

## SPIS TREŚCI NUMERU 12 (511)

Droga do najdalszej galaktyki  
*Oskar Kopczyński* str. 1

Najłatwiejsze zadanie?  
*Kamil Rychlewicz,  
Mariusz Skalba* str. 3

Jak silne są wrogie siły?  
*Łukasz Rajkowski* str. 5

Bitwy w szufladkach  
*Piotr Chrzastowski-Wachtel* str. 6

Pewne uogólnienie prostej  
Eulera  
*Chuong Chi Nguyen,  
Hung Son Nguyen* str. 9

Jak szybko urosnę?  
*Przemysław Biecek* str. 12

Rewelacyjnie prosty  
silnik elektryczny  
*Stanisław Bednarek* str. 14

Zadania str. 15

Stabilnie czy dynamicznie?  
*Marek Kordos* str. 16

Naukowa prasówka  
*Magdalena Fikus* str. 19

Seks a informatyka str. 20

Informatyczny kącik  
olimpijski (100):  
Równoważność palindromiczna  
*Tomasz Idziaszek* str. 21

Wyniki XXXIII  
Ogólnopolskiego  
Sejmiku Matematyków str. 22

XXXVIII Konkurs  
Uczniowskich  
Prac z Matematyki str. 22

Klub 44 str. 23

Prosto z nieba: Porządnym  
układ planetarny str. 24

Niebo w grudniu str. 24

Okrągły stół  
i trójkąt  
*Joanna Jaszewska* str. 25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Tomasz Kazana, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Podpunkt; rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl) lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

**Można nas też znaleźć na** [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

**Redakcja *Delty* dziękuje Studiu Graficznemu Podpunkt  
za dziesięcioletnie ozdabianie naszego miesięcznika  
atrakcyjnymi okładkami i ilustracjami.**

# Droga do najdalszej galaktyki

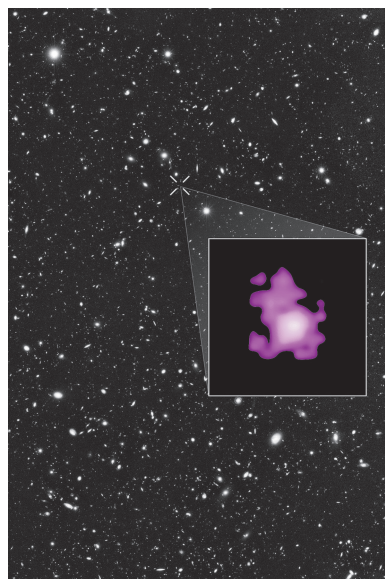
Oskar KOPCZYŃSKI\*

\*doktorant, Obserwatorium  
Astronomiczne Uniwersytetu  
Jagiellońskiego

W serwisach informacyjnych dosyć regularnie pojawiają się krótkie wzmianki dotyczące osiągnięć w dziedzinie astrofizyki. Dzięki nim dowiadujemy się, że astronomowie z USA, Europy, Japonii – czasem nawet z Polski – odkryli nową planetę, interesującą gwiazdę, może nawet galaktykę. Do informacji dołączone jest zwykle zdjęcie samego obiektu, czasem teleskopu, który zjawisko zaobserwował i ... zwykle na tym ciekawość mediów się kończy.

Cóż zatem kryje się za doniesieniem z marca tego roku: *teleskop Hubble'a odkrył najodleglejszą galaktykę*, o którym pisała również *Delta w Prosto z nieba* w numerze 8/2016? Przede wszystkim warto zdać sobie sprawę z tego, że tak naprawdę nie znamy dokładnej odległości tej galaktyki od Ziemi, mało tego – nawet nie możemy znać. Ale po kolei. Kluczowym parametrem, który został we wspomnianym wyżej *newsie* określony dla obiektu o dźwięcznej nazwie **GN-z11**, jest **przesunięcie ku czerwieni**, oznaczane zwykle literą  $z$ . Jest to parametr określający rozciągnięcie, jakiemu uległa wyemitowana przez dane ciało niebieskie fala elektromagnetyczna. Długość fali zarejestrowanej przez obserwatorium na Ziemi (lub orbicie ziemskiej) jest  $z + 1$  razy większa niż długość tej samej fali w momencie, gdy opuściła ona źródło (w momencie emisji). Dla obiektu GN-z11 zmierzono poczerwienienie równe 11,1, co oznacza, że fale elektromagnetyczne, które stamtąd do nas dotarły, są 12,1 raza dłuższe, niż były w momencie emisji.

Przesunięcie ku czerwieni  $z$  jest pomniejszonym o jeden stosunkiem rejestrowanej na Ziemi długości fali ( $\lambda_o$ ) do „oryginalnej” długości fali emitowanej ze źródła ( $\lambda_e$ ):  
$$z = (\lambda_o / \lambda_e) - 1.$$



Galaktyka GN-z11 na tle pola przeglądu GOODS-N (NASA/ESA)

Przy okazji wyjaśnimy, skąd taka nazwa obiektu: znaleziono go w północnym (North) polu przeglądu nieba o nazwie Great Observatories Origins Deep Survey, w skrócie GOODS North, czyli GN, a przesunięcie ku czerwieni określono na  $\sim 11$ , a zatem po złożeniu obu informacji otrzymujemy: GN-z11.

Wartość stałej Hubble'a wyznaczona na podstawie danych dostarczonych w roku 2013 przez obserwującego promieniowanie mikrofalowe tła satelitę Planck wynosi  $H_0 = 67,15$  (km/s)/Mpc.

Przesunięcie ku czerwieni jest miarą nieliniową: oznacza to, że obiekt, dla którego wyznaczono, iż ma dwa razy większe przesunięcie ku czerwieni, wcale nie jest dwa razy starszy ani zlokalizowany dwa razy dalej od Ziemi.

Wracając do przesunięcia ku czerwieni, czasem porównuje się je do zmiany częstotliwości poruszających się obiektów w wyniku efektu Dopplera, pisząc  $z = v/c$ , gdzie  $v$  jest prędkością poruszającego się (w tym przypadku oddalającego się) obiektu, a  $c$  jest prędkością światła. Dzięki badaniom Edwina Hubble'a wiemy również, że  $z = dH_0$ , gdzie  $d$  jest odległością pomiędzy obiektem a Ziemią, natomiast  $H_0$  jest pewnym współczynnikiem, określającym tempo rozszerzania się Wszechświata, a nazywanym **stałą Hubble'a**. Wydaje się zatem, że znając wartość stałej Hubble'a oraz posługując się prawem Dopplera, można bez problemu wyznaczyć odległość do dowolnego obiektu, jak również zmierzyć prędkość, z jaką porusza się on względem Ziemi. Tyle tylko, że dla GN-z11 otrzymane wyniki są... co najmniej dziwne: prędkość oddalania się wynosi ponad 11 razy prędkość światła, a wyznaczona odległość osiąga wartość 32 mld lat świetlnych, podczas gdy wiek Wszechświata szacuje się na 13,8 mld lat.

Powyższa rozbieżność wynika z tego, że zaproponowana metoda działa dobrze tylko dla  $z$  znacznie mniejszych od 1. W rzeczywistości główną przyczyną wydłużania się fal elektromagnetycznych w drodze od odległych obiektów do nas, Ziemi, jest rozszerzanie się Wszechświata jako całości, co jako pierwszy zaobserwował Hubble – to **przestrzeń**, w której zanurzone są galaktyki oraz cała materia, rozszerza się, powodując wrażenie oddalania się galaktyk. Wraz z przestrzenią rozszerzają się również fale elektromagnetyczne – rozszerzałyby się także i galaktyki, gdyby ich własne pole grawitacyjne nie powstrzymywało tego procesu. Wartość przesunięcia ku czerwieni informuje nas zatem, jak bardzo,  $z + 1$  razy, rozszerzył się Wszechświat od momentu, w którym docierająca do nas fala elektromagnetyczna została wyemitowana z obserwowanego obiektu. Możemy, znając model teoretyczny rozszerzającego się Wszechświata, obliczyć, że dla GN-z11 nastąpiło to 13,3 mld lat temu, nieco ponad 400 mln lat po Wielkim Wybuchu (któremu, jak można się domyśleć, odpowiada nieskończone przesunięcie ku czerwieni). Ponieważ jednak Wszechświat się rozszerza, nie jesteśmy w stanie podać dokładnej odległości obiektu od Ziemi – bo tak naprawdę w kosmologii, czyli dziale astronomii zajmującym się Wszechświatem w wielkiej skali, nie ma dla takiej odległości uniwersalnej definicji (zależy ona od modelu kosmologicznego).

Przesunięcie ku czerwieni jest jednocześnie miarą odległości, jak i wieku Wszechświata – jest zatem podstawową wielkością w kosmologii. Zastanówmy



### Rozwiązanie zadania M 1513.

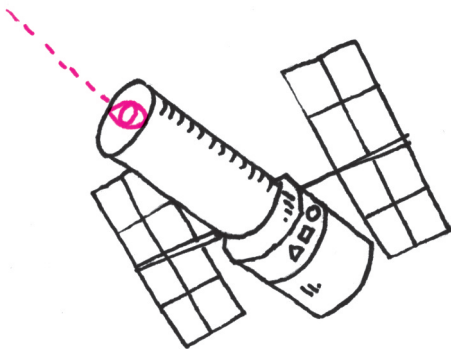
Rozważmy wielomian  $v(x) = w(x + 1)$ .

Wówczas liczba  $\frac{p}{q} - 1 = \frac{p-q}{q}$  jest

pierwiastkiem wielomianu  $v$ . Niech  $v(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ . Wówczas po przemnożeniu obu stron równości  $v\left(\frac{p-q}{q}\right) = 0$  przez  $q^n$  otrzymujemy

$$a_n(p-q)^n + a_{n-1}(p-q)^{n-1}q + \dots + a_1(p-q)q^{n-1} + a_0q^n = 0.$$

Stąd liczba  $a_0q^n$  jest podzielna przez  $p-q$ . Ponieważ liczby  $p-q$  i  $q$  są względnie pierwsze, to wiemy, że  $p-q$  dzieli liczbę  $a_0 = v(0) = w(1)$ .



Przykład wyznaczenia spektroskopowego przesunięcia ku czerwieni: po rozszczepieniu światła zlokalizowano linię OII, która w warunkach laboratoryjnych odpowiada długości  $\lambda_e = 3727 \text{ \AA}$ , natomiast w obserwowanym widmie energetycznym obiektu astronomicznego została zlokalizowana na długości fali  $\lambda_o = 5000 \text{ \AA}$ . Wyznaczone na podstawie tego pomiaru przesunięcie ku czerwieni wynosi  $z = (\lambda_o/\lambda_e) - 1$ , co daje  $z = 0,8268$ .

Po tym obszernym wstępie przyjrzyjmy się, jak od kuchni wyglądało odkrycie najdalszej znanej obecnie galaktyki. Oprzemy się na opisie zamieszczonym w czasopiśmie *The Astrophysical Journal* (wydanie 819, 10 marca 2016). Opisano w nim, jak z danych przeglądu GOODS, uzyskanych za pomocą szerokokątnej kamery Kosmicznego Teleskopu Hubble'a, wyselekcjonowano sześć potencjalnych kandydatek o szacowanych fotometrycznych przesunięciach ku czerwieni powyżej  $z=9$ , charakteryzujących się stosunkowo dużą jasnością. Badacze już na wstępie przygotowali sobie solidny grunt pod odkrycie – nie była to kwestia przypadku. Z wybranych sześciu obiektów GN-z11 wyróżnił się zarówno jasnością, jak i wartością fotometrycznego przesunięcia ku czerwieni, dlatego też w kolejnym etapie badań awansował do obserwacji spektroskopowych. Zebranie odpowiedniej ilości światła pozwalającej na rozszczepienie widma tego obiektu zajęło teleskopowi Hubble'a 12 pełnych okrążeń Ziemi po 96 minut każde, przy czym połowę z nich wykonał on w dniu 11 lutego,

w tym miejscu, w jaki sposób możemy je zmierzyć, czyli jak określić zmianę długości fali wyemitowanej ze źródła. Obserwując obiekt w pewnym zakresie długości fal, możemy zauważyć, że w pewnych jej przedziałach dociera do nas więcej (lub mniej) fotonów światła (pod tą ogólną nazwą rozumiemy obok światła widzialnego także podczerwień, nadfiolet oraz inne zakresy fal) niż w innych. Rozkład ten nazywamy widmem energetycznym danego obiektu. Każdy typ i rodzaj gwiazdy czy galaktyki ma swoje charakterystyczne widmo, odróżniające je od innych. Dobra znajomość widm pozwala przypisać obserwowany obiekt do odpowiedniej kategorii. Wbrew pozorom nie zawsze jest to prosta sprawa. Rzeczywiste obserwowane widma zazwyczaj pasują do szablonów z mniejszym lub większym przybliżeniem, a dla słabych obiektów są zwykle dodatkowo zniekształcone przez szum. Sprawę komplikuje ponadto *a priori* nieznanne przesunięcie ku czerwieni, które chcemy wyznaczyć. Musimy zatem tak dobrać rodzaj obiektu oraz przesunięcie ku czerwieni, by dopasowanie szablonu i obserwowanego widma było jak najlepsze.

Najprostszy ze znanych sposobów obserwacji widma obiektu astronomicznego polega na pomiarze jego jasności w pewnych, z góry określonych zakresach długości fal. Tak uzyskane widmo nazywamy widmem **fotometrycznym**. Otrzymany kształt widma pozwala wyznaczyć **fotometryczne przesunięcie ku czerwieni**, które uważa się bardziej za wielkość szacunkową niż precyzyjny pomiar. Drugi sposób uzyskania widma polega na rozszczepieniu światła docierającego do teleskopu za pomocą pryzmatu bądź siatki dyfrakcyjnej (w praktyce wykorzystuje się ich kombinację) i zmierzeniu jasności dla różnych długości fal. Uzyskujemy w ten sposób **widmo spektroskopowe**, a na jego podstawie **spektroskopowe przesunięcie ku czerwieni** (o przeglądach spektroskopowych pisaliśmy m.in. w numerze 5/2016: *Wielka struktura w wielkich przeglądach*). Pierwszy sposób jest łatwiejszy i tańszy do przeprowadzenia, bo nie ma potrzeby rozszczepiania światła na pełny zakres długości fal. Potrzeba zatem mniej światła, co oszczędza cenny czas (zarówno obserwatora, jak i samego teleskopu) poświęcony na obserwacje obiektu. Drugi sposób jest daleko bardziej precyzyjny – rozszczepiając światło, można dostrzec dla pewnych długości fal charakterystyczne „szczyty” oraz głębokie „kotliny”: **linie emisyjne** oraz **absorpcyjne**. Są to linie papilarne obiektów astronomicznych, na podstawie których możliwa jest identyfikacja zarówno typu źródła (różne typy obiektów astronomicznych mają swoje charakterystyczne zestawy linii), jak i przesunięcia ku czerwieni. Jeżeli poprawnie zidentyfikujemy sekwencje poszczególnych linii oraz ich przesunięcie względem linii mierzonych w układzie laboratoryjnym, możemy wyznaczyć przesunięcie ku czerwieni z dokładnością do kilku miejsc po przecinku.

a drugą 3 kwietnia 2015 roku. Ponieważ w różnych dniach obserwacje były prowadzone pod nieco innym kątem, pozwoliło to na oszacowanie obecnego w widmie szumu. Uzyskane widmo galaktyki było nadal bardzo słabe. W celu zwiększenia poziomu sygnału do szumu zastosowano metodę dodawania strumieni pochodzących z sąsiednich długości fali, pogarszając, niestety, w ten sposób rozdzielczość, czyli poszerzając przedział długości fali przypadających na jeden piksel obrazu widma. Po tej obróbce do dalszej analizy wybrano zaledwie kilkadziesiąt pikseli, które jednak wystarczyły, by zidentyfikować linię emisyjną Lyman  $\alpha$  ( $\lambda_e=1215,7 \text{ \AA}$ ), powstającą w wyniku przejścia z poziomu drugiego na poziom podstawowy w atomie wodoru. Jest to najsilniejsza linia w przypadku obiektów o wysokim przesunięciu ku czerwieni – często jedyna widoczna. Na jej podstawie wyznaczono  $z$  dla GN-z11. Sam pomiar przesunięcia ku czerwieni dla tak słabego widma to jeszcze nie wszystko, mogło się przecież okazać, że linia ta została źle zidentyfikowana. Aby wykazać poprawność

swojego pomiaru, autorzy artykułu sprawdzili również konkurencyjne hipotezy: pierwsza z nich wskazywała, że GN-z11 jest tak naprawdę pełną pyłu galaktyką o przesunięciu ku czerwieni wynoszącym  $z = 2,5$ , w której ustały procesy gwiazdotwórcze, natomiast druga oparta była na przesłaniu, że jest to galaktyka z ekstremalnie silnymi liniami emisyjnymi o przesunięciu ku czerwieni  $z = 2,1$ . Jednak dla obu tych modeli uzyskano znacznie gorsze dopasowania niż dla  $z = 11,1$ .

W taki właśnie sposób została odkryta – jeśli o odkryciu wolno tu mówić – najdalsza znana obecnie galaktyka.

Samo bicie rekordów odległości nie jest tu jednak, moim zdaniem, najważniejsze. Istotne wydaje się to, że w ten sposób możemy obserwować bardzo młode galaktyki. Obserwujemy GN-z11 taką, jaka była zaledwie 400 mln lat po Wielkim Wybuchu, gdy powstawały w niej pierwsze gwiazdy, obecnie już dawno wygasłe. Dzięki tej obserwacji mamy, na razie wąski, wgląd w początki istnienia galaktyk i na tej podstawie otwiera się przed nami możliwość weryfikacji istniejących hipotez powstawania galaktyk takich, jakie znamy dzisiaj, w tym naszej.

## Najłatwiejsze zadanie?

Kamil RYCHLEWICZ\*, Mariusz SKAŁBA\*\*

Na drugim etapie tegorocznej Olimpiady Matematycznej pojawiło się następujące zadanie:

**Zadanie 1.** *We wnętrzu trójkąta o bokach długości 3, 4, 5 leży punkt  $P$ . Wykazać, że jeżeli odległości  $P$  od wierzchołków są wszystkie wymierne, to odległości  $P$  od boków też.*

Zadanie pojawiło się na zawodach z numerem 1 i (zgodnie z oczekiwaniami) okazało się bardzo łatwe – rozwiązała je znacząca większość uczestników. Przedstawimy szkic rozwiązania.

Umieścimy trójkąt (który jest, oczywiście, prostokątny) w układzie współrzędnych tak, by jego wierzchołkami były  $A = (0, 0)$ ,  $B = (4, 0)$ ,  $C = (0, 3)$ . Niech punkt  $P$  ma współrzędne  $(x, y)$ . Wtedy z twierdzenia Pitagorasa wynika, że  $|PA| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $|PB| = \sqrt{(4-x)^2 + y^2}$ . Stąd

$$|PA|^2 - |PB|^2 = (x^2 + y^2) - (16 - 8x + x^2 + y^2) = 8x - 16,$$

a ponieważ  $|PA|, |PB| \in \mathbb{Q}$ , to  $x \in \mathbb{Q}$ . Analogicznie  $y \in \mathbb{Q}$ . Zatem wykazaliśmy, że punkt  $P$  leży w wymiernych odległościach od boków  $AB$  i  $AC$ . Odległość od boku  $BC$  możemy obliczyć, korzystając, na przykład, ze wzoru na odległość punktu od prostej. Ponieważ prosta  $BC$  jest opisana równaniem  $3x + 4y - 12 = 0$ , to szukana odległość wynosi

$$\frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y - 12|}{5},$$

czyli jest wymierna. □

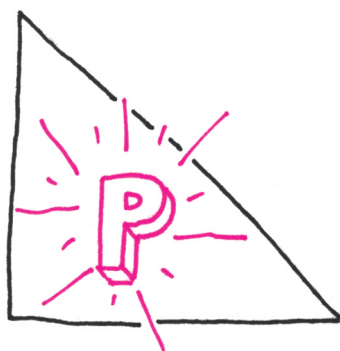
Pomimo niewielkiej trudności samego zadania możemy powiązać z nim kilka ciekawych problemów. Pierwsze pytanie, które się nasuwa, brzmi: *czy w ogóle istnieje punkt spełniający warunki zadania?* Przed przejściem do dalszej części artykułu Czytelnik może sam spróbować poszukać takich punktów.

Chociaż ich ręczne znalezienie może być trudne, z pomocą komputera szybko znajdujemy kilka punktów spełniających nasze warunki. Najprostszy z nich (o najmniejszych mianownikach) ma współrzędne  $(\frac{20}{23}, \frac{21}{23})$  i jest odległy od wierzchołków  $A, B, C$  odpowiednio o  $\frac{29}{23}, \frac{75}{23}, \frac{52}{23}$ .

Tak naprawdę powiedzieć możemy dużo więcej. J.H.J. Almering w 1963 roku udowodnił, że dla dowolnego (niekoniecznie prostokątnego) trójkąta o bokach wymiernej długości zbiór punktów, których odległości od wszystkich wierzchołków są wymierne, nie tylko jest niepusty, ale nawet nieskończony i ponadto jest gęstym podzbiorem płaszczyzny! Jak dowodzi T.G. Berry w pracy z 1992 roku, wystarczy jedynie założyć, że kwadraty długości boków są wymierne i co najmniej jeden bok trójkąta ma długość wymierną – to ostatnie założenie jest konieczne, bo w trójkącie o bokach  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$  nie ma żadnego punktu o wymiernych odległościach od wierzchołków (zachęcamy Czytelnika do samodzielnego udowodnienia tego faktu).

\*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

\*\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Kolejne pytanie, jakie możemy sobie postawić, dotyczy uogólnienia wyjściowego zadania. Rozumowanie analogiczne do przedstawionego powyżej rozwiązania pokazuje, że teza zadania jest spełniona dla dowolnego trójkąta prostokątnego o bokach wymiernych.

Wykażemy teraz, że teza zachodzi dla dowolnego trójkąta o bokach długości wymiernej i wymiernym polu. Zaczniemy od prostego lematu.

$$\begin{aligned} |AD|^2 + |CD|^2 &= |AC|^2 \\ |AD|^2 + |BD|^2 &= |AB|^2 \end{aligned}$$

**Lemat 1.** Załóżmy, że trójkąt  $ABC$  ma wymierne boki. Niech  $AD$  będzie wysokością tego trójkąta. Wtedy odcinki  $BD$  i  $CD$  mają długości wymierne.

*Dowód.* Wiemy, że  $|BD| + |CD| = |BC|$  lub  $|BD| - |CD| = |BC|$ , co jest liczbą wymierną. Ponadto z twierdzenia Pitagorasa wynika, że  $|BD|^2 - |CD|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$ , co też jest wymierne. Stąd  $|BD| + |CD|$  i  $|BD| - |CD|$  są wymierne, co natychmiast implikuje tezę lematu.  $\square$

Założmy teraz, że trójkąt  $ABC$  ma wymierne boki i wymierne pole. Przyjmując oznaczenia jak w lemacie, dostajemy, że  $|AD|$  jest wymierne (ze wzoru na pole trójkąta), a także  $|BD|$  i  $|CD|$  są wymierne. Zatem możemy ustawić trójkąt w układzie współrzędnych tak, aby punkty  $A, B, C$  miały odpowiednio współrzędne  $(0, a), (b, 0), (c, 0)$  dla pewnych liczb wymiernych  $a, b, c$ . Rozważmy punkt  $P = (x, y)$  o wymiernych odległościach od punktów  $A, B, C$ . Kwadraty tych odległości też są liczbami wymiernymi i są równe odpowiednio  $x + (y - a)^2, (x - b)^2 + y^2, (x - c)^2 + y^2$ . Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić, że wymierność tych liczb implikuje wymierność  $x$  i  $y$ .

Możemy pójść jeszcze dalej i zapytać, czy da się uogólnić ten rezultat na inne wielokąty. Okazuje się, że tak:

Założmy, że  $W_1W_2 \dots W_n$  jest wielokątem wypukłym o wymiernych bokach  $b_1, \dots, b_n$  i wymiernym polu  $S$ , a  $P$  niech będzie punktem we wnętrzu tego wielokąta. Wówczas, jeśli wszystkie odległości  $P$  od wierzchołków tego wielokąta są wymierne, to również wszystkie odległości  $P$  od jego boków są wymierne.

Dowód korzysta z następującego prostego faktu.

**Lemat 2.** Jeśli długości boków trójkąta  $a, b, c$  są wymierne, to jego pole  $s$  spełnia warunek  $s^2 \in \mathbb{Q}$ .

Wynika to, na przykład, ze słynnego wzoru Herona

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ gdzie } p = (a+b+c)/2,$$

ale można udowodnić to dużo prościej. Następny lemat jest bardziej wyrafinowany, ale przy naszym podejściu niezbędny.

**Lemat 3.** Załóżmy, że liczby  $q_1, \dots, q_n$  są wymierne i dodatnie oraz że liczba  $\sqrt{q_1} + \dots + \sqrt{q_n}$  też jest wymierna. Wówczas wszystkie liczby  $\sqrt{q_j}$  są wymierne.

Czytelnik Oblatany może zgłębić zakamarki dowodu, a Czytelnik Nieśmiały na ten czas może przyjąć jego poprawność na wiarę i przejść do dalszej części.

*Dowód.* Załóżmy, że jest inaczej i rozważmy ciało  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{q_1}, \dots, \sqrt{q_n})$ . Mamy więc  $K \neq \mathbb{Q}$  i ciało  $K$  jest rozszerzeniem Galois ciała  $\mathbb{Q}$  (gdyż jest ciałem rozkładu wielomianu  $\prod_{j=1}^n (x^2 - q_j)$ ). Niech  $\sigma$  będzie dowolnym nietrywialnym automorfizmem  $K$  nad  $\mathbb{Q}$ . Ponieważ

$$\sqrt{q_1} + \dots + \sqrt{q_n} = w \in \mathbb{Q}, \text{ więc } \sigma(\sqrt{q_1}) + \dots + \sigma(\sqrt{q_n}) = \sigma(w) = w$$

(gdyż  $\sigma$  zachowuje działania). Dla każdego  $j \in \{1, \dots, n\}$  mamy  $\sigma(\sqrt{q_j}) = \sqrt{q_j}$  albo  $\sigma(\sqrt{q_j}) = -\sqrt{q_j}$ . Ale z powyższych dwóch równości wynika, że zawsze musi być  $\sigma(\sqrt{q_j}) = \sqrt{q_j}$ , a zatem  $\sigma = id$  – sprzeczność.  $\square$

Przechodzimy teraz do dowodu uogólnienia. Niech  $s_1, \dots, s_n$  będą polami trójkątów  $W_1PW_2, \dots, W_nPW_1$ . Z lematu 2 mamy  $s_j = \sqrt{q_j}$  gdzie  $q_j \in \mathbb{Q}^+$  dla  $j = 1, \dots, n$ . Z założenia  $\sqrt{q_1} + \dots + \sqrt{q_n} = S \in \mathbb{Q}$ , a zatem na podstawie lematu 3 mamy  $s_j = \sqrt{q_j} \in \mathbb{Q}$  dla  $j = 1, \dots, n$ . Z wymierności boków wielokąta i wzoru na pole trójkąta wynika teraz, że odległości punktu  $P$  od boków są wymierne.



#### Rozwiązanie zadania M 1515.

Niech  $h_a = 2, h_b = 3$  i  $h_c = 4$  będą wysokościami trójkąta, spuszczoneymi odpowiednio na boki długości  $a, b$  oraz  $c$ . Wówczas wiemy, że  $h_a a = h_b b = h_c c$ . W takim razie  $a = 6x, b = 4x$  i  $c = 3x$  dla pewnego  $x$ .

Ze wzoru Herona pole tego trójkąta jest

$$\text{równe } \frac{\sqrt{x \cdot 5x \cdot 7x \cdot 13x}}{4}.$$

Po przyrównaniu tej wartości do  $\frac{1}{2}h_a a = 6x$ ,

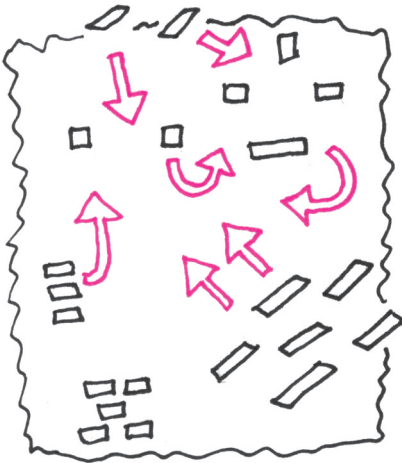
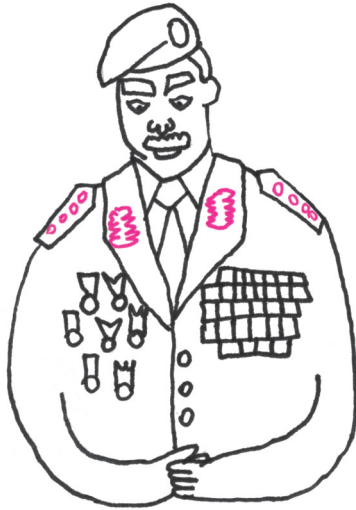
$$\text{otrzymujemy } x = \frac{24}{\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 13}},$$

skąd można obliczyć obwód trójkąta

$$p = 13x = 24 \cdot \sqrt{13/35}.$$

## Jak silne są wrogie siły?

Łukasz RAJKOWSKI



– O żesz krzywa jego źle uwarunkowana macierz! – zakrzyknął generał Estymer, po czym zaklął szpetnie. Na jego biurku leżał stos raportów opisujących kolejny dzień bitwy pomiędzy klanami Częstościowców i Bajesistów. Te dwie frakcje, dzielące między sobą władzę w Statogrodzie, dawno dawno temu pokłóciły się o to, czyje estymatory są dokładniejsze i tak zrodził się konflikt od lat nękający spokojną wcześniej krainę. – Bajesiści wprowadzili nową funkcję straty?! – zawołał Estymer zachrypniętym głosem, po czym zwrócił się do zacienionego kąta – Fisher, raportuj! I w tym momencie Cię z Kąta zafalował, zadrżał i nagle przybrał kształt generalskiego doradcy. – Niestety, to prawda. Nowa funkcja straty tratuje nasze oddziały skuteczniej niż dotychczasowe. Nazywają ją LINEX i cechuje się tym, że wysokie jednostki są trutowane dużo bardziej dotkliwie niż jednostki niskie. Straty wynikające ze stratowania idą już w tysiące! – powiedział Fisher. – Fatalna sprawa! Nasz wywiad donosi, że bajesiści mają w swoim arsenale około 5 tysięcy linexów! Jak można stawić czoła takiej sile? – generał opadł na fotel zrezygowany. – Coś mi się tutaj nie zgadza – zaczął Fisher po chwili przytłaczającej ciszy, a następnie wskazał na jeden ze zwitków papieru, leżących na biurku. – Spójrz, generale, ten raport zawiera numery seryjne przechwyconych dotychczas linexów. Czy nie uważasz, że coś z nim jest nie tak? Generał spojrzał na szereg liczb znajdujących się na kartce

76, 125, 254, 20, 132, 98, 173, 323.

– Mhm mhm mhm – zamruczał przytakująco Estymer w nadziei, że Fisher sam powie, co powinno wzbudzić niepokój generała. Nie zawiódł się. – Zakładając, że podane numery faktycznie odpowiadają kolejności powstawania linexów, a za to mogę ręczyć, gdyż sam zgromadziłem w tym zakresie odpowiednie informacje wywiadowcze, co te numery mówią nam o liczbie linexów u bajesistów? – zapytał Fisher. – Cóż, na pewno to, że mają ich co najmniej 323... – zaczął generał. – Z całą pewnością! Zauważ jednak, generale, że byłoby dość zaskakujące, gdyby bajesiści mieli dokładnie 323 linexy. Oznaczałoby to wówczas, że udało nam się trafić w linexa o najwyższym numerze. Oczywiście, jest to możliwe, jednak intuicyjnie tych linexów powinno być więcej. Załóżmy bowiem, że bajesiści mają ich  $N$ . Jeśli wypisane numery seryjne pochodzą z 8 losowo wybranych linexów, to jak ocenilibyś szanse na to, że największy numer wynosi  $m$ ? – Mhm mhm mhm – kontynuował generał, nie zmieniając swojej strategii postępowania z pytaniami Fishera. – Dokładnie, wszystkich możliwych opcji losowego wyboru 8 linexów spośród  $N$  jest  $\binom{N}{8}$ , a wyborów, w których największy numer seryjny to  $m$ , jest  $\binom{m-1}{7}$ . W tej sytuacji szansa na maksimum równe  $m$  wynosi  $\frac{\binom{m-1}{7}}{\binom{N}{8}}$ . Pozwala nam to obliczyć wartość oczekiwaną tego maksimum, czyli... – Fisher sięgnął po kartkę papieru i zaczął na niej pisać

$$\frac{1}{\binom{N}{8}} \left( 8 \binom{7}{7} + 9 \binom{8}{7} + \dots + N \binom{N-1}{7} \right) = \dots$$

– ... czyli  $\frac{8}{9}(N+1)$  – stwierdził triumfalnie Fisher po kilku liniijkach skomplikowanych zawiąsów, które tak zaintrygowały generała, że aż zapomniał o mhmowaniu. – Skoro tyle wynosi oczekiwana wartość maksimum, a my zaobserwowaliśmy, że jest ono równe 323, niezgorszym pomysłem wydaje się przyrównanie tych dwóch wielkości! Wartość oczekiwana będzie równa obserwowanej dla około 362 czołgów i to jest moim zdaniem dużo bliższe prawdy niż sugerowane przez nasz wywiad 5 tysięcy!

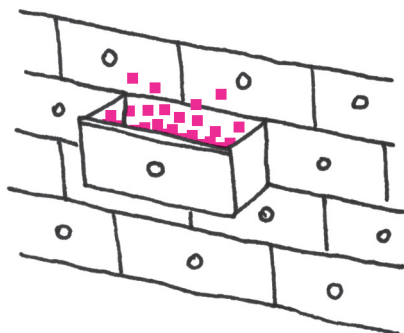
W tym momencie w pokoju rozległ się dzwonek telefonu, który wyrwał generała ze stanu osłupienia, w jaki zawsze wpędzały go rozważania doradcy. Generał podniósł słuchawkę, pokiwał głową, rzucił kilka przekleństw dla przyzwoitości, po czym odłożył słuchawkę i zwrócił się do Fishera. – Fisher! Nie będę udawał, że wiem, jak to zrobiłeś, ale nie pierwszy raz mnie zaskakujesz. Najnowsze informacje wywiadowcze szacują liczbę linexów na około 400, co ma wynikać z osobistego pamiętniczka Głównego Inżyniera Bajesistów. Wydaje się, że sytuacja faktycznie nie jest tak dramatyczna, jak wydawało się jeszcze godzinę temu! – Cieszę się, że mogłem się przydać... – powiedział usłużnie Fisher. – Ja też się cieszę, no ale przecież za to ci płacę. No, a teraz znikaj, wojna z bajesistami sama się nie wygra... – rzucił Estymer, w myślach rozważając już, w jaki sposób wynagrodzi się za swój wspianiały pomysł uczynienia z Fishera swojego doradcy.

Przedstawiona historia, choć humorystyczna, ilustruje bardzo poważne zastosowanie statystyki matematycznej. Czytelnikom, chcącym zgłębić temat, polecamy rozpocząć poszukiwania pod hasłem *German tank problem*.

## Bity w szufladkach

Piotr CHRZAŚTOWSKI-WACHTEL\*

W wersji anglosaskiej zasada ta jest znana pod nazwą *pigeon hole principle*, czyli zasada klatek w gołębniku; rolę szuflad pełnią klatki, rolę obiektów gołębie.



Trzeciego sposobu przedstawienia  $\frac{1}{2}$  już być nie może, choć to wcale nie jest aż tak oczywiste, jakby się mogło wydawać. Ciekawe też, że niektóre liczby wymierne mają tylko jedno przedstawienie, a niektóre dwa. Czy widzisz, Czytelniku, które?

	0	0	0	1	1	0	1
$2^i$	64	32	16	8	4	2	1
$i$	6	5	4	3	2	1	0

Tak zwana zasada szufladkowa Dirichleta, jakże lubiana przez rozmaite komitety olimpiad matematycznych, łączy w sobie dwie atrakcyjne cechy. Z jednej strony jest tak prosta, że nawet dziecko w przedszkolu jest w stanie ją zrozumieć, z drugiej zaś zawiera zupełnie nieoczywisty element niekonstruktywny. Głosi ona mianowicie, że wkładając do  $n$  szuflad więcej niż  $n$  przedmiotów, mamy pewność, że w którejś szufladzie będą co najmniej dwa obiekty. W której – nie wiadomo, ale na pewno w którejś. W kombinatoryce czasami spotykamy sytuację, w której można zastosować niejako dualne rozumowanie: jeśli do  $n$  szuflad włożymy  $n$  obiektów i żadna szuflada pusta nie będzie, to w żadnej szufladzie nie może się znaleźć więcej niż jeden obiekt. Możemy powiedzieć dosadniej: w każdej szufladzie będzie dokładnie jeden obiekt. Znowu, można powiedzieć, to widzi każdy przedszkolak, ale, wbrew pozorom, spostrzeżenie to ułatwia często rozumowanie w stopniu podobnym, jak wspomniana zasada szufladkowa.

Wynalazek systemu dziesiętnego był dla matematyki przełomowy. Zapisywanie liczb w układzie pozycyjnym uprościło niezwykle zarówno sam sposób opisu, jak i – przede wszystkim – algorytmy wykonywania na nich działań. (Jeśli ktoś nie wierzy, niech spróbuje w systemie rzymskim np. pomnożyć dwie liczby kilkucyfrowe.) Jedną z miłych i wcale nieoczywistych cech układu pozycyjnego jest to, że da się w nim wyrazić każdą liczbę naturalną i to na jeden tylko sposób, jeśli umówimy się, że nie piszemy zer przed właściwymi cyframi. To, że taka jednoznaczność przedstawienia nie jest oczywista, widać choćby gdy przejdziemy do liczb wymiernych. Na przykład  $0,49999\dots$  i  $0,50000\dots$  to dwa różne okresowe zapisy tej samej liczby  $\frac{1}{2}$ . Żeby było ciekawiej, z kolei liczby niewymierne mają zawsze jednoznaczne przedstawienie w postaci nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego.

Okazuje się, że nie tylko system dziesiętny ma te własności. Wystarczy wziąć dowolną podstawę systemu pozycyjnego większą od 1 i otrzymamy analogiczne wyniki – też niektóre liczby wymierne będą miały dwa przedstawienia (ale będą to na ogół inne liczby niż w przypadku systemu dziesiętnego), też wszystkie wymierne liczby będą miały reprezentacje okresowe i też liczby naturalne będą miały jednoznaczne przedstawienie. Chyba jako pierwszy odkrył to w XVII wieku dla układu dwójkowego Gotfried Wilhelm Leibniz, który tak się zachwycił możliwościami systemu binarnego, że postulował powszechne przejście z systemu dziesiętnego na dwójkowy. Jakże przyjemna stałaby się nauka tabliczki mnożenia! Wystarczyłoby zapamiętać wyniki mnożenia zer i jedynek przez zera i jedynki.

Spróbujmy wykazać, że w systemie dwójkowym faktycznie wszystkie liczby naturalne mają jednoznaczne przedstawienie. Przypomnijmy: system dwójkowy operuje tylko dwiema cyframi: zerem i jedynką. Na pozycji  $i$ -tej od końca (przy czym umówmy się, że ostatnia pozycja ma numer 0, przedostatnia 1, itd.) mamy cyfrę 1 lub 0, w zależności od tego, czy w skład liczby, którą chcemy reprezentować, wchodzi wartość  $2^i$ , czy nie. Taką cegiełkę  $2^i$  możemy przy tym użyć co najwyżej raz – dlatego mamy tylko dwie cyfry w układzie dwójkowym. Na przykład liczba 13 ma przedstawienie dwójkowe 1101, gdyż  $13 = 8 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ . Zatem komponujemy wartość każdej liczby jako sumę pojedynczych potęg dwójki.

Pokażemy najpierw, że każdą liczbę dodatnią da się przedstawić w zapisie dwójkowym co najmniej na jeden sposób. Zero to 0, więc się da. Weźmy teraz dowolną dodatnią liczbę całkowitą  $n$ . Załóżmy (indukcja), że mniejsze od niej liczby mają przedstawienie dwójkowe, czyli dadzą się uzyskać przez zsumowanie różnych pojedynczych potęg dwójek. Niech  $k = 2^j$  będzie największą potęgą dwójki nieprzekraczającą  $n$ . Liczba  $n' = n - k$  jest nieujemna i mniejsza od  $n$ , więc na mocy założenia indukcyjnego ma przedstawienie dwójkowe. Jednocześnie  $n' < k$ , bo inaczej  $k$  nie byłoby największą potęgą dwójki mniejszą od  $n$ . Zatem biorąc jedynkę na pozycji  $j$ , a następnie dopisując rozwinięcie liczby  $n'$  (oczywiście, użyjemy tylko pozycji  $j - 1, j - 2, \dots, 0$ ), otrzymujemy liczbę  $n$

\*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

reprezentowaną za pomocą  $j + 1$  cyfr binarnych. Czy jednak nie można liczby  $n$  otrzymać w inny sposób, zakładając, że każdą potęgę dwójki bierzemy tylko co najwyżej raz? Okazuje się, że nie i w celu pokazania tej jednoznaczności użyjemy naszej odwróconej zasady Dirichleta.

Podobnie jest zresztą w systemie dziesiętnym: największa dziesiętna liczba  $j$ -cyfrowa to  $10^j - 1$ .

Zauważmy, że największa liczba, którą da się zapisać za pomocą początkowych  $j$  potęg dwójki, to  $2^j - 1$ . Jeżeli bowiem złożymy liczbę z  $j$  jedynek, czyli weźmiemy wszystkie wartości odpowiadające bitom  $j - 1, j - 2, \dots, 0$ , to uzyskamy  $\sum_{k=0}^{j-1} 2^k = 2^j - 1$ . Zatem, jeśli jeszcze przypomnimy sobie o zerze, reprezentowanym przez  $j$  zer, to okaże się, że na co najwyżej  $j$  bitach możemy reprezentować  $2^j$  liczb: wszystkie pomiędzy 0 a  $2^j - 1$  włącznie.

A ile jest ciągów zerojedynkowych długości  $j$ ? Tyle samo, czyli  $2^j$ . Zatem skoro każdą liczbę z zakresu  $[0, \dots, 2^j - 1]$  da się reprezentować na  $j$  bitach, to nie jest możliwe, żeby dwa takie ciągi reprezentowały w tym zakresie tę samą liczbę – nie starczyłoby ich wtedy do reprezentowania wszystkich liczb. Ponieważ zaś  $j$  było wybrane dowolnie, więc rozumowanie to dotyczy każdego  $j$ -bitowego zakresu. Szufladkami w tym przypadku są liczby z zakresu  $[0, \dots, 2^j - 1]$ , a obiektami  $j$ -bitowe ciągi zerojedynkowe.

Liczby te, nazwane później jego imieniem, Fibonacci zdefiniował w słynnej – chyba pierwszej nowożytnej europejskiej książce matematycznej – *Liber abaci*, napisanej w 1202 r. Otrzymał je przy okazji analizy modelu wzrostu populacji królików w hodowli.

Dopiero w XX wieku został odkryty nowy binarny system reprezentowania liczb naturalnych za pomocą liczb Fibonacciego. Przypomnijmy: liczby te wprowadzone zostały do matematyki na początku XIII wieku przez włoskiego uczonego Leonarda z Pizy zwanego Fibonaccim. Definiujemy je tak: pierwsze dwie liczby Fibonacciego to 0 i 1, a każda następna jest sumą dwóch poprzednich. Wygodniej jest zacząć numerację od zera, więc mamy  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  dla  $n > 1$ . Liczby Fibonacciego tworzą nieskończony ciąg

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

Powstaje pytanie: czy liczby Fibonacciego mogłyby służyć jako podstawa systemu binarnego, w którym liczby naturalne komponowałibyśmy, nie sumując wybrane potęgi dwójki, lecz poprzez dodanie wybranych liczb Fibonacciego? Na przykład liczbę 10 można by było otrzymać jako  $8 + 2$ , ale też jako  $5 + 3 + 2$ , jak również  $5 + 3 + 1 + 1$ , czy wręcz  $5 + 3 + 1 + 1 + 0$ . Co prawda każdej liczby Fibonacciego moglibyśmy w naszym rozkładzie użyć tylko raz, bo system ma być binarny, ale i tak widać, że niektóre z tych rozkładów są sztuczne. Wprowadźmy zatem dwa ograniczenia:

- nie używamy pierwszych dwóch liczb Fibonacciego, czyli zera i pierwszej z jedynek;
- nie używamy dwóch sąsiednich liczb Fibonacciego – ich suma jest następną liczbą Fibonacciego, więc nie rozmienniamy na drobne samych liczb Fibonacciego; skupmy się na istotnie różnych reprezentacjach.

Przy tych ograniczeniach okaże się, że liczba 10 ma tylko jedno przedstawienie:  $8 + 2$ . Nie tylko 10. Jeżeli będziemy próbowali z innymi liczbami naturalnymi, to przekonamy się, że one też dadzą się przedstawić za pomocą takich sum i to tylko na jeden sposób respektujący podane wyżej zastrzeżenia. To jest właśnie treścią twierdzenia udowodnionego jeszcze przed II wojną światową, ale opublikowanego dopiero w 1972 r. przez Édouarda Zeckendorfa, a sposób reprezentowania liczb naturalnych nazywa się binarną reprezentacją Fibonacciego lub kodowaniem Zeckendorfa. Kodowanie to zakłada, że bit o numerze  $j$  odpowiada za liczbę  $F_{j+1}$  dla  $j > 0$ . Aby wykazać poprawność i jednoznaczność takiej reprezentacji, ponownie zastosujemy odwróconą zasadę Dirichleta.

Édouard Zeckendorf (1901–1983), Belg, był z zawodu lekarzem wojskowym, ale zajmował się matematyką w ramach hobby na tyle skutecznie, że opublikował kilkadziesiąt prac naukowych, głównie z teorii liczb.

Najpierw, tak jak poprzednio, pokażemy, że każda liczba ma przedstawienie Zeckendorfa. Podobnie jak w przypadku systemu binarnego użyjemy indukcji. Niech  $F_k$  będzie największą liczbą Fibonacciego, nieprzekraczającą  $n$ . Znowu dla  $n = 1$  i  $n = 2$  sprawdzamy bezpośrednio, że odpowiadają im ciągi 1 oraz 10. Załóżmy teraz, że  $n > 2$  i że wszystkie liczby mniejsze od  $n$  mają przedstawienie Fibonacciego. Rozważmy największą liczbę Fibonacciego  $F_j$  nieprzekraczającą  $n$ . Nasza reprezentacja będzie zatem  $(j + 1)$ -bitowa. Jej drugim bitem będzie zero,



$i$	7	6	5	4	3	2	1
$F_{i+1}$	21	13	8	5	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	1
7	0	0	0	1	0	1	0
8	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	1
10	0	0	1	0	0	1	0
11	0	0	1	0	1	0	0
12	0	0	1	0	1	0	1
13	0	1	0	0	0	0	0
...							

Tabela kilku początkowych liczb w binarnej reprezentacji Fibonacciego

gdyż liczba  $n - F_j$  musi być mniejsza od  $F_{j-1}$ , bo inaczej  $F_{j+1} = F_j + F_{j-1}$  byłaby mniejsza od  $n$ , co przeczyłoby definicji  $F_j$ . Dzięki temu, że drugi bit jest równy zeru, możemy skorzystać z założenia indukcyjnego i uzupełnić ciąg zaczęty od 10 o przedstawienie Fibonacciego liczby  $n - F_j$ . Będzie on na pewno poprawną reprezentacją  $n$ , w której żadne dwie jedynki nie wystąpią obok siebie.

Teraz zajmiemy się jednoznacznością. Najpierw jednak zastanówmy się, jak wygląda największa liczba reprezentowana w systemie Zeckendorfa na  $j$  bitach. Zaczyna się od jedynki odpowiedzialnej za wartość  $F_{j+1}$ , potem musi być zero (rezygnujemy z liczby  $F_j$ ), a następnie największa liczba reprezentowana na  $j - 2$  bitach, czyli znów jedynka odpowiadająca  $F_{j-1}$ , potem zero, jedynka, zero, aż dojdziemy do końca. W zależności od tego, czy  $j$  jest parzyste, czy nie, zakończymy naszą reprezentację zerem lub jedynką. Pokażemy teraz, że  $F_{j+1} + F_{j-1} + F_{j-3} + \dots = F_{j+2} - 1$ , czyli że największa liczba reprezentowana na  $j$  bitach jest  $(j + 2)$ -gą liczbą Fibonacciego pomniejszoną o 1. Dla  $j = 1$  zgadza się: największa liczba to 1, czyli  $F_3 - 1$ . Dla  $j = 2$  też: ciąg 10 reprezentuje liczbę  $2 = F_4 - 1$ . Podwójne sprawdzenie bazy indukcji jest tu konieczne, ze względu na dwa możliwe zakończenia: zerem lub jedynką, w zależności od parzystości  $j$ . Jeśli teraz  $j > 2$ , to największa liczba  $j$ -bitowa ma wartość równą  $F_{j+1}$  plus, na mocy założenia indukcyjnego, największa liczba na  $j - 2$  bitach, czyli  $F_j - 1$ . Ale  $F_{j+1} + F_j - 1 = F_{j+2} - 1$  i mamy tezę.

Skoro już wiemy, że na  $j$  bitach można reprezentować wszystkie liczby od zera do  $F_{j+2} - 1$ , to zadajmy standardowe pytanie: a ile jest takich  $j$ -elementowych zerojedynekowych ciągów, że żadne dwie jedynki nie występują obok siebie. Oznaczmy tę liczbę przez  $T(j)$ . Dla  $j = 0$  mamy odpowiedź  $T(0) = 1$  (pusty ciąg). Dla  $j = 1$  wiemy, że takich ciągów mamy 2, czyli  $T(1) = 2$ . Teraz zastanówmy się, jak to będzie w przypadku  $j > 1$ . Albo taki  $j$ -elementowy ciąg bitów kończy się jedynką, albo nie. Jeśli kończy się jedynką, to na przedostatnim bicie musi być zero, a na pozostałych  $j - 2$  bitach dowolny układ, a ich jest  $T(j - 2)$ . Jeśli zaś taki ciąg kończy się zerem, to na pozostałych  $j - 1$  bitach może być dowolny układ, a jest ich  $T(j - 1)$ . Ostatecznie mamy następujące równanie rekurencyjne:

$$T(0) = 1 (= F_2), \quad T(1) = 2 (= F_3), \quad T(j) = T(j - 2) + T(j - 1).$$

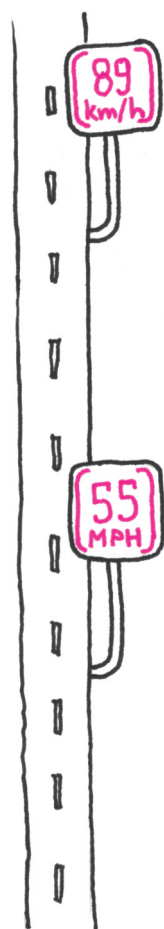
Rozwiązaniem tego układu jest  $T(j) = F_{j+2}$ .

Wiemy więc, że na  $j$  bitach można reprezentować co najwyżej  $F_{j+2}$  liczb i wiemy, że można reprezentować wszystkie liczby od 0 do  $F_{j+2} - 1$ , a jest ich oczywiście też  $F_{j+2}$ . No to nie ma tu miejsca na niejednoznaczność! Odwrócona zasada Dirichleta działa i tutaj. Każda liczba naturalna ma zatem jednoznaczne przedstawienie Fibonacciego.

Powstaje pytanie, czy takie binarne reprezentacje Fibonacciego mogą się do czegoś przydać? Nieoczekiwanie – poza interesującą własnością jednoznanego rozkładu – notacja Zeckendorfa daje nam pamięciową metodę przybliżonej konwersji mil na kilometry i na odwrót. Najpierw zastanówmy się, jak zmienia się wartość liczby zapisanej w notacji Zeckendorfa, gdy na końcu ciągu zer i jedynek reprezentujących jakąś liczbę dopiszemy zero. Sumowane wartości będą teraz odpowiadały liczbom Fibonacciego o indeksach o 1 większych. W układach pozycyjnych też jest podobnie: dopisanie zera na końcu liczby, np. w układzie dziesiętnym, powoduje, że każda cyfra zacznie odpowiadać dziesiątce podniesionej do potęgi o 1 wyższej, wskutek czego liczba zwiększy swoją wartość dziesięciokrotnie. Ilorotnie jednak zwiększy się wartość liczby zapisanej w binarnej notacji Zeckendorfa po dopisaniu zera na końcu?

Liczby Fibonacciego, co zostało odkryte po raz pierwszy przez Eulera w 1768 roku, spełniają zupełnie nieoczywistą rekurencję:  $F_{n+1} = \varphi F_n + \hat{\varphi}^n$ , gdzie  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ , a  $\hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618\dots$ . Ze względu na to, że  $\hat{\varphi}^n$  dąży szybko do zera, możemy przyjąć, że każda liczba Fibonacciego o w miarę dużym indeksie jest w przybliżeniu  $\varphi$  razy większa od swojej poprzedniczki i błąd będzie tym mniejszy, im wyższy numer. Zwiększenie numeru liczby Fibonacciego o jeden odpowiada zatem mniej więcej przemnożeniu przez 1,618... Tymczasem jedna mila to około 1,609; prawie  $\varphi$ .





Jak zatem zamieniać mile na kilometry? Wystarczy znaleźć reprezentację Zeckendorfa danej liczby mil, a następnie zsumować liczby Fibonacciego o numerach o 1 wyższych. Przykładowo, jedziemy w Stanach Zjednoczonych samochodem i widzimy ograniczenie do 55 mil/h. Uśmiechamy się tylko, bo 55 to przypadkowo dziesiąta liczba Fibonacciego, więc tylko przeskakujemy do jedenastej, czyli 89 km/h. W rzeczywistości powinno wyjść 88,514, zatem błąd 0,486 to niespełna pół kilometra na godzinę. Idźmy dalej: inne częste ograniczenie 45 mil/h. Tym razem w pamięci rozkładamy 45 jako  $34 + 8 + 3$  i przesuujemy indeksy z 34, robiąc 55, z 8 robiąc 13, a z 3 robiąc 5. Razem  $55 + 13 + 5 = 73$  km/h. Tym razem błąd nieco większy: powinno wyjść 72,420, czyli dostaliśmy o 0,580 za dużo. Ale cały czas mieścimy się w granicach poniżej jedynek. Jak się okazuje, dla wszystkich liczb aż do 58 mil nie zrobimy błędu przekraczającego 1.

W drugą stronę analogicznie, tylko trzeba pomniejszać indeksy liczb Fibonacciego. Na przykład: ile mil to 100 kilometrów? Liczymy:  $100 = 89 + 8 + 3$ , więc bierzemy liczby Fibonacciego przesunięte w lewo:  $55 + 5 + 2 = 62$  mile. W rzeczywistości powinno wyjść 62,137, więc tym razem błąd jest mały. Mieliśmy szczęście. Podobnie jak z milami, aż do 95 km podana konwersja nie oszuka nas o więcej niż 1. Przy czym stosujemy zasadę: zostawiamy ostatnią jedynekę rozwinięcia; przecież na lewo od jedynek  $F_2$  jest jedynka  $F_1$ .

Pozostaje nauczyć się liczb Fibonacciego na pamięć. Pamiętajmy:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1567, 2584, ...

## Pewne uogólnienie prostej Eulera

*Chuong Chi NGUYEN\**, *Hung Son NGUYEN\**

Panuje przekonanie, że w niemożliwej obecnie dziedzinie geometrii klasycznej wszystko jest znane i nie pozostało nic do odkrycia. Kłam temu stwierdzeniu zadaje dość ciekawe i (jeszcze) mało znane twierdzenie, które przedstawiamy w niniejszym artykule. Warto zaznaczyć, że środki, jakie posłużyły nam do dowodu, są czysto geometryczne i nie korzystają z narzędzi analitycznych. Aby ułatwić jego zrozumienie, przedstawiamy najpierw pewne pojęcia, definicje i bardziej znane fakty powiązane z tym zagadnieniem.

**Definicja.** Trójkątem spodkowym punktu  $P$  wewnątrz trójkąta  $ABC$  nazywamy trójkąt, którego wierzchołkami są rzuty prostokątne punktu  $P$  na boki trójkąta  $ABC$ .

Wykażemy teraz, że dla każdego trójkąta spodkowego można wskazać pewien „stowarzyszony” z nim trójkąt spodkowy.

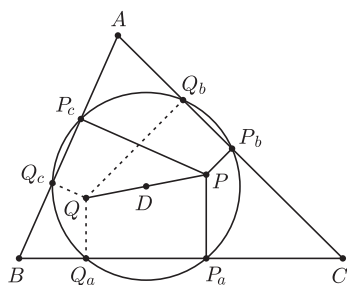
**Lemat 1.** Niech  $P$  będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta  $ABC$ , a  $P_aP_bP_c$  jego trójkątem spodkowym. Okrąg opisany na trójkącie  $P_aP_bP_c$  przecina boki  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  dodatkowo w punktach  $Q_a, Q_b, Q_c$ . Wtedy  $Q_aQ_bQ_c$  też jest trójkątem spodkowym dla pewnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta  $ABC$ .

**Dowód.** Niech  $D$  będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $P_aP_bP_c$ , a  $Q$  punktem symetrycznym do punktu  $P$  względem  $D$ . Z oczywistych powodów  $D$  należy do symetralnej odcinka  $P_aQ_a$  oraz  $PP_a$  jest prostopadły do  $BC$ , więc  $PP_aQ_aQ$  jest trapezem. To oznacza, że  $QQ_a$  jest prostopadły do  $BC$ . Analogicznie otrzymujemy, że  $QQ_b$  i  $QQ_c$  są prostopadłe odpowiednio do  $CA$  i  $AB$ . Inaczej mówiąc,  $Q_aQ_bQ_c$  jest trójkątem spodkowym punktu  $Q$  względem trójkąta  $ABC$ .  $\square$

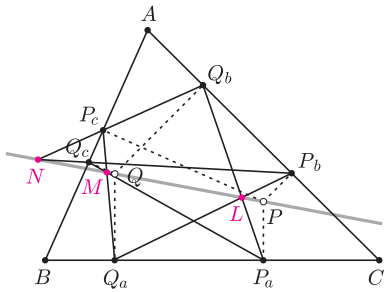
Zauważmy, że na czworokątach  $CP_aPP_b$ ,  $CQ_aQQ_b$  i  $Q_aP_aP_bQ_b$  można opisać okręgi, a zatem

$$\sphericalangle PCP_b = \sphericalangle PP_aP_b = 90^\circ - \sphericalangle P_bP_aC = 90^\circ - \sphericalangle Q_aQ_bC = \sphericalangle QQ_bQ_a = \sphericalangle QCQ_a.$$

Analogicznie pokazujemy, że  $\sphericalangle PAP_b = \sphericalangle QAQ_c$  i  $\sphericalangle PBP_a = \sphericalangle QBQ_c$ , co oznacza, że punkty  $P$  i  $Q$  są izogonalnie sprzężone w trójkącie  $ABC$ . Zauważmy też, że jeśli  $P$  nie jest środkiem okręgu wpisanego, to  $P \neq Q$ . Poniżej przedstawiamy pewną własność prostej przechodzącej przez punkty izogonalnie sprzężone w dowolnym trójkącie.



\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

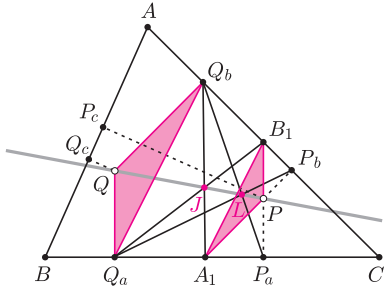


**Stwierdzenie 1.** Niech  $P_a P_b P_c$ ,  $Q_a Q_b Q_c$  będą trójkątami spodkowymi punktów  $P$  i  $Q$ , leżących wewnątrz trójkąta  $ABC$ . Punkty przecięcia prostych  $P_a Q_b$  i  $Q_a P_b$ ,  $P_a Q_c$  i  $Q_a P_c$  oraz  $P_b Q_c$  i  $Q_b P_c$  oznaczamy odpowiednio jako  $L$ ,  $M$  i  $N$ . Wówczas jeśli punkty  $P$  i  $Q$  są izogonalnie sprzężone, to punkty  $L, M, N$  leżą na prostej przechodzącej przez  $P$  i  $Q$ .

*Dowód.* Niech  $A_1 = PP_b \cap BC$ ,  $B_1 = PP_a \cap CA$  i  $J = Q_a B_1 \cap A_1 Q_b$ . Wówczas na czworokącie  $P_a A_1 B_1 P_b$  można opisać okrąg. Ponadto z wcześniejszych rozważań wynika, że na czworokącie  $P_a P_b Q_b Q_a$  również można opisać okrąg. W tej sytuacji

$$\sphericalangle B_1 A_1 C = \sphericalangle P_a P_b C = \sphericalangle Q_b Q_a C,$$

więc  $A_1 B_1 \parallel Q_b Q_a$ . Mamy również  $PA_1 \parallel QQ_b$  (oba są prostopadłe do  $AC$ ),  $PB_1 \parallel QQ_a$  (oba są prostopadłe do  $BC$ ), co oznacza, że trójkąty  $PA_1 B_1$  i  $QQ_b Q_a$  są jednokładne, zatem proste łączące odpowiadające pary wierzchołków przecinają się w jednym punkcie, skąd wnioskujemy, że  $J$  należy do prostej  $PQ$ . Następnie, stosując twierdzenie Pappusa dla dwóch układów potrójnych punktów współliniowych  $(P_a, A_1, Q_a)$  i  $(P_b, B_1, Q_b)$  z uwagą, że  $P = P_a B_1 \cap P_b A_1$ ,  $L = P_a Q_b \cap Q_a P_b$  i  $J = Q_a B_1 \cap Q_b A_1$  wnioskujemy, że  $P, L, J$  są współliniowe. Wiemy więc, że  $J$  leży na prostej  $PQ$ , a  $L$  leży na prostej  $PJ$ , zatem  $L$  leży na prostej  $PQ$ . Analogicznie dowodzimy, że punkty  $M$  i  $N$  leżą na prostej  $PQ$ , co kończy dowód lematu.  $\square$



Rzutowanie punktu na boki to nie jedyny naturalny sposób na konstrukcję „nowego” trójkąta. Inny prezentuje poniższa definicja.

**Definicja.** Trójkątem Cevy punktu  $R$  leżącego wewnątrz trójkąta  $ABC$  nazywamy trójkąt  $R_a R_b R_c$ , gdzie  $R_a, R_b, R_c$  są punktami przecięcia prostych  $AR, BR, CR$  odpowiednio z bokami  $BC, CA, AB$ .

Okazuje się, że dla trójkąta Cevy również prawdziwy jest fakt wykazany wcześniej dla trójkąta spodkowego.

**Lemat 2.** Niech  $S_a, S_b, S_c$  będą punktami przecięcia okręgu opisanego na trójkącie Cevy  $R_a R_b R_c$  wewnątrz trójkąta  $ABC$  odpowiednio z bokami  $BC, CA$  i  $AB$ . Wtedy proste  $AS_a, BS_b$  i  $CS_c$  przecinają się w jednym punkcie.

*Dowód.* Zgodnie z twierdzeniem Cevy, skoro proste  $AR_a, BR_b, CR_c$  przecinają się w punkcie  $R$ , zachodzi

$$\frac{R_a B}{R_a C} \cdot \frac{R_b C}{R_b A} \cdot \frac{R_c A}{R_c B} = 1.$$

Ponieważ  $R_a, R_b, S_b, R_c, S_c$  i  $S_a$  należą do wspólnego okręgu, więc z twierdzenia o potęgę punktu względem okręgu mamy

$$AR_b \cdot AS_b = AR_c \cdot AS_c, BR_c \cdot BS_c = BR_a \cdot BS_a, \text{ i } CR_a \cdot CS_a = CR_b \cdot CS_b.$$

Stąd

$$\frac{S_b A}{S_c A} = \frac{R_c A}{R_b A}, \quad \frac{S_c B}{S_a B} = \frac{R_a B}{R_c B}, \quad \text{ i } \quad \frac{S_a C}{S_b C} = \frac{R_b C}{R_a C}$$

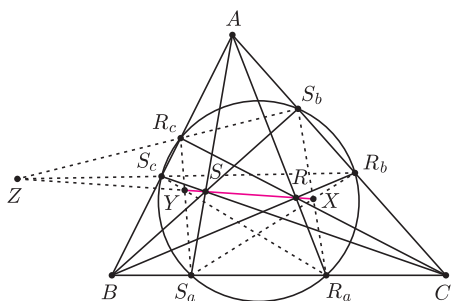
Podstawiając te wartości do pierwszego równania, otrzymujemy

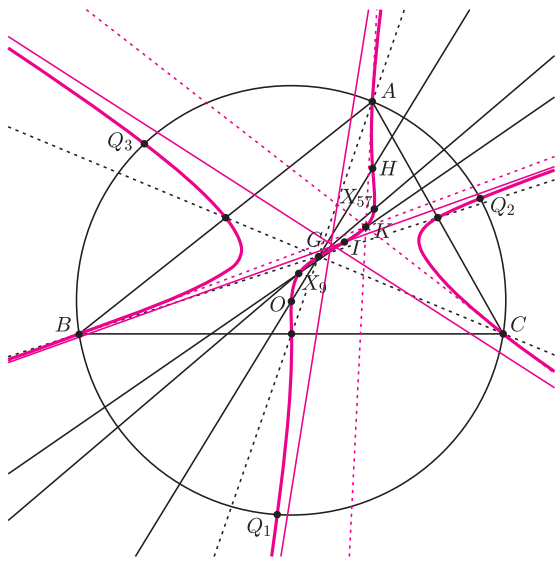
$$\frac{S_a B}{S_a C} \cdot \frac{S_c A}{S_c B} \cdot \frac{S_b C}{S_b A} = 1.$$

Ostatnia równość, zgodnie z odwrotnym twierdzeniem Cevy, dowodzi, że  $AS_a, BS_b$  i  $CS_c$  zbiegają się w jednym punkcie.  $\square$

Powyższe rozważania pokazują, że dla każdego punktu  $R$  wewnątrz trójkąta  $ABC$  istnieje dokładnie jeden „stowarzyszony” z nim punkt  $S$ , będący punktem przecięcia prostych  $AS_a, BS_b$  i  $CS_c$ . Prosta przechodząca przez te dwa punkty nazywamy osią Cevy. Niżej przedstawiamy ciekawą własność osi Cevy:

**Stwierdzenie 2.** Niech  $R$  i  $S$  będą dwoma stowarzyszonymi punktami Cevy wewnątrz trójkąta  $ABC$  i niech odpowiadają im trójkąty Cevy  $R_a R_b R_c$  i  $S_a S_b S_c$ . Niech  $X, Y$  i  $Z$  będą odpowiednio punktami przecięcia prostych  $S_b R_a$  i  $S_a R_b$ ,  $R_a S_c$  i  $R_c S_a$  oraz  $R_b S_c$  i  $R_c S_b$ . Wówczas punkty  $R, S, X, Y, Z$  są współliniowe (tworzą oś Cevy  $RS$ ).





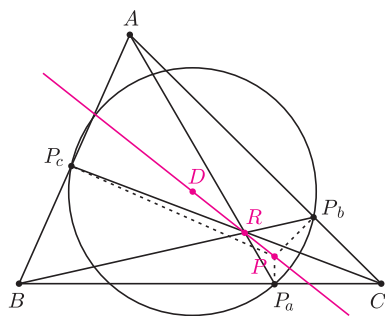
Krzywa trzeciego stopnia Darboux

*Dowód.* Stosując twierdzenie Pappusa dla dwóch potrójnych układów punktów współliniowych  $(A, S_b, R_b)$  i  $(B, S_a, R_a)$  z uwagą, że  $S = AS_a \cap BS_b$ ,  $R = AR_a \cap BR_b$  i  $X = S_bR_a \cap S_aR_b$  wnioskujemy, że  $X$  leży na prostej  $RS$ . Analogicznie dowodzimy, że punkty  $Y$  i  $Z$  leżą na prostej  $RS$ , co kończy dowód lematu.  $\square$

Nasze dotychczasowe zmagania dotyczyły dwóch trójkątów, spodkowego i Cevy. Z każdym z nich związaliśmy pewną oś, wskazując szczególne punkty, które się na niej znajdują. Jesteśmy już gotowi na to, by zając się trójkątami, które są jednocześnie trójkątami spodkowymi i trójkątami Cevy.

**Definicja.** Jeśli spodkowy trójkąt punktu  $P$  jest również trójkątem Cevy, to punkt  $P$  nazywamy *czewiańskim punktem spodkowym* (ang. *pedal-cevian point*).

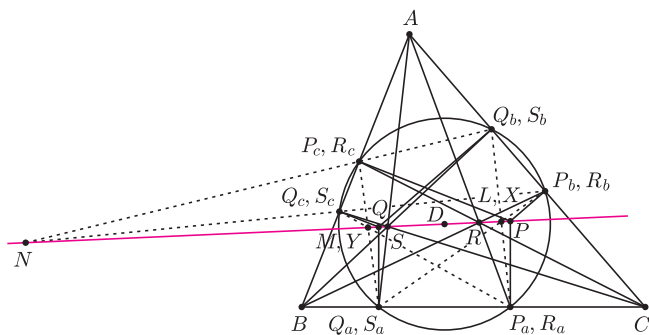
Wiele właściwości tych punktów można znaleźć w pracach Darboux. Jednym z jego znanych wyników, uzyskanych metodami algebraicznymi, jest dowód, że czewiańskie punkty spodkowe ustalonego trójkąta tworzą tzw. krzywą trzeciego stopnia Darboux; jest ich zatem nieskończenie wiele.



Zapewne wśród osób zainteresowanych geometrią wiele nieraz miało do czynienia z zadaniami dotyczącymi czewiańskich punktów spodkowych. Przykładami takich punktów w dowolnym trójkącie są m.in. jego ortocentrum, środek ciężkości, środek okręgu wpisanego i środek okręgu opisanego.

Chcielibyśmy teraz przedstawić pewną ciekawą własność czewiańskich punktów spodkowych. Nie udało się nam odnaleźć publikacji przedstawionego rezultatu, więc jest niemała szansa na to, że to wynik całkiem nowy. Niezależnie od słuszności naszych przypuszczeń, uważamy, że każdy miłośnik geometrii doceni jego elegancję!

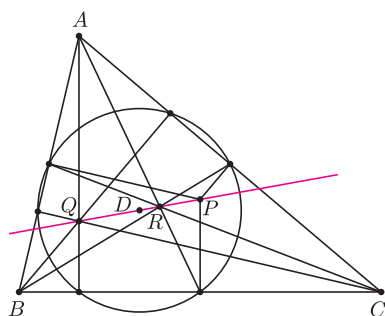
**Twierdzenie.** Niech  $P_aP_bP_c$  będzie trójkątem spodkowym punktu  $P$  wewnątrz trójkąta  $ABC$ . Dodatkowo zakładamy, że  $AP_a, BP_b, CP_c$  przecinają się w punkcie  $R$ . Wtedy punkty  $P, R$  i środek okręgu opisanego na  $P_aP_bP_c$  leżą na jednej prostej.



*Dowód.* Niech  $D$  będzie środkiem okręgu opisanego na  $P_aP_bP_c$  i niech punkty  $L, M, N$  będą zdefiniowane tak, jak w stwierdzeniu 1. Zgodnie z tym stwierdzeniem punkty te są współliniowe, a prosta przez nie przechodząca zawiera również punkty  $P$  i  $D$  (jest to oś trójkąta spodkowego dla punktu  $P$ ). Prosta ta jest jednak również osią trójkąta Cevy punktu  $R$ , zatem zgodnie ze stwierdzeniem 2 przechodzi przez  $R$ , co dowodzi współliniowości punktów  $P, R, D$ .  $\square$

Zastanówmy się, czym skutkować będzie powyższe stwierdzenie, jeśli za punkt  $P$  przyjmiemy środek

okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Okazuje się, że wówczas okrąg opisany na punktach  $P_aP_bP_c$  zawiera spodki wysokości trójkąta  $ABC$  – jest to słynny okrąg dziewięciu punktów. W tej sytuacji punkt  $Q$  ze stwierdzenia 1 staje się ortocentrum trójkąta  $ABC$ , a punktem  $R$  z naszego twierdzenia jest, rzecz jasna, środek ciężkości trójkąta  $ABC$ . Pokazaliśmy więc współliniowość środka okręgu opisanego, środka okręgu 9 punktów, ortocentrum i środka ciężkości – geometryczni smakosze z łatwością rozpoznają w tym prostą Eulera.



Prosta Eulera

Warto zaznaczyć, że prosta Eulera nie jest określona dla trójkąta równobocznego, a nasza oś  $PQRSD$  istnieje, o ile tylko nie przyjmiemy, że  $P = Q$  to środek okręgu wpisanego. Zachęcamy Czytelnika do poszukiwań innych ciekawych prostych, których istnienie gwarantowane jest przez podane przez nas twierdzenie!



# mała delta

## Jak szybko urosnę?

Beta i Bit siedzieli na ławce w parku rozrywki. Jak zahipnotyzowani patrzyli na olbrzymią kolejkę górską. Tory kolejki zwiły się w siedem olbrzymich pętli, a każda pętla wykręcona była w innym kierunku. Po torach z olbrzymią prędkością pędził sznur wagoników wypełnionych krzyczącymi ludźmi.

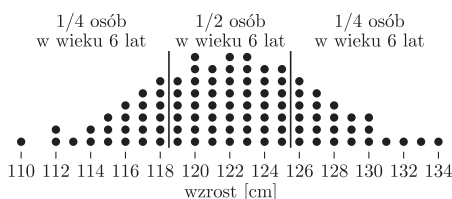
- Boję się na to patrzeć – pisnęła Beta. – Przecież oni zaraz wypadną!
- Nie wypadną – uspokoił ją tata. – Wagoniki są zabezpieczone.
- Jeżeli jest bezpieczna, to może się nią przejeździemy? – zaproponował Bit.
- Kiedyś musicie się przejechać, ale jeszcze nie dzisiaj – zaczął studzić zapędy dzieci tata. – Ta kolejka jest największa i najszybsza w całym parku rozrywki. Żeby do niej wsiąść, trzeba mieć ponad 140 cm wzrostu.

To opowiadanie jest częścią zbioru przygód Bety i Bit. Więcej przygód młodej matematyczki i młodego hakera znajdziesz pod adresem [betabit.wiki](http://betabit.wiki)

- Ojej, aż tyle? Ja chyba nigdy nie będę taka wysoka – zasmuciła się Beta.
- Na pewno będziesz, przecież dzieci cały czas rosną! – dodawał siostrze otuchy Bit, pocieszając jednocześnie samego siebie.
- Ale kiedy my będziemy tacy wysocy? Chyba za sto lat – odpowiedziała w dalszym ciągu zmartwiona Beta.
- Znacznie szybciej. Przecież wy rośniecie w oczach – wtrącił się tata. – A kiedy to będzie? To oczywiście można oszacować! Może pójdziemy na lody i razem policzymy, kiedy przerośniacie 140 cm?
- Tak! – dwójka szkrabów wykrzyczała tę odpowiedź.
- Świetny pomysł, bardzo chcemy! – roześmiali się i tajemnicą pozostało, czy bardziej chcieli posłuchać, kiedy wystarczająco urosną, czy bardziej mieli ochotę na lody.

Rozsiedli się wokół małego stoliczka. Tata rozłożył na nim dużą serwetkę, a z kieszeni wyciągnął ołówek.

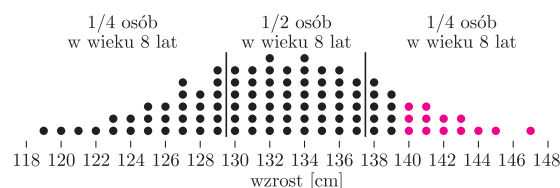
- Zaczniemy od tego, że nawet dzieci w tym samym wieku mają różny wzrost – rozpoczął bez żadnego wstępu. – Ale okazuje się, że tym wzrostem rządzą pewne reguły. Zobaczcie. – Tata przerwał na chwilę, aby narysować jakiś wykres.



Wyobraźcie sobie, że wybieramy 100 sześciolatków, w identycznym wieku, każdy z nich ma dzisiaj szóste urodziny. A teraz mierzymy ich wzrost i rysujemy go na wykresie. W wyniku otrzymalibyśmy mniej więcej taki kapelusz. Każda kropka to jedno dziecko, a im bardziej kropka jest na prawo, tym dziecko jest wyższe. Najbardziej typowy jest przedział wzrostu od 119 cm do 125 cm – tata oznaczył ten przedział dwiema pionowymi kreskami. – Jeśli policzycie kropki w tym prostokącie, to okaże się, że taki wzrost ma 52 dzieci, czyli około połowy. Jedna czwarta dzieci ma mniej niż 119 cm wzrostu i jedna

czwarta ma więcej niż 125 cm wzrostu. Wśród tych 100 dzieci mógłby znaleźć się i ktoś wyjątkowo niski jak na sześciolatka, np. o wzroście 110 cm, ale też ktoś wyjątkowo wysoki, na przykład o wzroście 134 cm.

- A ja ile mam wzrostu? – zapytała Beta, przerywając pałaszowanie lodów.
- Jesteś wysoka jak na swój wiek. Masz około 125 cm wzrostu – odpowiedział tata, stukając ołówkiem w jedną z kropek. Czyżby ta kropka była Beta? – Jak widzicie, wśród dzieci w waszym wieku prawie niemożliwe jest znalezienie kogoś o wzroście 140 cm lub wyższym. Nawet gdyby wziąć wszystkich sześciolatków z całej szkoły, to raczej nie znajdzie się żaden, który byłby wystarczająco wysoki, by pojechać tą kolejką górską.
- A ile będziemy mieć wzrostu za rok? Albo za dwa lata? – Beta lubiła patrzeć na wykresy i miała nadzieję, że pojawi się kolejny. Co prawda jeszcze nie zawsze od razu wiedziała, jak je czytać, ale po kilku próbach najczęściej udawało jej się je rozszyfrować. Wykres kapeluszowy wciągnął ją bardziej niż lody bananowe.

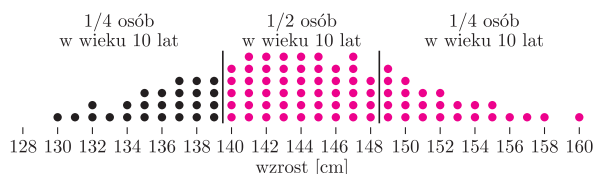


– Zobaczmy! Narysuję wam, jak wygląda wykres wzrostu dzieci starszych o dwa lata. Ponownie wybieramy 100 przykładowych dzieci w wieku ośmiu lat, wszystkie mają urodziny dokładnie dzisiaj – tata potrzebował więcej serwetek. Na szczęście na sąsiednich stolikach było ich całkiem sporo. – Ten wykres jest zbudowany w ten sam sposób co poprzedni, też przedstawia wzrost 100 przykładowych dzieci, ale tym razem w wieku ośmiu lat. Przez te dwa lata dzieci sporo rosną, średnio około 5 cm na rok, choć nie każde dziecko urośnie tyle samo. Niskie dzieci rosną zazwyczaj ciut mniej, a wysokie ciut więcej. Kolorem zaznaczyłem te dzieci, które mają co najmniej 140 cm wzrostu. Wśród 100 ośmiolatków znajdzie się około 13 dzieci, które są wystarczająco wysokie, żeby

wejść na tę diabelską kolejkę. Ale większość dzieci w tym wieku będzie wciąż zbyt niska.

Beta patrzyła z szeroko otwartymi oczami. – To ja za dwa lata jeszcze nie będę mogła przejechać się tą kolejką? – zapytała ze smutkiem.

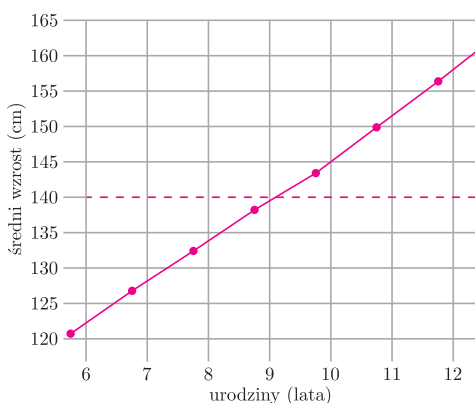
– Za dwa lata jeszcze nie. Ale zobaczymy, jak wygląda sytuacja dla dzieci w wieku dziesięciu lat. Kolejne dwa lata to kolejne centymetry wzrostu – potrzebna była następna serwetka. W ruch ponownie poszły ołówek i kredka. – Tak wygląda wzrost przykładowych 100 dzieci w wieku dziesięciu lat. W tym wieku już większość dzieci ma wzrost przekraczający 140 cm. Jeszcze nie wszystkie, ale już zdecydowanie więcej niż połowa. Zobaczcie, ile tutaj jest kolorowych kropek.



– Ale którą z tych kropek jestem ja? – zapytała Beta. – Kolorową czy czarną? Czy jak ktoś jest wysoki, to zawsze będzie wysoki, czy to się może zmienić?

– Teraz porównujemy wzrost do rówieśników – wyjaśnił tata. – To, czy się jest wysokim czy niskim, może się zmienić. Ale zmienia się dosyć rzadko i raczej nie zmienia się o wiele. Na nasze potrzeby możemy założyć, że jeżeli w wieku sześciu lat jesteś 25. kropką od prawej strony na wykresie dla sześciolatków (kropki od prawej strony odpowiadają najwyższym dzieciom), to w późniejszym wieku też tak będzie i też będziesz 25. kropką od prawej strony, na wykresie dla ośmio- czy dziesięciolatków. A więc wiedząc, jak wysoką jesteś sześciolatką, można przewidzieć, jak wysoką będziesz ośmiolatką.

Pokażę wam teraz taki specjalny wykres, który zbiera informacje o wzroście w kolejnych latach życia. Widać na nim, jak z wiekiem zmienia się wzrost różnych kropek.



Wszystkich 100 kropek nie zaznaczymy, bo byłby to wielki bałagan, ale na początek weźmy środkową kropkę i zobaczymy, jaki ma ona wzrost w kolejnych latach. Ta nasza kropka rośnie cały czas, ale żeby było łatwiej czytać wykres, zaznaczymy jej wzrost tylko w chwilach kolejnych urodzin: szóstych, siódmych, ósmym i tak dalej. Środkowa kropka jest też o tyle ciekawa, że połowa dzieci jest od

niej wyższa, a połowa niższa. Taka środkowa wartość ma nawet własną nazwę pochodzącą z łaciny – nazywa się mediana.

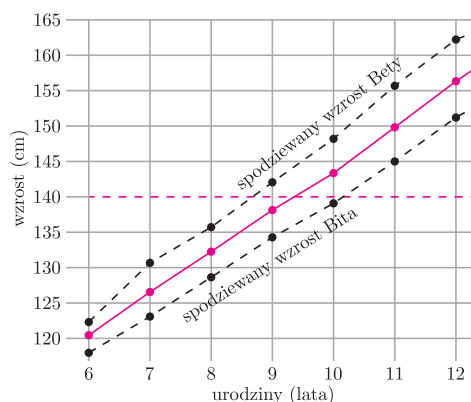
– Mediana – powtórzyli Beta i Bit, aby zapamiętać to słowo.

– Gdyby zaznaczać, jaki jest wzrost środkowej kropki w dniach kolejnych urodzin, mielibyśmy taki wykres.

Kolejne kropki oznaczają wzrost w wieku sześciu, siedmiu, ośmiu i następnym lat. Na pionowej osi można odczytać, jaki wzrost ma środkowa kropka. Dla sześciolatka jest to 122 cm, dla ośmiolatka to już 132 cm, dla dziesięciolatka – 144 cm, a dla dwunastolatka to 157 cm. Możemy stąd odczytać, że w wieku około dziewięciu i pół roku środkowa kropka osiągnie około 140 cm wzrostu. A więc wiemy, kiedy będzie wystarczająco wysoka na tę kolejkę!

– A czy my jesteśmy właśnie tą środkową kropką? – zapytali i Beta i Bit.

– Nie – odpowiedział tata. – Żeby zobaczyć, jak się będzie zmieniał wasz wzrost, musimy dorysować tutaj jeszcze kilka kresek.



Bicie, ty jesteś drobny, twój wzrost odpowiada mniej więcej 25. kropce od lewej strony. Beta jak na swój wiek jest wysoka, jej wzrost to w przybliżeniu 25. kropka od prawej strony. Wśród dorosłych to mężczyźni są zazwyczaj wyżsi niż kobiety, ale w waszym wieku te różnice są bardzo małe. Możemy założyć, że chłopcy mają podobny wzrost jak dziewczynki. Zaznaczymy, jak zmienia się wzrost odpowiadających wam kropek.

Na wykresie zazaczyłem przerywanymi liniami to, jak będzie się prawdopodobnie zmieniał wasz wzrost. Różnica wzrostu jest mniej więcej taka sama. Rośniecie o około 5 cm na rok. Ta kolorowa przerywana linia oznacza 140 cm. Znajdując przecięcie waszych linii z ciągłą linią kolorową, możemy odczytać, kiedy będziecie mieli 140 cm wzrostu.

– Kiedy, kiedy będziemy mieli? – zawołali Beta i Bit.

– Beta będzie mogła jeździć na tej kolejkę na kilka miesięcy przed dziewiątymi urodzinami. Bit poczeka na to półtora roku dłużej, najprawdopodobniej mógłby pojechać kilka miesięcy po dziesiątych urodzinach.

O, widzę, że już skończyliście wasze lody. To może teraz pójdziemy na pokaz delfinów w akwariium, a na tę kolejkę wrócimy za jakieś... trzy lata?

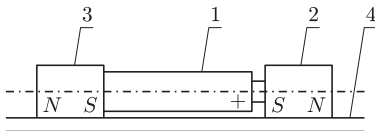
*Małą Deltę przygotował Przemysław BIECEK*

## Rewelacyjnie prosty silnik elektryczny

Stanisław BEDNAREK

Czytelnicy *Delty* zapewne pamiętają serię artykułów o bardzo prostych i pomysłowych silnikach elektrycznych. Najprostszy z nich składał się z małego magnesu, baterii, kawałka drutu i gwoździa (*Delta* 1/2012). Ktoś powiedziałby, że już prościej się nie da, a jednak! Dziś zachęcamy do zbudowania i eksperymentów z zadziwiająco prostym silnikiem elektrycznym, który nie tylko będzie wykonywał ruch obrotowy, ale również się toczył.

Do zbudowania silnika potrzebne będą: kawałek folii aluminiowej o rozmiarach około  $10 \times 20$  cm, okrągła bateria typu „paluszek” (najlepiej alkaliczna i jeszcze nieużywana) oraz dwa magnesy neodymowe w kształcie walca o średnicy nieco większej niż średnica baterii i długości 10–15 mm. Magnesy można kupić w sklepach z artykułami elektronicznymi (lub przez internet) – ich cena wynosi kilka złotych za sztukę.



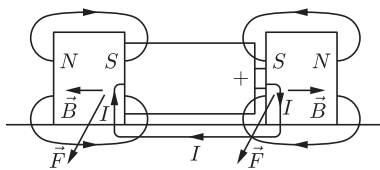
Rys. 1. Sposób zestawienia elementów silnika; 1 – bateria typu „paluszek”, 2, 3 – walcowe magnesy neodymowe, 4 – folia aluminiowa, N, S – bieguny magnesów.



Jeden ze zbudowanych silników.

Żeby zbudować, a właściwie zestawić nasz silnik, wystarczy przyłożyć płaskie ściany magnesów do obu końców baterii i umieścić ją na kawałku folii, leżącej na poziomej powierzchni (rys. 1). Dla prawidłowego działania silnika należy spełnić dwa warunki: magnesy muszą być skierowane do baterii biegunami jednoimiennymi i przyłożone do niej współosiowo. Żeby spełnić pierwszy warunek, przed przyłożeniem magnesów zbliżamy je płaskimi stronami i sprawdzamy, czy się odpychają. Dla spełnienia drugiego warunku sprawdzamy wzrokowo, czy brzeg każdego z magnesów wystaje tyle samo poza brzeg baterii. Ponadto folia powinna być gładka i leżeć na dokładnie poziomej powierzchni z dala od wszelkich przedmiotów ferromagnetycznych.

Gdy tak przygotowaną baterię z magnesami położymy na folii, wówczas ze zdumieniem zauważymy, że zaczyna się ona toczyć. Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie, dlaczego tak się dzieje i od czego zależy kierunek tego ruchu? W tym celu pomocny będzie rysunek 2. Magnesy neodymowe pokryte są ochronną warstwą niklu, który dobrze przewodzi prąd elektryczny. Folia aluminiowa, chociaż w powietrzu pokrywa się cienką warstewką tlenku, to również jest niezłym przewodnikiem. Magnesy neodymowe są przyciągane do stalowej obudowy baterii i kontaktują się z jej biegunami. Gdy położymy baterię z magnesami na folii, to wówczas zamknie się obwód elektryczny i prąd popłynie od dodatniego bieguna baterii przez stykający się z nim magnes i folię znajdującą się pod baterią do magnesu, dotykającego ujemnego bieguna baterii. Prąd ten rozplywa się po powierzchni magnesów i folii. Jego gęstość jest jednak największa wzdłuż linii o najmniejszym oporze elektrycznym. Dlatego z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że przepływ prądu odbywa się radialnie przez magnesy do miejsc ich kontaktu z folią. Ponieważ kierunek namagnesowania magnesów jest osiowy, to płynący w nich radialnie prąd jest prostopadły do kierunku ich wektora indukcji magnetycznej  $\vec{B}$ . W tej sytuacji na magnesy działają siły elektrodynamiczne  $\vec{F}$ , skierowane stycznie do podstawy walca. Siły te dają momenty sił względem punktów kontaktu magnesów z folią. Pod działaniem tych momentów zachodzi obrót magnesów wraz z baterią i ich toczenie się po folii. Kierunek ruchu baterii zależy od wzajemnej orientacji przestrzennej biegunów magnesów i baterii (rys. 2).



Rys. 2. Wyjaśnienie zasady działania silnika;  $\vec{B}$  – indukcja pola magnetycznego,  $I$  – natężenie prądu,  $\vec{F}$  – siła elektrodynamiczna, N, S – bieguny magnesów.

Gdy do baterii przyłożone zostaną północne bieguny magnesów N (czyli odwrotnie niż na rysunku), albo gdy dodatni biegun baterii znajdzie się po lewej stronie, bateria potoczy się w przeciwnym kierunku.

Spróbujemy teraz oszacować moment sił elektrodynamicznych, działających na baterię oraz moc i sprawność naszego silnika. Siła elektrodynamiczna  $F$  wyraża się wzorem

$$(1) \quad F = BIl,$$

w którym  $B$  oznacza indukcję pola magnetycznego,  $I$  – natężenie prądu, a  $l$  – długość przewodnika. Dla zastosowanych magnesów neodymowych wartość  $B$  zmierzono miernikiem hallotronowym, otrzymując 0,22 T. Ze względu na bardzo mały opór warstwy niklu na magnesach i folii bateria pracuje praktycznie w stanie zwarcia. W tej sytuacji natężenie prądu  $I$  można zmierzyć przyłączonym do niej bezpośrednio amperomierzem, którego opór również pomijamy. Pomiar taki dał wynik 4,6 A. Jako  $l$  przyjęto promień magnesu  $r$  wynoszący 5 mm, czyli 0,005 m.

\*Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Łódzki

Stąd obliczono  $F = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ . Jest to bardzo mała wartość – dla porównania ciężar jednego kg to 9,81 N. Dlatego też ruch naszego silnika zatrzymuje małe nachylenie powierzchni, na której leży folia albo jej niewielkie nierówności. Całkowity moment sił elektrodynamicznych  $M$ , napędzający silnik obliczamy ze wzoru

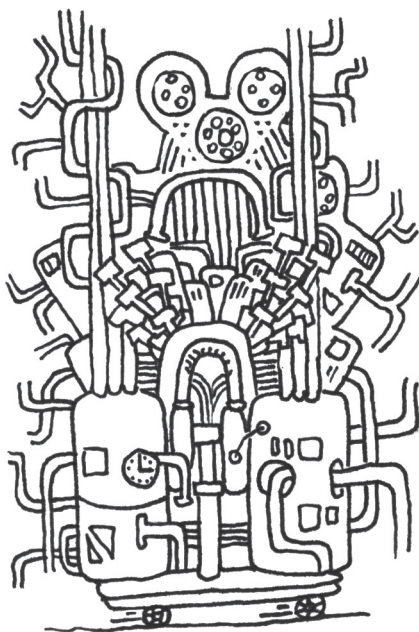
$$(2) \quad M = 2 \int_0^r l dF = 2 \int_0^r l B I dl = 2BI \int_0^r dl = BIr^2.$$

Po podstawieniu wcześniej przyjętych wartości ze wzoru (2) dostajemy  $M = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}$ .

Ponieważ bateria z magnesami toczy się, czyli jednocześnie wykonuje ruch obrotowy i postępowy, to obliczając moc użyteczną silnika  $P_u$ , musimy uwzględnić te dwa ruchy. Stąd też i ze znanych z podstaw mechaniki wzorów piszemy wzór

$$(3) \quad P_u = Fv + M\omega,$$

gdzie symbol  $\omega$  we wzorze (3) oznacza prędkość kątową baterii, która jest związana z jej prędkością liniową zależnością  $\omega = v/r$ . Zakładając, że ruch baterii szybko staje się jednostajny, prędkość liniową  $v$  obliczono ze wzoru  $v = s/t$ . Stąd też, po uprzednim zmierzeniu czasu jej ruchu  $t$  na drodze  $s$ , otrzymano  $v = 0,04 \text{ m/s}$ . Po podstawieniu tej wartości oraz wartości wcześniej obliczonych do wzoru (3) uzyskano  $P_u = 3 \cdot 10^{-4} \text{ W}$ . Moc dostarczona do silnika  $P_d$  to moc prądu elektrycznego płynącego z baterii. Obliczymy ją ze wzoru  $P_d = UI$ , w którym  $U$  to napięcie zmierzone na biegunach baterii i równe w przybliżeniu jej sile elektromotorycznej. Dla użytej baterii  $U = 1,54 \text{ V}$ . Uwzględniając ten wynik oraz wcześniej zmierzoną wartość  $I$ , mamy  $P_d = 7,1 \text{ W}$ . Na koniec możemy obliczyć sprawność silnika  $\eta = P_u/P_d$ . Po podstawieniu wcześniejszych wyników otrzymujemy  $\eta = 4,2 \cdot 10^{-5} = 0,0042\%$ . Jak widać, sprawność naszego silnika jest bardzo mała. Większość energii elektrycznej zamienia się na ciepło, co łatwo pocujemy własnymi palcami już po kilkudziesięciu sekundach użytkowania silnika. Wniosek końcowy jest taki, że z powodu bardzo małej sprawności nasz silnik chyba nie znajdzie praktycznego zastosowania, ale za to na pewno jest fascynującą zabawką edukacyjną.



## Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

**M 1513.** Jednym z pierwiastków wielomianu  $w$  o współczynnikach całkowitych jest liczba  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p$  i  $q$  są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi. Wykazać, że liczba  $w(1)$  jest podzielna przez  $p - q$ .

Rozwiązanie na str. 2

**M 1514.** Każda z liczb 1, 2, 3, ..., 10 została wpisana na dziesięciu polach szachownicy  $10 \times 10$  w taki sposób, że na każdym polu jest dokładnie jedna liczba. Wykazać, że istnieje wiersz lub kolumna tej szachownicy, w której występują co najmniej 4 różne liczby.

Rozwiązanie na str. 17

**M 1515.** Znaleźć obwód  $p$  trójkąta o wysokościach długości 2, 3 i 4.

Rozwiązanie na str. 4

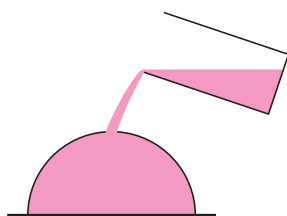
Przygotował Michał NAWROCKI

**F 917.** Na powierzchni stołu stoi, szczelnie do niej przylegając, półsferyczny dzwon. Do dzwonu, poprzez otwór w jego wierzchołku, wlewana jest woda. Gdy poziom wody dochodzi do otworu, woda unosi dzwon i zaczyna wyciekać dołem spod dzwonu. Znaleźć masę dzwonu, jeżeli jego promień wynosi  $R$ , a gęstość wody wynosi  $d$ .

Rozwiązanie na str. 23

**F 918.** Dwie małe bańki mydlane o promieniach  $r_1$  i  $r_2$  łączą się w jedną bańkę o promieniu  $r_3$ . Przyjmując, że napięcie powierzchniowe błonki mydlanej wynosi  $\sigma$ , a temperatura  $T$  jest jednakowa dla wszystkich rozpatrywanych baniek i równa temperaturze otaczającego powietrza, znaleźć ciśnienie atmosferyczne.

Rozwiązanie na str. 23





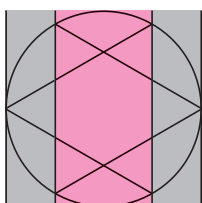
# Stabilnie czy dynamicznie?

Marek KORDOS

## Paradoks Bertranda

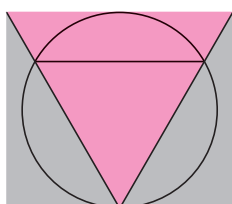
Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana cięciwa okręgu ma długość nie mniejszą od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

I. Ponieważ każdy kierunek cięciwy jest jednakowo prawdopodobny, więc dla cięciw o ustalonym kierunku prawdopodobieństwo jest takie, jak dla wszystkich cięciw, a więc



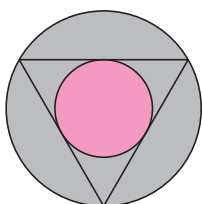
równe  $1/2$ .

II. Ponieważ każdy koniec cięciwy jest jednakowo prawdopodobny, więc dla cięciw o ustalonym końcu prawdopodobieństwo jest takie, jak dla wszystkich cięciw, a więc



równe  $1/3$ .

III. Ponieważ każde położenie środka cięciwy jest jednakowo prawdopodobne, więc dla cięciw o ustalonym środku prawdopodobieństwo jest takie, jak dla wszystkich cięciw, a więc



równe  $1/4$ .

Gdy w połowie XIX wieku w matematyce pojawiły się dziwne twory, w rodzaju funkcji ciągłych odcinka  $[0, 1]$  na odcinek  $[0, 1]$  w żadnym przedziale niemonotonicznych, czy zadań mających jednakowo poprawne, choć sprzeczne rozwiązania, jak paradoks Bertranda, potrzeba nadania matematyce jakiegoś jednoznacznego porządku, znalezienia odpowiedzi na pytanie, jak można, a jak nie należy matematyki uprawiać, stała się nagląca.

## Luka w *Elementach*

Rozwiązanie, które na ponad stulecie dominowało wśród matematyków, powstało w związku ze znalezieniem przez Moritza Pascha przesłanki, z której przez ponad dwa tysiące lat wszyscy uprawiający geometrię korzystali, a która nie wynika z postulatów zawartych w *Elementach* Euklidesa. Dziś przesłanka ta jest znana jako **aksjomat Pascha** i orzeka, że

*Jeśli na płaszczyźnie prosta przecina jeden z boków trójkąta i nie przechodzi przez żaden wierzchołek, to przecina ona jeszcze jeden z boków* (topologowie formułują to jako *prosta rozcina płaszczyznę*).

Pasch stwierdził, że owo korzystanie z niesformułowanego założenia dowodzi, iż matematycy często do przyjmowanych założeń dodają wiele swoich intuicji, i uznał, że matematykę należy od tego rodzaju dowolności uwolnić. Pierwszą przymiarkę do takiego doformułowania metodologii matematycznej zawarł w wydanym w 1882 roku *Vorlesungen über neue Geometrie* (Wykłady nowej geometrii), gdzie przedstawił uściśloną wersję *Elementów*.

## Teoria formalna

Koncepcja Pascha trafiła na podatny grunt, a przez Hilberta została doprecyzowana i pod nazwą *teoria formalna* podniesiona do godności jedynie słusznego sposobu uprawiania matematyki. A wygląda to tak.

Jakieś znaczki, np.  $a, b, c, \dots$  nazywamy **zmiennymi**, wyróżniając wśród nich niektóre, np.  $0, 1, \dots$ , i zmyłkowo nazywając je **stałymi**.

Potem dołączamy do nich inne znaczki, **funktory**, np.  $+, -, \dots$ , wskazując przy tym ich sposób współzycia ze zmiennymi, np.  $a + b, -a$  i nazywając tak zrodzone potomstwo **termami** oraz zalecając kaziurodztwo, a więc traktowanie przez funktery termów jak zmienne, które dla niepoznaki od tego momentu też termami nazywamy.

Następnie dołączamy jeszcze inne znaczki, **predykaty**, np.  $=, \perp, \dots$  również je instruując, jak mają sobie z termami poczynać, np.  $a + 1 = b + c, b \perp c, \dots$ , tym razem potomstwo nazywając **formułami elementarnymi**.

Spójniki logiczne tworzą z nich **formuły** (już bezprzymiotnikowe).

Zbiór tak otrzymanych formuł to **język**.

Występujące w formułach zmienne wiążemy kwantyfikatorami dotąd, aż niezwiązane pozostaną tylko stałe – efektem są **zdania**.

Zdania rozmnażają się przez pączkowanie za pomocą operacji **konsekwencji**  $C_n$ . Zbiór zdań, który już pączkować nie może, to właśnie **teoria**.

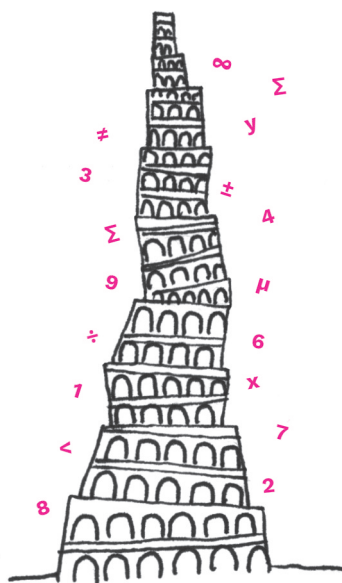
Dla dowolnego zbioru zdań  $\mathcal{A}$  oznaczmy przez  $C_n(\mathcal{A}) =: \mathcal{T}$  wszystko, co może z niego wypączkować. Dla tak otrzymanej teorii  $\mathcal{T}$  zbiór  $\mathcal{A}$  jest **aksjomatyką**.

Dawid Hilbert wierzył, że w taki sposób (ewentualnie „nieco” bardziej skomplikowany – teorie wyższych rzędów) da się opisać wszystko, czym zajmują się matematycy. Wierzył do tego stopnia, że nawet narzucił na przyzwoite teorie formalne dodatkowe wymagania.

Zażądał mianowicie (a może marzył o tym), by taka teoria była

- **niesprzeczna** (z dwóch zdań  $\alpha$  i  $\neg\alpha$  do teorii należy co najwyżej jedno);
- **zupełna** (z dwóch zdań  $\alpha$  i  $\neg\alpha$  do teorii należy co najmniej jedno);

Za odrzuceniem hilbertowskiego formalizmu przemawiały badania jego zwolenników. Np. Thoralf Skolem i Leopold Löwenheim wykazali, że jeśli teoria ma model nieskończony, to ma model dowolnej nieskończonej mocy, co wyklucza kategoryczność. W *Delcie* 10/2016 zamieściliśmy artykuł Wojciecha Czerwińskiego, gdzie wskazano trudności z nierozstrzygalnością. Wielką sławę zyskały twierdzenia Kurta Gödla, w szczególności o niedowodliwości niesprzeczności. Forcing Paula Cohena był chyba *coupe de grâce* dla badaczy tej problematyki.



#### Rozwiązanie zadania M 1514.

Niech  $w(i)$  oraz  $k(i)$  oznaczają odpowiednio liczbę wierszy i kolumn, zawierających liczbę  $i$  dla  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Ponieważ każda z dziesięciu liczb  $i$  umieszczonych w tablicy leży na skrzyżowaniu jednego z  $w(i)$  wierszy z jedną z  $k(i)$  kolumn, to dla każdego  $i$  spełniona jest nierówność  $w(i) \cdot k(i) \geq 10$ . W takim razie również

$$\frac{w(i) + k(i)}{2} \geq \sqrt{w(i) \cdot k(i)} \geq \sqrt{10} > 3,$$

więc  $w(i) + k(i) > 6$ .

Rozważmy zbiory

$W = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 10 \text{ oraz w wierszu } j \text{ występuje liczba } i\}$

oraz

$K = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 10 \text{ oraz w kolumnie } j \text{ występuje liczba } i\}$ .

Wówczas  $|W| + |K| > 10 \cdot 6 = 60$ . Bez straty ogólności przyjmijmy, że  $|W| > 30$  (przypadek  $|K| > 30$  rozważa się analogicznie). Z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy, że w takim razie dla pewnego  $j$  zbiór  $W$  zawiera co najmniej 4 pary postaci  $(i, j)$ , a to daje tezę.

- **kategoryczna** (wszystkie jej modele są izomorficzne, jednakowo zbudowane);
- **rozstrzygalna** (istnieje skończona procedura sprawdzająca, czy dane zdanie do teorii należy).

Dziś wiemy, że żadna z interesujących matematyków dziedzin takiej aksjomatyki mieć nie może i starania nad jej poszukiwaniem dla przynajmniej niektórych dyscyplin zostały zarzucone w latach 70. ubiegłego stulecia. Jednak sam pomysł jest na tyle elegancki i przystający do specyfiki informatyki, że w jej ramach podobne problemy bada się nadal.

W matematyce w latach 30. XX wieku na taki sposób definiowania matematyki przypuszczono zdecydowany atak. Atak ten wykorzystał pomysł, którego precyzyjne sformułowanie było o 10 lat starsze od koncepcji Pascha.

## Wieża Babel

Już w latach 30. XIX wieku Michel Chasles pisał: *Dziś każdy może przyjść, wziąć jakąkolwiek prawdę i poddać ją rozmaitym ogólnym zasadom przekształceń; otrzyma z niej nowe prawdy, inne lub ogólniejsze; i te poddać będzie można podobnym operacjom; w ten sposób możliwe będzie pomnożenie, prawie do nieskończoności, liczby nowych prawd, wyprowadzonych z pierwszej [...] nie musi już być geniuszem, kto chce dotożyć cegielkę do gmachu geometrii*. Ta ponura opinia brała się stąd, że coraz bardziej zasadnie podejrzewano, że niektóre nowe teorie są tylko tłumaczeniem na inny język rzeczy znanych. Powstało zapotrzebowanie na sposób identyfikacji stwierdzeń różniących się jedynie formalizmem, w jakim są sformułowane.

Ale można było z możliwości posługiwania się różnymi formalizmami wyciągnąć pozytywne wnioski – przenoszenie rezultatów z jednej dziedziny do drugiej mogło pomagać w uprawianiu owej drugiej dziedziny. Duże wrażenie zrobił *Übertragungsprinzip* (ogólna zasada przenoszenia) Ludwiga Ottona Hessego. Hesse wskazał, że geometria rzutowa prostej (czyli prosta z homografiemi) przez rzut stereograficzny da się przenieść na stożkową, a gdy znamy geometrię rzutową stożkowej, to możemy to rozciągnąć na jej wnętrzu, a to już jest geometria płaszczyzny Bolyaia–Łobaczewskiego. To sformułowanie może wydawać się mętne nawet tym, którzy znają osobiście pojęcia występujące w poprzednim zdaniu. Wszelako na wielu matematykach zrobiło ono wielkie wrażenie. Julius Plücker w swoim *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der Geraden Linie als Raumelement* (Nowa geometria przestrzeni, w której proste są rozważane jako elementy) swobodnie wskazywał, że proste przestrzeni trójwymiarowej tworzą różnorodność czterowymiarową, ale mogą też być potraktowane jak sześciowymiarowa kwadryka, a więc siedmiowymiarowa geometria Bolyaia–Łobaczewskiego.

Te wszystkie oszałamiające hiperbole intelektualne zostały sprowadzone na ziemię przez ucznia Plückera, Felixa Kleina.

## Program Erlangeński

Dwudziestotrzyletni Felix Klein, obejmując w 1872 roku katedrę matematyki w Erlangen, sformułował program badawczy, którego główna myśl polegała na tym, że dwa obiekty matematyczne należy uważać za tożsame, gdy mają tę samą grupę automorfizmów, co oznacza, że przekształcenia, które przeprowadzają te obiekty na nie same, mają takie same własności.

Jest to rewolucyjna zmiana sposobu patrzenia. Nie interesuje nas „z czego” jest zbudowany nasz obiekt, a jedynie to, jak może się sam na siebie przekształcać. Odpowiednikami twierdzeń, czyli elementów teorii formalnej, w ujęciu Kleina są własności **niezmienników**, czyli tych obiektów, które podczas przekształceń z grupy automorfizmów pozostają niezmiennie.

Przykładem niezmienników mogą być znane figury: kwadrat, koło, które nie zmieniają się podczas podobieństw (tak! – kwadrat przy podobieństwie pozostaje kwadratem, a koło kołem).

Od razu widać potencjalną przewagę metody Kleina nad teorią formalną: zarówno niezmienników, jak też ich własności może być nieprzeliczalnie wiele, podczas gdy teoria formalna ledwie się do przeliczalności zbliża (znów odsyłam do wspomnianego na marginesie artykułu w *Delcie* 10/2016).

Ale tym, co jeszcze mocniej zaważyło na sukcesach tego podejścia, była możliwość uzyskiwania „za frajer” twierdzeń jakiejś teorii, gdy istniały stosowne twierdzenia teorii innej.

Oto dwa przykłady prac pokazujących natychmiast uzyskane tego rodzaju zyski. Felix Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Gerade*

(Wykłady o dwudziestościanie i rozwiązywaniu równań piątego stopnia)

Sophus Lie, *Über Complexe, insbesondere Linien und Kugelcomplexe, mit Anwendungen auf die Theorie partielle Differentialgleichungen*

(O liczbach zespolonych, a w szczególności prostych i stożkach zespolonych, z ich zastosowaniem w teorii równań różniczkowych cząstkowych)

Rysujące się tutaj możliwości były wykorzystywane jednak tylko przez nieliczną grupę matematyków. Na przykład ja, zaczynając studia 58 lat temu, byłem z pomysłem Kleina zapoznawany jedynie poprzez jego zastosowanie do klasyfikacji różnych geometrii zwykłej płaszczyzny, o czym piszę na marginesie.

Ale tak było do czasu.

## Rewolucja bourbakistowska

Pewnego dnia w obfitującym w wydarzenia nie tylko matematyczne 1933 roku na Sorbonie wykład wygłosił nieznan i zamaskowany jakoby-profesor Nicolas Bourbaki i wezwał światową społeczność matematyczną do porzucenia skostniałej matematyki wywodzącej się z metody aksjomatycznej i bazującej na inspiracjach zaczerpniętych z fizyki. W zamian proponował dostrzeżenie, iż znakomite rezultaty uzyskujemy, obserwując dynamiczne zmiany, bo modyfikacja obserwowanych obiektów dostarcza nam więcej o nich informacji, tak, jak obserwacja pędzących rumaków więcej o nich nam powie niż wizyta w stajni.

Grupa matematyków ukrywająca się zbiorowo pod pseudonimem Bourbaki zaproponowała przerezagowanie matematyki na kleinowski sposób, publikując ponad 40 monografii obejmujących prawie wszystkie dziedziny matematyki. Członkowie zaś tej grupy swoimi wynikami dokumentowali, iż obrana przez nich metoda przynosi obfite owoce.

Jednak przerezagowywanie matematyki to robota niebagatelna i napotyka ją wiele oporów. Spory na temat tego, w którą stronę matematykę poprowadzić, były bardzo ostre, niemal krwawe. W Polsce przesilenie nastąpiło w latach 60. XX wieku. Bourbakizm zwyciężył i dziś, gdy minęło już pół wieku, ślady po tej konfrontacji można odkryć, porównując programy studiów z moich czasów z dzisiejszymi.

Ewentualnych archeologów zainteresowanych problemem mogę odesłać do wtórnej książki Nicolasa Bourbakiego *Elementy historii matematyki*, gdzie hejtu na formalistów nabierane jest niemało (ale ja tego cytować nie będę, bo to rzecz obrzydliwa, zwłaszcza u ludzi stwarzających podejrzenie, że intelekt mają niezerowy).

Istnieje, oczywiście, także teoria obsługująca technikę kleinowską, tak jak logika obsługiwała (a w informatyce nadal obsługuje) formalizm. To stworzona przez Samuela Eilenberga i Saundersa Mac Laine'a **teoria kategorii**, badająca obiekty i ich morfizmy, cokolwiek by to oznaczało.

Ale sukcesów dynamicznej metodzie badań matematycznych odmówić nie sposób: choćby klasyfikacja rozmaitości Grigorija Perelmana powstała z badań nad ich transformacjami w potokach Ricciego.

### Program erlangenński wedle kursu geometrii analitycznej AD 1958

Grupy przekształceń  $\mathbb{R}^n$  uporządkowane przez relację zawierania tworzą kratę. Ma ona element najmniejszy – grupę trywialną  $\{Id\}$ , i element największy – grupę bijekcji. Można się temu przyglądać np. dla naturalnego dla nas  $n = 3$ .

Oznaczmy niezmienniki grupy  $G$  przez  $N_G$ . Gdy zachodzi  $G_1 \subseteq G_2$ , mamy  $N_{G_1} \supseteq N_{G_2}$ . Zatem geometria (traktowana po kleinowsku) wyznaczona przez grupę  $G_1$  jest bardziej szczegółowa od geometrii wyznaczonej przez grupę  $G_2$ , ma więcej pojęć i więcej twierdzeń. Np. geometrią wyznaczoną przez grupę trywialną posługują się w swych pracach geografowie. Inżynierowie używają geometrii bardziej szczegółowej od geometrii wyznaczonej przez grupę izometrii, gdyż śrubka lewoskrętna jest izometryczna (przystająca) do śrubki prawoskrętnej, a zamienić ich przy montażu się nie da. Nie bardzo wiadomo, kto miałby się posługiwać geometrią daną przez grupę izometrii. Wiadomo natomiast, kto posługuje się geometrią daną przez grupę podobieństw – takiej geometrii uczy się w szkole (patrz przytoczony przykład kwadratu czy koła). Pojęcia takie, jak graniastosłup czy ostrosłup, pojawiają się już w geometrii afinicznej (przekształcenia afiniczne to te bijekcje, które zachowują proste). Tamże mamy już twierdzenia Menelaosa i Cevy.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że istotnie jest to krata, a nie porządek liniowy. Geometria dana przez podobieństwa i geometria dana przez grupę generowaną przez symetrie skośne nie są porównywalne: pierwsza z nich nie zachowuje objętości figur, a druga zachowuje. Z kolei pierwsza zachowuje kąty, a druga nie. Ich grupy automorfizmów nie są więc połączone relacją zawierania, ale obie zawiera grupa przekształceń afinicznych (te zachowują stosunek objętości, jak i one) i obie zawierają grupę izometrii. (Objaśnienie: symetria skośna dana jest przez płaszczyznę  $\pi$  i nierównoległą do niej prostą  $K$  w następujący sposób: przez punkt  $P$  i jego obraz  $P'$  przechodzi prosta równoległa do  $k$ , a środek  $PP'$  leży na  $\pi$ ; gdy  $K \perp \pi$ , otrzymujemy zwykłą symetrię).

Wadą takiego zredukowanego podejścia jest możliwość rozpatrywania tylko teorii operujących na tym samym zbiorze, co w przypadku prób pisania o związku geometrii afinicznej i rzutowej na ogół wówczas prowadziło, delikatnie mówiąc, do nieścisłości.

## Naukowa prasówka

Próba „trzymania ręki na pulsie” wiadomości genetycznych w tych dniach i miesiącach kończy się dla zajętego człowieka niepowodzeniem, nawet jeżeli brać pod uwagę tylko najważniejsze wiadomości z najważniejszej prasy naukowej. Żeby dać Czytelnikowi wyobrażenie, jak wielki jest zakres tych wiadomości – parę przykładów.

★ Podjęto analizę łącznego mikrobiomu ludności w Rio przed, w trakcie i po Olimpiadzie. Mikrobiom: zestaw mikrobów towarzyszących człowiekowi na zewnątrz i wewnątrz ciała. Ciekawa byłabym, co wyszło z tych kontaktów z „obcymi”.

★ Rodzice dziecka chorego na bardzo ciężką, dotychczas nieuleczalną, chorobę genetyczną, mukopolisacharydozę III (brak enzymu trawiącego długołańcuchowe węglowodany) zebrali 1,8 mln dolarów na badania, po tym, gdy dowiedzieli się o obiecujących wynikach eksperymentów na myszach.

★ W Japonii oznaczono sekwencję nukleotydową genomu niesporczaka *Ramazzottius varieornatus*, należącego do grupy malutkich milimetrowych bezkręgowców, często odpornych na wiele stresowych warunków. W tym genomie odkryto geny kodujące białka wpływające na metabolizm komórki w warunkach stresowych (ciśnienie, odwodnienie). Białko Dsup spowalnia proces degradacji DNA przez promieniowanie rentgenowskie, również wtedy, gdy się je wprowadzi do innych komórek eukariotycznych. Powyższe badania, piszą odkrywcy, mają znaczenie dla projektowania podróży w kosmos. Właśnie obejrzałam krótkometrażowy film Pani Agnieszki Elbanowskiej „Pierwszy Polak na Marsie” (2016). *FilmPolski.pl* tak o tym pisze: *W galaktyce Drogi Mlecznej, na trzeciej od Słońca planecie Układu Słonecznego, na szerokości geograficznej 51 stopni 17 minut północnej, długości geograficznej 18 stopni 10 minut wschodniej, Kazimierz, lat 68, montuje radioteleskop do łączności z kosmosem. Dokładnie w tej samej czasoprzestrzeni rozpoczyna się walka o udział w historycznej misji Mars One. Kazimierz ma szansę stać się jednym z pierwszych kolonizatorów Marsa. Najpierw jednak musi pokonać około trzech tysięcy kandydatów... Film opowiada o pięknej aktywności Pana Kazimierza, który pokonuje 2 rundy eliminacji i ląduje w grupie „rezerwowych”.*

★ Na dorocznej liście 35 światowych innowatorów z różnych dziedzin i specjalności znaleźli się: Evan Macosko, który wynalazł metodę badania kolejno, po jednej, tysięcy komórek i oceniania ich zdolności wypełniania określonej instrukcji genetycznej, Kelly Gardner, który zaproponował test mierzący stężenie określonych białek w pojedynczych komórkach, Sonia Vallabh, która badała choroby prionowe, uzyskując dane prowadzące do metod ich wyleczenia. Polskich innowatorów na tej liście nie wykryłam.

★ Stosując znaną metodę elektroporacji, przeniesiono układ CRISPR/cas9 wzbogacony o element wybranego genu do komórek jajowych (oocytów) świni. Elektroporacja polega na przyłożeniu do zawieszonych w płynie komórek krótkotrwałego, wysokonapięciowego impulsu elektrycznego, co czyni błonę komórkową chwilowo przenikalną dla dużych cząsteczek. Układ CRISPR pozwala na precyzyjne i wysokowydajne przeniesienie i/lub modyfikację wybranego genu w wybranej komórce od bakterii do człowieka. W opisywanym doświadczeniu uzyskano oczekiwany wynik z 90% wydajnością. Sprawdzone, że taką modyfikację genetyczną dziedziczą komórki potomne. Trwa wojna światowa o patenty metody CRISPR, a jednocześnie o kolejną Nagrodę Nobla. Patent na CRISPR w stosunku do roślin właśnie uzyskały razem firma Bayer i Monsanto.

Dziwny jest ten świat.

Magdalena FIKUS

## Seks a informatyka

Bohater „Przedwiośnia” Stefana Żeromskiego mając napisać rozprawę o słoniu, napisał „Słoń a Polska”.

Czy już naprawdę nawet w Delcie musi być o seksie? Sytuacja wygląda trochę jak rozprawa „Słoń a Polska”, przy czym w XIX wieku niekórym wszystko kojarzyło się ze sprawą polską, a teraz z czymś nieco innym. Zaniepokojonych Czytelników spieszymy uspokoić, że rzeczy nie mają się aż tak źle, bo artykuł naprawdę dotyczy rozmnażania płciowego i informatyki.

Zacznijmy jednak od początku. Obserwując przyrodę, zauważamy, że istnieją w zasadzie dwa konkurencyjne sposoby pomnażania osobników danego gatunku: rozmnażanie bezpłciowe oraz rozmnażanie płciowe. Nietrudno jednak zauważyć, że organizmy bardziej skomplikowane, czy też można powiedzieć zaawansowane, stosują zazwyczaj metodę rozmnażania płciowego, więc logiczne byłoby wnioskowanie, że jest ono w pewnym sensie lepsze.

Przyjrzyjmy się tym dwóm taktykom i zobaczymy, że można je zinterpretować w kontekście informatyki. Ewolucję samą w sobie możemy bowiem traktować jako obliczenie. Obliczenie to przeszukuje pewien zbiór obiektów i poszukuje takiego o najwyższej funkcji celu. Można, upraszczając, powiedzieć, że w biologii zbiór ten to zbiór potencjalnych osobników danego gatunku, a funkcja celu to miara przystosowania osobnika do środowiska.

W przypadku rozmnażania bezpłciowego poszukiwanie zaczyna się od pewnego ustalonego obiektu i modyfikuje go nieznacznie (przez mutacje). Jeśli zmodyfikowany obiekt ma większą funkcję celu, to presja ewolucyjna powoduje, że właśnie tego obiektu i jemu podobnych będzie z czasem coraz więcej. Trwa to do momentu, gdy w populacji dominować będą osobniki, których właściwie nie da się poprawić przez mutację. To odpowiadałoby w informatyce przeszukiwaniu przestrzeni stanów w poszukiwaniu optimum lokalnego, tzn. przeglądaniu sąsiadów danego obiektu, porównywaniu funkcji celu i jeśli ta jest większa u sąsiada, to przeskakiwaniu do niego. Taki algorytm nie daje jeszcze dobrych rezultatów, ale jego stosunkowo niewielka modyfikacja już tak. *Symulowane wyżarzanie* pozwala na przeskakiwanie do sąsiadów o gorszej funkcji celu z pewnym prawdopodobieństwem (malejącym z czasem oraz z rosnącą różnicą między obiektami).

Rozmnażanie płciowe też stosunkowo łatwo zinterpretować jako obliczenie. Powstało wiele *algorytmów genetycznych* stosujących schemat wzięty żywcem z ewolucji organizmów rozmnażających się płciowo. Działają one następująco. Najpierw losowana jest pewna pula obiektów, jest to pierwsze pokolenie. Następnie w pętli realizowana jest procedura: (1) wybierz z populacji pewien odsetek obiektów o najlepszych wynikach, pozostałe usuń; (2) wylosuj z populacji dwa obiekty i skrzyżuj je, powtórz to tyle razy, ile ma być obiektów w nowym

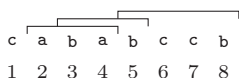
pokoleniu; (3) każdy z obiektów w nowym pokoleniu trochę zmodyfikuj z pewnym prawdopodobieństwem (odpowiednik mutacji); (4) usuń obiekty ze starego pokolenia.

Wydawałoby się, że podobnie jak w przyrodzie, tak i w informatyce algorytmy genetyczne powinny działać dużo lepiej niż algorytmy lokalnego przeszukiwania. I tu niespodzianka! Christos Papadimitriou, znana postać współczesnej informatyki, twierdzi, że w praktycznych zastosowaniach lokalne wyszukiwanie, a w szczególności symulowane wyżarzanie działają dobrze, podczas gdy algorytmy genetyczne nie radzą sobie. Niektórzy naukowcy twierdzą inaczej, nie będziemy się jednak starali rozwikłać tej zagadki, tylko pójdziemy tropem rozumowania Papadimitriou. A więc pytanie brzmi – dlaczego? Jak to możliwe, żeby w biologii ten sam mechanizm działał dobrze, a w informatyce źle?

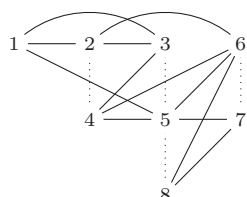
Odpowiedź jest zupełnie zadziwiająca! A co, jeśli ewolucja w biologii ma co innego na celu niż algorytmy ewolucyjne w informatyce? Algorytm genetyczny dąży do znalezienia obiektu o najlepszym wyniku. Wielu sądzi, że ewolucja ma na celu stworzenie najlepiej przystosowanego do środowiska super-osobnika. Po chwili zastanowienia Czytelnicy zapewne zgodzą się, że ten utarty pogląd wcale nie jest oczywisty. Super-osobnik byłby bowiem idealny dla pewnego ustalonego środowiska, ale mógłby nie być odporny na jego zmiany. Co więc właściwie optymalizuje ewolucja? Wydaje się, że stara się stworzyć jakąś stabilną, odporną populację. Tylko co to konkretnie znaczy? To już zupełnie inna historia – i chyba jeszcze nie do końca zrozumiana przez naukę. I pewnie jeszcze daleko naukowcom (biologom, matematykom, informatykom), żeby dobrze zrozumieć, o co naprawdę chodzi w ewolucji.

Wojciech CZERWIŃSKI

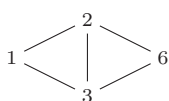
## Informatyczny kącik olimpijski (100): Równoważność palindromiczna



Rys. 1. W 8-literowym słowie  $w = \text{cababccb}$  na pozycji  $i = 3$  występuje palindrom nieparzysty  $\text{aba}$  o długości  $2r + 1 = 3$ , gdyż  $w[2] = w[4]$  oraz  $w[1] \neq w[5]$ .



Rys. 2. Graf  $G$  odpowiadający słowu  $w$ . Wierzchołki 2 i 4 są w tej samej składowej grafu  $G$ , zaś wierzchołki 1 i 5 są połączone krawędzią ciągłą.



Rys. 3. Graf  $G$  po zastąpieniu składowych pojedynczymi wierzchołkami. Liczba kolorowań tego grafu to  $A(A-1)(A-2)^2$ .

Niestety, nie znamy wielomianowego algorytmu dla ogólnego problemu zliczania kolorowań grafów, będziemy musieli więc nieco bliżej przyjrzeć się szczególnej postaci grafu z zadania. Na początek pozbedziemy się krawędzi przerywanych, scalając łączone przez nie wierzchołki. Powiemy, że dwa wierzchołki  $i$  oraz  $j$  należą do tej samej *składowej* w grafie  $G$ , jeśli są połączone przerywaną ścieżką. Każdą składową zastępujemy pojedynczym wierzchołkiem (o numerze będącym *najmniejszym* numerem wierzchołka z tej składowej), do którego wchodzi wszystkie krawędzie ciągłe poprzednio wchodzące do wierzchołków tej składowej.

W tak uzyskanym grafie będziemy zachłannie kolorować wierzchołki w kolejności rosnących numerów. Załóżmy, że chcemy pokolorować wierzchołek  $i$  oraz że jest on połączony krawędziami ciągłymi z wierzchołkami o mniejszych numerach  $j_1, j_2, \dots, j_k$ . Kluczową własnością grafu, która umożliwi nam kolorowanie zachłanne jest to, że każda para wierzchołków spośród  $j_1, j_2, \dots, j_k$  jest również połączona krawędzią ciągłą, czyli wszystkie one *muszą mieć różne kolory*, zatem wierzchołek  $i$  możemy pokolorować na  $A - k$  sposobów, niezależnie od kolorowania wierzchołków o mniejszych numerach (rys. 3).

Dowód kluczowej własności jest nieco techniczny i wymaga przyjrzenia się, jak mogą być położone palindromy w słowie  $w$ . Powiemy, że dwa wierzchołki  $i$  oraz  $j$  są *sąsiednie*, jeśli należą do tej samej składowej,  $i < j$  oraz nie istnieje  $k$ , że  $i < k < j$  i  $k$  też należy

W jubileuszowym odcinku kącika omówimy zadanie *Równoważność palindromiczna*, które pojawiło się na Obozie Naukowo-Treningowym im. A. Kreczmaro w 2010 roku. Dwa słowa  $w$  i  $v$  o długości  $n$  nazwiemy *równoważnymi palindromicznie*, jeśli dla każdej pary liczb  $i$  oraz  $j$ , takich że  $1 \leq i \leq j \leq n$ , pod słowo  $w[i..j]$  złożone z liter na pozycjach od  $i$ -tej do  $j$ -tej jest palindromem wtedy i tylko wtedy, gdy palindromem jest pod słowo  $v[i..j]$  złożone z liter na tych samych pozycjach. Mając dane słowo  $w$ , należy wyznaczyć liczbę słów równoważnych mu palindromicznie, zawierających litery z ustalonego  $A$ -literowego alfabetu.

Rozważmy pewien palindrom  $w[i - r..i + r]$  o nieparzystej długości  $2r + 1$ , którego środek jest na pozycji  $i$  w słowie  $w$ , oraz który nie może być rozszerzony (tzn. nie istnieje dłuższy palindrom o tym samym środku). Zatem w słowie  $v$  także musi istnieć analogiczny palindrom, zatem muszą być spełnione równości liter  $v[i - k] = v[i + k]$  dla  $1 \leq k \leq r$ , oraz nierówność  $v[i - r - 1] \neq v[i + r + 1]$ . Nietrudno się przekonać, że zbiór takich (nie)równości dla wszystkich pozycji  $i$  (wraz z analogicznym zbiorem dla palindromów o parzystej długości) w pełni opisuje warunki, jakie musi spełniać słowo  $v$ , aby być palindromicznie równoważnym słowu  $w$  (patrz rys. 1).

Zbiór ten możemy przedstawić jako graf  $G$  o wierzchołkach  $\{1, 2, \dots, n\}$  odpowiadających pozycjom w słowie  $v$ . Krawędź łącząca dwa wierzchołki będzie przerywana, jeśli odpowiadające im pozycje w słowie muszą mieć tę samą literę, lub ciągła, jeśli muszą mieć różne litery. W ten sposób sprowadzimy nasze zadanie do problemu kolorowania grafu: liczba słów palindromicznie równoważnych słowu  $w$  jest bowiem równa liczbie kolorowań grafu  $G$  przy pomocy  $A$  kolorów (przy zachowaniu ograniczeń na wynikających z istnienia krawędzi ciągłych i przerywanych; rys. 2).

do tej samej składowej. Dowód można przeprowadzić, udowadniając następujące własności:

- Jeśli  $i, j$  są sąsiednie, to  $w[i..j]$  jest palindromem.
- Jeśli  $i, j$  są sąsiednie,  $x < j$  oraz  $x$  i  $j$  są połączone krawędzią ciągłą, to  $x$  i  $i$  też są połączone krawędzią ciągłą (wynika z tego, że dla danej składowej wystarczy rozważać krawędzie ciągłe wchodzące do jednego wierzchołka z tej składowej – tego o najmniejszym numerze).
- Jeśli  $x < y < j$  i  $j$  jest wierzchołkiem o najmniejszym numerze ze swojej składowej oraz  $x$  i  $j$  są połączone krawędzią ciągłą oraz  $y$  i  $j$  są połączone krawędzią ciągłą, to istnieje taki wierzchołek  $y'$  ze składowej wierzchołka  $y$ , że  $x$  i  $y'$  są też połączone krawędzią ciągłą.

Pozostaje oszacować efektywność powyższego algorytmu. Zbiór (nie)równości konstruowanych na podstawie słowa  $w$ , a które odpowiadają krawędziom grafu  $G$  może mieć rozmiar  $O(n^2)$  i taka też będzie złożoność czasowa i pamięciowa powyższego algorytmu. Zauważmy jednak, że nierówności (czyli krawędzi ciągłych) jest jedynie  $O(n)$ , pozostałe to równości, czyli krawędzie przerywane, służące do wyznaczenia składowych grafu. Czytelnikom Dociekliwym polecamy zastanowić się, jak można wykorzystać algorytm Manachera znajdowania palindromów w słowie, do zmniejszenia liczby rozważanych krawędzi przerywanych do liniowej.

Tomasz IDZIASZEK

## Wyniki XXXIII Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Szczyrk, 2–5 VI 2016

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

Jury w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący Jury, dr Marian Podhorodyński – zastępca przewodniczącego Jury, dr Anna Bień, dr Paweł Błaszczuk, dr Damian Brückner, dr Anna Brzeska, dr hab. Włodzimierz Fechner, dr Piotr Kalemba, dr Maria Kania-Błaszczuk, dr Renata Kawa, dr hab. Janusz Morawiec, dr Barbara Przebieracz, dr Jolanta Sobera, dr Anna Szczerba-Zubek,

postanowiło przyznać następujące wyróżnienia:

**I miejsce: Wojciech Wawrów** z LO św. Marii Magdaleny w Poznaniu za pracę *Ultrafiltry i ich zastosowania*, opiekun: mgr Adrian Michałowicz;

**II miejsce: Maciej Janus** z I LO w Gliwicach za pracę *W poszukiwaniu punktu Fermata*,

opiekunowie: mgr Halina Husak, mgr Zbigniew Gawron, oraz **Hanna Mazurek** z II LO w Zduńskiej Woli

za pracę *Ekstrema wielomianów*, opiekun: dr inż. Renata Długosz,

**III miejsce: Miłosz Dudek** z I LO w Pszczynie za pracę *Od Cezara do Enigmy – kryptologia*, opiekun: mgr Joanna Szczurek, oraz

**Jakub Gajdecki** z VIII LO w Katowicach za pracę *Czworościany w ujęciu olimpijskim*,

opiekunowie: mgr Renata Suchanek, dr Łukasz Dawidowski.

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację

**nauczyciele nagrodzili Miłosza Dudka**

oraz

**Weronikę Pawłowską** z VIII LO w Katowicach za pracę

*Kilka słów o kłamstwie, czyli sofizmaty i paradoksy*,

opiekun: mgr Renata Suchanek,

**a uczniowie również Weronikę Pawłowską.**

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; [www.spinor.edu.pl](http://www.spinor.edu.pl)

## Protokół posiedzenia Jury XXXVIII Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Protokół finału XXXVIII Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie: Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący jury, Krzysztof Chelmiński, Andrzej Dąbrowski, Marek Kordos, Kamila Łyczek i Zdzisław Pogoda po wysłuchaniu w dniu 15 września 2016 roku prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematów, treść prac i sposób ich przedstawienia, postanowiło, co następuje:

- **srebrne medale** i nagrody w wysokości 2000 zł otrzymują prace *Przewodniki i pary maksymalne Łukasza Kamińskiego* z XIV: Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie oraz *Wielomiany z podłogami Adama Klukowskiego* z XIV: Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie.
- **brązowy medal** i nagrodę w wysokości 1000 zł otrzymuje praca *O pewnej charakterystyce równoległościanu Grzegorza Dłużewskiego* z Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu.

Opiekunowie prac: Leszek Sidz oraz Karol Kaszuba otrzymują dyplomy honorowe.

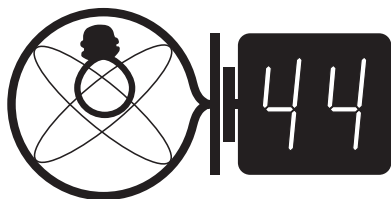
Finaliści i opiekunowie prac otrzymują również nagrody rzeczowe ufundowane przez: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Wydawnictwo Demart, Wydawnictwo Szkolne Omega, Wydawnictwo Aksjomat, czasopismo Delta.

(—) podpisy członków Jury

Prace nadsyłane na Konkurs powinny być samodzielnie przygotowanym przez ucznia opracowaniem, zawierającym nowe wyniki lub nowe twórcze ujęcie tematu. Szczegółowy regulamin Konkursu znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl). Termin nadsyłania prac w kolejnej edycji Konkursu to **1 kwietnia 2017 roku**.

# Klub 44

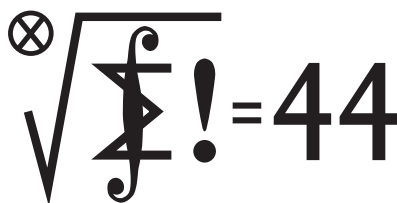
Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2017



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 721 ( $WT = 2,44$ ) i 722 ( $WT = 1,32$ ) z numeru 5/2016

Paweł Kubit	Kraków	46,53
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	44,09
Piotr Kumor	Olsztyn	41,91
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,66
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08
Marek Galecki	USA	37,76
Zbigniew Skalik	Wrocław	36,43
Witold Bednarek	Łódź	35,27
Roksana Słowik	Knurów	34,50

Jak miesiąc temu: dwaj panowie mijają linię mety, obaj nie pierwszy raz.  
Paweł Kubit – już po raz szósty;  
Grzegorz Karpowicz – po raz drugi.



## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

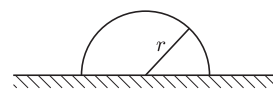
### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z fizyki nr 628, 629

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**628.** Rura o promieniu  $r$  zakopana jest do połowy w ziemi. Z jaką minimalną prędkością powinna odbić się od ziemi żaba, która chce przeskoczyć przez tę rurę?



**629.** Kondensator naładowano do napięcia  $U_0$  i po odłączeniu od źródła napięcia podłączono do niego opornik. W pewnym przedziale czasu na oporniku wydzielona została energia  $W_1$ , a w następnym takim samym przedziale czasu energia  $W_2$ . Znaleźć pojemność kondensatora.

### Zadania z matematyki nr 731, 732

Redaguje *Marcin E. KUCZMA*

**731.** Znaleźć wszystkie funkcje  $f$ , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera, przyjmujące wartości w tym samym zbiorze, i spełniające równanie funkcyjne

$$f(xy f(x+y)) = f(x) + f(y)$$

dla każdej pary liczb  $x, y \neq 0$  takiej, że  $x + y \neq 0$ .

**732.** Ciąg liczb naturalnych  $a_0, a_1, a_2, \dots$  jest określony wzorem rekurencyjnym:  $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ ; wyraz początkowy  $a_0$  jest liczbą pierwszą. Dowieść, że dla każdego  $n$  różnica  $a_{n+1} - 1$  jest podzielna przez  $a_n$ .

Zadanie 732 zaproponował pan Tomasz Ordowski.



**Rozwiązanie zadania F 917.** Ciśnienie  $p$  wywierane na stół w momencie, gdy woda zaczyna wyciekać dołem, wynosi  $dgR$ , a siła parcia na stół wynosi  $F = pS = \pi dgR^3$ . Siła ta jest zarazem równa wspólnej masie dzwonu i wody  $F = mg + \frac{2}{3}\pi dgR^3$ .

Stąd

$$mg + \frac{2}{3}\pi dgR^3 = \pi dgR^3$$

i ostatecznie

$$m = \frac{1}{3}\pi dgR^3.$$



**Rozwiązanie zadania F 918.** Przyjmujemy, że całkowita masa powietrza nie zmienia się przy połączeniu baniek, czyli  $m_3 = m_1 + m_2$ .

Zgodnie z równaniem gazu doskonałego  $m = \frac{pV\mu}{RT}$ , gdzie  $p$  to ciśnienie powietrza w bańce,

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$  – objętość bańki,  $\mu$  – masa cząsteczkowa powietrza.

Warunek równowagi bańki można zapisać jako  $p = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{2\sigma}{r}$ , gdzie  $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$  to dodatkowe ciśnienie pod sferyczną powierzchnią błonki o niewielkim promieniu  $r$ , a  $p_0$  to ciśnienie atmosferyczne.

Stąd dla mas  $m_1, m_2, m_3$  mamy  $m_i = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{r_i}\right) \cdot \frac{4}{3}\pi r_i^3 \mu$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Korzystając z tego, że  $m_3 = m_1 + m_2$ , dostajemy ostatecznie

$$p_0 = 2\sigma \frac{r_3^2 - r_1^2 - r_2^2}{r_1^3 + r_2^3 + r_3^3}.$$



## Prosto z nieba: Porządny układ planetarny

W czasach przed powstaniem wielkich programów obserwacyjnych z użyciem teleskopów naziemnych oraz specjalnych misji satelitarnych wiedzę na temat planet czerpaliśmy wyłącznie z obserwacji Układu Słonecznego. Badanie próbki składającej się z jednego przypadku pozwala odpowiedzieć jedynie na niektóre pytania o powstaniu, ewolucji i przyszłości układów planetarnych. Na szczęście obecnie strumień nowych danych obserwacyjnych jest niezwykle szeroki – liczba potwierdzonych planet pozasłonecznych odkrytych przez satelitę Kepler sięga 2500 przypadków.

**Kepler został wystrzelony w marcu 2009 roku. Od 2012 roku prześlady go pech związany z awariami systemu żyroskopów i kół zamachowych służących do pozycjonowania w przestrzeni – dwa z czterech przestały działać. W połowie unieruchomiony Kepler jest jednak wciąż w stanie wykonywać obserwacje w ograniczonym zakresie.**

Wśród nich znajdują się planety typu ziemskiego, otoczone atmosferami, na powierzchni których znajduje się, być może, woda w stanie ciekłym. Odległość planety od macierzystej gwiazdy ma tu kluczowe znaczenie – zbyt blisko lub zbyt daleko od strefy zamieszkiwalnej (ekosfery) oznacza zbyt wysokie lub zbyt niskie temperatury niesprzyjające istnieniu życia typu ziemskiego.

W Układzie Słonecznym odległości planet od Słońca opisuje w przybliżeniu empiryczna reguła Titiusa-Bodego, natomiast, co zostało sprawdzone na dużej próbce

obserwacji Keplera, prawo to zawodzi dla planet pozasłonecznych.

**Reguła ta ma postać  $a = 0,4 + 0,3 \cdot 2^m$  [j.a.], i dla  $m = -\infty, 0, 1, 2, \dots$ , począwszy od Merkurego, odtwarza z zaskakującą dokładnością półoście wielkie planet.**

Wśród odkryć Keplera znajdują się jednak przypadki układów o innych, niezwykle właściwościach. Przykładem jest Kepler-223, w którym wokół gwiazdy podobnej do Słońca (typ gwiazdowy G5V) krążą cztery planety o masach zbliżonych do masy Neptuna. Wyjątkowość tego układu tkwi w okresach obiegu planet – znajdują się one w idealnym rezonansie. W czasie ośmiu orbit planety Kepler-223b, Kepler-223c wykonuje sześć obiegów, Kepler-223d cztery, a Kepler-223e trzy. W Układzie Słonecznym jest nieco większy bałagan: obserwujemy rezonans 2:3 pomiędzy okresami obiegu Plutona i Neptuna, zbliżony do rezonansu 2:1 stosunek okresów Urana i Neptuna, a także rezonans 1:2:4 dla księżyców Jowisza: Ganimedesa, Europy i Io.

Pozostaje pytanie, czemu w niektórych układach jest większy, a w innych mniejszy porządek, i czy układ Kepler-223 jest stabilny w długich skalach czasowych, ponieważ wiadomo, że planety mogą migrować (zmieniać orbity) pod wpływem wzajemnego oddziaływania w układzie.

*Michał BEJGER*

## Niebo w grudniu

Astronomiczna zima rozpocznie się 21 XII: odtąd noc w Polsce zaczną się systematycznie skracać, warto zatem mimo mrozów poświęcić czas na obserwację nieba. W godzinach wieczornych w Mikołajki, czyli 6 XII, patrząc w kierunku zachodniego nieba, będzie można zaobserwować Neptuna w odległości zaledwie  $0,7^\circ$  na południe od Księżycy. Oba ciała niebieskie znajdą się na tle gwiazdozbioru Wodnika.

Grudzień to jeden z najlepszych miesięcy do obserwacji meteorów, gdyż zobaczymy aż 5 rojów. Już od 27 XI do 17 XII będzie można wypatrywać roju Monocerotydów, których maksymalna aktywność przypadnie na 9 XII. Radiant dla tych meteorów znajduje się w gwiazdozbiore Jednorozca (rektascensja  $6,7$  h, deklinacja  $+8^\circ$ ). Rój ten, związany z kometą D/1917 F1 Mellish, charakteryzuje się niską aktywnością wynoszącą raptem 2 meteory na godzinę, poruszające się z prędkościami około  $42$  km/s – jest zatem celem dla bardzo wytrwałych obserwatorów spadających gwiazd. Kolejnym grudniowym rojem są delta Hydrydy, widoczne od 3 do 15 XII, a najbardziej aktywne 12 XII. Meteory z tego roju mają swój radiant w gwiazdozbiore Hydry (rektascensja  $8,5$  h, deklinacja  $+2^\circ$ ). Obfitość Hydryd to około 3 meteory na godzinę, a ich prędkości wynoszą około  $60$  km/s. Najbardziej znany i najaktywniejszy rój grudniowego nieba to Geminidy, które obserwować można od 4 do 17 XII, z maksimum 14 XII. Współrzędne radiantu to rektascensja  $7,5$  h, deklinacja  $+33^\circ$ . Znajduje się on w sąsiedztwie Kastora, czyli jednej z najjaśniejszych ( $1,9^m$ ) gwiazd konstelacji Bliźniąt. Białe meteory z roju Geminidów poruszające się z raczej niskimi prędkościami (około  $35$  km/s) zdecydowanie nadrabiają liczebnością, gdyż w ciągu godziny można zaobserwować nawet 120 pozostawionych przez nie śladów.

Rojem wymagającym nieco większej cierpliwości, jednak zdecydowanie wartym uwagi, widocznym od 12 do 23 XII są Coma Berenicydy (rektascensja  $11,7$  h, deklinacja  $+18^\circ$ ). Radiant roju w trakcie jego największej aktywności przesuwa się na tle gwiazdozbiorów Lwa i Warkocza Bereniki. Największej aktywności tego roju wynoszącej około 3 śladów meteorów na godzinę, poruszających się z dużymi prędkościami około  $65$  km/s, można się spodziewać 16 XII. Dla tych, którzy chcą wykorzystać na obserwacje okolice Bożego Narodzenia, polecamy Ursydy, widoczne od 17 do 26 XII, z największą aktywnością 22 XII. Ich radiant o rektascensji  $14,5$  h i deklinacji  $+76^\circ$  położony jest w konstelacji Małej Niedźwiedzicy, a dokładniej w rejonie gwiazdy Kochab ( $\beta$  UMi). Aktywność roju to około 10 meteorów na godzinę, ale zdarzało się nawet 100, np. w roku ich odkrycia, czyli w 1945. Ursydy są związane z kometą 8P/Tuttle, której okres obiegu wokół Słońca wynosi 13,6 roku.

Planując grudniowe obserwacje, warto pamiętać o pełni Księżycy, przypadającej na 14 XII. Ci, którzy fotografowali „super Księżyc” w październiku lub listopadzie, mają teraz trzecią i ostatnią już w tym roku okazję obserwacji tego zjawiska.

Zwyczajowo w grudniu zamieszczamy także informację o pierwszej gwiazdce widocznej 24 XII, której można szukać już przed godziną 16. Na zachodnim niebie będzie to Wega z gwiazdozbioru Lutni, kilka minut po niej na niebie północno-wschodnim pojawi się Kapella z gwiazdozbioru Woźnicy. Obie, mając jasności w okolicach  $0^m$ , będą więc obiektami łatwymi do szybkiego znalezienia.

*Karolina BĄKOWSKA*



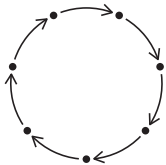
# Okrągły stół i trójkąt

Joanna JASZUŃSKA

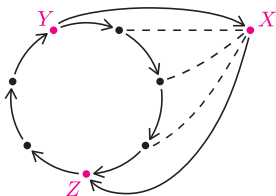
*Turniej* to zestaw rozgrywek pomiędzy pewną liczbą graczy, w którym każdy gra dokładnie jeden mecz z każdym z pozostałych i nie ma remisów. Jeśli zawodnik wygrał wszystkie swoje mecze, nazwiemy go *zwycięzcą*.

*Cykl* to taki ciąg co najmniej trzech różnych zawodników, w którym każdy wygrał z następnym, a ostatni z pierwszym (rys. 1). *Trójkąt* to cykl o długości trzy.

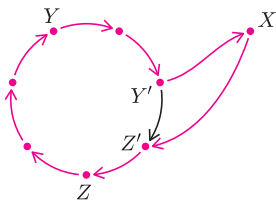
$A \rightarrow B$  oznacza, że  $A$  wygrał z  $B$ .



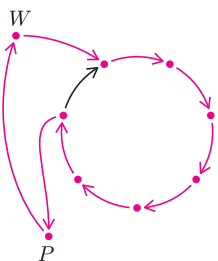
Rys. 1. Uczestnicy cyklu przy okrągłym stole; każdy wygrał z osobą siedzącą na lewo od niego.



Rys. 2



Rys. 3. Cykl dłuższy o 1 od cyklu  $C$



Rys. 4. Cykl dłuższy o 2 od cyklu  $C$

1. Wykaż, że w każdym turnieju istnieje zwycięzca lub istnieje trójkąt.

2. Wykaż, że jeśli w turnieju nie ma trójkąta, to wszystkich graczy można ustawić w rzędzie tak, że każdy wygrał ze wszystkimi zawodnikami stojącymi za nim.

3. Udowodnij, że jeśli w turnieju istnieje cykl o więcej niż trzech graczach, to istnieje trójkąt.

4. Udowodnij, że po każdym turnieju albo można wszystkich uczestników ustawić w cykl, albo można ich tak podzielić na dwie grupy  $\mathcal{G}$  i  $\mathcal{D}$ , że każdy z grupy  $\mathcal{G}$  wygrał z każdym z grupy  $\mathcal{D}$ .

## Rozwiązania

**R1.** Niech  $M$  będzie zawodnikiem, który wygrał maksymalną liczbę meczów. Jeśli wygrał wszystkie, jest zwycięzcą. W przeciwnym wypadku istnieje zawodnik  $W$ , który wygrał z  $M$  oraz istnieje przynajmniej jeden zawodnik pokonany przez  $M$ .

Gdyby gracz  $W$  zwyciężył ze wszystkimi, którzy przegrali z  $M$ , to  $W$  wygrałby więcej meczów niż  $M$  (bo pokonał też  $M$ ) – sprzeczność. Zatem  $W$  przegrał z którymś z graczy, z którymi wygrał  $M$ , czyli istnieje trójkąt.  $\square$

**R2.** Z zadania 1 wiemy, że skoro nie ma trójkąta, to istnieje zwycięzca  $Z_1$ ; ustawmy go na początku rzędu. W gronie pozostałych graczy również nie ma trójkąta, więc istnieje gracz  $Z_2$ , który pokonał ich wszystkich (ale nie  $Z_1$ ) – ustawmy go na drugim miejscu rzędu. Kolejnych graczy ustawiamy analogicznie.  $\square$

**R3.** Niech  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1$  będzie cyklem, gdzie  $k > 3$ . Rozważmy mecz  $A_1 - A_3$ . Jeśli wygrał go gracz  $A_3$ , otrzymujemy trójkąt  $A_1 A_2 A_3$ . W przeciwnym przypadku otrzymujemy cykl  $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1$  o  $k - 1$  graczach. Jeśli jest ich więcej niż 3, postępujemy dalej analogicznie.  $\square$

**R4.** Jeśli nie ma żadnych cykli, to nie ma trójkątów i na mocy zadania 1 istnieje zwycięzca. Wówczas niech grupa  $\mathcal{G}$  składa się tylko z niego, a grupa  $\mathcal{D}$  z pozostałych zawodników.

Jeśli istnieją cykle, to rozważmy cykl  $C$  o maksymalnej długości. Jeżeli  $C$  zawiera wszystkich graczy, to teza jest spełniona. W przeciwnym przypadku istnieje osoba  $X$ , która nie należy do cyklu  $C$ .

Wykażemy, że  $X$  albo wygrał ze wszystkimi zawodnikami z  $C$ , albo ze wszystkim przegrał. Załóżmy przeciwnie, że  $X$  przegrał z  $Y$ , ale wygrał z  $Z$  z cyklu (rys. 2). Wówczas w cyklu  $C$  na „drodze” od  $Y$  do  $Z$  istnieją tacy dwaj *kolejni* zawodnicy  $Y', Z'$ , że  $X$  przegrał z  $Y'$ , ale wygrał z  $Z'$ . Wtedy cykl  $C$  można wydłużyć, dołączając zawodnika  $X$  pomiędzy  $Y'$  a  $Z'$  (rys. 3), sprzecznie z założeniem o maksymalności  $C$ .

Jeżeli istnieją zawodnicy  $W$  i  $P$  spoza cyklu  $C$ , którzy odpowiednio wygrali i przegrali ze wszystkimi z cyklu, to  $W$  wygrał z  $P$ , gdyż w przeciwnym razie cykl można by wydłużyć o tych dwóch graczy w sposób przedstawiony na rysunku 4.

Niech do grupy  $\mathcal{G}$  należą wszyscy zawodnicy, którzy wygrali z graczami z  $C$ , do  $\mathcal{D}$  ci, którzy przegrali z uczestnikami  $C$ . Wszystkich graczy z cyklu  $C$  dołączmy do dowolnego spośród zbiorów  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{D}$ . W ten sposób otrzymujemy żądany podział.  $\square$

## Zadanie domowe

5. Wykaż, że po każdym turnieju wszystkich jego uczestników można ustawić w rzędzie tak, że każdy wygrał z zawodnikiem stojącym bezpośrednio za nim.