


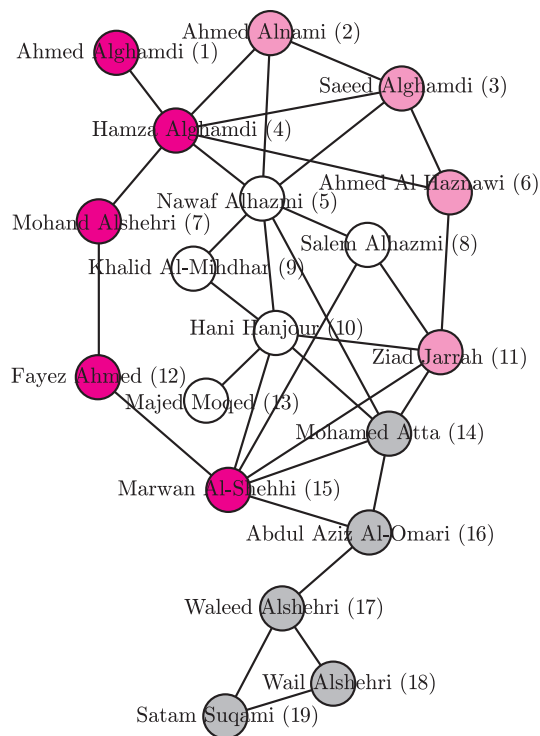




ISSN 1643-1992  
P-ISSN 1643-1992  
E-ISSN 1643-1992

## SPIS TREŚCI NUMERU 10 (509)

Złożone i proste <i>Paweł Góra</i>	str. 1
Czy każdy problem da się rozwiązać? <i>Wojciech Czerwiński</i>	str. 4
Bajka o Gadającym Neutrinie	str. 7
Punkty libracji trzech ciał i twierdzenie KAM <i>Henryk Żołądek</i>	str. 8
Czy Ziemia jest płaska? A może jednak? <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 10
Od Prouheta–Tarry’ego–Escotta do Thuego–Morse’a <i>Karol Gryszka</i>	str. 12
Liczby zespolone i kwaterniony <i>Zbigniew Marciniak</i>	str. 14
 <b>Zadania</b>	str. 18
Informatyczny kącik olimpijski (98): Świąteczny łańcuch <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 19
 Genetyka molekularna wobec paleontologii <i>Magdalena Fikus</i>	str. 20
Aktualności	str. 21
Klub 44	str. 22
Prosto z nieba: Akcelerator w centrum Galaktyki	str. 24
Niebo w październiku	str. 24
 Budowle z klocków <i>Joanna Jaszewska</i>	str. 25



W następnym numerze projektujemy rozbijanie sieci terrorystycznych

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerna, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Tomasz Kazana, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Podpunkt; rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl) lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

# Złożone i proste

Paweł GORA\*

Gdy mówimy, że coś jest *złożone*, zazwyczaj chcemy wyrazić, że jest w jakimś sensie skomplikowane, nietrywialne, składa się z wielu prostszych elementów. W nauce, szczególnie w matematyce i informatyce, jest wiele rodzajów złożoności:

- złożoność obliczeniowa (czasowa lub pamięciowa) algorytmów: ilość zasobów (czasu, pamięci) potrzebnych do algorytmicznego rozwiązania danego problemu, w zależności od rozmiaru danych wejściowych,
- złożoność informacyjna Kołmogorowa: długość najkrótszego programu generującego dane słowo,
- złożoność cyklomatyczna: stopień skomplikowania programu komputerowego, liczba możliwych ścieżek wykonania kodu źródłowego.

Czy istnieją definicje i miary złożoności na tyle ogólne, aby dla wszystkich rzeczywistych lub abstrakcyjnych bytów jednoznacznie ocenić, czy coś jest złożone, czy nie? Wydaje się, że jest zbyt dużo skomplikowanych struktur, które mają ze sobą niewiele wspólnego, aby takie uniwersalne definicje i miary miały sens. Okazuje się, że istnieje dziedzina nauki o nazwie *złożone systemy* (ang. *complex systems*), zajmująca się badaniem właśnie takich pozornie zupełnie różnych struktur, mających jednak specyficzne cechy powodujące, że struktury te i procesy z nimi związane określa się jako *złożone*. Z uwagi na różnorodność badanych systemów trudno nawet zdefiniować tę dziedzinę i systemy będące przedmiotem jej badań. W wielu pracach naukowych przyjmuje się dość ogólną definicję:

*Złożony system to system składający się z wielu komponentów będących w interakcji powodującej występowanie emergentnych własności systemu.*

Przedstawiona definicja jest (celowo) nieprecyzyjna, nie mówi, jak dużo ma być komponentów systemu, czym są emergentne własności i interakcja. Istnieją mniej lub bardziej ogólne wersje tej definicji oraz zupełnie odmienne (czasem zamiast ścisłej definicji podaje się przykłady systemów uważanych za złożone oraz ich wspólne cechy powodujące tę złożoność). W większości definicji występują takie pojęcia jak: *wiele komponentów*, *interakcja*, *emergencja*. Pod tym ostatnim pojęciem kryje się istota złożonych systemów, emergencja oznacza, że „całość to więcej niż suma części”. Dla matematyków może być to zaskakujące, przecież  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ! Więc jak to możliwe? Komponenty złożonych systemów są dużo prostsze niż całe systemy, to samo dotyczy ich pojedynczych interakcji – zazwyczaj nie są one skomplikowane. To kolektywna interakcja wielu prostszych elementów powoduje, że cały system jest bardziej skomplikowany niż elementy składowe, czy nawet ich suma, ale bez interakcji. Przyjrzyjmy się przykładom złożonych systemów.

Społeczeństwo – grupa ludzi, których interakcja może prowadzić do wybuchu wojen, epidemii, powstawania nowych pomysłów, czy budowy skomplikowanych urzędów (które też mogą być złożone, np. komputery, samochody i samoloty składają się z wielu prostszych części, które same nie są w stanie wiele zrobić, a złożone w odpowiednie konfiguracje potrafią kolektywnie sprawić, że samoloty latają, samochody jeżdżą, a komputery wykonują skomplikowane obliczenia). Czasem jeden człowiek sam nie potrafi rozwiązać pewnego bardzo trudnego problemu, np. matematycznego. Grupa 100 świetnych matematyków również może sobie nie poradzić, jeżeli będą oni pracować osobno, nawet gdy zsumujemy wyniki samodzielnej pracy każdego z nich, to i tak nie znajdziemy w nich rozwiązania. Jednak kiedy zaczną oni współpracować, wymieniać się pomysłami (czyli będą w interakcji), to ich wiedza może się świetnie uzupełniać, wyniki jednej osoby mogą zainspirować pozostałych, pokonanie jednej z przeszkód spowoduje, że kolejna osoba będzie mogła wykorzystać swoją wiedzę, aby wykonać kolejny krok na drodze do rozwiązania problemu. W taki sposób funkcjonuje nauka i (emergentnie) pojawia się postęp techniczny.

Inne przykłady emergentnych zjawisk w społeczeństwie dotyczą giełdy i rynków finansowych: interakcja wielu użytkowników poprzez handel produktami może prowadzić do powstawania bańki spekulacyjnej, kryzysu finansowego. Sytuacja na giełdzie zależy od wielu czynników zewnętrznych, np. sytuacji gospodarczej. Jest to przykład ważnej cechy wielu złożonych systemów – są one otwarte, może na nie wpływać otoczenie, a one mogą się adaptować do jego warunków. Systemy mające tę cechę określa się mianem *złożone systemy adaptacyjne*.



\*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Kolejnym przykładem jest ruch drogowy: interakcja ludzi i używanych przez nich pojazdów może prowadzić do wypadków i zatorów. Ciekawe jest to, że zatory w ruchu drogowym można rozładowywać oraz im przeciwdziałać za pomocą innego złożonego systemu: systemu zarządzania ruchem, w którym programy sterujące sygnalizacją świetlną na skrzyżowaniach mogą ze sobą współpracować (np. wymieniać informacje o natężeniu ruchu), aby nie dopuścić do powstania zatoru.

Sam człowiek, element składowy społeczeństwa, też jest złożonym systemem: jego organizm składa się z wielu narządów, które muszą współpracować, aby podtrzymać życie, a narządy zbudowane są z komórek, które również są w interakcji. Dalej: komórki zbudowane są z substancji chemicznych, które powstają poprzez reakcję (interakcję) jeszcze prostszych substancji. Przykład ten ilustruje następną cechę złożonych systemów – hierarchiczność (w tym przypadku: od substancji chemicznych i komórek do człowieka i społeczeństwa).

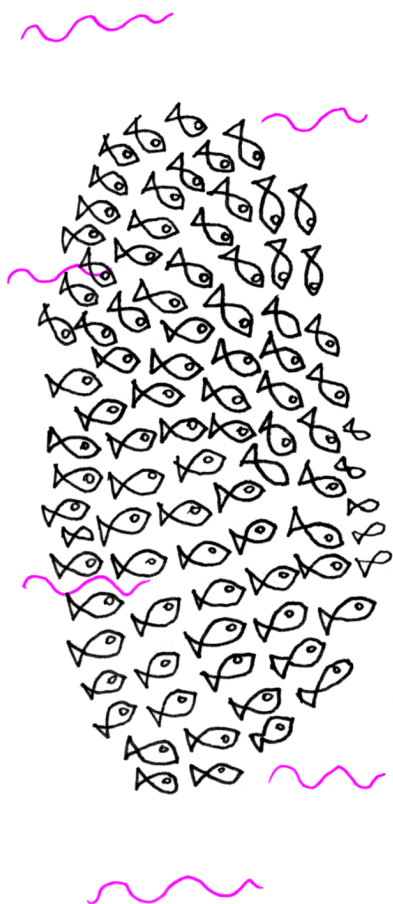
Skąd u człowieka biorą się tak złożone cechy jak inteligencja, świadomość i emocje? Przypuszcza się, że wynikają one z prostych interakcji neuronów w mózgu. A genom ludzki? Poprzez interakcje w sieciach regulatorowych kontrolowana jest ekspresja genów, co decyduje o budowie i złożoności ludzkiego organizmu.

Złożone systemy nie dotyczą jedynie ludzi, występują też w świecie zwierząt i roślin. Proste interakcje między zwierzętami powodują, że podróżują one w zorganizowanych strukturach, takich jak ławice ryb, klucze ptaków, a kolonia mrówek może wybudować mrowisko i dostarczać do niego pożywienie. Na przykładzie ludzi i zwierząt widać, że z interakcją związane jest przekazywanie i przetwarzanie informacji (np. mowa, feromony, informacja wizualna), co jest kolejną wspólną cechą wielu złożonych systemów.

Złożone systemy nie dotyczą też jedynie istot żywych (choć często sprawiają wrażenie, że są „żywe”), np. interakcja poprzez siły grawitacji może formować tak skomplikowane struktury, jak Układ Słoneczny. Problem wyznaczenia toru ruchu  $n$  ciał oddziałujących zgodnie z prawami grawitacji Newtona trudno rozwiązać analitycznie z uwagi na nieliniowość interakcji (nie da się ich opisać za pomocą układu równań liniowych), a także numerycznie – z uwagi na wrażliwość na warunki początkowe (niewielka zmiana parametrów układu, jego komponentów lub interakcji może powodować całkowicie inną jego ewolucję). Zarówno nieliniowość, jak i wrażliwość na warunki początkowe to typowe własności złożonych systemów.

Złożone systemy nie dotyczą też jedynie bytów fizycznych. Przykładem abstrakcyjnego złożonego systemu, który ma wiele zastosowań praktycznych, są automaty komórkowe. Zostały one odkryte przez Stanisława Ulama i Johna von Neumanna w Los Alamos w latach 40. XX wieku, a potem spopularyzowane m.in. poprzez *Grę w życie* Johna Conwaya. Składają się ze zbioru komórek rozmieszczonych na regularnej siatce (np. na płaszczyźnie), które w każdej chwili mają określony stan pochodzący ze skończonego zbioru możliwych stanów. Ewolucja automatu odbywa się w dyskretnych krokach, w każdym kroku stan danej komórki zależy od stanów pewnego podzbioru komórek (komórki są więc w interakcji). W definicjach automatów komórkowych ten podzbiór zazwyczaj pochodzi z otoczenia komórki, a reguły przejścia pomiędzy stanami są deterministyczne i takie same dla wszystkich komórek. Są jednak wyjątki, np. model Nagela–Schreckenberga (model Na-Sch), którego opis pojawi się w dalszej części artykułu.

Z uwagi na interakcje często trudno jest dokładnie przewidzieć ewolucję automatu komórkowego bez jej obserwacji, np. poprzez uruchomienie symulacji komputerowej. Cechą tę, znaną jako obliczeniowa nieredukowalność, wprowadził w książce *A New Kind of Science* Stephen Wolfram. Jest to kolejna wspólna cecha wielu złożonych systemów. Inną własnością, widoczną świetnie na przykładzie automatów komórkowych, jest współistnienie cech (samo)organizacji i dezorganizacji (chaosu). Choć ewolucja systemu może wyglądać na chaotyczną, można w niej odnaleźć uporządkowane wzorce, dające wrażenie, że system jest w pewien sposób zorganizowany pomimo nieskoordynowanych interakcji i braku



#### Rozwiązanie zadania M 1509.

Chcemy obliczyć sumę wartości  $\min(x, y, z)$  dla wszystkich trójek  $(x, y, z)$  liczb naturalnych nie większych niż 10. Rozważmy „sześciiany”

$$A_n = \{n, n + 1, \dots, 10\} \times \{n, n + 1, \dots, 10\} \times \{n, n + 1, \dots, 10\}$$

dla  $n = 1, 2, \dots, 10$ . Wówczas  $\min(x, y, z)$  jest równe liczbie sześcianów, do których należy punkt  $(x, y, z)$ . W takim razie

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{10} \sum_{y=1}^{10} \sum_{z=1}^{10} \min(x, y, z) &= \\ &= \sum_{x=1}^{10} \sum_{y=1}^{10} \sum_{z=1}^{10} |\{n : (x, y, z) \in A_n\}| = \\ &= \sum_{n=1}^{10} |A_n| = \sum_{n=1}^{10} n^3. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru na sumę sześcianów, otrzymujemy, że szukana wartość jest równa

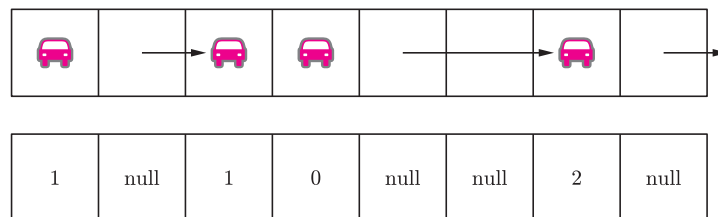
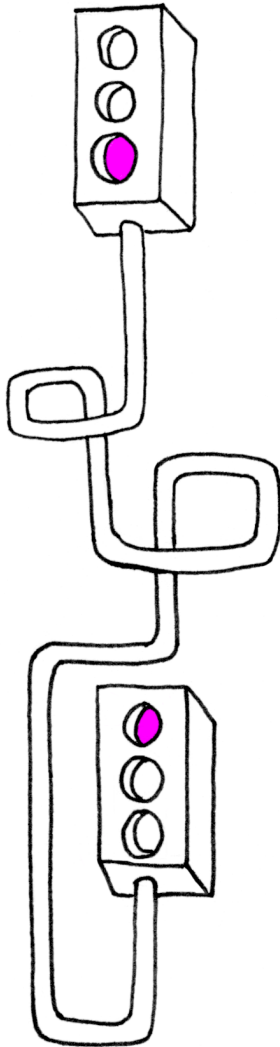
$$\left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 = 55^2 = 3025.$$

centralnego sterowania. Złożone systemy są więc czymś pomiędzy układami prostymi, w których wszystko można szybko i precyzyjnie obliczyć, a układami losowymi, dla których można prowadzić głównie rozważania statystyczne.

Jak widać, złożone systemy występują w wielu obszarach, od skali mikro do makro. Jest to intrygujące, gdyż niewiele jest w nauce przypadków tak dużej uniwersalności pojęć i praw! Fascynujące jest też to, że wiele złożonych systemów ma znacznie więcej wspólnych cech, niż sugeruje to ich definicja, a przez to w badaniach dotyczących pewnych złożonych systemów czasami korzysta się z innych!

Przykładem może być wspomniany już ruch drogowy, którego modelowaniem zajmuje się naukowo autor niniejszego artykułu. W zjawisku tym wielu agentów (kierowcy, a w przyszłości – pojazdy autonomiczne) stara się osiągnąć cel, którym zazwyczaj jest szybkie dotarcie do punktu docelowego, korzystając z dostępnej infrastruktury drogowej i przestrzegając przepisów. Agenci współdzielą infrastrukturę, więc są w interakcji ze sobą i z otoczeniem, np. dostosowują prędkość do warunków jazdy, wyprzedzają inne pojazdy. Te interakcje mogą powodować emergentne zjawiska: wypadki, powstawanie zatorów. W przyszłości, gdy powszechna będzie komunikacja pomiędzy pojazdami autonomicznymi (komunikacja V2V – *vehicle-to-vehicle*) oraz pojazdami i infrastrukturą (V2I – *vehicle-to-infrastructure*), możliwych interakcji będzie więcej, np. synchronizowanie manewrów, informowanie o zamiarze wyprzedzania, zbliżaniu się do skrzyżowania. Emergentnych sytuacji będzie też więcej (i będą zależeć od algorytmów jazdy zaimplementowanych w komputerach pokładowych pojazdów), np. wspólna jazda w stabilnym układzie, podobnie do lotu klucza ptaków lub ruchu ławicy ryb.

Ruch drogowy może być modelowany matematycznie za pomocą innego złożonego systemu i to relatywnie bardzo prostego: automatu komórkowego! Przykładem może być wspomniany już model Na-Sch, w którym automat komórkowy reprezentowany jest jako jednowymiarowa, cykliczna taśma podzielona na komórki. Czas jest dyskretny, w każdym kroku komórki mogą być puste (stan *null*) lub zajęte przez 1 pojazd (stan to prędkość pojazdu). Pojazdy poruszają się w jednym kierunku (gdy dotrą do końca taśmy, pojawiają się na jej początku) z dyskretnymi prędkościami odpowiadającymi liczbie komórek, o które pojazd się przemieścił.



Automat komórkowy ilustrujący model Na-Sch – stan komórek to prędkość, z jaką pojazd się przemieścił.

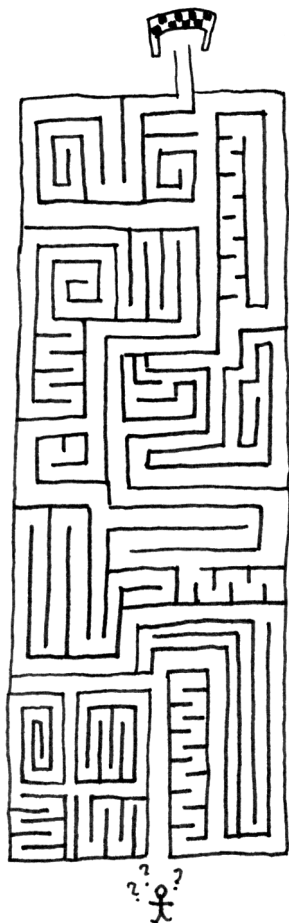
Położenia i prędkości pojazdów w każdym kroku obliczane są zgodnie z czteroetapową regułą ruchu. Najpierw każdy pojazd stara się przyspieszyć o 1 jednostkę, ale tak, aby nie przekroczyć maksymalnej dopuszczalnej prędkości (w oryginalnym modelu Na-Sch było to 5 komórek). Drugi etap to warunek bezpieczeństwa: prędkość jest redukowana tak, aby na pewno nie wjechać w inny pojazd. Trzeci etap wprowadza niedeterminizm: z pewnym prawdopodobieństwem prędkość obliczona w pierwszych dwóch krokach jest redukowana o 1 jednostkę. W czwartym etapie pojazd przemieszcza się do przodu o liczbę komórek odpowiadającą obliczonej prędkości.

Model Na-Sch stał się bardzo popularny i doczekał się wielu rozszerzeń (np. wiele pasów ruchu, model dwuwymiarowy, graf skierowany), gdyż pomimo swojej prostoty modeluje bardzo złożony ruch drogowy z dużą zgodnością z rzeczywistością oraz wyjaśnia ważne zjawiska, np. spontaniczne formowanie się korków. Pokazuje to uniwersalność złożonych systemów i olbrzymie możliwości w nich ukryte.

# Czy każdy problem da się rozwiązać?

Wojciech CZERWIŃSKI

Czy każdy problem da się rozwiązać? Pesymiści odpowiedzą, że nie – życie nie jest łatwe. A optymiści? Być może niektórzy powiedzą, że przy odpowiednim podejściu tak. Nie będziemy jednak z nimi dyskutować, bo Czytelnicy *Delty* dobrze wiedzą, że nie chodzi nam tutaj przecież o życiowe problemy. Trzeba więc sprecyzować pytanie: co uważamy za problem i czym miałyby być jego rozwiązanie?



Przyjrzymy się najpierw kilku przykładom problemów, którymi będziemy się zajmować.

1. Dana jest liczba naturalna, czy jest to liczba pierwsza?
2. Dana jest liczba naturalna, oblicz jej kwadrat.
3. Dane jest słowo, czy jest ono palindromem (palindrom to słowo, które brzmi tak samo czytane od tyłu, np. kajak)?
4. Dane jest słowo, oblicz, ile ma różnych liter.
5. Dana jest liczba rzeczywista, oblicz jej pierwiastek.
6. Dany jest graf, czy z każdego wierzchołka da się przejść do każdego?

Już na tych przykładach możemy zauważyć, że nasze problemy są różnorodnych rodzajów. Jedne domagają się jedynie odpowiedzi TAK lub NIE, inne natomiast chcą, żeby podać im jakiś bardziej skomplikowany obiekt, często liczbę. Pierwszy rodzaj problemów będziemy nazywać *problemami decyzyjnymi*, a drugi *problemami obliczeniowymi*. Wśród naszych przykładów problemy decyzyjne mają numery 1, 3 i 6, a problemy obliczeniowe 2, 4 i 5. Skupimy się głównie na problemach decyzyjnych.

Czym jednak ma być rozwiązanie takiego problemu? Domyślni Czytelnicy pewnie już wiedzą: oczekiwanym rozwiązaniem jest program, który wczytuje wejście, np. liczbę naturalną, a na końcu swojego działania zwraca odpowiedź TAK lub NIE. Czy więc każdy problem da się rozwiązać? Okazuje się, że nie!

Najprostszy argument za tym, że istotnie nie każdy problem można rozwiązać, jest taki, że możliwych problemów jest więcej niż możliwych rozwiązań (czyli programów). To stwierdzenie może nam się wydać dziwne, przecież zarówno problemów, jak i programów jest nieskończenie wiele. Czy możemy w ogóle mówić, że jedna nieskończoność jest większa niż druga i co by to miało znaczyć? Możemy! Żeby to zrozumieć, musimy zagłębić się trochę w *teorię mocy*, dziedzinę matematyki, która zajmuje się wielkościami zbiorów. A teoria, którą zobaczymy, sama w sobie jest niezwykle ciekawa.

## Równoliczność

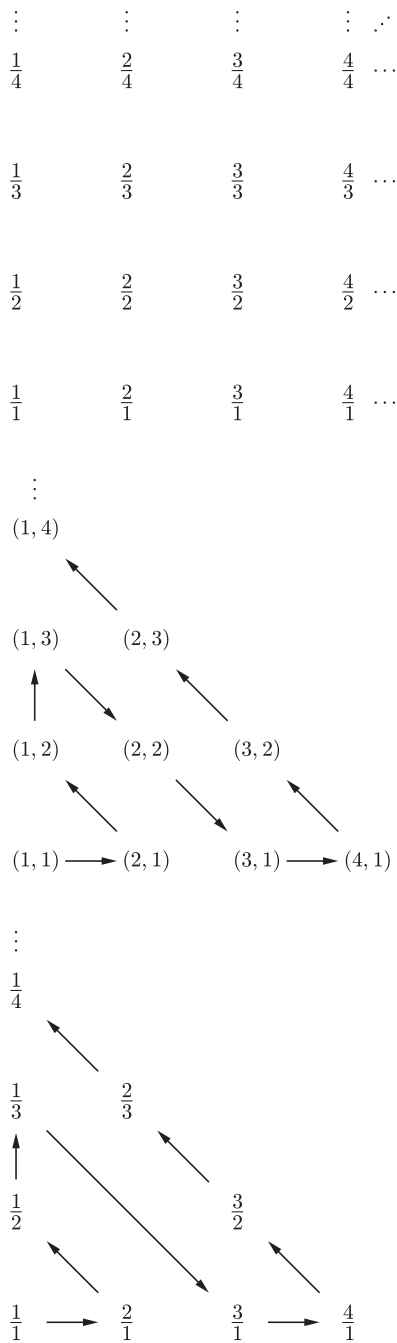
Dla dwóch zbiorów skończonych  $A$  i  $B$  intuicyjnie mówimy, że są równoliczne, jeśli po prostu wielkość jednego jest równa wielkości drugiego. Można jednak powiedzieć, że  $A$  i  $B$  są równoliczne, jeśli elementy  $A$  i elementy  $B$  da się połączyć w pary: w każdej parze jeden element z  $A$  i jeden z  $B$ , tak, żeby wszystkie elementy trafiły do którejś pary, ale żaden nie trafił do dwóch par. Okazuje się, że ta druga definicja jest właściwym spojrzeniem na sprawę i bardzo dobrze zachowuje się również dla zbiorów nieskończonych. Spójrzmy teraz na kilka przykładów nieskończonych zbiorów równolicznych. Czy zbiór liczb całkowitych dodatnich  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  i zbiór liczb całkowitych większych od dziesięciu  $B = \{11, 12, 13, \dots\}$  są równoliczne? Tak, łatwo zobaczyć, że można elementy obu zbiorów poustawiać w nieskończenie wiele par:  $(1, 11), (2, 12), (3, 13), \dots$ . To już może nam się wydać dziwne, przecież zbiór  $\{11, 12, 13, \dots\}$  powstał przez usunięcie ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots\}$  dziesięciu liczb:  $1, 2, \dots, 10$ , jak więc może być równoliczny? Może – taka jest nasza definicja, musimy po prostu pożegnać się z intuicją wziętą ze skończonych zbiorów, że jeśli usuwamy coś ze zbioru, to staje się on istotnie mniejszy. Teraz będą się działy rzeczy jeszcze dziwniejsze. Czy zbiór dodatnich liczb całkowitych  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  jest równoliczny ze zbiorem dodatnich liczb parzystych  $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ ? Nietrudno zauważyć, że tak, połączenie w pary wygląda następująco:  $(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots$ , każda liczba ze zbioru  $A$  jest w parze



**Rozwiązanie zadania M 1508.**  
Niech  $r_i, p_i$  i  $S_i$  oznaczają dla  $i = 1, 2, 3, 4$  odpowiednio promienie okręgów wpisanych, obwody i pola powstałych czterech trójkątów. Wiemy, że wówczas dla każdego  $i$  zachodzi równość  $S_i = \frac{1}{2} r_i p_i$ . W takim razie

$$\begin{aligned} q &\geq 2 \sum_{i=1}^4 r_i = 4 \sum_{i=1}^4 \left( \frac{S_i}{p_i} \right) > \\ &> 4 \sum_{i=1}^4 \left( \frac{S_i}{p} \right) = \frac{4S}{p}, \end{aligned}$$

co daje tezę.



z dwa razy większą liczbą ze zbioru  $B$ . Możemy teraz dokonać obserwacji, dzięki której później łatwiej będzie nam sprawdzać, czy pewien zbiór  $S$  jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych  $\mathbb{N}$  (zakładamy tu, że 0 też jest liczbą naturalną). Zauważmy mianowicie, że nieskończony zbiór  $S$  jest równoliczny z  $\mathbb{N}$  wtedy i tylko wtedy, gdy da się ustawić elementy  $S$  w nieskończony ciąg. Po pierwsze, jeśli istotnie  $S$  jest równoliczny z  $\mathbb{N}$ , to ustawienie w nieskończony ciąg jest łatwe: najpierw stoi element będący w parze z 0, potem element będący w parze z 1, potem element będący w parze z 2 itd. Z drugiej strony jeśli umiemy ustawić elementy  $S$  w nieskończony ciąg, to możemy połączyć je w pary w elementami  $\mathbb{N}$ : pierwszy element ciągu będzie w parze z 0, drugi będzie w parze z 1, a ogólnie  $k$ -ty element ciągu będzie w parze z liczbą naturalną  $k - 1$ .

Zastanówmy się teraz, czy zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$ . Nietrudno zobaczyć, że tak, elementy zbioru liczb całkowitych da się ustawić w nieskończony ciąg, na przykład w taki sposób:

$-1, 0, -2, 1, -3, 2, -4, 3, -5, 4, -6, 5, -7, 6, -8, 7, -9, 8, -10, 9, -11, 10, -12, 11, -13, 12, -14, 13, \dots$

na miejscach nieparzystych będziemy ustawiać coraz większe liczby nieujemne, a na miejscach parzystych coraz mniejsze liczby ujemne. Pokażemy teraz nawet więcej: że zbiór dodatnich liczb wymiernych  $\mathbb{Q}_+$  jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. To wygląda bardzo dziwnie, bo przecież liczb wymiernych wydaje się dużo więcej, przyjrzyjmy się jednak konstrukcji. Wyobraźmy sobie nieskończoną tablicę ułamków, gdzie w  $k$ -tej kolumnie i  $n$ -tym wierszu od dołu wpisujemy ułamek  $\frac{k}{n}$ . Pokażemy teraz, jak wszystkie elementy  $\mathbb{Q}_+$  ustawić w nieskończony ciąg. Będziemy chodzić po tablicy zygżakiem i dodawać nowe liczby wymierne do ciągu. Najpierw ustalmy trasę przemarszu. Zaczynamy z pola (1, 1), pójdziemy w prawo do (2, 1) i po skosie do (1, 2). Teraz w górę do (1, 3) i po skosie przez (2, 2) do (3, 1). Teraz w prawo do (4, 1) i po skosie przez dwa pola do (1, 4). W ten sposób kontynuujemy chodzenie po kolejnych skosach coraz dalszych od pola (1, 1). A jak tworzymy ciąg? Jeśli wchodzimy na pewne pole i ułamek przez nas zobaczony jest nową liczbą (czasem może się zdarzyć, że tę liczbę już widzieliśmy, np.  $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$ ), to dodajemy go na koniec i idziemy dalej. Czyli początkowe wartości nieskończonego ciągu wyglądają następująco:  $1/1 = 1, 2/1 = 2, 1/2, 1/3$  ( $2/2$  nie ustawiamy, bo  $2/2 = 1 = 1/1$  i ta liczba już jest w ciągu),  $3/1 = 3, 4/1, 3/2$  itd. Nietrudno zauważyć, że wszystkie dodatnie liczby wymierne zostaną kiedyś dodane do ciągu, bo nasz zygżak dojdzie w końcu do każdego ułamka. Co więcej, żadna liczba nie zostanie przydzielona więcej niż raz. Pokazaliśmy więc, że liczby naturalne i dodatnie liczby wymierne są równoliczne. Niewiele więcej wysiłku potrzeba, żeby pokazać, że zbiór wszystkich liczb wymiernych jest również równoliczny z  $\mathbb{N}$  (Czytelników Ambitnych zachęcamy do samodzielnego stworzenia odpowiedniego ciągu).

### Metoda przekątniowa

Czyż więc istnieją w ogóle zbiory nieskończone, które nie są równoliczne z  $\mathbb{N}$ ? Tak, i to jest treścią słynnej konstrukcji Geорга Cantora, który w roku 1891 wskazał pierwszy taki przykład. Konstrukcja zwana jest *przekątniową*, zaraz zobaczymy dlaczego. Metoda przekątniowa, czyli konstrukcje tego typu stały się standardem w matematyce, zresztą i w naszej historii jeszcze się pojawiają. Pokażemy teraz, że liczby rzeczywiste nie są równoliczne z liczbami naturalnymi, a konkretnie, że nie da się ustawić ich w ciąg. Wystarczy wykazać, że nawet liczb rzeczywistych, które zaczynają się od 0 i mają rozwinięcia dziesiętne po przecinku zawierające tylko zera i jedynki, nie da się ustawić w nieskończonym ciągu.

Przypuśćmy nie wprost, że jednak da się je ustawić w ciąg:  $r_1, r_2, r_3, \dots$

Przyjmijmy oznaczenie  $r_i[j]$  na  $j$ -tą cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby  $r_i$ . Skonstruujemy teraz liczbę  $r$ , która zawiera tylko zera i jedynki po przecinku, ale nie występuje w ciągu, co doprowadzi do sprzeczności. Zaczynamy zerem przed przecinkiem, a jej  $i$ -tą cyfrę po przecinku definiujemy jako  $1 - r_i[i]$ . Innymi słowy, zapewniamy, że  $i$ -ta cyfra  $r$  jest inna niż  $i$ -ta cyfra liczby  $r_i$ . Czy  $r$  może występować w naszym ciągu? Powiedzmy, że występuje, na pewnej pozycji o numerze  $n$ . Czyli  $r = r_n$ . Zaraz, ustaliliśmy jednak, że  $n$ -ta cyfra  $r$  jest różna od  $n$ -tej cyfry  $r_n$ . Zatem  $r \neq r_n$  i otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że wszystkie liczby występują w ciągu. Wykazaliśmy więc, że

W ogólności ta sama liczba może mieć dwa różne rozwinięcia dziesiętne, np.  $0,4999\dots = 0,5000\dots$ , jednak nie jest to możliwe wśród rozwinięć zawierających jedynie zera i jedynki.

zbiory liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  i naturalnych  $\mathbb{N}$  nie są równoliczne. Tak naprawdę to wykazaliśmy, że zbiór  $\mathbb{N}$  i zbiór nieskończonych ciągów zero-jedynkowych nie są równoliczne. A tak właściwie to wykazaliśmy nawet więcej: że zbiór nieskończonych ciągów zero-jedynkowych jest większy niż  $\mathbb{N}$ . Bo co oznacza, że nie można go ustawić w nieskończony ciąg? To, że jak byśmy nie wybrali nieskończonego ciągu nieskończonych ciągów zero-jedynkowych, to któreś ciągi zero-jedynkowe nie zostaną wybrane. Jeśli mamy  $N$  osób i  $K$  krzeseł i jakkolwiek byśmy nie wybrali  $K$  osób, by siadły na krzesłach, to pewne osoby będą stać, to znaczy, że  $N > K$ . Tę intuicję ze skończonych zbiorów możemy przenieść na zbiory nieskończone: nieskończonych ciągów zero-jedynkowych (i liczb rzeczywistych też) jest więcej niż liczb naturalnych. Pozostają tu pewne kłopoty techniczne, jednak da się je przewyciężyć i pokazać, że z taką definicją większego zbioru wszystko jest w porządku (pisaaliśmy o tym w *Delcie* 2/2016 w artykule *Czy trzeba dowodzić rzeczy oczywistych?*).

### Problem bez rozwiązania

Jak to wszystko wykorzystać do pokazania, że nie każdy problem da się rozwiązać? Zastanówmy się najpierw, ile jest programów zapisanych za pomocą skończonego alfabetu? Takich ustalonej długości jest, oczywiście, skończenie wiele. Nietrudno więc zauważyć, że wszystkie programy można ustawić w nieskończony ciąg: zaczynamy od najkrótszych, a dla tej samej długości ustawiamy alfabetycznie. A więc programów jest tyle co liczb naturalnych. A ile jest problemów? Skupmy się na problemach decyzyjnych dla liczb naturalnych, już tych będzie dużo. Zauważmy, że dla każdego podzbioru liczb naturalnych  $S \subseteq \mathbb{N}$  mamy inny problem decyzyjny: „Czy dana liczba naturalna  $n$  należy do zbioru  $S$ ?” A zatem problemów jest przynajmniej tyle, co podzbiorów liczb naturalnych. Zauważmy jednak, że można łatwo wskazać odpowiedniość między nieskończonymi ciągami zero-jedynkowymi a podziorami liczb naturalnych. Zbiorowi  $S \subseteq \mathbb{N}$  odpowiada ciąg, który ma jedynki dokładnie na miejscach o indeksach należących do  $S$ , a zera w pozostałych miejscach. A zatem problemów decyzyjnych jest przynajmniej tyle, co nieskończonych ciągów zero-jedynkowych, czyli więcej niż liczb naturalnych, czyli więcej niż programów. Tym samym wykazaliśmy, że nie dla każdego problemu decyzyjnego istnieje odpowiadający mu program!



Zastanówmy się jednak chwilę, czy to jest naprawdę satysfakcjonująca odpowiedź. Powinny nas tak naprawdę interesować nie dowolne problemy, tylko takie, które jesteśmy w stanie wyrazić. Wyrazić w jakiś rozsądny, skończony sposób. Czyli właściwie tytułowe pytanie powinno brzmieć: „czy każdy opisany w skończony sposób problem da się rozwiązać?” Tu jednak widać od razu mankamenty naszej metody. Sensownie opisywalnych problemów jest co najwyżej tyle, ile skończonych opisów, więc co najwyżej tyle, ile skończonych tekstów. A skończone teksty, jak już wcześniej mówiliśmy, dadzą się ustawić w nieskończony ciąg (coraz dłuższe, a równie długie alfabetycznie), więc jest ich tyle co liczb naturalnych. Czyli sensownie opisywalnych problemów i ich potencjalnych rozwiązań (programów) jest tyle samo.

Czyżby to jednak oznaczało, że całe wcześniejsze rozważania przydały nam się tylko do tego, żeby rozwiązać głupio sformułowany problem? Bynajmniej! Oprócz tego, że poznaliśmy kawałek ciekawej teorii matematycznej, to użyjemy teraz opisanej wyżej metody przekątniowej, żeby rozwiązać ten już właściwie sformułowany problem.

### Nierozstrzygalność

Zdefiniujemy teraz pewną dziwną funkcję, która posłuży nam później do dalszych konstrukcji. Zachęcamy Czytelników do tropienia podobieństw z konstrukcją Cantora. Rozważmy wszystkie programy, które na wejściu oczekują liczby naturalnej i na wyjściu zwracają też liczbę naturalną (zapewne inną). Istnieje ustawienie takich programów od najkrótszych do coraz dłuższych; niech będzie to ciąg  $P_1, P_2, P_3, \dots$ . Zdefiniujemy funkcję  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  jako  $F(n) = 1 + P_n(n)$ , czyli 1 plus to, co  $n$ -ty program zwraca, gdy dostaje liczbę  $n$ . Zastanówmy się teraz, czy istnieje pewien program, który oblicza naszą funkcję, czyli gdy dostanie liczbę  $k$  na wejściu, to zwróci liczbę  $F(k)$ . Zauważmy, że nie



#### Rozwiązanie zadania F 913.

Kulka, dzięki zapasowi energii kinetycznej, będzie wykonywała pracę  $qV$  przeciw siłom pola elektrycznego ( $q$  – ładunek kulki,  $V$  – przebyta przez nią różnica potencjałów). Energia kulki będzie malała zgodnie ze wzorem  $mv_1^2/2 - mv_2^2/2 = qV$ . Kulka dosięgnie sfery, jeżeli na jej powierzchni prędkość  $v_2$  jest nieujemna. Dla granicznego przypadku mamy  $v_2 = 0$ , więc  $mv_1^2/2 = qV$ , gdzie  $V$  – potencjał sfery (przyjeliśmy, że potencjał odległego punktu wystrzelenia kulki wynosi zero). Korzystając z tego, że potencjał sfery wyraża się jako  $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$ , gdzie  $R$  to promień sfery, otrzymamy  $R = 2qQ/4\pi\epsilon_0 mv_1^2 = 54$  cm. Jeżeli sfera będzie miała mniejszy promień, kulka do niej nie doleci. Zatrzyma się w odległości 54 cm od środka sfery i poleci z powrotem.

jest to możliwe. Przypuśćmy, że pewien program  $P_j$  oblicza funkcję  $F$ . Wtedy dla każdego  $i \in \mathbb{N}$  mamy  $P_j(i) = F(i)$ . Z drugiej jednak strony z definicji funkcji  $F$  otrzymujemy  $F(j) = 1 + P_j(j)$ . A zatem  $P_j(j) = F(j) = 1 + P_j(j)$ , sprzeczność. Już tu widać, że pewnych sensownych problemów nie da się rozwiązać, to znaczy nie istnieje program, który oblicza funkcję  $F$ . My szukamy jednak problemu decyzyjnego, który nie ma rozwiązania, a obliczenie funkcji  $F$  to problem obliczeniowy.

O taki jednak nietrudno. Udowodnimy, że słynny Problem Stopu jest nierozstrzygalny, to znaczy, że nie istnieje żaden program, który go rozwiązuje. Problem ten jest następujący: mamy dany program  $P$ , pytanie brzmi, czy  $P$  zatrzymuje się dla dowolnego wejścia, tzn. czy nie działa przypadkiem w nieskończoność dla któregoś z nich. Wróćmy jednak na chwilę do poprzedniego rozważanego zagadnienia: jak to – nie można obliczyć funkcji  $F$ ? Jeśli chcemy obliczyć  $F(j)$ , to wystarczy przeglądać programy od najkrótszych aż w końcu znajdziemy ten  $j$ -ty, czyli  $P_j$ . Wtedy każemy mu obliczyć  $P_j(j)$  i na końcu dodamy 1. Coś tu nie gra, gdzie jest błąd? Błąd jest w założeniu, że możemy znaleźć  $j$ -ty program. Trochę wynika on z tego, że nie zdefiniowaliśmy porządku, czym jest program. Nie każdy przecież tekst jest programem. Przyjmijmy więc, że program to poprawny tekst w pewnym ustalonym języku programowania. To można łatwo sprawdzić, są kompilatory różnych języków programowania, które sprawdzają, czy dany tekst jest istotnie kodem programu w wybranym języku. Wymagamy jednak jeszcze od programu, żeby zawsze się kończył i zwracał jakąś liczbę. Istotnie: to wymaganie jest konieczne, żeby w ogóle mówić, iż program definiuje jakąś funkcję. I tu właśnie jest haczyk. Gdybyśmy umieli sprawdzać, czy dany program zawsze się kończy, to umielibyśmy zrealizować opisaną wyżej procedurę obliczania funkcji  $F$ . Wiemy jednak, że funkcja  $F$  jest nieobliczalna, więc nie może istnieć metoda sprawdzania, czy dany program się zawsze kończy.

W ten sposób wykazaliśmy, że problem stopu istotnie jest nierozstrzygalny. Pierwszy zrobił to Alan Turing, jeden z pionierów informatyki, w 1936 roku. Przedstawiony dowód jest jednak nieco inny, bardziej bezpośrednio stosuje metodę przekątniową.

Problemów nierozstrzygalnych jest wiele, problem stopu nie jest tu jakiś wyjątkowy. Nierozstrzygalne są m.in. problem istnienia rozwiązań równań diofantycznych, obliczania złożoności Kolmogorowa (patrz *Delta* 8/2012, artykuł *Nieemożliwy skrót*), pytanie, czy da się ułożyć nieskończoną płaszczyznę z ustalonego zbioru kolorowych kafelków, tak by kolory do siebie pasowały i wiele, wiele innych. To jednak temat na zupełnie inną opowieść.

Zazwyczaj w Problemie Stopu pyta się, czy program  $P$  zatrzymuje się dla konkretnego wejścia, opisana wersja jest jednak równoważna, a nam wygodniej z niej korzystać.



## Bajka o Gadającym Neutrinie

Nigdy już się nie spotkamy – rzuciło Neutrino do Kwantu wyjątkowo twardego promieniowania gamma – i od razu uciekło ze Słońca. Osem minut później przeleciało na wskroś jądro Ziemi i śpiącego Autora tej bajki i pomknęło dalej w kierunku granic Galaktyki. Kwant nie odpowiedział, zajęty przeciskaniem się przez potworny tłok cząstek stłamszonych w środku Słońca. Dopiero za tysiąc lat miał szansę wydostać się na powierzchnię chromosfery, osłabiony, poźółkły, oklapły i wyglądający jak – za przeproszeniem – Foton. Ale wtedy to już szukaj wiatru w polu.

Neutrino zaś gnało przed siebie z szybkością światła. W tym samym czasie naukowcy kłócili się, czy Neutrino oprócz nazwy i odrobiny energii ma cokolwiek jeszcze. Nawet przyznali sobie Nagrodę Nobla za odkrycie, że Neutrino potrafi oscylować, więc masę mieć musi.

Ale skoro tak, to nie może mieć szybkości światła. Neutrino miało to w nosie. To znaczy, nosa nie miało, ale to też miało w nosie.

Może Cię dziwić, dlaczego zwracam Ci głowę losami Neutrina. Zastanów się chwilę. Co sekundę przez każdy centymetr kwadratowy przekroju Twojego ciała przenika 70 000 000 000 neutrin. Prędzej czy później ktoś odkryje, jak je wykorzystać w praktyce. A zaraz potem powiedzą Ci, że masz od tego płacić podatki. Wcale nie żartuję – z elektrycznością to jak było?

Co prawda, na Słońcu neutrina i kwanty gamma powstają razem w ekstremalnych warunkach, ale na Ziemi łatwiej o neutrina z rozpadu atomów potasu. Dlatego jeżeli ktoś zapyta Cię, co to jest – małe, czerwone, okrągłe i emituje neutrina – odpowiedz śmiało: Pomidor.

Krzysztof KICIAK

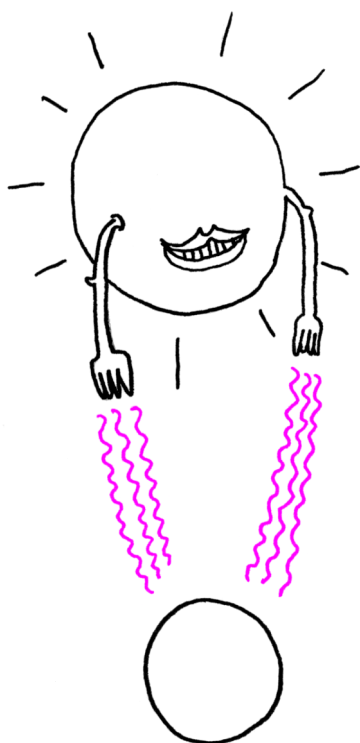


# Punkty libracji trzech ciał i twierdzenie KAM

Henryk ŻOŁĄDEK\*

W artykule „Stabilność układu słonecznego” zamieszczonym w *Delcie* 9/2016 zaanonsowałem zastosowanie teorii Kołmogorowa–Arnolda–Mosera (KAM) do problemu stabilności w zagadnieniu  $N$  ciał.

Na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Amsterdamie w 1954 roku Andriej Kołmogorow przedstawił swój pomysł na dowód zbieżności tzw. szeregów Poincarégo, które opisują ruch  $N$  ciał i które stanowią uogólnienie szeregów Fouriera, czyli sum sinusów i kosinusów o częstościach będących wielokrotnościami pewnej częstości podstawowej. Ścisłe dowody zbieżności szeregów Poincarégo zostały podane na początku lat 60. niezależnie przez Władimira Arnolda (ucznia Kołmogorowa) i Jurgena Mosera – twierdzenie KAM.



We właściwym sformułowaniu twierdzenia KAM mamy do czynienia z układem hamiltonowskim, czyli opisanym za pomocą funkcji Hamiltona, wyrażającej zależność całkowitej energii układu od pędów  $p_i$ , i położeń  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  cząstek. Równania opisujące ewolucję takiego układu są równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu na pędy oraz położenia i są równoważne układowi równań Newtona, które są równaniami drugiego rzędu na położenia. Funkcja Hamiltona ma następującą postać:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1,$$

gdzie  $\varepsilon H_1$  jest małym zaburzeniem, a  $H_0$  jest funkcją Hamiltona układu całkowalnego, czyli takiego, który – mówiąc najprościej – umiemy rozwiązać.

Ścisłej, własność całkowalności oznacza, że istnieją tzw. zmienne kąto-działanie  $(\varphi, I)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  (gdzie  $\varphi_i$  są kątami),  $I = (I_1, \dots, I_n)$ , w których odpowiedni układ różniczkowy przyjmuje szczególnie prostą postać:

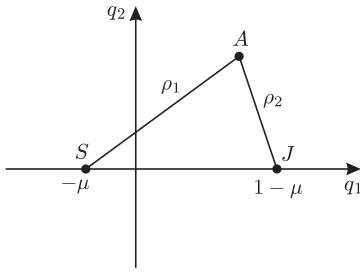
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(I), \quad \frac{dI}{dt} = 0.$$

Zatem ruch niezaburzony odbywa się na torusach  $\{I = \text{const}\}$  parametryzowanych przez kąty  $\varphi_i$ . Mamy  $\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i(I)t$  (z dokładnością do  $2\pi$ ). Jeśli układ częstości  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  $\omega_j = \omega_j(I)$ , jest rezonansowy, tj.  $\omega_i/\omega_j$  są liczbami wymiernymi, to ruch na torusie jest okresowy (układ po skończonym czasie wraca do punktu początkowego i ruch dalej odbywa się po tej samej trajektorii). W skrajnie przeciwnym przypadku każda trajektoria na torusie jest gęsta (tworzy obmotkę, przebiegając dowolnie blisko każdego punktu); mówimy wtedy, że ruch jest prawie okresowy. Jeśli częstości  $\omega_i$  zmieniają się w sposób regularny w zależności od zmian działań  $I_j$ , to na większości torusów ruch jest prawie okresowy.

Teza twierdzenia KAM mówi, że jeżeli spełniony jest pewien warunek regularności częstości (nieznikanie pewnych wyznaczników), to przy przejściu od układu niezaburzonego, opisanego przez  $H_0$ , do układu zaburzonego, opisywanego przez  $H$ , większość torusów niezmienniczych nie znika, tylko lekko się zaburza, i ruch na nich jest prawie okresowy. To, niestety, jeszcze nie gwarantuje stabilności, bo zawsze można tak dobrać dane początkowe  $\varphi(0)$  i  $I(0)$ , żeby ruch nie leżał na torusie niezmienniczym. Taka sytuacja ma miejsce dla liczby stopni swobody  $n \geq 3$ .

Istnieje jednak spektakularny przykład dla  $n = 2$ , gdzie teoria KAM daje tzw. stabilność w sensie Lapunowa. Jest to tzw. ograniczone zagadnienie 3 ciał. Możemy przyjąć, że te ciała to Słońce  $S$ , Jowisz  $J$  i Asteroida  $A$ . Przy tym zakłada się, że  $S$  i  $J$  poruszają się w stałej płaszczyźnie po orbitach kołowych ze stałą częstością, natomiast  $A$  porusza się w tej samej płaszczyźnie pod wpływem pola grawitacyjnego wytwarzanego przez  $S$  i  $J$ . Masa  $A$  jest zaniedbywalnie mała. Po przejściu do układu położeń  $q_1, q_2$  i odpowiednich pędów  $p_1, p_2$ , takich

\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1

że  $S$  i  $J$  spoczywają (oraz wyborze odpowiednich jednostek fizycznych), funkcja Hamiltona opisująca ruch  $A$  wygląda następująco:

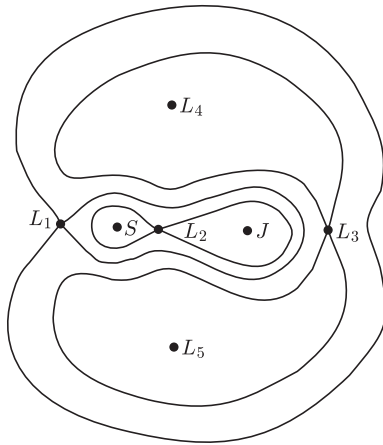
$$H = \frac{1}{2} (p_1 + q_2)^2 + \frac{1}{2} (p_2 - q_1)^2 - V(q_1, q_2),$$

$$V = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2},$$

gdzie  $\mu = \text{masa}(J)/(\text{masa}(S) + \text{masa}(J)) < 1/2$  a  $\rho_1$  i  $\rho_2$  są odległościami  $A$  od  $S$  i  $J$  odpowiednio (rys. 1).

Lagrange odkrył szczególne rozwiązanie zagadnienia 3 ciał przy dowolnych masach. Jego dowód jest na tyle geometryczny, że pozwolę sobie go zaprezentować.

Wystarczy wykazać, że siła działająca na każde ciało, pochodząca od przyciągania przez pozostałe dwa ciała, jest równoważona przez siłę odśrodkową skierowaną w kierunku wektora łączącego środek masy układu z danym ciałem. Aby uprościć wzory, dobieramy jednostki masy i długości tak, aby suma mas  $m_1 + m_2 + m_3$  i długość boku trójkąta wynosiły 1. Jeśli oznaczymy przez  $r_i$  odległość masy  $m_i$  od środka masy układu, a przez  $\omega$  prędkość kątową obracającego się układu, to wartość siły odśrodkowej działającej na ciało wynosi  $|\mathbf{F}_1| = m_1 \omega^2 r_1$ . Siła grawitacyjna działająca na ciało  $m_1$  to  $\mathbf{F}_2 = -Gm_1 m_2 \mathbf{x}_2 - Gm_1 m_3 \mathbf{x}_3$ , gdzie  $\mathbf{x}_j$  jest wektorem łączącym pierwsze ciało z  $j$ -ym, a  $G$  jest stałą grawitacyjną. Środek masy układu leży w  $\mathbf{x}_c = m_1 \cdot \mathbf{0} + m_2 \mathbf{x}_2 + m_3 \mathbf{x}_3$  (względem ciała  $m_1$ ), a zatem  $\mathbf{F}_2 = -Gm_1 \mathbf{x}_c$ . Z drugiej strony  $r_1 = |\mathbf{x}_c|$ . Wobec tego, przy  $\omega = \sqrt{G}$ , mamy  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ . Analogiczne rozumowanie zachodzi dla każdego z pozostałych ciał.



Rys. 2

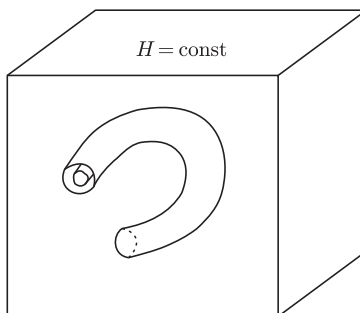
Punkty równowagi odpowiedniego układu hamiltonowskiego, nazywane punktami libracji, są punktami krytycznymi funkcji  $H$  (lokalne minima, maksima lub punkty siodłowe). Są one jednoznacznie wyznaczone przez punkty krytyczne funkcji  $V$ , której poziomice (krzywe, na których wartość  $V$  jest stała) są naszkicowane na rysunku 2. Mamy tzw. współliniowe punkty libracji  $L_1, L_2$  i  $L_3$  na osi  $q_1$  i tzw. trójkątne punkty libracji (nazywane też punktami libracji Lagrange'a)  $L_4$  i  $L_5$  w wierzchołkach trójkątów równobocznych o boku  $SJ$ . Punkty  $L_{1,2,3}$  są niestabilne dla układu Hamiltona już w przybliżeniu liniowym. Oznacza to, że umieszczona w tym punkcie Asteroida będzie pozostawać w spoczynku, ale dowolnie małe wychylenie jej z tego położenia spowoduje, że zacznie oddalać się od tego punktu, tak jak piłka położona na szczycie pagórka wytrącona z położenia równowagi zaczyna staczać się po zboczu.

W punktach  $L_4$  i  $L_5$  rozwinięcie funkcji  $H$  w szereg Taylora i zastosowanie pewnej subtelnej redukcji (pochodzącej od George'a Birkhoffa) daje nową funkcję Hamiltona postaci  $H_0 + \varepsilon H_1$ , do której daje się zastosować twierdzenie KAM. Ściślej, w przybliżeniu kwadratowym mamy

$$H = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + \dots, \quad \omega_j > 0,$$

gdzie  $I_j = \frac{1}{2} (\tilde{q}_j + \tilde{p}_j)$  a  $\tilde{q}_j$  i  $\tilde{p}_j$  są odpowiednimi funkcjami liniowymi (uogólnione położenia i pędy) zerującymi się w  $L_4$  (odpowiednio  $L_5$ ). Gdyby zamiast minusa w powyższym wzorze był plus, to funkcja  $H$  (która nie zmienia się w trakcie ruchu) miałaby lokalne minimum w  $L_4$  i własność stabilności byłaby automatyczna. Moglibyśmy też przyjąć  $H_0 = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2$ , a wyrazy wyższego rzędu potraktować jako zaburzenie  $\varepsilon H_1$ , ale wtedy nie byłoby spełnione założenie twierdzenia KAM o regularnej zależności częstości od działań.

Dlatego potrzebna jest dalsza redukcja, w wyniku której dostaniemy  $H = H_0 + \dots$  z  $H_0 = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + \sum \omega_{ij} I_i I_j$ . Przy tym należy odrzucić wartości parametru  $\mu$ , odpowiadające rezonansom niskich rzędów, tj.  $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3$ , oraz dodatkowej wartości  $\mu_c$ , związanej z warunkiem zdegenerowania zależności  $\omega$  od  $I$  (wyliczonej przez André Deprit i Andrée Deprit-Bartholomé).



Rys. 3

Teraz stabilność położenia równowagi  $L_{4,5}$  wynika z następujących rozważań. Ponieważ funkcja  $H$  jest całką ruchu (jest ona stała na rozwiązaniach), to jej poziomice  $\{H = h\}$  są niezmienniczymi 3-wymiarowymi hiperpowierzchniami w przestrzeni fazowej zmiennych  $q_1, q_2, p_1, p_2$ . Na każdej takiej poziomicy mamy dużo torusów niezmienniczych i każdy z nich rozcina poziomice na dwa obszary, wewnątrz i zewnątrz. Punkty z wewnątrz nie wychodzą z nich w trakcie ewolucji i pozostają blisko punktu równowagi (rys. 3).

Na koniec warto dodać, że są obserwowane gromady asteroid w trójkątnych punktach libracji związanych zarówno z parą Słońce–Jowisz, jak i z innymi parami. W przypadkach silnych rezonansów (jak te wyróżnione powyżej) takich asteroid brak.

# Czy Ziemia jest płaska? A może jednak?

Michał MIŚKIEWICZ\*

W artykule *Czy Ziemia jest płaska* (*Delta* 4/2016) pokazaliśmy, że sfera (będąca uproszczonym modelem powierzchni Ziemi) nie jest płaska, to znaczy nie daje się podzielić na fragmenty, z których każdy byłby izometryczny z pewnym fragmentem płaszczyzny. Przypomnijmy, że ta cecha odróżnia sferę od powierzchni bocznych walca i stożka. Pójdźmy więc dalej – czy jest możliwa taka gładka deformacja sfery, aby uzyskać powierzchnię płaską?

Pytanie jest o tyle zasadne, że sama Ziemia nie ma kształtu idealnej kuli, tylko elipsoidy obrotowej, a i to tylko w przybliżeniu. Rysunek 1 pokazuje przykład gładkiej deformacji, w efekcie której otrzymujemy sześcian z wygładzonymi kantami. Istotnie, jego ściany są fragmentami płaszczyzny, a w okolicach krawędzi można wykorzystać fragmenty powierzchni walca. Jedyne niepłaskie części są w okolicach wierzchołków, ale może i tego da się uniknąć?

Pokażemy, że taka deformacja nie jest możliwa. Aby to wykazać, wykorzystamy niezmiennik zwany *charakterystyką Eulera*. Można już było o nim przeczytać w artykule *Wzór Eulera i balony* (*Delta* 9/2005) oraz w *Deltoidzie* 3/2016. Przypomnijmy najpierw twierdzenie Eulera: dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi wzór

$$V - E + F = 2,$$

gdzie  $V$ ,  $E$ ,  $F$  to odpowiednio liczba jego wierzchołków, krawędzi i ścian. Oczywiście, wzór ten pozostanie słuszny, jeśli wielościan „nadmuchamy” w taki sposób, by jego powierzchnia miała kształt sfery. Charakterystyka Eulera sfery to po prostu liczba 2 pojawiająca się po prawej stronie przedstawionej równości. Dlaczego nazwaliśmy ją niezmiennikiem? Otóż jeśli będziemy rozważać wielościany na zdeformowanej sferze (na przykład tej z rysunku 1), wzór Eulera pozostanie w mocy. Jest tak, gdyż deformacja sfery wraz z rozrysowanym na niej wielościanem nie zmienia liczby jego wierzchołków, krawędzi i ścian. Obserwacja wydaje się błaha, ale odnotujmy, że dla wielościanów na torusie (powierzchni dętki) otrzymujemy inny wynik:  $V - E + F = 0$ . Czytelnik może to sprawdzić na rysunku 2. Podobnie jak dla sfery, otrzymana liczba 0 nie zależy od wyboru wielościanu. W ten sposób przekonujemy się, że sfera i torus mają różne charakterystyki Eulera, w konsekwencji nie da się otrzymać jednej z tych powierzchni przez deformację drugiej.

Przypuśćmy więc przeciwnie, że zdeformowana w pewien sposób sfera jest płaska; dla przejrzystości ilustracje będą przedstawiały sferę bez deformacji, ale nie zmniejsza to ogólności rozważań. Płaskość oznacza, że każdy punkt ma otoczenie izometryczne z fragmentem płaszczyzny; każde takie otoczenie nazwiemy *płatem*. Do pokrycia całej sfery można wybrać pewną skończoną liczbę płatów, a następnie skupić uwagę jedynie na tej kolekcji (na przykład powierzchnię boczną walca da się pokryć dwoma płatami). *Mapą* nazwiemy izometrię przekształcającą płat we fragment płaszczyzny, a także obraz tej izometrii – w przypadku powierzchni Ziemi to pojęcie jest zbliżone do tego, co zwykliśmy oglądać w atlasach.

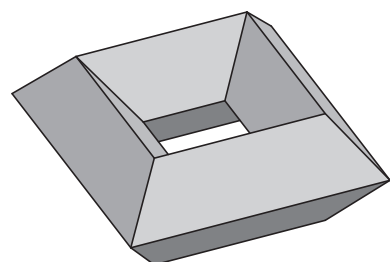
Skonstruujemy teraz wielościan spełniający poniższe trzy warunki:

1. Wszystkie ściany są trójkątami (mają po trzy krzywoliniowe boki).
2. Każdy z tych trójkątów zawiera się w pewnym płacie, a więc jest izometryczny z pewną figurą na płaszczyźnie.
3. Tak otrzymana figura na płaszczyźnie jest trójkątem prostoliniowym, czyli jego boki są odcinkami.

Warunek 1 jest bardzo łatwo spełnić, na przykład rysując na sferze ośmiościan foremny (powstaje on przez trzy prostopadłe cięcia). Dla spełnienia warunku 2 rysunek ten, być może, trzeba „zageścić”. W tym celu wybierzmy jedną ze

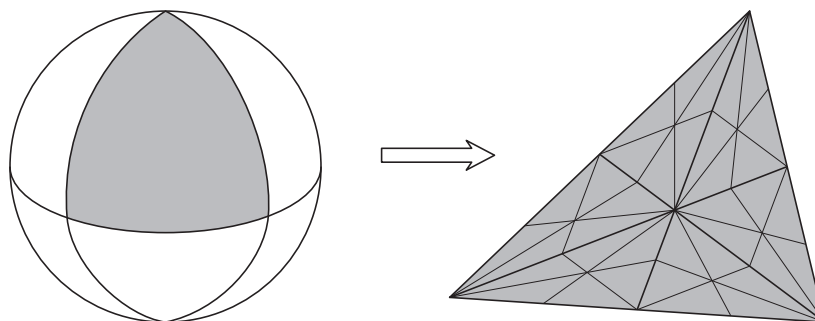


Rys. 1



Rys. 2

\*doktorant, Wydział Matematyki,  
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet  
Warszawski



Rys. 3

ścian ośmiościanu i rzutujemy ją na płaszczyznę tak, aby otrzymać trójkąt prostoliniowy (na przykład, stosując rzut środkowy). W otrzymanym trójkącie narysujemy środkowe, dzieląc go na sześć mniejszych trójkątów (nazywamy to *podziałem barycentrycznym*). Z każdym z powstałych trójkątów możemy zrobić to samo, i tak dalej wybraną liczbę razy. Następnie otrzymaną siatkę umieścimy z powrotem na sferze. Przypomnijmy, że jest ona pokryta przez pewną liczbę płatów; jeśli podział będzie dostatecznie drobny (czyli podziału barycentrycznego dokonamy dostatecznie wiele razy), każdy z drobnych trójkątów będzie się mieścił w którymś z płatów.



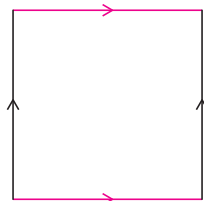
Na potrzeby ostatniego z warunków pozostaje „wyprostować krawędzie”. Wybierzmy dowolną krawędź; leży ona w jednym z płatów i w odpowiedniej mapie jest pewną krzywą łączącą obrazy wierzchołków. Wystarczy zastąpić tę krzywą przez odcinek łączący te same punkty. Czytelnik Czujny może tutaj zrobić zastrzeżenie: wybrana krawędź potencjalnie leży w więcej niż jednym płacie, więc mogłoby się okazać, że krawędź wyprostowana w jednej mapie okaże się krzywa w innej. Tak jednak nie jest – uzasadnienie opiera się na stwierdzeniu, że złożenie dwóch izometrii jest izometrią, a izometrie płaszczyzny przekształcają odcinki na odcinki.

Dla tak skonstruowanego wielościanu obliczymy teraz charakterystykę Eulera. Zbadajmy w tym celu sumę wszystkich kątów wewnętrznych w ścianach – rozumiemy przez to, oczywiście, kąty w trójkątach prostoliniowych powstałych po zmapowaniu ścian. Suma kątów przy każdym wierzchołku to  $2\pi$ , a więc razem otrzymujemy  $V \cdot 2\pi$ . Z drugiej strony, suma kątów wewnętrznych każdego z trójkątów wynosi  $\pi$  (to właśnie tutaj korzystamy z założenia płaskości!), więc łącznie dostajemy  $F \cdot \pi$ . Z przyrównania tych dwóch wielkości wynika równość  $V = \frac{1}{2}F$ . Jeśli ponadto weźmiemy pod uwagę, że każda ściana ma trzy krawędzie, a każda krawędź rozdziela dwie ściany, to otrzymamy  $E = \frac{3}{2}F$ . W rezultacie obliczamy charakterystykę Eulera

$$V - E + F = \frac{1}{2}F - \frac{3}{2}F + F = 0.$$

Otrzymana sprzeczność z twierdzeniem Eulera dowodzi, że nawet zdeformowana sfera nie może być płaska.

Jeśli przeanalizować powyższy dowód dokładniej, to okaże się, że każda płaska powierzchnia zamknięta ma charakterystykę Eulera równą zero. Przez powierzchnię zamkniętą rozumiemy ograniczoną (a więc nie płaszczyznę) i bez brzegu (co wyklucza powierzchnię boczną walca). Zamiast sfery możemy więc z tym samym skutkiem rozważać dwuprecel (o charakterystyce  $-2$ ) lub inny wieloprecel (charakterystyka precla o  $n$  dziurach to  $-2(n-1)$ ), ale już nie torus. Rzeczywiście, charakterystyka Eulera torusa wynosi 0, a więc nasze rozumowanie nie prowadzi do sprzeczności. To nie jest przypadek! Jeśli Czytelnik konstruował kiedyś torus z kartki papieru poprzez sklejenie odpowiednich boków (jak na rysunku 4), to zauważył, że o ile jedną parę boków można skleić bez trudu, to sklejenie drugiej bez załamania kartki jest już niemożliwe. Okazuje się, że w przestrzeni czterowymiarowej kartkę da się zgiąć i skleić, otrzymując w ten sposób płaski torus, ale to zupełnie inna historia. . .



Rys. 4

# Od Prouheta–Tarry’ego–Escotta do Thuego–Morse’a

Karol GRYSZKA\*

Znalazłem zaiste zadziwiający dowód tego twierdzenia. Niestety, margines jest zbyt mały, aby go pomieścić.

Wynikania WTF z hipotezy Shimury–Taniyamy dowiedziono na przełomie lat 80. i 90. XX wieku.

Do jednych z najstarszych problemów w historii matematyki należy niewątpliwie zaliczyć równania diofantyczne, czyli równania o dziedzinie rozwiązań ograniczonej do liczb całkowitych. Obecną nazwę zawdzięczają one Diofantosowi, greckiemu matematykowi żyjącemu w III wieku naszej ery w Aleksandrii. Swoje rozważania na temat takich równań Diofantos zawarł w serii ksiąg pod tytułem *Arytmetyka*. Studiując jedną z nich, Pierre de Fermat – żyjący w XVII wieku francuski prawnik i matematyczny samouk – uznał, że pewne zawarte w niej równanie nie może mieć rozwiązań, o czym raczył poinformować przyszłych czytelników w słynnej uwadze, zamieszczonej na marginesie (czytanej przezeń książki oraz niniejszego artykułu). Mowa, rzecz jasna, o równaniu  $x^n + y^n = z^n$  dla  $n > 2$ , które czekało na rozwiązanie (a właściwie dowód jego braku) ponad 300 lat. Dopiero w 1993 roku, po kilku latach intensywnych prac, Andrew Wiles zakończył wysiłek pokoleń matematyków, dowodząc postawionej na początku drugiej połowy XX wieku hipotezy Shimury–Taniyamy. Po licznych poprawkach jego rozumowanie zostało w roku 1995 oficjalnie opublikowane na łamach *Annals of Mathematics*, a w 2016 roku został on uhonorowany prestiżową Nagrodą Abela.

Wielkie Twierdzenie Fermata dotyczy prostego w sformułowaniu równania diofantycznego, którego rozwiązanie wymaga zastosowania bardzo zaawansowanych narzędzi matematycznych. W niniejszym artykule chciałbym przedstawić zgoła przeciwną sytuację: pozornie skomplikowane równanie diofantyczne przeanalizujemy przy użyciu metod elementarnych. Rozważmy następujący układ równań diofantycznych:

$$\sum_{a \in A} a^k = \sum_{b \in B} b^k, \quad \text{dla } k = 1, \dots, n.$$

gdzie  $A$  oraz  $B$  są pewnymi dwoma równolicznymi i rozłącznymi skończonymi zbiorami liczb całkowitych oraz  $n \geq 1$  jest liczbą naturalną. Należy więc dla ustalonego wykładnika  $n$  znaleźć takie dwa równoliczne i rozłączne zbiory liczb całkowitych  $A$  i  $B$ , by sumy liczb z tych zbiorów w potęgach mniejszych lub równych  $n$  były równe. Problem ten pochodzi od Eulera i Goldbacha, wspólnie znany jest pod nazwą problemu Prouheta–Tarry’ego–Escotta. Prouhet zajmował się tym układem w połowie XIX wieku, pozostali na początku XX wieku podali wiele interesujących rozwiązań.

siema siema  
to ja, Diofantos



Przyjrzyjmy się kilku przykładom. Znalezienie szczególnego rozwiązania dla małych  $n$  (dla  $n = 2$  jest nim, na przykład,  $A = \{0, 4, 5\}$  oraz  $B = \{1, 2, 6\}$ ) nie nastrocza większych kłopotów. Dla większych wykładników poziom trudności obliczeń wzrasta bardzo szybko, np. dla  $n = 9$  przykładowe rozwiązanie to

$$A = \{0, 12, 125, 213, 214, 412, 413, 501, 614, 626\},$$
$$B = \{5, 6, 133, 182, 242, 384, 444, 493, 620, 621\}.$$

Polecam Czytelnikowi próbę znalezienia jakiegokolwiek rozwiązania dla  $n = 3$  (przykładowe można znaleźć na końcu artykułu). Wydaje się, że problem Prouheta–Tarry’ego–Escotta jest trudny do rozwikłania, nawet jeśli postanowimy wspomóc się komputerem. Tymczasem czeka na nas ogromna niespodzianka. Okazuje się bowiem, że jesteśmy w stanie prosto skonstruować pewne rozwiązania dla dowolnej potęgi  $n$ . Ponadto żaden komputer nie będzie nam do tego potrzebny.

Zanim przedstawimy rozwiązanie, dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  okreśmy rekurencyjnie pewne skończone ciągi zer i jedynek. Rozpocniemy od definicji *negatywu* ciągu zero-jedynkowego, czyli zamianie każdego występującego w nim zera na jedynekę i odwrotnie. Negatyw ciągu  $A$  będziemy oznaczali przez  $\bar{A}$ ;

\*Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

dla przykładu, jeżeli  $A = 01011$ , to  $\bar{A} = 10100$ . Niech teraz  $x^{(0)} = 01$ . Gdy mamy już zdefiniowane  $x^{(n)}$ , to przyjmujemy  $x^{(n+1)} = x^{(n)}\bar{x}^{(n)}$ , to znaczy do ciągu  $x^{(j)}$  dopisujemy z prawej strony jego negatyw. Przykład:

$$x^{(1)} = x^{(0)}\bar{x}^{(0)} = 01\bar{01} = 0110.$$

Tak zdefiniowane ciągi posłużą nam do rozwiązania problemu. Dla ustalonej liczby naturalnej  $n$  podzielimy teraz zbiór  $\{0, \dots, 2^{n+1} - 1\}$  na takie dwa rozłączne zbiory, że odpowiednie sumy zgadzają się dla potęg od 0 do  $n$ . Niech

$$A_n = \{i \leq n : x_i^{(n)} = 0\} \quad \text{oraz} \quad B_n = \{i \leq n : x_i^{(n)} = 1\};$$

są to zatem numery tych wyrazów ciągu  $x^{(n)}$ , które są równe odpowiednio 0 lub 1. Wtedy  $A_n$  i  $B_n$  są poszukiwanymi zbiorami. Dowód będzie przebiegał indukcyjnie względem  $n$ . Dla  $n = 0$  mamy

$$x^{(0)} = 01 \quad \text{oraz} \quad A_0 = \{1\}, B_0 = \{2\} \text{ i oczywiście } 1^0 = 2^0 = 1.$$

Wykonamy teraz krok indukcyjny. Założmy, że mamy już zdefiniowane  $A_{n-1}$  oraz  $B_{n-1}$  spełniające tezę. Niech

$$\tilde{A}_{n-1} = \{2^n + i : i \in B_{n-1}\} \quad \text{oraz} \quad \tilde{B}_{n-1} = \{2^n + i : i \in A_{n-1}\}.$$

Wtedy  $A_n = A_{n-1} \cup \tilde{A}_{n-1}$  i analogicznie  $B_n = B_{n-1} \cup \tilde{B}_{n-1}$ . Równości te wynikają wprost z definicji ciągu  $x^{(n)}$  i są kluczową obserwacją wykorzystywaną w kroku indukcyjnym. Jeżeli teraz  $k \leq n$ , to, oznaczając przez  $S_j$  sumę  $j$ -tych potęg liczb ze zbioru  $A_{n-1}$  (dla  $j \leq n-1$  równą sumie  $j$ -tych potęg liczb ze zbioru  $B_{n-1}$ ), mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A_n} a^k &= \sum_{a \in A_{n-1}} a^k + \sum_{a \in \tilde{A}_{n-1}} a^k = \sum_{a \in A_{n-1}} a^k + \sum_{b \in B_{n-1}} (2^n + b)^k = \\ &= \sum_{a \in A_{n-1}} a^k + \sum_{b \in B_{n-1}} \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 2^{n(k-j)} b^j \right) = \\ &= \sum_{a \in A_{n-1}} a^k + \sum_{b \in B_{n-1}} b^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} 2^{n(k-j)} S_j. \end{aligned}$$

Analogicznie mogliśmybyśmy udowodnić tę samą równość dla sumy  $k$ -tych potęg liczb ze zbioru  $B_n$ , co kończy dowód indukcyjny.

Zaprezentowana metoda ma jedną zaletę – pozwala w prosty sposób skonstruować jakiegokolwiek rozwiązanie. Problemem jest jednak jej optymalność. Zwróćmy uwagę na to, że dla  $n = 9$  otrzymujemy w ten sposób zbiory  $A$  i  $B$  złożone z 512 elementów każdy, a tymczasem widzieliśmy wcześniej rozwiązanie, w którym zbiory  $A$  oraz  $B$  były „zaledwie” dziesięcioelementowe. Okazuje się, że rozwiązania dla wykładnika  $n$  muszą być zbiorami złożonymi z co najmniej  $n + 1$  liczb całkowitych. Rozwiązanie, które spełnia to oszacowanie jako równość, nazywamy *idealnym*. Największym wykładnikiem, dla którego znane jest idealne rozwiązanie, jest  $n = 11$ , a jest nim para dwunastoelementowych zbiorów

$$\begin{aligned} A &= \{\pm 22, \pm 61, \pm 86, \pm 127, \pm 140, \pm 151\}, \\ B &= \{\pm 35, \pm 47, \pm 94, \pm 121, \pm 146, \pm 148\}. \end{aligned}$$

Ciągi skończone  $x^{(n)}$ , które posłużyły nam do konstrukcji rozwiązań, są początkowymi fragmentami pewnego nieskończonego ciągu zero-jedynkowego, zwanego ciągiem Thuego–Morse’a. Formalnie ciąg ten, oznaczany dalej przez  $x$ , można zdefiniować jako  $x = (x_n^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ . Jedną z ciekawych własności ciągu  $x$  jest to, że nie zmienia się on pod wpływem operacji podstawień  $0 \rightarrow 01$ ,  $1 \rightarrow 10$ . Wynika to z faktu, że wykonanie tej operacji na ciągu  $x^{(n)}$  daje nam w rezultacie ciąg  $x^{(n+1)}$ , czego nietrudno dowieść za pomocą indukcji. Oczywiście, nie jest to jedyna jego interesująca cecha, jednak na zaprezentowanie wszystkich nie starczyłoby miejsca na marginesie tego artykułu, ani nawet w całym numerze *Delty*.

Rozwiązanie (idealne) dla  $n = 3$ :  $A = \{0, 4, 7, 11\}$ ,  $B = \{1, 2, 9, 10\}$ .

# Liczby zespolone i kwaterniony

Zbigniew MARCINIAK

Bardzo oszczędny reduct tego artykułu zamieściliśmy w poprzednim, związanym z jubileuszem Uniwersytetu Warszawskiego, numerze *Delty*; dziś prezentujemy go w pełnej wersji.

Redakcja

Tak jak problemy praktyczne prowadzą do równań, tak równania prowadzą czasem do nowych rodzajów liczb. Ambitny kmieć z czasów Mieszka I, będący właścicielem trzech krów i marzący o nabyciu (lub zdobyciu) dodatkowych sztuk bydła tak, by stać się szanowanym posiadaczem tuzina krów, musiał niewątpliwie rozwiązywać zadanie matematyczne, które dziś zapisujemy równaniem  $3 + x = 12$ . Gdy zamienimy występujące tu liczby miejscami, otrzymamy równanie  $x + 12 = 3$ , które „nie da się rozwiązać”: gołym okiem widać, że wśród liczb, za pomocą których zwykliśmy liczyć krowy (czyli liczb naturalnych), nie znajdzie się żadna, która by spełniała to równanie. Ma ono jednak sens praktyczny: opisuje stan posiadania pewnego mieszkańca sąsiedniej wioski przed i po spełnieniu marzeń naszego kmiecia. Żeby to równanie rozwiązać, potrzebne są nowe liczby – tu są to liczby ujemne. W tak powiększonym zbiorze liczb, zwanym zbiorem liczb całkowitych, każde równanie postaci  $x + a = b$ , gdzie  $a$  i  $b$  to liczby całkowite, ma rozwiązanie.

Żeby rozwiązać równanie  $x^2 - 2 = 0$ , nie wystarczą nie tylko liczby całkowite, ani nawet wszystkie liczby wymierne, czyli ułamki  $a/b$  zbudowane z liczb całkowitych. Aby uzyskać rozwiązanie, do liczb wymiernych trzeba dołączyć nowe liczby, a wśród nich liczbę niewymierną  $\sqrt{2}$ .

Dlaczego nie wystarczy dołączyć samej liczby  $\sqrt{2}$ ? Bo pojedyncze liczby są tak mało użyteczne, że nawet nie zasługują na uwagę. W istocie, na pytanie *co to jest liczba?* istnieje tylko jedna, matematycznie użyteczna, choć pozornie paradoksalna, odpowiedź: liczba to element zbioru, którego elementy można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Zakłada się przy tym, że działania te powinny spełniać pewne naturalne warunki, jak np. przemienność i łączność dodawania oraz mnożenia, istnienie odwrotności każdej liczby różnej od zera itp., dobrze znane z algebry szkolnej. Zbiory liczb, spełniające te warunki, algebraicy nazywają ciałami.

Do zapisywania wyników pomiarów najlepiej nadaje się ciało liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ , które można sobie wyobrażać jako zbiór wszystkich ułamków dziesiętnych, z (przeważnie) nieskończoną liczbą cyfr po przecinku. Prawdziwą naturę tych liczb dobrze oddaje definicja, pochodząca z jednego z najlepszych podręczników algebry: „Liczby rzeczywiste, *cokolwiek by to nie było*, mają następujące własności. . .” – tu następuje lista własności działań. Użyteczność liczb polega nie na tym, że każda z nich z osobna istnieje, lecz na tym, że możemy na nich działać.

Zbiór liczb rzeczywistych jest dostatecznie duży, by można było w nim znaleźć rozwiązania bardzo wielu użytecznych równań, ale jednak nie wszystkich; na przykład równanie  $x^2 + 1 = 0$  nie ma rozwiązań w zbiorze  $\mathbb{R}$ , gdyż lewa strona tego równania jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Ogólniej, z lekcji algebry pamiętamy, że równanie kwadratowe  $ax^2 + bx + c = 0$  nie ma rozwiązań rzeczywistych, gdy  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ .

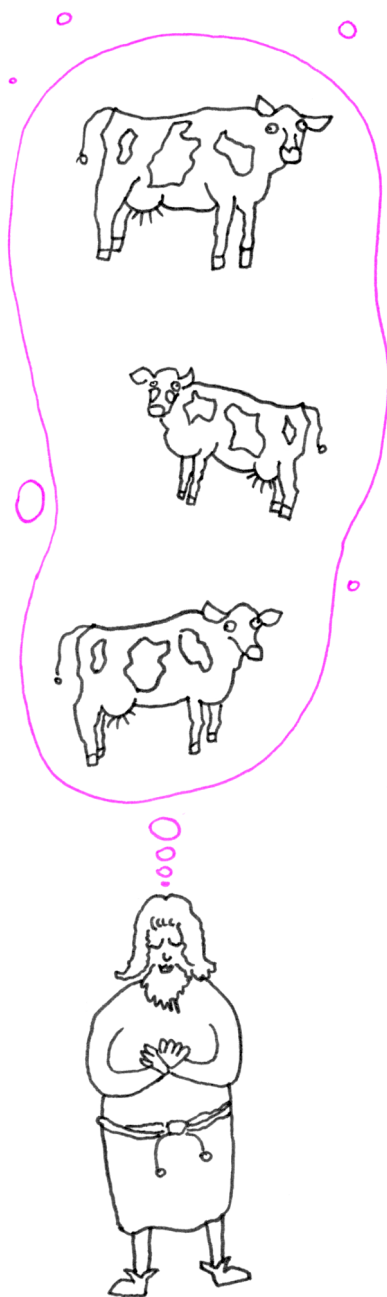
Zatem, gdy upieramy się przy tym, by równanie  $x^2 + 1 = 0$  jednak miało rozwiązanie, musimy powiększyć zbiór  $\mathbb{R}$  do większego ciała, które w szczególności będzie zawierać pierwiastek naszego równania – tradycyjnie oznaczmy go symbolem  $i$ . Jest to pierwsza litera słowa *imaginary*, czyli *urojona*, no bo przecież nie jest to liczba rzeczywista. . . Nasze nowe ciało powinno zatem zawierać  $i$ , wszystkie „stare” liczby  $a, b \in \mathbb{R}$  oraz wyniki działań na nich, a więc elementy postaci  $a, bi$ , a także  $a + bi$ . Zbiór wszystkich wyrażeń tej postaci oznaczamy symbolem  $\mathbb{C}$  (*complex numbers*) i nazywamy liczbami zespolonymi.

Liczby zespolone możemy w oczywisty sposób dodawać i odejmować:

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

Możemy je także mnożyć – w tym celu po prostu „otwieramy nawiasy”:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2,$$



\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



### Rozwiązanie zadania F 914.

Na jednym centymetrze kwadratowym powierzchni płytki osadza się w ciągu sekundy masa srebra równa  $M = mN = \rho d$ , stąd  $d = mN/\rho$ , gdzie  $N$  to liczba atomów srebra, padających w ciągu sekundy na  $1 \text{ cm}^2$  płytki, a  $m$  – masa jednego atomu. Ciśnienie na powierzchni płytki, pochodzące od tych atomów, wynosi  $p = mNv$ , gdzie prędkość atomów to  $v = \sqrt{2W/m}$ . Po przekształceniu mamy

$$mN = p\sqrt{m/2W} = p\sqrt{N_0\mu/2W},$$

gdzie  $N_0$  – liczba Avogadra. Stąd ostatecznie

$$d = (p/\rho)\sqrt{N_0\mu/2W} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s.}$$

a następnie korzystamy z podstawowej własności  $i$ : jest to pierwiastek równania  $x^2 + 1 = 0$ , zatem  $i^2 = -1$ . Podstawiając tę wartość do powyższej równości, otrzymujemy wzór

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \in \mathbb{C}.$$

Zauważmy, że tak zdefiniowane działania rozszerzają znane nam działania dodawania, odejmowania i mnożenia liczb rzeczywistych, co łatwo sprawdzić podstawiając w powyższych wzorach  $b = d = 0$ . Trzy działania już mamy! A co z dzieleniem? Ponieważ dzielenie to mnożenie przez odwrotność dzielnika, wystarczy znaleźć odwrotność każdego elementu  $c + di \neq 0 + 0i = 0 \in \mathbb{C}$ . W tym celu zauważmy, że  $(c + di) \cdot (c - di) = c^2 - d^2i^2 = c^2 + d^2 \in \mathbb{R}$ , skąd

$$(c + di) \cdot \left( \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} \cdot i \right) = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{c + di} = \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

Zatem dzielenie liczb zespolonych jest także wykonalne. Tak stworzyliśmy ciało  $\mathbb{C}$ , które zawiera wszystkie liczby rzeczywiste oraz urojoną liczbę  $i$ , spełniającą równanie  $x^2 + 1 = 0$ .

Sceptyczny Czytelnik może w tym miejscu wyrazić wątpliwość, czy warto było wykonywać tę całą pracę tylko po to, by uzyskać pierwiastek jednego konkretnego równania. W istocie nie jest aż tak źle; rozważmy dla przykładu równanie  $x^2 + x + 1 = 0$ . Mamy  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$ , więc w szkole w tym miejscu przestalibyśmy zajmować się tym równaniem. Gdy jednak dopełnimy lewą stronę do pełnego kwadratu:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

otrzymamy równanie

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} = i^2 \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, \quad x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \quad x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

W ten sposób znaleźliśmy dwie liczby zespolone, które są pierwiastkami naszego równania. Podobnie będzie z każdym innym równaniem kwadratowym – w ciele  $\mathbb{C}$  zawsze bez trudu znajdziemy jego pierwiastki.

W istocie, jak udowodnił 22-letni Carl Friedrich Gauss w roku 1799, nie tylko każdy trójmian, ale także każdy wielomian dodatniego stopnia ma w ciele  $\mathbb{C}$  pierwiastek; jest to tak zwane Zasadnicze Twierdzenie Algebry. Jest to prawda także wtedy, gdy współczynniki naszego wielomianu są liczbami zespolonymi.

Ponieważ liczba zespolona  $a + bi \in \mathbb{C}$  jest wyznaczona przez parę liczb rzeczywistych  $(a, b)$ , można ją interpretować jako punkt płaszczyzny kartezjańskiej  $\mathbb{R}^2$  o współrzędnych  $x = a$ ,  $y = b$ . Wówczas podciało  $\mathbb{R}$  liczb rzeczywistych  $a + 0i$  wypełnia oś  $Ox$  układu współrzędnych, zaś liczba urojona  $i$  leży na osi  $Oy$ , na wysokości 1.

Dodawanie liczby zespolonej  $c + di$  do dowolnego punktu płaszczyzny kartezjańskiej odpowiada w tej interpretacji przesunięciu go o wektor  $[c, d]$ . A jakim przekształceniem jest mnożenie przez liczbę  $i$ ? Dla dowolnego punktu  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  otrzymujemy

$$(a + bi) \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai.$$

Zatem mnożenie przez  $i$  przenosi punkt  $(a, b)$  na punkt  $(-b, a)$ . Łatwo dostrzec, że jest to obrót płaszczyzny wokół punktu  $O = (0, 0)$  o kąt prosty, w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara.

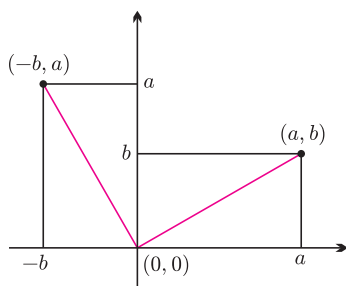
Ogólniej, jeśli punkt  $(c, d)$  leży na okręgu jednostkowym o środku w punkcie  $O$ , to liczba zespolona  $z = c + di$  spełnia warunek

$$c^2 + d^2 = 1, \quad \text{skąd} \quad z = \cos \theta + i \sin \theta,$$

dla pewnego kąta  $\theta$ .

Wówczas mnożenie przez  $z$  jest obrotem płaszczyzny wokół punktu  $O$  o kąt  $\theta$ , w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara.

Na przykład, dla liczby  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ , która pojawiła się wcześniej jako pierwiastek równania  $x^2 + x + 1 = 0$ , mamy  $z = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ ,



Czytelnik Dociekliwy spostrzeże, że mnożenie liczby zespolonej przez rzeczywistą to jednokładność, a wobec tego, że mamy

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right),$$

mnożenie przez dowolne  $a + bi$  jest złożeniem jednokładności i obrotu o środku  $O$ .



Czytelnik Oblatany wie, że te sześć liczb to macierz  $2 \times 2$  i wektor, a nawet może się upierać, że tych liczb mogłoby być mniej (trzy i pół), bo współczynniki macierzy nie są niezależne.

więc otrzymujemy obrót o  $120^\circ$ . Trzykrotne wykonanie tego obrotu doprowadzi nas zatem do punktu wyjścia; nie powinno to być zaskoczeniem, skoro przekształcenie to odpowiada mnożeniu przez  $z^3$ , zaś  $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = (z - 1) \cdot 0 = 0$ , skąd  $z^3 = 1$ .

Widzimy zatem, że liczby zespolone pozwalają wygodnie reprezentować wszystkie ruchy sztywne płaszczyzny, czyli przekształcenia zachowujące odległości między punktami oraz orientację płaszczyzny; z kursu geometrii wiemy, że są one złożeniami przesunięć i obrotów wokół punktu  $O$ . Analityczny opis takich przekształceń w klasycznej geometrii używa aż szóstki liczb; użycie liczb zespolonych pozwala na znacznie prostszy opis.

„Prawdziwa” geometria, tj. geometria, której używają mechanicy oraz astronomowie, rozgrywa się w przestrzeni trójwymiarowej  $\mathbb{R}^3$ . Wiadomo, że każdy ruch sztywny tej przestrzeni jest złożeniem pewnego przesunięcia oraz obrotu wokół jednej z osi przechodzących przez punkt  $O = (0, 0, 0)$ ; analityczny opis takiego przekształcenia potrzebuje aż 12 liczb. W tej sytuacji musiało pojawić się bardzo naturalne pytanie: czy trójwymiarową przestrzeń kartezjańską  $\mathbb{R}^3$  można wyposażyć w strukturę ciała tak, by dodawanie oraz mnożenie przez jego elementy prosto opisywało wszystkie ruchy sztywne tej przestrzeni?

Irlandzki matematyk, fizyk i astronom William Rowan Hamilton strawił 10 lat na poszukiwaniu odpowiedniej struktury ciała na zbiorze trójek liczb rzeczywistych, analogicznej do struktury ciała liczb zespolonych na zbiorze par.

Z dodawaniem nie ma problemu: podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym trójki liczb dodajemy po współrzędnych:  $(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$ ; dodawanie ustalonego elementu  $(d, e, f)$  odpowiada wówczas przesunięciu przestrzeni o wektor  $[d, e, f]$ . Natomiast mnożenie trzeba wymyślić.

Trójki liczb, czyli punkty w  $\mathbb{R}^3$ , można też utożsamić z końcami wektorów, zaczepionych w punkcie  $O$  i szukać odpowiedniego mnożenia wektorów. Przywodzi to na myśl znane z zastosowań w mechanice i elektromagnetyzmie pojęcie iloczynu wektorowego  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  pary wektorów  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . Wynikiem tego działania jest trzeci wektor, prostopadły do obu wektorów  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  i skierowany w taką stronę, by trójkę wektorów  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}$  można było ruchem sztywnym przełożyć na dodatnie półosie  $Ox, Oy, Oz$  (niekoniecznie prostokątnego) układu współrzędnych. Ponadto, długość wektora  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  powinna być równa polu równoległoboku, rozpiętego przez wektory  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  – łącznie warunki te wyznaczają wektor  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  w sposób jednoznaczny. Niestety, to nie jest mnożenie, które może nas zadowolić. Z powyższej definicji wynika, że dla dowolnego wektora  $\mathbf{v}$  mamy  $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ , bo para  $\mathbf{v}, \mathbf{v}$  rozpina „równoległobok” o zerowym polu. Tymczasem w ciele iloczyn niezerowych elementów jest zawsze różny od zera; jeśli bowiem  $a \cdot b = 0$  oraz  $a \neq 0$ , to istnieje  $1/a$ , skąd dostajemy

$$b = 1 \cdot b = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

Wykażemy, że w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  w ogóle nie ma takiego mnożenia, jakiego szukamy. Dowód poprowadzimy nie wprost. Załóżmy zatem, że istnieje szukane mnożenie, które sprawia, że  $\mathbb{R}^3$  staje się ciałem. Wybierzmy dowolny element  $a \in \mathbb{R}^3$ , który nie należy do prostej zawierającej jedynekę tego ciała i niech  $P$  będzie płaszczyzną rozpiętą przez punkty  $O, 1$  oraz  $a$ . W szczególności, dowolny element  $b \in P$  jest postaci  $b = r \cdot 1 + s \cdot a$  dla pewnych liczb  $r, s \in \mathbb{R}$ . Rozważymy dwa przypadki:

**(I)** Punkt  $a^2$  należy do płaszczyzny  $P$ . Wobec tego dla  $b_1, b_2 \in P$  mamy

$$\begin{aligned} b_1 \cdot b_2 &= (r_1 \cdot 1 + s_1 \cdot a) \cdot (r_2 \cdot 1 + s_2 \cdot a) = \\ &= r_1 r_2 \cdot 1 + (r_1 s_2 + s_1 r_2) \cdot a + s_1 s_2 \cdot a^2 \in P, \end{aligned}$$

czyli płaszczyzna  $P$  jest podzbiorem zamkniętym ze względu na mnożenie.

Ponadto, dla ustalonego  $b \in P$  przekształcenie płaszczyzny  $P$  w siebie, dane wzorem  $x \mapsto b \cdot x$ , jest różnowartościowym przekształceniem liniowym: jeśli  $b \cdot x_1 = b \cdot x_2$ , to  $b \cdot (x_1 - x_2) = 0$ , a skoro  $b \neq 0$ , to  $x_1 = x_2$ . Wynika stąd, że

Przez  $x \cdot Y$ , gdzie  $x$  jest liczbą, a  $Y$  zbiorem liczb, rozumiemy zbiór wszystkich liczb, które można uzyskać jako iloczyn  $x$  przez którąś z liczb ze zbioru  $Y$ .

obrazem  $P$  jest cała płaszczyzna  $P$ . W szczególności, istnieje taki element  $c \in P$ , że  $b \cdot c = 1 \in P$ . Wynika stąd, że  $P$  jest dwuwymiarowym podciałem w naszym ciele  $\mathbb{R}^3$ .

Wybermy teraz dowolny element  $d \in \mathbb{R}^3$ , leżący poza płaszczyzną  $P$ . Wówczas podzbiór  $P' = d \cdot P$  także jest płaszczyzną. Rozważmy przecięcie  $P \cap P'$ . Załóżmy, że dla pewnych niezerowych  $b, b' \in P$  mamy  $d \cdot b = b'$ . Wówczas  $d = b' \cdot (1/b) \in P$ , wbrew wyborowi  $d$ . Wobec tego  $P \cap P' = \{0\}$ , co daje sprzeczność, gdyż w przestrzeni trójwymiarowej dwie płaszczyzny nie mogą przecinać się w dokładnie jednym punkcie.

(II) Punkt  $a^2$  nie należy do płaszczyzny  $P$ . Wówczas wektory  $1, a, a^2$  rozpinają przestrzeń  $\mathbb{R}^3$ , więc  $a^3 = r \cdot 1 + s \cdot a + t \cdot a^2$  dla pewnych liczb  $r, s, t \in \mathbb{R}$ . Wielomian  $f(x) = x^3 - r - sx - tx^2$  przyjmuje dla bardzo dużych  $x$  wartości dodatnie, zaś dla „bardzo ujemnych”  $x$  – wartości ujemne. Zatem ma on pierwiastek rzeczywisty  $\lambda$ , skąd  $f(x) = (x - \lambda)g(x)$  dla pewnego trójmianu  $g(x)$ . Podstawiając do tej tożsamości  $x = a$ , otrzymujemy

$$0 = a^3 - r \cdot 1 - s \cdot a - t \cdot a^2 = f(a) = (a - \lambda \cdot 1)g(a).$$

Ale  $g(a) \neq 0$ , gdyż  $a^2 \notin P$ . Zatem  $a = \lambda \cdot 1$ , wbrew wyborowi  $a$ .

W obu przypadkach uzyskaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że poszukiwana **struktura ciała na przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  nie istnieje**.

To, co nie jest możliwe w przestrzeni trójwymiarowej, może się zdarzyć w wymiarze 4. Na przykład, w przestrzeni  $\mathbb{R}^4$  składającej się z czwórek liczb rzeczywistych jest dość miejsca na to, by dwie płaszczyzny miały dokładnie jeden punkt wspólny. Oto przykład: niech  $P$  będzie płaszczyzną rozpiętą przez pierwsze dwie osie układu współrzędnych, zaś  $P'$  – przez ostatnie dwie. Do płaszczyzny  $P$  należą czwórki liczb postaci  $(x_1, x_2, 0, 0)$ , natomiast do  $P'$  – czwórki  $(0, 0, x_3, x_4)$ . Jediną czwórką, która jest obydwu tych postaci, jest, oczywiście,  $(0, 0, 0, 0)$ , skąd  $P \cap P' = \{O\}$ .

Hamilton dostrzegł możliwości przestrzeni czterowymiarowej w kontekście rozważanego problemu w dniu 16. października 1843 roku, gdy zmierzając w towarzystwie żony na posiedzenie Royal Irish Academy, przekraczał mostek Broom Bridge na Royal Canal w Dublinie.

Gdy wersory kolejnych osi  $Ox_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , nazwiemy  $1, i, j, k$  oraz zażądamy, by

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

otrzymamy niemal idealne czterowymiarowe ciało!

Hamilton był tak podekscytowany swoim odkryciem, że ponoć wydrapał powyższe formuły na kamiennej poręczu mostu. Historia milczy, jak zareagowała na to zdarzenie towarzysząca mu małżonka.

Odczytajmy z powyższych wzorów wynik mnożenia każdej pary liter  $i, j, k$ .

Mnożąc równość  $ijk = -1$  z prawej strony przez  $k$ , otrzymamy

$$(ijk)k = -k, \quad (ij)k^2 = -k, \quad (ij) \cdot (-1) = -k, \quad ij = k.$$

Wykonując podobne mnożenie przez  $i$ , ale z lewej strony, otrzymamy  $jk = i$ . Z pierwszej z otrzymanych powyżej równości można wyliczyć  $ji$ :

$$ji = j(jk) = j^2k = -k.$$

Wynika stąd, że  $ij \neq ji$ , czyli nasze mnożenie nie jest przemienne, co tłumaczy użyte wyżej określenie *niemal idealne*.

Pozostawiamy Czytelnikom fascynującą zabawę uzyskania kompletu równości:

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j.$$

Każda czwórka  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  może być zapisana jako *kwaternion*  $x = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$ . Takie wyrażenia dodajemy po współrzędnych – jak liczby zespolone. Natomiast mnożymy je, otwierając nawiasy i korzystając z sześciu równości przedstawionych wyżej. Tak powstaje *algebra kwaternionów*, którą na cześć Hamiltona oznaczamy symbolem  $\mathbb{H}$ .



### Rozwiązanie zadania M 1507.

Ciąg  $a_n$  spełnia warunek

$a_{n+3} + a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ . W takim razie

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2016} a_k &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots \\ &\quad + (a_{2015} + a_{2016}) = \\ &= 1008(a_1 + a_2) = 1008. \end{aligned}$$

Podobnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2015} a_k &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \dots \\ &\quad + (a_{2014} + a_{2015}) = \\ &= a_1 + 1007(a_2 + a_3) = 2015. \end{aligned}$$

Odejmując otrzymane wartości, dostajemy

$$a_{2016} = \sum_{k=1}^{2016} a_k - \sum_{k=1}^{2015} a_k = -1007.$$

Czy każdy niezerowy kwaternion ma element odwrotny? Dla liczb zespolonych pomogło rozważenie iloczynu  $(c + di)(c - di)$ . Tu postąpimy podobnie; gdy uważnie wykonamy mnożenie, otrzymamy

$$(x_1 + x_2i + x_3j + x_4k) \cdot (x_1 - x_2i - x_3j - x_4k) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \in \mathbb{R}.$$

Gdy  $x$  jest kwaternionem niezerowym, tj. gdy choć jedna z liczb  $x_i$  jest różna od zera, suma po prawej stronie jest niezerowa. Gdy wszystkie współczynniki drugiego czynnika w powyższym iloczynie podzielimy przez tę sumę, uzyskamy postać poszukiwanego elementu  $x^{-1}$ . Zatem  $\mathbb{H}$  jest naprawdę ciałem, tyle że nieprzemienne.

A co w takim razie z wyjściowym celem, jakim było wyrażenie obrotów przestrzeni trójwymiarowej za pomocą mnożenia w odpowiednim ciele? Otóż ten cel też udaje się zrealizować w następujący sposób. Umieścimy naszą przestrzeń trójwymiarową wewnątrz  $\mathbb{H}$ , na ostatnich trzech osiach, tj. jako zbiór „czysto urojonych” kwaternionów  $x_2i + x_3j + x_4k$ . Niech  $u_2i + u_3j + u_4k$  będzie wektorem długości 1, wskazującym oś obrotu, który chcemy zrealizować oraz niech  $\theta$  będzie kątem, o jaki chcemy obrócić przestrzeń. Rozważmy kwaternion

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot (u_2i + u_3j + u_4k) \in \mathbb{H}$$

oraz przekształcenie  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  dane wzorem  $x \mapsto q \cdot x \cdot q^{-1}$ . Łatwo zauważyć, że prosta rozpięta przez wektor  $x = u_2i + u_3j + u_4k$  nie poruszy się. Okazuje się, że przekształcenie to przeprowadza czysto urojoną podprzestrzeń na siebie i wykonuje na niej dokładnie ten obrót, który sobie zaplanowaliśmy.

Wobec tego każdy obrót przestrzeni trójwymiarowej potrafimy zakodować za pomocą czwórki liczb rzeczywistych. Jest to na tyle efektywne, że kwaterniony znajdują zastosowanie w grafice komputerowej, do kodowania szybkich animacji.

Hamilton zauważył też, że – przy interpretacji liczb zespolonych jako punktów płaszczyzny – ich działania „obywają się” bez liczby  $i$ . Mamy bowiem dla  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Wzory te, jak zauważył później Artur Cayley, dają się zinterpretować także jako opisujące działania na kwaternionach. Spostrzegł bowiem, wykorzystując równość  $2 \cdot 2 = 4$ , że możemy kwaterniony traktować jak pary liczb zespolonych. Wówczas dla  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mamy

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - \bar{b}d, ad + b\bar{c}),$$

gdzie  $\overline{x + yi}$  oznacza  $x - yi$ .



## Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

**M 1507.** Ciąg  $a_n$  spełnia warunek

$$a_{n+3} = -a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$$

dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ . Znaleźć wartość  $a_{2016}$ , wiedząc, że  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$  i  $a_3 = 2$ .

Rozwiązanie na str. 17

**M 1508.** Czworokąt wypukły  $ABCD$  o obwodzie  $p$  został podzielony przekątnymi na cztery trójkąty. Środki okręgów wpisanych w te trójkąty tworzą czworokąt o obwodzie  $q$ . Wykazać, że pole  $S$  czworokąta  $ABCD$  jest mniejsze niż  $pq/4$ .

Rozwiązanie na str. 4

**M 1509.** Obliczyć sumę

$$\sum_{x=1}^{10} \sum_{y=1}^{10} \sum_{z=1}^{10} \min(x, y, z).$$

Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Michał NAWROCKI

**F 913.** Małą metalową kulę o masie  $m = 1$  g, którą naładowano ładunkiem  $q = +10^{-7}C$ , wystrzelono z dużej odległości z prędkością  $v = 1$  m/s w kierunku metalowej sfery, naładowanej ładunkiem  $Q = +3 \cdot 10^{-7}C$ . Przy jakim najmniejszym promieniu sfery kulka dotrze do jej powierzchni?

Rozwiązanie na str. 6

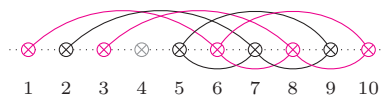
**F 914.** W komorze napyłarki płytka szklana jest pokrywana rozpylonym srebrem. Z jaką szybkością następowałby wzrost grubości  $d$  napylanej warstwy, jeżeli atomy srebra miałyby energię  $W = 10^{-12}$  J każdy i wytwarzałyby na powierzchni płytki ciśnienie  $p = 0,1$  N/m<sup>2</sup>? Gęstość srebra wynosi  $\rho = 10,5$  g/cm<sup>3</sup>, a jego masa atomowa wynosi  $\mu = 108$ .

Rozwiązanie na str. 15

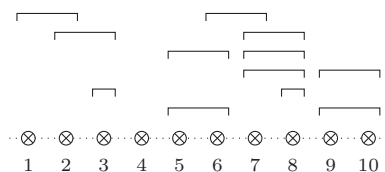
## Informatyczny kącik olimpijski (98): Świąteczny łańcuch



Rys. 1. Przykładowy łańcuch o  $n = 10$  lampkach i czterech wymaganiach estetycznych  $(1, 6, 3)$ ,  $(5, 7, 4)$ ,  $(3, 8, 1)$  oraz  $(5, 9, 2)$ . Ostatnie wymaganie mówi, że lampki 5 i 9 muszą mieć ten sam kolor oraz lampki 6 i 10 muszą mieć ten sam kolor.



Rys. 2. Graf odpowiadający wymaganiom z rysunku 1. Ma trzy spójne składowe  $\{1, 3, 6, 8, 10\}$ ,  $\{2, 5, 7, 9\}$  oraz  $\{4\}$ , więc łańcuch może mieć co najwyżej 3 różne kolory lampek.



Rys. 3. Zastąpienie wymagań dłuższych niż  $2^k = 2$  w fazie  $k = 1$ .

To spowoduje tymczasowy wzrost liczby wymagań, ale pozwoli nam usunąć redundancje wśród wymagań o długości  $2^k$ . Zbudujmy w tym celu graf  $G_k$ , w którym wierzchołki będą znów liczbami od 1 do  $n$ , ale będziemy mieli co najwyżej  $2m$  krawędzi: dla każdego wymagania  $(a_i, b_i, 2^k)$  stworzymy krawędź łączącą wierzchołki  $a_i$  oraz  $b_i$ . Zauważmy teraz, że jeśli w grafie  $G_k$  znajduje się cykl, to znaczy, że część wymagań o długości  $2^k$  daje redundantne informacje. Istotnie: cykl  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_s \rightarrow v_1$  wymusza, że dla każdego  $0 \leq j < 2^k$  kolory lampek ze zbioru  $\{v_i + j \mid 1 \leq i < s\}$  są takie same. Jednak to samo wymuszenie uzyskujemy, jeśli usuniemy dowolne wymaganie odpowiadające krawędzi z tego cyklu. Powtarzając to rozumowanie

Tym razem omówimy zadanie *Świąteczny łańcuch*, które rozwiązywali w tym roku uczestnicy drugiego etapu XXIII Olimpiady Informatycznej. Zadanie jest następujące: należy zaprojektować łańcuch złożony z  $n$  różnokolorowych lampek, przy czym dane jest również  $m$  wymagań estetycznych, każde w postaci trójki liczb  $(a_i, b_i, \ell_i)$  oznaczającej, że fragmenty łańcucha złożone z lampek o numerach  $\{a_i, \dots, a_i + \ell_i - 1\}$  oraz  $\{b_i, \dots, b_i + \ell_i - 1\}$  muszą być jednakowe (rys. 1). Łańcuch powinien być też jak najbardziej urozmaicony; innymi słowy, powinien być w nim jak najwięcej różnych kolorów lampek. Wartości  $n$  i  $m$  są rzędu  $10^6$ .

Rozwiązanie, za które można było zdobyć połowę punktów na konkursie, jest narzucające się. Zbudujmy graf o  $n$  wierzchołkach (ponumerowanych liczbami od 1 do  $n$ ), które odpowiadać będą kolejnym lampkom łańcucha. Teraz dla każdego wymagania estetycznego  $(a_i, b_i, \ell_i)$  łączymy krawędziami wierzchołki dla tych lampek, które muszą mieć ten sam kolor; innymi słowy, dla każdego  $j = 0, 1, \dots, \ell_i - 1$  łączymy krawędzią wierzchołki  $a_i + j$  oraz  $b_i + j$ . Zauważmy, że wszystkie lampki należące do jednej spójnej składowej grafu muszą mieć ten sam kolor. Z kolei lampki z różnych składowych mogą mieć różne kolory, więc aby zmaksymalizować liczbę kolorów w łańcuchu, należy każdej składowej przypisać inny kolor lampek (rys. 2). To rozwiązanie działać będzie w czasie liniowym od wielkości skonstruowanego grafu. Jest zatem zbyt wolne, gdyż liczba krawędzi grafu może być bliska iloczynowi  $n \cdot m$ , który może wynieść nawet  $10^{12}$ .

Zauważmy, że powyższe rozwiązanie jest wolne, jeśli istnieje dużo wymagań estetycznych o dużych długościach (wartościach  $\ell_i$ ). Jednak w takim przypadku jest nieuniknione, że spora część wymagań będzie redundantna (tzn. będzie prowadziła do takich samych wymuszeń kolorów). W naszym przykładzie wymaganie  $(5, 7, 4)$  mówi, że fragmenty  $\{5, 6, 7, 8\}$  i  $\{7, 8, 9, 10\}$  mają takie same kolory lampek, co może być spełnione tylko wtedy, gdy krótsze fragmenty  $\{5, 6\}$ ,  $\{7, 8\}$  oraz  $\{9, 10\}$  mają te same kolory. Widać zatem, że wymaganie  $(5, 9, 2)$  jest w tym przypadku zawsze spełnione. Chcielibyśmy usunąć takie redundantne wymagania. Ponadto, w przypadku wymagań o dużych długościach być może tylko część informacji z wymagania jest redundantna – w takim przypadku dobrym pomysłem mogłoby być podzielenie takiego wymagania na mniejsze kawałki.

W szybszym rozwiązaniu wykorzystamy te dwa pomysły: będziemy sukcesywnie rozbijać wymagania na mniejsze i na bieżąco usuwać redundancje. Rozwiązanie będzie przebiegać w  $\lceil \log_2 n \rceil + 1$  fazach dla  $k = \lceil \log_2 n \rceil, \dots, 1, 0$ . W fazie  $k$ -tej zakładamy, że wszystkie wymagania mają długość co najwyżej  $2^{k+1}$ , a następnie każde wymaganie  $(a_i, b_i, \ell_i)$  o długości większej niż  $2^k$  (czyli spełniającej  $2^k < \ell_i \leq 2^{k+1}$ ) zastępujemy dwoma wymaganiami o długości  $2^k$  (rys. 3):

$$(a_i, b_i, 2^k) \quad \text{oraz} \quad (a_i + \ell_i - 2^k, b_i + \ell_i - 2^k, 2^k).$$

dopóty, dopóki w grafie  $G_k$  istnieją cykle, możemy zmniejszyć zbiór wymagań długości  $2^k$  do zbioru liczącego  $n - 1$  wymagań. Ten zbiór możemy znaleźć, wyznaczając dowolny las rozpinający grafu  $G_k$ .

Zatem na koniec fazy  $k$ -tej uzyskamy równoważny zbiór wymagań zawierający co najwyżej  $m + n$  wymagań długości co najwyżej  $2^k$ . Pojedynczą fazę możemy zaimplementować w czasie  $O(n + m)$ . Tak więc po fazie  $k = 0$  uzyskamy równoważny zbiór  $m + n$  wymagań, z których każde jest długości 1. Dla takiego zbioru nasze pierwotne rozwiązanie zadziała w czasie liniowym. Ostatecznie złożoność czasowa algorytmu wyniesie  $O((n + m) \log n)$ , a pamięciowa  $O(n + m)$ .

Tomasz IDZIASZEK

## Genetyka molekularna wobec paleontologii

Odkąd na przełomie tysiącleci nauczyliśmy się badać strukturę chemiczną materiału genetycznego – sprawnie i automatycznie – trwa wielkie sekwencjonowanie DNA. Dla wybranych organizmów wyższych, ssaków i roślin, daty tych osiągnięć są następujące: 2000 człowiek, ryż, rzodkiewnik; 2002 mysz; 2004 szczur; 2005 szympan, pies; 2007 kot, makak; 2009 koń; 2010 Neandertalczyk, panda wielka, królik; 2011 orangutan, ziemniak; 2012 goryl, szympan bonobo, delfin, świnia, pszenica; 2013 nietoperz, lew afrykański, tygrys syberyjski; 2014 wieloryb; 2015 słoń azjatycki; 2016 marchew.

Czy można znaleźć wspólną przyczynę kolejności wybierania gatunku do sekwencjonowania? Czy wnosi to ważne wnioski ewolucyjne?

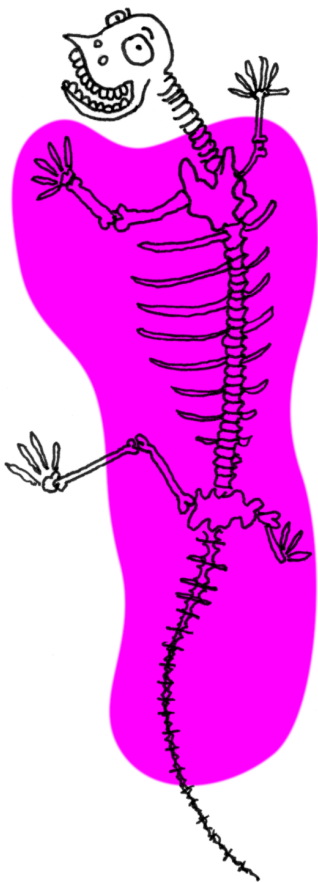
Mysz jest ważna, bo to najważniejszy model badań medycznych. I dla medycyny, i dla rolnictwa ważna jest świnia. Sekwencjonowane genomy roślinne, poza rzodkiewnikiem (model badawczy) – to wszystko ważne gatunki spożywcze. Do programu marchewkowego zaproszono badaczy z Krakowa, ponieważ mogli dostarczyć danych dla wielu odmian dzikich. Szympana oczekiwano z niecierpliwością, po oznaczeniu genomu człowieka. Pandzie, słońom grozi wyginięcie. A delfin – mądry. Nie jestem pewna, czy genomów psa i kota nie zawdzięczamy bogaczom, marzącym o klonowaniu swoich ulubieńców, a ostatnio oznaczenia genomów psów z różnych części świata pozwoliły na hipotezę dwukrotnej, niezależnej ewolucji – selekcji wilka przez hodowców w Europie i Azji. Wspólnej przyczyny nie widzę.

Ale najwięcej (tysiące) zsekwencjonowano dotychczas gatunków bakterii, co wiąże się znowu z konkretnymi potrzebami medycznymi i poszukiwaniem nowych źródeł energii. Dla ewolucjonistów ważne okazało się odkrycie, przy okazji sekwencjonowania, że bakterie przekazują geny horyzontalnie, nawet między gatunkami, co bardzo utrudnia tworzenie koncepcji drzewa ewolucyjnego wczesnego życia na Ziemi. Aby dowiedzieć się czegoś o ewolucji organizmów wyższych, „miękkich”, niezachowanych w postaci skamieniałości, sekwencjonuje się geny współczesnych organizmów, wybierając takie, które były konieczne nawet dla życia najstarszych organizmów, np. kodujące rybosomalne RNA. Dane o tych genach pozwalają także potwierdzać wnioski paleontologów o ewolucji wyższych zwierząt.

To właśnie dzięki wykopaliskom, na Grenlandii i w Chinach, przez ostatnie 15 lat dowiedzieliśmy się nowych faktów o ewolucji ssaków. Co najważniejsze: że przebyły długą drogę różnicowania gatunkowego na długo przed erą dinozaurów, czego z samych badań genów chyba byśmy się nie dowiedzieli. Po upadku planetoidy życie musiało startować prawie od nowa. Do niedawna sądzono, że ssaki wyewoluowały „u stóp dinozaurów”, a ponieważ były małe, to wytrzymały kosmiczną katastrofę 65 mln lat temu. Ale paleontolodzy wykazali, że pierwsi przedstawiciele ssakopodobnych pojawili się wcześniej, już 200 mln lat temu, i mieli najważniejsze cechy późniejszych ssaków: ciało pokryte futrem, sprawniejsze w rozgryzaniu pokarmu szczęki, guzki na trzonowych zębach. U tych zwierząt ewolucja „postanowiła” wymieniać dwa pokolenia zębów (potem my do protetyka, pieskowi papki do miski) co lepiej się sprawdza przy mlecznym karmieniu niemowląt we wrogim i niebezpiecznym otoczeniu. Zmiany w budowie zębów i uszu zdecydowały o sukcesie ewolucyjnym tej gałęzi gatunków, a silny rozwój kości otaczających narząd słuchu tłumaczy się jako korzystną izolację od hałaśliwego miażdżenia pokarmu. Dinozaury były ogromne, ale to przodkowie ssaków wykazali największą elastyczność w dostosowywaniu się do różnych nisz ekologicznych i różnych warunków środowiska! One ewoluowały, a dinozaury rosły...

Uderzenie planetoidy skutkowało pożarami, gigantycznymi falami oceanów i niespotykanymi dotąd wybuchami wulkanów. Zginęły ogromne dinozaury, a ze ssaków nie przeżyły żadne większe ani wyspecjalizowane pokarmowo. Przeżyli nieliczni przodkowie torbaczy i wczesne łożyskowe. A potem (6 mln lat temu) pewne zwierzę poszło w jedną stronę aż do dzisiejszych szympanów, a jego rówieśnik w drugą – i to jesteśmy my.

Magdalena FIKUS



## Losowość w komputerze

Od komputera oczekujemy przede wszystkim precyzji i dokładności. Program szukający wzorca w edytowanym tekście czy arkusz kalkulacyjny podsumowujący nasze miesięczne wydatki ma po prostu dać poprawny wynik. Wszelkie przejawy niedeterminizmu, losowości czy jakiegóż niestabilności przywołują skojarzenia z działaniem niepożądanym. Zwykle to prawda: dobry program ma obliczyć, narysować czy wyanimować dokładnie to, czego od niego chcemy. Okazuje się jednak, że czasem losowość jest nie tylko wskazana, ale wręcz niezbędna.

Losowości potrzebuje komputer chociażby wtedy, gdy użytkownik ma ochotę na pogranie w niektóre gry (jak kultowy *Saper* czy aktualnie będący na topie *2048*). Także niektóre procesy fizyczne najlepiej modeluje się na komputerze tak zwaną metodą Monte Carlo, która jest przecież silnie niedeterministyczna. Losowość jest również niezbędna w kryptologii.

No dobrze, ale skąd komputer bierze – jak już wiemy, niezbędne mu – losowe bity?

Sprawa wcale nie jest tak banalna, jak by się mogło wydawać. Przecież w komputerze nie ma ukrytej monety, którą mógłby on w razie potrzeby podrzucać. Więcej: cała jego konstrukcja jest tak pomyślana, żeby jego zachowanie było w pełni przewidywalne (bo opisane przez wykonywane programy). Na losowość w komputerze trzeba więc patrzeć tak, jak na swoisty zasób, który komputer musi jakoś pozyskać. I pozyskuje, mierząc czy analizując wszystko co wokół, a co nie jest w pełni deterministyczne. Trzecia cyfra po przecinku pomiaru temperatury procesora (w komputerze jest termometr!) czy krzywizna ruchu myszki, którą operuje użytkownik, to przykłady zjawisk, które komputer ma w zasięgu cyfrowego wzroku. Są to z pewnością zjawiska w jakiejś mierze losowe, ale z pewnością nie *jednostajnie* losowe, a takie będą dla nas najcenniejsze.

Na szczęście nie wszystko stracone. Istnieją metody pozwalające (w deterministyczny sposób!) z losowości *słabej* wyprodukować losowość *niemal jednostajną!* Podamy prosty przykład: założmy, że mamy niesymetryczną monetę (orzeł trafia się z szansą  $p$ , a reszka  $(1 - p)$ ). Potrzebujemy jednego prawdziwie losowego bitu. Rzućmy monetą dwukrotnie. I tak: jeśli wypadły dwa orły albo dwie reszki, to próbę uznajemy za spaloną i eksperyment powtarzamy. Umówmy się teraz, że wynik OR interpretujemy jako orła, a RO – jako reszkę. Jaka jest szansa na ciąg OR? Oczywiście  $p(1 - p)$ . A na ciąg RO? Widać, że  $(1 - p)p$ , czyli dokładnie tyle samo! A więc ani „nowy orzeł”, ani „nowa reszka” nie mają żadnej przewagi.

Wszystko jest dokładnie symetryczne, a więc możemy w ten sposób produkować *naprawdę* losowe bity.

Metody takie jak wyżej nazywamy w informatyce *ekstraktorami losowości*. Dobry ekstraktor to taki, który po prostu produkuje coś bardzo losowego z czegoś słabo losowego. W tym miejscu należałoby dokładnie zdefiniować, co rozumiemy pod tymi terminami.

Redaktor Cezary Łasiczka w TOK FM przyrównał ekstraktor do magicznego urządzenia, które umożliwia poprawną pracę silnika spalinowego, nawet gdy wlejemy do niego mieszkankę wody i benzyny. Matematycy próbują dopuścić używanie możliwie najbardziej rozwodnionej mieszaniny.

Kluczowym pojęciem, które posłuży jako „miara losowości” jest tutaj tak zwana *min-entropia* rozkładu prawdopodobieństwa. Dla rozkładu skończonego określamy

$$H_{\infty}(X) = \min_{x \in X} (-\log(P(X = x))).$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli dopuszczamy  $2^n$  różnych wartości pomiaru, to rozkład jednostajny ma min-entropię równą  $n$ , a rozkład skupiony w jednym punkcie ma min-entropię zero. Dobry ekstraktor to taki, który ze źródła (albo kilku niezależnych źródeł) o słabej min-entropii (czyli gdy stosunek min-entropii do logarytmu z mocy nośnika jest mały) generuje rozkład bliski jednostajnemu (sama min-entropia przy deterministycznym przekształceniu wzrosnąć nie może, ale już opisany stosunek tak, o ile tylko przeciwdziedzina jest istotnie mniejsza niż dziedzina).

Badania nad ekstraktorami to poważna i ciekawa dziedzina twardej matematyki. Do niedawna problemem otwartym było podanie przykładu ekstraktora dwuźródłowego, który oblicza choć jeden niemal losowy bit, przy założeniu, że oba niezależne źródła mają min-entropię poniżej połowy maksymalnie możliwej (a więc mniejszej niż  $n/2$ ).

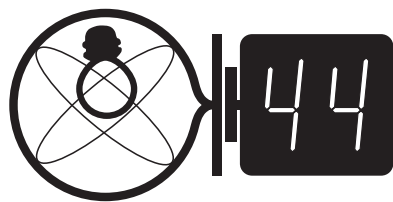
Uwaga: ekstraktor ma być uniwersalny. To znaczy ma działać z **dowolnymi** rozkładami o podanej min-entropii. Ekstraktory tworzone dla konkretnego rozkładu są łatwe do uzyskania.

Pierwszy taki przykład podał w roku 2005 laureat medalu Fieldsa, Jean Bourgain. W roku bieżącym wynik ten poprawili spektakularnie Eshan Chattopadhyay oraz David Zuckerman, podając konstrukcję, która działa dla dwóch niezależnych źródeł o min-entropii co najmniej  $(\log n)^C$  dla pewnej (dużej) stałej  $C$ . Ich praca *Explicit Two-Source Extractors and Resilient Functions* była prezentowana w czerwcu na konferencji STOC 2016 (*48th Annual Symposium on Theory of Computing*) w Massachusetts Institute of Technology i została wyróżniona jedną z trzech równorzędnych nagród przyznawanych za najlepsze prace.

Tomasz KAZANA

# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*



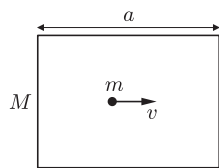
### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

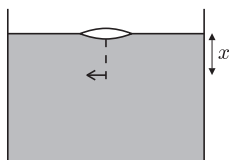
### Zadania z fizyki nr 624, 625

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2016

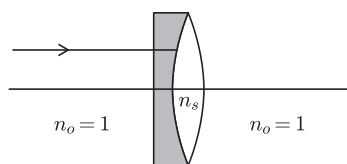
Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*



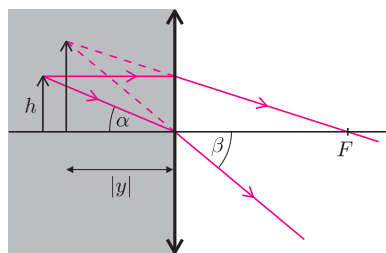
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

**624.** Ciężarek o masie  $m$  zawieszony jest w polu ciężkości na nieważkiej sprężynie o współczynniku sprężystości  $k$ . Długość nierozciągniętej sprężyny jest zaniedbywalna. Sprężynę odchyłono do poziomu, rozciągnięto do długości  $x_0$  i puszczono swobodnie. Znaleźć najmniejszą długość sprężyny podczas ruchu.

**625.** Na dnie naczynia znajduje się cienka metalowa płytka, której powierzchnia  $S$  jest dużo mniejsza od powierzchni dna naczynia. W naczyniu znajduje się ciecz o gęstości  $\rho$  i stałej dielektrycznej  $\epsilon$ . Wysokość słupa cieczy jest dużo mniejsza od rozmiarów liniowych płytki. O ile podniesie się ciecz nad płytką, gdy na płytkę wprowadzony zostanie ładunek  $Q$ ?

### Rozwiązania zadań z numeru 6/2016

Przypominamy treść zadań:

**620.** W chwili początkowej prostokątna ramka o masie  $M$  spoczywa na powierzchni poziomej, a mała kulka o masie  $m$  porusza się z prędkością  $v$  wewnątrz ramki, równoległe do boku o długości  $a$  (rys. 1). Kulka zderza się sprężysto ze środkami krótszych boków ramki. Znaleźć czas pomiędzy kolejnymi zderzeniami z tym samym bokiem ramki. Nie ma tarcia.

**621.** Dwuwypukła soczewka o promieniach krzywizny  $R$ , wykonana ze szkła o współczynniku załamania  $n_s$ , zanurzona jest jedną stroną w wodzie (rys. 2). Mały przedmiot znajduje się w wodzie na osi optycznej soczewki, w odległości  $x$  od soczewki. Wysokość przedmiotu wynosi  $h$ . W soczewce powstaje obraz pozorny. Jakie jest jego powiększenie liniowe? Współczynnik załamania szkła jest równy  $n_w$ .

**620.** W układzie środka masy prędkości kulki i ramki odpowiednio  $\mathbf{v}_1$  i  $\mathbf{v}_2$  spełniają związki:  $m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{v}_2 = 0$ ,  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_w$ , gdzie  $\mathbf{v}_w$  jest prędkością względną. Stąd  $v_1 = \frac{M}{M+m}v_w$ ,  $v_2 = \frac{m}{M+m}v_w$ . Energia w układzie środka masy wynosi  $E = \frac{1}{2}Mv_2^2 + 2mv_1^2 = \frac{mM}{2(m+M)}v_w^2$ . Na układ nie działają z zewnątrz w kierunku poziomym żadne siły, zatem środek masy porusza się ze stałą prędkością i jego energia kinetyczna nie zmienia się. Zderzenia są sprężyste, więc nie zmienia się również energia w układzie środka masy, prędkość względną kulki i ramki pozostaje stała i równa prędkości początkowej kulki  $v$ . Szukany czas między dwoma kolejnymi zderzeniami wynosi  $t = 2a/v$ .

**621.** Aby skonstruować obraz przedmiotu, jaki powstaje w soczewce, musimy odpowiedzieć na pytania: jak biegnie promień równoległy do osi optycznej po przejściu przez soczewkę oraz jak biegnie promień przechodzący przez środek soczewki. W przypadku promienia równoległego możemy wprowadzić umieszczony w powietrzu układ zastępczy, złożony ze stykających się cienkich soczewek – szklanej o promieniach krzywizny  $R$  oraz płasko-wklęsłej soczewki

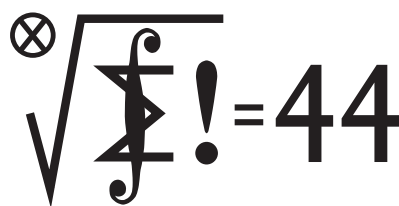
wodnej (rys. 3). Odwrotność ogniskowej takiego układu jest sumą odwrotności poszczególnych soczewek:

$$\frac{1}{f} = -\frac{n_w - 1}{R} + \frac{2(n_s - 1)}{R} = \frac{2n_s - n_w - 1}{R}.$$

Oznaczmy kąt padania na środek soczewki promienia wychodzącego z końca przedmiotu (rys. 4) przez  $\alpha$ , a kąt załamania tego promienia przez  $\beta$ . Ponieważ przedmiot jest mały, mamy  $\beta = n_w\alpha$  zgodnie z prawem załamania.

Korzystając z rysunku 4 i przybliżenia małych kątów, otrzymujemy związki:  $h = x\alpha$ ,  $H = |y|\beta$ , gdzie  $y$  jest odległością obrazu od soczewki,  $H$  wysokością obrazu. Z podobieństwa odpowiednich trójkątów mamy też:  $\frac{H}{h} = \frac{f+|y|}{f} = n_w \frac{|y|}{x}$ . Stąd  $|y| = \frac{fx}{n_w f - x}$ , a szukane powiększenie dane jest wzorem

$$p = \frac{H}{h} = \frac{1}{1 - x \frac{2n_s - n_w - 1}{n_w R}}.$$



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
717 ( $WT = 3,70$ ) i 718 ( $WT = 1,03$ )  
z numeru 3/2016

Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	42,24
Janusz Olszewski	Warszawa	42,14
Paweł Kubit	Kraków	41,52
Marek Gałecki	USA	37,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Piotr Kumor	Olsztyn	34,15
Witold Bednarek	Łódź	33,95

## Zadania z matematyki nr 727, 728

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**727.** Trójkąt równoboczny o boku długości  $n$  został podzielony (prostymi równoległymi do boków) na  $n^2$  trójkącików o boku 1. Każdy wierzchołek powstałej siatki (tj. wierzchołek któregoś trójkącika) jest pomalowany na biało lub czarno. Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu zmieniamy kolor wszystkich wierzchołków, leżących na jednej linii prostej, zawierającej bok któregoś trójkącika.

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n \geq 2$ , dla których – wychodząc od stanu: wszystkie wierzchołki białe – można dojść do stanu: dokładnie jeden wierzchołek czarny.

**728.** Czy istnieje funkcja różniczkowalna  $f$ , będąca różnowartościowym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb dodatnich na ten sam zbiór, i taka, że jej pochodna jest funkcją odwrotną do  $f$ ?

Zadanie 728 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi

## Rozwiązania zadań z numeru 6/2016

Przypominamy treść zadań:

**723.** Czy każdy ściśle rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych ma wyraz, będący jednocześnie pewnym wyrazem ciągu Fibonacciego  $(F_n)$ ? ( $F_1 = F_2 = 1$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ).

**724.** Dowieść, że liczby zespolone  $a, b, c$  spełniają równanie

$$|a + b - c| + |b + c - a| + |c + a - b| = |a| + |b| + |c|$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równanie

$$|a + b - c| + |b + c - a| + |c + a - b| = |a + b + c|.$$

**723.** Odpowiedź: nie. Banalny kontrprzykład (jeden z wielu): ciąg  $(11n + 4; n = 1, 2, 3, \dots)$ . Ciąg Fibonacciego – a raczej jego początkowy odcinek – zapisany modulo 11, przedstawia się tak: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1,  $\dots$ . Dalej reszty (mod 11) powtarzają się cyklicznie, z okresem 10; reszta 4 jest w tym ciągu nieobecna.

**724.** Podstawienie  $a = y + z$ ,  $b = z + x$ ,  $c = x + y$  przeprowadza dane dwa równania do postaci

$$(1) \quad |x| + |y| + |z| = \frac{1}{2}(|y + z| + |z + x| + |x + y|)$$

oraz

$$(2) \quad |x| + |y| + |z| = |x + y + z|.$$

Oczywiste są nierówności

$$|x| + |y| + |z| \geq \frac{1}{2}(|y + z| + |z + x| + |x + y|) \geq |x + y + z|.$$

Jeśli więc liczby  $x, y, z$  spełniają równanie (2), to spełniają też i równanie (1). Pozostaje do wykazania implikacja przeciwna.

Załóżmy więc, że spełnione jest równanie (1), czyli że zachodzi równość w pierwszej z napisanych nierówności. To wymusza jednoczesne zachodzenie trzech równości:

$$|y + z| = |y| + |z|, \quad |z + x| = |z| + |x|, \quad |x + y| = |x| + |y|.$$

Liczby  $|x+y|$ ,  $|x|$ ,  $|y|$  są długościami boków trójkąta (na płaszczyźnie zespolonej) o wierzchołkach  $0, y, -x$ . Równość  $|x + y| = |x| + |y|$  oznacza, że jest on zdegenerowany do odcinka o końcach  $y, -x$ , czyli że punkty  $x, y$  leżą na jednej półprostej, wychodzącej z punktu 0. Ta sama konkluzja dla par  $y, z$  oraz  $z, x$  pokazuje, że wszystkie trzy punkty  $x, y, z$  leżą na jednej takiej półprostej. A wówczas zachodzi równość (2). To kończy rozwiązanie zadania.

**Uwaga.** Warto może zauważyć, że dwa podane (równoważne) równania *nie są* równoważne trzeciemu równaniu:

$$|a + b + c| = |a| + |b| + |c|,$$

czyli (w terminach zmiennych  $x, y, z$ ) równaniu, łączącemu prawe strony (1) i (2). Prosty przykład:  $x = y = 1, z = -1$ . Równania (1) i (2) nie są spełnione, ale ich prawe strony mają jednakową wartość.



## Prosto z nieba: Akcelerator w centrum Galaktyki

Promieniowanie kosmiczne to rozpędzone do prędkości bardzo bliskich prędkości światła protony, elektrony i jądra atomowe, a także fotony gamma – atmosfera Ziemi jest poddawana ich stałemu bombardowaniu. Rekordowe cząstki mają energię kinetyczną bliską  $10^{20}$  eV, co jest porównywalne ze zjawiskami makroskopowymi, np. energią jabłka spadającego z drzewa. Jak każdy tajemniczy przejaw kosmicznej aktywności, także promieniowanie kosmiczne jest szczegółowo badane przez astronomów. Rozpędzone cząstki i fotony wnikające do atmosfery produkują pęknięcie optycznego promieniowania Czerenkowa (dzieje się to wtedy, gdy cząstka porusza się w ośrodku szybciej niż wynosi prędkość światła w tym ośrodku). Promieniowanie optyczne jest następnie rejestrowane przez ogromne (powierzchnia lustra porównywalna z polem do gry w tenisa) teleskopy optyczne np. projektu H.E.S.S (High Energy Stereoscopic System) w Namibii.

Historycznym odkrywcą promieni kosmicznych był Victor Hess, który w 1912 roku przeprowadził, używając dopiero co wynalezionej przez Theodora Wulfa elektrometru, eksperyment balonowy, podczas którego stwierdził, że powietrze na dużych wysokościach jest o wiele silniej zjonizowane niż przy powierzchni Ziemi. Źródło promieniowania musi zatem znajdować się ponad atmosferą. Za swoje odkrycie dostał Nagrodę Nobla w 1936 roku.

## Niebo w październiku

Miłośnikom obserwacji lub astrofotografii naszego naturalnego satelity polecamy zapamiętać datę 16 X. Tej nocy wystąpi zjawisko „super Księżyc”: będzie można obserwować Księżyc jednocześnie w pełni i w perygeum swojej orbity, czyli najbliżej Ziemi. Warto pamiętać, iż nazwa „super Księżyc” lub z angielskiego „super full moon” nie jest oficjalnym terminem astronomicznym. Określenie to po raz pierwszy użyte zostało przez astrologa (a nie astronoma!) Richarda Nolle’a w 1979 roku, który nazwał tak Księżyc będący w położeniu (lub blisko, z dokładnością do 90%) najbliższym Ziemi. Do dziś nie wiadomo, co miał na myśli, sugerując 90% dokładność. W związku z tym różne źródła odmiennie kwalifikują daną pełnię Księżyc. Astronomowie definiują jedynie Księżyc będący w pełni i znajdujący się w syzygijnym perygeum swojej orbity (syzygium oznacza położenie trzech ciał niebieskich w linii prostej). Nasz naturalny satelita wydaje się wtedy o około 7% większy i 16% jaśniejszy dla obserwatorów z Ziemi niż standardowo Księżyc w pełni. Najciekawsze zjawisko „super Księżyc” wystąpi w listopadzie, warto więc wykorzystać październik na próbne obserwacje i fotografie.

Kto w lipcu próbował obserwacji planety karłowatej (1) Ceres, teraz powinien je zdecydowanie wznowić. Ceres w październiku będzie miała jasność około  $7,5^m$  i znajdzie się na granicy gwiazdozbiorów Wieloryba i Ryb.

W październiku warto zwrócić uwagę na planetoidy (4) Westa oraz (18) Melpomene. Zazwyczaj małe planetki w najbardziej sprzyjających położeniach względem obserwatorów z Ziemi mają jasności powyżej  $10^m$  i do obserwacji konieczne są co najmniej

Teleskopy projektu H.E.S.S. od około 10 lat obserwowały centrum naszej Galaktyki. W trakcie tej kampanii odkryto mocne, punktowe źródło promieniowania gamma, a także emisję pochodzącą z obłoków molekularnych, otaczających źródło w promieniu 500 lat świetlnych. Obłoki te są w sposób ciągły bombardowane przez strumień naładowanych cząstek (protonów), co zapewnia ich świecenie w dziedzinie gamma. Podobnie do ziemskich akceleratorów cząstek tajemnicze źródło rozpędza protony do petaelektronowych energii ( $1 \text{ PeV} = 10^{15} \text{ eV}$ ). Według naukowców z H.E.S.S. źródło znajduje się w centralnym obszarze naszej Galaktyki o promieniu około 30 lat świetlnych i jest aktywne od co najmniej 1000 lat. W centralnych rejonach Galaktyki może znajdować się wiele obiektów zdolnych produkować promieniowanie kosmiczne o tak wysokiej energii: pulsary i pozostałości po supernowych, a nawet „zwykłe” zgrupowania masywnych gwiazd. Głównym kandydatem na tajemniczy akcelerator jest jednak galaktyczna czarna dziura Sgr A\* – jej jeszcze większa niż obecnie aktywność w przeszłości tłumaczyłaby większość strumienia promieniowania kosmicznego rejestrowanego obecnie na Ziemi.

*Michał BEJGER*

małe teleskopy. Tym razem jednak obiekty te będą osiągalne dla posiadaczy lornetek oraz lunetek. Czwarta w kolejności odkrycia Westa, z jasnością około  $8^m$ , znajdzie się w okolicach gwiazdozbioru Raka. Stupięćdziesięciokilometrowa Melpomene jest jedną z największych planetoid Pasa Głównego, czyli obszaru między Marsem i Jowiszem. Ta, odkryta w połowie XIX wieku i nazwana imieniem bogini tragedii greckiej planetka znajdzie się również w rejonie gwiazdozbioru Wieloryba. Jasność Melpomene będzie bardzo zbliżona do jasności Westy.

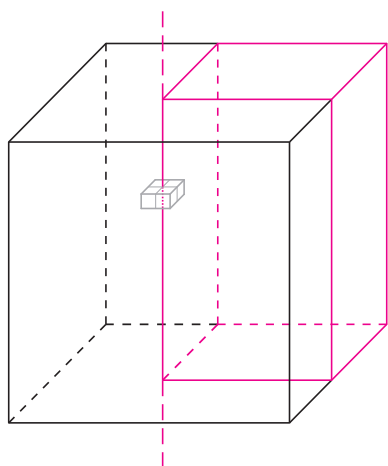
Zaczyna się również dobry sezon polowań na spadające gwiazdy. W październiku można obserwować kilka rojów meteorów. Znane coroczne Drakonidy, z radiantem w gwiazdozbiorze Smoka (rektascensja  $17,5^h$ , deklinacja  $+54^\circ$ ) będzie można obserwować od 6 do 10 X, jego spodziewane maksimum to 5 śladów na godzinę, które przypadnie 8 X. Związane z kometą Halleya Orionidy będą pojawiać się od 2 X do 7 XI na pograniczu konstelacji Oriona i Bliźniąt (rektascensja  $6,3^h$ , deklinacja  $+16^\circ$ ), ich największa aktywność nastąpi 10 X i wyniesie około 25 meteorów na godzinę. Kolejnym rojem wartym obserwacji są Południowe Taurydy (rektascensja  $2,1^h$ , deklinacja  $+9^\circ$ ), których szukać możemy w gwiazdozbiorze Byka na południe od Plejad. Taurydy są widoczne od 10 IX do 20 XI, ich maksimum wypada również 10 X, łowcom meteorów życzymy, by pogoda dopisała szczególnie 8–10 X.

Dobra wiadomość dla lubiących pospać dłużej: tegoroczna zmiana czasu z letniego na zimowy nastąpi 29/30 X.

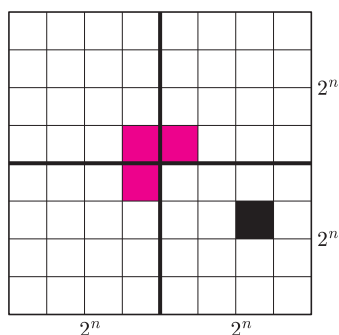
*Karolina BĄKOWSKA*

Wiele zadań przestrzennych łatwiej rozwiązać, gdy najpierw zbada się analogiczny problem płaski. Taki dwuwymiarowy odpowiednik czasem sam się narzuca, a czasem jego sformułowanie wymaga pewnej pomysłowości. Poniżej prezentujemy przykłady zadań o przestrzennych klockach, na różne sposoby „spłaszczane”.

1. Czy z prostopadłościennych klocków o wymiarach  $2 \times 3 \times 3$  można ułożyć prostopadłościan o wymiarach  $8 \times 8 \times 9$ ?
2. Z kostek domina o wymiarach  $2 \times 1$  ułożono szachownicę  $6 \times 6$ . Wykaż, że istnieje taka prosta równoległa do jednego z boków szachownicy i przechodząca przez jej wnętrze, która nie rozcina żadnej z kostek domina.
3. Z klocków o wymiarach  $2 \times 2 \times 1$  zbudowano sześcian  $20 \times 20 \times 20$ . Wykaż, że istnieje taka prosta równoległa do jednej z krawędzi sześcianu i przechodząca przez jego wnętrze, która nie przecina wnętrza żadnego z klocków.
4. Udowodnij, że po usunięciu z kwadratu o krawędzi  $2^n$  dowolnego spośród  $(2^n)^2$  tworzących go kwadratów jednostkowych powstaje figura, którą daje się szczelnie wypełnić klockami  $\square$ , zbudowanymi z trzech kwadratów jednostkowych.
5. Klockiem nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu o krawędzi 2 jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych, z których jest on zbudowany. Udowodnij, że po usunięciu z sześcianu o krawędzi  $2^n$  dowolnego spośród  $(2^n)^3$  tworzących go sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.



Rys. 1. Kolorowy prostopadłościan i szary klocek przebity prostą.



Rys. 2. Na czarno oznaczono usunięty kwadrat jednostkowy.

Zadanie 1 pochodzi z XI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, zadanie 3 z *Ligi 44* (nr 409), a zadanie 5 z L OM.

## Rozwiązania niektórych zadań

**R1.** Przyda się tu „spłaszczenie” polegające na spojrzeniu na ścianę  $8 \times 8$  prostopadłościanu  $8 \times 8 \times 9$ . Gdyby dało się zbudować go z opisanych w zadaniu klocków, ściana ta byłaby zbudowana z prostokątów o wymiarach  $2 \times 3$  oraz  $3 \times 3$ . Jednak to jest niemożliwe, gdyż figura złożona z takich prostokątów ma pole podzielne przez 3, a tymczasem ściana  $8 \times 8$  ma pole równe 64.  $\square$

**R3.** Prostych równoległych do pewnej krawędzi sześcianu, przechodzących przez jego wnętrze i biegnących wzdłuż linii podziału na kostki jednostkowe jest po  $19 \cdot 19$  w każdym z trzech kierunków, a więc łącznie  $3 \cdot 361 = 1083$ .

Założmy, że któraś z nich przebija nieparzystą liczbę klocków. Rozważmy prostopadłościan wyznaczony, w sposób przedstawiony na rysunku 1, przez tę prostą i dowolną równoległą do niej krawędź sześcianu. Wówczas objętość tego prostopadłościanu byłaby nieparzysta, bo zawierałby on po jednej kostce jednostkowej z każdego z przebitych klocków, a pozostałe klocki w całości lub po połowie. Liczba ta jest jednak jednocześnie wielokrotnością 20 (z uwagi na rozmiar sześcianu), co jest niemożliwe.

Zauważmy, że każdy klocek  $2 \times 2 \times 1$  może być przebity przez najwyżej jedną z rozważanych prostych. Gdyby każda z nich przebijała co najmniej dwa klocki, to łącznie przebijałyby one co najmniej  $2 \cdot 1083 = 2166$  klocków. To także jest niemożliwe, gdyż klocków jest łącznie  $20 \cdot 20 \cdot 20 / 4 = 2000$ . Wobec tego któraś z rozważanych prostych nie przechodzi przez żaden klocek.  $\square$

**R4.** Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla  $n = 1$  teza jest prawdziwa: rozważana figura jest pojedynczym klockiem. Założmy, że teza zachodzi dla pewnego  $n$ . Niech  $K$  będzie kwadratem o krawędzi  $2^{n+1}$ , z którego usuwamy jedno pole. Podzielmy  $K$  na cztery przystające mniejsze kwadraty o krawędzi  $2^n$ , jeden z nich zawiera usunięte pole. Umieścmy pojedynczy klocek na środku kwadratu  $K$  w sposób przedstawiony na rysunku 2. Wówczas na mocy założenia indukcyjnego każdy z czterech mniejszych kwadratów bez jednego pola da się szczelnie wypełnić klockami, co kończy dowód.  $\square$