2 g$, gdzie m to masa komara,

g – przyspieszenie ziemskie. Ostatecznie $f = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2\rho_2 dg}{\rho_1}} \approx 1 \text{ kHz}$.

Otrzymany wynik dość dobrze zgadza się z obserwowaną częstością bzyczenia komara.



mała delta

Znajomi moich znajomych

Wojtek leżał na podłodze i czytał właśnie książkę o grafach, którą wypożyczył z biblioteki. Alicja, jego młodsza siostra, która przeglądała w tym czasie portal społecznościowy, spytała nagle.

– Wojtek, czy uważasz, że jestem aspołeczna?

– Nie – uciął krótko.

– Mam 154 znajomych na NaszymPodwórku.

– To dużo.

– Krysia ma 210 znajomych, a Basia 245. Jednak nic nie przebije Ilony – najpopularniejszej dziewczyny w szkole – ma ona 510 znajomych.

Wojtek nie przejawiał zainteresowania rozmową ze swoją siostrą. Pochłonięty za to był lekturą.

– Obliczyłam właśnie, że moi znajomi mają średnio 172,1 znajomych.

– Jak to policzyłaś?

– No, normalnie – wzięłam średnią arytmetyczną.

– Zsumowałaś ręcznie 154 liczby?

– Nie bądź niemądry. Pomogłam sobie arkuszem kalkulacyjnym. Zresztą, to nie jest najważniejsze. Ważne jest to, że mam mniej znajomych na NaszymPodwórku niż średnio moi znajomi. Może powinnam się częściej udzielać w szkole? Od zawsze chciałam się zapisać na jakieś kółko zainteresowań.

– Uważam, że niepotrzebnie się przejmujesz. Myślę, że jest to sytuacja w pewnym sensie typowa.

– Przecież to matematycznie niemożliwe. Statystycznie połowa powinna mieć więcej znajomych niż średnio ich znajomi.

– No właśnie niekoniecznie. Weźmy tę twoją Ilonę. Ma ona 510 znajomych. Oznacza to, że podnosi ona średnią 510 osobom. Jeśli z kolei ktoś taki jak Tomek ma 10 znajomych, to obniża on średnią, ale tylko 10 osobom.

– No, nie wiem. Nie jestem do końca przekonana. Uważasz, że to jest jakaś reguła matematyczna? Można to udowodnić?

Wojtek zerwał się na równe nogi, chwycił za kartkę papieru i zaczął rysować.

– Być może możemy wykorzystać grafy!

– Grafy? – zaciekała się Alicja.

– Tak! Bo widzisz – znajomości na NaszymPodwórku można zaprezentować w postaci grafu. Te kropki, które teraz rysuję, to tak zwane wierzchołki. Każdy wierzchołek reprezentuje jednego użytkownika w serwisie. Teraz narysujemy krawędzie. Krawędzie to będą takie kreski między tymi wierzchołkami. Taka krawędź będzie oznaczała, że te dwie osoby mają się w znajomych.

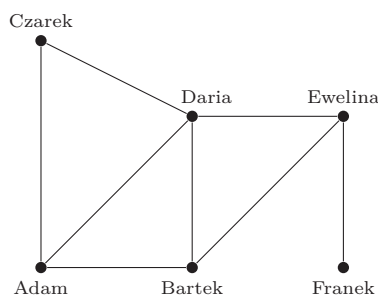
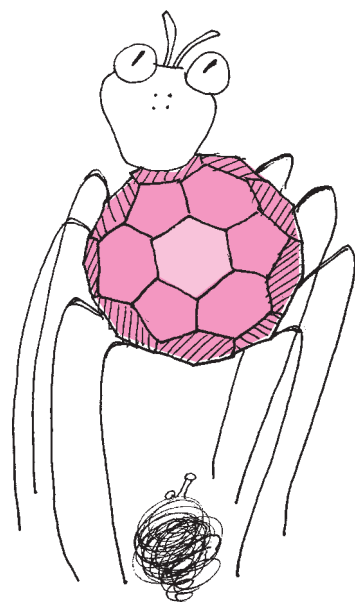
– Daria ma najwięcej znajomych.

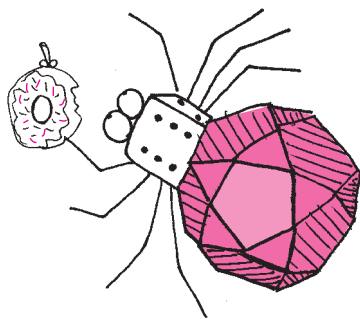
– Tak, ale...

– A Franek ma tylko jednego znajomego. To smutne.

– Nie o to chodzi! To tylko przykład. Policzmy lepiej, ile nasi bohaterowie mają znajomych.

– Adam ma trzech, Bartek też, Czarek ma dwóch. Daria ma czterech, Ewelina trzech, a Franek zna tylko Ewelinę. Biedny Franek.





– Czyli średnio mają $2\frac{2}{3}$ znajomych. Na przykładzie jest łatwo. Spróbujemy to teraz zrobić dla ogólnego grafu.

– Ale jak to zrobić? Przecież graf może wyglądać naprawdę przeróżnie!

– Każdy graf charakteryzują dwie liczby: liczba wierzchołków V oraz liczba krawędzi E . W naszym przykładzie $V = 6$, bo mamy 6 osób, a $E = 8$, bo mamy 8 krawędzi łączących te osoby.

– Czy to wystarczy? Żeby obliczyć średnią arytmetyczną, potrzebujemy wiedzieć, ile każdy wierzchołek ma znajomych.

– Wystarczy, że będziemy wiedzieli, jaka jest suma wszystkich znajomych. Popatrzmy na jedną krawędź. Na przykład, między Czarkiem a Darią.

Taka krawędź oznacza, że Czarek ma Darię w znajomych oraz Daria ma Czarka w znajomych. Zatem każda krawędź oznacza sumarycznie 2 osoby w znajomościach. Ponieważ mamy E krawędzi, oznacza to, że nasi bohaterowie mają sumarycznie $2E$ znajomych. Teraz wystarczy podzielić tę liczbę przez ilość osób, aby uzyskać średnią arytmetyczną.

– $2E/V$. Faktycznie, jak podstawimy do wzoru dane z naszego przykładu, dostaniemy ten sam wynik, jaki obliczyliśmy bez tego wzoru! – ucieszyła się Alicja.

– Teraz będzie trudniej. Dla każdego wierzchołka musimy obliczyć, ile średnio znajomych mają jego znajomi. Następnie z tych wszystkich wartości chcielibyśmy obliczyć średnią.

– Wydaje się to trochę skomplikowane. Znowu będziemy patrzyli na krawędzie?

– Spróbujmy. Jeśli Czarek ma C znajomych, a Daria D ... , to C dodamy do znajomych znajomych Darii, a potem podzielimy przez D , by obliczyć średnią. Tak samo będzie z Czarkiem. Do średniej liczby znajomych znajomych Czarka dodamy D/C .

Wojtek zapisał na papierze $C/D + D/C$.

– To jest zawsze większe od dwóch! – zauważyła Alicja.

– Jest?

– Tak! Mieliśmy to w szkole. Zobacz! Pani zaczęła od tego, że kwadrat żadnej liczby nie może być ujemny. Jak się skorzysta ze wzoru skróconego mnożenia i to, co nie jest kwadratem, przeniesie na drugą stronę, to bez trudu wpada się na pomysł, że oprócz sprowadzenia do wspólnego mianownika, można robić też coś odwrotnego. I gotowe!

– Faktycznie. Ta suma będzie większa od dwóch... lub równa, ale tylko wtedy, gdy Czarek ma dokładnie tyle samo znajomych co Daria.

– Aha! Co musimy zrobić dalej?

– Musimy posumować po wszystkich krawędziach. Ponieważ mamy E krawędzi, otrzymam coś większego od $2E$...

– ... albo równego $2E$, jeśli wszyscy użytkownicy mają dokładnie tyle samo znajomych – zauważyła Alicja.

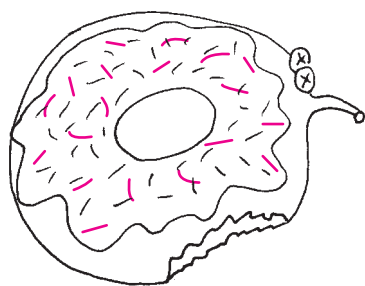
– I na koniec podzielić przez liczbę wierzchołków V , aby otrzymać średnią arytmetyczną.

– Czyli ostatecznie otrzymaliśmy coś większego lub równego $2E/V$... Czyli miałeś rację! Średnio nasi znajomi mają więcej znajomych niż my sami.

– No to, jak to już ustaliliśmy, mogę wrócić do mojej książki, a ty możesz wrócić do NaszegoPodwórka.

– Wiesz co? Chyba przejdę się do biblioteki poczytać o grafach. Mam w głowie tyle pytań. Na przykład, czy zawsze osoby, które mają mniej znajomych od średniej liczby znajomych jego znajomych, stanowią większość w grafie? A kto wie? Może przy okazji poznam kogoś ciekawego, kogo będę mogła dodać do znajomych na NaszymPodwórku.

$$\begin{aligned} (C - D)^2 &\geq 0 \\ C^2 + D^2 - 2CD &\geq 0 \\ C^2 + D^2 &\geq 2CD \\ \frac{C^2 + D^2}{CD} &\geq 2 \\ \frac{C}{D} + \frac{D}{C} = \frac{C^2}{CD} + \frac{D^2}{CD} &\geq 2 \end{aligned}$$



Odpowiedź na pytanie Alicji jest negatywna. Czy potrafisz znaleźć graf, w którym ponad połowa wierzchołków ma więcej znajomych niż średnia ilość znajomych jego znajomych? Odpowiedź: najmniejszy taki graf ma 5 wierzchołków. Czytelnik Leniwy znajdzie przykład w numerze.

Małą Deltę przygotował Krzysztof PIECUCH
doktorant, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

Delta i fizyka cząstek elementarnych (VII): LHC, cząstka Higgsa, stare i nowe problemy, nowe idee

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Piotr CHANKOWSKI*

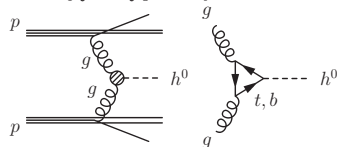
Świetność \mathcal{L} akceleratora to wielkość charakteryzująca prawdopodobieństwo „spotkania się” dwóch cząstek z przeciwbieżnych wiązek. W LHC w jednostce czasu dochodzi do n zderzeń biegnących naprzeciw siebie wzdłuż osi z „paczek” uformowanych z protonów. Jeśli $\rho_1(\mathbf{b}, z_1)$ i $\rho_2(\mathbf{b}, z_2)$ (gdzie $\mathbf{b} = (x, y)$) są rozkładami gęstości protonów w dwu zderzających się paczkach, to

$$\mathcal{L} = n \int d^2\mathbf{b} \int dz_1 dz_2 \rho_1(\mathbf{b}, z_1) \rho_2(\mathbf{b}, z_2).$$

n może zależeć od czasu, np. wskutek przerw w działaniu akceleratora (zob. także Δ_{08}^1). Przekrój czynny σ procesu $pp \rightarrow X \rightarrow X_{\text{fin}}$ pomnożony przez $\int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(t)$ daje liczbę zdarzeń $pp \rightarrow X \rightarrow X_{\text{fin}}$, które powinny zostać wytworzone w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$. Liczba zarejestrowanych takich zdarzeń (zakładając, że teoria na podstawie której obliczono σ , jest słuszną) zależy jeszcze od efektywności rejestracji stanu X_{fin} przez detektor (Δ_{00}^5). Jego identyfikację utrudniają inne procesy dające taki sam stan końcowy X_{fin} (lub nawet tylko „podobny”) – mówimy wtedy o tle zakłócającym identyfikację procesu $pp \rightarrow X \rightarrow X_{\text{fin}}$.

ATLAS, CMS i Alice są detektorami pokrywającymi prawie cały kąt bryłowy wokół punktu przecięcia wiązek zderzających się cząstek. Geometria detektora LHCb jest asymetryczna – została dobrana tak, by wygodnie było badać fizykę mezonów B (odcinek V). ATLAS i CMS i LHCb wykorzystują zderzenia przede wszystkim pp ; Alice bada (głównie) zderzenia ciężkich jonów Pb Pb.

Głównym procesem produkcji cząstki Higgsa h^0 w LHC jest fuzja gluonów wymityowanych przez kwarki tworzące zderzające się protony:



Sprzężenie dwóch gluonów do h^0 jest generowane głównie przez diagramy pętlowe z ciężkimi kwarkami t i b .

Według Modelu Standardowego cząstka Higgsa o masie 125 GeV rozpada się najchętniej na pary kwarków $b\bar{b}$, $c\bar{c}$ lub na parę ciężkich leptonów $\tau^-\tau^+$. Cząstki te jednak rozpadają się dalej, tworząc stany końcowe X_{fin} mające duże tło i przez to trudno je poprawnie identyfikować. Z tego powodu cząstkę h^0 zarejestrowano najpierw poprzez jej rozpad na dwa fotony, objawiający się wznórkami (zob. odcinek IV o odkryciach J/ψ i Υ) na wykresie liczby przypadków dwufotonowych w funkcji masy niezmienniczej dwóch fotonów oraz w rozpadzie ZZ^* rozpadających się dalej na dwie pary leptonów (Δ_{12}^{10} , Δ_{13}^7).

Przypominamy, że symbol Δ_{pq}^n oznacza odwołanie do *Delta* n/pq ; np. Δ_{02}^7 to *Delta* 7/2002, a Δ_{89}^3 to *Delta* 3/1989. Poprzednie odcinki elementarza cząstek elementarnych można znaleźć na stronie deltami.edu.pl

W 2009 r. po wielu latach przygotowań – udział w takim przedsięwzięciu wypełnia dziś niemal całą karierę fizyka-doświadczalnika – uruchomiony został (Δ_{08}^9 , Δ_{09}^{11} , Δ_{10}^3) w CERN-ie akcelerator LHC zderzający przeciwbieżne wiązki protonów i mający, według powszechnych oczekiwań (Δ_{05}^1), umożliwić dokonanie zasadniczych odkryć w fizyce wysokich energii. Istotną charakterystyką LHC jest uzyskiwana w nim bardzo duża świetność rzędu $10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ (tak duża świetność jest nieosiągalna w przypadku zderzeń $p\bar{p}$ z powodu oczywistych komplikacji z wytwarzaniem i gromadzeniem antyprotonów). Dzięki temu nawet mające bardzo mały przekrój czynny zdarzenia (produkcja jakichś cząstek) mają szansę zostać zarejestrowane (jeśli tylko pozwala na to zachowanie energii).

Pierwszym etapem przeprowadzonych w LHC badań było, jak to ujmowano, ponowne „odkrycie” fizyki Modelu Standardowego, tj. zarejestrowanie znanych i zbadanych już (we wcześniejszych eksperymentach, takich jak Tevatron) procesów i sprawdzenie, że wszystko się zgadza z istniejącymi już danymi (Δ_{11}^1). Potwierdziło to gotowość LHC i czterech głównych zespołów doświadczalnych, dysponujących czterema różnymi detektorami: ATLAS, CMS, LHCb i Alice (zob. ich zdjęcia na okładce Δ_{05}^1) do eksploracji nowych terytoriów i, w pierwszym rzędzie, do poszukiwania bozonu Higgsa (Δ_{10}^9 , Δ_{11}^7), tj. badania mechanizmu naruszenia elektrosłabej symetrii cechowania (zob. odc. I, II i III).

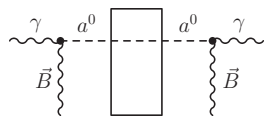
Pierwsze doniesienia o możliwym zarejestrowaniu nowej cząstki pojawiły się w grudniu 2011 roku (Δ_{12}^2). Oficjalne ogłoszenie odkrycia odbyło się w lipcu 2012 r. (Δ_{12}^{10}). Do zamknięcia pierwszego etapu działania LHC (z energią zderzeń protonów wynoszącą 7, a potem 8 TeV) wykonano wiele pomiarów właściwości nowo odkrytej cząstki. Pomiaru te są kontynuowane. Ważnym testem jest bezpośrednie sprawdzenie jej sprzężeń do bozonów W^\pm i Z^0 , co na razie nie jest w pełni osiągalne.

Jak pisałem na samym początku tego cyklu, odkrycie cząstki Higgsa można uznać za zwieńczenie całego długiego, opisanego w tych artykułach, rozdziału badań nad strukturą materii. Uzyskana zgodność z przewidywaniami Modelu Standardowego jest bowiem na tyle dobra (Δ_{13}^7), że niezależnie od ewentualnych przyszłych odkryć Model Standardowy pozostanie spójną (tj. spełniającą wszystkie wymogi fizyczne) teorią poprawnie opisującą oddziaływania kwarków, leptonów i bozonów cechowania o energiach nie przewyższających skali Fermiego ($G_F^{-1/2} \approx 250 \text{ GeV}$).

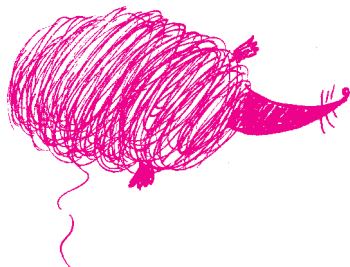
Sukces ten nie oznacza oczywiście końca badań w fizyce wysokich energii. Model Standardowy jest teorią bogatą i bardzo skomplikowaną. Wiele jego aspektów opisanych jakościowo w odcinku II wciąż wymaga głębszego zbadania. Przede wszystkim konieczne jest lepsze zrozumienie dynamiki oddziaływań kwarków i gluonów, odpowiedzialnej za formowanie się hadronów. Dzięki szybkiemu wzrostowi w ostatnich dekadach mocy obliczeniowej komputerów pomocne są tu obliczenia numeryczne, w których tworzącą kontinuum czasoprzestrzeń, na której zdefiniowane są pola kwantowe, redukuje się do dyskretnej i skończonej sieci punktów. Obliczenia takie potwierdzają poprawność chromodynamiki kwantowej jako teorii oddziaływań silnych i pozwalają praktycznie wyznaczyć niektóre wielkości konieczne do analizy fizyki zapachu i łamania CP (odcinek V). Same jednak nie zastępują zrozumienia analitycznego. Konieczne jest też lepsze zrozumienie, poprzez pomiary różnego rodzaju rozkładów partonów struktury nukleonu, w tym roli gluonów i kwarków w tworzeniu całkowitego spinu nukleonu (który musi wynosić $\frac{1}{2}\hbar$). Zagadnienia te są badane w eksperymencie COMPASS w CERN-ie (rozpraszanie mionów produkowanych przez synchrotron protonowy na tarczy spolaryzowanych nukleonów) oraz w akceleratorze RHIC w Brookhaven, jedynym na świecie mogącym zderzać wiązki spolaryzowanych protonów. Jeszcze innym zagadnieniem, badanym eksperymentalnie (w COMPASS-ie, w laboratorium Jeffersona w USA w zderzeniach e^- z tarczą oraz w zderzeniach pp w LHC) i teoretycznie, są procesy produkcji konkretnych hadronów (tzw. procesy

Obecnie zarejestrowano już większość pozostałych kanałów rozpadu h^0 oraz zmierzono względne częstości ich występowania, a także przekrój czynny produkcji h^0 . Są one zgodne z przewidywaniami Modelu Standardowego. W szczególności analiza kątownego rozkładu produktów rozpadu $h^0 \rightarrow Z^0 Z^0 \rightarrow \ell^+ \ell^- \ell^+ \ell^-$ wyklucza w zasadzie inne niż 0^+ kombinacje s^P spinu s i parzystości wewnętrznej P odkrytego rezonansu. (Skądinąd rozpad h^0 na dwa fotony wyklucza – na mocy twierdzenia Landaua–Yanga, zob. odcinek IV – spin $s = 1$.)

Sama niezmienniczość względem cechowania dopuszcza występowanie w równaniach chromodynamiki kwantowej wyrazu, którego obecność naruszałaby jawnie zachowanie parzystości kombinowanej CP (dokładniej, wyraz ten łamie samo P). Bezwymiarowy parametr θ , mnożący ten wyraz, wiąże się z nietrywialną topologicznie strukturą stanu podstawowego układu pól gluonowych (i kwarkowych). Negatywne wyniki pomiaru elektrycznego momentu dipolowego neutronu (który może być różny od zera tylko, gdy parzystość CP jest łamana) narzuca ograniczenie $|\theta| < 10^{-10}$ (samo łamanie CP w oddziaływaniach kwarków z bozonami W^\pm daje niemierzalnie mały moment dipolowy neutronu). Zrozumienie, dlaczego wartość θ jest tak mała, to wciąż aktualny problem fizyki wysokich energii. Jedną z propozycji teoretycznych jest zastąpienie θ dynamicznym skalarnym polem kwantowym, którego potencjał wymusza zerowanie się jego wartości próżniowej (efektywny parametr θ jest wtedy równy zeru). Jedną z konsekwencji takiego mechanizmu byłoby istnienie bezspinowej cząstki a^0 zwanej aksjonem, bardzo lekkiej (o masie $10^{-5} \div 10^{-3}$ eV), bo będącej bozonem NG (podobnie jak mezon π – zobacz odcinek III) dodatkowej globalnej symetrii $U(1)_{PQ}$ złamanej spontanicznie i zarazem naruszonej jawnie przez topologicznie nietrywialną strukturę próżni. Ponieważ aksjon oddziaływałby niemal wyłącznie elektromagnetycznie, w silnym polu elektromagnetycznym mogłaby zachodzić poprzez sprzężenie $a^0 \gamma \gamma$ konwersja fotonu w aksjon lub na odwrót (tzw. proces Primakoffa). Na tym efekcie opierają się próby wykrycia aksjonów. Np. eksperyment OSQAR w CERN-ie próbuje zarejestrować przechodzenie światła przez gruby blok metalu dzięki konwersji fotonu w aksjon i następnie jego rekonwersji w silnym polu zapasowych magnesów LHC.



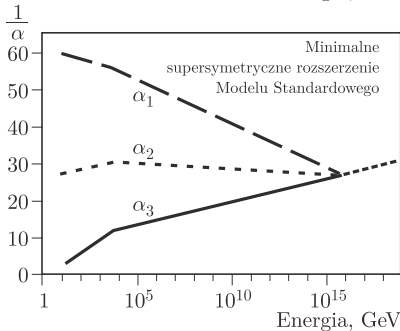
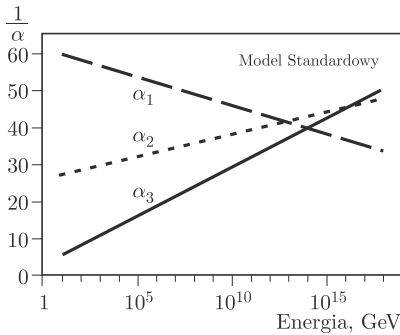
Niewykluczone jest też, że to właśnie aksjony tworzą ciemną materię Wszechświata.



ekskluzywne), głównie mezonów (π , ρ , ϕ , w rozpraszaniu leptonów i J/ψ , Υ w zderzeniach pp). Teoretyczne obliczenia wykorzystujące sieci są tu niemożliwe i wykorzystywane są różne zaawansowane matematyczne metody kwantowej teorii pola. Wreszcie dziedziną burzliwie rozwijającą się w ostatnich latach, zarówno eksperymentalnie (RHIC, LHC oraz SPS) jak też i teoretycznie, jest badanie zderzeń ciężkich jonów, w których to zderzeniach na krótką chwilę powstaje materia hadronowa o wielkiej gęstości i wysokiej temperaturze (tj. średniej energii na cząstkę), czyli warunki, jakie panują we wnętrzach gwiazd lub jakie miały miejsce na wczesnych etapach ewolucji Wszechświata (oczekuje się, że w takich warunkach powinien powstawać nowy stan materii, tzw. plazma kwarkowo-gluonowa, (Δ_{05}^{10})). Jest to bardzo obszerna i fascynująca dziedzina, leżąca na styku fizyki wysokich energii, fizyki statystycznej, a także relatywistycznej hydrodynamiki.

Oprócz tych obszarów badań, które od strony teoretycznej w zasadzie w całości obejmowane są przez Model Standardowy, pozostaje wiele zagadnień, które wymagają modyfikacji tej teorii (czyli stworzenia teorii ogólniejszej). Po pierwsze, sama struktura Modelu Standardowego nasuwa istotne pytania o charakterze teoretycznym. Wymienić tu należy pytanie o pochodzenie struktury grupy cechowania (w tym o kwantyzację ładunku elektrycznego w jednostkach $\frac{1}{3}e$) i chiralnego charakteru oddziaływań bozonów cechowania z fermionami, o wyraźnie hierarchiczne widmo mas tych ostatnich i takich charakter elementów macierzy CKM (odcinek I), a także pytanie o liczbę generacji. Nierozstrzygnięte nadal pozostaje pytanie o charakter neutrino (odcinek VI) oraz pochodzenie ich mas i macierzy PMNS. Wreszcie, bez odpowiedzi pozostaje wciąż pytanie, dlaczego oddziaływania silne zachowują parzystość kombinowaną CP. Jeszcze jednym istotnym problemem Modelu Standardowego, jaki dostrzegają teoretycy, jest stabilność skali Fermiego (zob. niżej). Problem stanowi też za duży (o 120 rzędów wielkości!) wkład próżniowych fluktuacji kwantowych pól Modelu Standardowego do stałej kosmologicznej (Δ_{08}^5 , Δ_{06}^{10} , Δ_{11}^{12} , Δ_{12}^{10}). W tle wszystkich tych pytań pozostaje zawsze ostateczny cel teoretycznych badań w fizyce wysokich energii, jakim jest stworzenie jednej teorii wszystkich oddziaływań z grawitacyjnymi włącznie (Weinberga sen o teorii ostatecznej).

Po drugie, w miarę pogłębiania się zrozumienia związków fizyki wysokich energii z kosmologią i astrofizyką (Δ_{05}^3), stało się jasne, że jakkolwiek wyniki wszystkich eksperymentów laboratoryjnych są, jak dotąd, dobrze ujmowane przez Model Standardowy, istnieją fakty fizyczne, których teoria ta nie uwzględnia. Przede wszystkim z analizy modeli kosmologicznych wynika, że 23% gęstości energii Wszechświata (Δ_{08}^5) stanowi tzw. ciemna, bo nieświecąca, materia (Δ_{86}^7 , Δ_{00}^6 , Δ_{03}^{10} , Δ_{03}^{12} , Δ_{04}^7 , Δ_{07}^1 , Δ_{07}^2 , Δ_{12}^{11} , Δ_{13}^6). Panuje też powszechne przekonanie, że energię tę stanowią tworzące otoczki galaktyk (tzw. galaktyczne halo) jakieś stabilne (lub o czasie życia rzędu wieku Wszechświata) cząstki bardzo słabo oddziałujące ze zwykłą materią (możliwe są jednak i inne interpretacje danych – zob. Δ_{08}^5). Istnienia takich cząstek Model Standardowy w ogóle nie przewiduje. Innym ważnym zagadnieniem kosmologicznym, w oczywisty sposób wiążącym się z fizyką wysokich energii, jest problem bariogenezy, czyli powstania we Wszechświecie nadwyżki materii (o dodatniej liczbie barionowej) nad antymaterią (Δ_{10}^{12}). Jak pisałem (odcinek III), aby podczas zachodzącej w miarę stygnięcia Wszechświata (wskutek jego kosmologicznej ekspansji) anihilacji materii i antymaterii oprócz fotonów (i neutrino) pozostała jeszcze pewna ilość materii (z której powstały galaktyki i wszystko, z czym mamy do czynienia!), muszą, na jakimś etapie ewolucji Wszechświata, być spełnione trzy warunki Sacharowa (Δ_{02}^{12}). Spełnienie tych warunków musi być z kolei konsekwencją teorii opisującej oddziaływania elementarne przy energiach odpowiadających temu etapowi ewolucji Wszechświata, czyli panującej w nim wtedy temperaturze T . Model Standardowy przewiduje wprowadzić niezachowanie liczby barionowej w wysokich temperaturach (odcinek II), kłopot sprawiają jednak dwa pozostałe warunki Sacharowa. Jeśli przyjąć, że teoria ta jest słuszna w całym zakresie energii, to jedynym etapem ewolucji Wszechświata, na którym mogłaby powstać nierównowaga termodynamiczna, jest przemiana fazowa, w której powstaje kondensat pola Higgsa. Okazuje się jednak, że gdy masa cząstki Higgsa wynosi 125 GeV, przemiana ta zachodzi bardzo łagodnie i zaburzenie równowagi termodynamicznej jest za słabe. Co więcej, nawet gdyby masa cząstki Higgsa nie była tak duża i przemiana fazowa byłaby dostatecznie

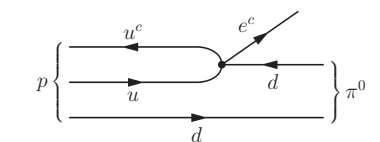


Zbieganie się stałych sprzężenia Modelu Standardowego i jego supersymetrycznej wersji.

Najprostszą teorią wielkiej unifikacji jest teoria z grupą cechowania $SU(5)$. Przewiduje ona, że lewochiralne pola kwantowe q kwarków, q^c antykwarków, l leptonów i l^c antyleptonów (zob. margines w odcinku II) każdej generacji tworzą tylko dwa multiplety grupy cechowania: w skład jednego wchodzi pola $d_c^c, d_n^c, d_z^c, e^-, \nu_e$, a w drugi pola $u_c^c, u_n^c, u_z^c, u_c, u_n, u_z, d_c, d_n, d_z, e^c$. Ponieważ emisja lub absorpcja wirtualnego (lub rzeczywistego) bozonu X cechowania grupy $SU(5)$ powoduje przejście jednego pola w inne pole tego samego multipletu, możliwe są przejścia kwarka w lepton (por. margines w odcinku II o pochodzeniu stałej Fermiego G_F),



których amplitudy są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu masy bozonu X i mogące objawiać się jako rozpad protonu.



Czas życia protonu (odwrotnie proporcjonalny do kwadratu modułu amplitudy rozpadu) byłby więc proporcjonalny do M_X^4 , a zatem bardzo długi. Mimo to jest on według zwykłych teorii unifikacji za krótki w porównaniu z ograniczeniami doświadczalnymi. Jest on jednak wystarczająco długi w supersymetrycznych wariantach unifikacji, ponieważ skala, przy której zbiegają się trzy stałe sprzężenia (zobacz rysunek u góry tej strony), jest wyższa, co oznacza, że masa M_X jest większa.

gwałtowna, łamanie CP, jakie przewiduje Model Standardowy, jest niewystarczające (ściślej, łamanie CP w oddziaływaniach fermionów z polem Higgsa jest zbyt małe). Model Standardowy nie przewiduje też istnienia żadnego pola, którego ewolucja w czasie mogłaby być przyczyną inflacji (Δ_{01}^7), która przez ostatnie 30 lat stanowiła jeden z fundamentów współczesnej kosmologii (ostatnio podnoszą się jednak głosy podające w wątpliwość ten etap kosmologicznej ekspansji Wszechświata).

Wymienione wyżej problemy od wielu lat stanowiły (początkowo te o charakterze teoretycznym) i nadal stanowią (dziś przede wszystkim te mające charakter faktów fizycznych) inspirację dla wielu powstałych już za istnienia *Delty* nowych koncepcji teoretycznych, z których kilka postaram się tu przybliżyć.

Jedną z pierwszych była wysunięta niemal równo z narodzinami *Delty*, czyli krótko po sformułowaniu Modelu Standardowego, idea wielkiej unifikacji ($\Delta_{91}^{10}, \Delta_{92}^3$). Istotą jej jest to, że oddziaływania silne, słabe i elektromagnetyczne są w rzeczywistości tylko niskoenergetycznymi przejawami jednego i tego samego oddziaływania opisywanego teorią z jedną prostą grupą cechowania, np. $SU(5)$ (24 generatory, czyli 24 bozony pośredniczące) lub $SO(10)$ (45 bozonów pośredniczących) i mającej wobec tego tylko jedną stałą sprzężenia g_{un} (zamiast trzech g_s, g_W i g_Y). Obserwowana przy niskich energiach różnica w charakterze oddziaływań (silne, słabe i elektromagnetyczne) byłaby skutkiem spontanicznego naruszenia tej jednej grupy cechowania przez jakiś kondensat $V \sim 10^{14} \div 10^{16}$ GeV do jej podgrupy $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$, a tejsze przez kondensat $v = 246$ GeV. Unifikacja wyjaśniałaby kwantyzację ładunku elektrycznego kwarków i leptonów. Co więcej, opisany w odcinku VI mechanizm huśtawki generujący pożądane masy neutrin szczególnie dobrze pasuje do teorii wielkiej unifikacji z grupą $SO(10)$.

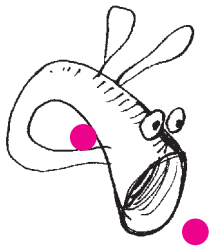
Sugestywnym argumentem na rzecz koncepcji wielkiej unifikacji jest wyraźne zbliżanie się przy skali Q_{un} , którą można utożsamić z V , trzech „biegnących” stałych sprzężenia $\bar{g}_s(Q), \bar{g}_W(Q)$ i $\bar{g}_Y(Q)$ (odcinek III) do mniej więcej wspólnej wartości (którą należałoby utożsamić z $\bar{g}_{un}(Q)$). Q_{un} jest rzędu 10^{14} GeV (10^{16} GeV w supersymetrycznych wariantach wielkiej unifikacji).

Najbardziej spektakularnym przewidywaniem teorii wielkiej unifikacji jest niestabilność protonu (Δ_{86}^{10}). Różne warianty tych teorii przewidują różne kanały rozpadu protonu (np. $p \rightarrow \pi^0 e^+$ lub $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$ itp.). Eksperymentalne poszukiwania takich rozpadów nie zostały dotąd uwieńczone powodzeniem (Δ_{98}^9); podniosły one jednak znacznie dolną granicę czasu życia protonu. Obecnie wynosi ona około 10^{33} lat! Innym ważnym przewidywaniem Wielkiej Unifikacji jest wiążące się z kwantyzacją ładunku poprzez znany argument Diraca istnienie (bardzo masywnych) monopoli magnetycznych (o monopolach zob. $\Delta_{76}^1, \Delta_{84}^3, \Delta_{91}^4$). Wielka Unifikacja miałaby też konsekwencje kosmologiczne (Δ_{91}^{10}).

Unifikacja stanowiłaby dodatkowy argument za wystąpieniem inflacyjnego etapu ekspansji Wszechświata: byłby on konieczny, by wydatnie zmniejszyć (wobec negatywnych wyników ich poszukiwań) liczbę (w jednostce objętości) monopoli magnetycznych, które musiałyby powstać w trakcie generującej kondensat V przemiany fazowej „kosmicznej zupy”, gdy temperatura T Wszechświata spadła poniżej V . Mimo iż teorie unifikacji przewidują spełnienie na tym etapie ewolucji Wszechświata warunków Sacharowa, konieczna z powodu problemu monopoli inflacja zlikwidowałaby też każdą nadwyżkę barionów nad antybarionami, jaka mogłaby powstać bezpośrednio w nierównowagowym procesie rozpadu na kwarki i leptony ciężkich bozonów X .

Kluczem do problemu bariogenezy mogłyby być ciężkie sterylne neutrina, których istnienia wymagają niektóre warianty teorii Wielkiej Unifikacji, gdyby ich masy były na tyle mniejsze od mas bozonów X , by mogły one powstać w wyniku następującego po inflacji ponownego rozgrzania się Wszechświata (do temperatury niższej niż M_X) i osiągnięcia przezeń ponownie (przybliżonej) równowagi termicznej. Proces ich znikania z „kosmicznej zupy” cząstek poprzez rozpad na kwant pola Higgsa i zwykły lepton, zachodzący gdy temperatura Wszechświata spadła poniżej ich masy, jest procesem nierównowagowym. Co więcej, rozpady te na ogół nie zachowują parzystości kombinowanej CP. W efekcie, po zniknięciu sterylnych neutrin powstawałaby we Wszechświecie nadwyżka leptonów nad antyleptonami, której część później, w temperaturze, w której zachodzi elektrosłaba przemiana

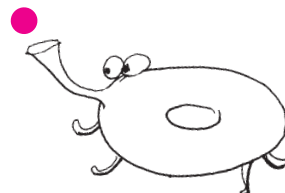
W kontekście fizyki neutrin oraz problemu bariogenezy bardzo interesujące są teorie z grupą cechowania $SO(10)$, w których wszystkie lewochiralne pola jednej rodziny kwarków i leptonów oraz dodatkowe lewochiralne pole neutrina sterylnego (zob. odcinek VI) tworzą jeden tylko multiplet $SO(10)$. Skutkiem spontanicznego naruszenia symetrii $SO(10)$ przez kondensat V jest powstanie w równaniach teorii wyrazu, który nadawałby neutrinom sterylnym masy rzędu V , które są niezbędne do działania mechanizmu huśtawki.



fazowa (w trakcie której powstaje naruszający symetrię $SU(2)_W \times U(1)_Y$ kondensat v), byłaby przetworzona na nadwyżkę barionów. Mechanizm taki nazywa się bariogenezą poprzez leptogenezę.

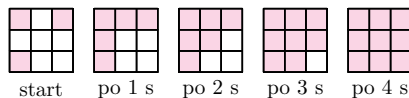
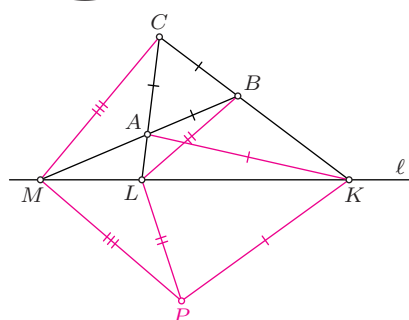
Sama idea wielkiej unifikacji nie ma w zasadzie konsekwencji dla zjawisk badanych w akceleratorach typu LHC. Jednak w jej kontekście szczególnie ostro uwydatnia się problem stabilności skali Fermiego. Zunifikowana teoria powinna wyróżniać dwie skale energii: skalę V naruszenia symetrii unifikującej oraz niższą o rzędy wielkości skalę v naruszenia symetrii $SU(2)_W \times U(1)_Y$. Jeśli ta druga skala jest wyznaczona przez kondensat pola skalarnego, mamy do czynienia z jej niestabilnością zwaną problemem hierarchii - efekty kwantowe (czyli wewnętrzne funkcjonowanie kwantowej teorii pola) mają silną tendencję do zrównywania wartości obu skal v i V . Oznacza to, że wartości wolnych parametrów teorii zunifikowanej musiałyby być „dostrojone” z niebywałą precyzją (niedługo do trzydziestego miejsca po przecinku!), by otrzymać stosunek $v/V \sim 10^{-14}$.

Problem hierarchii pozostaje nawet jeśli idea Wielkiej Unifikacji nie jest słuszna: do podobnej potencjalnej niestabilności skali v prowadzi fakt istnienia z pewnością w przyrodzie (co najmniej) jeszcze jednej fundamentalnej skali energii, jaką jest związana z oddziaływaniami grawitacyjnymi skala wyznaczana przez masę Plancka $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{19}$ GeV (G jest tu stałą Newtona). O pomysłach jego rozwiązania i innych ideach napiszę w ostatnim odcinku.



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK



M 1519. Przypuśćmy, że dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n liczby 2^n oraz $9 \cdot 5^n$ rozpoczynają się w zapisie dziesiętnym tą samą cyfrą. Jaka to cyfra? Rozwiązanie na str. 1

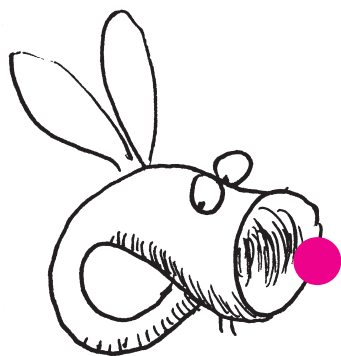
M 1520. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Prosta ℓ przecina proste BC , CA , AB odpowiednio w punktach K , L , M , różnych od wierzchołków trójkąta. Udowodnić, że istnieje taki punkt P , że $PK = AK$, $PL = BL$, $PM = CM$. Rozwiązanie na str. 2

M 1521. Początkowo niektóre pola tablicy $n \times n$ są zarażone. Infekcja rozprzestrzenia się w następujący sposób: co sekundę każde niezarażone pole, które ma wspólny bok z dokładnie dwoma zarażonymi polami, staje się zarażone. Jaka jest najmniejsza początkowa liczba zarażonych pól wystarczająca do zainfekowania po pewnym czasie całej tablicy? Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Michał NAWROCKI

F 921. Pilot-amator zbudował lekki, napędzany za pomocą pedałów helikopter o średnicy wirnika $d = 8$ m. Czy uda mu się wznieść, jeżeli jego masa wraz z masą helikoptera wynosi 80 kg? Przyjmując, że kolarz-amator przy długotrwałym wysiłku rozwija moc około 150 W. Masa cząsteczkowa powietrza to $\mu = 29$ g/mol. Rozwiązanie na str. 9

F 922. Ile wynosi przybliżona częstotliwość bzyczenia lecącego komara, jeżeli długość jego tułowia jest równa długości każdego z dwóch skrzydeł i wynosi $l = 3$ mm, a średnica tułowia jest równa szerokości skrzydła $d = 0,5$ mm. Gęstość powietrza to $\rho_1 = 1,2$ kg/m³, a średnia gęstość komara $\rho_2 = 1000$ kg/m³. Wskazówka: Siłę oporu powietrza R , działającą na skrzydło, możemy oszacować, posługując się analizą wymiarową, przyjmując, że siła ta zależy od gęstości powietrza, prędkości jego strumienia oraz pola powierzchni prostopadłego do niego przekroju poprzecznego: $R = A \cdot f(\rho_1, V, S)$, a współczynnik A dla zakresu prędkości, z jakim mamy do czynienia, to około $1/2$. Rozwiązanie na str. 9



Informatyczny kącik olimpijski (102): Nim 3

W tym miesiącu omówimy zadanie *Nim 3*, które pojawiło się na Obozie Naukowo-Treningowym im. A. Kreczmara w 2013 roku. Wielu Czytelników zapewne zna słynną grę „Nim”: zaczynamy od pewnej liczby stosów kamyków, a następnie na przemian gracze wybierają niepusty stos i zabierają z niego dowolną dodatnią liczbę kamyków. Gracz, który nie może wykonać ruchu (bo skończyły się już kamyki), przegrywa. „Nim” jest silnie związany ze znanym twierdzeniem Sprague’a–Grundy’ego, jednak, niestety, nam się teraz nie przyda, gdyż dotyczy ona klasycznej wersji gry, a więc dla dwóch graczy. W naszym zadaniu natomiast w „Nima” będzie grało trzech braci – Antek, Bartek i Cezary. Począwszy od Antka po kolei będą oni wykonywać ruchy. Podobnie jak w „Nimie” gracz, który nie będzie mógł wykonać ruchu, przegra (zajmie trzecie miejsce). Gracz, który wykona ostatni ruch, zajmie pierwsze miejsce. Natomiast pozostały z trójki graczy zajmie drugie miejsce. Dla danych zestawów stosów mamy odpowiedzieć, kto wygra, jeśli każdy będzie grał optymalnie.

Podzielmy wszystkie możliwe stany gry na trzy zbiory: te stany, dla których wygra gracz rozpoczynający, oznaczmy jako A ; te, dla których wygra gracz wykonujący drugi ruch – jako B , a te, dla których wygra gracz wykonujący ruch jako trzeci – jako C .

W przypadku trzech graczy wcale nie musi być jasne, co to znaczy *optymalna strategia*. Następująca rekurencyjna definicja precyzuje to zgodnie z treścią zadania:

Stan końcowy (wszystkie stosy puste) należy do C . Jeśli ze stanu w jednym ruchu da się otrzymać stan ze zbioru C , to należy on do A ; jeśli ze stanu w jednym ruchu da się otrzymać stan ze zbioru A (a nie da się z C), to należy on do B ; w przeciwnym razie należy on do C .

Zachęcamy gorąco Czytelnika do nabrania przekonania, że taka definicja jest poprawna oraz że jest zgodna z intuicją.

Przejdźmy do samego rozwiązania. Nie owijajmy w bawełnę: zostało ono *odgadnięte* na podstawie zauważonych regularności w wynikach dla małych instancji problemu, które potem okazało się poprawne we wszystkich przypadkach. W ten sposób rozwiązuje się wiele trudnych zadań tego typu.

Wielkości stosów zapiszmy w systemie binarnym i policzmy osobno jedności, dwójki, czwórki, ósemki itd. Jeśli każda z tak obliczonych wartości jest podzielna przez 3, to stan należy do zbioru C . Dla przykładu rozpatrzmy stosy zawierające odpowiednio 1, 1, 1, 5, 9, 12 oraz 13 kamyków, czyli w zapisie binarnym 1, 1, 1, 101, 1001, 1100 oraz 1101. Sześć z tych liczb jest nieparzystych, żadna z nich nie ma *zapalonego* (czyli równego 1) bitu na drugiej najmniej znaczącej cyfrze, trzy z nich mają jedną czwórkę i trzy z nich mają jedną ósemkę. Liczby 6, 0, 3, 3 są wszystkie podzielne przez 3, toteż rozpatrywany stan gry należy do zbioru C . Zbiór A okreśmy wprost z definicji jako te stany, z których w jednym ruchu da się otrzymać stan ze zbioru C . Wszystkie pozostałe stany tworzą B .

Udowodnimy, że powyższe definicje spełniają warunki zadania.

Rozpatrzmy dowolny ruch, a dokładniej zapisy binarne liczby kamyków na wybranym stosie przed i po jego wykonaniu, oznaczmy je odpowiednio X oraz Y . Jeśli jakiś bit jest zapalony w X , a nie jest zapalony w Y , to liczba wystąpień

tego bitu maleje o 1 w stanie gry. Liczba wystąpień danego bitu może też, oczywiście, zwiększyć się o 1, jak i pozostać bez zmian.

Ponieważ $X > Y$, więc najbardziej znaczący bit, na którym X oraz Y się różnią, jest zapalony w X i *zgaszony* (równy 0) w Y (oznaczmy ten bit K). W szczególności po wykonaniu ruchu ze stanu ze zbioru C liczba wystąpień odpowiedniego dla ruchu bitu K będzie przystawała do 2 przy dzieleniu przez 3. Natomiast liczby wystąpień bardziej znaczących bitów nadal będą podzielne przez 3.

Ponownie korzystając z tego samego argumentu, łatwo zauważyć, że otrzymany stan nie należy do A . Nie da się bowiem w jednym ruchu zwiększyć liczby wystąpień bitu K , nie zmieniając liczb wystąpień bardziej znaczących bitów. Reasumując: zgodnie z oczekiwaniami nie da się, ze stanu ze zbioru C w jednym ruchu otrzymać stanu z $A \cup C$.

Pozostaje sprawdzić warunek (dlaczego?): ze stanu nienależącego do C da się w co najwyżej dwóch ruchach otrzymać stan z C . Jeśli da się go otrzymać w jednym ruchu, to stan z definicji należy do A . W przeciwnym razie, wykonując pierwszy z tych dwóch ruchów, otrzymujemy stan ze zbioru A , czyli pierwotny stan należy do B . Będziemy o takich dwóch ruchach myśleć jak o jednym specjalnym ruchu, który pozwala zabrać kamyki z dwóch stosów.

Weźmy dowolny stan spoza C . Najbardziej znaczący bit, którego liczba wystąpień nie jest podzielna przez 3, oznaczmy K . Jeśli liczba wystąpień K przystaje do 2 przy dzieleniu przez 3, to wystarczy wykonać ruch na dwóch dowolnych stosach, które mają liczby kamieni z zapalonym bitem K . Na obu gasimy bit K . Mniej znaczące bity możemy naszym specjalnym ruchem ustawiać dowolnie (ruch będzie dozwolony, bo liczby kamieni na obu stosach zmaleją). W szczególności możemy je ustawić tak, aby był spełniony warunek należenia do zbioru C . W przypadku, gdy liczba wystąpień bitu K przystaje do 1 przy dzieleniu przez 3, sytuacja nie jest taka prosta. Wybieramy najpierw jeden stos z zapalonym bitem K , oznaczmy go P . Gasimy w nim bit K , a następnie mniej znaczące bity po kolei próbujemy tak ustawiać, aby liczba ich wystąpień w całym stanie gry dzieliła się przez 3. Jeśli udało nam się ustawić wszystkie, to rozpatrywany stan należy do A . Możemy jednak napotkać przeszkodę, czyli bit dla którego zachodzi następujący warunek:

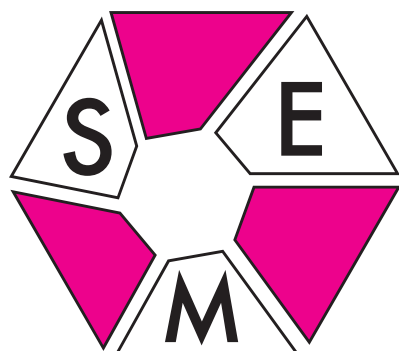
Jeśli ustawimy go na zero (jeden) w P , to liczba jego wystąpień w stanie gry będzie dawać resztę 1 (2) przy dzieleniu przez 3.

Wówczas ustawiamy ten bit w P na zero, po czym jako drugi stos do naszego specjalnego ruchu wybieramy inny stos, który ma zapalony ów bit. Gasimy go, zapewniając zmniejszenie stosu oraz odpowiednią liczbę wystąpień bitu. Kolejne mniej znaczące bity możemy już teraz ustawiać dowolnie, otrzymując stan z C .

Przekucie definicji zbiorów C oraz A w algorytm jest dość proste – działa on w czasie $\mathcal{O}(N \log M)$, gdzie N oznacza liczbę stosów, a M liczbę kamyków na największym stosie.

Na zakończenie zachęcamy Czytelnika do samodzielnego sprawdzenia, czy analogiczna strategia zadziała w przypadku większej liczby graczy.

Marcin SMULEWICZ



Nim obliczysz, pomyśl!

IX KONFERENCJA SEM

W dniach 21–23 października 2016 roku w Sielpi koło Kielc odbyła się dziewiąta konferencja zorganizowana przez Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej. Konferencja była kolejną okazją do spotkań osób z różnych środowisk zaangażowanych w edukację matematyczną, popularyzację matematyki i pracę z młodzieżą uzdolnioną matematycznie. Do ośrodka wypoczynkowego „Łucznicz” przyjechało około 160 nauczycieli matematyki i pracowników wyższych uczelni z całej Polski.

Konferencję rozpoczął *Cyrk matematyczny* – lekkie i niefrasobliwe przedstawienie o matematyce, dedykowane szczególnie tym, którzy matematykami nie są i prawdopodobnie nigdy nie będą. W role artystów cyrkowych wcielili się Marek Kordos i Kamila Łyczek.

Podczas odczytów i dyskusji zastanawiano się – w nawiązaniu do tematu konferencji – przede wszystkim nad tym, czy w zadaniach matematycznych dobry pomysł musi (powinien) poprzedzać obliczenia. Czy rozwiązania zadania matematycznego nie należy jednak rozpoczynać od obliczeń? Przedstawiono wiele zadań z różnych działów matematyki, które można sprytnie rozwiązać „sposobem” (np. tłumacząc problem na inny język: system dziesiętny na dwójkowy, algebrę na geometrię, kombinatorykę na grafy itp.), ale zwrócono też uwagę na to, że piękne pomysły rozwiązań nie przychodzą bez wcześniejszego doświadczenia!

Dyskutowano również o błędach w rozwiązaniach, które czasem – jak mówił tytuł jednego z odczytów – są źródłem odkryć. Rozważano, między innymi, rozwiązanie zadań olimpijskich z misternie ukrytymi lukami lub usterkami (zadaniem słuchaczy było je wychwycić), analizowano błędy popełniane przez uczestników Powszechnego Internetowego Konkursu Matematycznego organizowanego przez Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej, czy też przyglądano się znanemu zadaniu kombinatorycznemu Juliana Tuwima, w którym popełnił fatalny błąd w obliczeniach.

Pierwszy dzień konferencji zakończył wieczór wspomnień poświęcony zmarłemu w czerwcu 2016 roku Henrykowi Pawłowskiemu, wielkiemu pasjonatowi matematyki, współtwórcy OMG, przewodniczącemu Komitetu Okręgowego OMG, nauczycielowi wielu pokoleń olimpijczyków, autorowi znakomitych zbiorów zadań oraz podręczników matematyki.

Uczestnikom konferencji przedstawiono także informacje o Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki, organizowanym od roku 1978 przez redakcję *Delty* i Polskie Towarzystwo Matematyczne. Zwrócono uwagę szczególnie na to, że prace nadesłane na konkurs powinny zawierać samodzielne, oryginalne matematyczne dokonania i że laureaci konkursu z poprzednich lat często odnosili sukcesy w Konkursie Młodych Naukowców Unii Europejskiej, a wielu z nich związało z matematyką swoje dorosłe życie.

22 października wieczorem odbyło się Walne Zgromadzenie Delegatów SEM, podczas którego zostało przedstawione sprawozdanie z działalności Zarządu SEM w okresie od 8 listopada 2015 roku do 22 października 2016 roku.

W całym okresie sprawozdawczym Zarząd Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej działał w stałym składzie: Irena Brzozowska, Krzysztof Chelmiński – przewodniczący, Andrzej Fryszkowski – wiceprzewodniczący, Renata Juraszewska, Michał Krych, Artur Miśkiewicz, Barbara Roszkowska-Lech, Tomasz Szymczyk.

Uczestnicy konferencji, niebędący delegatami, mogli w tym czasie wziąć udział w warsztatach poświęconych wykorzystaniu gier matematycznych i logicznych na lekcjach matematyki.

Z ankiety, którą wypełniali uczestnicy (odpowiadając, między innymi, na pytania o tematykę kolejnych spotkań, ale też o liczbę referatów i długość przerw między nimi), wynika, że konferencja spełniła oczekiwania uczestników i że takie spotkania, na których można sporo się dowiedzieć, zebrać materiały do wykorzystania na lekcjach i kółkach zainteresowań, ale też wymienić doświadczenia z innymi nauczycielami, są bardzo potrzebne!

Zapraszamy wszystkich zainteresowanych do zapoznania się z programem i materiałami z konferencji na stronie sem.edu.pl/konferencja-2016. Na zachętę – przedstawiamy jedno z zadań z wykładu Joanny Jaszuńskiej, *Dlaczego warto uczyć się języków obcych?*

Złośliwy czarodziej rzucił urok na jedną z 1000 beczek z winem – po wypiciu choćby kropli każdy zzielenieje w ciągu doby. Codziennie rano dysponujemy 10 dzielnymi rycczami gotowymi ponieść ryzyko.

W ile dni można wykryć zaczarowaną beczkę?

Rozwiązanie znajdą Państwo na stronie konferencji, w zakładce *Materiały*.

Renata JURASIŃSKA

Wybuchowe uodpornianie

Odporność sieci jest jednym z kluczowych zagadnień teorii systemów złożonych. Dwa zupełnie odmienne problemy: zapobiegania rozprzestrzenianiu się epidemii (chorób zakaźnych, złośliwego oprogramowania, kłamstw itp.) oraz strategii dezorganizacji sieci, odpowiadają sobie nawzajem. Przecież immunizacji można dokonać poprzez rozpoznanie węzłów, których zablokowanie spowoduje rozpad sieci na podsieci o małej liczbie węzłów. Jeżeli rozpatruje się sieć przed wystąpieniem zarazy, to taką blokadą może być szczepienie.

W pracy [1] autorzy przedstawiają nową strategię kampanii uodporniającej sieć składającą się z bardzo dużej liczby węzłów N . Przyjmuje się, że qN węzłów jest zaszczepionych, a pozostałe są podatne na infekcję. Rozprzestrzenianie się zarazy zależy od stopnia jej zaraźliwości, przebiegu infekcji, frakcji q zaszczepionych węzłów oraz rodzaju sieci. Rozmiar epidemii (wywołanej jednym ogniskiem) jest jednak zawsze ograniczony z góry przez (względny) rozmiar $S(q)$ największego klastra podatnych węzłów. Dla dużych sieci ($N \rightarrow \infty$) celem uodporniania jest ich takie rozdrobnienie, żeby $S(q) \rightarrow 0$. Próg immunizacji q_c jest zdefiniowany jako najmniejsza wartość q pozwalająca ten cel osiągnąć. Im mniejsza wartość q_c , tym bardziej efektywna jest rozpatrywana strategia.

Optymalne jest zaszczepienie tylko tych węzłów, które można uważać za tzw. główne węzły blokujące (*superblockers*), których odblokowanie powoduje istotny wzrost $S(q)$. Pogląd, że są to jednocześnie główne węzły komunikacyjne (*superspreaders*) nie jest, w ogólności, poprawny, bo węzeł będący elementem silnie rozgałęzionego fragmentu sieci może być świetnym komunikatorem, ale słabym węzłem blokującym, ze względu na łatwość jego obejścia. Wyszukanie węzłów każdego z tych typów jest przypuszczalnie problemem NP-zupełnym. Z tego względu w przypadku dużych sieci potrzebna jest jakaś heurystyczna metoda ich wyznaczania. Zazwyczaj tworzony jest pewien ranking węzłów w oparciu o charakterystykę tylko jego najbliższego lub o charakterystykę bliższego i dalszego otoczenia.

W pracy [1] punktem wyjścia jest wirtualne zaszczepienie wszystkich węzłów ($q = 1$). Następnie węzły są stopniowo zamieniane z zaszczepionych na podatne, począwszy od uznanych za najmniej niebezpieczne z punktu widzenia rozprzestrzeniania się epidemii. Podejście to jest związane z koncepcją wybuchowego przesiąkania (ang: *explosive percolation*) [2].

Chodzi o obserwację gwałtownej (nieciągłej) zmiany stopnia skomunikowania sieci po dodaniu niewielkiej liczby połączeń, jeżeli proces ten jest przypadkowy, ale prawdopodobieństwo tworzenia połączeń zależy nie tylko od cech najbliższego otoczenia danego miejsca sieci.

Używane były dwa rankingi wykorzystujące w różnym stopniu lokalną i nielokalną informację do określenia konsekwencji przekształcenia danego węzła z zaszczepionego na podatny. Autorzy twierdzą, że sprawdzili niewielką zależność wyniku od konkretnej realizacji obu używanych schematów. Jeden był używany dla dużych wartości $q > q_c$, a drugi dla małych $q < q_c$. Autorzy uważają, że konieczność używania przynajmniej dwóch schematów do uzyskania optymalnej strategii jest pochodną komplikacji obliczeniowej rozpatrywanego problemu. W każdym kroku rozpatrywana była tylko skończona liczba węzłów (rzędu tysiąca), z których był wybierany jeden. Z tego względu algorytm działa szybko (w czasie niemal proporcjonalnym do N), co powoduje, że bez problemu radzi sobie nawet z bardzo dużymi sieciami, osiągając najmniejsze wartości progu immunizacji q_c spośród opublikowanych algorytmów tego typu.

Jego działanie zostało przetestowane na szeregu sztucznych sieci oraz na kilku rzeczywistych przykładach. Pierwszym z rozpatrywanych był zapis transportów rogaczyny w Szkocji w latach 2005–2007, a ostatnim sieć współautorstwa w społeczności fizyków wysokich energii. Ciekawe może być porównanie wyników dla obu tych sieci. Szczególnie dla kogoś, kto jest węzłem jednej z nich. Z tego punktu widzenia pocieszające jest, że badanie dotyczyło sytuacji przed wystąpieniem zarazy, bo mniej więcej wiadomo, jak wygląda „szczepienie” w sieci transportu rogaczyny w trakcie rozwoju epidemii. Jeżeli chodzi o zamieszczone w pracy [1] (i jej suplementach) ilustracje dotyczące obu sieci, to jakościowo niewiele się one różnią. Poza jednym szczegółem. Dla rogaczyny mamy zaledwie $q_c \approx 0,06$, natomiast dla fizyków niemal $q_c = 0,4$. W tym drugim przypadku mówienie o braku epidemii nie odpowiada zresztą rzeczywistości. Jest już za późno np. na powstrzymanie wirusa supersymetrii. Żeby tego dokonać, trzeba było odpowiednio wcześniej (prawie pół wieku temu) wyeliminować 40% rozpatrywanej społeczności.

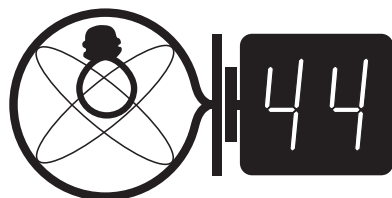
Piotr ZALEWSKI

[1] P. Clusella, P. Grassberger, F.J. Pérez-Reche oraz A. Politi, *Immunization and Targeted Destruction of Networks using Explosive Percolation*, *PRL* **117**, 208301 (2016)

[2] D. Achlioptas, R.M. D'Souza oraz J. Spencer, *Explosive Percolation in Random Networks*, *Science* **323**, 1453 (2009).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



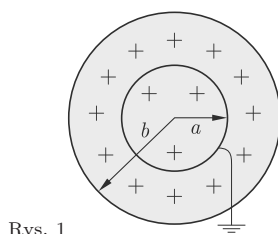
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2017

Zadania z fizyki nr 632, 633

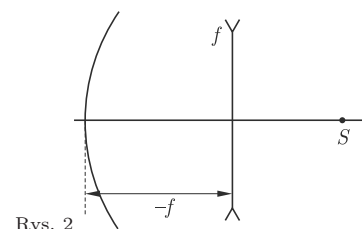
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

632. Dielektryczna kula o promieniu b naładowana jest ze stałą gęstością objętościową $\rho > 0$. Wewnątrz kuli znajduje się uziemiona, metalowa sfera o promieniu a (rys. 1). Znaleźć ładunek indukowany na tej sferze.

633. Cienka soczewka rozpraszająca o ogniskowej f i zwierciadło sferyczne wklęsłe mają wspólną oś optyczną (rys. 2). Środek zwierciadła znajduje się w jednym z ognisk soczewki. Układ daje rzeczywisty obraz przedmiotu S umieszczonego w dowolnej odległości na prawo od soczewki. Znaleźć ogniskową zwierciadła.



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 10/2016

Przypominamy treść zadań:

624. Ciężarek o masie m zawieszony jest w polu ciężkości na nieważkiej sprężynie o współczynniku sprężystości k . Długość nierozciągniętej sprężyny jest zaniedbywalna. Sprężynę odchyłono do poziomu, rozciągnięto do długości x_0 i puszczono swobodnie. Znaleźć najmniejszą długość sprężyny podczas ruchu.

625. Na dnie naczynia znajduje się cienka metalowa płytka, której powierzchnia S jest dużo mniejsza od powierzchni dna naczynia. W naczyniu znajduje się ciecz o gęstości ρ i stałej dielektrycznej ϵ . Wysokość słupa cieczy jest dużo mniejsza od rozmiarów liniowych płytki. O ile podniesie się ciecz nad płytką, gdy na płytkę wprowadzony zostanie ładunek Q ?

624. Gdy sprężyna odchyłona jest od poziomu o kąt α , a jej długość wynosi $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ (rys. 3), siły działające na ciężarek w kierunku poziomym i pionowym mają postać

$$F_x = -kl \cos \alpha = -kx, \quad F_y = mg - kl \sin \alpha = mg - ky.$$

Ruch ciężarka jest złożeniem ruchów harmoniczných

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad y = mg/k + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Uwzględniając warunki początkowe: $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $v_x(0) = v_y(0) = 0$, otrzymujemy

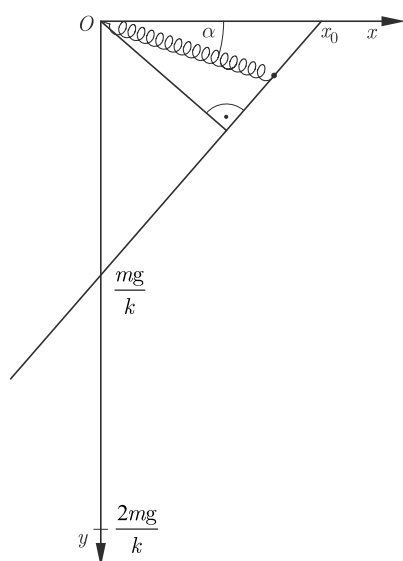
$$x = x_0 \cos \omega t, \quad y = mg(1 - \cos \omega t)/k.$$

Tor ciężarka

$$y = \frac{mg}{k} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)$$

jest linią prostą. Minimalna długość sprężyny dana jest wzorem

$$l_{\min} = \frac{mgx_0}{\sqrt{x_0^2 k^2 + m^2 g^2}}.$$



Rys. 3



Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44F
 po zakończeniu
 roku szkolnego 2015/16 (po 621 zadaniach)

Michał Koźlik	–	3–39,15
Tomasz Rudny	–	37,68
Marian Łupieżowiec	–	1–35,47
Andrzej Idzik	–	11–32,22
Jacek Konieczny	–	29,51
Jan Zambrzycki	–	30,86
Ryszard Woźniak	–	26,62
Krzysztof Magiera	–	3–24,30
Karol Łukanowski	–	23,89
Bogusław Mikieliewicz	–	22,45
Tomasz Wietecha	–	11–20,25
Jacek Grela	–	13,09
Jacek Piotrowski	–	2–12,75
Jerzy Witkowski	–	3–11,50
Andrzej Nowogrodzki	–	3–8,29
Jędrzej Biedrzycki	–	7,44

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2014–2016 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Liczba przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

P. Bala, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (11), T. Wietecha (11), J. Łazuka, M. Wójcicki, M. Koźlik, J. Witkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, P. Perkowski, J. Piotrowski;
 „jedenkrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Łącki, M. Łupieżowiec, B. Mikieliewicz, L. Motyka, R. Musiał, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

Punktacja zadań
 620 (WT = 1,6) i 621 (WT = 2,72)
 z numeru 6/2016

Jacek Grela (Kraków)	4,32
Jędrzej Biedrzycki (Strzelce Opolskie)	2,53
Jan Zambrzycki (Białystok)	2,10
Paweł Kubit (Kraków)	0,80

625. Naładowana płytka wytwarza pole elektryczne o natężeniu $E_0 = Q/(2\varepsilon_0 S)$. Na powierzchniach warstwy cieczy nad płytką powstają ładunki indukowane Q_1 oraz $(-Q_1)$. Wypadkowe pole nad płytką możemy zapisać na dwa sposoby

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{Q - 2Q_1}{2\varepsilon_0 S},$$

stąd

$$Q_1 = \frac{Q(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}.$$

Siła, z jaką ładunek Q na płytce i ładunek indukowany $(-Q_1)$ na dolnej powierzchni warstwy cieczy dielektrycznej odpychają ładunek indukowany Q_1 na górnej powierzchni cieczy, dana jest wzorem

$$F = \frac{(Q - Q_1)Q_1}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2(\varepsilon^2 - 1)}{8\varepsilon_0 \varepsilon^2 S}.$$

Siła ta powoduje podniesienie cieczy nad płytką o x i jest równoważona dodatkową siłą ciężkości o wartości $F = xS\rho g$. Szukana wysokość, na jaką podniesie się ciecz, wynosi

$$x = \frac{Q^2(\varepsilon^2 - 1)}{8\varepsilon_0^2 S^2 \rho g}.$$

* * *

Tym razem współczynnik trudności niektórych zadań z mechaniki okazał się większy niż spodziewany. W zadaniu **603** ($WT=3,28$) koralik zsuwał się bez tarcia po linii śrubowej i należało znaleźć wartość jego przyspieszenia po przebyciu określonej liczby zwojów. Niektórzy klubowicze nie zauważyli, że składowa przyspieszenia, prostopadła do toru, związana jest z ruchem po okręgu i leży w płaszczyźnie poziomej, bo ruch w pionie jest ruchem prostoliniowym. Zadanie **616** ($WT=2,88$) dotyczyło ruchu środka masy układu dwóch klocków połączonych pionową, ściśniętą początkowo sprężyną. Tu błędy były urozmaicone, w szczególności niepoprawny warunek na oderwanie się dolnego klocka, rozważenie tylko przypadku przed oderwaniem, albo po oderwaniu, błędne założenie, że po oderwaniu oba klocki poruszają się jednakowo. W pełni poprawne rozwiązania obu wymienionych zadań podał **Tomasz Wietecha**, przy czym były to rozwiązania bardziej ogólne niż wymagane – w zadaniu **603** potrafił określić kierunek wektora przyspieszenia w dowolnej chwili, w zadaniu **616** opisał ruch każdego z klocków po oderwaniu dolnego, a na końcu wyznaczył maksymalne wzniesienie środka masy. Wykazał się przy tym, jak zwykle, imponującą sprawnością rachunkową. Powstaje pytanie, czy w naszej zabawie bardziej cenimy takie ogólne rozwiązania, czy znacznie prostsze, pomysłowe, ale bardziej szczególne i chyba nie ma na to dobrej odpowiedzi.

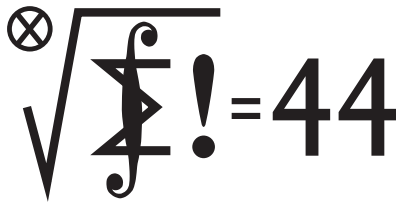
Pan **Wietecha** jako jedyny przysłał rozwiązanie, w dodatku poprawne, zadania **609** na temat wrzenia na powierzchni rozdziału dwóch niemieszających się cieczy. I tu pomyłkowo podany został przez mnie współczynnik trudności tego zadania $WT=3$, zamiast $WT=3,25$. Za ten błąd przepraszam, a panu Tomaszowi należy się dodatkowo 0,25 pkt.

W zadaniu **610** ($WT=3,85$) należało wyznaczyć granicę suchego obszaru wokół obracającego się ze stałą prędkością kątową mokrego koła. Okazało się, że nie dla wszystkich było oczywiste, że chodzi o krople odrywające się od obręczy koła z prędkością, jaką mają punkty na jego obwodzie. Zadanie było bardziej niż inne skomplikowane rachunkowo, stąd, być może, jego bardzo wysoki współczynnik trudności.

Poprawnego rozwiązania nie doczekało się zadanie **613** ($WT=3,7$) z optyki, gdzie należało znaleźć obraz Słońca otrzymany za pomocą układu dwóch zwierciadeł sferycznych i porównać go z obrazem otrzymanym za pomocą soczewki. Członkowie klubu, którzy przysłali swoje rozwiązania, uznali, że obrazem Słońca w zwierciadle czy soczewce jest punkt, czyli zaniedbali rozmiary kątowe Słońca widzianego z Ziemi.

Na ogół dobrze wypadły zadania z elektromagnetyzmu. Najwyższy współczynnik trudności otrzymało zadanie **617** ($WT=2,5$), gdzie należało wyznaczyć kąt ustawienia igiełki magnetycznej w polu magnetycznym Ziemi i szybko obracającego się przewodzącego pierścienia. Poprawnie rozwiązali to zadanie **Michał Koźlik** i **Tomasz Wietecha**.

Z przyjemnością odnotowuję fakt, że do grona osób, które regularnie przysyłają na ogół poprawne rozwiązania, dołączył pan **Jan Zambrzycki** z Białogostoku.



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2017

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
 po zakończeniu sezonu
 (roku szkolnego) 2015/16

Marek Spychała	-	1-42,75
Tomasz Wietecha	-	10-42,11
Witold Bednarek	-	6-38,72
Franciszek S. Sikorski	-	1-38,08
Marek Gałecki	-	5-37,76
Zbigniew Skalik	-	2-37,76
Jędrzej Garnek	-	2-37,64
Roksana Słowik	-	1-36,41
Krzysztof Maziarz	-	35,37
Adam Dzedzej	-	2-31,82
Marcin Małogrosz	-	1-30,28
Michał Koźlik	-	29,50
Michał Miodek	-	2-26,32
Patryk Jaśniewski	-	25,35
Paweł Duch	-	1-24,10
Krzysztof Kamiński	-	2-22,58
Jerzy Cisło	-	12-21,04
Marcin Kasperski	-	3-20,98
Bartłomiej Pawlik	-	19,71
Piotr Lipiński	-	1-18,80
Janusz Wojtal	-	18,58
Jędrzej Biedrzycki	-	17,62

Legenda (przykładowo): stan konta 6-38,72 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 38,72 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
 - stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 16 punktów;
 - przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2014, 2015 lub 2016.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (13), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (17), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (10), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. PeczarSKI, M. Adamaszek, P. Kubit (6), J. Cisło (12), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (7), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Zadania z matematyki nr 735, 736

Redaguje Marcin E. KUCZMA

735. Dana jest liczba dodatnia $a < 1$. Obliczyć kres górny zbioru wartości wyrażenia $a^{\text{tg } \alpha} + a^{\text{ctg } \alpha}$, gdy zmienna α przebiega przedział $(0, \pi/2)$.

736. Rozważamy słowa binarne (ciągi zerojedynkowe) długości n . Niech A_n będzie liczbą takich słów, w których nie pojawia się blok 010, zaś B_n liczbą takich słów, w których w żadnym miejscu blok 00 nie sąsiaduje z blokiem 11. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyznaczyc wartość stosunku A_n/B_{n+1} .

Zadanie 736 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2016

Przypominamy treść zadań:

727. Trójkąt równoboczny o boku długości n został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na n^2 trójkątów o boku 1. Każdy wierzchołek powstałej siatki (tj. wierzchołek któregoś trójkątka) jest pomalowany na biało lub czarno. Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu zmieniamy kolor wszystkich wierzchołków, leżących na jednej linii prostej, zawierającej bok któregoś trójkątka.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 2$, dla których – wychodząc od stanu: wszystkie wierzchołki białe – można dojść do stanu: dokładnie jeden wierzchołek czarny.

728. Czy istnieje funkcja różniczkowalna f , będąca różnowartościowym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb dodatnich na ten sam zbiór, i taka, że jej pochodna jest funkcją odwrotną do f ?

727. Dla $n = 2$ wskazany cel da się osiągnąć. W trzech ruchach wybieramy proste zawierające boki dużego trójkąta. Jego wierzchołki pozostaną białe (każdy zmieni kolor dwukrotnie), zaś środki boków staną się czarne. Teraz w jednym ruchu zmieniamy kolor dwóch z tych środków z powrotem na białe. Pozostaje jeden punkt czarny.

Także dla $n = 3$ można uzyskać wymagany stan. Jak poprzednio, w trzech ruchach bierzemy proste, zawierające boki dużego trójkąta. Jego wierzchołki i jego środek staną się białe, pozostałe punkty siatki staną się czarne. W kolejnych trzech ruchach bierzemy proste równoległe do boków dużego trójkąta i przechodzące przez jego środek. Czarne punkty wybielą się, a punkt w środku się zczerni.

Natomiast dla $n > 3$ nie da się! W trójce punktów, będących wierzchołkami dużego trójkąta, po każdym ruchu jest parzysta liczba czarnych punktów (0 lub 2). Żaden z tej trójki nie może więc być owym punktem, który w pewnym momencie miałby stać się jedynym czarnym.

Każdy inny punkt siatki jest elementem pewnej szóstki punktów, tworzących sześciokąt foremny o boku 1. Również i w takiej szóstce każdy ruch powoduje zmianę koloru dokładnie dwóch punktów, więc niezmiennie jest w niej parzysta liczba czarnych punktów (0, 2, 4, 6). Pojedynczy czarny punkt pojawić się nie może.

728. Spróbujmy poszukać rozwiązania wśród funkcji postaci $f(x) = Ax^p$ (motywacja: zarówno pochodna, jak i funkcja odwrotna do takiej funkcji, też ma taką postać – próba ma szansę powodzenia). Gdy stałe A, p są dodatnie, funkcja $f(x) = Ax^p$ jest ściśle rosnąca i przekształca przedział $(0, \infty)$ na ten sam przedział. Dla ustalonej wartości $x > 0$ rozwiązujemy równanie $f(t) = x$ (z niewiadomą t), otrzymując $t = A^{-1/p}x^{1/p}$. Tak więc

$$f^{-1}(x) = A^{-1/p}x^{1/p}; \quad \text{ponadto} \quad f'(x) = Ap x^{p-1}.$$

Aby funkcje f^{-1} i f' były identyczne, wystarczy, by parametry dodatnie A, p spełniały równania

$$A^{-1/p} = Ap, \quad \frac{1}{p} = p - 1.$$

Drugie równanie ma w liczbach dodatnich jedyne rozwiązanie $p = (\sqrt{5} + 1)/2$. Dla tej stałej p pierwsze równanie przybiera formę $A^{1-p} = Ap$, z rozwiązaniem $A = p^{-1/p} = p^{1-p}$. Funkcja $f(x) = Ax^p$ z tymi parametrami ma wymaganą własność.

[Dla dociekliwych – pytanie: czy to jedyna taka funkcja? Jeśli nie – jak znaleźć wszystkie?]

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, A. Dzedziej, J. Fiett, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, A. Idzik, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, M. Miodek, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Józwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, M. Małogrosz, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Piłula, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Teraz, jak co roku, wybrane zadania w skrótownym omówieniu. Więc głównie te, gdzie współczynnik trudności (WT) jest wysoki, a liczba poprawnych rozwiązań (LPR) niewielka. Ten ostatni skrót jest nieco mylący – chodzi raczej o liczbę uczestników, którzy poprawnie rozwiązali zadanie; gdy ktoś przysłał dwa dobre rozwiązania, wówczas „liczba rozwiązań”, rozumiana dosłownie, jest większa od przyjętej wartości LPR , zliczającej autorów dobrych prac. Z taką właśnie sytuacją mamy do czynienia w zadaniu, od którego rozpoczynamy omówienie.

* * *

Zadanie 710. [$a_0 > 1$, $a_{n+1} = a_n + \ln a_n$; $b_n = n \ln n \Rightarrow a_n \sim b_n$ (tj. $a_n/b_n \rightarrow 1$)] ($WT=3,44$; $LPR=3$). Zadanie zaproponował pan **Tomasz Ordowski**, z heurystycznym argumentem na poparcie tezy. Obecnie mamy pięć rozwiązań (dwa od jednego autora). Firmowe (redaktora ligi) przebijają zawiloscią wszystkie pozostałe. Zgrabniejsze są trzy dowody z dwustronnym szacowaniem ciągu (a_n) . Ukazemy je w skrócie; uzasadnienia nierówności (2), (3), (6), (7) nie są natychmiastowe, ale i niezbyt trudne – to rutynowe ćwiczenia na pierwszym roku studiów.

Jerzy Cisko: $a_n = a_0 + (\ln a_0 + \dots + \ln a_{n-1})$, skąd

$$(1) \quad n \ln a_0 < a_n < a_0 + n \ln a_n,$$

$$(2) \quad a_n > \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k \ln a_0) = \ln((n-1)!) + (n-1) \ln \ln a_0 > (n-1)(\ln(n-1) - A)$$

dla pewnej stałej $A > 0$. Skoro zaś $a_n < 2a_{n-1}$, zatem $a_n < 2^n a_0$, i wobec (1): $a_n < Bn^2$ dla pewnej stałej $B > 0$. Stosując jeszcze dwa razy prawą nierówność (1), znajdujemy stałą $C > 0$, dla której, kolejno,

$$(3) \quad a_n < a_0 + \ln(Bn^2) < Cn \ln n,$$

$$(4) \quad a_n < a_0 + n \ln(Cn \ln n) = a_0 + n(\ln C + \ln n + \ln \ln n).$$

Ciągi uzyskane po prawych stronach (2) i (4) są $\sim b_n$; teza.

Marcin Małogrosz: Ustalmy liczby dodatnie α, β , spełniające warunki: $3\alpha \leq a_3$, $\alpha \leq \ln a_3$, $\beta \geq 2$, $\beta \geq a_3/b_3$; indukcyjnie dowodzimy, że

$$(5) \quad \alpha \cdot n \leq a_n \leq \beta \cdot b_n \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Krok indukcyjny dla lewej nierówności jest bardzo łatwy; dla prawej – wymaga paru przekształceń, z których wynotujemy kluczowe kroki:

$$(6) \quad \begin{aligned} a_{n+1} - \beta \cdot b_{n+1} &\leq \beta \cdot (b_n - b_{n+1}) + \ln(\beta \cdot b_n) = \\ &= \beta \cdot n(\ln n - \ln(n+1)) + \ln \beta + \\ &\quad + \ln n + \ln \ln n - \beta \ln(n+1) < \\ &< (1 - \beta) \ln n + \ln \beta + \ln \ln n \leq 0. \end{aligned}$$

Dokończenie rozumowania ze wzoru Stolza

(z wykorzystaniem asymptotyki $b_{n+1} - b_n \sim \ln n$):

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{\ln a_n}{\ln n} = 1;$$

ostatnia równość wynika wprost z (5).

Janusz Olszewski: $a_{n+1} = \varphi(a_n)$, gdzie $\varphi(x) = x + \ln x$; niech $c_n = n \ln b_n$; wówczas

$$(7) \quad b_{n+1} < \varphi(b_n) \quad \text{dla } n \geq 17; \quad c_{n+1} > \varphi(c_n) \quad \text{dla } n \geq 1;$$

pierwsza z tych nierówności sprowadza się do $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leq \ln n$ (prawda dla $n \geq 17$); druga – po wprowadzeniu wyrażeń definiujących c_n i b_n , obłożeniu obu stron funkcją \exp i po nietrudnych przekształceniach przybiera postać

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n+1} > \frac{\ln n + \ln \ln n}{\ln n}$$

– prawda, bo lewa strona jest większa od e , a prawa mniejsza od 2. Teraz znajdujemy takie liczby naturalne

p, q , by $a_{p+17} > b_{17}$, $c_q > a_0$, i przez indukcję dostajemy z zależności (7) oszacowania $a_n > b_{n-p}$ dla $n \geq p + 17$ oraz $a_n < c_{n+q}$ dla $n \geq 0$. To już teza, bo $c_n \sim b_n$.

Te trzy rozwiązania mają wiele wspólnych elementów. Czwarte jest odmienne, i też efektowne:

Janusz Olszewski: Funkcja $f(x) = x/\ln x$ jest wklęsła w przedziale (e^2, ∞) , toteż

$$f'(a_{n+1}) < \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} < f'(a_n) \quad \text{gdy } a_n > e^2.$$

Oznaczając $g(x) = f'(x) \ln x$, $r_n = f(a_{n+1}) - f(a_n)$, $\delta_n = (\ln a_n)/(\ln a_{n+1})$, przepisujemy to oszacowanie jako $\delta_n g(a_{n+1}) < r_n < g(a_n)$; zatem $r_n \rightarrow 1$ (bo $\delta_n \rightarrow 1$, $g(x) \rightarrow 1$ przy $x \rightarrow \infty$). Stąd

$$\frac{f(a_n) - f(a_0)}{n} = \frac{r_0 + \dots + r_{n-1}}{n} \rightarrow 1.$$

Tak więc $\lambda_n := \frac{f(a_n)}{n} \rightarrow 1$, $\mu_n := \frac{\ln f(a_n)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln \lambda_n}{\ln n} \rightarrow 1$, wobec czego $\lambda_n \mu_n \rightarrow 1$. Koniec, bo $\lambda_n \mu_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{\ln a_n - \ln \ln a_n}{\ln a_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$.

Zadanie 711. [Czy istnieje permutacja x_1, x_2, \dots zbioru \mathbb{N} o własności: $n|x_1 + \dots + x_n$?] ($WT=2,07$; $LPR=14$). Zasadniczo dwie metody, obie licznie reprezentowane. Albo, jak w firmowym, dołączanie po dwa wyrazy, albo dołączanie jednego wyrazu – najmniejszej liczby jeszcze nie wykorzystanej, a spełniającej wymagany warunek; jest to albo średnia arytmetyczna wcześniejszych wyrazów, albo następna dobra liczba. Ciąg jest obecny w OEIS (A019444), konstrukcja tą drugą metodą (algorytm „zachłanny”), wszelako bez dokładnych uzasadnień; przy odwołaniu do OEIS, uzupełnienie uzasadnień było niezbędne dla oceny maksymalnej.

Zadanie 713. [Czworokąt $ABCD$; okręgi (ABP) , (CDQ) styczne do CD i do AB w punktach P i Q ; ich wspólna cięciwa połowi $PQ \Rightarrow AD \parallel BC$] (WT=3, 51; LPR=3).
Dobre rozwiązania: **J. Olszewski**, **J. Węgrecki** (identyczne z firmowym) oraz (dość podobnie) **T. Wietecha**; było jeszcze jedno rozumowanie, rozpoczęte obiecująco, ale bez kluczowego uzasadnienia.

Zadanie 715. [Dane $A, B \in \mathbb{N}$, $A \neq B \Rightarrow$ zbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$ jest sumą rozłącznych przesunięć zbiorów $\{-A, 0, B\}$, $\{-B, 0, A\}$] (WT=2, 20; LPR=7). **J. Cisko**, **M. Miodek**, **J. Olszewski**, **R. Słowik** podali ten sam algorytm, co i rozwiązanie firmowe; **M. Małogrosz** – algorytm nieco bardziej skomplikowany (w każdym kroku modyfikacja wstecz), ale też bezbłędny. Dwaj uczestnicy zwrócili uwagę, że zagadnienie jest znane: **A. Dzedzej** wskazał jego obecność nawet w książce popularnej: R. Honsberger, *Mathematical Gems II* (MAA 1976) oraz zacytował pracę: A. D. Meyerowitz, *Tilings in \mathbb{Z} with triples* (J. Combin. Th. A 48 (1988), 229–235) (www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316588900088); zaś **P. Kumor** – tę samą pracę, a ponadto pracę: B. Gordon, *Tilings of lattice points in Euclidean n -space* (Discrete Math. 29 (1980), 169–174) (www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X80900047). Można się z nich dowiedzieć, że kratę \mathbb{Z}^n (i pewne jej podzbiory) da się pokryć rozłącznymi przystającymi kopiami dowolnego zbioru trójelementowego; a dla $n = 1$ zapoznać się z zagadnieniem, jak krótki blok kolejnych liczb całkowitych daje się pokryć zbiorami z zadania (dalsze odsyłacze bibliograficzne w cytowanych pracach).

Zadanie 716. [a, b, c – boki trójkąta $\Rightarrow \sum_{\text{cykl}} (a^2b + ab^2 - abc)^{1/2} > \frac{1}{2}(a + b + c)^{3/2}$; stała $\frac{1}{2}$ optymalna] (WT=1, 85; LPR=10). Sporo dobrych rozwiązań, w większości opartych na rozważaniach geometrycznych. Idąc tą ścieżką, **Piotr Kumor** uzyskał wzmocnienie tezy: różnica między lewą a prawą stroną nierówności jest $\geq Cr^{3/2}$, gdzie r to promień okręgu wpisanego, zaś C jest stałą, dającą równość w przypadku trójkąta równobocznego; zauważył też, że analogiczna nierówność zachodzi dla dowolnych n -kątów ($n \geq 3$), mających okrąg wpisany.

Zadanie 717. [$\triangle ABC$: $|\sphericalangle C| = 2 \cdot |\sphericalangle A|$; CD – dwusieczna ($\sphericalangle C$); S – środek okręgu stycznego (zewn.) do okręgów (ACD) , (BCD) i do półprostej $CA^{\rightarrow} \Rightarrow AB \perp CS$] (WT=3, 70; LPR=1).

Tylko jedno rozwiązanie: **Janusz Olszewski**; przy tym zupełnie odmienne od firmowego:

Jak w firmówce, oznaczmy przez k_1 okrąg o środku S , określony w zadaniu, a przez k_2, k_3 – okręgi (ACD) , (BCD) ; punkty styczności E, F, G – jak na rysunku. Z założenia $|\sphericalangle C| = 2 \cdot |\sphericalangle A|$ wynika, że prosta BC jest styczna do k_2 oraz że proste styczne do k_2, k_3 w punktach D i B są $\parallel AC$. Zatem jednokładność φ o środku E , która przekształca okrąg k_2 na k_1 , przeprowadza pierwszą z tych stycznych na prostą AC ; zaś jednokładność o środku G , która przekształca okrąg k_3 na k_1 , przeprowadza drugą z tych stycznych na AC ; tak więc $E \in FD$, $G \in FB$.

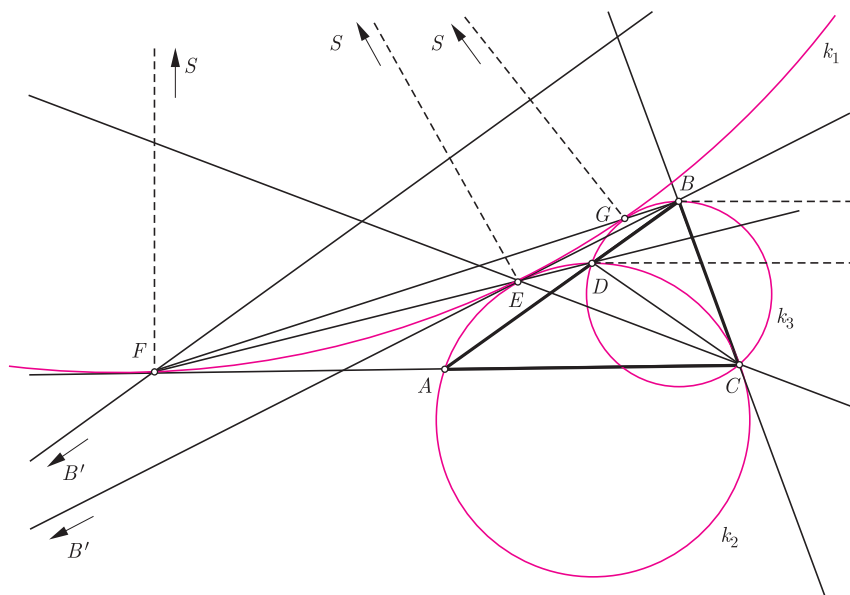
Z zależności kątowych łatwo teraz zobaczyć, że $\triangle FBA \sim \triangle DBG$, skąd $|BF| \cdot |BG| = |BA| \cdot |BD|$, czyli B leży na osi potęgowej okręgów k_1 i k_2 ; prosta BE jest ich wspólną styczną. Zatem prosta CE jest biegunową punktu B względem k_2 . W odwzorowaniu φ nie zmienia ona położenia – jest więc także biegunową punktu $B' = \varphi(B)$ względem k_1 . Z dualności biegunowych wynika teraz, że B' leży na biegunowej punktu C względem k_1 . Punkt F również na niej leży. Wobec tego $B'F \perp CS$. Pozostaje zauważyć, że $B'F \parallel BD$ (bo $F = \varphi(D)$). Pięknie!

Zadanie 721. [$\triangle ABC$; D, E, F – punkty styczności boków z okręgami dopisanymi $\Rightarrow [DEF] : [ABC] = r : 2R$] (WT=2, 44; LPR=10). Również i to zadanie okazało się znane lepiej, niż moglibyśmy sobie życzyć. Rozwiązanie firmowe polegało na wyprowadzeniu wzoru (*): $[DEF] : [ABC] = 2uvw : abc$ (gdzie $a = |BC|$, $u = |BD|$; $D \in BC$ (& cykl)); prace wszystkich uczestników też – mniej lub bardziej wyraźnie – do tej równości się sprowadzają.

W XXXVII O.M. wzór (*) pojawia się w rozwiązaniu firmowym zadania II-6, i to przy (słabszym) założeniu, że odcinki AD, BE, CF jedynie mają punkt wspólny (D, E, F to niekoniecznie punkty z naszego zadania). Ale – jak zauważył **Tomasz Wietecha** – już w XVI O.M. zadanie III-5 miało tezę jeszcze ogólniejszą: gdy D, E, F to dowolne punkty na odpowiednich bokach, wówczas $[DEF] : [ABC] = (uvw + (a-u)(b-v)(c-w)) : (abc)$; gdy działa twierdzenie Cevy, daje to wzór (*). **Paweł Kubit**, dla odmiany, odesłał do książki: S. I. Zetel, *Geometria trójkąta*, gdzie (w rozważaniach ilustrujących twierdzenie Van Aubela) także można znaleźć równoważną postać wzoru (*) dla przypadku objętego twierdzeniem Cevy.

Nie pierwszy to raz, i z pewnością nie ostatni, gdy zadanie ligowe dla wyjadaczy okazuje się folklorem. Na przykład:

Zadanie 723. [(F_n) – ciąg Fibonacciego; czy $\forall a, r \exists n : F_n \equiv a \pmod{r}$?] (WT=1, 33; LPR=16).
Banalne kontrprzykłady: $r = 8, 11, 12, 13, 16$ i wiele innych. **P. Kumor** – interesujący odsyłacz: S. A. Burr, *On moduli for which the Fibonacci sequence contains a complete system of residues*, Fibonacci Q-ly 9 (1971), 497–504 (www.mathstat.dal.ca/FQ/Scanned/9-5/burr.pdf).



Prosto z nieba: Trzęsienia Merkurego

Duża aktywność medialna zespołów misji kosmicznych przyzwyczała nas ostatnio do widoków odległych i słabo oświetlonych zakątków Układu Słonecznego (np. niezwykle zdjęcia Plutona sondy New Horizons), dlatego w tym miesiącu trochę wiadomości z obszarów bardziej nasłonecznionych. Przyjrzyjmy się powierzchni Merkurego. Jest on najmniejszą i najgęstszą planetą Układu Słonecznego; promień planety wynosi 2440 km, czyli tylko 1,4 razy więcej niż promień Księżyca. Rok merkurijski to prawie 3 ziemskie miesiące (88 dni), a dzień trwa prawie dwa ziemskie miesiące (58 dni). Orbita planety jest nachylona do ekliptyki pod kątem 7° , a więc znacznie bardziej niż orbity innych planet oraz jest dość ekscentryczna, $e = 0,2$.

Ekscentryczność orbity definiuje się jako $e = (r_a - r_p)/(r_a + r_p)$, gdzie r_p to odległość peryapsis (najmniejsza odległość planety od środka masy układu), a r_a to odległość apoapsis (największa odległość).

Jej precesję (zmianę kierunku peryapsis) próbował bez powodzenia wytłumaczyć na gruncie mechaniki newtonowskiej i teorii perturbacji już w 1859 roku Urbain Le Verrier. Zwrócił natomiast uwagę na problem, z którym uporała się dopiero teoria względności.

W kierunku Merkurego została w 2004 roku wystrzelona sonda NASA MESSENGER (Mercury Surface, Space ENvironment, GEochemistry and Ranging). Po serii skomplikowanych asyst grawitacyjnych z wykorzystaniem

planet wewnętrznych (raz obok Ziemi, dwa razy obok Wenus i trzy wokół Merkurego) MESSENGER wszedł na orbitę Merkurego w marcu 2011 roku i pozostał na niej aż do 2015 roku jako pierwszy (i do tej pory jedyny) sztuczny satelita, sporządzając dokładną mapę jego powierzchni. Misja zakończyła się zaplanowanym, stopniowym zmniejszeniem orbity i zderzeniem satelity z powierzchnią planety w kwietniu 2015 roku. Czego dowiedzieliśmy się z obserwacji MESSENGER-a? Okazuje się, że Merkury jest tektonicznie aktywny, podobnie jak Ziemia i Księżyc (czujniki pozostawione na Księżycu przez misje Apollo zarejestrowały trzęsienia o wielkości powyżej 4 w skali Richtera). Dobra rozdzielczość zdjęć wykonana podczas samobójczego lotu satelity ujawnia na powierzchni mnóstwo niewielkich uskoki i fałd tektonicznych. Musiały one powstać niedawno, ponieważ regularne bombardowanie powierzchni Merkurego przez deszcze meteorytowe nie zdążyło ich jeszcze zamazać. Przesunięcia i uskoki na powierzchni gruntu merkurijskiego są skutkiem ochładzania, a co za tym idzie, kurczenia się planety. Podobnie dzieje się w przypadku Księżyca, na którym istnieją podobne formacje. Jądro Merkurego jest, jak się okazuje, wciąż gorące, o czym dodatkowo świadczy obecność niewielkiego globalnego pola magnetycznego (o wartości około 1% ziemskiego).

Michał BEJGER

Niebo w lutym

Obserwatorom, którzy chętnie uciekną od polskiej zimowej aury, polecamy wycieczkę w rejony Ziemi Ognistej i Patagonii. Właśnie tam, w dniu 26 II, dojdzie do obrączkowego zaćmienia Słońca. Ten typ zaćmienia występuje, gdy średnica kątowa Księżyca jest mniejsza niż rozmiary kątowe Słońca, czyli wtedy, kiedy Księżyc znajduje się w pobliżu apogeum swojej orbity (pozycji najbardziej oddalonej od Ziemi). Lutowe zaćmienie Słońca będzie można obserwować z rejonów południowego Chile i Argentyny: Księżyc zasłoni 97% tarczy Słońca. Widoczne z terenu Demokratycznej Republiki Konga oraz Zambii zaćmienie wyniesie 96%. W Namibii Księżyc zasłoni 92% powierzchni Słońca. Czas trwania zjawiska jest szacowany na 68 sekund.

Miłośnikom zaćmień, zarówno z terenu Polski, jak i całej Europy, luty oferuje zaćmienie Księżyca, które wystąpi 11 II. Będzie półcieniowe, występujące, gdy nasz naturalny satelita przesuwa się przez stożek półcienia Ziemi, jednak znajduje się poza stożkiem cienia całkowitego. Zjawisko rozpocznie się o godzinie 23:34, jego maksimum przypadnie na godzinę 01:43 i potrwa do 03:53.

Amatorom obserwacji i astrofotografii Księżyca polecamy jego spotkania z planetami. Już 1 II znajdzie się on w towarzystwie Marsa, następnie 3 II towarzyszyć będzie Ceres, 15 II Jowiszowi, a następnie 21 II Saturnowi. Planując obserwacje, warto pamiętać, iż pełnia w tym miesiącu przypada 11 II, natomiast now 26 II.

Pierwszą część lutowych nocy warto poświęcić na obserwacje gwiazd tworzących trójkąt zimowy, w skład którego wchodzi Betelgeza z gwiazdozbioru Oriona, Syriusz z konstelacji Wielkiego Psa oraz Procyon będący elementem gwiazdozbioru Małego Psa. Trójkąt zimowy zobaczą obserwatorzy bez sprzętu astronomicznego i to w dodatku z terenów rzęsiście oświetlonych miast: Betelgeza ma jasność $0,45^m$, Syriusz nawet $-1,45^m$, a Procyon $0,40^m$.

Komu nie są straszne obserwacje prowadzone do samego świtu, temu polecamy obserwacje gwiazd należących do trójkąta letniego, który widoczny jest w drugiej połowie lutowych nocy. Obiektami składającymi się na trójkąt letni są Altair z konstelacji Orła, Deneb z gwiazdozbioru Łabędzia oraz należąca do Lutni Wega, które będą widoczne aż do wschodu Słońca nad horyzontem wschodniego nieba. Do obserwacji trójkąta letniego również nie jest potrzebny żaden sprzęt optyczny, jego gwiazdy będą mieć jasności odpowiednio $0,00^m$, $1,25^m$ oraz $0,75^m$.

Lutowe Leonidy są corocznym rojem dostępnym dla łowców spadających gwiazd. Rój ten jest aktywny od 1 do 28 lutego i w tym czasie osiąga kilka maksimum. Jednak jego aktywność nie jest zbyt wielka i wynosi 5 meteorów na godzinę; poruszają się one z prędkościami około 30 km/s.

Karolina BĄKOWSKA

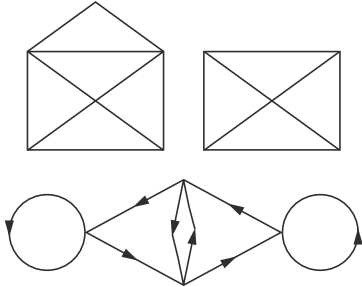


Od rysowania kopert do otwierania sejfów

Joanna JASZUŃSKA

Które z rysunków 1 (a), (b), (c) da się narysować bez odrywania ołówka od kartki i bez rysowania ponownie wzdłuż narysowanej już linii?

Te obrazki to *grafy*, czyli kropki (*wierzchołki*) połączone kreskami (*krawędziami*), a liczbę schodzących się w wierzchołku końców krawędzi nazywamy jego *stopniem*. Rozważamy tylko grafy *spójne* (w jednym kawałku) i o skończeniu wielu wierzchołkach i krawędziach.



Rys. 1 (a), (b), (c). Linie oznaczone strzałkami można rysować tylko zgodnie z ich kierunkiem.

„Przechodząc” ołówkiem przez wierzchołek grafu, rysujemy zawsze dwie końcówki krawędzi — wchodzącą i wychodzącą. Aby zatem rysunek mógł powstać jednym pociągnięciem ołówka, w każdym wierzchołku liczba końców krawędzi musi być *parzysta* z wyjątkiem być może dwóch wierzchołków: początkowego i końcowego. Jeśli dodatkowo chcemy wrócić do punktu wyjścia, wyjątków tych być nie może. Zamknięta koperta (rys. 1 (b)) ma cztery wierzchołki stopnia trzy, więc nie da się jej narysować jednym pociągnięciem ołówka.

Grafy, które da się w opisany sposób narysować, nazywamy *grafami Eulera*, a ślad ołówka odpowiednio *drogą* (jeśli końce są różne) lub *cyklem Eulera* (jeśli końce się pokrywają). Okazuje się, że sformułowany powyżej warunek konieczny jest również dostateczny i zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie Eulera. *Graf ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty. Graf ma drogę Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.*

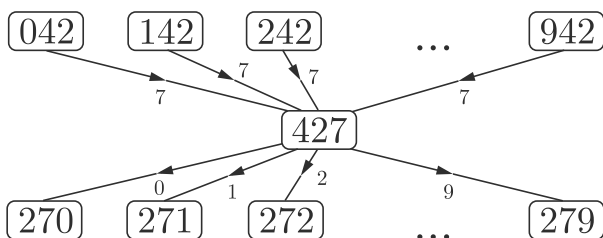
Analogicznie graf *skierowany* (ze strzałkami na krawędziach) ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym wierzchołku liczba krawędzi wychodzących równa jest liczbie krawędzi wchodzących.

A czy istnieje graf o dokładnie jednym wierzchołku stopnia nieparzystego?

Warto porównać to twierdzenie z opisanymi w poprzednim *deltoide* czarno-białymi mapami.

Mamy sejf otwierany czterocyfrowym, nieznanym nam kodem. Sprawdzenie po kolei wszystkich kodów od 0000 do 9999 wymagałoby wciśnięcia 40000 cyfr. Jednak można mniej się namęczyć. Otóż drzwi otworzą się, gdy ostatnie cztery spośród wprowadzonych cyfr utworzą właściwy kod, więc na przykład wciśnięcie kolejno cyfr 1, 2, 3, 4, 5 sprawdza dwa kody: 1234 i 2345.

Pokażemy, że istnieje taki ciąg 10003 cyfr (zwany *ciągiem de Bruijna*), w którym każda czwórka kolejnych cyfr jest inna. Oznacza to, że wciśnięcie w tej właśnie kolejności 10003 przycisków pozwoli na sprawdzenie *wszystkich* 10000 potencjalnych kodów i otwarcie sejfu. Szybciej się nie da (chyba że zgadniemy kod)!



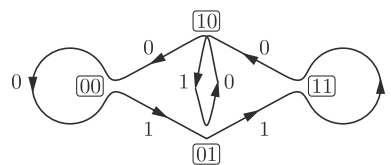
Rys. 2. Przykładowy wierzchołek i jego krawędzie.

Rozważmy graf (rys. 2), którego wierzchołkami są trójki cyfr od 000 do 999 (odpowiadają one ostatnim trzem naciśniętym przyciskom). Z każdego z nich wychodzi

10 skierowanych krawędzi, podpisanych cyframi od 0 do 9 (jest ich zatem 1000×10 i odpowiadają one kodom: trzy cyfry wierzchołka i właśnie naciskana czwarta cyfra z krawędzi). Każda krawędź prowadzi do wierzchołka odpowiadającego aktualnej trójce ostatnio naciśniętych cyfr. Wobec tego również do każdego wierzchołka wchodzi po 10 krawędzi.

Skoro w tym grafie liczba krawędzi wchodzących do każdego wierzchołka jest równa liczbie jego krawędzi wychodzących, to istnieje cykl Eulera. Rysując graf zgodnie z tym cyklem i notując wierzchołek początkowy oraz cyfry z kolejnych krawędzi, otrzymamy poszukiwany ciąg de Bruijna zawierający wszystkie kody.

Prostszy wariant powyższego problemu ilustruje rysunek 3, który przedstawia graf i cykl Eulera dla sejfu z trzycyfrowym kodem złożonym z cyfr 0 i 1. Cykl ten daje ciąg de Bruijna 0111010001 i łatwo sprawdzić, że faktycznie każda trójka kolejnych zer i jedynek występuje w tym ciągu dokładnie jeden raz.



Rys. 3