

SPIS TREŚCI NUMERU 8 (507)

Co to jest życie?

– 42 lata później
Magdalena Fikus

Teoria grup w kombinatoryce
Paweł Burzyński

Układy podwójne gwiazd
z czarnymi dziurami
Agnieszka Janiuk,
Andrzej Zdziarski

Anioły, demony, fizyka
Krzysztof Turczyński

Zadania


e z gumy
Bartosz Smoczyński

Brzydka prawda

Okrąg dowpisany
Mieszko Komisarczyk

Krótki dowód
twierdzenia Routha
Waldemar Pompe

Polecamy bardzo trudne
zadanie

 Kto za, kto przeciw?
Magdalena Fikus

Informatyczny kącik
olimpijski (96):
Obłodzone drogi
Tomasz Idziaszek

Henryk Pawłowski
(1960–2016)

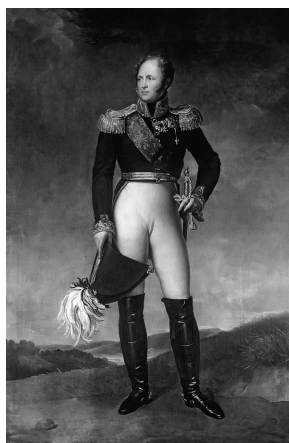
Klub 44

Prosto z nieba: Nowy rekord
teleskopu Hubble'a

Niebo w sierpniu

 Przebiegi płaszczyzn
Joanna Jaszuńska

W następnym numerze opowiadamy o tym,



co zdarzyło się w nauce
200 lat temu, gdy Aleksander I
założył Uniwersytet Warszawski
zaraz po pokonaniu Napoleona

- str. 1 Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.
- str. 3 Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.
- str. 6 Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Tomasz Kazana, Krystyna Kordos – sek. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turczyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
- str. 10 Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.
- str. 15 Okładki i ilustracje: Podpunkt; rysunki techniczne: Marcin Adamski.
Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ wykonała Redakcja.
- str. 18 Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.
-
- str. 19 PRENUMERATA
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl
- str. 20 **RUCH S.A.:** www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600
Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:
Cena prenumeraty w 2016 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.
- str. 21 Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie
www.prenumerata.ruch.com.pl
- str. 22 Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl
lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH
- str. 24 pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.
Koszt połączenia wg taryfy operatora.
-
- str. 25 Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.
Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl
Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)
Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Co to jest życie? – 42 lata później

Magdalena FIKUS

W pierwszym roczniku *Delt* zamieściliśmy wiele artykułów, których tytuły zaczynały się od *Co to jest...* Odpowiadali na to pytanie uczeni reprezentujący różne dziedziny nauki, a wśród nich również Autorka niniejszego tekstu. Teraz poprosiliśmy Ją o ponowne podjęcie tego pytania.

Tekst sprzed 42 lat można znaleźć na naszej stronie www.deltami.edu.pl

Redakcja

Czytanie własnego tekstu powstałego w tak odległym czasie jest fascynujące. Byłam młodą osobą, 9 lat po doktoracie, rok przed habilitacją. Pracowałam w dziedzinie już wtedy oficjalnie nazywanej biofizyką, choć fizykiem nie byłam. Swoją odpowiedź na tytułowe pytanie konfrontowałam z poglądami fizyków na ten temat, gdyż mam wielki szacunek dla ich sposobu myślenia.

Odpowiedź na każde pytanie musi zawierać definicję, a ta współcześnie akceptowana to unik w stronę niewiedzy: najczęściej powołujemy się na definicję... NASA. Dla nich jest ona ważna, bo chcą wiedzieć, co zrobimy, gdy znajdziemy jakikolwiek ślad „czegoś” w Kosmosie. Trzeba wtedy podjąć decyzję, czy to „coś” jest życiem.

NASA odpowiada na to pytanie w punktach. **Życie**, a dokładniej „coś” żywego:

- pobiera energię i używa jej do wzrostu i reprodukcji,
- termodynamicznie jest układem zamkniętym,
- dąży do utrzymania równowagi wewnętrznych procesów (homeostaza),
- przechowuje i przetwarza informacje,
- replikuje, mutuje, podlega doborowi naturalnemu,
- umiera.

Od 1974 roku w poznawaniu molekularnych podstaw życia nastąpiły liczne rewolucje. Przyznano wiele ważnych Nagród Nobla. Zasób wiedzy przyprawia i przyprawilby ówczesną dr Magdalenę Fikus o zawrót głowy i niedowierzanie. Ale na ile zbliża do wiedzy, czym jest życie?

Przede wszystkim weszliśmy na wyższy poziom: poznaliśmy właściwości chemiczne i fizyczne cząsteczek uznawanych za nosicieli dziedziczności i procesów życiowych. W tamtych czasach wiedzieliśmy tylko tyle, ile nam wizjonerzy molekularni, Watson i Crick, wymodelowali: podziwialiśmy ogólny kształt eleganckiej, pięknej cząsteczki – DNA – oraz mieliśmy dość szkolne wyobrażenie o budowie przestrzennej wykonawców metabolicznych zadań – białek. Na dobrą sprawę cała wiedza molekularna o życiu sprowadzała się do jednej bakterii, *Escherichia coli*.

Przez 42 lata rozszyfrowano strukturę (w oparciu o wiedzę biochemiczną i badania krystalograficzne) nie tylko kwasów nukleinowych i wielu białek, ale, co było znacznie trudniejsze, co zapiera dech – strukturę przestrzenną, z dokładnością do położenia atomów, złożonych struktur komórkowych – np. rybosomów, nukleosomów. Poznano dokładnie budowę i strukturę cząsteczkową organelli – mitochondriów i chloroplastów.

W drugiej połowie dekady lat 70. wymyślono dwie różne metody oznaczania kolejności (sekwencjonowania) nukleotydów. Ale nawet wtedy ustalenie kolejności około 1500 nukleotydów (tyle ma najmniejszy wirus Φ X174) było zadaniem heroicznym i angażującym przez co najmniej rok kilkudziesięciu badaczy. Dopiero w pierwszej dekadzie XXI wieku zaangażowanie fizyków i technologów (dysponujących na dodatek znacznymi środkami), konstrukcja automatycznych przyrządów sekwencjonujących, modyfikacje, zminiaturyzowanie i wyostrenie czułości metod sekwencjonowania, doprowadziły do prawdziwej lawiny oznaczeń genomów, czyli pełnych sekwencji DNA charakterystycznych dla danego gatunku. Ogromnie ważne, poznawczo zasadnicze, okazało się wykazanie zasadniczych różnic w działaniu i regulacji aktywności genów między bakteriami a całą resztą świata komórkowego.

Poznaliśmy budowę genomów, które wydają się nam najważniejsze: człowieka (2004) i nawet pełnego genomu jedyne innego od *Homo sapiens* ludzkiego gatunku – Neandertalczyka. Znamy genom naszych bliskich kuzynów genetycznych – szympanсів i goryli. A na drugim biegunie – genomy tysięcy gatunków bakterii, setek wirusów. Dzięki badaniom genomicznym potwierdzamy





Rozwiązanie zadania M 1501.

Przyporządkujmy polom szachownicy w naturalny sposób pary liczb całkowitych (a, b) , gdzie $1 \leq a, b \leq 9$. Pomalujmy pola o obu współrzędnych parzystych na niebiesko, pola o obu współrzędnych nieparzystych – na czerwono, a pozostałe pola – na żółto.

Przypuśćmy, że pionki mogą poruszać się dowolnie długo w taki sposób, by żadne dwa nie spotkały się na jednym polu. W takim razie w każdej chwili na 16 niebieskich polach może znajdować się co najwyżej 16 pionków. Każdy pionek z czerwonego pola znajdzie się po dwóch ruchach na niebieskim polu, więc na czerwonych polach może przebywać w każdej chwili również co najwyżej 16 pionków. Ponadto każdy pionek z żółtego pola po jednym ruchu znajdzie się na polu niebieskim lub czerwonym. W takim razie na żółtych polach mogą przebywać naraz co najwyżej 32 pionki. Stąd na szachownicy mogą być łącznie najwyżej 64 pionki.

Jeśli pionków jest 65, to po pewnym czasie dwa z nich muszą znaleźć się na jednym polu.

i czasem korygujemy „drzewa” ewolucyjne, znane z innych odkryć i postulatów. Dowiedzieliśmy się o przepływie genów między różnymi gatunkami bakterii.

Opracowano wiele metod *in silico* przewidywania struktur przestrzennych białek, porównano je z wynikami badań krystalograficznych, wreszcie otworzono drogę do planowanej modyfikacji białek. Rozbudowano i ulepszono metody syntezy *in vitro* kwasów nukleinowych i białek, czego ukoronowaniem było wprowadzenie syntetycznego genomu bakteryjnego do komórki pozbawionej własnego materiału genetycznego – powstała syntetyczna bakteria. Przypisano rolę fizjologiczną wielu sekwencjom DNA niekodującym białek. Zaproponowano teoretycznie i sprawdzono doświadczalnie wieloskładnikowe modele regulacji aktywności genów, wykrywając dziesiątki, jeśli nie setki małych cząsteczek RNA i przypisując im bardzo różnorodne funkcje regulacyjne. Udoskonalono wiedzę o błonie komórkowej, a także zbudowano wiele wersji sztucznych błon komórkowych.

Zdefiniowano przyczyny wielu dysfunkcji i chorób genetycznych ludzi, zwierząt i roślin, identyfikując mutacje genowe oraz wzajemne sieciowanie takich genów. W oparciu o tę wiedzę opracowano metody klinicznej diagnostyki chorób, zaproponowano – tam, gdzie to możliwe – terapie zachowawcze lub zachowania terapeutyczne – przez modyfikację zachowań pacjentów, a także stosowanie nowych generacji leków i szczepionek. Zbudowano wiele technicznych medycznych „protez” zastępujących narządy. Rozwinęły się nauki neurologiczne oraz wiedza o mózgu, do tego stopnia, że rozważamy możliwość powstania niezależnej syntetycznej inteligencji.

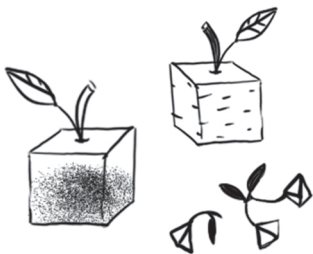
Odbyły się na całym świecie debaty na temat genetycznie modyfikowanych roślin, terapii genowych i perspektyw tworzenia genetycznie modyfikowanych ludzi. Genetyka na wysokim technicznym poziomie pojawiła się w Japonii, Korei Południowej i Chinach, a więc w społeczeństwach wyznających różne od europejsko-amerykańskich systemy wartości.

Zbliżyliśmy się też do poszukiwań odpowiedzi na pytanie *JAK powstało życie?* W tym pytaniu kryje się dla mnie również rozważanie o tym, czym życie jest.

Na początek: musimy się zgodzić z poglądem, że życie podlegało ewolucji i NA PEWNO nie powstało we współczesnej formie kwasów nukleinowych, białek i wieloskładnikowych struktur oraz w formie wielu gatunków organizmów. Bardzo wielu przyrodników sądzi, że skoro sposoby syntezy i zużycia energii, wzrostu, reprodukcji, przechowywania informacji, mechanizmy mutagenety, wreszcie indywidualnej śmierci (por. definicja NASA) są na poziomie molekularnym wspólne dla wszystkich poznanych na Ziemi istot, to miały one kiedyś wspólnego przodka. Ocenia się, że pojawił się mniej więcej 4 miliardy lat temu. Uzyskał wdzięczne imię LUCA (*Last Universal Common Ancestor*). Kilku noblistów (a przed nimi Karol Darwin) przewidziało także, że pierwszą cząsteczką – nosicielem dziedziczności, był nie DNA, a twór przypominający dzisiejszy RNA, i czas ten nazwali „światem RNA”. Pewności co do kształtu tamtego świata mieć nie będziemy, nigdy żaden paleontolog nie wykopie skamieniałości LUCA. Cztery miliardy lat to okres niewyobrażalny dla istoty żyjącej lat 70, dlatego częściowo obracamy się w kręgu nauki, częściowo zachwycających naukowych hipotez w stylu SF. Ziemia była inna, oceany leżały gdzie indziej, klimat był inny, nie było tlenu w atmosferze, waliły w Ziemię różne kosmiczne ciała, wszystko było inaczej. A jednak są ludzie o wielkich umysłach, którzy, rozmyślając na ten temat, zadają coraz bardziej niezwykle pytania. Można ich fantastyczne wykłady obejrzyć dziś w Internecie (w 1974 roku takich możliwości dr MF nie miała).

Od wykładu jednego z tych natchnionych noblistów, Jacka Szostaka, trudno się oderwać, a także trudno nie dążyć za kolejnymi odnośnikami. Zostawiam zatem wybór źródeł Czytelnikom, zacząć mogą od: J. Szostak, *Reconstructing the First Cells* (www.youtube.com/watch?v=jmMU0b20FSg).

Wychodząc z wiedzy współczesnej o życiu, trafiamy na problem „jajka i kury”: DNA koduje białka, a bez białka nie ma syntezy DNA – jak ten



krag rozplatac? Zegarek spontanicznie nie zlozy sie ze srubek, spiralek i sprzynek, ale bieg czasu mozna mierzyc patykiem i jego cieniem na piasku. Takze pre-komorki musiały być skrajnie proste, dazyć spontanicznie do odrodzenia sie najprostszymi blonami od srodowiska, gromadzic proste zwiazki organiczne, takze takie, ktore sa zdolne do samoorganizacji w bardziej zlozone struktury. Wtedy przewidziec mozna rowniez pojawianie sie nowych funkcji i samoreplikacje niektorych z takich ukkladów. Juz na tym poziomie pojawia sie zjawisko pre-ewolucji, utrwalenie w wyniku doboru najbardziej wydajnych, najszybszych, funkcjonalnych wersji komorek.

Tacy badacze jak Jack Szostak probuja dzis zbudowac swoje wersje procesu/procesów powstania zycia, swoje modele. Szukaja chemicznych spontanicznych procesów do tego prowadzacych. Postuluja proste modele, speoniajace postulaty definicji zycia z NASA. Aby dojsc moglo do ewolucji komorek, zaczac sie musiało od ewolucji czasteczek. Nie bylo wielkich kompleksów makromolekul, zlozonych strukturalnie blon komorkowych. Proste pre-czasteczki pakowaly sie do prostych pęcherzyków otoczonych prostymi, polprzepuszczalnymi blonami. Pewne przypadkowe zmiany w chemicznej naturze tych czasteczek skutkowaly replikacja takich czasteczek, ktore moglyby zawierac chemiczna informacje (pre-kwasy nukleinowe). I tak, po powstaniu zczateków zycia rozpoczela sie jego ewolucja.

Czym jest zycie? Do definicji NASA dodalabym jeszcze dynamike wszystkich jego zjawisk. Stala realizacja wszelakiego rodzaju zmian. A czasu miało to zycie duzo – ponad 4 miliardy lat.

Dzis problem istoty zycia rozpatrujemy na poziomie czasteczek i czasów rzędu sekund. Te procesy czekaja na interpretacje kwantowa – podobno jeszcze nam do niej daleko.

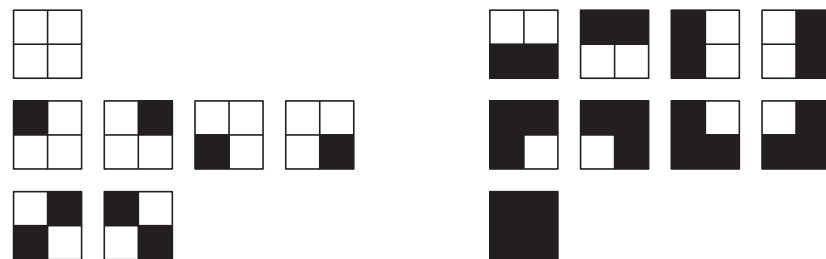
A jednak mam nadal wrazenie, ze aktualna jest pewna stara piosenka: *zycie jest forma istnienia bialka, tylko w kominie czasem cos zalka...*



Teoria grup w kombinatoryce

Paweł BURZYŃSKI*

Ten artykul bedzie poswiecony zliczaniu róznych kolorowan obiektów, ktore podlegaja symetrii. Wyobrazmy sobie, ze Kalina chcialaby pokolorowac rogi kwadratu za pomoca m kolorów. Ile róznych figur moze w ten sposob otrzymac? Poniższy rysunek przedstawia wszystkie mozliwe kolorowania dwoma kolorami, podzielone na zbiory kolorowan identycznych wzgledem izometrii.



Jak widać istnieje 16 kolorowan dwoma kolorami, ale tylko 6, gdy dopuscimy obracanie kwadratem i odbicia symetryczne. Aby obliczyc liczbe kolorowan wieksza liczba kolorów, przyjrzyjmy sie dokladnie izometriom naszego obiektu. W przypadku kwadratu jest ich 8:

- identycznosc,
- obroty o 90° , 180° , 270° ,
- odbicia wzgledem przekatnych, osi pionowej oraz osi poziomej.

*licealista, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni



Rozwiązanie zadania M 1502.
Tak!

Taką liczbą jest na przykład

$$a = 10^{2^1} + 10^{2^2} + 10^{2^3} + \dots + 10^{2^{2016}}.$$

Jej zapis składa się wyłącznie z zer i jedynek, a suma cyfr to 2016. Ponadto

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\sum_{i=1}^{2016} 10^{2^i} \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{2016} (10^{2^i})^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2016} 10^{2^i+2^j} = \\ &= \sum_{i=1}^{2016} 10^{2^{i+1}} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 2016} 10^{2^i+2^j}. \end{aligned}$$

Z jednoznaczności zapisu liczb w systemie dwójkowym w powyższych sumach potęgi liczby 10 mają parami różne wykładniki. Stąd a^2 ma w zapisie dziesiętnym 2016 jedynek i $\binom{2016}{2}$ dwójek, czyli suma cyfr a^2 jest równa

$$2016 + 2 \cdot 2016 \cdot \frac{2015}{2} = 2016^2.$$

Dodatkowo izometrie dowolnego obiektu można składać. Oznaczmy tę operację \circ . Przykładowo: jeżeli odbijemy kwadrat względem osi pionowej, a następnie obrócimy go o 180° , otrzymamy odbicie względem osi poziomej. Zbiór izometrii wraz z operacją \circ ma poniższe podstawowe własności, dzięki którym tworzą one grupę, którą od teraz będziemy oznaczać przez G

- złożenie dowolnych dwóch izometrii również jest izometrią;
- działanie \circ jest łączne, czyli dla dowolnych $p, q, r \in G$ mamy $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$;
- istnieje element neutralny e nazywany identycznością, taki że dla dowolnego $p \in G$ zachodzi $p \circ e = e \circ p = p$;
- dla dowolnego $p \in G$ istnieje izometria odwrotna nazywana p^{-1} , taka że $p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = e$.

Zachęcam Czytelnika, aby samodzielnie uzasadnił powyższe własności grupy izometrii.

Jeżeli oznaczymy teraz zbiór wszystkich kolorowań kwadratu m kolorami (dla pewnego ustalonego m) przez A , będziemy mogli zdefiniować działanie grupy G na zbiór A . Zauważmy, że dowolna symetria g z G może działać na każdy element z A , przekształcając go na pewien inny. Mówiąc formalnie, jest to funkcja spełniająca dwie własności:

- $(g_1 \circ g_2)(a) = g_1(g_2(a))$,
- $e(a) = a$.

Aby lepiej zrozumieć działanie grupy izometrii na kolorowaniach obiektu, warto przyjrzeć się rysunkowi kolorowań kwadratu i zastanowić się, którymi izometriami trzeba działać na kolorowania z każdej grupy, aby otrzymać pozostałe.

Zanim przejdziemy do kluczowego twierdzenia, potrzebujemy jeszcze trzech nowych pojęć. Dla dowolnej izometrii g zbiorem jej punktów stałych będą wszystkie kolorowania a , takie że $g(a) = a$ – będziemy ten zbiór oznaczać przez $\text{fix}(g)$. Dla dowolnego kolorowania a zbiorem jego stabilizatorów będą wszystkie symetrie g , takie że $g(a) = a$ – ten zbiór będziemy oznaczać przez $\text{stab}(a)$. Ostatecznie, dla pewnego kolorowania a orbitą, do której ono należy, będzie zbiór wszystkich innych kolorowań, które można otrzymać z a działając pewną izometrią z G . Ten zbiór będziemy nazywać $\text{orb}(a)$. Zauważmy teraz, że na rysunku wszystkich kolorowań kwadratu (poprzednia strona) zostały one podzielone właśnie na orbity. Każda orbita odpowiada jednemu sposobowi kolorowania obiektu, zatem naszym celem jest obliczenie ich liczby.

Niech a oraz b będą dwoma kolorowaniami należącymi do tej samej orbity. Ponadto niech H oznacza zbiór wszystkich takich izometrii h , że $h \circ a = b$; zauważmy również, że $h^{-1}(b) = a$. Wybierzmy dowolną izometrię $h \in H$. Składając ją lewostronnie ze wszystkimi izometriami ze zbioru $\text{stab}(a)$, otrzymamy $|\text{stab}(a)|$ różnych izometrii należących do H . Zatem $|H| \geq |\text{stab}(a)|$. Ponadto a można składać z odwrotnościami wszystkich izometrii z H , otrzymując $|H|$ izometrii należących do $\text{stab}(a)$. Z tego wynika, że $|H| \leq |\text{stab}(a)|$, więc:

$$|H| = |\text{stab}(a)| = |\text{stab}(b)|.$$

Jeżeli zadziałamy na kolorowanie a wszystkimi izometriami z G , to każde z kolorowań ze zbioru $\text{orb}(a)$ otrzymamy dokładnie tyle samo razy w wyniku działania grupy. Można zatem wywnioskować bardzo ważny lemat:

$$\forall_{a \in A} |\text{stab}(a)| \cdot |\text{orb}(a)| = |G|.$$

Teraz jesteśmy gotowi, aby wyprowadzić kluczowy wzór. Oznaczając zbiór wszystkich orbit poprzez Ω , otrzymujemy:

$$|\Omega| = \sum_{a \in A} \frac{1}{|\text{orb}(a)|} = \sum_{a \in A} \frac{|\text{stab}(a)|}{|G|} = \frac{\sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|}{|G|}.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że zarówno $\sum_{a \in A} |\text{stab}(a)|$, jak i $\sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|$ są równe liczbie par (g, a) , takich że $g(a) = a$. Wyprowadzona powyżej tożsamość nazywana jest lematem Burnside'a. Zbiór A jest niejednokrotnie ogromny, przez co nie ma możliwości badania wszystkich orbit. Dzięki tej równości wystarczy sklasyfikować izometrie z grupy G ,

których jest stosunkowo niewiele. Jedyną trudnością, jaka pozostała, jest obliczenie dla każdej izometrii, ile ma ona punktów stałych. Aby to zrobić, musimy spojrzeć, które spośród rogów kwadratu dana izometria przekształca na które. W ten sposób rozbijamy je na cykle, a każdy z nich będzie musiał być w tym samym kolorze. Jeżeli izometria ma k cykli, to ma ona m^k punktów stałych, ponieważ każdy z nich kolorujemy jednym kolorem.

Dla ułatwienia ponumerujemy rogi kwadratu od 1 do 4 tak, jak numeruje się ćwiartki układu współrzędnych. Poniższa tabela przedstawia, jakie cykle powstaną dla wszystkich izometrii kwadratu. Zachęcam do jej dokładnego przeanalizowania.

izometria g		cykle	liczba cykli	$ \text{fix}(g) $
identyczność		(1)(2)(3)(4)	4	m^4
obróć	90°	(1, 4, 3, 2)	1	m
	180°	(1, 3)(2, 4)	2	m^2
	270°	(1, 2, 3, 4)	1	m
odbicie	oś pozioma	(1, 4)(2, 3)	2	m^2
	oś pionowa	(1, 2)(3, 4)	2	m^2
	przekątna 1	(1, 3)(2)(4)	3	m^3
	przekątna 2	(1)(2, 4)(3)	3	m^3

Podsumowując dane z tabeli i wstawiając je do otrzymanego wzoru, możemy wyprowadzić wzór na liczbę różnych kolorowań kwadratu m kolorami:

$$\frac{m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m}{8}$$

Spróbujmy teraz zmierzyć się z trudniejszym problemem. Wyobraźmy sobie, że Kalina chciałaby pokolorować wszystkie ściany sześciennego kostki, mając do dyspozycji kredki w m kolorach. Ile różnych kostek mogłaby w ten sposób otrzymać? Tym razem nie będziemy wypisywać wszystkich izometrii sześciannu, musimy to zrobić sprytniej. Zaczniemy od tego, że obracając sześcian, możemy go postawić na dowolnej ze ścian, a następnie obrócić na cztery sposoby, zatem mamy $6 \cdot 4 = 24$ izometrie. Spróbujmy je teraz sklasyfikować.

- **Identyczność.** Każda ściana przechodzi sama na siebie, tworząc osobny cykl, zatem ma ona m^6 punktów stałych.
- **Obrót o 90° lub 270° względem osi przechodzącej przez środki przeciwległych ścian.** Jest $3 \cdot 2 = 6$ takich izometrii. Dla każdej z nich dwie ściany, przez które przechodzi oś symetrii, przechodzą same na siebie, natomiast pozostałe ściany tworzą jeden cykl, zatem mamy m^3 punktów stałych.
- **Obrót o 180° względem osi przechodzącej przez środki przeciwległych ścian.** Są trzy takie izometrie. Cykle zachowują się podobnie jak w poprzednim przypadku, ale cykl długości 4 rozbija się na 2 cykle długości 2. Mamy zatem m^4 punktów stałych.
- **Obrót o 120° lub o 240° względem osi przechodzącej przez parę przeciwległych wierzchołków.** Mamy $4 \cdot 2 = 8$ takich izometrii. Każda z nich tworzy dwa cykle długości 3 przy obu wierzchołkach, tworząc m^2 punktów stałych.
- **Obrót o 180° względem osi przechodzącej przez środki przeciwległych krawędzi.** Jest 6 takich izometrii. W każdej z nich 2 pary ścian połączone krawędziami, przez które przechodzi oś, oraz pozostałe 2 ściany, przechodzą na siebie nawzajem. Mamy trzy cykle długości 2, więc jest m^3 punktów stałych.

Zauważmy, że rozpatrzyliśmy już wszystkie 24 izometrie. Po podstawieniu otrzymanych danych do wzoru otrzymujemy wzór na liczbę nieizometrycznych kolorowań ścian sześciannu m kolorami:

$$\frac{m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2}{24}$$

Po przeczytaniu tego artykułu warto spróbować własnych sił i ustalić, na ile sposobów Kalina mogłaby pokolorować czworościan, a na ile ośmiościan foremny za pomocą m kolorów.

Na tylnej stronie okładki znajdują się kwadraty z pokolorowanymi wierzchołkami. Sprawdź, ilu i jakich pokolorowań brakuje, jeśli dwa pokolorowania uważamy za jednakowe, gdy dadzą się nałożyć przez obrót lub symetrię kwadratu.

Rozwiązanie możesz też znaleźć w tym numerze.

Układy podwójne gwiazd z czarnymi dziurami

Agnieszka JANIUK*, Andrzej ZDZIARSKI**

Większość typowych gwiazd (tzw. gwiazd ciągu głównego) znajduje się w układach podwójnych lub wielokrotnych, co jest spowodowane samym przebiegiem procesu formowania się gwiazd. Przykładem gwiazdy podwójnej może być chociażby Syriusz, który oglądany gołym okiem wygląda na gwiazdę pojedynczą, ale już na obrazie z kosmicznego teleskopu Hubble'a widać, że ma towarzysza.

Najbardziej podstawowy parametr fizyczny gwiazdy, jakim jest jej masa, można wyznaczyć jedynie w przypadku układu podwójnego. Masę pojedynczej gwiazdy możemy oszacować, znając jej jasność absolutną i typ widmowy, ale wcześniej taką relację należy „wykalibrować” w oparciu o dane innych znanych gwiazd.

Z punktu widzenia obserwatora układy podwójne można podzielić na wizualne, zaćmieniowe oraz spektroskopowe. Nie rozważamy tutaj układów, w których dwie gwiazdy są widoczne obok siebie na niebie, choć faktycznie ich wzajemna odległość jest duża, a bliskość na niebie jest przypadkiem.

W układach wizualnie podwójnych gwiazdy muszą być w wystarczającej odległości od siebie, aby można je było rozdzielić w obserwacji – typowo musi być to więcej niż 2 sekundy łuku. Układy zaćmieniowe pozwalają zmierzyć względne zmiany jasności powierzchniowej, a stąd mamy informację o rozmiarach gwiazd, stosunku ich jasności, a także o ich ewentualnie niesferycznym (spłaszczonym) kształcie. Na przebieg zaćmienia wpływa również ekscentryczność orbity układu podwójnego i jej nachylenie do linii widzenia.

W układach spektroskopowo podwójnych widmo promieniowania gwiazdy widocznej wykazuje okresowe przesunięcia dopplerowskie linii widmowych w kierunku niebieskim lub czerwonym, związane z ruchem orbitalnym składników układu podwójnego. Z krzywych prędkości radialnych w takich układach można wyznaczyć parametry orbity, takie jak jej mimośród, półosi wielka orbity oraz nachylenie (dokładniej iloczyn półosi orbity i sinusa kąta jej nachylenia). Jeśli dysponujemy krzywymi zmian prędkości radialnych obydwu składników układu, to możemy wyznaczyć też masy składników, jednak z dokładnością do kąta nachylenia orbity.

Jeśli układ jest jednocześnie spektroskopowo podwójny i zaćmieniowy, to możemy wyznaczyć rozmiary oraz masy jego składników. Jeśli jednak nie mamy krzywej zmian blasku, a jedynie zmiany prędkości radialnych, to wówczas można wyznaczyć jedynie tzw. funkcję mas, której wartość stanowi dolny limit masy składnika niewidocznego. W przypadku, gdy podejrzewamy, że jest to gwiazda zwarta (czarna dziura lub gwiazda neutronowa), funkcja mas pozwala rozstrzygnąć, z jakim typem gwiazdy zwartej mamy do czynienia.

Twórcą modelu opisującego układ podwójny gwiazd był Édouard Albert Roche (1820–1883), francuski astronom i matematyk. Z punktu widzenia teorii budowy i ewolucji gwiazd układy podwójne można w ogólności podzielić na trzy typy: układy rozdzielone, gdzie rozmiary obydwu składników są dużo mniejsze od rozmiarów ich powierzchni Roche'a, układy półrozdzielone, gdzie jeden ze składników wypełnia swoją powierzchnię Roche'a, oraz układy kontaktowe.

Powierzchnie stałego potencjału (w skrócie *ekwipotencjalne*) są zbliżone kształtem do sfer w dwóch obszarach: w pobliżu każdego ze składników układu oraz daleko od całego układu podwójnego. Dzieje się tak dlatego, że w pobliżu danej gwiazdy efektywna siła (tj. siła w układzie współobracającym się z gwiazdami) działająca na materię jest zdominowana własną grawitacją gwiazdy i ma kierunek radialny ku środkowi gwiazdy. Daleko od układu podwójnego efektywna grawitacja jest zdominowana siłą odśrodkową skierowaną na zewnątrz. Pomiedzy tymi dwoma skrajnymi przypadkami mamy sytuację pośrednią, a kształt powierzchni Roche'a jest bardziej skomplikowany. Przejście graniczne następuje poprzez tzw. krytyczną powierzchnię Roche'a, która składa się z dwóch prawie sferycznych powierzchni połączonych w jednym punkcie

*Centrum Fizyki Teoretycznej PAN
**Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika



Rozwiązanie zadania M 1503.

Niech A' będzie punktem symetrycznym do C względem środka okręgu. Wówczas $A'C$ jest średnicą okręgu, więc cięciwa AA' jest prostopadła do odcinka AC , a więc również równoległa do odcinka BD . W takim razie $AA'BD$ jest trapezem równoramiennym, w szczególności $A'D = AB = 6$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $A'DC$ otrzymujemy $(2r)^2 = 6^2 + 8^2$, a stąd $r = 5$.

(przekrój powierzchni krytycznej zawierający punkt styczności ma kształt podobny do ósemki). Punkt ten nosi nazwę punktu Lagrange'a L_1 . W tym miejscu efektywna siła grawitacji działająca na masę próbną znika.

Powierzchnie ekwipotencjalne gwiazd są powierzchniami stałego ciśnienia i gęstości gazu, co wynika z warunku równowagi hydrostatycznej.

W szczególności taką powierzchnię wypełnia fotosfera gwiazdy synchronicznie rotującej w układzie podwójnym. Jeśli zatem w pewnym momencie ewolucji rozmiar gwiazdy wzrośnie na tyle, że wypełni ona krytyczną powierzchnię Roche'a, to materia zacznie odczuwać wpływ grawitacji towarzysza. Następuje wówczas wypływ masy z gwiazdy i transfer przez wewnętrzny punkt Lagrange'a L_1 .

Tempo ewolucji gwiazdy jest zdeterminowane przez jej masę. Zatem gwiazda masywniejsza, która ewoluuje szybciej, wcześniej znajdzie się na etapie, gdy jej jądro zacznie się kurczyć na skutek przemian termojądrowych, a otoczka zacznie ekspandować.

Tego typu układ stanie się w pewnym momencie układem półrozdzielonym, gdy jeden ze składników przekaże materię towarzyszowi, ten ostatni zaś znajdzie się głęboko wewnątrz swojej krytycznej powierzchni Roche'a. Dwa pozostałe rodzaje układów podwójnych, ze względu na położenie składników względem ich krytycznej powierzchni Roche'a, to układy rozdzielone oraz kontaktowe. Te ostatnie są gwiazdami w fazie tzw. wspólnej otoczki, która utrudnia ich obserwacje. Są one niezwykle trudne do analizy i interpretacji teoretycznej.

W czasie ewolucji układu podwójnego, po zacieśnieniu jego orbity, powszechnym zjawiskiem jest transfer masy między składnikami. Ciasny układ podwójny to taki, w którym składniki znajdują się na tyle blisko siebie, że możliwa staje się wymiana masy między nimi. Rola powierzchni Roche'a w ewolucji takich układów została przewidziana po raz pierwszy w 1941 roku przez Kuipera.

Obserwacyjnego potwierdzenia zjawiska wymiany masy między składnikami układu gwiazd dostarczył tzw. paradoks Algola. Najpierw zauważono, że jedna z gwiazd w tym układzie nie spełnia zależności masa-jasność dla gwiazd ciągu głównego – jest jaśniejsza, niżby to wynikało z jej masy. Wy tłumaczono to tym, że gwiazda ta spaliła cały wodór w swoim jądrze i opuściła ciąg główny,

Model Roche'a

Rozważamy układ podwójny gwiazd, które poruszają się po orbitach kołowych wokół środka masy. Powierzchnie ekwipotencjalne można zdefiniować w układzie odniesienia współobracającym się z gwiazdami. Normalne do tych powierzchni wyznaczają kierunek efektywnej grawitacji, czyli złożenia siły grawitacyjnej i odśrodkowej. Przyjmijmy następujące oznaczenia: m – masa składnika pierwotnego, m' – masa składnika wtórnego, R – odległość pomiędzy składnikami, $[(m'R)/(m+m'), 0, 0]$ – współrzędne położenia środka masy, w układzie kartezjańskim, którego oś x jest osią łączącą składniki układu, a oś z przechodzi przez środek masy, prostopadle do płaszczyzny orbitalnej. Definiujemy

$$\psi = \frac{Gm}{r} + \frac{Gm'}{r'} + \frac{\omega^2}{2} \left(\left(x - \frac{m'R}{m+m'} \right)^2 + y^2 \right)$$

jako całkowity potencjał sił działających na punkt (x, y, z) , gdzie: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ oraz $(r')^2 = (R-x)^2 + y^2 + z^2$ są odległościami środków obydwu składników od środka masy, ω jest prędkością kątową rotacji układu gwiazd względem osi prostopadłej do płaszczyzny xy (układ obraca się wokół osi z). Prędkość kątowa rotacji wynika z prawa Keplera,

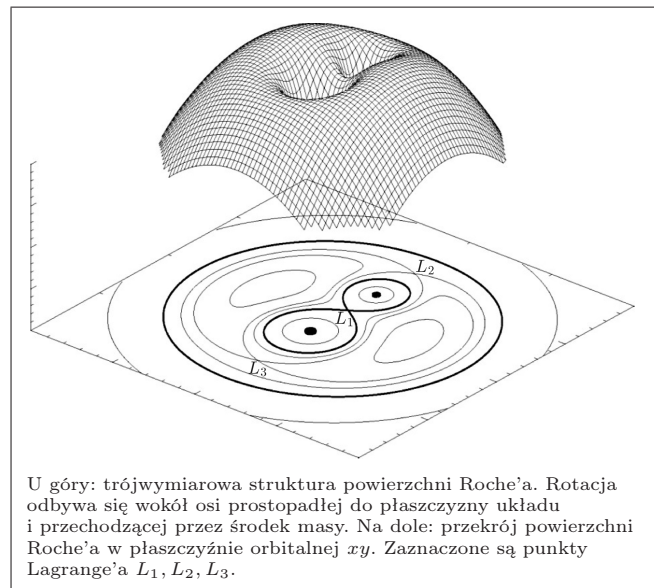
$$\omega^2 = G(m+m')/R^3.$$

Przechodząc do sferycznego układu współrzędnych, mamy:

$$x = r \cos \phi \sin \theta = r \lambda, \quad y = r \sin \phi \sin \theta = r \mu, \quad z = r \cos \theta = r \nu$$

i możemy przepisać wzór na potencjał w jednostkach bezwymiarowych:

$$\Omega = \frac{1}{r} + q \left(\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda r + r^2}} - \lambda r \right) + \frac{q+1}{2} r^2 (1-\nu^2),$$



U góry: trójwymiarowa struktura powierzchni Roche'a. Rotacja odbywa się wokół osi prostopadłej do płaszczyzny układu i przechodzącej przez środek masy. Na dole: przekrój powierzchni Roche'a w płaszczyźnie orbitalnej xy . Zaznaczone są punkty Lagrange'a L_1, L_2, L_3 .

gdzie
$$\Omega = \frac{R\psi}{Gm} - \frac{(m')^2}{2m(m+m')} \quad \text{oraz} \quad q = m'/m.$$

Powierzchnie stałego Ω są zwane powierzchniami ekwipotencjalnymi, czyli powierzchniami Roche'a.



Wkład do zagadnienia teorii ciasnych układów podwójnych profesora Bohdana Paczyńskiego (1940–2007), jednego z najwybitniejszych astrofizyków na świecie, był fundamentalny w wielu aspektach. W latach 60. sformułował on w serii prac teorię ewolucji gwiazd w ciasnych układach podwójnych. Jako pierwszy pokazał, że utrata energii w wyniku emisji fal grawitacyjnych przez ciasny układ może mieć znaczący wpływ na jego ewolucję. Praca Paczyńskiego, opublikowana w 1967 roku, a więc na wiele lat przed odkryciem podwójnego pulsara PSR B1913+16, dotyczyła układów typu WZ Sge, czyli nowych karłowatych; para taka w przyszłości stanie się parą dwóch białych karłów, gdzie promieniowanie grawitacyjne może być znaczące.

Bohdan Paczyński rozwinął znacząco teorię dysków akrecyjnych w zwartych układach podwójnych, badając m.in. spadek materii z wewnętrznego brzegu dysku na obiekt zwarty i powstawanie grubych dysków. Wprowadził też bardzo dokładne formuły na wartość promienia sfery Roche'a, dobrane dla dużego zakresu mas obu składników. Używając jedynie prostych zależności fizycznych, oszacował też z dużą dokładnością masy czarnych dziur i parametry układów podwójnych Cygnus X-1 i LMC X-3.

stając się tzw. olbrzymem, ale nadal zagadką było, że olbrzym w tym układzie ma mniejszą masę niż druga gwiazda, która jest nadal na ciągu głównym. Stoi to w sprzeczności z teorią budowy gwiazd, zgodnie z którą gwiazda ewoluuje tym szybciej, im większa jest jej masa.

Paradoks Algola można było wyjaśnić jedynie faktem utraty części masy przez olbrzyma i pozyskania jej przez mniej zaawansowanego ewolucyjnie towarzysza. Transfer ów nastąpił po tym, jak pierwotnie bardziej masywna gwiazda stała się olbrzymem, znacznie też zwiększając swój rozmiar w tym stadium ewolucji. Wypełniła wtedy swoją powierzchnię Roche'a, co spowodowało utratę masy w wyniku przepływu materii przez wewnętrzny punkt Lagrange'a L_1 na gwiazdę początkowo mniej masywną. Układ osiągnął obecny stan w wyniku tego przepływu.

Układy półrozdzielone dostarczają astrofizykom niezwykle ciekawych i rozmaitych tematów badawczych. W szczególności mamy do czynienia z różnymi rodzajami tych układów w zależności od tego, jaką gwiazdą jest składnik rozdzielony, czyli ten, który odbiera materię. Może być nim gwiazda ciągu głównego, biały karzeł, gwiazda neutronowa albo czarna dziura. W pierwszej sytuacji, jeśli gwiazda jest masywna, to mamy do czynienia ze wspomnianym wyżej układem typu Algol, a jeśli jest to biały karzeł, obserwujemy tzw. nową karłowatą.

W przypadku gwiazd neutronowych i czarnych dziur ich grawitacyjna energia potencjalna jest ogromna. Obserwujemy wówczas rentgenowskie układy podwójne, w których materia opadająca w formie dysku akrecyjnego na obiekt zwarty nagrzewa się tak mocno, że emituje wysokoenergetyczne promieniowanie. Jego miejscem powstawania może być albo sam dysk, albo również powierzchnia gwiazdy, jeśli jest to gwiazda neutronowa.

Mikrokwazar GRS 1915+105 to przykład układu półrozdzielonego, w którym składnikiem zwartym jest czarna dziura. Obiekt ten to jest wyjątkowy z szeregu powodów. Jest to układ z niestabilną akrecją, którego wybuch zaobserwowano w 1992 roku. Źródło znacznie wówczas pojaśniało w zakresie rentgenowskim, ale zamiast przejść z powrotem do stanu spokojnego po roku czy dwóch, tak jak to ma miejsce w przypadku innych przejściowych (czasowo aktywnych) rentgenowskich układów, pozostało bardzo jasne do dzisiaj i nie widać, by miało wkrótce przestać świecić. Tak długotrwała emisja jest zapewne związana z długim (jak na układy z czarnymi dziurami) okresem orbitalnym, wynoszącym 34 dni. Rozmiar orbity jest znaczny, co wynika z prawa Keplera (zobacz wzory w tekście o modelu Roche'a na stronie 7), a otaczający czarną dziurę dysk akrecyjny ma podobnie duży rozmiar. W zewnętrznej części takiego dysku mogło się zakumulować bardzo dużo masy przed wybuchem (zobacz klasyfikacja na stronie obok).

Akrecji często towarzyszy wyrzucanie części spadającej materii na zewnątrz w postaci dwóch strug prostopadłych do płaszczyzny dysku, czyli tzw. dżetów. GRS 1915+105 jest pierwszym gwiazdowym układem w naszej Galaktyce, w którym zaobserwowano pozornie ponadświetlne prędkości dżetów (wcześniej zjawisko to odnotowano w przypadku kwazarów). Odkrycie to zostało dokonane w 1994 roku w zakresie radiowym. Taką pozornie nadświetlną prędkość możemy obserwować, jeśli emitujący radiowe promieniowanie dżet porusza się pod pewnym małym kątem do linii widzenia, z prędkością bliską prędkości światła (lecz oczywiście poniżej tejże).

Obecna masa gwiazdy donora (czyli dającego) w tym układzie wynosi około 0,3 masy Słońca, natomiast masa czarnej dziury to 10 do 12 mas Słońca. Tak mało masywny donor wypełnia swoją powierzchnię Roche'a dzięki temu, że jest olbrzymem, tj. gwiazdą, która zużyła już cały wodór w swoim jądrze. Dalsze reakcje termojądrowe na powierzchni jądra tego olbrzyma prowadzą do powstania bardzo dużej otoczki (taki los czeka nasze Słońce za około 6 mld lat).

Mikrokwazar GRS 1915+105 jest też jednym z układów, gdzie obserwacje rentgenowskie sugerują, że czarna dziura bardzo szybko rotuje. Jej moment

pędu (spin) może być bliski maksymalnej możliwej wartości, dla której grawitacyjny horyzont zdarzeń na równiku rotuje z prędkością światła. Wiedzę o rotacji czarnej dziury w układach rentgenowskich opieramy na dwóch metodach. W pierwszej interpretujemy obserwowane poszerzenie i asymetryczny profil linii emisyjnej żelaza $K\alpha$ (odpowiadającej przejściu elektronu z powłoki L na powłokę K po jonizacji atomu, co daje linię widmową o energii około 6,4 keV). Charakterystyczny profil tej linii emisyjnej jest skutkiem efektów relatywistycznych w pobliżu najciaśniejszej stabilnej orbity wokół czarnej dziury. Położenie tej orbity zależy od wartości spinu czarnej dziury: wewnętrzna orbita stabilna zmienia się od 6 promieni grawitacyjnych dla nierotującej czarnej dziury do jednego promienia grawitacyjnego dla maksymalnie rotującej. W drugiej metodzie mierzymy ciągle widmo energetyczne dysku akrecyjnego w stanach, w których dysk ten sięga do najbardziej wewnętrznej stabilnej orbity i emituje promieniowanie ciała doskonale czarnego.

Możliwe, że czarna dziura wirowała bardzo szybko od początku swojego istnienia, czyli od czasu jej utworzenia w wyniku wybuchu supernowej, ale opinie badaczy na temat szczegółów takiego wybuchu są rozbieżne. Rozkręcenie czarnej dziury już po jej powstaniu jest również trudne, gdyż wymagałoby co najmniej dwukrotnego zwiększenia jej masy początkowej. Początkowa masa gwiazdy towarzyszącej musiałaby wówczas wynosić co najmniej 5 mas Słońca, a ponad 4 masy Słońca zostałyby przechwycone przez czarną dziurę, aby mogło nastąpić jej rozkręcenie. Taki scenariusz wymaga jednak, by 100% materii gwiazdy donora przepłynęło na czarną dziurę, podczas gdy akrecja, szczególnie przy dużym jej tempie, jest zwykle połączona z wyrzutem części materii na zewnątrz (tworzą się wówczas dżety, ale również tzw. wiatr dyskowy). Z kolei jeśli za bardzo zwiększylibyśmy w naszych rozważaniach początkową masę donora, to jego ewolucja stałaby się zbyt szybka, aby mogła doprowadzić do obecnie obserwowanego stanu. Na zrozumienie wszystkich własności tego zagadkowego układu przyjdzie nam zatem jeszcze poczekać.

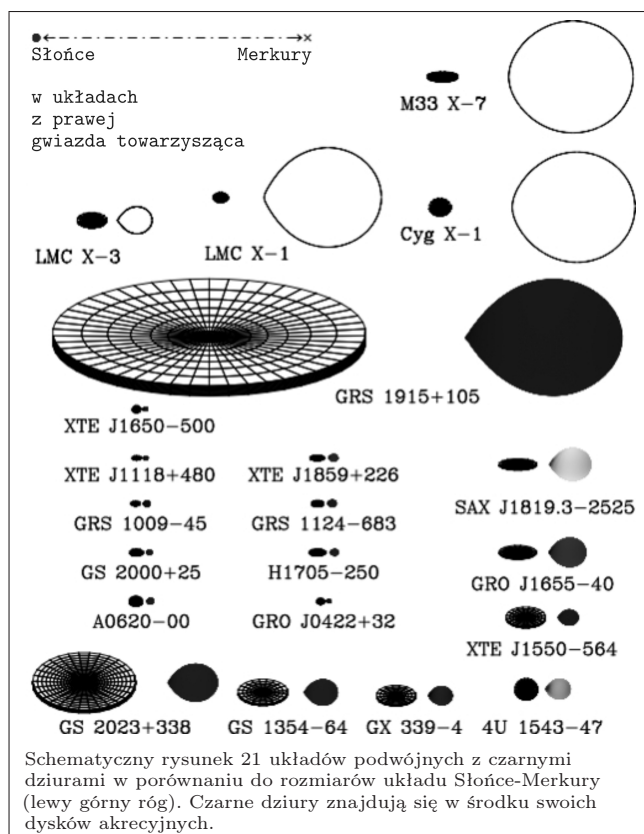
Klasyfikacja układów rentgenowskich zawierających czarne dziury

Ze względu na masę gwiazdy donora układy z czarnymi dziurami dzielimy na masywne, czyli takie, gdzie masa donora jest większa niż kilka mas Słońca, oraz małowasywne, o masie mniejszej niż masa Słońca. W układach małowasywnych donorem jest gwiazda ciągu głównego lub olbrzym, a w układach masywnych jest to zwykle gwiazda zaawansowana ewolucyjnie typu nadolbrzyma. Może to być również masywna gwiazda ciągu głównego.

W układzie podwójnym z czarną dziurą gwiazda masywna najczęściej oddaje masę wskutek emisji wiatru gwiazdowego. Nie zachodzi więc przepływ przez wewnętrzny punkt Lagrange'a L_1 , charakterystyczny z kolei dla małowasywnych podwójnych układów rentgenowskich.

Znamy jednak układy masywne, w których akreującym obiektem zwartym jest gwiazda neutronowa, a przepływ masy zachodzi mimo to przez wypływ z powierzchni Roche'a. Są to SMC X-1, LMC X-4 (układy zaobserwowane w Małym i Wielkim Obłoku Magellana) oraz Cen X-3. Ten ostatni znajduje się w naszej Galaktyce, a jego składnik optyczny, nadolbrzym o masie około 20 mas Słońca, został zidentyfikowany przez polskiego astronoma, Wojciecha Krzemienińskiego.

Następny ważny proponowany podział to zróżnicowanie ze względu na ciągłość emisji rentgenowskiej. Prawie wszystkie znane układy z masywnym donorem i czarną dziurą emitują w sposób ciągły, a prawie wszystkie takie układy z donorem o małej masie przez większość czasu przebywają w fazie spokojnej, nie wykazując znaczącej emisji, wybuchają zaś co kilka, kilkanaście lub kilkadziesiąt lat. Jest to związane z niestabilnością akrecji na zewnętrznym brzegu dysku akrecyjnego. Jeżeli wodór jest w tym obszarze neutralny, to akrecja zachodzi zaniechwalnie wolno i materia z przepływu przez L_1 akumuluje się w dysku powoli. W pewnym momencie jednak temperatura wzrasta na tyle, że



wodór ulega częściowej jonizacji. Nagromadzona materia spada na czarną dziurę w bardzo szybkim tempie, a źródło „wybuchu”. Charakterystyczny czas trwania takiego wybuchu to około roku.

Anioły, demony, fizyka

Krzysztof TURZYŃSKI



Rozwiązanie zadania F 909.
Zgodnie z prawem Faradaya spadek napięcia na cewce

$$U_L = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = L \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

gdzie $\Delta\Phi/\Delta t$ – szybkość zmian strumienia pola magnetycznego przez cewkę, $\Delta I/\Delta t$ – szybkość zmian natężenia prądu w cewce (Δt małe). Ponieważ prąd w cewce ma rosnąć proporcjonalnie do czasu, napięcie U_L nie zmienia się w czasie i w dowolnym momencie wynosi $U_L = LI/t$. Napięcie na kondensatorze, które jest równe napięciu na cewce, także pozostaje stałe i wynosi

$$U_C = \frac{q_0}{C_0} = \frac{q_0 - q}{C},$$

gdzie q_0 – początkowy ładunek na kondensatorze, q – ładunek, który wypłynął z kondensatora w czasie t , C – pojemność kondensatora w momencie t . Z równości $LI/t = q_0/C_0$ dostajemy $I = q_0 t / LC_0$. Ładunek, który wypłynął z kondensatora w czasie t wynosi

$$q = I_{sr}t = \frac{It}{2} = \frac{q_0 t^2}{2LC_0},$$

gdzie I_{sr} – średnia wartość natężenia prądu w czasie t . Z warunku stałości napięcia na kondensatorze znajdujemy szukaną zależność pojemności od czasu

$$C = C_0 \frac{q - q_0}{q_0} = C_0 \frac{1 - t^2}{2LC_0}.$$

Zauważmy, że wynik jest prawdziwy dla $q < q_0$.



Dr hab. Krzysztof Turzyński, zastępca redaktora naczelnego *Delty*, od 1 lutego 2016 roku jest Redaktorem Naczelnym dwumiesięcznika Polskiego Towarzystwa Fizycznego *Postępy Fizyki*.

Zamieszczony obok artykuł jego pióra jest przedrukem z *PF*. Czytelnicy mogą, czytając go, sprawdzić, jak znakomite jest to czasopismo. Życząc naszemu Koledze powodzenia na tak odpowiedzialnym stanowisku, zachęcamy Czytelników *Delty* do sięgania również po *Postępy Fizyki*.

Redakcja *Delty*

Kiedy pewna dwudziestoletnia absolwentka żeńskiego kolegium Vassar wysyłała w 1948 roku podanie o przyjęcie na studia doktoranckie na Uniwersytecie w Princeton, nie robiła sobie zapewne wielkich nadziei. Nic dziwnego, równouprawnienie płci dotarło na ten szczebel edukacji dopiero w roku 1975. Nie zniechęciło to naszej bohaterki, która ostatecznie zdecydowała się kształcić na Uniwersytetach Cornella i Georgetown pod kierunkiem takich tuzów współczesnej fizyki jak Hans Bethe, Richard Feynman czy George Gamow. Po uzyskaniu stopnia naukowego Vera Rubin, bo o niej tu mowa, została astronomem w Instytucie Carnegiego. Tam poznała Kenta Forda, konstruktora niezwykle czułego spektrofotometru, czyli przyrządu pozwalającego rozdzielać światło gwiazd na poszczególne kolory.

Kiedy źródło zmiennych, ale powtarzalnych w czasie zaburzeń, takich jak światło (zaburzenie pola elektromagnetycznego) czy dźwięk (zaburzenie ciśnienia) oddala się od obserwatora, obserwuje on zmniejszenie częstotliwości tych zaburzeń w porównaniu z sytuacją, gdy źródło jest nieruchome. Podobnie, przybliżanie się źródła zaburzeń do obserwatora prowadzi do zwiększenia częstotliwości odbieranych przez niego zaburzeń. Zjawisko to nazywamy efektem Dopplera. Gdy źródłem jest gwiazda, wysyłane przez nią światło zawiera pewien zakres częstotliwości, występują w nim jednak maleńkie przerwy (linie absorpcyjne) będące skutkiem pochłaniania światła przez materiał, z którego gwiazda jest zbudowana. Ponieważ częstotliwości linii absorpcyjnych spoczywającej gwiazdy są dobrze określone, ich zwiększenie bądź zmniejszenie będzie świadczyć o ruchu gwiazdy. Oznacza to, że mierząc zmianę częstotliwości linii absorpcyjnych, można wyznaczyć prędkość oddalania się bądź przybliżania gwiazdy.

Mając dostęp do odpowiednio czułego sprzętu, Vera Rubin rozpoczęła program pomiaru prędkości, z jakimi gwiazdy w pobliskich galaktykach obiegają ich centra. Hipotezę badawczą, którą testowała, da się w uproszczeniu przedstawić następująco. Sądząc po intensywności świecenia galaktyk, można przypuścić, że w zasadzie cała ich masa skupiona jest w niewielkim (w galaktycznej skali) centralnym zgrubieniu; oznaczmy jego masę przez M . Rozważmy pojedynczą gwiazdę o masie m , obiegającą to zgrubienie w sporej w porównaniu z jego rozmiarami odległości r . Siła grawitacji wywierana na tę gwiazdę przez zgrubienie, równa $F_g = GMm/r^2$, gdzie G jest newtonowską stałą grawitacyjną, powinna powodować jej jednostajny ruch po okręgu, czyli stanowić siłę dośrodkową, określoną wzorem $F_r = mv^2/r$, gdzie v jest prędkością gwiazdy. Porównanie tych dwóch wyrażeń prowadzi do wniosku, że prędkość v powinna być odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z odległości r , a więc w szczególności maleć przy zwiększającej się odległości gwiazdy od centralnego zgrubienia. Uzyskiwane od lat 60. XX wieku pomiary Very Rubin przeczyły tymczasem tej intuicji – prędkość stabilizowała się na pewnym poziomie i wcale nie myślała spadać ze wzrostem r .

Mijały lata. Ilość danych zgromadzonych przez Verę Rubin rosła, jej pomiary zostały powtórzone przez innych badaczy i środowisko astronomów uświadomiło sobie, że opisaną wyżej niezgodność trzeba jakoś wyjaśnić. Przy okazji przypomniano sobie o pewnych starych obserwacjach, które w chwili ich opublikowania zostały zlekceważone. Ich autorem był Fritz Zwicky, urodzony w Warnie syn szwajcarskiego kupca; wysłany do Zurychu w celu studiowania prawa i handlu, dziedzin wiedzy potrzebnych do kontynuacji rodzinnego interesu, poświęcił się tymczasem zgłębianiu matematyki i fizyki, po czym wyjechał do Kalifornii, gdzie uzyskał angaż w zespole Roberta Millikana. Ten ostatni był już odkrywcą elementarnego ładunku elektronu i laureatem Nagrody Nobla z fizyki; współpracownicy robili sobie po cichu żarty z jego nazwiska, mówiąc, że jeden kan to najmniejsza, niepodzielna ilość skromności, jaką może charakteryzować się człowiek. Zwicky potrafił wszakże oświadczyć swojemu pryncypałowi,



że nie miał on (znaczy się, pryncypał) nigdy żadnego ciekawego pomysłu na fizykę i dopiero on (znaczy się, Zwicky) mu pokaże. Millikan tolerował jakoś wybryki swojego asystenta, trudno się jednak dziwić, że inni koledzy traktowali Zwicky'ego jako lekko szalonego oryginała, co przekładało się także na odbiór jego badań naukowych (których zakres rozciągał się od kosmologii do konstrukcji silników odrzutowych). Dlatego pewnie nikt nie potraktował dość poważnie uzyskanego przez Zwicky'ego w latach 30. XX wieku wyniku, że galaktyki w gromadzie obserwowanej w gwiazdozbiórze Warkocza Bereniki nie poruszają się tak, jakby tego chciała grawitacja newtonowska wspomagana dodatkowym, rozsądnym, zdawało się, założeniem, że rozkład intensywności świecenia odzwierciedla rozkład masy.

Wyniki Rubin i Zwicky'ego świadczyły o tym, że jeśli chciało się uratować wiarę w newtonowską grawitację (a dodać należy, że efekty wynikające z teorii względności powinny być w tym przypadku znikomo małe), należało przyjąć, że w kosmosie znajduje się jakaś materia, która nie świeci i nie pochłania światła, stanowiąc jedynie dodatkowe źródło przyciągania grawitacyjnego. Gdyby znajomość klasycznej łaciny czy greki należała jeszcze w owym czasie do ogólnego wykształcenia, nadano by pewnie owej substancji jakąś uczoną nazwę, a tak zaczęto mówić po prostu o ciemnej materii. Powołanie – na razie na poziomie spekulacji – do życia takiego bytu spowodowało astronomów i fizyków do zadawania dalszych pytań o jego naturę. Czy istnieją niezależne od pomiarów prędkości gwiazd i galaktyk argumenty na rzecz istnienia ciemnej materii? Czy odpowiednia jej ilość mogła powstać podczas ewolucji wszechświata? Wreszcie, czy dałoby się stanowiące ją cząstki jakoś „złapać” w laboratorium i zbadać?

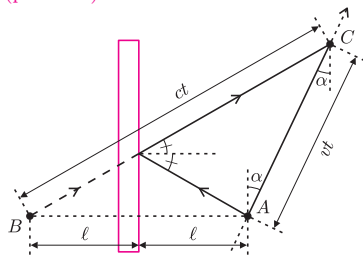
Na pierwsze z tych pytań można było po dziesiątkach lat badań udzielić odpowiedzi twierdzącej. Okazuje się bowiem, że własności wypełniającego wszechświat mikrofalowego promieniowania tła oraz rozkład we wszechświecie wielkich struktur, takich jak galaktyki czy gromady galaktyk, zgadzają się z używanymi przez fizyków i kosmologów modelami tylko pod warunkiem uwzględnienia w nich sporej ilości ciemnej zimnej materii, tj. nieoddziałujących ze światłem cząstek poruszających się wolno w porównaniu z prędkością światła. Także drugie pytanie doczekało się odpowiedzi twierdzącej, w tym wypadku obudowanej dodatkowymi warunkami. Przypuśćmy bowiem, że możliwe są procesy, w których dwie cząstki ciemnej materii o masach porównywalnych z masami najcięższych znanych cząstek, tj. kwarka top lub bozonów W i Z, znikają (anihilują) i powstają dwie znane cząstki (na przykład, para elektron–pozyton), przy czym prawdopodobieństwo zachodzenia tych procesów jest zbliżone do prawdopodobieństwa zachodzenia jądrowych przemian beta. Wówczas, w miarę jak wszechświat stygl i się rozszerzał, spotkanie dwóch cząstek ciemnej materii, prowadzące do ich anihilacji, stawało się coraz mniej prawdopodobne, aż w końcu procesy te praktycznie ustały, a ilość ciemnej materii ustabilizowała się właśnie na takim poziomie, jaki jest potrzeby do wyjaśnienia zarówno obserwacji Rubin i Zwicky'ego, jak i własności mikrofalowego promieniowania tła [1].

Jeśli wyrażone wyżej przypuszczenia mają coś wspólnego z rzeczywistością, pozwala to na ostrożny optymizm w kwestii udzielenia odpowiedzi twierdzącej na trzecie pytanie – skoro bowiem ciemna materia może anihilować w parę cząstka–antycząstka, to zgodnie z prawami mechaniki kwantowej może się także zderzać z cząstkami. Jak jednak wykryć takie zderzenia w laboratorium? Przylatująca z kosmosu cząstka ciemnej materii mogłaby oddziaływać z atomem substancji wypełniającej detektor i – pod warunkiem, że będzie to odpowiednia substancja i odpowiedni detektor – zjonizować ten atom, uwalniając swobodne ładunki elektryczne, pobudzić do świecenia lub wprawić w drgania zawierającą ten atom sieć krystaliczną. Trzeba jednak pamiętać, że istnieje wiele czynników utrudniających rozpoznanie takiego zjawiska: promieniowanie kosmiczne, czyli przylatujące na Ziemię z kosmosu wysokoenergetyczne cząstki zwykłej materii oraz promieniowanie radioaktywne otoczenia detektora i materiału samego detektora. Z niedogodnościami tymi można walczyć, zakopując



Rozwiązanie zadania F 910.

Przy odbiciu dźwięku od muru kąt odbicia jest równy kątowi padania. Możemy więc zastosować metodę, którą znamy z analizy odbicia światła od zwierciadła płaskiego. Zamiast rozpatrywać rzeczywiste położenie źródła dźwięku i odbicie od muru – rozpatrujemy sytuację, w której fikcyjne źródło znajdowałoby się po drugiej stronie muru, w punkcie B, położonym symetrycznie względem muru w stosunku do rzeczywistego położenia źródła (punkt A).



Jeżeli t jest czasem, po którym w punkcie C kierowca usłyszy echo, to samochód przez ten czas przebędzie drogę $x = vt$, a dźwięk drogę ct . Z trójkąta ABC mamy

$$c^2 t^2 = (2\ell + vt \sin \alpha)^2 + (vt \cos \alpha)^2.$$

Podstawiając $x = vt$, dostajemy równanie

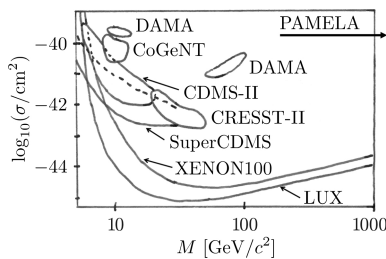
$$\left(\frac{c^2}{v^2} - 1\right)x^2 - 4x\ell \sin \alpha - 4\ell^2 = 0,$$

z którego znajdujemy

$$x = \frac{2\ell}{(c/v)^2 - 1} \left(\sin \alpha + \sqrt{(c/v)^2 - \cos^2 \alpha} \right).$$

detektor głęboko pod ziemią, w szybie nieczynnej kopalni, obudowując go grubą osłoną oraz stosując wielostopniowy proces oczyszczania materiału detektora z radioaktywnych domieszek. Prowadzone przez naukowców symulacje wskazują, że przy współczesnych możliwościach technologicznych można liczyć na zbudowanie detektora dostatecznie czułego, by dało się w nim wykryć cząstki ciemnej materii pomimo występowania tła pochodzącego od innych cząstek.

Co ciekawe, ruch obiegowy Ziemi wokół Słońca stanowi znaczną dodatkową pomoc dla łowców ciemnej materii. Słońce obiega bowiem centrum naszej Galaktyki z prędkością około 220 km/s. Prędkość Ziemi, wynosząca mniej więcej 30 km/s, jest latem skierowana mniej więcej zgodnie z tą prędkością, zimą zaś – w stronę przeciwną. Powoduje to, że latem Ziemia „przeciska się” przez ciemną materię z większą prędkością niż zimą i efekt tego powinien być możliwy do zaobserwowania jako roczna zmienność liczby oddziaływań cząstek ciemnej materii w detektorze.



Podsumowanie własności cząstek ciemnej materii zgodnych z wynikami cytowanych eksperymentów poszukujących ciemnej materii. Na osi poziomej zaznaczono masę cząstek ciemnej materii, na osi pionowej – przekrój czynny na oddziaływanie z nukleonem, który jest miarą prawdopodobieństwa oddziaływania cząstki ciemnej materii ze „zwykłą” materią. Zamknięte kontury ograniczają obszary dozwolone przez eksperymenty DAMA/LIBRA, CoGeNT, CRESST-II i CDMS-II. Linie ciągłe oznaczają SuperCDMS, XENON100 i LUX obrazują parametry wykluczone przez te eksperymenty; obszar wykluczony znajduje się nad linią. Linia przerywana obrazuje parametry wykluczone przez nowsze wyniki eksperymentu CRESST-II. Parametry zgodne z wynikami PAMELA znajdują się poza obszarem rysunku. Na podstawie cytowanych prac.

Co na to eksperymentatorzy? Od 2001 roku zespół eksperymentu DAMA/LIBRA konsekwentnie twierdzi, że zliczenia błysków światła w wypełnionym jodkiem sodu (NaI) detektorze wykazują odpowiednią modulację roczną wskazującą na oddziaływania cząstek ciemnej materii [2]. Zaufanie do tych wyników zmniejsza jednak fakt, że badacze owi nie udostępnili ogółowi fizyków swoich surowych danych, a zjawisk występujących w cyklu rocznym nawet zupełny laik będzie w stanie wskazać niemało. W 2009 roku zespół eksperymentu CoGeNT, używającego wielkiej „diody germanowej” do rejestracji potencjalnych oddziaływań z ciemną materią również ogłosił [3] obserwację rocznej zmienności częstości zliczeń potencjalnych oddziaływań ciemnej materii – okazało się, niestety, że parametry cząstek mogących wywoływać odpowiedzi w DAMA/LIBRA i CoGeNT musiałyby być znacząco inne. W 2011 roku badacze używający detektora CRESST-II ogłosili podczas – *o tempora! o mores!* – konferencji prasowej, że także zobaczyli w swoim detektorze, rejestrującym błyski światła i drgania sieci krystalicznej, niewyjaśnione oddziaływania, najprawdopodobniej pochodzące od ciemnej materii [4]. Korzystnie wyglądał przy tym fakt, że mając bardzo niewielkie tło w detektorze, nie musieli się odwoływać do obserwacji zmienności rocznej; problemem było wszakże to, że ewentualna cząstka ciemnej materii zgodna z wynikami doświadczenia musiałyby mieć własności jeszcze inne niż te wyjaśniające dwa poprzednie eksperymenty. Trzy niewyjaśnione oddziaływania zostały też zaobserwowane w 2013 roku w eksperymencie CDMS-II, wykorzystującym wielki kryształ krzemu [5]; oczywiście, wyniki były w zasadzie niezgodne z dowolnym innym z omówionych dotąd eksperymentów. Całą sprawę zaciemniało zaś to, że kilka innych zespołów doświadczalnych (w tym XENON100 i LUX) poszukujących oddziaływań cząstek ciemnej materii nie zaobserwowało [6, 7] praktycznie nic, co wykluczało własności cząstek ciemnej materii zgodne z DAMA/LIBRA, CoGeNT, CRESST-II lub CDMS-II.

Skoro oparte na prostym pomysle, wykonywane na Ziemi eksperymenty doprowadziły do takiego pomieszania, należało zabrać się za obserwację jakichś innych procesów z udziałem cząstek ciemnej materii. Centrum naszej Galaktyki jest źródłem potężnych sił grawitacyjnych, które mogą efektywnie „wylapywać” cząstki ciemnej materii, co powinno prowadzić do zwiększenia ich koncentracji w tym rejonie i wznowienia procesów anihilacji, w których produkowane są cząstki antymaterii o energiach zbliżonych do energii spoczynkowej cząstek ciemnej materii. Jeśli udałoby się dostrzec takie cząstki na tle antymaterii wytwarzanej przez pulsary i wybuchy supernowych – a nie jest to łatwe, gdyż kierunek ruchu takich cząstek jest co rusz zmieniany przez niejednorodne pole magnetyczne naszej Galaktyki – można by mieć dodatkowe informacje pozwalające na rozstrzygnięcie wyników ziemskich eksperymentów. W 2008 roku zespół satelitarne detektora PAMELA poinformował o zaobserwowaniu w dochodzącym do Ziemi promieniowaniu kosmicznym nadwyżki wysokoenergetycznych pozytonów, która mogłaby być śladem po anihilacji ciemnej materii [8].

Na tylnej stronie okładki brakuje jednego pokolorowania, które ma na jednej przekątnej wierzchołki czerwone, a na drugiej niebieski i czarny.

Literatura:

- [1] E.W. Kolb, M.S. Turner, *The Early Universe*, Front. Phys. 69 (1990) 1
- [2] R. Bernabei et al., Eur. Phys. J. C 73 (2013) 2648
- [3] C.E. Aalseth et al., Phys. Rev. D 88 (2013) 012002
- [4] G. Angloher et al., Eur. Phys. J. C 72 (2012) 1971
- [5] R. Agnese et al., Phys. Rev. Lett. 111 (2013) 251301
- [6] E. Aprile et al., Phys. Rev. Lett. 109 (2012) 181301
- [7] D.S. Akerib et al., Phys. Rev. Lett. 112 (2014) 091303
- [8] O. Adriani et al., Nature 458 (2009) 607
- [9] M. Cirelli, A. Strumia, PoS IDM2008 (2008) 089
- [10] C.E. Aalseth et al., preprint arXiv:1401.6234
- [11] R. Agnese et al., Appl. Phys. Lett. 103 (2013) 16405
- [12] G. Angloher et al., Eur. Phys. J. C 74 (2014) 3184

(Po wysłaniu wyników do publikacji w prestiżowym czasopiśmie „Nature”, badaczom zespołu PAMELA nie wolno było ich przed publikacją udostępnić kolegom, ale nie mogli wytrzymać: zdecydowali się w końcu pokazać je na konferencji naukowej, ale nie przewidzieli, że jeden ze słuchaczy ich wykładu, Alessandro Strumia przyjdzie z aparatem fotograficznym; następnego dnia ukazała się bazująca na danych PAMELA praca [9] Cirellego i Strumii, który został okrzyknięty „fizycznym paparazzo”). Nie zdziwimy zapewne Czytelników, stwierdzając, że własności cząstek ciemnej materii niezbędne do wyjaśnienia obserwacji PAMELA były całkiem inne niż te wywiedzione z omówionych wcześniej doświadczeń.

Dopiero w 2014 roku sytuacja zaczęła się nieco (?) wyjaśniać. Ponowna analiza danych z eksperymentu CoGeNT (np. [10]), wykonana niezależnie przez trzy zespoły naukowców, wskazała na zaniżenie błędów systematycznych, co doprowadziło do fałszywie pozytywnych wniosków. Analiza ulepszonych danych eksperymentu SuperCDMS, uwzględniająca także dane CDMS-II, wykluczyła możliwość, że obserwacje tego ostatniego detektora były czymś więcej niż fluktuacją statystyczną [11]. Zespół eksperymentu CRESST-II zebrał zaś dodatkowe dane w ulepszonej i lepiej oczyszczonej, ale mniejszej wersji detektora [12], wykluczając swoje wcześniejsze konkluzje. Pozostałe konflikty interpretacyjne nie zostały, jak dotąd, wyjaśnione pomimo konstruowania i projektowania kolejnych generacji detektorów. Starożytna chińska klątwa „Obyś żył w ciekawych czasach!” niewątpliwie odnosi się dziś szczególnie do fizyków zajmujących się poszukiwaniem ciemnej materii.



Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

M 1501. Na szachownicy 9×9 umieszczono 65 pionków, każdy na innym polu. Co minutę każdy pionek wykonuje ruch na pole sąsiadujące bokiem z polem, na którym się znajduje, w taki sposób, że każde kolejne dwa ruchy pionka mają prostopadłe kierunki. Wykazać, że po pewnym czasie dwa pionki znajdą się na jednym polu.

Rozwiązanie na str. 2

M 1502. Czy istnieje taka liczba a , że jej suma cyfr w systemie dziesiętnym jest równa 2016, a suma cyfr liczby a^2 jest równa 2016²?

Rozwiązanie na str. 4

M 1503. Punkty A, B, C, D leżą kolejno na okręgu ω w taki sposób, że cięciwy AC i BD przecinają się pod kątem prostym. Obliczyć promień r okręgu ω , jeśli cięciwy AB i CD mają odpowiednio długości 6 i 8.

Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Michał NAWROCKI

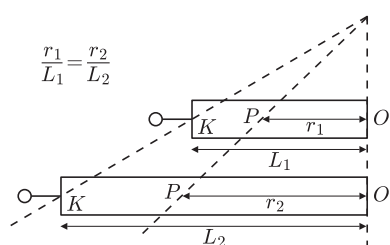
F 909. Okładki naładowanego kondensatora o pojemności C_0 połączono cewką o indukcyjności L . Jak należy zmniejszać pojemność kondensatora w zależności od czasu, aby prąd w obwodzie rósł wprost proporcjonalnie do czasu?

Rozwiązanie na str. 10

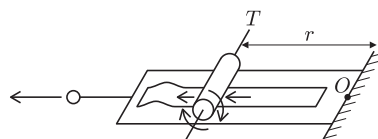
F 910. Samochód jedzie obok muru, oddalając się od niego pod kątem α . W momencie, gdy odległość pomiędzy murem i samochodem wynosiła ℓ , kierowca zatrąbił. Jaką odległość przejedzie samochód do momentu gdy kierowca usłyszy echo? Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi c .

Rozwiązanie na str. 11

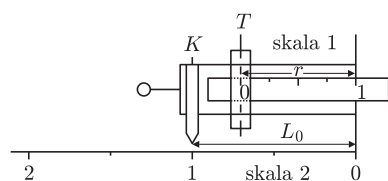
Filmik demonstrujący opisane w tekście doświadczenie można odnaleźć na stronie deltami.edu.pl



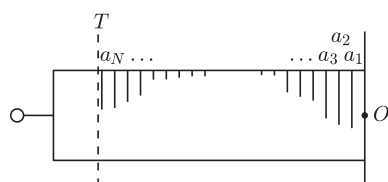
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Jak znaleźć e na gitarze? Nawet początkujący gitarzysta wie, że przy standardowym nastrojeniu właśnie taki dźwięk wydają dwie skrajne struny. My jednak będziemy szukać innego e , a mianowicie pewnej znanej i przydatnej stałej matematycznej. Powiedzmy, że z jakiegoś powodu chcemy poddać próbie wytrzymałość strun. W tym celu kręcimy kołkiem do momentu, w którym długość nawiniętej na niego części struny będzie taka sama, jak długość części nienawiniętej. Pytanie brzmi: ilukrotnie w takim procesie musiałaby rozciągnąć się struna? Aby udzielić na nie odpowiedzi, rozważymy analogiczną sytuację, w której zamiast strun przyglądamy się gumie.

Uzbrójmy się zatem w długi pas rozciągliwej gumy, której jeden koniec unieruchamiamy w początkowym punkcie zaczepienia O . Drugi koniec wyposażamy w uchwyt, by dało się ją swobodnie rozciągać. Potrzebna też będzie powierzchnia (np. stół), na której kładziemy gumę tak, aby można było wygodnie zmierzyć odległości. Zwróćmy uwagę, że rozciąganie gumy nie zmienia stosunku odległości między umieszczonymi na niej punktami. Ścisłej, dla pewnego punktu P , zaznaczonego na gumie, jeśli $d(t)$ oznacza jego odległość od punktu zaczepienia O w chwili t , a $L(t)$ długość gumy, to zachodzi proporcja

$$(1) \quad \frac{d(t_1)}{L(t_1)} = \frac{d(t_2)}{L(t_2)}, \quad \text{dla dowolnych } t_1, t_2 > 0.$$

Można więc wprowadzić wielkość $q = \frac{d}{L}$, opisującą *umiejscowienie* punktu na gumie, niezależną od rozciągnięcia gumy. Różniczkując równanie $d = qL$ względem t , można otrzymać wyrażenie na prędkość \dot{d} punktu P

$$(2) \quad \dot{d}(t) = q\dot{L}(t) = \frac{d(t)}{L(t)}\dot{L}(t) = d(t)(\ln L(t))'$$

W odległości r od O umieścimy teraz nad gumą stykający się z nią, swobodnie obracający się walec, którego oś przytwierdzona jest do stołu. Rozciągająca się pod nim guma będzie powodowała jego obrót. Za pomocą wstęgi materiału umieszczonej między walcem a gumą możemy zmierzyć długość drogi, jaką przebył punkt dowolnie ustalony na obwodzie walca (rys. 2) i wielkość tę oznaczmy przez Δx . Przyjmijmy, że rozciąganie przebiega w przedziale czasowym (t_0, t_1) . Okazuje się, że wygodnie będzie obliczyć szukaną wartość, zaczynając od wyznaczenia prędkości $v(t)$ przesuwania się gumy pod walcem w dowolnej chwili t . Z (2) można wywnioskować, że

$$v(t) = r(\ln L(t))'$$

Aby wyznaczyć przesunięcie Δx , pozostaje scałkować funkcję $v(t)$ względem czasu w przedziale (t_0, t_1) , otrzymując $\Delta x = r \ln(L_1/L_0)$, gdzie $L_0 = L(t_0)$ i $L_1 = L(t_1)$. Zapiszmy uzyskany wynik w postaci

$$(3) \quad \frac{\Delta x}{r} = \ln \frac{L_1}{L_0}.$$

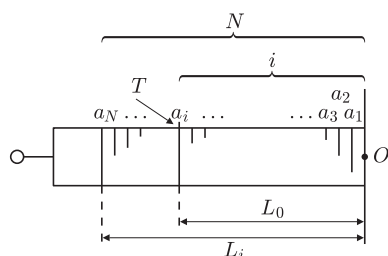
Pasek materiału możemy teraz wyposażyć w skalę, na której za jednostkę przyjmujemy r . W ten sposób odczytana tam niemianowana wartość x będzie wynosiła $\frac{\Delta x}{r}$. Umieścimy też w punkcie końcowym K wskaźnik, którego przesunięcie będziemy mierzyć na drugiej skali, nieruchomej względem O , o jednostce L_0 . Jej wskazanie D będzie więc wynosić $\frac{L_1}{L_0}$ (rys. 3). W ten sposób zależność (3) można uprościć do postaci

$$x = \ln D \quad \text{czy też} \quad D = e^x.$$

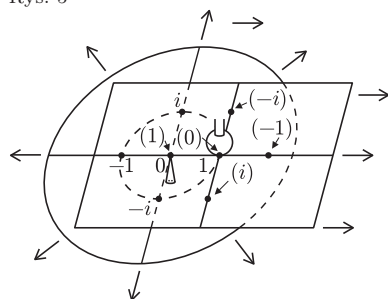
Powyższy związek między wskazaniem na skalach pozwala nam więc na doświadczalne wyznaczenie liczby e (poprzez rozciągnięcie do chwili, gdy wartość na skali pierwszej wyniesie 1 i odczytanie wyniku na skali drugiej) lub, na przykład, $\ln 2$ (poprzez dwukrotne rozciągnięcie gumy i odczytanie wyniku na skali pierwszej).

Zależność (3) można również wyznaczyć za pomocą mniej formalnego rozumowania, które nie wymaga całkowania funkcji. Połóżmy walec na końcu gumy, a między nim a początkiem gumy umieścimy w równych odstępach N punktów pomiarowych i oznaczmy je, zaczynając od tego najbliższego O , przez a_1, a_2, \dots, a_N (rys. 4). Niech τ_i będzie momentem przejścia punktu a_i pod

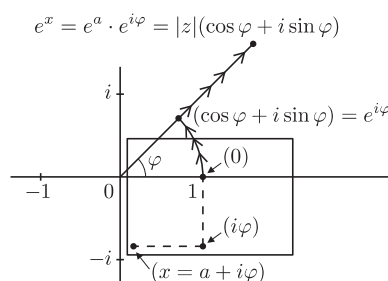
*uczeń V LO im. Księcia Józefa Poniatowskiego w Warszawie



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Brzydka prawda

Wielościan wypukły, którego ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi, może mieć ściany trójkątne, czworokątne lub pięciokątne. Ostatnie dwa przypadki realizują się tylko w postaci sześcianu i dwunastościanu. Pozostałe trzy wielościany foremne reprezentują pierwszy przypadek (czworościan, ośmiościan i dwudziestościan), ale nie są one jedynymi wielościanami wypukłymi, których ściany są trójkątami równobocznymi – np. „górną” i „dolną” piątka ścian dwudziestościanu składa się na dziesięćścian przypominający dysk.

Oznaczmy przez w liczbę wszystkich wierzchołków wielościanu, w_i – liczbę tych wierzchołków, w których zbiega się i ścian (oczywiście $i = 3, 4$ lub 5), przez k liczbę krawędzi i przez s liczbę ścian.

Aby znaleźć wszystkie takie wielościany, można rozumować tak:

$$3s = 2k = 3w_3 + 4w_4 + 5w_5,$$

bo każda ściana ma trzy krawędzie, a każda krawędź należy do dwóch ścian, a także łączy dwa wierzchołki.

walcem. Obrót walca Δx będziemy wyznaczać, sumując składowe obroty dx_i , z których każdy mierzony jest od chwili τ_{i+1} do chwili τ_i . Przez L_i oznaczymy długość gumy w chwili τ_i . Zauważmy, że dla wystarczająco dużej liczby N wartość dx_i można przybliżyć przez $\frac{L_i}{N}$. Oczywiście jest, że w chwili τ_i między walcem i początkiem gumy znajduje się i punktów pomiarowych, co z uwagi na równomierne rozmieszczenie punktów pomiarowych na gumie (rys. 5) daje proporcję: $i/N \approx L_0/L_i$. Jeśli końcowa długość gumy wyniosła L_1 , to z powyższej proporcji wynika, że rozciąganie zakończyło się w chwili $i = \lfloor N \frac{L_0}{L_1} \rfloor$. Wobec tego możemy obliczyć

$$\Delta x = \sum_{i=\lfloor N \frac{L_0}{L_1} \rfloor}^N dx_i = \sum_{i=\lfloor N \frac{L_0}{L_1} \rfloor}^N \frac{L_i}{N} \approx \sum_{i=\lfloor N \frac{L_0}{L_1} \rfloor}^N \frac{L_0}{i} = L_0 \sum_{i=\lfloor N \frac{L_0}{L_1} \rfloor}^N \frac{1}{i}.$$

W tym miejscu możemy zastosować oszacowanie $\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \approx \ln N$, skąd wreszcie, pomijając znak części całkowitej:

$$\Delta x = L_0 \left(\ln N - \ln N \frac{L_0}{L_1} \right),$$

co jest równoważne z (3).

Powstaje naturalne pytanie, czy nasze urządzenie można ulepszyć w taki sposób, by demonstrowało działanie funkcji wykładniczej dla argumentów zespolonych. Teoretycznie jest to możliwe. Pas gumy zastępujemy kwadratową, gumową płachtą, unieruchomioną w jednym punkcie, względem którego może się ona obracać. Jej rozciąganie będzie się odbywać równomiernie w obu kierunkach, równoległych do krawędzi płachty. Także pas materiału używany do pomiaru należy zamienić na materiałową płachtę. Obie skale uzupełniamy o oś urojoną, a w miejscu walca umieszczamy kulę dociskającą materiał do gumy. Podczas ruchów gumy materiał ma się przesuwać, ale nie obracać. Załóżmy, że w wyniku pewnego obrotu i rozciągnięcia gumy znajdujący się na niej wskaźnik został przemieszczony do punktu z , a wynik odczytany na skali materiałowej wyniósł x . Wykorzystując wcześniejsze rozważania oraz fakt, że obrót gumy o kąt φ przekłada się na zmianę odczytu na skali materiałowej o $i\varphi$, można stwierdzić, że wówczas $z = e^x$. Nasza konstrukcja w naturalny sposób rozszerza więc definicję funkcji wykładniczej na zespolone argumenty. Niestety, jej wykonanie w warunkach domowych nie wydaje się możliwe i należy ją rozpatrywać raczej w kategoriach doświadczenia myślowego niż propozycji do samodzielnego wykonania.

Mam nadzieję, że niniejszym tekstem choć na chwilę wyprowadziłem e z krainy matematycznych abstraktów i przekonałem Czytelnika, że nie trzeba wielkiego wysiłku, aby samemu je „upolować” w otaczającej nas rzeczywistości.

Ponieważ na dodatek $w = w_3 + w_4 + w_5$, więc wstawiając to do wzoru Eulera: $w - k + s = 2$, dla wygody pomnożonego przez 6, otrzymujemy

$$6(w_3 + w_4 + w_5) - 3(3w_3 + 4w_4 + 5w_5) + 2(3w_3 + 4w_4 + 5w_5) = 12,$$

czyli

$$3w_3 + 2w_4 + w_5 = 12.$$

To równanie ma 19 rozwiązań w liczbach naturalnych: **4,0,0**; 3,1,1; 3,0,3; **2,3,0**; 2,2,2; 2,1,4; 2,0,6; 1,4,1; 1,3,3; 1,2,5; 1,1,7; 1,0,9; **0,6,0**; **0,5,2**; **0,4,4**; **0,3,6**; **0,2,8**; 0,1,10; **0,0,12**.

Niestety, tylko osiem z nich (zaznaczone są kolorem) odpowiada wielościanowi wypukłemu (te grubszą czcionką to foremne).

I tu jest miejsce na zwrot *brzydka prawda*: fakt ten nosi dumną nazwę **twierdzenie Freudenthala–van der Waerdena**, ale mimo naturalnej materii, jakiej dotyczy, nie ma dotąd naturalnego i eleganckiego dowodu.

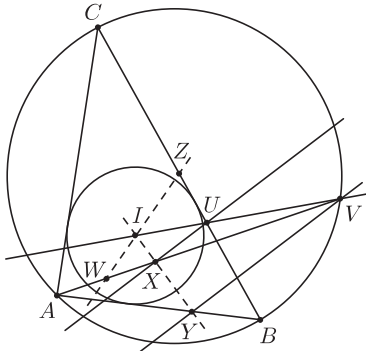
Więc może któryś z Czytelników?

M.K.

Okrąg dopisany

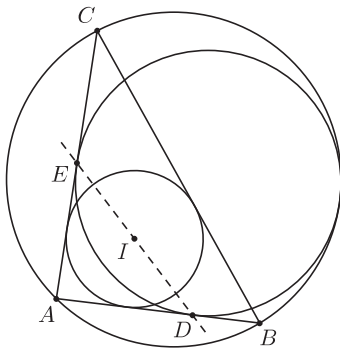
Mieszko KOMISARCZYK*

Problem, który opiszę, został zaproponowany przez Amerykanów na LV Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, a jego treść brzmi następująco:

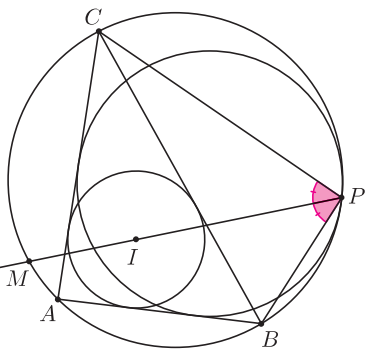


Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC . Niech Ω będzie okręgiem nań opisanym, a I środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Prosta, przechodząca przez I , prostopadła do CI , przecina odcinek BC i łuk BC (niezawierający punktu A) okręgu Ω w punktach U oraz V . Niech prosta równoległa do AI , poprowadzona przez U , przecina odcinek AV w punkcie X , a prosta równoległa do AI , poprowadzona przez V , tnie odcinek AB w Y . Oznaczmy kolejno przez W, Z środki odcinków AX, BC . Udowodnić, że jeżeli punkty I, X, Y są współliniowe, to również punkty W, I, Z są współliniowe.

Treść tego zadania wygląda bardzo skomplikowanie. Poczyniono wiele założeń, które na pierwszy rzut oka trudno ze sobą połączyć. Pokażę jednak, że to zadanie można rozwiązać w bardzo elegancki sposób, używając kilku lematów związanych z tzw. *mixtilinear incircle*. Jest to okrąg, który nie ma fachowej nazwy po polsku, dlatego pozwolę sobie zaproponować dość luźne tłumaczenie tego terminu na *okrąg dopisany*. Jego definicja jest następująca: okrąg dopisany do trójkąta ABC dla wierzchołka A jest to okrąg styczny wewnątrz do okręgu opisanego na ABC oraz styczny do prostych AB i AC . Zaprezentuję 3 lematy, które przybliżą nam jego własności.



Lemat 1. Dany jest trójkąt ABC , okrąg nań opisany Ω oraz doń dopisany dla wierzchołka A . Przez I oznaczmy środek okręgu wpisanego w ABC i niech D, E będą punktami styczności okręgu dopisanego z bokami AB, AC . Wówczas I jest środkiem odcinka DE .



Dowód. Wykażę, że punkty D, I, E są współliniowe. Wtedy to, że I jest środkiem odcinka DE , będzie wynikało z tego, że $AE = AD$. Niech P będzie punktem styczności okręgu dopisanego z Ω . Korzystając z tezy zadania M1468 z *Delty* 9/15, otrzymujemy, że PD i PE połowią łuki AB, AC , niezawierające kolejno C, B . Oznaczmy więc środki tych łuków przez M_1, M_2 . Widzimy teraz, że CM_1 jest dwusieczną $\sphericalangle ACB$, a BM_2 jest dwusieczną $\sphericalangle ABC$. To implikuje współliniowość punktów M_1, I, C oraz M_2, I, B . Współliniowość D, I, E jest teraz konsekwencją twierdzenia Pascala zastosowanego do sześciokąta ABM_2PM_1C . □

Lemat 2. Przyjmijmy oznaczenia z poprzedniego lematu. Przez M oznaczmy drugi punkt przecięcia PI z Ω . Wtedy M jest środkiem łuku BC zawierającego A .

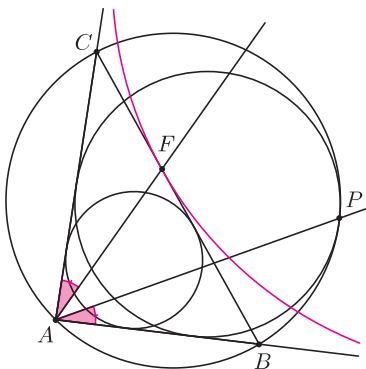
Dowód. Bez straty ogólności założmy, że $AB < AC$ (gdy $AB = AC$, teza lematu jest trywialna, bo $A = M$). Musimy wykazać, że $\sphericalangle BPM = \sphericalangle CPM$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sphericalangle BPM &= \sphericalangle BPM_1 + \sphericalangle M_1PA + \sphericalangle APM, \\ \sphericalangle CPM &= \sphericalangle CPM_2 + \sphericalangle M_2PM. \end{aligned}$$

Z racji tego, że AP jest zawarty w symedianie DPE , a z poprzedniego lematu wiemy, że I jest środkiem odcinka DE , mamy równość $\sphericalangle M_1PA = \sphericalangle M_2PM$ (o symedianach można przeczytać więcej w *Delcie* 2/2015 i 5/2015). Ponadto

$$\begin{aligned} \sphericalangle BPM_1 + \sphericalangle APM &= \sphericalangle M_1PA + \sphericalangle APM = \sphericalangle M_2PM + \sphericalangle APM = \\ &= \sphericalangle M_2PA = \sphericalangle CPM_2, \end{aligned}$$

co w połączeniu z poprzednią równością daje tezę. □



Lemat 3. Ponownie przyjmijmy oznaczenia jak w poprzednich lematkach. Niech F będzie punktem styczności okręgu dopisanego do ABC naprzeciw wierzchołka A . Wynika stąd, że $\sphericalangle CAF = \sphericalangle BAP$.

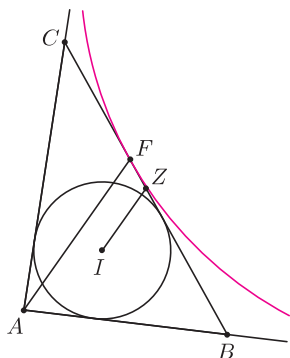
*uczeń XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

Dowód. Rozważmy inwersję o środku w punkcie A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC}$ złożoną z symetrią względem dwusiecznej $\sphericalangle BAC$. Obrazem B w tym przekształceniu jest C , czyli obraz C to B . Zatem Ω przechodzi na prostą BC , a BC na Ω . Widzimy więc, że okrąg dopisany przejdzie na wspomniany okrąg dopisany, skąd wynika, że obrazem P w tym przekształceniu jest F , co implikuje, że AP i AF są symetryczne względem dwusiecznej $\sphericalangle BAC$. To już jest równoważne z tezą lematu. \square

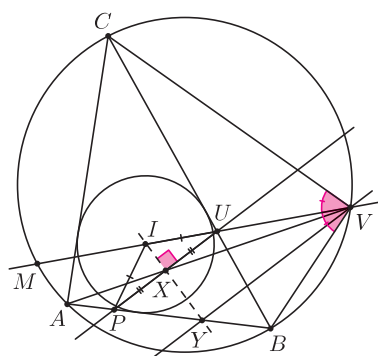
Do rozwiązania zadania przyda się nam jeszcze pewien olimpijski fakt, którego znajomość może okazać się bardzo użyteczna na różnych konkursach matematycznych.

Lemat 4. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , a Z środkiem boku BC . Punkt F jest punktem styczności okręgu dopisanego do ABC do boku BC . Wówczas odcinki AF oraz IZ są równoległe.

Dowód. Niech G będzie punktem styczności okręgu wpisanego do boku BC , a H punktem przecięcia prostej AF z okręgiem wpisanym (tym, który jest bliżej A). Rozważmy jednokładność o środku w A , która przekształca okrąg dopisany do boku BC trójkąta ABC na okrąg wpisany w ten trójkąt. Prosta BC , styczna w punkcie F do okręgu dopisanego, przechodzi pod działaniem tej jednokładności na prostą styczną do okręgu wpisanego w punkcie H , równoległą do BC . W tej sytuacji HG jest średnicą okręgu wpisanego. Pozostaje zauważyć, że $CF = BG$ (Czytelnikom, którzy nie spotkali się z tą równością, pozostawiamy ją jako sympatyczne zadanie), w związku z czym Z jest środkiem FG i dlatego z twierdzenia Talesa wynika $AF \parallel IZ$. \square



Przystąpmy teraz z powyższym arsenalem do rozwiązania naszego głównego problemu. Przez $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ będą oznaczał kolejno kąty przy wierzchołkach A, B, C . Niech prosta VI przecina Ω w M (różnym od V). Zauważmy, że $\sphericalangle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle C) = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle B$. Z kolei $\sphericalangle MIC = 90^\circ$ pociąga za sobą $\sphericalangle MIA = \frac{1}{2}\sphericalangle B$, a ponieważ $VY \parallel AI$, więc $\frac{1}{2}\sphericalangle B = \sphericalangle YVI = \sphericalangle YBI$, co oznacza, że czworokąt $YBVI$ możemy wpisać w okrąg. Niech $P = XU \cap AB$. W podobny sposób pokazujemy, że czworokąt $BUIP$ można wpisać w okrąg. Łącząc te spostrzeżenia, otrzymujemy następujące zależności: $\sphericalangle IUP = \sphericalangle IBP = \sphericalangle IBU = \sphericalangle IPU$, zatem $PI = UI$. Stosując teraz twierdzenie Talesa do kątów $\sphericalangle IYA$ i $\sphericalangle YIV$, dostajemy:



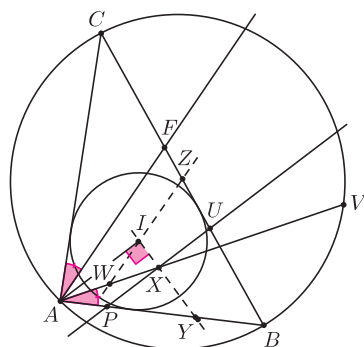
$$\frac{XP}{IA} = \frac{XY}{IY} = \frac{UV}{IV} = \frac{UX}{IA},$$

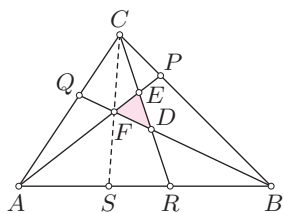
skąd wynika, że $XP = UX$, czyli X jest środkiem PU . Mamy więc $IX \perp PU \parallel AI$. Wynika stąd, że

$$90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle A = \sphericalangle AYI = \sphericalangle BVI,$$

skąd otrzymujemy, że M jest środkiem łuku BAC . Na mocy lematu 2. wiemy więc, że V jest punktem styczności okręgu dopisanego do ABC dla wierzchołka A . Jeżeli teraz przez F oznaczymy punkt styczności okręgu dopisanego do ABC naprzeciw A z BC , to z lematu 3. dostaniemy, że $\sphericalangle BAV = \sphericalangle CAF$. Wynika stąd, że AI zawiera się w dwusiecznej kąta FAV , co w połączeniu z tym, że trójkąt AIX jest prostokątny, pozwala prosto wywnioskować, że $WI \parallel AF$. Z drugiej strony, na mocy lematu 4. dostajemy $IZ \parallel AF$, tak więc $WI \parallel IZ$, co oczywiście pociąga za sobą tezę zadania.

Czytelników zatroszonych stopniem skomplikowania powyższego rozumowania pocieszę tym, że problem został uznany przez jury za najtrudniejszy z geometrycznych. Widać, że znajomość faktów dotyczących okręgu dopisanego była kluczowym elementem naszego rozwiązania. Czytelnik Uważny może się zastanawiać, czy współliniowość punktów X, I, Y daje jakieś konkretne zależności, które musi spełniać ABC . Okazuje się, że istotnie jego boki spełniają zależność $3AB = BC + AC$. Wykazanie tego faktu pozostawiam Czytelnikom Ambitnym jako olimpijskie ćwiczenie.





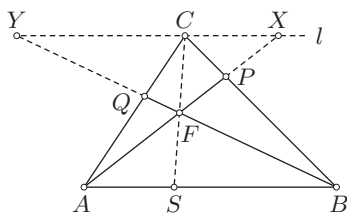
Rys. 1

Pod nazwą *twierdzenie Routha* rozumie się na ogół dwie równości: opisującą pole trójkąta $[DEF]$ (której dowód znajduje się obok) i bardziej znaną, opisującą pole trójkąta $[PQR]$, a mianowicie

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \frac{pqr + 1}{(p+1)(q+1)(r+1)}.$$

Inaczej o całym twierdzeniu pisaliśmy w *Delcie* 3/2012 i 6/2011.

Redakcja



Rys. 2

Krótki dowód twierdzenia Routha

Niech ABC będzie dowolnym trójkątem, a P, Q, R punktami leżącymi odpowiednio na bokach BC, CA, AB (rys. 1). Przyjmijmy, że $D = BQ \cap CR$, $E = CR \cap AP$, $F = AP \cap BQ$ oraz niech

$$\frac{BP}{PC} = p, \quad \frac{CQ}{QA} = q, \quad \frac{AR}{RB} = r.$$

Oznaczając przez $[F]$ pole figury F , mamy następujący wzór

$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{(pqr - 1)^2}{(1 + p + pq)(1 + q + qr)(1 + r + rp)},$$

znany pod nazwą *twierdzenia Routha*.

Dowody tego wzoru, które można znaleźć w dostępnej literaturze, używają na ogół rachunku wektorowego lub geometrii analitycznej. Podamy tutaj krótki geometryczny dowód tego twierdzenia.

Poprowadźmy przez punkt C prostą l równoległą do prostej AB . Niech ponadto $X = AP \cap l$, $Y = BQ \cap l$, a także $S = CF \cap AB$ (rys. 2) Korzystając z twierdzenia Talesa, uzyskujemy

$$(*) \quad \frac{1}{p} + q = \frac{PC}{BP} + \frac{CQ}{QA} = \frac{CX}{AB} + \frac{CY}{AB} = \frac{XY}{AB} = \frac{XF}{FA} = \frac{CF}{FS}.$$

Wobec tego

$$\frac{[ABC]}{[ABF]} = \frac{CS}{FS} = 1 + \frac{CF}{FS} = 1 + \frac{1}{p} + q = \frac{1 + p + pq}{p}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\frac{[ABC]}{[BCD]} = \frac{1 + q + qr}{q} \quad \text{oraz} \quad \frac{[ABC]}{[CAE]} = \frac{1 + r + rp}{r}.$$

Stąd ostatecznie obliczamy:

$$\begin{aligned} \frac{[DEF]}{[ABC]} &= 1 - \frac{[ABF]}{[ABC]} - \frac{[BCD]}{[ABC]} - \frac{[CAE]}{[ABC]} = \\ &= 1 - \frac{p}{1 + p + pq} - \frac{q}{1 + q + qr} - \frac{r}{1 + r + rp} = \\ &= \frac{(pqr - 1)^2}{(1 + p + pq)(1 + q + qr)(1 + r + rp)}, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Uwaga. Udowodniona tożsamość $(*)$ nosi nazwę *twierdzenia van Aubela*.

Waldemar POMPE

Polecamy bardzo trudne zadanie

W znakomitych *100 zadaniach* Steinhausa jako zadanie szesnaste znajdujemy:

Mamy dowolny trójkąt. Możemy go oczywiście przeciąć linią prostą tak, żeby przepołować jego obwód. Możemy nawet z góry przypisać kierunek linii przecinającej. Gdy zrobimy to dwa razy, używając dwu różnych kierunków, linie proste przetną się w pewnym punkcie Q. Wtedy przez punkt Q wiodą dwie linie proste przepoławiające obwód.

Czy istnieje punkt, przez który wiodą trzy takie linie? Jeśli tak, to jak go znaleźć?

Odpowiedź jest zaskakująca: przez każdy punkt, przez który przechodzą dwie proste połowiące obwód, przechodzi też trzecia mająca tę własność.

A trudność w znalezieniu odpowiedzi leży w tym, że trzeba jakoś scharakteryzować możliwe położenia punktu Q , o którym jest mowa w zadaniu – okazuje się, że są to punkty trójkąta krzywoliniowego zawierającego w brzegu łuki trzech parabol stycznych do dwóch spośród prostych zawierających boki trójkąta.

Ciekawe jest to, że wynik jest mocniejszy: przez każdy punkt trójkąta przechodzi albo dokładnie jedna, albo dokładnie trzy proste połowiące obwód; to samo dotyczy czworokąta niebędącego równoległobokiem (a jak jest dla niego?).

Nie wątpię, że Czytelnik Ambitny podejmie to wyzwanie.

M.K.

Dolnośląski Festiwal Nauki jest imprezą popularnonaukową organizowaną co roku we wrześniu (Wrocław) i października (sesje wyjazdowe w Bystrzycy Kłodzkiej, Dzierżonowie, Głogowie, Jeleniej Górze, Legnicy, Lubinie, Wałbrzychu, Ząbkowicach Śląskich i Zgorzelcu).

Festiwal jest tworzony przez państwowe uczelnie wyższe Wrocławia, dwa instytuty Polskiej Akademii Nauk oraz stale rosnące grono Współorganizatorów. Festiwal Nauki to wielka **pigulka edukacyjna**, dzięki której można wysłuchać ciekawych wykładów, wziąć udział w dyskusjach z uczonymi, zwiedzać na co dzień niedostępne laboratoria i warsztaty badawcze przyrodników, lekarzy, inżynierów, humanistów oraz artystów.

Organizatorzy Festiwalu starają się, aby nauka była przyjazna i zrozumiała. W atrakcyjny i przystępny sposób przedstawiają problemy, które nauka rozwiązuje, i korzyści, jakie z niej płyną. Nie unikają przy tym spraw trudnych, a podejmowane tematy są często próbą odpowiedzi na ważne dylematy społeczne. Wydarzenie adresowane jest do wszystkich interesujących się nauką, kulturą, sztuką, ciekawymi zjawiskami otaczającego nas świata, bez względu na wiek czy poziom wykształcenia.

Wstęp na wszystkie wydarzenia organizowane w ramach Dolnośląskiego Festiwalu Nauki jest **BEZPŁATNY!**

Zapraszamy!

Kto za, kto przeciw?

Polaryzacja opinii, kontrowersyjne i przeciwstawne opinie istnieją w humanistyce, naukach społecznych, polityce i politologii; a my pełni dobrej woli nazywamy te dziedziny nauką, choć metody naukowej nie stosują i stosować nie mogą. Inaczej w naukach ścisłych – fizyce, chemii, biologii molekularnej: ogłaszają swoje osiągnięcia w oparciu o sprawdzone dane, poddane obróbce statystycznej. Tu hipotezy są hipotezami, teorie teoriami. Niemniej jednak za coraz częstsze zjawiska w naukach ścisłych trzeba uznać rosnące liczby przypadków sprzeciwu wobec weryfikowanych teorii naukowych – zwykle odnoszących się w końcowym wyniku do życia społecznego i politycznego.

Jednak okazuje się, że można, ignorując fakty, oświadczać, że „to nie tak, bo NIE”. To chytry sposób przeczenia faktom. Doświadczalnicy wykonują wiele pomiarów (tym więcej, im ważniejsze stawiają pytanie), aby wykazać, że badane zjawiska są realne i prawdziwe. Zmieniają warunki, robią dodatkowe eksperymenty kontrolne, sprawdzają podejścia przeciwstawne. Ale **WSZYSTKICH** możliwych próbkowań odkrycia nie mogą wykonać, więc oceniają **PRAWDOPODOBIENSTWO** przyjętej hipotezy. Mogą czekać, aż ktoś ją obali, nie na drodze zwykłej negacji, ale dostarczając przeczących hipotezie danych (wystarczy jedna), uzyskanych metodą naukową.

Kiedy wymyślono pierwsze doświadczenia z zakresu inżynierii genetycznej (1973), natychmiast po ich ogłoszeniu zjawili się tacy, którzy nie to, że głosili obawy (takie zastrzeżenia zgłaszali sami twórcy), tylko z góry wiedzieli, że zdarzy się coś strasznego, coś złego nie do skontrolowania. Na ulicach pojawiają się potwory, rozprzestrzeniają się nowe choroby. Zmienione genetycznie bakterie wybiją do nogi całą ludzkość ...

Nie było danych. Było szerzenie niewiedzy i strachu (często wzajemnie sobie towarzyszących).

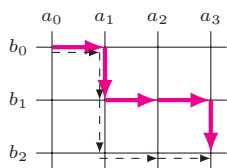
Co zrobili naukowcy? Sami opublikowali apel do własnego środowiska, prosząc o kontrolowanie bezpieczeństwa biologicznego związanego z każdą nową „konstrukcją” genową. Mimo wysokich kosztów zbudowali laboratoria zabezpieczone przed różnego stopnia potencjalnym zagrożeniem przez nowe geny, nawet chroniące przed genami w wyższym stopniu niż dotąd służące do badań wszelakich patogenów wywołujących nieuleczalne i śmiertelne choroby. Nie zakazując inżynierii genowej, wybrano „rozwiązanie B”: skoncentrowanie doświadczeń – o znaczeniu utylitarnym w dużej skali – na prostych organizmach jednokomórkowych i rozwijanie genetyki organizmów wyższych na poziomie bezpiecznych badań podstawowych. Minęło już ponad 40 lat takich eksperymentów, stopniowo komplikowanych w tysiącach pracowni przez setki tysięcy pracowników i nigdy nigdzie nie zdarzyło się nic z przepowiedni przeciwników wczesnej ery inżynierii genetycznej. I ci zamilkli. Po kilku latach pojawił się długo oczekiwany pierwszy lek tej technologii i pierwsze modyfikowane szczepy przemysłowych drożdży. Nie było Armagedonu, były korzyści.

A ja w tych i kolejnych zdarzeniach tego typu widzę powtarzające się dowody na cywilizacyjne opóźnienia mojego kraju. Protesty przeciw inżynierii odbyły się w Polsce kilka lat później i były dość mizerne, choć nie rozumiem dlaczego ignorowano rezultaty debaty prowadzonej w krajach o wyższym poziomie naukowym. Do podobnego sporu wróciliśmy pod hasłem „GMO” na początku lat osiemdziesiątych. Znowu nasze argumenty przeciw wynikom naukowym były tej samej treści i brzmiały tak samo jak w USA czy Francji, tylko że w Polsce ogłoszono je o kilka lat później. Tam już rozwiązali pozorne kontrowersje, my nadal bez podstaw rzeczowych – dyskutujemy.

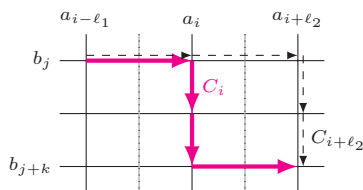
A obecnie do Polski nadciągają te same groźne w skutkach debaty, w swoim czasie toczone w bardziej zaawansowanych naukowo krajach, co do oceny szczepień ochronnych. O tym ważnym, ważniejszym od kwestionowania inżynierii genetycznej problemie, opowiem następnym razem.

Magdalena FIKUS

Informatyczny kącik olimpijski (96): Obludzone drogi



Rys. 1. Przykładowa sieć dla $n = 3$, $m = 2$ o czasach przejazdu $a = [7, 2, 5, 6]$ i $b = [5, 3, 7]$. Optymalna trasa o czasie $5 + 2 + 3 + 3 + 6 = 19$ została przedstawiona kolorowymi strzałkami. Zauważmy, że na skrzyżowaniu $(1, 1)$ wybrany został odcinek alei o czasie przejazdu 3, zamiast ulicy o czasie przejazdu 2. Algorytm zachłanny (strzałki przerywane) znalazłby trasę o czasie $5 + 2 + 2 + 7 + 7 = 23$.



Rys. 2. Ilustracja do dowodu, że przy pewnych założeniach możemy zablokować ulicę i .

W tym miesiącu omówimy zadanie *Icy Roads* z obozu w Petrozawodsku z roku 2013. Sieć drogowa w mieście składa się z $n + 1$ pionowych ulic oraz $m + 1$ poziomych alei. Chcemy jak najszybciej dostać się ze skrzyżowania $(0, 0)$ do skrzyżowania (n, m) , pokonując $n + m$ odcinków dróg. Niestety, drogi są obludzone i jeździ się po nich dość wolno: przejechanie jednego odcinka i -tej ulicy zajmuje czas a_i , zaś przejechanie jednego odcinka j -tej alei zajmuje czas b_j . Należy wyznaczyć najszybszą trasę przejazdu. Na rysunku 1 przedstawiono przykładową sieć i wyjaśniono, dlaczego algorytm zachłanny, który na każdym kolejnym skrzyżowaniu wybiera tę ulicę/aleję, która ma mniejszy czas przejazdu, nie jest poprawny.

Pomimo prostego sformułowania, zadanie jest trudne i wymaga kilku pomysłowych obserwacji. Główna idea rozwiązania będzie opierać się na sukcesywnym blokowaniu tych ulic/alei, którymi nie opłaca się jeździć. Na początek pokażemy, że jeśli jakaś ulica i znajduje się pomiędzy dwiema ulicami o mniejszych czasach przejazdu, to można ją zablokować. Załóżmy, że w pewnym optymalnym rozwiązaniu przejeżdżamy odcinkami tej ulicy pomiędzy alejami j oraz $j + k$ (rys. 2). Niech $i - \ell_1$ oraz $i + \ell_2$ będą numerami tych niezablokowanych jeszcze ulic, pomiędzy którymi znajduje się ulica i (przy pierwszym czytaniu można przyjąć $\ell_1 = \ell_2 = 1$). Zgodnie z założeniem mamy $a_{i-\ell_1} \leq a_i \leq a_{i+\ell_2}$. Czas przejazdu wynosi $C_i = b_j \cdot \ell_1 + a_i \cdot k + b_{j+k} \cdot \ell_2$. Natomiast czasy przejazdu, gdybyśmy zamiast ulicy i wybrali ulicę $i - \ell_1$ lub $i + \ell_2$ wynoszą odpowiednio $C_{i-\ell_1} = a_{i-\ell_1} \cdot k + b_{j+k} \cdot (\ell_1 + \ell_2)$ oraz $C_{i+\ell_2} = b_j \cdot (\ell_1 + \ell_2) + a_{i+\ell_2} \cdot k$. Widać jednak, że co najmniej jedna z tych tras ma czas nie większy niż optymalny:

$$\min(C_{i-\ell_1}, C_{i+\ell_2}) \leq \min(b_j, b_{j+k}) \cdot (\ell_1 + \ell_2) + \max(a_{i-\ell_1}, a_{i+\ell_2}) \cdot k \leq C_i.$$

Powtarzając powyższe rozumowanie, możemy zablokować część ulic w mieście tak, że czasy przejazdu pozostałych będą tworzyć ciąg unimodalny (najpierw będą maleć, osiągając minimum na pewnej ulicy i_* , a potem rosnać). Zauważmy, że blokowanie ulic powoduje, że odległości między kolejnymi niezablokowanymi ulicami mogą się zwiększać (stąd konieczność uwzględnienia wartości ℓ_1 i ℓ_2 w powyższym dowodzie). Cały argument możemy niezależnie zastosować do alei (które zatem też będą tworzyć ciąg unimodalny, osiągając minimum na pewnej alei j_*).

Druga obserwacja jest następująca: optymalna trasa będzie przechodziła przez skrzyżowanie (i_*, j_*) najtańszej ulicy z najtańszą aleją. (Jeśli tak nie jest, to rozważamy punkt przecięcia trasy z ulicą i_* oraz punkt przecięcia trasy z aleją j_* . Przejście pomiędzy tymi punktami po odcinkach ulicy i_* oraz alei j_* nie pogorszy rozwiązania.) Zatem możemy nasz problem podzielić na dwa niezależne problemy szukania trasy ze skrzyżowania (i_*, j_*) do skrzyżowania $(0, 0)$ oraz trasy ze skrzyżowania (i_*, j_*) do skrzyżowania (n, m) . Bez straty ogólności możemy więc założyć, że ciągi a i b czasów przejazdu dla niezablokowanych ulic i alei są rosnące.

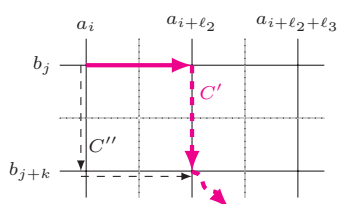
Pójdziemy jeszcze krok dalej i pokażemy silniejszy warunek na te ciągi, a mianowicie, że funkcje $i \mapsto a_i$ oraz $i \mapsto b_i$ dla niezablokowanych ulic/alei są wypukłe. Przez Δa_i oznaczmy średni przyrost czasu na odcinek od ulicy i do następnej niezablokowanej ulicy (analogicznie Δb_j dla alei). Zatem dla rysunku 2 mamy (przy dodatkowym założeniu, że aleje j i $j + k$ są sąsiednie):

$$\Delta a_{i-\ell_1} = \frac{a_i - a_{i-\ell_1}}{\ell_1}, \quad \Delta a_i = \frac{a_{i+\ell_2} - a_i}{\ell_2}, \quad \Delta b_j = \frac{b_{j+k} - b_j}{k}.$$

Ponownie rozpisując wzory na czasy przejazdu trasami C_i , $C_{i-\ell_1}$ i $C_{i+\ell_2}$, dostajemy, że

$$C_{i-\ell_1} \leq C_i \text{ wtw. } \Delta b_j \leq \Delta a_{i-\ell_1}, \quad C_{i+\ell_2} \leq C_i \text{ wtw. } \Delta b_j \geq \Delta a_i.$$

Jeśli $\Delta a_{i-\ell_1} \geq \Delta a_i$, to co najmniej jeden z powyższych warunków jest spełniony, więc $\min(C_{i-\ell_1}, C_{i+\ell_2}) \leq C_i$ i można zablokować i -tą ulicę. Powtarzając to rozumowanie, powodujemy w końcu, że ciągi Δa oraz Δb dla niezablokowanych ulic/alei są rosnące.



Rys. 3. Ilustracja działania algorytmu zachłanego.

Pora na ostatnią obserwację: na tak poblokowanej sieci drogowej możemy już stosować algorytm zachłanny, tzn. na każdym skrzyżowaniu wybierać tę ulicę/aleję, która ma mniejszy współczynnik średniego przyrostu czasu. A konkretnie: będąc na skrzyżowaniu i -tej ulicy z j -tą aleją wybieramy ulicę, jeśli $\Delta b_j \leq \Delta a_i$, a aleję, jeśli $\Delta b_j > \Delta a_i$. Dowód poprawności tego algorytmu przeprowadzimy przez indukcję po $i + j$. Dla $i + j = n + m$ teza jest oczywista (jesteśmy na ostatnim skrzyżowaniu i nie mamy co wybierać). Załóżmy zatem, że algorytm zachłanny działa poprawnie, jeśli startujemy z dowolnego skrzyżowania (i', j') dla którego $i' + j' > i + j$. Ponadto załóżmy (rys. 3), że jest spełnione $\Delta b_j \leq \Delta a_i$, ale w rozwiązaniu optymalnym wybieramy aleję, zatem jedziemy do skrzyżowania $(i + \ell_2, j)$. Z wypukłości mamy $\Delta a_i < \Delta a_{i+\ell_2}$, zatem tym bardziej jest spełnione

$\Delta b_j \leq \Delta a_{i+\ell_2}$, więc z założenia indukcyjnego wynika, że w drugim ruchu wybierzemy ulicę, przesuwając się do skrzyżowania $(i + \ell_2, j + k)$. Te dwa ruchy kosztowały nas czas $C' = b_j \cdot \ell_2 + a_i \cdot k$. Jednakże rozwiązanie, w którym dostajemy się do skrzyżowania $(i + \ell_2, j + k)$ najpierw jadąc ulicą, a potem aleją, ma czas $C'' = a_i \cdot k + b_{j+k} \cdot \ell_2$. Nietrudno się przekonać, że warunek $\Delta b_j \leq \Delta a_i$ jest równoważny temu, że $C'' \leq C'$. To pokazuje, że istnieje optymalne rozwiązanie, w którym pierwszym ruchem jest wybór ulicy, co kończy dowód.

Myślę, że Czytelnicy, którzy przebrnęli przez powyższy opis algorytmu nie będą mieli trudności, by zaimplementować go w optymalnej złożoności czasowej $O(n + m)$.

Tomasz IDZIASZEK

11 czerwca 2016 r. zmarł nagle Henryk Pawłowski,



jeden z najwybitniejszych nauczycieli matematyki w kraju. Wychował wielu uczniów, był autorem cenionych zbiorów zadań olimpijskich oraz podręczników szkolnych. Prowadził kółka matematyczne w Toruniu, Poznaniu oraz Bydgoszczy, na które przyjeżdżali uczniowie z odległych miejscowości. Wielu Jego uczniów zdobyło najwyższe nagrody w Olimpiadzie Matematycznej, również w Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej.

Był członkiem Komitetu Głównego OM od 43 OM do 54 OM, czyli od 1991 do 2003 r. Później, nie będąc już członkiem KG OM, współpracował z KG. Dostarczał też zadania na OM od wielu lat (ostatnio w tym roku szkolnym); wiele z nich uczniowie rozwiązywali w czasie zawodów. Liczni członkowie KG bardzo cenili Jego uwagi na temat zadań i przebiegu olimpiad.

Współtworzył Olimpiadę Matematyczną Gimnazjalistów, od początku jej istnienia kierował komitetem okręgowym w Toruniu. Zapewniał wysoki poziom sprawdzania prac uczestników tych zawodów.

Był jednym z organizatorów 10 Małych Olimpiad Matematycznych, w których uczestniczyli uczniowie szkół średnich z wielu miejscowości w Polsce. Dla młodych ludzi był to nie tylko doskonały trening przed zawodami Olimpiady Matematycznej, ale też znakomita okazja do nawiązania kontaktów z rówieśnikami dzielącymi tę samą matematyczną pasję. Wielu z nich zostało laureatami Olimpiady Matematycznej i Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Henryk Pawłowski organizował też lokalne zawody matematyczne w Toruniu i okolicach.

Jako nauczyciel i wychowawca zachęcał swych uczniów do myślenia zadawanymi pytaniami oraz odpowiednio dobieieranymi zadaniami. Widział sens w rozwiązywaniu zadań trudnych. Wiedział, że nauczyciel powinien stawiać przed uczniem problemy na granicy jego możliwości.

Chodziło Mu przede wszystkim o intelektualny rozwój uczniów, bo doskonale rozumiał, że dobre wyniki na egzaminach są rzeczą wtórną i naturalną konsekwencją głębszych przemyśleń.

Książki Henryka z różnymi zadaniami z olimpiad stały się już klasyką wśród osób poważnie myślących o uczestnictwie w takich zawodach – dziś już trudno wyobrazić sobie przygotowania do olimpiady matematycznej bez nich. Podręczniki dla liceów, które napisał, wyróżniają się spośród innych tym, że są w nich pełne dowody twierdzeń, zadania, których rozwiązanie dostarcza zdolnym uczniom satysfakcji. Autor omawia w nich wiele twierdzeń z elementarnej matematyki, które nie są przewidziane podstawą programową, jednak są interesujące, więc uczniowie zainteresowani matematyką mają nad czym pracować. Ci, którzy z nich korzystają, są na ogół znacznie lepiej przygotowani do studiowania niż uczniowie używający książek napisanych zgodnie z panującą modą na minimalizm.

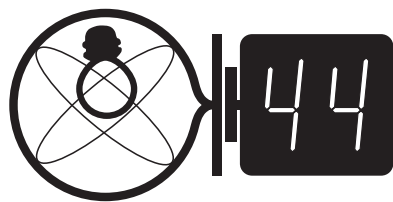
Wielokrotnie rozmawialiśmy o zadaniach. Jedną taką krótką i w miarę niedawną rozmowę chciałbym tu opowiedzieć. Henryk powiedział mi, że na jakiejś próbnej maturze pojawiło się następujące zadanie: *Dowieść, że jeśli ramiona BC i DA trapezu $ABCD$ leżą na prostych prostopadłych, to $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2$.* Zostało szybko rozwiązane. Mniej więcej tak. Załóżmy, że $AB > CD$. Jeśli E jest punktem przecięcia prostych AD i BC , to

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= AE^2 + EC^2 + BE^2 + ED^2 = \\ &= (AE^2 + BE^2) + (EC^2 + ED^2) = AB^2 + CD^2. \end{aligned}$$

Zadanie rozwiązane. I co dalej zrobił Henryk w czasie lekcji, której część poświęcił temu zadaniu? Ano zapytał swych uczniów, w którym miejscu skorzystali z równoległości boków AB i CD . Ponieważ nie skorzystali w żadnym miejscu, więc okazało się, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdego czworokąta. I to jeszcze nie był koniec. Padło pytanie o odwrócenie twierdzenia. Okazało się, że można odwrócić. Piszę o tym, bo bardzo mi się to podoba. Ale i tak zadałem – po jakimś czasie – pytanie: a gdzie korzysta się z tego, że punkty A, B, C, D leżą w jednej płaszczyźnie? Niby korzysta się, mówiąc o przecięciu prostych AD i BC . No dobrze, ale po co? Przecież można napisać, że proste AD i BC są prostopadłe (również wtedy, gdy są skośne) wtedy i tylko wtedy, gdy $(A - D) \cdot (B - C) = 0$, kropka oznacza iloczyn skalarny. Tę równość można przepisać w postaci $A \cdot B + C \cdot D = B \cdot D + A \cdot C$. Równość, którą należało dowieść, ma postać $(A - C)^2 + (B - D)^2 = (A - B)^2 + (B - D)^2$, podnoszenie do kwadratu polega na mnożeniu skalarnym wektora przez siebie. Ostatnia równość jest równoważna temu, że $A \cdot C + B \cdot D = A \cdot B + B \cdot D$, więc wynioskowanej poprzednio z założenia. Co więcej, w ostatniej wersji dowód geometryczny zaczyna już czegoś od ucznia wymagać. Tu algebra jest rzeczywiście pomocna. A może Czytelnicy zechcą rozwiązać ostatnią wersję zadania bez algebry?

Odszedł jeden z najlepszych nauczycieli matematyki w Polsce. Henryk Pawłowski na długo pozostanie w pamięci wielu swych uczniów, czytelników swych książek, współpracowników i kolegów.

Michał KRYCH



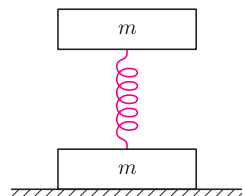
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltam1.edu.pl

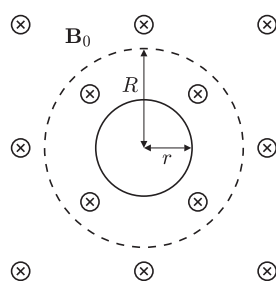
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2016

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

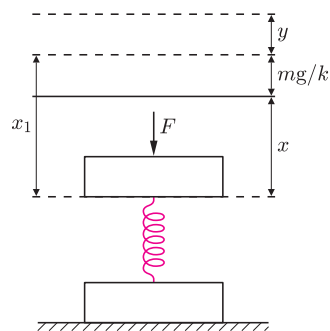
Przypominamy treść zadań:



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

616. Układ złożony z dwóch jednakowych płytek o masach m połączonych nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości k , znajduje się w stanie równowagi (rys. 1). Górną płytkę naciśnięto tak, że opuściła się ona o x , a następnie puszczono. Na jaką maksymalną wysokość podniósł się środek masy układu?

617. Na zewnątrz powierzchni walcowej o promieniu r wartość wektora indukcji pola magnetycznego rośnie liniowo w czasie: $B_0 = \alpha t$. Linie pola magnetycznego są równoległe do osi walca (rys. 2). Jak musi zmieniać się w czasie wartość jednorodnego pola magnetycznego wewnątrz tej powierzchni, aby elektron poruszał się po okręgu o promieniu $R > r$? W chwili $t = 0$ elektron spoczywa.

616. Ciągła linia na rysunku 3 oznacza położenie równowagi – sprężyna jest ściśnięta o mg/k . Dolna płytka oderwie się od podłoża, gdy siła F powodująca dodatkowe ściśnięcie sprężyny o x będzie większa od ciężaru układu, czyli spełniony będzie warunek $x > 2mg/k$. W chwili oderwania sprężyna będzie wydłużona o $y = mg/k$. Prędkość v górnej płytki w chwili oderwania dolnej znajdujemy z zasady zachowania energii:

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2mg(x_1 + y) + \frac{ky^2}{2}, \text{ gdzie } x_1 = \frac{mg}{k} + x.$$

Stąd

$$v^2 = \frac{kx^2}{m} - \frac{4mg^2}{k}.$$

Prędkość środka masy układu w momencie oderwania to $V = v/2$. Po oderwaniu środek masy porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym i wznosi się na wysokość

$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{kx^2}{8mg} - \frac{mg}{2k}.$$

Wysokość, na jaką wzniesie się środek masy układu od chwili rozpoczęcia ruchu, wynosi $H = h + (x_1 + y)/2$. Jeśli $x \leq 2mg/k$, dolna płytka pozostaje w spoczynku, a górna porusza się ruchem harmonicznym wokół położenia równowagi z amplitudą x , czyli wznosi się na maksymalną wysokość $2x$. Zatem odpowiedź na postawione pytanie jest następująca: maksymalna wysokość, na jaką wzniesie się środek masy układu, dana jest wzorem:

$$H = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{kx}{4mg} \right) + \frac{mg}{2k}, \text{ gdy } x > \frac{2mg}{k}; \quad H = x, \text{ gdy } x \leq \frac{2mg}{k}.$$

617. Szukane pole magnetyczne ma linie równoległe do B_0 , ponieważ wewnątrz powierzchni walcowej nie płynie żaden prąd. Jeżeli elektron porusza się po okręgu o promieniu R i ma w danej chwili prędkość v , to działająca na niego siła dośrodkowa jest siłą Lorentza: $mv^2/R = evB_0$, zatem jego prędkość $v = eRat/m$ rośnie liniowo w czasie. Prędkość tę uzyskuje elektron dzięki sile elektrycznej $F_E = ma = eR\alpha$. Wektor natężenia pola elektrycznego o długości $E = \alpha R$ jest styczny do okręgu. Z prawa Maxwella wiemy, że krążenie pola elektrycznego wzdłuż okręgu o promieniu R ma wartość bezwzględną

$$|K_E| = 2\pi RE = \frac{|\Delta\phi_{B_0} + \Delta\phi_{B_1}|}{\Delta t},$$

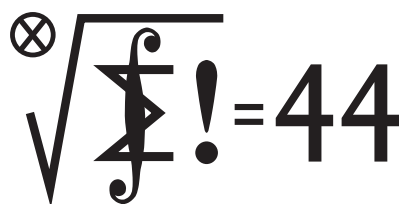
gdzie $\Delta\phi_{B_0} = \pi\alpha\Delta t(R^2 - r^2)$ jest zmianą w czasie Δt strumienia pola B_0 przez powierzchnię objętą okręgiem, $\Delta\phi_{B_1}$ jest zmianą strumienia szukanego pola B_1 . Ponieważ E nie zależy od czasu, B_1 musi być liniową funkcją czasu:

$$B_1 = \beta t, \quad \Delta\phi_{B_1} = \pi r^2 \beta \Delta t.$$

Wartość szukanego pola magnetycznego dana jest wzorem:

$$B_1 = \frac{\alpha t(R^2 + r^2)}{r^2};$$

zwrot linii pola magnetycznego jest zgodny z B_0 .



Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2016

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

719. Czternaścioro ludzi prezentowało swoje umiejętności w serii występów (TV-show?); w pojedynczym występie mogła uczestniczyć dowolna liczba osób. Było to siedem par małżeńskich – ale małżonkowie nigdy nie wystąpili razem. Za to każda inna para osób (dowolnej płci) uczestniczyła jednocześnie w dokładnie jednym występie. Wiadomo ponadto, że pewna osoba uczestniczyła w dokładnie dwóch występach. Jaka jest minimalna liczba występów, przy której te warunki mogły być spełnione?

720. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 1$ znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą s taką, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$(x-1)^{2n} + (x+1)^{2n} \leq 2(x^2+s)^n.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 713 ($WT = 3,51$) i 714 ($WT = 1,20$) z numeru 1/2016

Stanisław Bednarek	Łódź	44,55
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Janusz Fiett	Warszawa	42,24
Paweł Kubit	Kraków	38,74
Marek Gałecki	USA	37,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Witold Bednarek	Łódź	33,95
Janusz Olszewski	Warszawa	33,36

Stanisław Bednarek – to już 44 po raz drugi.

719. Niech A_0 będzie tą osobą, która uczestniczyła w dokładnie dwóch występach. Przyjmijmy, że to pani; jej mąż otrzymuje oznaczenie B_0 . Pozostałe pary małżonków: (A_i, B_i) ; $i = 1, \dots, 6$. W jednym swoim występie pani A_0 musiała się pokazać w towarzystwie połowy tych ludzi; w drugim – z pozostałą połową. Ustalmy oznaczenia tak, że w jednym z tych występów uczestniczyły osoby A_0, A_1, \dots, A_6 , a w drugim A_0, B_1, \dots, B_6 . I znów, bez straty ogólności, możemy przyjąć (dla wygody języka), że osoby A_i to panie, a B_i panowie (w kontekście tego zadania szybka zmiana płci to nie problem).

W każdym z pozostałych występów mogły uczestniczyć, oprócz pana B_0 , co najwyżej dwie osoby – bo gdyby więcej, to byłyby/byliby wśród nich dwie panie lub dwaj panowie; a przecież one/oni już się pokazali wspólnie, wraz z panią A_0 .

Każda para (A_i, B_j) , gdzie $i, j \geq 1$, $i \neq j$, musiała raz wspólnie wystąpić; i były to różne występy. Jest 30 takich par. Uwzględniając dwa występy z udziałem pani A_0 , widzimy, że liczba występów musiała wynieść co najmniej 32.

Czy realizacja tej wartości jest wykonalna? Trzeba zapewnić panu B_0 wspólne uczestnictwo z każdą osobą poza panią A_0 . Uzyskamy to, dołączając go (na przykład) do par (A_1, B_2) , (A_2, B_1) , (A_3, B_4) , (A_4, B_3) , (A_5, B_6) , (A_6, B_5) . Zostaną przez to spełnione wszystkie wymagane warunki. Tak więc szukane minimum wynosi 32.

720. Oznaczmy przez $L_s(x)$ oraz $P_s(x)$ lewą oraz prawą stronę napisanej nierówności. Ponieważ

$$L_s(x) = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2n-2k},$$

$$P_s(x) = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{2n-2k} s^k,$$

zatem połowa ich różnicy to wielomian parzysty zmiennej x (z parametrem s)

$$\frac{P_s(x) - L_s(x)}{2} = c_1 x^{2n-2} + c_2 x^{2n-4} + \dots + c_{n-1} x^2 + c_n$$

o współczynnikach

$$c_k = \binom{n}{k} s^k - \binom{2n}{2k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Aby ten wielomian przyjmował wyłącznie wartości nieujemne, musi być spełniony warunek $c_1 \geq 0$, czyli $ns - n(2n-1) \geq 0$, czyli $s \geq 2n-1$.

Pokażemy, że jest to jednocześnie warunek dostateczny. Wystarczy wykazać, że jeśli $s \geq 2n-1$, to wszystkie współczynniki c_k są nieujemne. Indukcja: baza ($c_1 \geq 0$) już gotowa. Ustalmy $k \geq 1$ i przyjmijmy założenie indukcyjne $c_k \geq 0$, czyli

$$\binom{n}{k} \binom{2n}{2k}^{-1} s^k \geq 1.$$

Teza indukcyjna ($c_{k+1} \geq 0$) ma analogiczną postać, z k zastąpionym przez $k+1$. Piszemy więc to wyrażenie i zaczynamy je przekształcać:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+1} \binom{2n}{2k+2}^{-1} s^{k+1} &= \\ &= \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{2n}{2k}^{-1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2n-2k)(2n-2k-1)} \cdot s^{k+1} = \\ &= \binom{n}{k} \binom{2n}{2k}^{-1} s^k \cdot \frac{2k+1}{2n-2k-1} \cdot s; \end{aligned}$$

stąd i z założenia indukcyjnego,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+1} \binom{2n}{2k+2}^{-1} s^{k+1} &\geq \frac{2k+1}{2n-2k-1} \cdot s \geq \\ &\geq \frac{(2k+1)(2n-1)}{2n-2k-1} > 1, \end{aligned}$$

i mamy tezę indukcyjną. Tak więc $c_k \geq 0$ dla $k = 1, \dots, n$, wobec czego $P_s(x) - L_s(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Otrzymaliśmy odpowiedź: najmniejsza wartość parametru s , dla której $P_s(x) \geq L_s(x)$ (dla $x \in \mathbb{R}$), wynosi $s = 2n-1$.

Prosto z nieba: Nowy rekord teleskopu Hubble'a

Słynny teleskop kosmiczny Hubble'a agencji kosmicznych NASA i ESA, który w 1990 roku został umieszczony na niskiej orbicie okołoziemskiej 540 km nad powierzchnią Ziemi, wciąż działa i, co więcej, jest w dobrej formie.

Niskie orbity okołoziemskie znajdują się pomiędzy powierzchnią Ziemi a pasami van Allena (obszarami magnetosfery ziemskiej, w których występują naładowane cząstki o dużej energii), czyli w odległościach od 200 do 2000 km nad Ziemią.

Hubble obserwuje Kosmos w nadfiolecie, świetle widzialnym i podczerwieni. Obserwacje te często wykorzystuje się do pomiarów odległości, używając różnych metod, np. mierząc przesunięcie ku czerwieni fotonów. Niedawno międzynarodowy zespół teleskopu Hubble'a zarejestrował światło pochodzące od rekordowo odległej galaktyki. Używając danych z kamery Hubble'a WFC3 (*Wide Field Camera 3*), rozłożono obraz galaktyki nazwanej GN-z11 na składowe kolory, co pozwoliło na pomiar jasności w różnych barwach, a co za tym idzie, na obserwacje widma, czyli spektroskopowy pomiar odległości. Galaktyka GN-z11 istniała już 400 milionów lat po Wielkim Wybuchu i, jak na tak wczesny moment w życiu Wszechświata, jest (była?)

bardzo jasnym obiektem. Przesunięcie ku czerwieni wynosi $z = 11,1$, co jest praktycznie limitem zdolności obserwacyjnych teleskopu Hubble'a; poprzedni rekord należał do galaktyki EGSY8p7, której przesunięcie ku czerwieni wynosi 8,68. Na szczęście większy i technologicznie bardziej zaawansowany kosmiczny teleskop Jamesa Webba, który zastąpi wysłużonego Hubble'a, zostanie umieszczony na orbicie w najbliższych latach. Odległość do GN-z11 starano się określić już wcześniej podczas wspólnych obserwacji teleskopów Hubble'a i Spitzera. Dzięki nim wiadomo, że galaktyka ta jest 20 razy mniejsza od Drogi Mlecznej, jednak tempo powstawania gwiazd jest w niej 20 razy większe. Odkrycie galaktyki tak sumiennie produkującej gwiazdy już w 200–300 milionów lat po zakończeniu „wieków ciemnych” intryguje badaczy wczesnego Wszechświata – wcześniej uważano, że obiekty takie jak GN-z11 nie mają prawa istnieć tak wcześnie. Wspomniany wcześniej teleskop Webba z pewnością odkryje dużo więcej podobnych ciekawostek.

Michał BEJGER



Niebo w sierpniu

Sierpień jest doskonałym miesiącem do prowadzenia obserwacji spadających gwiazd. Najbardziej spektakularny deszcz meteorów zapewnią znane i lubiane Perseidy, których można wypatrywać od 17 do 24 VIII, a ich maksimum przypada na 12 VIII. Rój ten znany jest już od starożytności. Charakteryzują go białe meteory, które można obserwować w grupach po 5–15 obiektów w odstępach 2–3 minut. Perseidy mają swój radiant dla rektascensji 3,2 h i deklinacji $+58^\circ$ i można ich szukać w okolicach gwiazdy η Persei na tle gwiazdozbioru Perseusza, a ich spodziewana aktywność kształtuje się na poziomie 150 meteorów na godzinę. Rój ten jest związany z kometą 109P/Swift Tuttle, odkrytą w XIX wieku i mającą okres obiegu 133 lat.

Mniej znanym rojem o nieco mniejszej aktywności (około 6 meteorów na godzinę) są α Aurigidy związane z kometą C/1911 N1 Kiess, charakteryzujące się szybkimi meteorami poruszającymi się z prędkościami około 66 km/s. Ich aktywność przypada na przełom sierpnia i września (28 VIII–5 IX), a maksimum na ostatni dzień wakacji, 31 VIII. Radiant tego roju występuje dla rektascensji 6,1 h i deklinacji $+39^\circ$, a szukać ich można na tle gwiazdozbioru Woźnicy.

Tym, którzy mają szansę przebywać w sierpniu na półkuli południowej polecamy także jeden z najbogatszych strumieni nieba południowego: południowe δ Akwarydy. Aktywność tego roju przypada od 12 VII do 23 VIII, ma on radiant o rektascensji 22,6 h i deklinacji -16° i można go znaleźć w gwiazdozbiorze Wodnika. Choć szacowana

aktywność tego deszczu wynosi około 16 meteorów na godzinę, to w latach 30. XX wieku przekroczyła 30 obiektów na godzinę, a południowe δ Akwarydy znane były w Chinach już w 714 roku p.n.e.

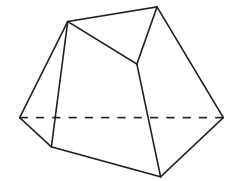
Kto lubi bliskie spotkania planet Układu Słonecznego, powinien spojrzeć w niebo 27 VIII, kiedy Wenus znajdzie się jedynie $0,06^\circ$ od Jowisza. W obserwacjach nie powinna przeszkadzać pełnia, która przypada na 18 VIII. Zjawisko będzie można zaobserwować w godzinach wieczornych, patrząc w kierunku zachodniego nieba. Ponadto 4 VIII warto zwrócić uwagę na Merkurego, który znajdzie się $0,6^\circ$ w kierunku północnym od Księżyca, czy 6 VIII, kiedy to Jowisz znajdzie się zaledwie $0,2^\circ$ w kierunku północnym od Księżyca. Nasz naturalny satelita będzie wtedy tuż po nowiu przypadającym 2 VIII.

Na początku sierpnia warto również poszukać na niebie komety 9P/Tempel znanej jako Temple 1, której jasność 2 VIII jest szacowana na około 11^m . Dokładne położenie obiektu można sprawdzić na stronie theskylive.com. Obiekt ten został odkryty w 1867 roku i należy do okresowych komet z rodziny Jowisza, a jego obieg wokół Słońca zajmuje 5,5 roku. Temple 1 była celem misji Deep Impact i została sfotografowana w 2005 roku. Następnie po raz kolejny fotografie Temple 1 wykonała sonda Stardust 14 lutego 2011 roku. Dzięki tym dwóm misjom astronomowie mieli po raz pierwszy unikalną szansę przeanalizowania, jak zmienia się jądro komety wraz z upływem czasu.

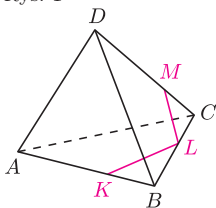
Karolina BĄKOWSKA

Dwie nierównoległe płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej. Ta niepozorna obserwacja bywa bardzo przydatna.

1. Czy rysunek 1 przedstawia wielościan?
2. Czworoscian $ABCD$ przecięto płaszczyzną, uzyskując w przekroju czworokąt $KLMN$. Na rysunku 2 wyznacz punkt N , posługując się jedynie linijką.
3. W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość 2. Długości pozostałych boków tego trapezu są równe 1. Punkt S jest wierzchołkiem ostrosłupa o podstawie $ABCD$, w którym $SA = SB = 2$, $SC = SD = \sqrt{3}$. Wyznacz stosunek objętości tego ostrosłupa do objętości czworoscianu foremnego o krawędzi 1.
4. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego każda krawędź ma długość 1. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przecinającą jego wszystkie krawędzie boczne i uzyskano w przekroju czworokąt wypukły $ABCD$ nie będący trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P . Wyznacz wszystkie wartości, jakie może przyjąć odległość punktu P od płaszczyzny podstawy ostrosłupa.
5. Dany jest sześcian o podstawie $ABCD$ i krawędziach bocznych AA' , BB' , CC' , DD' . Wyznacz miarę kąta dwuściennego między płaszczyznami ABD' i $AB'D$.



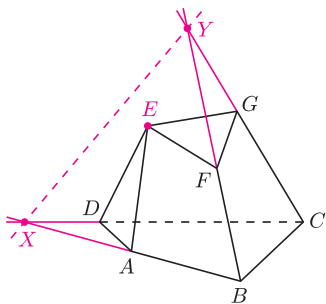
Rys. 1



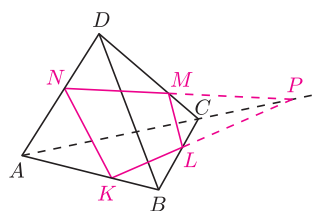
Rys. 2

Rozwiązania

R1. Przednia i tylna ściana danej figury mają wspólny wierzchołek, zatem nie są równoległe. Niech X i Y oznaczają odpowiednio punkty przecięcia prostych AB z CD oraz BF z CG (rys. 3). Wówczas każdy z punktów X, Y należy do obu płaszczyzn rozważanych powyżej ścian, a więc też do ich wspólnej prostej. Jednak punkty X, Y, E nie są współliniowe, zatem rysunek 1 nie przedstawia wielościanu. \square



Rys. 3



Rys. 4

R2. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych KL i AC (rys. 4). Punkt ten leży w płaszczyźnie przekroju, zatem leży w niej też prosta PM . Stąd brakujący punkt N to punkt przecięcia prostych PM i AD . \square

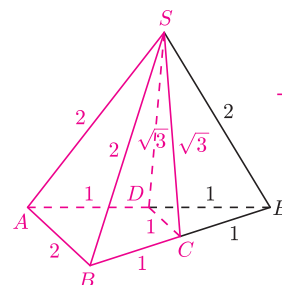
R3. Niech E będzie punktem przecięcia prostych AD i BC (rys. 5). Z kształtu trapezu $ABCD$ wynika, że $AE = BE = AB = 2$ oraz że jego pole to $3/4$ pola trójkąta ABE .

Z długości krawędzi trójkąta BCS wnioskujemy, że jest on połową trójkąta równobocznego o krawędzi 2. Ponieważ $SC \perp BC$ oraz $BC = CE$, więc $SE = SB = 2$.

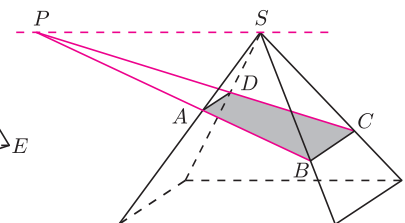
Stąd czworoscian $ABES$ jest foremny o krawędzi 2. Jego objętość jest zatem 8-krotnie większa od objętości czworoscianu foremnego o krawędzi 1, więc szukany stosunek objętości równy jest $8 \cdot 3/4 = 6$. \square

R4. Prosta AB leży w płaszczyźnie przedniej ściany ostrosłupa z rysunku 6, a prosta CD w płaszczyźnie tylnej ściany, więc punkt P należy do obydwu tych

płaszczyzn. Ich częścią wspólną jest prosta równoległa do podstawy ostrosłupa (gdyż jest on prawidłowy) i przechodząca przez wierzchołek S . Stąd jedyną wartością, jaką może przyjąć odległość punktu P od płaszczyzny podstawy, jest wysokość ostrosłupa równa $\sqrt{2}/2$. \square



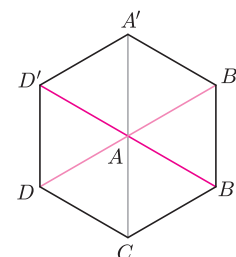
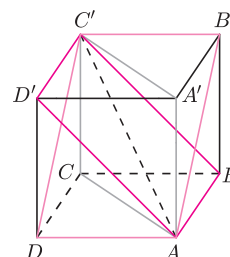
Rys. 5



Rys. 6

R5. Krawędzie AB i $C'D'$ są równoległe, leżą więc w jednej płaszczyźnie ABD' . Stąd punkt C' też do niej należy; podobnie należy on także do $AB'D$. Punkty A, A', C, C' również leżą w jednej płaszczyźnie (rys. 7).

Powyższe trzy płaszczyzny mają wspólną prostą AC' i każda z nich zawiera inną z trzech krawędzi wychodzących z wierzchołka A . Oznacza to, że płaszczyzny te tworzą równe kąty dwuścienne, czyli kąty po 60° . \square



Rys. 7. Sześcian i jego widok wzdłuż przekątnej AC'

Zadanie 1 pochodzi z gazetki Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów *Kwadrat* nr 7, a zadanie 4 z III OMG.