SPIS TREŚCI
NUMERU 9 (508)

Szkoła Rycerska i Komisja Edukacji Narodowej	str. 1
Determinizm. Równania różniczkowe	str. 2
Mechanika analityczna	str. 3
Stabilność Układu Słonecznego	str. 4
Odkrycie planetoid	str. 5
Mgławica protoplanetarna	str. 6
Inne światy, inne geometrie	str. 7
Elektromagnetyzm	str. 8
Liczby zespolone i kwaterniony	str. 9
Interferencja i polaryzacja światła	str. 10
Ciepło i energia	str. 11
Kolej	str. 12
Antarktyda – odkrywanie nieznanego	str. 13
Atomy i cząsteczki chemiczne	str. 14
Regularność przypadku	str. 15
Biologia przed odkryciem teorii ewolucji	str. 16
Listy do księżniczki niemieckiej	str. 17
Równania algebraiczne	str. 18
Kongres Wiedeński i Uniwersytet Warszawski	str. 19
Mój warszawski Uniwersytet *Magdalena Fikus*	str. 20
Informatyczny kącik olimpijski (97): Flagi *Jacek Tomasiewicz*	str. 21
Klub 44	str. 22
Niebo we wrześniu	str. 24
Zadania	str. 24
Prawdopodobieństwo geometryczne *Joanna Jaszuńska*	str. 25

Dawid Hilbert 8 sierpnia 1900 roku w Paryżu powiedział

Pewność rozwiązalności każdego zadania matematycznego stanowi dla nas niezawodne wsparcie w pracy; słyszymy wewnętrzne wyzwanie: oto problem, szukaj rozwiązania. Możesz je znaleźć za pomocą czystego rozumowania; bo w matematyce nie ma ignorabimus!

W następnym numerze przyjrzymy się mimo to pytaniu: czy każdy problem da się rozwiązać?

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Podpunkt; rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

200 lat temu powstał Uniwersytet Warszawski

W tym numerze chcemy przypomnieć (szeroko rozumiane) tamte czasy

Szkoła Rycerska i Komisja Edukacji Narodowej

Druga połowa XVIII wieku nie pozostawiała złudzeń: Rzeczpospolita upada. Stąd determinacja tych, którzy chcieli ten proces odwrócić. Adam Kazimierz Czartoryski w wieku 29 lat zaczął wydawać gazetę, *Monitor* (ukazujący się dwa razy w tygodniu!), rok później został marszałkiem Sejmu, a cztery lata później, w 1768 roku – Komendantem Szkoły Rycerskiej. Szkoła ta przez 30 lat istnienia wypuściła 650 absolwentów, takich jak Kościuszko, Pułaski, Kniaziewicz, Zajączek, Sowiński. Mieściła się w Pałacu Kazimierzowskim, gdzie dziś jest Rektorat UW. To miała być kuźnia kadr, które Polskę uratują.

W XVII wieku reformacja i kontrreformacja zaowocowały wyścigiem o to, kto wykształci sprawniejszą i światlejszą elitę, bo – jak mówił Jan Zamoyski – *takie będą Rzeczypospolite, jakie młodzieży chowanie*. Stronę katolicką w tym wyścigu reprezentowali jezuici, pijarzy, a stronę protestancką przede wszystkim Akademia Genewska prowadzona przez zwolenników Jana Kalwina.

Czartoryski nie miał wyboru, bowiem w XVIII wieku władcy praktycznie wszystkich większych państw Europy byli z jezuitami na wojennej ścieżce i – po wielu próbach – udało im się w końcu skłonić papieża Klemensa XIV do kasacji jezuitów.

Polscy jezuici, mimo że ich majątek został przeznaczony na sfinansowanie KEN, mieli do niej stosunek pozytywny, o czym świadczy fakt, że jezuita, biskup Andrzej Gawroński, przetłumaczył podręczniki l'Huilliera z francuskiego (w jakim były napisane) na polski.

By mogła być uczelnią na najwyższym poziomie, potrzebowała takiejż kadry. Czartoryski sięgnął po nią do kalwińskiej Akademii Genewskiej, do wybitnego fizyka Georgesa-Louisa Le Sage'a. Ten skompletował odpowiednio kompetentną ekipę pod wodzą również fizyka, Christopha Pfleiderera, w skład której wszedł między innymi osiemnastoletni matematyk, Simon Antoine Jean l'Huillier.

To znacząca postać, a to z racji powstania w 1773 roku Komisji Edukacji Narodowej. Mogła ona powstać, bo niezbędne fundusze przekazano na jej rzecz z kasacji zakonu jezuitów. Aby mogła nieść oświecenie, potrzebne były podręczniki – w zakresie matematyki napisał je właśnie l'Huillier.

Podręczniki były cztery: *Arytmetyka, Planimetria, Stereometria* i *Algebra.* Ten ostatni zdobył wielką sławę i przez 40 lat był wielokrotnie wznawiany w całej Europie. Stało się tak z racji konkursu ogłoszonego przez prezesa berlińskiej Akademii Nauk, Josepha Louisa Lagrange'a.

Wielkim problemem gnębiącym społeczność matematyków była kwestia znalezienia ścisłych podstaw używanej już od dwóch wieków analizy matematycznej. Kłopoty zaczęły się 2000 lat wcześniej od aporii Zenona o strzale, która wystrzelona z łuku w każdej chwili jest w jakimś miejscu; kiedy więc leci? Dziś wiemy, że do opisu tego zjawiska potrzebne są dwie wielkości: położenie (gdzie jest?) i pęd (jak leci?). Starożytność nie potrafiła tego dostrzec, Średniowiecze (Bradwardine, Oresme) stworzyło teorię stanu i zmienności, której intensywność próbowano ująć matematycznie, Galileusz wskazał, że dla ruchu miarą zmienności będzie prędkość chwilowa, czyli powstała koncepcja (w dzisiejszej terminologii) pochodnej, ale nie umiano tego sensownie matematycznie opisać: Newton używał symbolu o, który to był, to nie był zerem, Leibniz opisywał monady liczb, Euler stworzył teorię różnych zer. Nic więc dziwnego, że Lagrange uciekł od problemu, postulując, że każda funkcja jest wielomianem. Oczywiście, zdawał sobie sprawę, że to bardzo brutalne ograniczenie, ogłosił więc konkurs na pracę z podstaw analizy. I kiedy l'Huillier namówiony przez Izabelę Czartoryską wysłał do Berlina swój podręcznik, Lagrange nagrodził go złotym medalem.

Analiza matematyczna występuje jeszcze na wielu stronach tego numeru.

W *Algebrze* l'Huillier przedstawia bowiem wystarczające, jak wiemy, do uprawiania analizy pojęcie ciągłości funkcji. Gdyby, pomijając nieistotne szczegóły, chcieć dzisiejszym językiem opisać jego sposób myślenia o ciągłości, byłaby to definicja Heinego. A więc: funkcja f jest ciągła w punkcie a, jeśli dla każdego ciągu argumentów (a_n) zbieżnego do a, ciąg $(f(a_n))$ jest zbieżny do tej samej granicy i jest nią $f(a)$.

Simon l'Huillier był także wychowawcą Adama Jerzego Czartoryskiego (syna Adama Kazimierza), bezpośredniego sprawcy powstania Uniwersytetu Warszawskiego – piszemy o tym na stronie 19.

Nieco starsi Czytelnicy przecierają oczy ze zdumienia: *jak to, to już pod koniec XVIII wieku polscy uczniowie uczyli się tego samego, co nie tak dawno było w podręcznikach dla liceów pióra Anieli Ehrenfeucht i Stefana Straszewicza?*

Pozostawiając ich z tym pytaniem, przypomnijmy, że ani Szkoła Rycerska, ani Komisja Edukacji Narodowej, ani Powstanie Kościuszkowskie nie zapobiegły temu, że w 1795 roku Polska zniknęła z mapy świata.

Marek KORDOS

Determinizm. Równania różniczkowe

Przybliżając, w najogólniejszym zarysie, charakterystyczne opinie sprzed około 200 lat o stanie i oczekiwaniach związanych z rozwojem równań różniczkowych w tamtym okresie, warto przytoczyć dwie wypowiedzi przypisywane jednemu z luminarzy tamtych czasów, Pierre-Simonowi de Laplace'owi (1749–1827).

[Sire,] ta hipoteza nie jest mi potrzebna – według tradycji to odpowiedź dana Napoleonowi I, który zapytał, dlaczego w rozprawie o wahaniach okresowych w ruchu Saturna i Jowisza nie ma wzmianki o Bogu.

Inteligencja, która by w danej chwili znała wszystkie siły ożywiające przyrodę i wzajemne położenie rzeczy, które wchodzą w skład przyrody (...), ogarnęłaby tą samą formułą ruchy zarówno największych ciał wszechświata, jak i najmniejszego atomu; nic nie byłoby dla niej niepewnym i przyszłość byłaby jej przytomna, podobnie jak przeszłość.

Obie wypowiedzi dotyczą nie tylko paradygmatów tamtej epoki, ale też bezpośrednio roli i znaczenia równań różniczkowych.

Pierwsza wypowiedź mówi o zerwaniu z podstawą metafizyczną nauki jako misji rozszyfrowania Bożego planu stworzenia, reprezentowaną w XVII i XVIII wieku przez Newtona, Leibniza czy Eulera. Choć dalej matematyka w tamtym czasie była rozumiana jako nauka absolutna, związana bezpośrednio z badaniem rzeczywistości (w tamtym czasie oznaczało to głównie fizykę). Mówi o tym drugi cytat.

Przyjrzyjmy się mu bliżej. Zawiera on stwierdzenia, że:

(a) brakuje nam tylko pełnej wiedzy o stanie układu (świata) w danej chwili,
(b) równania różniczkowe (mechaniki Newtona) już mamy i zawierają one pełen opis dynamiki układu, zarówno w przeszłości, jak i w przyszłości,
(c) równania te można (w zasadzie) rozwiązać i, korzystając ze znajomości stanu układu w danej chwili, można poznać stan układu w dowolnej chwili, przeszłej lub przyszłej.

Warunek (a) zawiera założenie o hipotetycznej możności posiadania takiej wiedzy.

Warunek (b) to paradygmat mówiący o hipotetycznej możności sprowadzenia wszystkich zjawisk w przyrodzie (włącznie z myśleniem, co wywoływało dyskusje o istnieniu lub nieistnieniu wolnej woli) do newtonowskiej mechaniki ruchu cząsteczek.

Warunek (c) to przekonanie o hipotetycznej możności rozwiązania równań mechaniki.

Takie założenia (dziś anachroniczne) stanowiły silną motywację do badania rzeczywistości, podobnie zresztą jak wspomniane wyżej założenia metafizyczne w poprzedniej epoce. Przekonanie, że na gruncie determinizmu można uzyskać pełne poznanie, wynikało z ogromnych postępów matematyki, w szczególności równań różniczkowych stosowanych do opisu zjawisk fizyki w dużym zakresie skal (od ruchu cząsteczki, przepływu ciepła, ruchu falowego, przez hydrodynamikę, do astronomii, do opisu ruchu Księżyca i planet).

Pokolenie Augustina-Louisa Cauchy'ego (1789–1857) uczyniło z matematyki naukę precyzyjną, opartą, jak się zdawało, na pewnych podstawach i weryfikowalną przez doświadczenia. Ogólna atmosfera była optymistyczna, choć pojawiały się trudności, wspomnijmy tylko paradoksy hydrodynamiczne (np. paradoks d'Alemberta w równaniach Eulera).

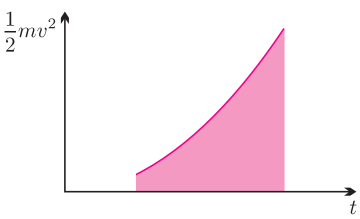
Patrząc na oczekiwania wobec matematyki i fizyki matematycznej oczami przedstawicieli tych dyscyplin sprzed około 200 lat, konstatacja obecnego stanu rzeczy jest raczej smutna. Pierwsza załamała się pewność fizyki matematycznej, już w drugiej połowie XIX wieku. James Clerk Maxwell (1831–1879) podważył uniwersalność opisu zjawisk fizycznych za pomocą mechaniki newtonowskiej (teoria pola), wyraził opinię, że opis rzeczywistości należy raczej ująć w języku prawdopodobieństw (demon Maxwella) oraz wskazał istnienie zjawiska chaosu, w szczególności zjawiska tzw. wrażliwości na warunki początkowe. Dalsze trudności, związane z geometrią euklidesową i paradoksami matematyki oraz poważne nieusuwalne problemy w podstawach matematyki zaowocowały utratą pewności samej matematyki. Zakwestionowano możność poznania prawdy w jej klasycznym rozumieniu.

Dziś motywacją uczonych nie jest już rozszyfrowywanie Bożego planu czy chęć uzyskania pewności. Stojąc na grząskim gruncie, badamy modele i modeliki, wytwory własnego umysłu. Jakby tego nie było dość, ewolucjoniści przekonują nas, że nie jesteśmy stworzeni na podobieństwo Boga, o czym zapewnia Biblia, jednostkami dysponującymi pełnymi władzami poznania, a tylko nieco ulepszonymi małpami, w związku z czym nasze ewentualne pretensje do pełnego poznania są śmiechu warte. Takie są paradoksy postępu.

Grzegorz ŁUKASZEWICZ

Mechanika analityczna

Mechanika klasyczna opisuje dynamikę zarówno małych układów mechanicznych zbudowanych z ciężarków, dźwigni i sprężynek, jak i całego Układu Słonecznego, za pomocą kilku praw sformułowanych pierwszy raz przez Newtona pod koniec XVII wieku. Cały XVIII wiek to intensywny rozwój metod matematycznych inspirowanych mechaniką Newtona, pozwalających na coraz prostszy opis mechaniki i coraz efektywniejsze metody rozwiązywania równań opisujących układy mechaniczne. Sukces mechaniki klasycznej sprawił, że na początku XIX wieku niektórzy, jak cytowany na poprzedniej stronie Laplace, uwierzyli, że cały świat da się opisać prostymi, deterministycznymi prawami.



Działanie dla cząstki swobodnej odpowiada polu pod krzywą wykresu energii kinetycznej $\frac{1}{2}mv^2$. Jeśli cząstka porusza się w polu siły o energii potencjalnej V, energię kinetyczną należy zastąpić wyrażeniem $\frac{1}{2}mv^2 - V$. Wyrażenie to, będące różnicą energii kinetycznej i potencjalnej, nosi nazwę *lagranżjanu* od nazwiska Josepha Louisa Lagrange'a, natomiast sumę energii kinetycznej i potencjalnej nazywa się *hamiltonianem* od nazwiska Williama Rowana Hamiltona. Hamiltonian może być więc interpretowany jako całkowita energia układu (tak rozumianej energii dotyczy twierdzenie Noether, o którym mowa na stronie 11).

Pojęcia takie jak lagranżjan czy hamiltonian mają swoje odpowiedniki w mechanice kwantowej, teorii grawitacji czy kwantowej teorii pola opisującej oddziaływania cząstek elementarnych. Klasyczna mechanika analityczna, w której lagranżjan i hamiltonian pojawiły się po raz pierwszy jako funkcje, za pomocą których można zakodować całą informację o ewolucji układu mechanicznego, stanowi swoisty wzorzec budowania teorii fizycznej, który był później rozwijany i stosowany do opisu innych zjawisk.

Niezwykle ważnym, dlatego że wielokrotnie później stosowanym w innych teoriach, schematem pojęciowym okazała się *zasada stacjonarnego działania* (znana także jako *zasada najmniejszego działania*). Współcześnie używane w mechanice klasycznej sformułowanie tej zasady podał William Rowan Hamilton w 1834 roku, opierając się na wynikach Fermata, Maupertuis, Eulera i Lagrange'a. Zasada ta mówi, że dla układu mechanicznego o pewnym określonym stanie początkowym i końcowym (np. początkowe i końcowe położenia cząstki) spośród wszystkich możliwych ruchów przeprowadzających stan początkowy w końcowy zostanie wybrany ten, dla którego pewna funkcja zwana *działaniem* jest *stacjonarna*. Stacjonarność oznacza, że przy niewielkim odchyleniu od wyróżnionej trajektorii ruchu wartość działania praktycznie się nie zmienia. Taka sytuacja ma miejsce m.in. wtedy, gdy działanie przyjmuje dla tej trajektorii wartość ekstremalną (minimalną lub maksymalną).

Ale czym właściwie jest działanie? Ogólna definicja, odwołująca się do analizy matematycznej, znacznie upraszcza się dla cząstki swobodnej o masie m. W tym przypadku wystarczy rozważyć energię kinetyczną tej cząstki, $\frac{1}{2}mv^2$, gdzie v jest prędkością cząstki, i zsumować – a w zasadzie scałkować – tę energię po wszystkich chwilach ruchu, powiedzmy od $t = 0$ do $t = T$, gdy cząstka przebywa odległość d. Okazuje się, że minimalnej wartości działania S odpowiada w tym przypadku ruch po prostej ze stałą prędkością. Łatwo podać proste przykłady ilustrujące ten wynik. Jeśli cząstka porusza się ze stałą prędkością, ale nie po linii prostej, to jej tor jest wówczas dłuższy, musi poruszać się zatem z większą prędkością, a to zwiększa wartość działania. Rozważmy więc ruch po prostej, ale ze zmienną prędkością: v_1 w pierwszej połowie czasu trwania ruchu i v_2 w drugiej. Wówczas $d = \frac{T}{2} \cdot v_1 + \frac{T}{2} \cdot v_2$, skąd wynika

$$S = \frac{mT}{2}\left(\left(v_1 - \frac{d}{T}\right)^2 + \frac{d^2}{T^2}\right)$$

i S przyjmuje wartość minimalną dla $v_1 = \frac{d}{T} = v_2$.

Takie sformułowanie praw mechaniki budziło pewien niepokój, ponieważ nasuwało się naturalne pytanie, czy cząstka „wybierając" trajektorię w jakiejś chwili musi „znać" swoją dalszą trajektorię aż do chwili kończącej jej ruch w przyszłości? Niepokój ten był nieuzasadniony, ponieważ wyprowadzane z zasady stacjonarnego działania równania ruchu były lokalne, czyli zmiana pędu cząstki w danej chwili czasu była równa działającej na nią sile zależnej od położenia i prędkości tylko w tej chwili. Otrzymywano więc opis równoważny opisowi za pomocą zasad dynamiki Newtona. Rozwinięty właśnie w celu wyprowadzania równań ruchu z zasady stacjonarnego działania *rachunek wariacyjny* znajduje zastosowanie w wielu innych teoriach.

Klasyczny przykład zastosowania rachunku wariacyjnego to problem znalezienia kształtu, który przybierze łańcuch powieszony za końce na dwóch słupkach. Żeby go rozwiązać, należy znaleźć kształt, dla którego suma wkładów do energii potencjalnej od wszystkich ogniw łańcucha będzie minimalna. Warunek na znikanie wariacji całkowitej energii potencjalnej daje się przetłumaczyć na proste równanie różniczkowe opisujące krzywą, wzdłuż której ułoży się łańcuch.

Spektakularnym przykładem jego zastosowania były wydarzenia z końca 1915 roku, kiedy David Hilbert wyprowadził świeżo odkryte przez Einsteina równania ogólnej teorii względności z zasady wariacyjnej (odpowiednio dla tej teorii sformułowanej), czym zrobił ogromne wrażenie na Einsteinie, który doszedł do tych równań zupełnie inną drogą. Po tych wydarzeniach Einstein w swojej pracy naukowej regularnie wykorzystywał rachunek wariacyjny.

W mechanice klasycznej *wariacją* krzywej nazwano niewielkie zaburzenie tej krzywej, natomiast wariacją działania nazwano różnicę wartości działania dla krzywej zaburzonej i niezaburzonej. Zasada stacjonarnego działania wyróżnia te trajektorie, dla których wariacja działania znika. Można się było zastanawiać, dlaczego akurat takie trajektorie są wybierane przez naturę, ale nie dało się na to odpowiedzieć na gruncie mechaniki klasycznej. Znacznie później Dirac i Feynman podali wyjaśnienie oparte na mechanice kwantowej, ale to już temat na zupełnie inną opowieść.

Szymon CHARZYŃSKI, Krzysztof TURZYŃSKI

Stabilność Układu Słonecznego

Od czasów Newtona znane są prawa rządzące ruchem ciał podlegających siłom przyciągania grawitacyjnego. Dla izolowanego układu N ciał dostajemy układ $3N$ równań różniczkowych drugiego rzędu (po trzy na współrzędne środka masy każdego ciała), który ma jednoznaczne rozwiązanie przy zadanych położeniach i prędkościach początkowych. W istocie, można ograniczyć się do układu współrzędnych związanego ze środkiem masy całego układu i liczba równań redukuje się do $3(N-1)$. Tak precyzyjnie sformułowane zagadnienie nosi nazwę problemu N ciał.

Niestety, ścisłe rozwiązania tych równań zostały znalezione tylko w szczególnych przypadkach. Najważniejszym z nich jest zagadnienie Keplera, czyli problem dwóch ciał. Z pierwszego prawa Keplera (zasada zachowania momentu pędu) wynika, że oba ciała poruszają się w nieruchomej płaszczyźnie. Całkowanie odpowiednich równań w biegunowym układzie współrzędnych r, φ (w tej płaszczyźnie) pokazuje, że trajektoria każdego ciała jest opisana równaniem postaci

$$r = \frac{A}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

gdzie A jest amplitudą, a $e > 0$ jest mimośrodem orbity. Powyższe równanie opisuje krzywą stożkową. Dla $e < 1$ jest to elipsa z ogniskiem w środku masy, a odpowiednie rozwiązania układu Newtona są okresowe.

Kepler w 1609 roku opublikował dwa prawa opisujące ruch planety wokół Słońca, co łatwo można przeformułować na zagadnienie dwóch ciał, a w 1619 trzecie prawo wiążące rozmiar orbity i czas jej obiegu. Izaak Newton wyprowadził z tych praw i zasad dynamiki prawo powszechnego ciążenia.

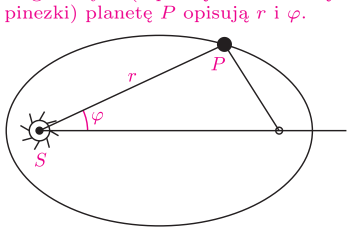
Ciekawe rozwiązanie zagadnienia trzech ciał zostało znalezione przez Lagrange'a. Tutaj trzy ciała leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego obracającego się wokół środka masy w ustalonej płaszczyźnie.

Pierwszą realizację rozwiązania Lagrange'a odkrył w 1906 roku Max Wolf: tworzą ją Słońce, Jowisz i planetoida Achilles.

Naturalnym układem grawitacyjnym jest nasz Układ Słoneczny (z dyskusyjną, ale znacznie większą od 2 liczbą N). Mimo iż nikt nie porywał się na rozwiązywanie skomplikowanego układu równań z nim związanego, to jednak problemu stabilności naszego sytemu nie można zignorować. Jest to pytanie, czy układ planetarny będzie zachowywał obecny kształt w odległej przyszłości, czy któraś z planet może go opuścić lub jakaś kolizja może spowodować jego dramatyczną zmianę.

Wszystkie planety obiegają Słońce po orbitach bardzo zbliżonych do elips będących rozwiązaniem odpowiedniego układu dwóch ciał dla $\varepsilon < 1$. Podobnie niektóre komety. Obserwujemy jednak również komety mające orbity paraboliczne bądź hiperboliczne (np. C/1980 E1 (Bowell); $\varepsilon = 1{,}057$).

Równanie elipsy uzyskuje się z praktycznego sposobu na jej rysowanie: wbijamy w podłoże dwie pinezki połączone sznurkiem o długości $2a$ i rysujemy wszystkie punkty (nazwijmy je położeniami planety), które zakreśli ołówek napinający sznurek. Jedną z pinezek nazwijmy Słońcem i oznaczmy S, a jedno z położeń planety P. W układzie współrzędnych biegunowych (o początku S i osi łączącej pinezki) planetę P opisują r i φ.



Odległość między pinezkami musi być mniejsza od długości sznurka, oznaczmy ją $2a\varepsilon$, gdzie $\varepsilon < 1$ nazywany jest mimośrodem. Z twierdzenia kosinusów mamy

$$r^2 + 4a^2\varepsilon^2 - 4ra\varepsilon\cos\varphi = (2a-r)^2.$$

Otwierając nawias, redukując r^2 i dzieląc obustronnie przez $4a$ otrzymujemy $a\varepsilon^2 - r\varepsilon\cos\varphi = a - r$, czyli $r(1-\varepsilon\cos\varphi) = a(1-\varepsilon^2)$, a więc równanie orbity planety podane w głównym tekście.

Ta kwestia stała się swego rodzaju obsesją XIX wieku i była na tyle istotna, że w 1885 roku król szwedzki, Oskar II, ufundował nagrodę za postęp w tej sprawie. Nagrodę dostał Henri Poincaré, ale trzeba uczciwie powiedzieć, że ani on, ani nikt inny do tej pory nie podał ścisłego matematycznego dowodu stabilności układu N ciał. W tym miejscu należy wymienić także nazwiska Karla Weierstrassa, Sophie Kowalewskiej i Petera Dirichleta, którzy aktywnie pracowali nad tym problemem.

Metoda stosowana przez XIX-wiecznych matematyków startowała od szeregów typu Fouriera. W pierwszym przybliżeniu zakładano, że Słońce jest nieruchome, a każda z planet porusza się ruchem okresowym (z okresem $2\pi/\omega_i$) po orbicie eliptycznej. Zatem położenie i-tej planety zadane jest szeregiem Fouriera

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m\cos(m\omega_i t) + B_m\sin(m\omega_i t)$$

z wektorami A_m i B_m zależnymi od danych początkowych. Następnie sukcesywnie uwzględniano się siły wzajemnych oddziaływań planet i ruch samego Słońca. Wprowadzenie tych zaburzeń prowadzi do tzw. szeregów Poincarégo. Niestety, nie można w rozsądny sposób zapewnić zbieżności tych szeregów.

Pewien postęp w tej sprawie uzyskano dopiero na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX wieku – jest on znany jako twierdzenie KAM od nazwisk jego twórców: Andrieja Kołmogorowa, Władimira Arnolda i Jürgena Mosera. Ale o tym napiszę w następnym numerze *Delty*.

Henryk ŻOŁĄDEK

Więcej szczegółów historycznych można znaleźć zwłaszcza w artykule Jürgena Mosera w *The Mathematical Intelligencer* 1(1978), 65–71.

Odkrycie planetoid

Na nocnym ziemskim niebie, przy dobrych warunkach obserwacyjnych, poza jasno świecącym Księżycem oraz gwiazdami, mamy pięć, znanych już od starożytności planet Układu Słonecznego: Merkurego, Wenus, Marsa, Jowisza i Saturna. Na ogół świecą one na tyle jasno, że z łatwością można je dostrzec gołym okiem. Mimo tego, że bez przyrządów optycznych można również zaobserwować Urana, to – głównie ze względów religijnych – uważano taki obraz nieba za skończony i niezmienny, nie dopuszczając myśli, że za orbitą Saturna może istnieć kolejna planeta.

Niezmienność nieba zakwestionowano dopiero na przełomie XVI i XVII wieku, gdy wybuchły dwie, widoczne gołym okiem, supernowe obserwowane przez Tycho Brahego (w 1572 roku) i Jana Keplera (w 1604 roku). Następnie, pod koniec XVI wieku, Fabricius odkrył zmienność gwiazdy Mira Ceti, a w XVII wieku Edmond Halley wykazał, że komety również krążą wokół Słońca.

Reguła Titiusa głosi, że rozmiary a_n półosi kolejnych planet Układu Słonecznego wyrażone w jednostkach astronomicznych spełniają zależność

$$a_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-1}.$$

Dla znanych Titiusowi planet, od Merkurego do Jowisza mamy $n = -\infty$, 1, 2, 3, 5, 6. Łatwo zauważyć, że według reguły Titiusa powinna istnieć jeszcze jedna planeta, między orbitami Marsa i Jowisza, która wypełniałaby olbrzymią pustkę 550 mln km i której już wcześniej próbowano z tego powodu szukać. Reguła Titiusa znana była nielicznym i dopiero Johann Bode po odkryciach Urana, planetoid i Neptuna (odpowiednio $n = 7$, 4 i 8) rozpowszechnił ją, w związku z czym dziś nazywamy ją regułą Titiusa–Bodego.

W 1766 roku Daniel Titius opublikował regułę mówiącą o tym, że rozmiary wielkich półosi planet Układu Słonecznego nie są przypadkowe, lecz związane prostym wzorem. Gdy więc w roku 1781 William Herschel odkrył Urana, którego rozmiar półosi spełniał tę regułę, intensywnie zaczęto szukać „brakującej” planety pomiędzy Marsem a Jowiszem, która powinna według niej istnieć. W 1799 roku powołano nawet specjalną grupę astronomów pod przewodnictwem barona von Zacha zwaną *Niebiańską Policją*, której zadaniem było odnalezienie zaginionej planety. Każdy z jej 24 członków miał przydzielony konkretny obszar 15 stopni nieba wzdłuż ekliptyki, który miał systematycznie monitorować.

Jednak odkrycia nie dokonał żaden z astronomów zaangażowanych w *Niebiańską Policję*, lecz włoski astronom z Palermo – Giuseppe Piazzi, który pracował nad katalogiem gwiazd i z tego względu również systematycznie obserwował niebo. W nocy z 31 grudnia 1800 roku na 1 stycznia 1801 roku w gwiazdozbiorze Byka odkrył on słaby obiekt ósmej wielkości gwiazdowej, którego nie było w katalogach gwiazd i który – jak się wkrótce okazało – poruszał się na sferze niebieskiej.

Instrument przejściowy to teleskop, służący do precyzyjnego pomiaru przejść ciał niebieskich przez południk lokalny.

Obserwacje wykonywane były za pomocą tzw. instrumentu przejściowego, dzięki czemu można było dokładnie ustalać położenie ciał niebiańskich na niebie. Jednak wadą tego instrumentu jest niemożliwość prowadzenia obserwacji obiektu, gdy ten zbliży się zbytnio do Słońca i minie południk lokalny, zanim stanie się odpowiednio ciemno. Tak się też stało z nowo odkrytym obiektem, który przestał być widoczny w instrumencie przejściowym po 11 lutego.

Piazzi bezskutecznie próbował wyznaczyć orbitę odkrytego przez siebie ciała (które potem nazwano Ceres), udało się to dopiero młodemu Carlowi Gaussowi, który użył opracowanej przez siebie metody wyznaczania orbit na podstawie trzech położeń w różnych chwilach.

Gauss przesłał wyniki swoich obliczeń baronowi von Zachowi, który zaobserwował Ceres we wskazanym przez Gaussa miejscu 31 grudnia 1801 roku, czyli prawie dokładnie rok po odkryciu jej przez Piazziego. Potwierdziło się wtedy, że nowo odkryte ciało ma orbitę eliptyczną, jak inne planety Układu Słonecznego, jednak świeci ono zbyt słabo i ma zbyt małe rozmiary (nawet w największych ówczesnych teleskopach nie można było dostrzec tarczy Ceres), aby mogło być długo poszukiwaną planetą.

W następnych latach odkryto inne tego typu ciała: w roku 1801 – Pallas, w 1804 – Juno, w 1807 – Westę, wszystkie mające podobne wielkie półosie swoich orbit i zdano sobie sprawę z tego, że nie znaleziono żadnej planety między Marsem a Jowiszem, gdyż takowej tam nie ma. Krążą tam za to drobne ciała, nazwane potem planetoidami. Planetoidę nr 5 – Astraeę – znaleziono w roku 1845, zatem po prawie 40-letniej przerwie, ale potem odkrycia kolejnych planetoid posypały się lawinowo i do końca XIX wieku znaleziono ponad 450 takich ciał. Obecnie liczba planetoid o znanych orbitach przekracza aż 450 tysięcy.

Ariel MAJCHER

Rozwiązanie zadania M 1506.
Z wzorów Viete'a wiemy, że $a+b+c=-2$ oraz $ab+bc+ca=0$. W takim razie mamy również

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 4.$$

Przekształcając równanie z zadania otrzymujemy $1 = 3x^3 + 6x^2 = 3x^2(x+2)$, czyli $\frac{1}{x^2} = 3(x+2)$. Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4} = 9(a+2)^2+9(b+2)^2+9(c+2)^2 = 9\big((a^2+b^2+c^2)+4(a+b+c)+12\big) = 9(4-8+12) = 72.$$

Mgławica protoplanetarna

Sposób, w jaki powstała Ziemia, Słońce i – ogólnie – świat, od zawsze mocno interesował zarówno fizyków, jak i filozofów. W połowie XVIII wieku przekonanie, że nauka jest w stanie opisać świat, zaowocowało „pozytywistycznymi” pracami Thomasa Wrighta (*An Original Theory or New Hypothesis of the Universe*, 1750), Immanuela Kanta (*Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, 1755) i Johanna H. Lamberta (*Cosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues*, 1761), według których Układ Słoneczny, a także planety znajdujące się przypuszczalnie w pobliżu innych gwiazd powstały podczas procesu zapadania się i chłodzenia pierwotnej, gorącej, obracającej się chmury gazu, która stopniowo spłaszczała się i fragmentowała na gęstsze protoplanetarne zarodzie. Obserwowane już wówczas „obiekty mgławicowe”, o których wiemy obecnie, że są galaktykami, były, zdaniem Kanta, podobnymi do naszego Układu Słonecznego „wyspami” rozrzuconymi po wszechświecie.

Więcej o wszechświecie wyspowym można przeczytać w artykule Agnieszki Janiuk, *Delta* 6/2015.

W traktacie *Exposition du Système du Monde* (1796) Pierre Simon Laplace niezależnie od wcześniejszych prac sformułował swój kompletny model „mgławicowego” powstawania światów, który dominował przez część XIX wieku mimo problemów w wyjaśnieniu jak moment pędu Układu Słonecznego dzieli się między Słońce a planety. Jak wielka musi być gazowa chmura, by zaczęła się spontanicznie zapadać, dając początek gwieździe i układowi planetarnemu, ustalił jednak dopiero sto lat później James Jeans. Rozmiar chmury λ jest funkcją temperatury chmury T, jej gęstości ρ i masy m cząstek ją tworzących i skaluje się jak $\lambda \propto \sqrt{T/(m\rho)}$. W wieku XX stworzono wiele alternatywnych modeli powstawania układów planetarnych. Obecnie możemy bezpośrednio obserwować młode gwiazdy (np. β Pictoris), a wokół nich gaz i pył, a także młode planety. Można zatem z przekonaniem stwierdzić, że osiemnastowieczny model „mgławicowy” formowania się układów planetarnych jest w gruncie rzeczy poprawny.

Modele kosmogoniczne zmieniały się z coraz lepszym poznaniem odległości we wszechświecie. Dokładny rozmiar Układu Słonecznego określano w XVIII wieku, używając zjawiska paralaksy słonecznej podczas obserwacji przejścia Wenus przed tarczą Słońca w 1761 i 1769 roku. Metodę tę zaproponował w 1716 roku Edmund Halley; obserwacje tranzytu Wenus przeprowadzone w drugiej połowie XVIII wieku dały całkiem niewielki błąd 2% pomiaru wielkości orbity Ziemi, którą oszacowano na 153 miliony kilometrów.

Na pierwszy dokładny pomiar odległości do najbliższych gwiazd metodą paralaksy astronomowie musieli poczekać do 1838 roku. Wtedy to Friedrich Bessel zarejestrował pozorny, związany ze zmianą położenia Ziemi, ruch gwiazdy 61 Cygni względem dalszych obiektów, wynoszący $313{,}6 \pm 13{,}6$ milisekund łuku (co tłumaczy się na odległość 10,4 lat świetlnych). Dokładne pomiary były możliwe dzięki postępom w technice obserwacyjnej. Bessel użył heliometru skonstruowanego w tym czasie przez Josepha von Fraunhofera. W tym samym roku opublikowano także pomiary innych badaczy: Friedricha von Struvego pomiar odległości do Wegi i Thomasa Hendersona pomiar odległości do α Centauri.

Co działo się w tym czasie w Warszawie? Już 4 lata po założeniu Uniwersytetu Warszawskiego wbito „pierwszą łopatę” pod budowę nowoczesnego obserwatorium astronomicznego. Warszawskie obserwatorium zlokalizowano w Ogrodzie Botanicznym przy Alejach Ujazdowskich. Budowę, zainicjowaną przez Franciszka Armińskiego, zakończono w 1825 roku. Początkowo obserwatorium działało jako instytucja samodzielna, a zostało połączone z Uniwersytetem w 1873 roku. Obserwatorium Warszawskie szybko stało się miejscem popularyzacji wiedzy o astronomii (wydano np. tłumaczenie *De revolutionibus* Kopernika na język polski) oraz ośrodkiem nowoczesnych badań z dziedziny astrofizyki obserwacyjnej. Pierwszym polskim astrofizykiem był Adam Prażmowski, który specjalizował się w badaniach Słońca (odkrył m.in., że światło korony słonecznej jest spolaryzowane), a także w budowie instrumentów optycznych. Tradycja precyzyjnych obserwacji – obecnie w postaci wielkich fotometrycznych przeglądów nieba, niezwykle dokładnej astrometrii i fotometrii służącej również do odkrywania układów planetarnych – jest do dziś kontynuowana w Obserwatorium w projektach ASAS i OGLE.

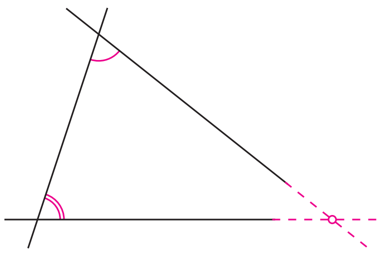
Michał BEJGER

Inne światy, inne geometrie

Geometrię szkolną nazywamy euklidesową, bo jej pierwsze aksjomaty zostały podane w *Elementach* Euklidesa (około −300). Wśród nich wyróżniał się aksjomat mówiący o tym, że na płaszczyźnie przez punkt poza prostą można poprowadzić tylko jedną prostą z nią rozłączną. Zasugerowana przez Proklosa (V wiek) możliwość wyprowadzenia tego aksjomatu z pozostałych przez następne 1300 lat drażniła ambicje praktycznie wszystkich matematyków, co owocowało dowodami błędnymi (bo opartymi na przesłankach, które same nie miały dowodów).

Dokładniej: ten podejrzany aksjomat brzmiał następująco.

Jeśli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z trzecią kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to proste te, po przedłużeniu, przetną się i to z tej właśnie strony.



Sytuacja zmieniła się, gdy Girolamo Saccheri opublikował *Euclides ab omni nævo vindicatus* (1733), gdzie badał geometrię bez podejrzanego aksjomatu, uzyskując szereg twierdzeń, w których w bardzo wątpliwy sposób doszukiwał się sprzeczności. Wtedy na arenę wkroczyli filozofowie zaniepokojeni, bo dopuszczenie (choćby na próbę) różnych (i sprzecznych!) opisów przestrzeni wydało im się niedopuszczalne, gdyż przestrzeń jest areną świata, a ten jest tylko jeden. Zwłaszcza rozważania Immanuela Kanta o różnym charakterze naszych sądów (*Krytyka czystego rozumu*) kazały tego rodzaju badania uznać za wykraczające poza obręb dającej się zaakceptować nauki.

Po polsku tytuł pracy Saccheriego to *Euklides ze wszystkich piętn oswobodzony.*

Reakcja matematyków była różna. Johann Heinrich Lambert, zająwszy się taką alternatywną geometrią, uzyskał tak wiele zaskakująco pięknych rezultatów (*Teoria równoległych*, 1761), iż ogłosił, że jeśli to nie jest nauka, to on chce uprawiać nienaukę. Z kolei Gauss, przekonawszy się w końcu do możliwości istnienia takiej geometrii, nie chciał ujawniać swoich rezultatów, bojąc się – jak pisał – *wrzasku Beotów.*

Sprawa istnienia alternatywnej geometrii nie dała się jednak ukryć. Dwaj młodzi ludzie uparli się nie tylko przy uprawianiu tej geometrii, lecz głosili jej równoprawność, ba – supremację nad geometrią euklidesową. Rosjanin, Nikołaj Łobaczewski, w 1829 roku opublikował pracę *O podstawach geometrii*, a Węgier, Janos Bolyai, w 1832 roku *Appendix* do książki ojca o dydaktyce matematyki – w obu tych pracach, choć odmiennie, nowa geometria była konsekwentnie wprowadzona. Rzecz skończyła się fatalnie dla obu odkrywców, ale nowa geometria stała się faktem.

Łobaczewski został usunięty ze stanowiska rektora uniwersytetu w Kazaniu i pozbawiony prawa wykładania, Bolyai zaś skutkiem nieprzychylnych opinii został wpędzony w śmiertelną depresję.

Sprawę statusu tej geometrii (zwanej już geometrią Bolyaia–Łobaczewskiego) określił Felix Klein, publikując w 1870 roku jej model w geometrii euklidesowej i model geometrii euklidesowej w geometrii B–Ł, czyli dowodząc ich równoprawności. Co więcej, Bernhard Riemann w swoim wykładzie habilitacyjnym (1854) wskazał sposób konstrukcji szerokiej rodziny geometrii, których te dwie były szczególnymi przypadkami. Tego też nie można było zakwestionować, bo jego koncepcja była prostym uogólnieniem gaussowskiej teorii powierzchni leżących w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Riemann uznał, że geometrie dzieją się w obiektach powstałych z pozlepiania kawałków zwykłej przestrzeni (tak jak zszywa się z łatek kożuchy czy torebki) – dziś noszą one nazwę rozmaitości. Na nich określa się odległość tak, by owo zlepianie nie powodowało powstawania osobliwości.

Wykład Riemanna nosił tytuł *O hipotezach leżących u podstaw geometrii.* Helmholtz, chcąc podkreślić, że stanowił on inspirację jego rozważań, opublikował swoją pracę pod tytułem *O faktach leżących u podstaw geometrii.*

Ale sprawę bezczelnie jasno postawił dopiero fizyk, Hermann Helmholtz, publikując (1868) pracę, w której odbiera matematyce walor nauki przyrodniczej, traktując ją jako skrzynkę z narzędziami dla nauk przyrodniczych.

I tak sprawa ponownie trafiła na pole filozofii. Jeśli bowiem prawd matematycznych nie weryfikuje przyroda, to skąd one się biorą? I czym w istocie, jeśli nie pochodzą z natury, są pojęcia matematyki? Tego rodzaju pytania stały się powodem powstania dyscypliny zwanej podstawami matematyki lub metamatematyką, która święciła swoje triumfy w XX wieku, choć przyniosła jako swoje rezultaty wielkie **nie wiadomo**.

Natomiast badanie tego, jak rozmaite kształty może przyjmować przestrzeń, stało się pierwszoplanowym zadaniem matematyków. Jeszcze Klein opisał wszystkie możliwe kształty przestrzeni dwuwymiarowych. Andriej Markow (syn) dowiódł, że zrobienie kompletnej systematyki kształtów przestrzeni o wymiarach większych od trzech nie jest możliwe, a ostatnio Grigorij Perelman sklasyfikował wszystkie możliwe kształty przestrzeni trójwymiarowych, czyli wszystkie teoretycznie możliwe kształty przestrzeni.

Praca Markowa mówi, że nie istnieje algorytm, który dla danych dwóch rozmaitości o wymiarze większym od trzech orzeka, czy są one jednakowo zbudowane (homeomorficzne).

Marek KORDOS

Elektromagnetyzm

W pierwszej połowie XIX wieku uważano, że za zjawiska cieplne, elektryczne, magnetyczne i świetlne odpowiedzialne są przepływy pewnych nieważkich i nieuchwytnych fluidów. Pogląd ten, który przetrwał do dziś w języku – mówimy przecież, że płynie prąd, i myślimy o przepływach ciepła – pozwolił także na rozwój matematycznego opisu wspomnianych zjawisk.

Badaniami naukowymi Coulomb zajął się dopiero po zakończeniu w wieku 48 lat kariery wojskowej. Nazwane dziś jego imieniem prawo odkrył dzięki zastosowaniu niezwykle czułej, lecz mało popularnej wagi skręceń. Wiadomo, że wynik zwany dziś prawem Coulomba uzyskał w 1772 roku Henry Cavendish, ale z jakichś powodów zachował go dla siebie.

Można zaryzykować stwierdzenie, że ilościowe badanie zjawisk elektrycznych rozpoczęło się od odkrycia w 1785 roku przez Charlesa Augustine'a Coulomba odwrotnej proporcjonalności siły oddziaływania między ładunkami elektrycznymi (lub biegunami magnetycznymi) do kwadratu odległości między nimi. W 1812 roku Siméon Denis Poisson sformułował teorię potencjału dla zjawisk elektrostatycznych (12 lat później opisał nią również zjawiska magnetyczne). Została ona w 1828 roku znacznie rozszerzona i uzupełniona o szereg kluczowych twierdzeń przez George'a Greena; twierdzenia te sformułowali także równolegle Carl Gauss, Michel Chasles i William Thomson.

Badanie przepływu ładunków elektrycznych, czyli prądu elektrycznego, było możliwe od chwili skonstruowania w 1800 roku przez Alessandro Voltę pierwszej baterii elektrycznej, która miała ilustrować występowanie napięcia kontaktowego powstającego przy zetknięciu różnych metali. Używając nowego wynalazku, w tym samym roku William Nicholson i Anthony Carlisle rozłożyli wodę na tlen i wodór. Wydzieleniem metodą elektrolizy kolejnych pierwiastków – w 1807 roku sodu i potasu, a w kolejnym baru, magnezu, strontu i wapnia – wsławił się Humphry Davy.

Rzecz jasna, zastanawiano się, czy „fluidy" elektryczne mogą wpływać na magnetyczne – i odwrotnie. W 1820 roku Hans Christian Oersted wykazał, że przepływ prądu elektrycznego może prowadzić do odchylenia igły magnesu – było to odkrycie elektromagnetyzmu. Zafascynowany wynikami Oersteda André-Marie Ampère jeszcze w tym samym roku sformułował zupełnie nową teorię fizyczną – elektrodynamikę – i wprowadził pojęcia napięcia elektrycznego i natężenia prądu, a później podał także wyrażenie na siłę oddziaływania przewodników z prądem. Również w 1820 roku Jean-Baptiste Biot i Félix Savart przeprowadzili serię doświadczeń, w wyniku których otrzymali ilościowe prawo dotyczące siły oddziaływania między przewodnikiem z prądem a igłą magnetyczną.

Ampère uosabiał geniusz połączony z niezwykłym roztargnieniem. Zdarzyło mu się opublikować podręcznik rachunku różniczkowego i całkowego bez podania tytułu dzieła i nazwiska autora.

Pojawiało się naturalne pytanie, czy także zjawiska magnetyczne mogą wpływać na elektryczne. François Dominique Arago i Alexander Humboldt zauważyli, że oscylacje igły magnetycznej zanikają szybciej, gdy umieszczona jest ona w pudełku z metalową podstawką, Arago stwierdził także, że obracająca się tarcza metalowa umieszczona pod igłą pociąga ją za sobą; zbliżone eksperymenty prowadzili też Charles Babbage i John Frederick Herschel oraz Ampère z Augustem De la Rivą. Wykazanie tego wpływu przypadło w udziale Michaelowi Faradayowi, który w 1821 roku odkrył, że w pobliżu magnesu na przewodnik działa siła powodująca jego krążenie wokół osi magnesu, trzy lata później podjął pierwszą – jeszcze nieudaną – próbę wykrycia indukcji magnetycznej, a powróciwszy do tych badań w roku 1831 w serii błyskotliwych doświadczeń uzyskał przepływ prądu indukowanego. Po sformułowaniu w latach 1833–1834 ilościowych praw elektrolizy Faraday badał także zachowanie ładunków w materii, łatając swe braki w analizie matematycznej obrazowymi pojęciami linii sił i opisywanego przez nie pola. Wreszcie, w 1845 roku Faraday wykazał związek między zjawiskami elektromagnetycznymi i świetlnymi, demonstrując skręcenie polaryzacji światła przepuszczanego przez szkło ołowiowe znajdujące się w silnym polu magnetycznym. Badaniami elektromagnetyzmu zajmował się także amerykański uczony, Joseph Henry. Skonstruował on wydajny elektromagnes dzięki użyciu drutu izolowanego i, równolegle z Faradayem, odkrył zjawisko indukcji elektromagnetycznej oraz jako pierwszy opisał w 1832 roku zjawisko samoindukcji.

Oprócz zajmowania się elektrycznością i magnetyzmem Faraday m.in. skroplił chlor i inne gazy, odkrył benzen i zbadał jego własności. Będąc człowiekiem niezwykle skromnym, nie przyjął proponowanych mu w dowód uznania tytułu szlacheckiego i stanowiska prezesa Royal Society.

Sformalizowane pojęcie pola jest kluczowym elementem wielu działów współczesnej fizyki, m.in. fizyki cząstek elementarnych czy ogólnej teorii względności.

Henry, mając wiele obowiązków dydaktycznych na Albany Academy, nie publikował na bieżąco swych wyników i stąd palma pierwszeństwa w odkryciu zjawiska indukcji przypadła Faradayowi. Faraday z kolei błędnie sądził w 1835 roku, że jako pierwszy opisał zjawisko samoindukcji.

Od 1825 roku Georg Simon Ohm przeprowadził serię doświadczeń, w wyniku których podał zależność między efektem magnetycznym płynącego prądu (proporcjonalnym do jego natężenia) a parametrami źródła prądu.

Publikacja prac Ohma wywołała falę krytyki, która skłoniła ministra oświaty Prus do wezwania ich autora, by zrezygnował z posady nauczyciela gimnazjalnego w Kolonii. Przez kilka kolejnych lat Ohm utrzymywał się z dorywczych lekcji matematyki.

Wraz z postępem w zrozumieniu zjawisk elektromagnetycznych przyszły także ich praktyczne zastosowania. Już w 1844 roku światło lamp łukowych iluminowało scenę paryskiej opery. A całkiem niedługo po niezależnym skonstruowaniu przez Josepha Swana i Thomasa Alvę Edisona pierwszych żarówek urządzenia elektryczne na dobre zagościły w ludzkich domach i elektryczność stała się czymś tak oczywistym, że mało kto wspomina dziś jej burzliwe początki.

Krzysztof TURZYŃSKI

Liczby zespolone i kwaterniony

Rozwiązywanie równań wymuszało poszerzenie zasobu liczb, jakimi się posługiwano. Równanie $x + 3 = 12$ można było rozwiązać, posługując się najnaturalniejszymi liczbami, zwanymi zresztą *naturalne*, ale równanie $x + 12 = 3$ wymagało rozszerzenia ich zasobu do liczb *całkowitych*. Wyjście poza obręb równań pierwszego stopnia pokazało, że do rozwiązania np. równania $x^2 - 2 = 0$ nie wystarczą nie tylko liczby całkowite, ale nawet wszystkie liczby wymierne, czyli ułamki a/b zbudowane z liczb całkowitych. Aby uzyskać rozwiązanie, do liczb wymiernych trzeba dołączyć nowe liczby, a wśród nich liczbę niewymierną $\sqrt{2}$.

Dlaczego nie wystarczy dołączyć samej liczby $\sqrt{2}$? Bo pojedyncze liczby są tak mało użyteczne, że nawet nie zasługują na uwagę. W istocie, na pytanie: *co to jest liczba?* istnieje tylko jedna, matematycznie użyteczna, choć pozornie paradoksalna, odpowiedź: liczba to element zbioru, którego elementy można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Zakłada się przy tym, że działania te powinny spełniać pewne naturalne warunki, jak np. przemienność i łączność dodawania oraz mnożenia, istnienie odwrotności każdej liczby różnej od zera itp., dobrze znane z algebry szkolnej. Zbiory liczb, spełniające te warunki, algebraicy nazywają ciałami.

Prawdziwą naturę liczb rzeczywistych dobrze oddaje definicja, pochodząca z jednego z najlepszych podręczników algebry: „Liczby rzeczywiste, *cokolwiek by to nie było*, mają następujące własności. . . ” – tu następuje lista własności działań. Użyteczność liczb polega nie na tym, że każda z nich z osobna istnieje, lecz na tym, że możemy na nich działać.

Liczby zespolone pojawiły się nie z racji rozwiązywania równań kwadratowych, bo łatwo przystano na to, że gdy tzw. delta jest ujemna, to rozwiązań nie ma. Okazało się jednak już w XVI wieku, że na drodze do rzeczywistych pierwiastków równań trzeciego stopnia trzeba posłużyć się liczbami zespolonymi.

Do zapisywania wyników pomiarów najlepiej nadaje się ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, które można sobie wyobrażać jako zbiór wszystkich ułamków dziesiętnych, z (przeważnie) nieskończoną liczbą cyfr po przecinku. Pozwala ono też na rozwiązanie bardzo wielu użytecznych równań, ale jednak nie wszystkich; na przykład równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze $\mathbb{R}$, gdyż lewa strona tego równania jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej x. Można jednak $\mathbb{R}$ tak rozszerzyć, by i dla niego znalazło się rozwiązanie. W szczególności możemy powiększyć zbiór liczb tak, by zawierał także rozwiązanie tego równania, tradycyjnie oznaczane i od *imaginary*, czyli *urojone*. Aby takie rozszerzenie $\mathbb{R}$ stało się ciałem, dołączyć też musimy wszystkie liczby postaci $a + bi$ dla $a, b \in \mathbb{R}$. Działania w tym rozszerzonym ciele $\mathbb{C}$ dane są wzorami

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i, \quad (a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Jak udowodnił 22-letni Carl Friedrich Gauss w roku 1799, każdy wielomian dodatniego stopnia ma w ciele $\mathbb{C}$ pierwiastek; jest to tak zwane **Zasadnicze Twierdzenie Algebry**. Jest to prawda także wtedy, gdy współczynniki naszego wielomianu są liczbami zespolonymi.

Ale porzućmy kwestię rozwiązywania równań (o niej jest mowa także na stronie 18).

Ponieważ liczba zespolona $a + bi \in \mathbb{C}$ jest wyznaczona przez parę liczb rzeczywistych (a, b), można ją interpretować jako punkt płaszczyzny kartezjańskiej $\mathbb{R}^2$ o współrzędnych $x = a$, $y = b$. Dodanie do dowolnego punktu płaszczyzny liczby $a + bi$ to przesunięcie tego punktu o wektor $[a, b]$. Mniej spodziewane jest jednak to, że pomnożenie punktu przez liczbę $a + bi$, gdy $a^2 + b^2 = 1$, czyli liczbę $\cos\varphi + i\sin\varphi$ odpowiada obróceniu tego punktu wokół punktu $(0, 0)$ o kąt φ. Zatem liczby zespolone pozwalają wygodnie reprezentować wszystkie ruchy sztywne płaszczyzny.

Naturalne było więc pytanie, czy nie da się analogicznie opisać ruchów przestrzeni trójwymiarowej, interpretując $\mathbb{R}^3$ jako ciało. Mimo wielu prób zrealizować tego się nie udawało (dziś wiemy, że jest to niemożliwe). Ale problem opisu ruchów przestrzeni trójwymiarowej (tradycyjny sposób wymaga użycia 12 współczynników) został po dziesięcioletnich wysiłkach rozwiązany przez Williama Rowana Hamiltona w 1843 roku przez uczynienie ciała z przestrzeni czterowymiarowej. Tu potrzebne są aż trzy jednostki urojone. Podanie głosi, że wiążące je zależności

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

olśniły go podczas spaceru nad Royal Canal w Dublinie, co uwiecznił, wycinając ten wzór na drewnianej poręczy mostku.

Uzyskane tak liczby postaci $a + bi + cj + dk$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tworzą dzięki tym tożsamościom ciało (co prawda nieprzemienne) nazwane ciałem kwaternionów i oznaczane na cześć Hamiltona przez $\mathbb{H}$.

Odsyłając do mojego artykułu, który będzie można znaleźć w następnym numerze *Delty*, tu podam tylko, jak za pomocą kwaternionów opisać obroty w przestrzeni trójwymiarowej.

Otóż ten cel udaje się zrealizować w następujący sposób. Umieśćmy naszą przestrzeń trójwymiarową wewnątrz $\mathbb{H}$, na ostatnich trzech osiach, tj. jako zbiór „czysto urojonych” kwaternionów $x_2i + x_3j + x_4k$. Niech $u_2i + u_3j + u_4k$ będzie wektorem długości 1, wskazującym oś obrotu, który chcemy zrealizować, oraz niech θ będzie kątem, o jaki chcemy obrócić przestrzeń. Rozważmy kwaternion

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot (u_2i + u_3j + u_4k) \in \mathbb{H}$$

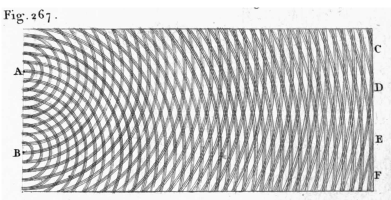
oraz przekształcenie $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ dane wzorem $x \mapsto q \cdot x \cdot q^{-1}$. Łatwo zauważyć, że prosta rozpięta przez wektor $x = u_2i + u_3j + u_4k$ nie poruszy się. Okazuje się, że przekształcenie to przeprowadza czysto urojoną podprzestrzeń na siebie i wykonuje na niej dokładnie ten obrót, który sobie zaplanowaliśmy.

Zbigniew MARCINIAK

Interferencja i polaryzacja światła

Dwieście lat temu główną osią sporu o naturę światła była kwestia, czy światło jest strumieniem cząstek, czy falą. Według dzisiejszego poglądu oba te wyobrażenia nie stoją ze sobą w sprzeczności i mieszczą się w ramach jednego wspólnego opisu dostarczanego przez elektrodynamikę kwantową. Na początku XIX wieku, nie łączono jeszcze światła ze zjawiskami elektrycznymi i magnetycznymi.

Cały XVIII wiek to czas pewnej stagnacji w badaniach nad optyką, w której dominował pogląd cieszącego się wielkim autorytetem Newtona, że światło jest strumieniem cząstek. Poważna rewizja tego poglądu była skutkiem przełomowych badań z początku XIX wieku. Angielski uczony Thomas Young w 1801 roku wygłosił w Londynie słynny wykład Bakeriański zatytułowany *O teorii światła i barw*, w którym twierdził, że świat jest wypełniony światłonośnym eterem, którego drgania postrzegamy jako światło, a fale eteru o różnych częstościach odpowiadają różnym barwom. Swoje tezy Young uzasadniał licznymi pomysłowo przeprowadzanymi doświadczeniami. W 1802 roku opisał eksperyment (znany obecnie pod nazwą *doświadczenie Younga*), w którym światło słoneczne przepuszczane było najpierw przez niewielki otwór, a następnie rzucane na cieniutką przeszkodę, którą obiegało z dwóch stron. Na ekranie za przeszkodą obserwowano prążki interferencyjne, które powstawały w wyniku nakładania się fal przechodzących z różnych stron przeszkody. Prążki te znikały po przesłonięciu jednej z dwóch dróg obiegających przeszkodę wiązek światła. Wcześniej Young obserwował na powierzchni wody interferencję fal rozchodzących się z dwóch źródeł i to zainspirowało go do przeprowadzenia doświadczeń interferencyjnych ze światłem.



Ilustracja z *Course of Lectures on Natural Philosophy* Younga z 1807 roku, przedstawiająca interferencję fal. Young pisał: *Dwa jednakowe układy fal wychodzące z pobliskich punktów mogą w pewnych punktach się unicestwiać, a w innych podwajać swe działanie...*

Początkowo prace Younga spotkały się ze sprzeciwem środowiska uczonych, a nawet z ostrą krytyką, co zniechęciło go do dalszego zajmowania się optyką. Poświęcił się wtedy innej swojej pasji – rozszyfrowywaniu hieroglifów egipskich.

Fale eteru wyobrażano sobie jako fale mechaniczne rozchodzące się w sprężystym ośrodku, jakim miał być eter, na podobieństwo rozchodzącego się w powietrzu lub wodzie dźwięku. Byłyby to zatem fale podłużne: odkształcenie ośrodka następuje wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali; występują na przemian zgęszczenia i rozrzedzenia ośrodka. Nie dość, że prace Younga spotkały się z ostrą krytyką współczesnych mu uczonych, to sytuację dodatkowo skomplikowało przypadkowe odkrycie przez Étienne'a Louisa Malusa w 1808 roku zjawiska polaryzacji światła przez odbicie. Malus badał zjawisko podwójnego załamania, polegające na tym, że niektóre kryształy (np. szpat islandzki) załamywały światło w ten sposób, iż padający na nie promień światła był rozdzielany na dwa promienie wychodzące z kryształu w dwóch kierunkach różniących się o pewien niewielki kąt. Właśnie przez taki kryształ Malus spojrzał przypadkiem na światło odbite w oknach Pałacu Luksemburskiego w Paryżu. Obracając kryształ, zauważył, że przy pewnych położeniach znikał jeden z dwóch wychodzących z kryształu promieni. W wyniku doświadczeń ustalił, że całkowite znikanie jednego z promieni zachodzi tylko dla pewnego określonego kąta padania. Malus tłumaczył to zjawisko wydłużonym kształtem cząstek światła, na których końcach znajdowały się bieguny poddane działaniu sił. Cząstki te przy odbiciu pod określonym kątem miały się ustawiać w uporządkowany sposób. Od łacińskiego słowa *polus* (biegun) wzięła się nazwa *polaryzacji światła*.

W 1815 roku David Brewster odkrył, że tangens kąta padania, przy którym następuje całkowita polaryzacja światła odbitego od powierzchni materiału, jest równy wartości współczynnika załamania tego materiału. Odkrył też, że promień odbity i promień załamany są wtedy prostopadłe. Ten szczególny kąt padania nazywany jest obecnie *kątem Brewstera*. Brewster, podobnie jak Malus, był przeciwnikiem teorii falowej światła.

Zjawiska polaryzacji światła nie dawało się wyjaśnić za pomocą fal podłużnych, co przyznał nawet sam Young w 1811 roku, proponując zarazem w 1817 roku bardzo nowatorskie i jednocześnie kontrowersyjne rozwiązanie tego problemu przez założenie istnienia drgań zachodzących pod pewnym kątem do kierunku rozchodzenia się fali. Niezależnie na podobny pomysł wpadł trochę później Augustin Fresnel, który zainspirowany przez Younga, rozwijał falową teorię rozchodzenia się światła. Kolejnym naturalnym krokiem był postulat, że ten „pewien kąt" to kąt prosty, a światło jest falą poprzeczną, czyli drganie zachodzi w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali. Ponieważ w przestrzeni trójwymiarowej istnieją dwa prostopadłe kierunki, prostopadłe jednocześnie do kierunku rozchodzenia się fali, dwie polaryzacje światła można było interpretować jako niezależne drgania poprzeczne w tych właśnie kierunkach. Ta prosta i elegancka interpretacja uchodziła jednak dwieście lat temu za kontrowersyjną i była odrzucana przez wielu fizyków, którzy pozostawali zwolennikami teorii korpuskularnej światła. Kilkadziesiąt lat po pracach Younga i Fresnela, po sformułowaniu równań Maxwella, światło zostało opisane właśnie jako zaburzenie pola elektromagnetycznego poprzeczne do kierunku rozchodzenia się fali, przy czym idea eteru została później ostatecznie odrzucona jako zbędna w wyniku sformułowania teorii względności, a odkrycie zjawisk kwantowych pokazało, że czasami jednak światło zachowuje się jak strumień cząstek.

Szymon CHARZYŃSKI

Ciepło i energia

Chyba w żadnym innym dziale fizyki nie uzyskano tak doniosłych wyników opartych na błędnym wyobrażeniu o naturze świata jak przy badaniu zjawisk cieplnych. W pierwszych dekadach XIX wieku powszechnie uznawano istnienie nieważkiego, przenikającego wszystko fluidu zwanego cieplikiem (łac. *caloricum*), w którym miały znajdować się pierwotne fragmenty materii. Zwiększanie się ilości cieplika miało prowadzić do rozszerzania ciał i zmian ich stanu skupienia (topnienie i wrzenie), a wrażenia zmysłowe ciepła i zimna miały być przejawem przepływów tego fluidu. Spekulowano także, czy światło i ciepło są przejawami różnych zjawisk fizycznych, czy też można je „zunifikować" jako przejawy różnego rodzaju ruchów tego samego cieplika.

W 1819 roku Alexis Petit i Pierre Dulong stwierdzili na podstawie swoich eksperymentów, że iloczyn ciepła właściwego ciała stałego i jego ciężaru cząsteczkowego jest w przybliżeniu taki sam dla wszystkich ciał stałych. Wyjaśnienie tego empirycznego prawa było jednym z pierwszych wielkich sukcesów mechaniki kwantowej.

Argumenty teoretyczne na rzecz istnienia cieplika były eleganckie i przekonujące. Używając tego pojęcia, Siméon Denis Poisson wykazał w 1818 roku, że związek między zmianą ilości ciepła ΔQ danej ilości gazu oraz zmianami jego objętości ΔV i ciśnienia Δp wyraża się wzorem

$$R \cdot \Delta Q = C_V \cdot V \cdot \Delta p + C_p \cdot p \cdot \Delta V,$$

gdzie R jest stałą gazową, a C_V i C_p ciepłami właściwymi odpowiednio przy stałej objętości i stałym ciśnieniu. Jeśli te ostatnie nie zależą od temperatury, stwierdzamy, że całkowite ciepło Q jest funkcją iloczynu $p \cdot V^{C_p/C_V}$, a więc dla przemian adiabatycznych, gdzie nie ma przepływów ciepła, wielkość $p \cdot V^{C_p/C_V}$ jest stała, w zgodzie z doświadczeniem. Pierre Simon Laplace założył, że wspomniana funkcja jest liniowa i dla $C_p/C_V = 1{,}4$ uzyskał zależność ciepła właściwego powietrza od ciśnienia, która doskonale zgadzała się z uzyskanymi w 1813 roku pomiarami Françoisa Delaroche'a i Jacques'a Bèrarda. Laplace stwierdził także, że można poprawić klasyczne rozumowanie Newtona, który w *Principiach* obliczył prędkość dźwięku, zakładając, że zaburzone cząstki powietrza doznają działania siły zależnej od wychylenia z położenia równowagi, ale uzyskane w ten sposób przewidywania były systematycznie mniejsze od mierzonej wielkości. Laplace dostrzegł, że właśnie uwzględnienie $C_p/C_V = 1{,}4$ pozwala uzyskać zgodność z doświadczeniem.

Bardzo ważną rolę w budowaniu matematycznej teorii ciepła odegrał Joseph Fourier. Nie wnikając w szczegółową naturę ciepła, w latach 1808–22 Fourier na podstawie bardzo ogólnych założeń sformułował równania różniczkowe opisujące przepływy ciepła oraz podał nowe metody rozwiązywania tych równań polegające na rozkładaniu badanej funkcji na szeregi funkcji trygonometrycznych określane dziś jego nazwiskiem.

W 1816 roku Fourier został wybrany na członka Akademii Nauk w Paryżu, ale – jako zwolennik niedawno obalonego Napoleona Bonapartego – nie został zatwierdzony przez króla Ludwika XVIII. W kolejnym roku członkowie Akademii jednogłośnie ponowili wybór. Król tym razem ustąpił.

Skonstruowanie i udoskonalanie maszyn parowych niewątpliwie stanowiło inspirację dla dwudziestoośmioletniego podporucznika saperów, Sadi Carnota, który w 1824 roku sformułował – posługując się oczywiście pojęciem cieplika – teorię maszyn cieplnych i udowodnił, że silnik termodynamiczny działa w sposób najbardziej efektywny, gdy przemiany cieplne zachodzą w nim w sposób odwracalny.

Pierwsze poglądy na naturę cieplika zakładały, że jest to fluid niezniszczalny, jednak później przekonanie to zaczęło słabnąć. Wielu uczonych wyrażało przekonanie o zachowaniu w przyrodzie pewnej ogólnej wielkości, której ciepło jest zaledwie jednym z przejawów. Sadi Carnot próbował wyznaczyć przelicznik ciepła na pracę mechaniczną, ale na zadowalająco dokładny wynik trzeba było jeszcze czekać kilkanaście lat. W 1843 roku James Joule podał ten uniwersalny przelicznik, a w roku 1847 ukazała się rozprawa Hermanna Helmholtza, w której jasno sformułował on zasadę zachowania energii i udokumentował jej słuszność w wielu działach fizyki. Gwoli ścisłości, należy wspomnieć, że mechaniczny równoważnik ciepła i sformułowanie zasady zachowania energii podał w 1842 roku, a więc przed Joulem i Helmholtzem, Robert Mayer. Jako lekarz miał jednak trudności w zapisaniu swoich wyników w sposób zrozumiały dla fizyków i jego praca pozostawała przez wiele lat niedostrzeżona.

Sadi Carnot prowadził swe rozważania w sposób bardzo poglądowy, ale posługiwał się raczej omówieniami idei fizycznych niż wzorami. Być może z tego powodu jego wyniki nie zostały od razu docenione i zaistniały w świadomości fizyków dzięki omówieniom w dziełach innych badaczy, przede wszystkim Émile'a Clapeyrona i Williama Thomsona.

James Joule był właścicielem browaru; pokaźne dochody, jakie stąd czerpał, pozwalały mu na poświęcanie wiele czasu swemu hobby – doświadczeniom fizycznym. Pochodzący z niezamożnej rodziny Helmholtz z wykształcenia był lekarzem, gdyż w Prusach studia medyczne były bezpłatne dla najlepszych studentów pod warunkiem przepracowania pięciu lat na stanowisku lekarza wojskowego.

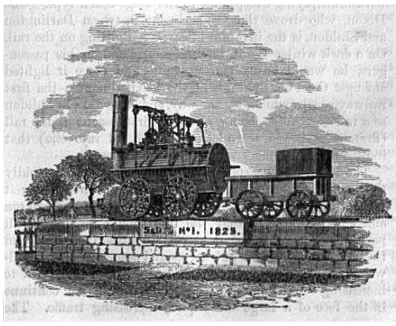
Od tych pierwszych kroków dzieli nas ponad półtora stulecia. Jednym z najważniejszych późniejszych osiągnięć w próbach coraz to lepszego wyrażenia zasady zachowania energii było udowodnione w 1915 roku przez Emmy Noether twierdzenie o związku symetrii układów fizycznych z prawami zachowania. Przy założeniu, że prawa fizyki są niezmiennicze względem przesunięć w czasie, z twierdzenia tego wynika zachowanie wielkości, którą można utożsamić właśnie z energią. Wyjąwszy może krótki epizod z lat 30. XX wieku, kiedy to Niels Bohr postulował, że prawa zachowania mają charakter statystyczny, a nie ścisły, żeby wyjaśnić, co dzieje się z energią uwalnianą w jądrowych rozpadach β (dziś wiemy, że unosi ją nieznana wtedy cząstka – neutrino), nikt już na serio nie wątpił w zachowanie energii we wszystkich układach, dla których można ją w sposób sensowny określić.

W układach z silnymi oddziaływaniami grawitacyjnymi, opisywanymi ogólną teorią względności, zdefiniowanie energii nastręcza sporych trudności. Pisał o tym w *Delcie* 12/2015 Jerzy Kijowski.

Krzysztof TURZYŃSKI

Kolej

Nikt chyba nie ma wątpliwości, że kolej miała ogromny wpływ na rozwój kulturowy i gospodarczy świata. Dzięki niej znacząco zwiększyła się szybkość transportu towarów i w istotny sposób ułatwione zostało przemieszczanie się ludzi na dużych dystansach. Obecnie trudno sobie wyobrazić bez niej życie. Dziś docieramy do celu, podróżując w wygodnych, wyciszonych i klimatyzowanych wagonach, ale początkowo podróż nie była tak wygodna. Pierwsze wagony pasażerskie były niczym innym, jak drewnianymi budami, w których podróżowanie niekoniecznie było przyjemnością: odczuwalna była m.in. każda nierówność toru, a na dodatek panował niesamowity hałas. Mimo to wynalazek budził – i słusznie – powszechny zachwyt.



Za początkową datę powstania „regularnej” kolei możemy uznać rok 1825, kiedy to miało miejsce otwarcie pierwszej linii kolejowej o znaczeniu publicznym łączącej Stockton z Darlington w Wielkiej Brytanii. Parowóz *Locomotion* dla tej linii zaprojektował i wybudował George Stephenson.

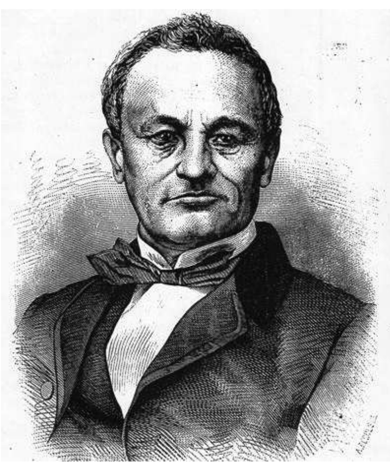
Powstanie i rozwój kolei żelaznych przyczyniły się do powstania wielu wynalazków. Postęp w konstrukcji lokomotyw, połączeń wagonów, systemów hamowania i resorowania, budowa nasypów, wiaduktów i przepraw mostowych – to wszystko wymagało od inżynierów pogłębionej wiedzy z zakresu fizyki oraz dużej pomysłowości; na rozwiązanie czekała ogromna liczba problemów.

Wykazano, że – wykorzystując tarcie między kołami i metalową szyną – parowóz może uciągnąć znaczną masę. Warto zauważyć, że już pod koniec średniowiecza w niektórych kopalniach znalazły zastosowanie drewniane szyny, po których w drewnianych wózkach transportowano ciężkie ładunki.

Początków kolei na ziemiach polskich możemy doszukiwać się na Górnym Śląsku, gdzie w latach 1798–1802 wybudowano wąskotorową konną kolej przemysłową, która połączyła *Hutę Królewską* pod Chorzowem z szybami kopalni *Król*. Natomiast pierwszą linią normalnotorową na obecnych ziemiach polskich było połączenie Wrocławia z Oławą oddane do użytku 22 maja 1842.

Dworzec kolei żelaznej warszawsko-wiedeńskiej w Warszawie

№ 2. 1863.
DROGA ŻELAZNA
WARSZAWSKO-WIEDEŃSKA I WARSZAWSKO-BYDGOSKA
BILET WOLNEJ JAZDY
dla JW. Jakóba Lewińskiego Czł. R. Z. w każdej Klasie powozów
Ważny na wszystkie Pociągi Rozkładem jazdy objęte, z bezpłatnym przewozem pakunków, z prawem zwiedzania wszystkich Stacyj i punktów pomienionych Dróg, w ciągu roku 1863.
Prezes Rad Zarządzających

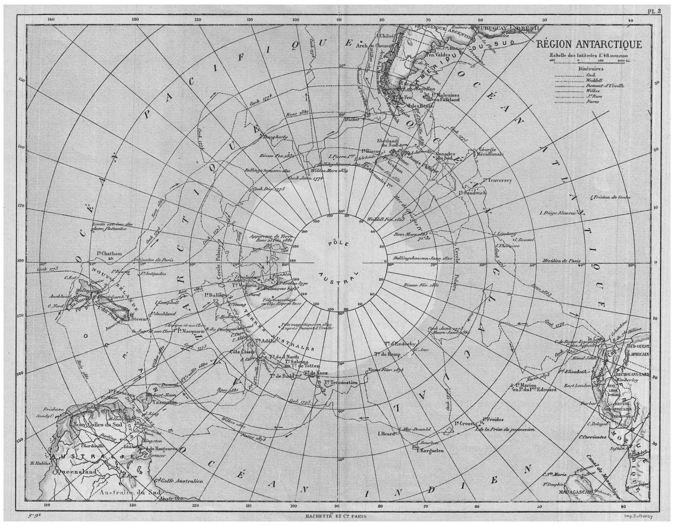


Projektantem linii kolejowej z Warszawy do Maczek był inżynier Stanisław Wysocki, absolwent Uniwersytetu Warszawskiego. Studiował tam filozofię, budownictwo i miernictwo. Początkowo zajmował się regulacją rzek Nidy i Kamiennej oraz kierował budową spichrzów we Włocławku. Głównym inżynierem budowy Drogi Żelaznej Warszawsko-Wiedeńskiej został w 1839 roku, a pięć lat później członkiem zarządu. W 1857 roku został głównym inspektorem dróg żelaznych w Królestwie Polskim. Był też doradcą technicznym Kolei Warszawsko-Terespolskiej oraz założycielem pierwszej fabryki asfaltu w Polsce.

Jednak jedną z najbardziej znanych i jedną z najstarszych linii kolejowych w Polsce jest Droga Żelazna Warszawsko-Wiedeńska, która połączyła Warszawę z ówczesną granicą zaboru austriackiego w Maczkach (dzisiaj dzielnica Sosnowca) – miała się ona łączyć z linią z Krakowa do Wiednia. Projekt linii powstał już w 1835 roku, natomiast pierwszy odcinek z Warszawy do Pruszkowa ukończono dopiero 28 listopada 1844 roku. Wtedy właśnie miał miejsce pierwszy przejazd z zaproszonymi gośćmi, który trwał do Pruszkowa 26 minut (a z powrotem tylko 20 minut!). Oddanie linii do użytku publicznego nastąpiło 14 czerwca 1845 roku, kiedy ukończono odcinek do Grodziska. Parę miesięcy później, 15 października, linię doprowadzono do Skierniewic i Łowicza. Do Częstochowy pierwsi pasażerowie mogli dotrzeć 1 grudnia 1846, a całą trasę do granicy w Maczkach oddano 1 kwietnia 1848 roku. Całkowita długość trasy wyniosła 327,6 km i liczyła 27 stacji. Ciekawostkę stanowić może fakt, że była to druga linia kolejowa w całym Imperium Rosyjskim i jedyna z rozstawem normalnotorowym, który wynosi 1435 mm. Wszystkie drogi żelazne budowane w późniejszych latach na obszarze całego Imperium Rosyjskiego miały rozstaw 1524 mm zgodny z normami rosyjskimi. W roku 1859 wybudowano odgałęzienie ze stacji w Ząbkowicach do Sosnowca, które dalej prowadziło do Katowic znajdujących się w zaborze pruskim. W 1862 przedłużono linię z Łowicza do Aleksandrowa Kujawskiego, połączonego z Toruniem. W 1866 roku z Koluszek poprowadzono linię do Łodzi.

Szymon POGODA

Antarktyda – odkrywanie nieznanego



Wykonałem teraz okrążenie Oceanu Południowego na wysokiej szerokości geograficznej i przemierzyłem go w taki sposób, że nie ma żadnej wątpliwości co do możliwości istnienia tam kontynentu, chyba że w pobliżu bieguna i poza zasięgiem nawigacji... Nie będę zaprzeczał, że może istnieć kontynent lub wielka połać lądu w pobliżu bieguna, ale żaden statek nie zdoła się nigdy przedrzeć przez ocean pokryty olbrzymimi pływającymi krami. Nikt nie odważy się dopłynąć dalej niż ja to uczyniłem.

Tak pisał w swoim dzienniku 21 lutego 1775 roku James Cook – wielki angielski żeglarz. Chociaż od starożytności mówiono o *Nieznanym Lądzie Południowym* (*Terra Australis Incognita*), a Ptolemeusz umieścił go na swojej mapie świata, to dopiero w XIX wieku Antarktyda została naprawdę odkryta.

Ale dlaczego ten pokryty lądolodem obszar nie został nazwany Australią? Przecież byłoby to zgodne z utrzymującym się od stuleci określeniem terenów wokół bieguna południowego?

Stało się tak dlatego, iż nazwa Australia została już „zajęta". Brytyjski hydrograf Matthew Flinders (1774–1814), który sporządził niezwykle dokładne mapy linii brzegowej Nowej Holandii, określał ją konsekwentnie mianem Australii i tak w końcu nazwa ta przylgnęła do tego obszaru. Poza tym od czasów podróży Cooka przestano wierzyć w istnienie Lądu Południowego, ukrytego za barierą lodową.

Na początku XIX wieku w Rosji, na polecenie cara Aleksandra I, rozpoczęto przygotowania do wyprawy, która miała na celu przeprowadzenie badań w południowej części Oceanu Spokojnego oraz na obszarach wokół południowego bieguna geograficznego. Wyprawa wyruszyła z Kronsztadu 16 lipca 1819 roku. W jej skład wchodziły dwa statki: *Wostok* pod dowództwem Fabiana Gottlieba von Bellingshausena oraz *Mirnyj* dowodzony przez Michaiła Piotrowicza Łazariewa. Zarówno Bellingshausen, jak i Łazariew byli doświadczonymi żeglarzami. Bellingshausen w latach 1803–1806 uczestniczył w pierwszej rosyjskiej wyprawie dookoła świata, a od 1810 roku prowadził badania hydrograficzne na Morzu Czarnym. Łazariew, admirał rosyjskiej marynarki, odkrył w 1814 roku (podczas wyprawy dookoła świata) atol Suworowa w archipelagu Wyspy Cooka. Trasa rosyjskiej wyprawy przebiegała od Kronsztadu przez wyspy Georgia Południowa i Sandwich Południowy w pobliże Antarktydy. 28 stycznia 1820 roku Bellingshausen w okolicy Wybrzeża Księżniczki Marty dostrzegł lodowiec szelfowy (nazwany później jego imieniem). I właśnie ten moment jest uznawany za odkrycie Antarktydy. Chociaż nie przez wszystkich, ponieważ w tym czasie u wybrzeży Antarktydy panował wyjątkowy tłok. Dwa dni później (30 stycznia) angielski porucznik Edward Bransfield odkrył ziemię, którą nazwał *Ziemią Świętej Trójcy* (obecnie Ziemia Grahama), a w listopadzie tego samego roku amerykański łowca fok Nathaniel Palmer doniósł o istnieniu lądu nazwanego później Ziemią Palmera.

W tym czasie wyprawa Bellingshausena niestrudzenie podążała na wschód. Rosjanie zgodnie twierdzili, że za lodowcem znajduje się ląd i 16 lutego udało im się dostrzec Wybrzeże Księżniczki Astrid. Po kolejnej nieudanej próbie podpłynięcia do lądu obrano kierunek na Sydney. Następnie przez Cieśninę Cooka w Nowej Zelandii rosyjscy żeglarze dopłynęli do archipelagu Tuamotu w Polinezji i dalej przez Tahiti, Wyspy Cooka, archipelag Tonga i Fidżi powrócili w okolice Sydney. A stamtąd wyprawa obrała kurs na wody antarktyczne. 22 stycznia 1821 roku Rosjanie dotarli do $69^\circ 53'$ szerokości geograficznej południowej. Odkryli nieznane ziemie leżące na południe od koła podbiegunowego: Wyspę Piotra I, a kilka dni później Wyspę Aleksandra I, którą Bellingshausen uznał błędnie za część wybrzeża.

Co stanowiło tak ogromną przeszkodę nie tylko w dotarciu, ale nawet w zbliżeniu się do Antarktydy na odległość pozwalającą na zidentyfikowaniu jej jako lądu? Winić za to należy warunki atmosferyczne, czyli jak pisze we wstępie do książki *Podróże kapitana Bellingshausena do mórz Antarktydy* wydawca Frank Debenham, *kombinacja wiatru i pogody.* W tych rejonach, kiedy wiatr wieje z północy, znacząco ułatwia żeglugę na południe, ale jednocześnie przynosi opady śniegu i ląd staje się niewidoczny. Gdy natomiast wieje z południa i wschodu, widoczność jest dobra, ale żegluga staje się trudna i nie można dotrzeć blisko lądu.

Przyjmuje się, że Rosjanie rzeczywiście w styczniu 1820 roku ujrzeli kraniec Antarktydy Wschodniej. Czy można to jednoznacznie uznać za odkrycie kontynentu? Na pewno podczas tej wyprawy opłynięto cały kontynent Antarktydy trasą przebiegającą zdecydowanie bardziej na południe od wyprawy Cooka. Sześciokrotnie przekroczono koło podbiegunowe. Prowadzono obserwacje meteorologiczne, hydrograficzne i oceanograficzne. I na pewno wtedy po raz pierwszy dostrzeżono Antarktydę. Wyniosłe słowa Jamesa Cooka straciły znaczenie, ale ocena Antarktydy jako lodowego piekła była wspominana przez wieki:

...Na samym krańcu naszej planety leży spowita w błękicie oceanów ziemia. Niby śpiąca księżniczka, piękna i złowroga, spoczywa w mroźnym śnie otulona w fałdy śnieżnej szaty połyskującej ametystami i diamentami lodu. (Richard Byrd)

Maria KOROTAJ-KOKOSZCZYŃSKA, Katarzyna GREŃ

Rozwiązanie zadania F 911.
W obu przypadkach możemy posłużyć się analizą wymiarową. W przypadku a) zakładamy zależność postaci:

$$\nu \propto \sigma^x \rho^y \lambda^z$$

i po porównaniu wymiarów otrzymujemy: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = -\frac{3}{2}$, czyli:

$$\nu^2 = A\frac{\sigma}{\rho\lambda^3},$$

gdzie A jest pewną bezwymiarową stałą – ścisłe rozwiązanie zagadnienia dla fal kapilarnych prowadzi do wartości $A = 2\pi$. Znaleziona zależność poprawnie opisuje zachowanie bardzo krótkich fal ($\lambda < \frac{1}{3}$cm) na powierzchni wody.

W przypadku b) zakładamy:

$$\nu \propto \rho^x g^y \lambda^z$$

Analiza wymiarowa prowadzi do wartości: $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$, czyli:

$$\nu^2 = B\frac{g}{\lambda},$$

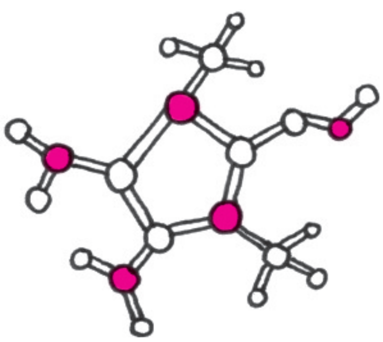
gdzie B jest bezwymiarową stałą – ścisłe rozwiązanie zagadnienia dla fal grawitacyjnych prowadzi do $B = (2\pi)^{-1}$. Znaleziona zależność poprawnie opisuje fale na wodzie, gdy $\lambda > 8$cm.

Atomy i cząsteczki chemiczne

Na przełomie XVIII i XIX wieku rodziła się w bólach nowa nauka – chemia. Oczywiście, znano już wtedy rozmaite reakcje chemiczne, jednak sama natura tych zjawisk pozostawała nieznana. Czy na drodze reakcji chemicznej materia zmienia istotnie swoje właściwości? Z czego składa się i jaką budowę ma materia? Podstawowe pytania tego rodzaju przez dłuższy czas pozostawały bez odpowiedzi – zobaczmy, jak chemicy przełomu wieków starali się na nie odpowiadać.

Pod koniec XVIII wieku wraz z udoskonaleniem metod wagowych zdano sobie sprawę, że materia nie powstaje z niczego – obowiązuje prawo zachowania masy. Zaczęto sobie uzmysławiać subtelną różnicę między mieszaniną a związkiem, oraz między procesem fizycznym (rozpuszczanie soli w wodzie) a chemicznym (spalanie drewna w powietrzu). Okazało się więc, że nie wszystkie obserwowane gołym okiem transformacje materii prowadzą do istotnej zmiany jej właściwości.

Dużo trudniejszym problemem było opisanie samej struktury materii. W XVII wieku porzucono alchemiczną koncepcję żywiołów, a wraz z nią marzenie o transmutacji metali w złoto. Wykazanie nieprawdziwości poglądu w rodzaju: *skoro metal składa się z jednej części ziemi i jednej części ognia, a złoto składa się z jednej części ziemi i dwóch części ognia* (jest ono żółte, więc zawiera dużo ognia), *to podgrzewając metal* (dodając ognia), *otrzymam złoto* namnożyło jedynie dalszych pytań o rzeczywistą budowę materii. Przyjęto, że istnieją pewne pierwiastki, których nie można rozłożyć na prostsze struktury oraz których nie można zmienić w inne. Jakie to pierwiastki, jeśli nie żywioły? Rozwój metod analitycznych pozwolił pod koniec XVIII wieku rozdzielić różne substancje na części składowe, pokazując tym samym, że pierwiastkami są metale, węgiel, tlen itd. Umownie za moment narodzin współczesnej chemii uznaje się odkrycie przez Antoine'a Lavoisiera tlenu (1778) i wykazanie, że jest on częścią składową powietrza.



Odkrycie istnienia pierwiastków – nierozkładalnych w sensie chemicznym – nie rozstrzygnęło jednak klasycznego problemu *podziału w nieskończoność*. Czy skoro żelazo jest pierwiastkiem, to czy sztabkę żelaza można fizycznie pokroić na dowolnie małe kawałki? Już w starożytności Demokryt uważał, że taki podział musi się kiedyś skończyć, zatem istnieją niepodzielne drobiny materii – atomy. Arystoteles wyznawał pogląd przeciwny. Rozumował, że gdyby istniały drobiny materii, to między nimi pozostawałaby próżnia, której przyroda nie lubi. Materia musi więc mieć strukturę ciągłą.

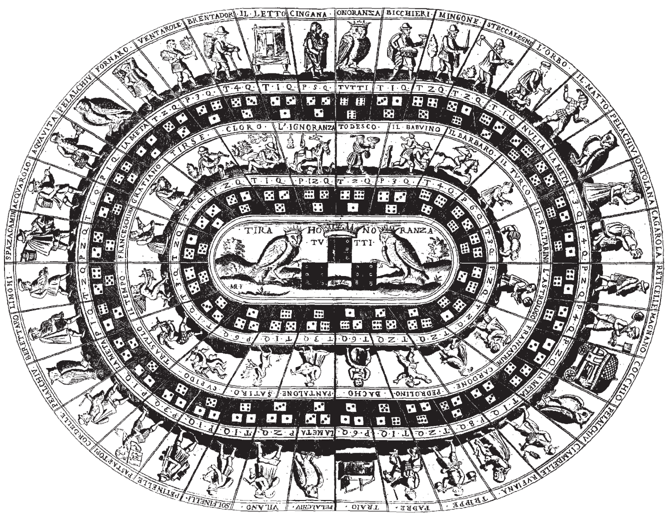
Za ojca współczesnej teorii atomistycznej uważa się (nie całkiem słusznie) Johna Daltona. Uznał on (1808), że związki chemiczne składają się z małych kulek – atomów, z których każda składa się z właściwego sobie materiału – pierwiastka. Jego teoria była niedoskonała, wykluczała bowiem, między innymi, łączenie się w pary takich samych atomów (czyli wzbraniała, na przykład, istnienia cząsteczki wodoru). Sam Dalton traktował swoją teorię jedynie jako użyteczną hipotezę, niekoniecznie odpowiadającą stanowi faktycznemu. Ponieważ w jego czasach pojęcia takie jak atom, molekuła czy pierwiastek często były używane zamiennie, więc nie dziwi, że jeszcze w 1840 roku filozof William Whewell wyrażał sceptyczne stanowisko wobec teorii atomistycznej: *W doświadczeniu chemicznym nie ma [...] pozytywnego świadectwa istnienia takich atomów. Przypuszczenie istnienia niepodzielnych cząstek [...] wyjaśni zjawiska, lecz przypuszczenie istnienia cząstek mających tę proporcję, lecz nie posiadających właściwości niepodzielności, wyjaśni te zjawiska równie dobrze. Dlatego rozstrzygnięcie zagadnienia, czy hipoteza atomowa jest właściwą drogą wyobrażenia sobie chemicznych związków substancji, musi leżeć nie w faktach chemicznych, lecz w naszej koncepcji materii.*

Więcej na podobne tematy można znaleźć w książce R. Mierzeckiego, *Historyczny rozwój pojęć chemicznych*, PWN, 1987.

Ostatecznym dowodem istnienia drobin materii (jąder atomowych) było doświadczenie Rutherforda z 1907 roku. Wiadomo obecnie, że jądro atomowe składa się z nukleonów, a te dalej z kwarków. Czy istnieją mniejsze, niepodzielne fragmenty materii? Tego w zasadzie ciągle nie wiadomo.

Mikołaj JĘDRUSIAK

Regularność przypadku



Wbrew pozorom tytuł niniejszego tekstu nie jest efektem zestawienia dwóch przypadkowych słów; nawet zupełnie przypadkowe przypadki mogą zdradzać pewne regularności i fakt ten wcale ich przypadkowości nie przeczy. Przypadkiem ich praktycznego zastosowania są średniowieczne tablice do gry w kości; opisane w nich zasady faworyzują jedną ze stron w sposób na tyle delikatny, że oszukiwana strona wcale się taką nie czuje. Dokładna ocena szans na wygraną w różnych wariantach gry w kości zainteresowała kilku znamienitych uczonych XVI i XVII wieku. Ich (oraz własne) przemyślenia w tej kwestii zgromadził Jacob Bernoulli w dziele *Ars conjectandi* (*Sztuka przewidywania*), którego 300-lecie wydania obchodziliśmy trzy lata temu. Z matematycznego punktu widzenia najcenniejszy jest czwarty rozdział tego dzieła, w którym autor dowodzi, że szansa na dowolnie ustalone odstępstwo częstotliwości sukcesów od prawdopodobieństwa wygranej w pojedynczej grze maleje do zera wraz ze wzrostem rozmiaru próby. Rezultat ten został wzmocniony przez Abrahama de Moivre'a w drugiej edycji *The doctrine of chances* (*Nauka o przypadku*), opublikowanej w 1733. Zbadał on asymptotyczne zachowanie prawdopodobieństwa uzyskania określonej liczby sukcesów, otrzymując w granicy związek z funkcją, którą dziś nazwalibyśmy uczenie gęstością rozkładu normalnego.

Należy podkreślić, że rozważania de Moivre'a były pierwszym poważnym przypadkiem zastosowania analizy matematycznej do zagadnień probabilistycznych, co przy ówczesnym traktowaniu rachunku prawdopodobieństwa raczej jako zbioru zagadek niż działu matematyki należy uważać za niemałą nobilitację. Na kolejny tej rangi przełom należało czekać do roku 1812, kiedy Pierre Simon Laplace ukończył *Théorie analytique des probabilités* (*Teoria analityczna prawdopodobieństwa*). Zawarto w nim, między innymi, ścisły wykład rachunku prawdopodobieństwa dla dyskretnych wielkości losowych, jak również rozwiązania rozmaitych problemów, również „niedyskretnej" natury. Jednym z nich było pytanie o prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym igła o zadanej długości, rzucona na kartkę papieru podzieloną na przylegające paski o ustalonej szerokości, spada w całości na któryś z pasków.

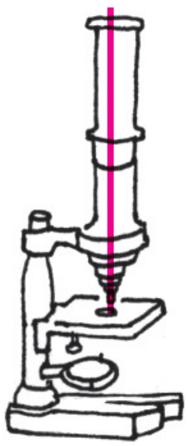
Po szczegóły warto zajrzeć do artykułu *Jak matematyk rzuca igłą* w *Delcie* 2/2011 i *Kluska w uchu wielbłąda* w *Delcie* 6/2016.

Przy naturalnych założeniach odpowiedzią okazuje się pole pewnego obszaru na płaszczyźnie. Pytanie, jak również jego rozstrzygnięcie, pochodzi od Georgesa Louisa Leclerca de Buffona. Ciekawostką jest, co zauważył Laplace, że umożliwia to doświadczalne przybliżanie wartości π (co można traktować jako jeden z pierwszych przykładów zastosowania metod Monte Carlo). Istotne jest jednak, że samo rozumowanie jest zalążkiem współczesnego pojmowania rachunku prawdopodobieństwa jako teorii miary unormowanej. Kierunek ten nie został jednak podchwycony i po Laplasie rachunek prawdopodobieństwa wciąż nie był przez większość europejskich matematyków traktowany jako poważna matematyczna dyscyplina. Z jednej strony była to kwestia braku pełnej rygoryzacji języka probabilistycznego (choć Laplace położył solidne fundamenty dla przestrzeni dyskretnych, to już pisząc np. o zmiennych losowych czy funkcjach rozkładu, tracił matematyczną ścisłość). Z drugiej strony nie bez znaczenia mogło być fiasko rachunku prawdopodobieństwa jako „nauki moralnej", która miała pomóc w rozstrzyganiu spraw sądowych czy wyników głosowania, a na takie zastosowanie nadzieję mieli ówcześni uczeni (niepodważalna była jednak użyteczność probabilistyki w „arytmetyce politycznej", łączącej dzisiejszą statystykę matematyczną i matematykę aktuarialną). Kolejne milowe kroki w rozwoju rachunku prawdopodobieństwa są dziełem matematyków rosyjskich XIX i XX wieku – Pafnucego Czebyszewa, Andrieja Markowa (ojca) i wreszcie Andrieja Kołmogorowa, twórcy współczesnej aksjomatyki prawdopodobieństwa. Od momentu jej powstania nikt już nie mógł mieć wątpliwości, że probabilistyka pełnowartościową dziedziną matematyki jest!

Łukasz RAJKOWSKI

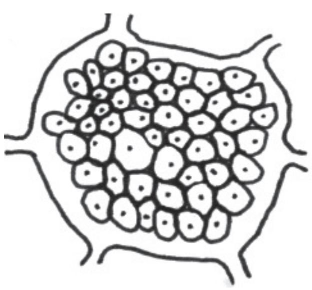
Rozwiązanie zadania F 912.
Podłączamy szeregowo do źródła prądu opór R i amperomierz; następnie podłączamy woltomierz rów7/nolegle do amperomierza i notujemy wskazania obu przyrządów, tj. napięcie U_1 i prąd I_1, a następnie podłączamy woltomierz równolegle do oporu R i rejestrujemy napięcie U_2 i prąd I_2. Pierwszy pomiar pozwala wyznaczyć opór wewnętrzny amperomierza, $R_A = U_1/I_1$, a drugi sumę oporu R i R_A: $U_2/I_2 = R + R_A$.

Biologia przed odkryciem teorii ewolucji



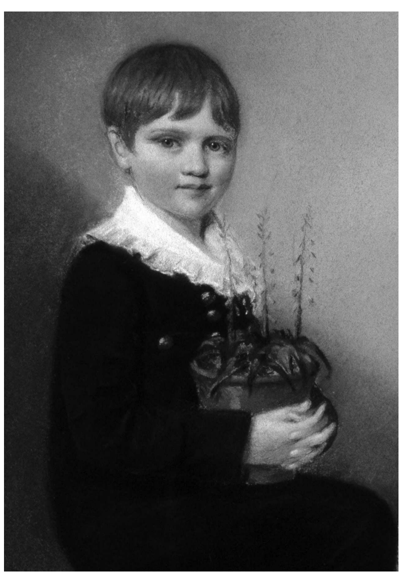
Pierwsze ćwierćwiecze XIX wieku było w biologii okresem intensywnego rozwoju, przede wszystkim botaniki i zoologii. Żywa była jeszcze legenda i powszechnie uznawany był autorytet Carla von Linnné (1707–1778), który, rewolucjonizując zasady klasyfikacji organizmów, pokazał badaczom niezwykłe bogactwo przyrody wymagające opisania i skatalogowania. Dokonał też istotnej rewolucji światopoglądowej, porównywalnej z rewolucją kopernikańską – pokazał, że człowiek jest jednym z gatunków zwierząt. Może i wyróżnionym z uwagi na intelekt, ale tylko zwierzęciem. Na początku XIX wieku żyli jeszcze niektórzy jego uczniowie, tzw. *apostołowie Linneusza*, publikowano także kolejne wydania jego najważniejszych dzieł, jak *Species plantarum* (*Gatunki roślin*) oraz *Systema Naturae* (*System przyrody*). Kolejne wydania tego pierwszego dzieła, już pod redakcją botaników niemieckich, np. Carla von Willdenowa, ukazywały się aż do 1833 roku.

W roku założenia Uniwersytetu Warszawskiego ukazały się dwa tomy *Historii naturalnej zwierząt bezkręgowych*, których autorem był wybitny francuski badacz, Jean-Baptiste Lamarck. Dzisiaj jest on przede wszystkim znany jako autor pierwszej teorii ewolucji, zwanej lamarkizmem, według której określona potrzeba organizmu jest motorem zmian ewolucyjnych. Lamarck twierdził, że ewolucja jest postępowa – zwierzęta rozwijają się w odpowiedzi na warunki środowiska, stają się bardziej złożone i doskonalsze, nabywają nowe cechy i przekazują je potomstwu. Dziś uważamy, że takie ujęcie odpowiada raczej ewolucji kulturowej, a nie biologicznej, która nie jest z założenia postępowa i nie ma kierunku. Swoje poglądy o ewolucji Lamarck zawarł w wydanej w 1809 roku *Filozofii zoologii*, która nie spotkała się z życzliwym przyjęciem.



Oponentem Lamarcka był wybitny francuski zoolog i paleontolog Georges Cuvier. W 1817 roku ukazało się drukiem pierwsze wydanie jego najbardziej cenionego dzieła, *Królestwa zwierząt*, w którym zawarł wyniki swoich badań nad współczesną i kopalną fauną. Cuvier jako pierwszy zauważył, że pewne cechy zwierząt są skorelowane, a zatem można na podstawie niekompletnego szkieletu zwierzęcia, np. kopalnych szczątków, odtworzyć jego wygląd. Aby wyjaśnić fakt, że w skałach odnajduje się szczątki innych zwierząt niż żyjące współcześnie, Cuvier odwoływał się do katastrofizmu – poglądu, że świat był wielokrotnie niszczony przez katastrofy, jak np. biblijny potop, w wyniku których wymarło wiele gatunków.

Nie jest pewne, kto wynalazł pierwszy mikroskop, ale dla biologii odkrył go duński badacz Antonie van Leeuwenhoek (1632–1723). W XIX wieku urządzenie to było coraz powszechniej wykorzystywane. Przyglądając się pod mikroskopem organom roślinnym, niemiecki botanik Matthias Jakob Schleiden zauważył, że wszystkie składają się z podobnej wielkości elementów – komórek. Swoje odkrycie opublikował w 1838 roku.



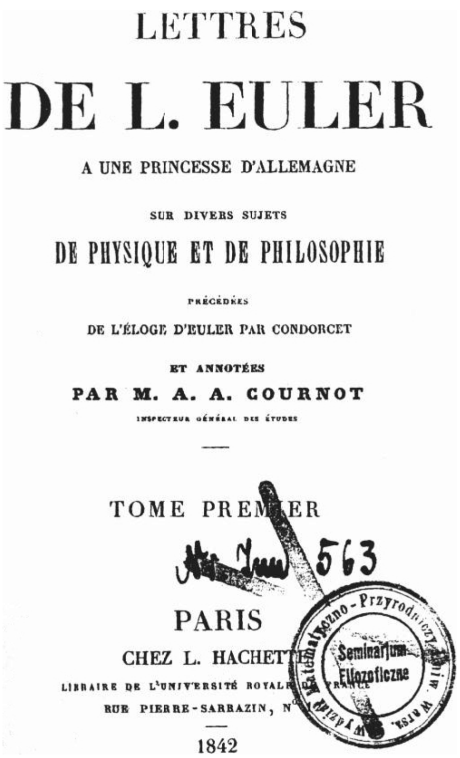
W 1816 roku Charles Robert Darwin miał zaledwie siedem lat. Na namalowanym wtedy portrecie widzimy pucołowatego, rudawego chłopca, który trzyma na kolanach doniczkę z kwitnącym aloesem. Obejmuje ją tak, jakby przytulał pluszowego misia albo ukochanego pieska. Przyszły twórca teorii ewolucji drogą doboru naturalnego już od dzieciństwa interesował się przyrodą, choć nikt oczywiście nie mógł jeszcze wtedy podejrzewać, jak znaczącą postacią w dziejach biologii stanie się kilkadziesiąt lat później. Przed nim jeszcze beztroskie dzieciństwo i studia w Cambridge, do których niezbyt się przykładał, choć egzamin końcowy w 1831 roku zdał doskonale. Wkrótce po ukończeniu studiów podjął decyzję kluczową dla swojej dalszej kariery – zaokrętował się na statek badawczy *Beagle* w charakterze przyrodnika i towarzysza posiłków kapitana Roberta FitzRoya. Właśnie w trakcie tego rejsu Darwin doszedł do wniosku, że organizmy ewoluują, a motorem tych zmian jest dobór naturalny. Owocem tych przemyśleń było dzieło *O powstawaniu gatunków*, najważniejsza książka w historii biologii, która ukazała się drukiem w 1859 roku.

Krzysztof SPALIK

Listy do księżniczki niemieckiej

Listy Eulera, w oryginale pisane po francusku, są dostępne w Internecie, na przykład jako wydane w 1837 roku *Letters of Euler on different subjects in natural philosophy adressed to a German princess.*
W bibliotece Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego dostępne jest późniejsze, ale zawierające oryginalny tekst wydanie z 1842 roku.

Każdy, kto chociaż raz znalazł się na liście spammingowej, wie, jakiego rodzaju wiadomości mogą pojawiać się w skrzynce pocztowej. *Uwagi o podziale w nieskończoność i o monadach*, *O tym, jak obiekty nieprzezroczyste stają się widoczne*, *O wyborze południka zerowego* czy *Wyjaśnienie natury przypływu i odpływu za pomocą siły przyciągającej Księżyca* – takimi oto listami Leonhard Euler regularnie zasypywał Fryderykę Charlottę Brandenburg-Schwedt, krewną Fryderyka Wielkiego. Euler – jeden z największych uczonych XVIII wieku, matematyk i filozof przyrody, został poproszony o przybliżenie młodej księżniczce zagadnień, z którymi borykała się ówczesna filozofia (dzisiaj powiedzielibyśmy – fizyka). Przez dwa lata (IV 1760–V 1762) średnio dwa razy w tygodniu słał do Berlina list poświęcony wybranemu problemowi.


LETTRES
DE L. EULER
A UNE PRINCESSE D'ALLEMAGNE
SUR DIVERS SUJETS
DE PHYSIQUE ET DE PHILOSOPHIE
PRÉCÉDÉES
DE L'ÉLOGE D'EULER PAR CONDORCET
ET ANNOTÉES
PAR M. A. A. COURNOT
INSPECTEUR GÉNÉRAL DES ÉTUDES
TOME PREMIER
563
PARIS
CHEZ L. HACHETTE
LIBRAIRE DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE
RUE PIERRE-SARRAZIN, N°
1842

Niedługo później ten zbiór listów został wydany w postaci książkowej i z miejsca podbił salony, stając się najlepiej znaną poza środowiskiem akademickim pracą Eulera.

Omówione zostały chyba wszystkie klasyczne zagadnienia fizyki, które obecnie znajdujemy w szkolnych podręcznikach. Grawitacja, optyka i natura światła, magnetyzm, struktura materii – te i inne zostały przedstawione Fryderyce w niecodziennej formie. Euler wyszedł bowiem z założenia, że jego praca ma mieć charakter kompendium wiedzy, którą każdy dobrze urodzony człowiek epoki oświecenia powinien posiąść. Próżno szukać w jego dziele wzorów, rachunków czy hermetycznej terminologii – zamiast tego mamy szereg rozważań i eksperymentów myślowych, objaśniających teorie ówczesnej nauki. Jest to bodaj pierwszy przykład przekrojowej pracy z dziedziny filozofii przyrody o popularnonaukowym charakterze – adresowanej do szerszego grona odbiorców.

Listy Eulera czyta się przyjemnie, jednak nie ze względu na treść merytoryczną – wszak obecnie dobrze znamy już przyczyny zjawisk badanych w XVIII wieku. Cenna jest natomiast możliwość zapoznania się z samym procesem tworzenia nauki, zrelacjonowanym w przystępny sposób bezpośrednio przez czołowego filozofa swoich czasów. A proces ten był skomplikowany i długotrwały. Najprostsze, wydawałoby się, koncepcje były ówcześnie przedmiotem dyskusji najwybitniejszych uczonych.

Euler pisał (list XXIV): *Ponadto, trudnym jest i poniżającym dla filozofa przyznanie się do ignorancji w jakimkolwiek temacie; zechce on raczej podtrzymywać choćby i największe absurdy, zwłaszcza jeśli posiadł sekret owijania ich w tajemnicze słowa, których nikt zrozumieć nie jest w stanie.*

Euler odrzuca teorie z gruntu metafizyczne i nieweryfikowalne, zamiast tego szuka wyjaśnień racjonalnych. Prowadzone przez niego rozważania są w świetle ówczesnej wiedzy logiczne, czasami jednak okazują się błędne z dzisiejszego punktu widzenia. Choćby opisywana przez niego teoria eteru, która miała tłumaczyć naturę światła (patrz str. 10). Euler polemizował z modelem korpuskularnym proponowanym przez Newtona. Używał argumentu, że gdyby istniały molekuły światła, to Słońce, będące ich źródłem, z czasem zmniejszałoby swoją masę i jasność. Uznawał jednak, że zjawisko odbicia światła jest przez teorię Newtona dobrze tłumaczone. Nie przyjmował też bezkrytycznie teorii falowej Kartezjusza, która dobrze wyjaśniała załamanie światła. Powoływał się na analogię z dźwiękiem, o którym wiedział, że jest falą rozchodzącą się w powietrzu. Wiedział jednak, że atmosfera ma skończoną grubość. Aby rozwiązać ten problem, zapostulował istnienie rzadkiego ośrodka, wypełniającego całą przestrzeń, w którym mogłyby rozchodzić się fale świetlne. Był jednak świadomy, że eter jest jedynie hipotezą. Podobne zastrzeżenia zgłaszał do wielu innych teorii, zarówno cudzych, jak i przede wszystkim, swoich własnych.

Na zakończenie przytoczmy myśl przypisywaną Laplace'owi: *Czytajcie Eulera, czytajcie go – jest mistrzem nas wszystkich.*

Mikołaj JĘDRUSIAK

Rozwiązanie zadania M 1504.
Nie!

Niech $x = a + b$, gdzie a jest pewną liczbą całkowitą oraz $0 \leqslant b < 1$. Lewa strona równania przyjmuje postać

$$63a+\lfloor b\rfloor+\lfloor 2b\rfloor+\lfloor 4b\rfloor+\lfloor 8b\rfloor+\lfloor 16b\rfloor+\lfloor 32b\rfloor,$$

a jej wartość jest nie mniejsza niż $63a$ i nie większa niż

$$63a + 0 + 1 + 3 + 7 + 15 + 31 = 63a + 57.$$

Liczba 18162016 daje resztę 61 z dzielenia przez 63, więc nie może być wartością lewej strony równania dla żadnego x.

Równania algebraiczne

Równania algebraiczne, czyli takie, które można zapisać, przyrównując wielomian do zera, intrygowały ludzi od bardzo dawna. Rozwiązywaniem równań zajmowano się już w czasach starożytnych. W szkole uczą nas, jak rozwiązywać równania liniowe i kwadratowe, to jest takie, w których występuje funkcja liniowa (wielomian stopnia pierwszego) albo funkcja kwadratowa (wielomian stopnia drugiego). Matematycy włoscy podali w XVI wieku wzory na pierwiastki równań stopnia trzeciego i czwartego. A co z równaniami wyższych stopni?

Odpowiedź przyszła dopiero w interesujących nas czasach, tj. na początku XIX wieku. Prace Ruffiniego (1765–1822), Abela (1802–1829), Galois (1811–1832) wyjaśniły tę sprawę do końca.

Uznajemy, że rozwiązaliśmy równanie algebraiczne, jeżeli jego pierwiastki potrafimy wyrazić – podobnie jak w przypadku równania kwadratowego – przez współczynniki równania za pomocą czterech działań algebraicznych i operacji wyciągania pierwiastków (być może wysokiego stopnia). Jeśli pierwiastki równania potrafimy wyrazić w taki sposób, to mówimy, że równanie można rozwiązać przez pierwiastniki.

Paolo Ruffini podał w roku 1799 dowód (niestety, nieścisły) twierdzenia mówiącego o tym, że ogólnego równania stopnia piątego nie można rozwiązać przez pierwiastniki. Wynika stąd, że nie można rozwiązać przez pierwiastniki ogólnego równania dowolnego stopnia $n > 5$. Dokładny dowód twierdzenia o nierozwiązalności przez pierwiastniki równań stopni $n \geqslant 5$ podał w roku 1824 Niels Henrik Abel. Twierdzenie to nie głosi, że **żadnego** równania stopnia piątego albo wyższego nie można rozwiązać.

Oczywiście, potrafimy podać równania, które można rozwiązać, np. równanie stopnia piątego $x(x^2-1)(x^2-4) = 0$ rozwiążemy bez trudu. Trochę więcej wysiłku włożymy w rozwiązywanie równania

$$x^5 - 9x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 9x + 1 = 0. \tag{1}$$

Najpierw zauważmy, że pierwiastkiem tego równania jest liczba -1. Wielomian $x^5 - 9x^4 + 16x^3 + 16x^2 - 9x + 1$ dzielimy więc przez dwumian $x + 1$, otrzymując $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1$. Obie strony równania $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ dzielimy teraz przez x^2 otrzymując równoważne równanie

$$x^2 - 10x + 26 - 10 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0. \tag{2}$$

Przyjmijmy teraz

$$t = x + \frac{1}{x}, \tag{3}$$

więc $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, zatem nasze równanie przyjmie postać $t^2 - 2 - 10t + 26 = 0$, a więc $t^2 - 10t + 24 = 0$. Pierwiastkami tego równania kwadratowego są liczby 4 i 6. Podstawiając te wartości do (3) dostajemy

$$x + \frac{1}{x} = 4 \text{ lub } x + \frac{1}{x} = 6.$$

Stąd mamy równania kwadratowe $x^2 - 4x + 1 = 0$ i $x^2 - 6x + 1 = 0$, których pierwiastkami są odpowiednio liczby $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, $3+2\sqrt{2}$, $3-2\sqrt{2}$. Ostatecznie więc pierwiastkami równania (1) są właśnie te liczby i -1.

Istnieją jednak takie równania, których nie można rozwiązać przez pierwiastniki, np. równanie $x^5 - 6x + 3 = 0$.

Rozważmy funkcję $f(x) = x^5 - 6x + 3$ określoną w zbiorze liczb rzeczywistych. Jest to funkcja ciągła i $f(-2) < 0$, $f(-1) > 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$. Wynika stąd, że funkcja f ma swoje miejsca zerowe w przedziałach $(-2,-1)$, $(-1,1)$ i $(1,2)$. Można wykazać, że więcej miejsc zerowych nie ma. Wobec tego równanie $x^5 - 6x + 3 = 0$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste leżące w przedziałach $(-2,-1)$, $(-1,1)$ i $(1,2)$ oraz dwa pierwiastki zespolone sprzężone. Żadna z tych pięciu liczb nie wyraża się przez pierwiastniki.

Odpowiedź na pytanie, kiedy pierwiastki danego równania wyrażają się przez pierwiastniki, zawarł w swoich pracach Evariste Galois. Jako kilkunastoletni młodzieniec wysłał te prace do Akademii Francuskiej, gdzie nie znalazły one zrozumienia. Dopiero wiele lat po tragicznej śmierci Galois (zginął w pojedynku) zrozumiano i doceniono jego osiągnięcia.

Aby odpowiedzieć na pytanie o rozwiązalność konkretnego równania, należałoby rozważyć najmniejsze ciało liczbowe, które zawiera wszystkie pierwiastki tego równania; tzw. ciało rozkładu wielomianu wyznaczającego to równanie. No, ale gdybyśmy znali te pierwiastki, to znaczyłoby, że potrafiliśmy je obliczyć, czyli rozwiązać równanie. Genialny pomysł Galois polega na tym, że zamiast rozważać to ciało rozkładu wielomianu, bada się grupę przekształceń tego ciała, zwanych automorfizmami. Zasadnicze twierdzenie teorii Galois orzeka, że dane równanie można rozwiązać przez pierwiastniki, jeśli grupa automorfizmów ma pewną własność – jest grupą rozwiązalną.

Maciej BRYŃSKI

Ciałem liczbowym nazywamy taki zbiór liczb, w którym wykonalne są działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia liczb (nie dzielimy przez 0!). Przykładami ciał są zbiory liczb wymiernych, rzeczywistych, zespolonych, zbiór liczb postaci

$$a + b\sqrt{2} \ (a,\ b \text{ wymierne}),$$

zbiór liczb postaci

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt[4]{2} \ (a,\ b,\ c \text{ wymierne}).$$

Automorfizmem ciała K nazywamy przekształcenie σ różnowartościowe K na K spełniające warunki:

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$$
$$\text{i } \sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$$

dla dowolnych $a, b \in K$.

Grupą nazywamy zbiór G, w którym określone jest działanie $\circ$ spełniające warunki:
$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dla dowolnych $a, b, c \in G$;
istnieje element $e \in G$ spełniający $a \circ e = e \circ a = a$ dla każdego $a \in G$;
dla każdego $a \in G$ istnieje taki $a' \in G$, że $a \circ a' = a' \circ a = e$.

Kongres Wiedeński i Uniwersytet Warszawski

Gloryfikowany przez nasz hymn Napoleon wystawiał Polaków na ciężkie próby, zdradzając nas i używając do tłumienia powstania na Santo Domingo, czy do podbijania Hiszpanii – znamy to choćby z *Popiołów* Żeromskiego – ale dziś mamy dla niego kult, jak Rzecki w *Lalce* Prusa.

Warto pamiętać, że Księstwo Warszawskie było satelitą Francji i miało jako dziedzicznego monarchę Sasa Fryderyka Augusta. W bitwie pod Raszynem, z której jesteśmy dumni, Polska (ani Księstwo) nie była stroną – była to wojna sasko-austriacka.

W tamtych latach były jednak wątpliwości. Dla Adama Jerzego Czartoryskiego właściwszym partnerem i protektorem Polaków był młody, światły i kulturalny car Aleksander I. Z jego ramienia został w 1803 roku Kuratorem Uniwersytetu Wileńskiego. Sprawował tę funkcję przez 21 lat. To wtedy Jan Śniadecki stworzył polską terminologię matematyczną. To tam wychowali się filomaci, filareci, Promieniści.

Co więcej, rok później Czartoryski został ministrem spraw zagranicznych Rosji. Funkcję tę jednak odrzucił po dwóch latach, gdy Aleksander zawarł z Napoleonem pokój w Tylży.

Pokój ten nie przetrwał nawet 6 lat i Napoleon ruszył na Moskwę, co stało się końcem jego panowania. Zwycięskie państwa zwołały w 1815 roku w Wiedniu Kongres, mający poukładać przeoraną wojnami Europę. Na kongresie tym doradcą Aleksandra I był znów Adam Jerzy Czartoryski. Wywojował dla Polski państwowość w unii personalnej z Rosją. Królestwo Polskie, bo tak się to państwo nazywało, uzyskało zdumiewająco sprzyjające prawa: zachowało swoją armię z jej dotychczasową generalicją (a przecież była to armia walcząca z Rosją), a namiestnikiem cara na Polskę został napoleoński generał, Józef Zajączek.

Jest jeszcze jeden, ważny dla matematyków, efekt Kongresu Wiedeńskiego. Jednym z rozważanych problemów było pytanie, jak to możliwe, że armia kraju przeżywającego tak głębokie niepokoje i zmiany, kraju, w którym zmieniano (często za pomocą gilotyny) rządy kilka razy w roku, odnosiła tak długo sukcesy militarne i miała do dyspozycji lepszą broń, niż armie krajów o stabilnej sytuacji. Wniosek był oczywisty: *Francja miała lepszych oficerów armii i przemysłu.* Zatem przyczyn należało szukać w kształceniu owych kadr. I tu analiza programów nauczania szkół wojskowo-przemysłowych Francji (takich, jak kierowana przez Gasparda Monge'a szkoła w Mézières) wykazała nadspodziewanie duży udział matematyki. Stąd wypłynęło zalecenie dla szkolnictwa państw zwycięskiej koalicji, by matematykę traktować jako najważniejszy przedmiot. Tak zrodził się Dominator – Nauczyciel Matematyki. Nadzwyczajna pozycja spowodowała alienację, której wynikiem stało się powstanie Matematyki Szkolnej, odrębnej dyscypliny, co doprowadziło pod koniec XIX wieku do powszechnego znienawidzenia matematyki, no, ewentualnie do brzydzenia się nią przez tzw. humanistów.

Dowodem na to, jak wielka była radość Polaków z odzyskanej niepodległości (przecież poprzednio przez lata byliśmy w unii personalnej z Saksonią), jest skomponowana na koronację Aleksandra na króla Polski, do dziś stanowiąca symbol patriotyzmu pieśń *Boże, coś Polskę. . .* (słowa napisał Alojzy Feliński, muzykę Antoni Górecki). W darze z okazji koronacji Aleksander erygował Uniwersytet Warszawski w dawnej siedzibie Szkoły Rycerskiej.

Zaniepokojony Czytelnik zapyta: *czy to możliwe?*, bo przecież o niczym takim nie słyszał.

Jednym z powodów niepowszechnej świadomości tych wydarzeń jest fakt, że idylla trwała krótko – zaledwie 9 lat. W 1824 roku Aleksander zmarł w wieku 48 lat. Jego miejsce zajął brutalny Mikołaj I, a rządy w Polsce przejęli ludzie w rodzaju księcia Konstantego, któremu w Polsce podobały się jedynie Polki, czy zwykłego siepacza Nowosilcowa.

Losy świata w zdumiewający sposób bywają splecione. W tymże roku zmarł król Francji Ludwik XVIII, który próbował kraj posklejać po ćwierćwieczu rewolucji, gilotyny i wojen. I tam władzę objął człowiek typu Mikołaja. Karol X ruszył do rozliczeń i rewindykacji, jego zwolennicy znaleźli sobie nawet nazwę *ultrasi*, w paskudny sposób przypomnianą w latach 50. ubiegłego wieku.

Francja wytrzymała to jedynie 6 lat – w lipcu 1830 roku wybuchła rewolucja. Nic przeto dziwnego, że 5 miesięcy później *w tęczę Franków Orzeł Biały patrząc lot swój w niebo wzbił* – młodzi kadeci wywołali bunt, który – podjęty przez generalicję – stał się wojną, nazywaną powstaniem listopadowym.

Francuzi Karola X obalili, my przegraliśmy wszystko. Znikło Królestwo Polskie (i Uniwersytet), został Kraj Nadwiślański, a spacyfikowana Warszawa stała się miastem w Guberni Siedleckiej. Polska nadal była ojczyzną Mickiewicza, Chopina, Słowackiego, Czartoryskiego, ale nie była już ich domem.

Adam Jerzy Czartoryski zorganizował w Paryżu środowisko zwane Hotelem Lambert, które miało na celu popieranie sprawy odzyskania przez Polskę niepodległości. Jak wiadomo, sprawę tę załatwiono jednak w kraju.

A Uniwersytet Warszawski jakby odżył na chwilę w postaci Szkoły Głównej Warszawskiej (1862–1869), by zostać przywrócony do życia w 1915 roku przez Niemców, którzy liczyli, że podobne prezenty skłonią znanych z rusofobii Polaków do wstępowania do walczącej z Rosją armii niemieckiej. Ale to już całkiem inna historia. . .

Marek KORDOS

Mój warszawski Uniwersytet

Mój interesujący romans z Uniwersytetem Warszawskim trwał nieprzerwanie kilka lat, a z przerwami trwa do dziś. I dyplom mam z tej Uczelni, choć większość studiów odbyłam w innej.

W 1963 roku w Państwowym Zakładzie Higieny (tam wtedy kończyłam doktorat) zaczął bywać często tajemniczy Pan, którego nie znaliśmy; przychodził do Davida Shugara (kierownika pracowni biologii molekularnej) i odbywali długie narady. Zżerała nas ciekawość, kto zacz, i wykryliśmy, że gość, Jerzy Pniewski, jest Dyrektorem Instytutu Fizyki Doświadczalnej UW i że namawia Shugara do założenia Katedry Biofizyki.

Dziś każdy student fizyki i biologii wie o istnieniu nauki – biofizyki, ale to było 50 lat temu! Nie było takich studiów w Polsce. Mało kto umiałby zdefiniować, czym biofizyka mogłaby się zajmować. Mam uznanie dla Profesora Pniewskiego, że miał taką wizję, że znalazł tak właściwego realizatora i że ów (David Shugar) tego pionierskiego zadania się podjął.

Wraz z dwoma świeżo habilitowanymi współpracownikami (Lech Wierzchowski i Włodzimierz Szer) opracowali, dyskutując to w różnych środowiskach, program studiów. Trzeba było w pewnym sensie zawrócić z wyboru drogi czystej fizyki studentów, którzy chemii nie lubili, a biologię cicho lekceważyli (kwiatki, muchy, w najlepszym razie zupa z komórek). Trzeba było pokazać, jakie niesłychane horyzonty otwierają się przed tymi, którzy chcą procesy biologiczne opisać w kategoriach fizyki. Nawet kwantowej!

A poza zasadniczymi wyborami programowymi (Shugar zdecydował, że uczyć będą najwybitniejsi polscy uczeni z pogranicza nauk) Uniwersytet deklarował pomoc – zniszczony niewielki lokal „do przeróbek" oraz pewne fundusze na niezbędną aparaturę i niezbędne materiały. Ale tylko my wiedzieliśmy, co jest konieczne i niezbędne i nikt za nas zorganizować i zbudować tej Katedry nie mógł. Shugar wybrał kilkoro młodych ludzi, którzy zaczęli organizować warsztat dla studentów i dla siebie. Z lokalu na Banacha dopiero w tym roku biofizyka przeprowadza się do nowych pomieszczeń na Pasteura. Patrzę na nie z ulicy i zazdroszczę.

Miałam to szczęście, że byłam młoda i do nowej Katedry się kwalifikowałam. Malarze malowali, a my przygotowywaliśmy pierwsze zajęcia dla studentów 4. roku, kupowaliśmy podstawową aparaturę, kolbki i probówki, pędziło się do central handlowych w momencie kiedy przychodziła wiadomość, że się „pojawiły" w magazynach (tak, tak, w tych czasach nie tylko mięso było luksusem, kolbki Erlenmayera też). Kolejni wykładowcy z „najwyższej półki" znaleźli się i jesienią 1967 roku Katedra ruszyła. I znów muszę zachwycić się sprawnością profesora Shugara i jego niewielkiego zespołu – myślę, że tak szybko to się udało, bo mieliśmy świadomość, że tworzymy coś zupełnie nowego, że trzeba to zrobić dobrze, bo na Hożej, czyli w IFD UW to najlepsi studenci zapisali się do nas na studia (bodaj 11 osób). Większość z nich to dziś profesorowie, niektórzy w Polsce, niektórzy za granicą.

Ci najmłodsi asystenci to była Ewa Kulikowska (razem przygotowałyśmy i prowadziłyśmy laboratorium studenckie z biochemii) oraz świeżo po studiach z fizyki teoretycznej Maciek Geller (zmarł przed rokiem, do końca pracując w biofizyce) i Krzysztof Szymborski (obecnie w USA). Trochę później Barbara Czochralska z Wydziału Chemii założyła u nas bardzo udaną pracownię polarograficzną. Jeszcze później – bardzo wyczekiwani i potrzebni naukowo dwaj chemicy: profesorowie Zygmunt Kazimierczuk (dziś SGGW) i Jarosław Kuśmierek (IBB PAN). I tak się to toczyło i rozwijało.

Pracowałam w Katedrze 10 lat, w tym czasie zrobiłam habilitację, poprowadziłam kilka prac magisterskich, odbyłam staż w USA, urodziłam drugie dziecko – córkę! Przeżyliśmy też w Katedrze rok studenckiego buntu – 1968, za który zapłacili uwięzieniem nasi dwaj teoretycy, a trzeci rok studiów na fizyce został w całości zawieszony za postawy antypaństwowe. Z tej grupy ciepło wspominam Włodka Puzynę, po studiach zatrudnionego jako biofizyk w Szczecinie, od którego na dworcu, wyjeżdżając ze Zjazdu Biochemików, pewno w 1983 roku, dostałam rulon z plakatami Solidarności.

Zdawałam kolokwium habilitacyjne w Instytucie Biochemii i Biofizyki PAN i w ramach plotek ktoś mi powtórzył, że na posiedzeniu zamkniętym jedna Pani Profesor z Rady Naukowej powiedziała: ta ma talent dydaktyczny, powinna wykładać na uniwersytecie. Pani Profesor nie wiedziała, że właśnie rozpoczynałam nowy etap życia – pracę w Instytucie PAN-owskim, w którym się studentom nie wykłada. Ale ponieważ sama wiedziałam, że wykładać lubię, to wielokrotnie prowadziłam jeszcze wykłady zlecone na Wydziale Biologii UW i – w ramach dla mnie świetnego dydaktycznego doświadczenia – w MISH Profesora Axera. Lubiliśmy się wzajemnie ze studentami, bo byliśmy z różnych, a ciekawych światów. Czasem, z rzadka, coś jeszcze i dziś powiem na konferencjach Artes Liberales. A przez 15 lat, razem ze wspomnianym biofizykiem Maćkiem Gellerem, budowaliśmy i organizowaliśmy w Warszawie pierwszy w Polsce Festiwal Nauki blisko związany z Uniwersytetem Warszawskim.

Takich romansów w życiu się nie zapomina.

Magdalena FIKUS

Informatyczny kącik olimpijski (97): Flagi

W styczniu br. nakładem Wydawnictwa Naukowego PWN ukazała się książka Jacka Tomasiewicza *Zaprzyjaźnij się z algorytmami. Przewodnik dla początkujących i średnio zaawansowanych.*

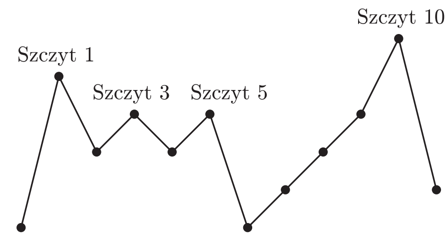
Książka ta zawiera opis podstawowych i najważniejszych technik algorytmicznych i struktur danych, które zostały uporządkowane w osiemnastu rozdziałach.

Do każdego tematu wybrano zadania o zróżnicowanym poziomie trudności, odpowiednie zarówno dla początkujących, jak i bardziej zaawansowanych czytelników. Zadania pochodzą z konkursów, takich jak Olimpiada Informatyczna, oraz obozów informatycznych ILOCAMP.

Implementacje swoich rozwiązań można testować pod kątem poprawności oraz wydajności w serwisie `main2.edu.pl`

W tym miesiącu, chcąc polecić Czytelnikom kącika książkę *Zaprzyjaźnij się z algorytmami*, przedstawimy jedno zadanie z tej pozycji. Wybieramy się na wyprawę w góry. Na mapie trasy zaznaczyliśmy n kolejnych miejsc o wysokościach $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Podczas wędrówki chcemy rozmieścić jak największą liczbę flag na szczytach, czyli takich miejscach, dla których dwa sąsiednie miejsca są położone niżej (zakładamy, że pierwsze i ostatnie miejsce nie są szczytami). Jest jedno ograniczenie: jeśli rozmieszczamy k flag, to odległość pomiędzy dwiema dowolnymi flagami powinna być równa co najmniej k.

Przykładowo dla trasy opisanej tablicą $a = [1, 5, 3, 4, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 6, 2]$ mamy dokładnie cztery szczyty (zaznaczone na poniższym rysunku):



Na tej trasie możemy rozmieścić 3 flagi (np. na szczytach 1, 5 i 10). Nie możemy jednak rozmieścić 4 flag, tak aby odległość pomiędzy nimi była równa co najmniej 4.

Wynik może być znaleziony przy użyciu wyszukiwania binarnego. Jeśli wiemy, że x flag może zostać rozmieszczonych na szczytach, to również wiemy, że każda ich mniejsza liczba może też być rozmieszczona. Z drugiej strony, jeśli x flag nie może zostać rozmieszczonych, to każda większa liczba flag również nie może być rozmieszczona. W ten sposób, używając wyszukiwania binarnego, redukujemy problem do sprawdzenia, czy można rozmieścić na szczytach ustaloną liczbę x flag. Taki problem możemy rozwiązać już zachłannie: idziemy trasą i zawsze ustawiamy flagę na najbliższym dozwolonym szczycie. Całe rozwiązanie działa w czasie $O(n \log n)$ ze względu na czas wyszukiwania binarnego.

Zadanie da się rozwiązać szybciej, w czasie liniowym. Na początku, dla każdego miejsca, jeśli nie jest szczytem, znajdujemy najbliższy szczyt położony na dalszym odcinku trasy. W tym celu możemy najpierw oznaczyć wszystkie szczyty, a następnie przeglądać trasę w odwróconej kolejności, pamiętając pozycję ostatnio spotkanego szczytu. W ten sposób wypełnimy tablicę $nast$, gdzie $nast[i]$ będzie najbliższym szczytem od miejsca numer i na prawo (lub wartość ∞, jeżeli dalej nie występuje już żaden szczyt). Dla powyższego rysunku mamy $nast = [1, 1, 3, 3, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 10, \infty]$.

Flagi powinny znajdować się w odległości równej co najmniej k, więc biorąc k flag możemy rozmieścić ich co najwyżej $\frac{n-1}{k} + 1$. A więc liczba flag, jaką da się rozmieścić nie przekroczy $\lfloor \sqrt{n} + 1 \rfloor$. Przykładowo, dla tablicy $a = [1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1]$ o rozmiarze $n = 15$ da się rozmieścić $k = 4$ flagi.

Zauważmy, że możemy rozmieścić co najwyżej $\lfloor \sqrt{n} + 1 \rfloor$ flag. Ta obserwacja doprowadzi nas do rozwiązania optymalnego. Jeśli ustawiamy jakąś flagę na pozycji p, to wiemy, że następna flaga powinna być ustawiona na pozycji dalszej lub równej $p + k$. Takie miejsce możemy znaleźć w czasie stałym, korzystając z tablicy $nast$. Pseudokod takiego rozwiązania może wyglądać następująco:

```
k := 1;
wynik := 0;
while (k − 1) · k ⩽ n do
    p := 0;
    flagi := 0;
    while p < n and flagi < k do
        p := nast[p];
        if p = ∞ then
            break;
        p := p + k;
        flagi := flagi + 1;
    wynik := max(wynik, flagi);
    k := k + 1;
```

Całkowita liczba operacji nie przekroczy $O(\sqrt{n}^2) = O(n)$, gdyż zarówno zewnętrzna jak i wewnętrzna pętla zostaną wykonane co najwyżej $O(\sqrt{n})$ razy.

Jacek TOMASIEWICZ

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

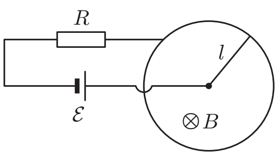
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2016

Zadania z fizyki nr 622, 623

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

622. Motocyklista porusza się po torze w kształcie okręgu. Ruszając z miejsca, chce jak najszybciej osiągnąć maksymalną prędkość. Jaką część okręgu przebędzie zanim osiągnie ten cel?



Rys. 1

623. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1, metalowy pręt może obracać się wokół środka metalowego pierścienia o promieniu l. Drugim końcem dotyka pierścienia. Siła tarcia w ruchomym kontakcie wynosi F. Jednorodne pole magnetyczne o indukcji B jest prostopadłe do powierzchni pierścienia. Siła elektromotoryczna ogniwa wynosi ϵ, opór obwodu jest równy R. Znaleźć ustaloną prędkość pręta i natężenie prądu w obwodzie.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 610 ($WT = 3{,}85$), 611 ($WT = 1{,}83$), 612 ($WT = 2{,}15$) i 613 ($WT = 3{,}70$) z numerów 1–2/2016

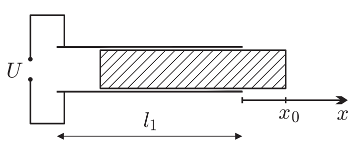
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Marian Łupieżowiec	Gliwice	35,47
Michał Koźlik	Poznań	33,88
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikielewicz	Brodnica	22,22
Jan Zambrzycki	Białystok	18,94

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2016

Przypominamy treść zadań:

618. Na kartce papieru narysowano w dziesięciokrotnym pomniejszeniu tor kamienia wyrzuconego z prędkością v pod kątem α do poziomu. Po narysowanej krzywej pełznie mały żuczek, którego prędkość ma stałą wartość u. Ile wynosi przyspieszenie żuczka w punkcie odpowiadającym maksymalnej wysokości, na jaką wzniósł się kamień? Oporu powietrza podczas ruchu kamienia nie uwzględniamy.

619. Całą przestrzeń między kładkami kondensatora płaskiego wypełnia płytka dielektryczna o masie m i stałej dielektrycznej ε (rys. 2). Okładki kondensatora mają rozmiary $l_1 \times l_2$, odległość między nimi wynosi d ($l_1 \gg d$, $l_2 \gg d$). Między okładkami utrzymywane jest stałe napięcie U. Płytkę wysunięto z obszaru kondensatora wzdłuż boku o długości l_1 na odległość x_0, a następnie puszczono swobodnie. Zaniedbując tarcie, znaleźć zależność przemieszczenia i prędkości płytki od czasu.

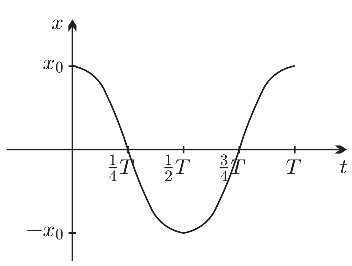


Rys. 2

618. Gdy kamień osiąga maksymalną wysokość, jego przyspieszenie g jest prostopadłe do toru i jest przyspieszeniem dośrodkowym: $g = (v\cos\alpha)^2/R$, gdzie R jest promieniem krzywizny toru w rozważanym punkcie. Promień krzywizny toru w odpowiadającym punkcie na rysunku wynosi $r = R/10$. Przyspieszenie żuczka jest prostopadłe do toru (bo jego wartość prędkości jest stała) i wynosi $a = u^2/r = 10u^2 g/(v\cos\alpha)^2$.

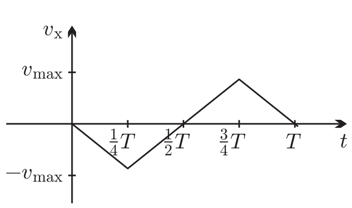
619. Gdy płytka wysunięta jest z kondensatora na odległość $x \leqslant l_1$, pojemność kondensatora wynosi $c(x) = \epsilon_0 l_2[x + \epsilon(l_1 - x)]/d$, energia $W(x) = c(x)U^2/2$, ładunek na okładkach $Q(x) = c(x)U$. Oznaczając przez ΔE_k zmianę energii kinetycznej kondensatora, gdy położenie płytki zmienia się o Δx, możemy napisać bilans energii: $\Delta E_k + W(x+\Delta x) = W(x) + W_{\text{źr}}$, gdzie $W_{\text{źr}} = [Q(x+\Delta x) - Q(x)]\,U = \Delta c U^2$ jest pracą źródła. Stąd

$$\Delta E_k = \Delta c U^2/2 = -\frac{\epsilon_0 l_2(\epsilon - 1)U^2}{2d}\Delta x.$$



Rys. 3

Gdy Δx jest małe, możemy przyjąć, że siła $F_x(x)$ działająca na dielektryk wzdłuż osi x nie zmienia się, zatem $\Delta E_k = F_x(x)\Delta x$. Dla dodatnich Δx, energia kinetyczna maleje, dielektryk jest więc wciągany do kondensatora siłą o stałej wartości $F = \epsilon_0 l_2(\epsilon - 1)U^2/(2d)$, jego położenie opisane jest wzorem $x(t) = x_0 - at^2/2$, prędkość $v_x(t) = -at$, gdzie $a = F/m$. Dielektryk wykonuje więc drgania wokół położenia równowagi dla $x = 0$, gdzie prędkość osiąga maksymalną wartość $v_{max} = \sqrt{2ax_0}$. Okres drgań wynosi $T = 4\sqrt{2x_0/a}$. Zależność położenia i prędkości dielektryka od czasu przedstawiona jest na wykresach (rysunki 3 i 4), wykres położenia składa się z fragmentów parabol.



Rys. 4

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 715 ($WT = 2{,}20$) i 716 ($WT = 1{,}85$) z numeru 2/2016

Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	42,24
Paweł Kubit	Kraków	40,59
Marek Gałecki	USA	37,76
Janusz Olszewski	Warszawa	37,41
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Witold Bednarek	Łódź	33,95
Piotr Kumor	Olsztyn	33,12

Zadania z matematyki nr 725, 726

Redaguje Marcin E. KUCZMA

725. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Przekątne przecinają się w punkcie E. Prosta prostopadła do AC, przechodząca przez punkt E, przecina proste AB i AD w punktach K i L. Wykazać, że punkty B, D, K, L leżą na jednym okręgu.

726. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że istnieje nieujemna liczba całkowita m taka, że $2m \leqslant n$ oraz różnica $2^n - 2^m$ dzieli się przez n.

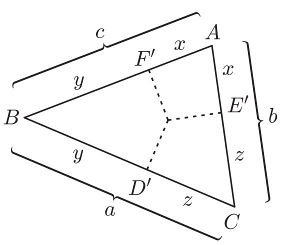
Zadanie 726 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

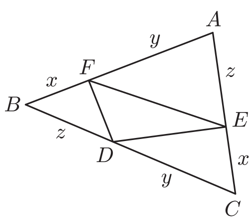
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2016

Przypominamy treść zadań:

721. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC leżą punkty D, E, F, w których okręgi dopisane do trójkąta są styczne do tych boków. Niech R i r będą promieniami okręgów opisanego i wpisanego. Dowieść, że stosunek pól trójkątów ABC i DEF wynosi $2R/r$.

722. Rozwiązać równanie $2^x + 2^y = 6^z$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.





721. Punkty D, E, F są położone na bokach BC, CA, AB symetrycznie (względem środków owych boków) do punktów D', E', F', w których okrąg wpisany jest do boków styczny. Przyjmijmy oznaczenia:

$$x = |AE'| = |AF'| = |BF| = |CE|,$$
$$y = |BF'| = |BD'| = |CD| = |AF|,$$
$$z = |CD'| = |CE'| = |AE| = |BD|, \qquad s = x + y + z,$$
$$a = |BC| = s - x, \quad b = |CA| = s - y, \quad c = |AB| = s - z.$$

Oznaczając pole trójkąta nawiasem kwadratowym, uzyskujemy ciąg równości

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = 1 - \frac{[AEF]}{[ABC]} - \frac{[BFD]}{[ABC]} - \frac{[CDE]}{[ABC]} =$$
$$= 1 - \frac{yz}{bc} - \frac{zx}{ca} - \frac{xy}{ab} = \frac{abc - ayz - bzx - cxy}{abc}.$$

Zastępując w liczniku a, b, c przez $s-x$, $s-y$, $s-z$, otrzymujemy po krótkim rachunku wzór

$$(*) \qquad \frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{2xyz}{abc}.$$

Pozostaje teraz skorzystać ze znanych wzorów, wyrażających pole trójkąta (jak zwykle, r i R to promienie okręgów wpisanego i opisanego):

$$[ABC] = rs = \frac{abc}{4R} = \sqrt{sxyz} \qquad \text{(ostatni – to wzór Herona).}$$

Dostajemy związki $abc = 4Rrs$ oraz $xyz = r^2 s$, które po wprowadzeniu do równości $(*)$ dają tezę zadania.

722. Wykładniki x, y nie mogą być równe, gdyż wówczas lewa strona równania byłaby potęgą dwójki. Przyjmijmy więc, że $x < y$, i zapiszmy $y = x + t$, gdzie $t \geqslant 1$. Równanie przybiera postać $2^x(2^t + 1) = 2^z 3^z$, z której wynika, że $x = z$, $2^t + 1 = 3^z$.

Jeśli $t = 1$, to $z = 1$; dostajemy rozwiązanie $x = 1$, $y = 2$.

Jeśli $t \geqslant 2$, to $3^z = 2^t + 1 \equiv 1 \pmod 4$, skąd wniosek, że z jest liczbą parzystą: $z = 2w$. Dostajemy równanie

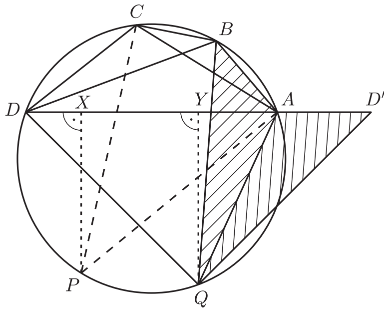
$$2^t = 3^{2w} - 1 = (3^w - 1)(3^w + 1).$$

Czynniki prawej strony muszą być potęgami dwójki; a skoro różnią się o 2, są to liczby 2 i 4. To znaczy, że $w = 1$, czyli $z = 2$, $t = 3$, co daje rozwiązanie $x = 2$, $y = 5$.

Uwzględniając możliwą zamianę ról x i y, widzimy, że równanie ma cztery rozwiązania (x, y, z) w liczbach całkowitych dodatnich: $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(2, 5, 2)$, $(5, 2, 2)$.

Rozwiązanie zadania M 1505.
Niech D' będzie takim punktem na prostej AD, na zewnątrz okręgu ω, że $AD' = AB$. Zauważmy, że wówczas $\sphericalangle QAD' = 180^\circ - \sphericalangle QAD = 180^\circ - \sphericalangle QBD = 180^\circ - \sphericalangle QDB = \sphericalangle QAB$. Stąd trójkąty QAD' i QAB są przystające, w szczególności $QD' = QD$. W takim razie trójkąt $QD'D$ jest równoramienny i

$$DY = YD' = YA + YD' = YA + AB.$$



Analogicznie otrzymujemy równość $AX = XD + DC$. W takim razie mamy $2 \cdot XY = (AX - YA) + (DY - XD) = (AX - XD) + (DY - YA) = DC + AB$, a stąd $XY = \dfrac{DC + AB}{2} = 5$.

Niebo we wrześniu

Miesiąc, w którym przypada rozpoczęcie astronomicznej jesieni (22 IX) będzie obfitował w zaćmienia. W dniu rozpoczęcia szkoły wystąpi obrączkowe zaćmienie Słońca (nie widoczne niestety z terenów Polski). Zacznie się na Atlantyku i przesuwając się na wschód, będzie widoczne z wybrzeża Afryki, na terenach Kongo (wcześniej nazywanego Kongo Brazzaville), Demokratycznej Republiki Konga (Zairu) oraz Tanzanii. Zakończy się we wschodniej części Oceanu Indyjskiego, około 1300 km od zachodniego wybrzeża Australii. Maksymalny czas trwania tego zjawiska to 3 minuty i 6 sekund. Zaćmienie obrączkowe Słońca występuje gdy Księżyc w nowiu jest jednocześnie blisko apogeum swojej orbity (w tym roku 6 IX), czyli w największym oddaleniu od Ziemi. W tej konfiguracji rozmiar kątowy tarczy Księżyca jest mniejszy od rozmiaru tarczy Słońca i Księżyc nie jest w stanie przesłonić tarczy Słońca, nawet przechodząc przed nią centralnie. W trakcie obrączkowego zaćmienia widać jaskrawo świecący pierścień atmosfery słonecznej zwany fotosferą.

Zaćmieniem, którym możemy się cieszyć z terenu Polski, będzie częściowe półcieniowe zaćmienie Księżyca 16 IX, widzialne w Europie, Azji, Afryce i Australii. W Polsce nastąpi ono zaraz po wschodzie Księżyca: początek zjawiska (I kontakt) 18:55, maksymalne zaćmienie 20:55, zakończenie 22:54 (podane czasy dotyczą Warszawy).

We wrześniu warto też zwrócić uwagę na meteory. Miłośnikom spadających gwiazd polecamy w okresie 5–21 IX wrześniowe Perseidy, najintensywniejsze 9 IX. Roju można szukać w gwiazdozbiorze Perseusza (rektascensja 3,2 h i deklinacja $+40^\circ$) – meteory (około 5 na godzinę) będą mknęły ze średnią prędkością 64 km/s. Kolejnym rojem wartym uwagi są Piscydy widoczne praktycznie przez cały miesiąc. Rój związany z kometą 1907 IV Morehouse osiągnie maksimum 20 IX, a jego radiant znajduje się w pobliżu punktu Barana w gwiazdozbiorze Ryb (rektascensja 0,3 h i deklinacja -1°). Spodziewana średnia aktywność to 3 meteory na godzinę poruszające się z małymi prędkościami (około 25 km/s) i pozostawiające jasne, czerwonawe ślady. W okresie 8–30 IX pojawiają się κ Akwarydy. Radiant tego roju znajduje się w gwiazdozbiorze Wodnika, rektascensja 22,6 h i deklinacja -2°. Rój osiągnie maksymalną aktywność 3 meteorów na godzinę w nocy 21 IX; charakteryzuje się on bardzo niskimi prędkościami bolidów, około 16 km/s.

Karolina BĄKOWSKA

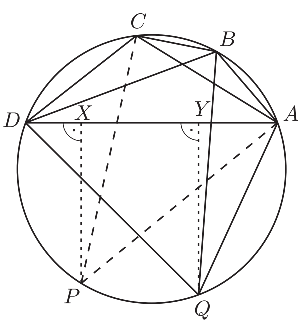
Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

M 1504. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba rzeczywista x spełniająca równanie

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 4x\rfloor + \lfloor 8x\rfloor + \lfloor 16x\rfloor + \lfloor 32x\rfloor = 18162016.$$

Rozwiązanie na str. 17



M 1505. Czworokąt $ABCD$ jest takim czworokątem wpisanym w okrąg ω, że kąty ABD i ACD są rozwarte. P i Q są takimi punktami na dłuższym łuku AD okręgu ω, że $PA = PC$ i $QB = QD$, a punkty X i Y są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów P i Q na prostą AD. Wiedząc, że odcinki AB i CD mają odpowiednio długości 4 i 6, obliczyć długość odcinka XY.
Rozwiązanie na str. 23

M 1506. Liczby a, b, c są rozwiązaniami równania $3x^3 + 6x^2 - 1 = 0$. Obliczyć wartość $\dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{b^4} + \dfrac{1}{c^4}$.
Rozwiązanie na str. 5

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 911. Znajdź postać zależności częstości fali ν od jej długości λ dla fal na powierzchni głębokiego zbiornika cieczy – tzn. gdy głębokość zbiornika $h \gg \lambda$ w przypadku, gdy źródłem sił przywracających płaskość powierzchni jest:

a) napięcie powierzchniowe,
b) ciężar cieczy.

Ciecz ma gęstość ρ, współczynnik napięcia powierzchniowego ciecz-powietrze σ, a przyspieszenie siły ciężkości wynosi g.
Rozwiązanie na str. 14

F 912. Jak należy wykonać pomiary, żeby dokładnie zmierzyć wartość nieznanego oporu R, gdy nie znamy oporów wewnętrznych woltomierza i amperomierza?
Rozwiązanie na str. 15

deltoid 93

Prawdopodobieństwo geometryczne

Joanna JASZUŃSKA

Rozmaite zagadnienia można wygodnie i ładnie ilustrować geometrycznie. Jeśli wyniki doświadczenia losowego dają się zinterpretować jako punkty pewnego obszaru i każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny, to prawdopodobieństwo określonego zdarzenia można wyznaczyć jako stosunek miary (pola, objętości etc.) odpowiadającej mu części obszaru do miary całości.

Trzeba uważać na pewne trudności, widoczne np. w *paradoksie Bertranda*, w którym na to samo pytanie udziela się trzech różnych odpowiedzi. Można o nim przeczytać np. w artykule *Paradoksy rachunku prawdopodobieństwa* w *Delcie* nr 4/1992, dostępnym na stronie `deltami.edu.pl`.

Słynnym przykładem jest tzw. *igła Buffona*, z którą związana jest ciekawa metoda eksperymentalnego przybliżania wartości liczby π. Więcej na ten temat w tym numerze *Delty* na stronie 15.

1. Pod domem Gucia zatrzymują się tramwaje numer 1 i 2, każdy z nich kursuje co 10 minut. Gucio codziennie o przypadkowej porze pomiędzy 17^{00} a 18^{00} przychodzi na przystanek i wsiada w pierwszy tramwaj, który przyjedzie.

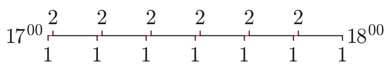
a) Tramwajem 1 dojeżdża do cioci, a tramwajem 2 – do wujka. Czy układ ten jest sprawiedliwy, tzn. czy Gucio porównywalnie często odwiedza ciocię i wujka?

b) Z jakim prawdopodobieństwem Gucio będzie jutro czekał najwyżej 3 minuty?

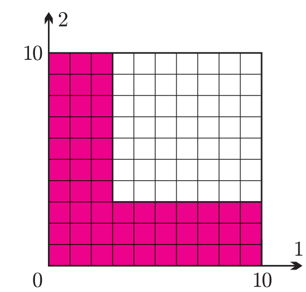
2. Maja i Gucio jeżdżą do pracy z tego samego przystanku tramwajem kursującym co 10 minut od 7^{00}. Maja przyjdzie jutro o przypadkowej porze pomiędzy 7^{00} a 8^{00} i wsiądzie w pierwszy tramwaj, który przyjedzie. Gucio postąpi tak samo. Z jakim prawdopodobieństwem spotkają się w tramwaju?

3. Maja jutro o przypadkowej porze pomiędzy 13^{00} a 14^{00} przyjdzie do baru *Karaluch* i wyjdzie po 15 minutach, ale nie później niż o 14^{00}. Gucio postąpi tak samo. Z jakim prawdopodobieństwem spotkają się?

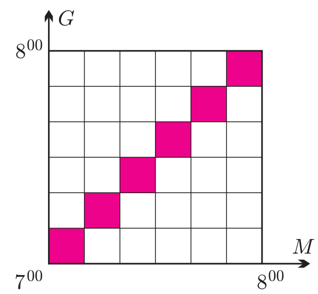
4. Patyk o długości 1 złamano w dwóch przypadkowych miejscach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z otrzymanych trzech części da się zbudować trójkąt?



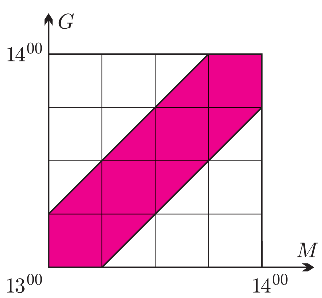
Rys. 1



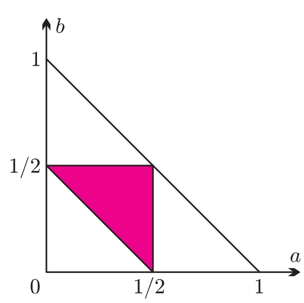
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Rozwiązania

R1. (a) Nie musi być sprawiedliwy. Jeśli np. tramwaj 2 przyjeżdża zawsze minutę po tramwaju 1 (rys. 1), to tylko przez tę minutę z każdych dziesięciu najbliższym nadjeżdżającym tramwajem jest 2, czyli Gucio odwiedza wujka średnio raz na dziesięć dni. ☐

(b) Rysunek 2 ilustruje możliwe czasy oczekiwania na tramwaje: 1 – oś pozioma i 2 – oś pionowa. Czas oczekiwania do 3 minut oznaczono kolorem. Jego prawdopodobieństwo to stosunek pola kolorowego do pola całości, czyli 51/100. ☐

R2. Rysunek 3 ilustruje możliwe godziny przyjścia Mai (oś pozioma), Gucia (oś pionowa) oraz ich spotkania (kolorowy obszar). Szukane prawdopodobieństwo to stosunek pola kolorowego obszaru do pola całego kwadratu, czyli 1/6. ☐

R3. Rozwiązanie jest analogiczne jak w poprzednim zadaniu (rys. 4), tym razem prawdopodobieństwo jest równe 7/16. ☐

R4. Oznaczmy długości odpowiednio lewej i środkowej części przez a i b, wówczas $0 < a, b < 1$ oraz $a + b < 1$, a trzeci fragment ma długość $1 - a - b$. Trójkąt da się zbudować, gdy zachodzą nierówności: $b + (1 - a - b) > a$, $a + (1 - a - b) > b$ oraz $a + b > 1 - a - b$, czyli $1/2 > a$, $1/2 > b$ oraz $a + b > 1/2$. Odpowiada to kolorowemu obszarowi na rysunku 5, a szukane prawdopodobieństwo to stosunek jego pola do pola całej figury zadanej warunkami $0 < a, b < 1$ oraz $a + b < 1$, czyli 1/4. ☐

Zadanie domowe

5. Maja w piątek o przypadkowej porze pomiędzy 20^{00} a 21^{00} przyjdzie do kawiarni, Gucio postąpi tak samo. Maja wyjdzie po 20 minutach, ale nie później niż o 21^{00}; Gucio zostanie do 21^{00}. Z jakim prawdopodobieństwem spotkają się?