





SPIS TREŚCI NUMERU 6 (505)

Co to jest sekunda i jak ją mierzymy <i>Krzysztof Pawłowski</i>	str. 1
<i>Delta</i> i fizyka cząstek elementarnych (VI): Od LEP-u do LHC: fizyka zapachu i naruszenie CP <i>Piotr Chankowski</i>	str. 4
Informatyczny kącik olimpijski (94): Myszy <i>Jakub Pawlewicz</i>	str. 5
Bitcoin: złoto XXI wieku <i>Łukasz Mazurek</i>	str. 6
Kwadraty <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 8
Wyniki Olimpiad 2015/2016	str.11
Kluska w uchu wielbłąda albo arytmetyka moralna <i>Krzysztof Rejmer</i>	str.15
Trzy karty <i>Edward Stachowski</i>	str.17
 Zadania	str.17
Szyfry i kody zagadek Cykady 3301 <i>Aleksandra Nowak</i>	str.18
Czasopismo „Matematyka Poglądowa” <i>Agnieszka Prusińska</i>	str.19
 Skutek i przyczyna <i>Magdalena Fikus</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Skąd wziął się Księżyc?	str.24
Niebo w czerwcu	str.24
 Boki trójkąta <i>Joanna Jaszuńska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Tomasz Kazana, Krystyna Kordos – sekret., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem T_EX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2016 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

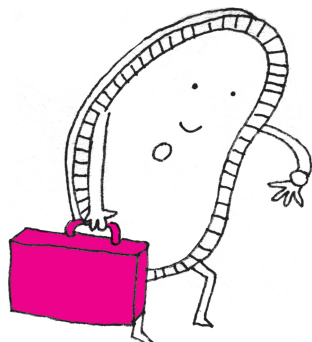
Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

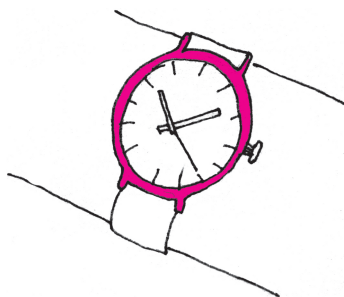
Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

Co to jest sekunda i jak ją mierzymy

Krzysztof PAWŁOWSKI*



Historia zegarów to historia wielkich odkryć. Już w XVII wieku, synchronizując zegar wahadłowy z „zegarem” opartym na obserwacjach astronomicznych, Ole Rømer stwierdził, że światło ma skończoną prędkość. Również w laboratorium Rømera, synchronizując różne zegary wahadłowe, przekonano się o wpływie temperatury na długość ramienia wahadła, wprowadzono skalę temperatur i zbudowano termometry. Każda kolejna generacja zegarów dawała dostęp do nowych efektów fizycznych.



Ziemia porusza się wokół Słońca po elipsie, a nie po okręgu. Na dodatek oś Ziemi jest nachylona względem płaszczyzny zawierającej orbitę Ziemi. Te dwa fakty powodują, że czas trwania doby zmienia się w ciągu roku. Definiując sekundę jako ułamek doby, odnoszono się do „ręcznic” zmierzonego czasu trwania doby zmienionego o obliczone uprzednio poprawki. Wielkość poprawki zależy od daty, istniał więc kalendarz poprawek.

Czym jest sekunda? Dlaczego jej długość ciągle się zmienia? Jak działa zegar atomowy? Dlaczego pojedynczy pomiar sekundy może trwać kilkanaście minut? I dlaczego ostatecznie nigdy nie znamy aktualnego czasu?

Zacznijmy od tego, czym jest zegar. Sprawa wydaje się prosta – w zegarach są mechanizmy, które działają okresowo. Co sekundę system przekładni albo układy scalone aktualizują czas. Przykładem może być wahadło: ramię wahadła oscyluje, porusza się w górę i w dół, w górę i w dół, a po każdym wahnięciu skomplikowany mechanizm porusza ostatnim z kół zębatych, do którego przyczepione są wskazówki. Czy to jest zegar? Niekoniecznie – to tylko mechanizm, który rusza wskazówkami. Od zegara wymagamy, żeby chodził dobrze, czyli żeby przesunięcie sekundowe wskazówki rzeczywiście odbywało się co sekundę. I tutaj pojawia się pytanie, czym w ogóle sekunda jest.

Definicję sekundy zmieniano już wielokrotnie. Często definicje opierały się na jakimś zjawisku fizycznym, które można obserwować z różnych części globu i co do którego spodziewamy się, że zawsze trwa tyle samo czasu, który na dodatek można dokładnie zmierzyć.

Dawna definicja sekundy oparta była na czasie, jakiego potrzebuje Ziemia, aby obrócić się wokół swojej osi, czyli na czasie trwania doby. Dokładniej, sekundą nazwano $1/86400$ „średniego czasu słonecznego”, czyli z grubsza średniego czasu trwania doby.

Mierzenie czasu w oparciu o tę definicję odbywa się z grubsza tak: mamy urządzenia, co do których spodziewamy się, że stabilnie wybijają takt, np. zegary wahadłowe, zegary kwarcowe, itd. W chwili gdy zaczyna się doba (początek doby jest arbitralnie określony, np. przez pojawienie się na horyzoncie jakiejś odległej gwiazdy), patrzymy na wskazania naszych urządzeń i mierzymy, ile „sekund” nasze urządzenie wskaże, gdy doba się skończy. Porównujemy wyniki tego pomiaru z liczbą 86400. Po wielu pomiarach może się okazać, że to, co nazywaliśmy zegarem, nie działa poprawnie. Na przykład może okazać się, że nasze urządzenie może „wybijać” więcej lub mniej „sekund” niż 86400 w ciągu doby, czyli że nasze urządzenie nie jest dokładne. Może się zdarzyć również, że nawet jeśli urządzenie średnio wskazało 86400 sekund na dobę, to z bardzo dużym odchyleniem, np. wśród pomiarów trwania doby mamy wyniki różniące się o dziesiątki sekund. Wtedy mówimy o zegarze, że jest niestabilny. Zauważmy, że zegar może być niedokładny i stabilny jednocześnie. Jeśli zegar wskazuje rzeczywiście 86400 sekund na dobę i jest przy tym stabilny, to można już go używać. Pamiętać trzeba jednak, żeby regularnie sprawdzać jego stabilność i dokładność.

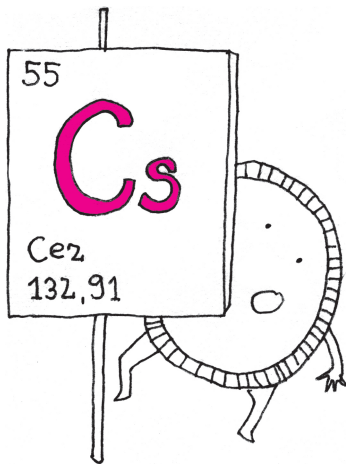
Podsumowując: fizycy nazywają zegarem urządzenie, które nie tylko przedstawia wskazówki na tarczy, ale jest regularnie kalibrowane, tzn. regularnie sprawdza się, że sekunda, którą mierzy zegar, zgadza się z definicją sekundy.

Obowiązująca definicja sekundy. Okazało się, że definicja sekundy oparta na czasie trwania doby jest niedoskonała. Chociażby z tego względu, że ruchy wody na powierzchni Ziemi, np. pływy, zmieniają czas trwania doby w praktycznie niemożliwy do przewidzenia sposób. Wynikające stąd nieregularności są małe, ale zauważalne. Powodują, że długość sekundy mierzona w oparciu o długość doby zmienia się co kilka lat o około 10^{-9} s. Ponadto pojawiły się pomysły, jak zmierzyć sekundę znacznie dokładniej. W 1967 roku ogłoszono nową definicję sekundy. W przyjętym w polskim prawie brzmieniu

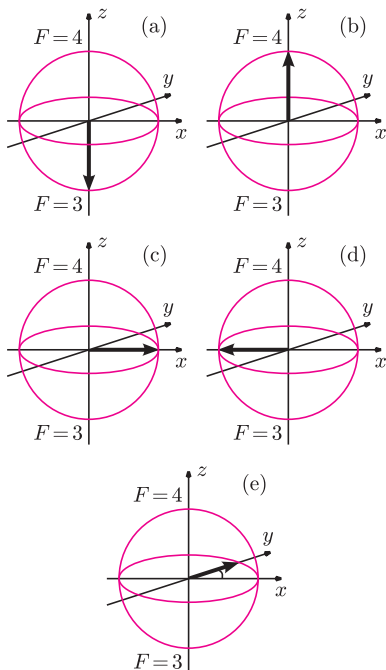
sekunda to czas równy 9 192 631 770 okresom promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami struktury nadsztywnej stanu podstawowego atomu cezu 133.

Domyślałem się, że definicja może wydać się niejasna. Do jej zrozumienia wymagane są podstawy mechaniki kwantowej, w szczególności zaś fakt, że w układach związanych energia nie może być dowolna, może przyjąć tylko pewne dyskretne

*Centrum Fizyki Teoretycznej PAN



Niektóre zegary drugiego rodzaju są znacznie dokładniejsze niż pierwszego, zwłaszcza tzw. zegary optyczne, oparte na takich poziomach, które absorbują światło widzialne. Definicja sekundy wkrótce prawdopodobnie ulegnie zmianie: atom cezu zostanie zastąpiony innym.



Graficzne przedstawienie stanów kwantowych dla układu o dwóch poziomach. Atom w stanie (a) $F = 3$, (b) $F = 4$; (c) to przykład równej superpozycji $F = 3$ oraz $F = 4$, (d) stan zapoczątkowany w równej superpozycji po czasie równym połowie okresu, (e) stan zapoczątkowany w równej superpozycji po czasie równym jednej czwartej okresu.

wartości. Te dozwolone wartości energii nazywamy poziomami energetycznymi. Ponad połowa przytoczonej definicji sekundy służy do jednoznacznego określenia, o jaki układ (atom cezu, izotop 133) i jakie jego poziomy (ze struktury nadsubtelnej stanu podstawowego) chodzi. Z dobrym przybliżeniem energia poziomów energetycznych atomów nie zależy od tego, gdzie układ się znajduje, jest więc uniwersalna.

Każdemu poziomowi energetycznemu odpowiada jakiś stan kwantowy, nazywany stanem stacjonarnym. Jeżeli układ jest w danym stanie, to ma energię odpowiadającą poziomowi energetycznemu. Znając stan układu, można obliczyć, co się w układzie tak naprawdę dzieje. W dużym uproszczeniu – w stanie podstawowym cezu elektrony są najbliżej jądra, jak tylko się da. Struktura nadsubtelna uwzględnia spin jądra atomu, który można sobie wyobrazić jako swego rodzaju wirowanie. Poziomy energetyczne składające się na strukturę nadsubtelną to poziomy różniące się ustawieniem spinu jądra względem elektronów.

Różnice między niektórymi poziomami łatwo obserwować, bo przekładają się na częstotliwość światła, jakie dany atom może pochłonąć lub wyświecić, przeskakując pomiędzy tymi poziomami. Stąd w definicji mowa o świetle. Czemu wybrano cez? Cóż, ten atom w czasach tworzenia definicji był popularny, miał dogodną strukturę poziomów energetycznych, istniały też rozwinięte metody manipulowania cezem. Obecnie oprócz cezu używa się innych atomów, np. rubidu, iterbu czy strontu. Zegary oparte na innych pierwiastkach i molekułach, a dopuszczone przez Międzynarodowe Biuro Miar i Wag, to tzw. zegary drugiego rodzaju.

Praktyczne wykorzystanie definicji. Do zrozumienia, jak rzeczywiście mierzona jest sekunda, potrzebny jest dalszy krótki kurs mechaniki kwantowej. Definicja mówi tylko o dwóch poziomach energetycznych. Wykorzystywane stany oznaczają się zmienną F , która tutaj może przyjąć wartości 3 lub 4. Jeśli atom jest w stanie $F = 4$, to jego energia E_4 jest minimalnie większa niż energia stanu $F = 3$, oznaczona E_3 . Mechanika kwantowa dopuszcza jednak stany „pośrednie”, tzn. atom może być w superpozycji stanów $F = 3$ oraz $F = 4$. Jeśli atom jest w stanie superpozycji, to mierząc jego energię, zmierzmy albo E_3 , albo E_4 – wynik będzie losowy. Przygotowując ten sam stan superpozycji wielokrotnie, mierząc za każdym razem energię i uśredniając wyniki, otrzymamy liczbę między E_3 a E_4 .

Takie układy, z dwoma poziomami energetycznymi, nazywamy kubitami. W rzeczywistości każdy atom, również cez, ma mnóstwo innych poziomów, ale fizycy z dobrym przybliżeniem mogą je odizolować. Definicja opiera się właśnie na takich poziomach, że gdy atom jest na którymś z nich, to samoistnie nie wskoczy na inny stan energetyczny spoza tych dwóch wyizolowanych. A jeśli z jakichś powodów zmieni stan, to używając innych wiązek laserowych i emisji spontanicznej, łatwo go „wepchnąć” z powrotem na jeden z dwóch stanów z definicji.

Układ o dwóch poziomach energetycznych można, na szczęście, łatwo zilustrować. Otóż każdy stan w układzie o dwóch poziomach można jednoznacznie reprezentować za pomocą wektora o długości 1. Zamiast pisać formułę określającą stan, rysuje się najczęściej sferę jednostkową (tzw. sferę Blocha), zaznaczając strzałką punkt na sferze, tak jak na rysunku obok. Pozwala to łatwo, przynajmniej w przypadku kubitów, sprowadzić mechanikę kwantową do geometrii. Układ odniesienia wybraliśmy tak, że jeśli atom jest w stanie $F = 3$, to odpowiada mu biegun południowy (rysunek (a)), jeśli w stanie $F = 4$, to biegun północny (rysunek (b)). Wszystkie pozostałe stany, stany superpozycji, leżą w innych miejscach sfery. Wśród nich ważnym stanem jest stan zaznaczony strzałką na rysunku (c). Odpowiada on tzw. równej superpozycji stanów $F = 3$ i $F = 4$, tzn. każdy z poziomów zostanie zmierzony z tym samym prawdopodobieństwem. Stan ten jest ważny, bo, po pierwsze, łatwo go przygotować w doświadczeniu, po drugie, jest używany przy pomiarze czasu. Ten stan nie jest stanem stacjonarnym, więc gdy atom przygotowujemy w tym stanie, to za chwilę stan ten się zmieni. Dokładniej, dynamika takiego stanu wygląda tak, że pozostaje on na równiku, ale okrąża oś z z dokładnie taką częstością jak ta z definicji sekundy. Jeśli więc przygotowujemy stan z rysunku (c) i nic nie będziemy z atomem robić, to po czasie $1/9192631770$ sekundy stan układu wróci do stanu z rysunku (c).



Rozwiązanie zadania F 905.

W celu obliczenia energii kinetycznej elektronu, niezależnie od tego, czy mamy do czynienia z przypadkiem relatywistycznym, czy nie relatywistycznym, musimy znać jego masę spoczynkową i prędkość albo pęd. Aby znaleźć pęd elektronu, zapiszmy II zasadę dynamiki dla ruchu elektronu w polu magnetycznym działająca na niego siła Lorentza jest prostopadła do wektora prędkości \vec{v} , wartość prędkości nie zmienia się i dla rozważanego przypadku można równanie ruchu napisać w postaci $e\vec{v}B = m\vec{v}^2/r$. Stąd pęd jest równy $p = mv = eBr$. Należy teraz rozstrzygnąć, czy w rozpatrywanym przypadku elektron należy traktować jako cząstkę relatywistyczną, od tego bowiem zależy relacja pomiędzy p i E_k . Podstawiając wartości do wzoru na pęd, dostajemy $p = 3,2 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Dla elektronu $m_0c = 2,73 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Nie zachodzi więc relacja $p \ll m_0c$, co pozwoliłoby stosować „zwykłe”, nierelatywistyczne wzory. Używając wzoru relatywistycznego

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right),$$

gdzie $\beta = v/c$, dostajemy $E_k = 0,28 \text{ MeV}$.

O tym, jak przygotować stan wielu atomów, by zwiększyć dokładność pomiaru, pisał w *Delcie* 5/2013 Jan Kołodyński.

Czas globalny jest ustalany na podstawie wskazań kilkuset zegarów atomowych. Jeśli któryś z zegarów notorycznie ma duże odchylenie od średniego czasu, w końcu spotyka go kara i przy kolejnych obliczeniach średniego czasu nadana mu zostanie mniejsza waga niż pozostałych zegarów. Czas globalny jest wynikiem demokracji z wagami.

Doświadczalnicy potrafią manipulować na różne sposoby takimi atomami, np. mogą wywołać błyskawiczny obrót wokół osi y . W tym celu potrzebują światła o częstotliwości dopasowanej do różnicy energii między poziomami $F = 3$ i $F = 4$. Zauważmy, że stan z rysunku (c), po obrocie o 90° wokół osi y , będzie leżał na biegunie północnym, czyli atom będzie w stanie $F = 4$. Z kolei jeśli pozwolimy stanowi z rysunku (c) ewoluować najpierw przez połowę okresu, a dopiero potem wykonamy obrót, to stan wpadnie na biegun południowy, czyli atom będzie w stanie $F = 3$.

W zegarach czeka się przez czas równy $n + \frac{1}{4}$ okresu, gdzie n jest dużą liczbą naturalną, a następnie wykonuje się impuls obracający wokół osi y i ostatecznie mierzy się, w jakim stanie jest atom. Stan powinien wtedy pozostać na równiku, czyli powinien być ponownie w równej superpozycji (z nieistotną tutaj względną fazą między stanami nadsubtelnyimi). Pomiar da z równym prawdopodobieństwem $F = 3$ lub $F = 4$. W praktyce wykorzystuje się dziesiątki tysięcy atomów naraz. Wtedy powinno się zmierzyć, że około połowy atomów jest w stanie $F = 4$. Właśnie taki pomiar jest sercem zegara atomowego. Jak widać, całość opiera się na ewolucji, która, notabene, często trwa znacznie krócej niż sekundę (to zależy od liczby n – czyli tego, ile pełnych okresów można poczekać przed impulsem obracającym wokół osi y). Zaraz po wytworzeniu stanu z rysunku (c) zaczyna się zliczać takty tzw. lokalnego oscylatora, czyli urządzenia, które niefizyk nazwałby po prostu zegarem. To urządzenie ma w sobie układy elektryczne, w których znajdują się kryształy. Drgania tych kryształów, o okresach rzędu nawet pikosekund, przekładają się na sygnały elektryczne wewnątrz obwodów. Częstość drgań można dodatkowo zmieniać. To urządzenie „kontaktuje” się z satelitami, aby uaktualniać bieżący czas. W momencie kiedy lokalny oscylator, czyli np. drgający kryształ w obwodzie elektrycznym, wykonał tyle taktów, że spodziewamy się, iż stan atomu cezu obrócił się o jedną czwartą pełnego obrotu wokół osi z , następuje strzał impulsem laserowym w atomy, który powoduje obrót stanu cezu wokół osi y . Zgodnie z tym, co napisaliśmy wyżej, oczekuje się, że w tym momencie połowa atomów będzie w stanie $F = 4$. Prawie nigdy nie jest to jednak dokładnie połowa atomów. Wtedy automatycznie, dzięki tzw. pętli sprzężenia zwrotnego, częstość drgań kryształu jest odpowiednio korygowana. To wpływa z kolei na częstość światła używanego do wykonywania obrotów wokół osi y . Przez szereg sprzężeń dąży się do tego, żeby częstość drgań lokalnego oscylatora była najczęściej, jak to możliwe, dopasowywana do częstości wzorcowej określonej w definicji sekundy.

Cały eksperyment jest w istocie dość skomplikowany i samo przygotowanie atomów w stanie z rysunku (c) może trwać kilkanaście minut. Najwięcej czasu potrzeba na schłodzenie atomów do takich temperatur, żeby można było zaniedbać ich ruch i skupić się tylko na ich stanach wewnętrznych, $F = 3$ i $F = 4$.

Obecnie w pomiarach wykorzystuje się chmury gazu, w których każdy atom jest przygotowany w stanie z rysunku (c). Okazuje się, że jeśli przygotować całą chmurę N atomów tak, że stany atomów są ze sobą skorelowane, np. stan superpozycji: (wszystkie atomy w stanie $F = 3$) + (wszystkie atomy w stanie $F = 4$), to dokładność można poprawić \sqrt{N} razy, zbliżając się do fundamentalnych ograniczeń wynikających z zasady nieoznaczoności Heisenberga.

Gdy wreszcie jesteśmy pewni, że zegar działa poprawnie, można go użyć do pomiaru sekundy. Zawsze jednak pomiar jest obarczony niepewnością. Żeby uzgodnić, ile sekunda trwa, wyniki z najważniejszych zegarów atomowych są wysyłane do satelity, na którym dochodzi do uśredniania wskazań z różnych laboratoriów. Nową sekundę wykorzystuje się przez pewien czas do aktualizowania czasu globalnego. Notabene, robi się to wstecz, żeby obliczyć, jaki był czas kilka dni wcześniej.

Okazuje się, że czas globalny, bazujący na zegarach atomowych, różni się od wskazań starszych typów zegarów, opartych na obrocie Ziemi. Chcemy, żeby te dwa typy zegarów też były dość zgodne, bo o ile „czas atomowy” jest dokładniejszy, o tyle „ziemski” jest bardziej naturalny. Co kilka lat synchronizuje się oba systemy pomiaru czasu przez dodanie sekundy przestępnej do zegara atomowego. Dokładnie tak, jak dodaje się czasami dzień przestępny, 29 lutego. W ten sposób unikamy tego, że za kilkaset lat nasz zegarek zsynchronizowany z zegarem atomowym wskaże północ, mimo że Słońce będzie wysoko na niebie, jako że na zegarze ziemskim byłoby południe.

Delta i fizyka cząstek elementarnych (VI): Od LEP-u do LHC: fizyka zapachu i naruszenie CP

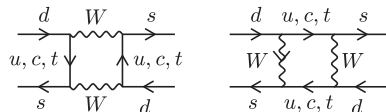
Piotr CHANKOWSKI*

Czysta chromodynamika przewiduje (jak się przyjmuje, bo obliczyć tego się jeszcze nie daje) istnienie dwóch cząstek, $K^0 (= d\bar{s})$ i $\bar{K}^0 (= \bar{d}s)$, o takich samych masach i dziwnościach $+1$ i -1 . Dziwność nie jest jednak zachowywana przez oddziaływania słabe, co powoduje, że fizycznymi cząstkami są nie K^0 i \bar{K}^0 , lecz ich pewne mieszanki K_L i K_S – długo- i krótkożyłowe neutralne kaony. Gdyby pominąć łamanie CP, tymi fizycznymi mezonami byłyby cząstki o dobrze określonych wartościach CP. Przy zamianie cząstek na antycząstki i odwrotnie kombinacja

$K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 + \bar{K}^0)$ zmienia znak, ma więc CP = -1, zaś kombinacja

$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0 - \bar{K}^0)$ pozostaje

niezmieniona, ma więc CP = +1. Na dwa mezony π , które razem mają CP = +1, mógłby się więc rozpadać tylko K_1 , a K_2 – tylko na trzy mezony π mające CP = -1 i znacznie mniejszą objętość dostępnej przestrzeni fazowej stanu trzech π tłumaczy wtedy (zob. odcinek I), dlaczego K_2 żyje dużo dłużej niż K_1 . Łamanie CP komplikuje powyższą analizę: $K_L \propto K_2 + \varepsilon K_1$, $K_S \propto K_1 - \varepsilon K_2$, gdzie ε jest liczbą zespoloną o małym module. Są wówczas możliwe dwa sposoby zajścia niezachowującego CP rozpadu mezonu K_L na dwa mezony π : albo rozpadowi może ulec składowa K_1 mezonu K_L (ten efekt mierzy parametr ε), albo na dwa mezony π rozpaść się może bezpośrednio składowa K_2 (ten efekt jest mierzony parametrem ε').



Diagramy Modelu Standardowego odpowiedzialne za mieszanie $K^0 - \bar{K}^0$. Wartość otrzymywanej z nich amplitudy silnie redukuje opisany w odcinku III mechanizm GIM. Podobny jest mechanizm mieszania mezonów $D^0 - \bar{D}^0$ i $B^0 - \bar{B}^0$. W tym ostatnim przypadku dominujący przyczynę do amplitudy mieszania daje kwark t , co pozwoliło wnioskować o wartości jego masy jeszcze przed bezpośrednim odkryciem (odcinek IV).

Unitarność macierzy CKM koreluje przewidywania Modelu Standardowego dla procesów rzadkich i tych, w których niezachowywane jest CP. W szczególności sprawia ona, że o niezerowej wartości kąta δ (czyli o łamaniu symetrii CP) można wnioskować także na podstawie samych wartości bezwzględnych elementów macierzy CKM wyznaczonych z procesów, w których CP jest zachowywane.

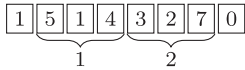
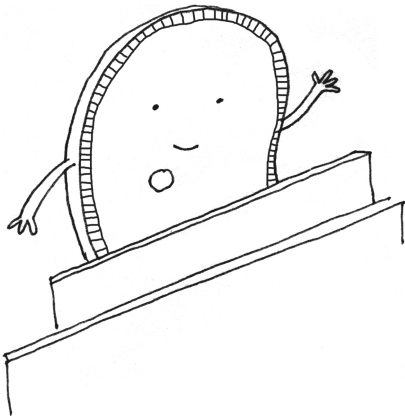
Nawet po odkryciu trzeciej rodziny fermionów (kwarków b i t , leptonu τ i neutrino ν_τ) otwarte pozostawało pytanie, czy słuszna jest propozycja Kobayashiego i Maskawy opisana w odcinku III, według której za niezachowanie symetrii CP, zamieniającej cząstki na ich antycząstki, odpowiada tylko jeden parametr – wspomniany w odcinku I kąt δ . Jeszcze przed powstaniem Modelu Standardowego wysunięta została hipoteza, że za niezachowanie CP jest odpowiedzialne nie oddziaływanie słabe, lecz jakieś inne, jeszcze słabsze oddziaływanie, które zawsze zmienia dziwność hadronu o dwie jednostki. Według tej propozycji rozpad $K_L \rightarrow \pi\pi$ zachodziłby tylko poprzez mieszanie się mezonów K^0 i \bar{K}^0 opisywane parametrem ε . Model Standardowy uwzględniający propozycję Kobayashiego i Maskawy przewiduje natomiast, że za rozpad ten odpowiedzialne są dwa mechanizmy: łamanie CP w mieszanii i łamanie bezpośrednie opisywane parametrem ε' . Rozstrzygnięcie tej kontrowersji wymagało zmierzenia ε'/ε . Sytuacja była niepewna aż do końca XX wieku, gdyż dwa eksperymenty, NA31 w CERN-ie i E731 w Fermilabie, dawały sprzeczne wyniki, przy czym wynik drugiej grupy był w granicach błędu zgodny z $\varepsilon' = 0$. Dopiero w roku 1999 nowe eksperymenty, NA48 w CERN-ie i KTeV w Fermilabie, zgodnie potwierdziły niezerową wartość ε' . Co więcej, rachunki teoretyczne pokazują, że Model Standardowy przewiduje wartość $\text{Re}(\varepsilon'/\varepsilon)$ zgodną z danymi.

Póki znane były tylko trzy kwarki u , d i s , fizyka zapachu była z konieczności ograniczona do badania procesów, w których zmiana ulega dziwność, a najciekawszymi cząstkami pod tym względem były neutralne kaony, gdyż tylko w ich rozpadach i mieszanii obserwowane były efekty łamania symetrii CP (Δ_{89}^4 , Δ_{99}^4). Opisane w odcinku IV odkrycie cięższych kwarków c i b i w końcu kwarka t otworzyło przed badaniami nowe obszary (ponieważ rodzaje kwarków nazywa się zapachami, ten dział fizyki nazywa się zachęcająco „fizyką ciężkich zapachów”). Ważnym polem badań zarówno doświadczalnych, jak i teoretycznych stało się wyznaczanie elementów macierzy CKM z rozpadów, w których zapach kwarka ulega zmianie wskutek wymiany jednego wirtualnego bozonu W , który przechodzi później w parę leptonów (pozwala to wyznaczać tylko wartości bezwzględne elementów macierzy CKM) i następnie sprawdzanie, czy procesy rzadkie, w tym także te, w których niezachowane jest CP, są poprawnie opisane przez Model Standardowy. Ponieważ procesom rzadkim odpowiadają tylko diagramy z zamkniętymi pętlami, ich amplitudy mogłyby łatwo być modyfikowane przez dodatkowe pętle, których linie odpowiadają cząstkom spoza Modelu Standardowego. W związku z tym bardzo poważnie liczone na to, że właśnie w fizyce ciężkich zapachów i naruszenia CP odkryte zostaną odstępstwa od przewidywań tej teorii objawiające się niezgodnościami przy wyznaczaniu elementów macierzy CKM z kombinacji danych dotyczących różnych procesów.

W XXI wieku dzięki uruchomieniu w SLAC (USA) i KEK (Japonia) eksperymentów BaBar i BELLE, czyli akceleratorów stanowiących „fabryki” mezonów B , udało się przeprowadzić dokładne pomiary wielu słabych rozpadów tych cząstek, w tym także rozpadów niezachowujących CP. Zmierzono zarówno efekty bezpośredniego łamania symetrii CP, jak też i efekty łamania CP zachodzącego przez mieszanie mezonów B^0 i \bar{B}^0 (Δ_{01}^{11} , Δ_{02}^{12}), analogiczne do mieszania neutralnych kaonów. W odróżnieniu od efektów łamania CP w rozpadach kaonów (Δ_{89}^4), które są bardzo małe (na poziomie 10^{-3} , a więc występują w jednym rozpadzie na tysiąc), w przypadku rozpadów mezonów B efekty takie są rzędu od 0,1 do 1. W tych przypadkach, w których udaje się przeprowadzić wystarczająco dokładne rachunki (np. dla $B^0 \rightarrow J/\psi K_S$), przewidywania Modelu Standardowego są zgodne z danymi (Δ_{02}^{12}). Badanie procesów, w których CP nie jest zachowywane, jest obecnie z powodzeniem kontynuowane przez eksperyment LHCb przy LHC. W szczególności udało się tam po raz pierwszy zaobserwować efekty bezpośredniego łamania CP w rozpadach zawierających kwark c lub \bar{c} mezonów powabnych D (Δ_{12}^4).

Mimo iż najczęściej rozpatrywane uogólnienia Modelu Standardowego (zwłaszcza teorie supersymetryczne) przewidywały, że efekty „nowej fizyki” powinny najwyraźniej przejawiać się w oddziaływaniach najcięższych kwarków (b i t), do dziś nie zarejestrowano tu żadnych przekonujących (w sensie statystycznej istotności) odstępstw od przewidywań Modelu Standardowego.

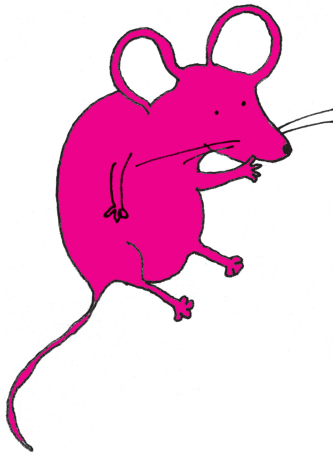
*Wydział Fizyki,
Uniwersytet Warszawski



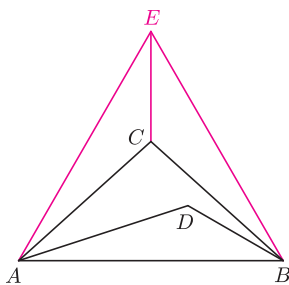
Dla $k = 2$ oraz tablicy

$$a = [1, 5, 1, 4, 3, 2, 7, 0]$$

poprawnym wynikiem jest 14. Jeden kot może pilnować fragmentu korytarza na metrach od 2 do 4 (łapiąc 6 z 10 myszy), a drugi może pilnować fragmentu na metrach od 5 do 7 (łapiąc 8 z 12 myszy).



Rozwiązanie zadania M 1497.



Zbudujmy taki trójkąt równoboczny ABE , że punkt C leży w jego wnętrzu. Wówczas punkty C i E leżą na symetralnej odcinka AB , więc $\sphericalangle AEC = 30^\circ$. Ponadto

$$\begin{aligned} \sphericalangle CAE &= 60^\circ - \sphericalangle CAB = \\ &= 60^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ACB) = 18^\circ. \end{aligned}$$

W takim razie trójkąty ADB i ACE są przystające, w szczególności $AC = AD$. Stąd łatwo otrzymujemy

$$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CAD) = 78^\circ.$$

Informatyczny kącik olimpijski (94): Myszy

Tym razem zajmiemy się zadaniem, które pojawiło się na kolokwium dla studentów pierwszego roku informatyki na Uniwersytecie Warszawskim. W korytarzu harcują myszy. Korytarz ma długość n metrów. Dana jest tablica n nieujemnych liczb całkowitych $a[i]$ opisująca, gdzie jest ile myszy: dla $1 \leq i \leq n$ na i -tym metrze korytarza (patrząc od strony wejścia) jest $a[i]$ myszy. Dysponujesz k kotami ($k \leq n$). Twoim zadaniem jest takie rozmieszczenie kotów w korytarzu, żeby złapały jak najwięcej myszy. Każdy kot może pilnować ustalonego przez Ciebie spójnego fragmentu korytarza (na przykład, może mieć założoną smycz odpowiedniej długości, przymocowaną do podłogi pośrodku pilnowanego fragmentu korytarza). Fragmenty korytarza pilnowane przez różne koty nie mogą zachodzić na siebie (żeby koty się nie pobiły, a smycze nie poplątały), choć mogą się stykać. Niektóre fragmenty korytarza mogą pozostać niepilnowane przez żadnego kota. Kot, który pilnuje fragmentu od i -tego do j -tego metra włącznie (dla $i \leq j$), na którym znajduje się $s = a[i] + a[i+1] + \dots + a[j]$ myszy, złapie: $\max(s - (j - i)^2, 0)$ myszy. Należy wyznaczyć maksymalną liczbę myszy, jakie mogą złapać koty (patrz rysunek).

Obojętnie, jak zabierzemy się za to zadanie, przyda się nam tablica sum prefiksowych: $s[j] = \sum_{1 \leq i \leq j} a[i]$. Wtedy liczba myszy na fragmencie $[i, j]$ przedstawia się jako $s[j] - s[i - 1]$.

Omawiane zadanie to zadanie na programowanie dynamiczne. Niech $d[j, l]$ oznacza maksymalną liczbę myszy, jakie może złapać l kotów na pierwszych j metrach korytarza. Ponieważ niektóre fragmenty mogą być niepilnowane, więc rekurencję budujemy, rozpatrując dwa przypadki: albo j -ty metr nie jest pilnowany, albo jest i l -ty kot pilnuje fragmentu $[i, j]$ (od i -tego do j -tego metra włącznie):

$$(*) \quad d[j, l] = \max\left(d[j - 1, l], \max_{0 \leq i \leq j} (d[i - 1, l - 1] + s[j] - s[i - 1] - (j - i)^2)\right).$$

Podstawowa implementacja zadziała w czasie $O(n^2k)$. Takie było oczekiwane rozwiązanie na kolokwium, niemniej jednak okazało się, że można to zrobić lepiej (ach, ci studenci). Aby przyspieszyć rozwiązanie, należy w odpowiedniej kolejności wypełniać tablicę d . Główna pętla powinna przebiegać po l . Ustalmy l i założmy, że mamy obliczone wartości $d[j, l - 1]$ dla wszystkich j . Będziemy teraz obliczać element $d[j, l]$. Kluczem do usprawnienia rozwiązania jest porównanie możliwych dwóch ustawień l -tego kota, mianowicie gdy patroluje on fragment $[i_1, j]$ lub fragment $[i_2, j]$, gdzie $i_1 < i_2$. Drugie ustawienie jest lepsze od pierwszego, jeśli:

$$d[i_1 - 1, l - 1] + s[j] - s[i_1 - 1] - (j - i_1)^2 < d[i_2 - 1, l - 1] + s[j] - s[i_2 - 1] - (j - i_2)^2.$$

Po przekształceniu nierówność przyjmie postać:

$$(**) \quad j > (d[i_1 - 1, l - 1] - d[i_2 - 1, l - 1] - s[i_1 - 1] + s[i_2 - 1] - i_1^2 + i_2^2) / (2(i_2 - i_1)).$$

Prawa strona nierówności $(**)$ zależy tylko od i_1 i i_2 (oraz od l); oznaczmy ją przez $p(i_1, i_2)$. Widzimy, że pierwsze ustawienie jest lepsze dla j mniejszych od $p(i_1, i_2)$, po czym, począwszy od $\lceil p(i_1, i_2) \rceil$, lepsze staje się drugie ustawienie. Ta obserwacja umożliwia przeglądanie możliwych ustawień l -tego kota w sposób bardziej uporządkowany tak, że na bieżąco eliminujemy takie ustawienia, które są już od pewnych j gorsze. Trzymamy kolejkę dwukierunkową początków fragmentów $1 \leq i_1 < \dots < i_m < j$, taką że

$$j < \lceil p(i_1, i_2) \rceil < \lceil p(i_2, i_3) \rceil < \dots < \lceil p(i_{m-1}, i_m) \rceil.$$

Innymi słowy, dla odpowiednio małych j najlepiej przydzielać l -temu kotu fragment $[i_1, j]$, gdy j osiągnie $\lceil p(i_1, i_2) \rceil$ – fragment $[i_2, j]$, i tak dalej aż do $j \geq \lceil p(i_{m-1}, i_m) \rceil$, gdzie optymalny przydział to $[i_m, j]$. Przetwarzanie j -tego metra korytarza składa się z następujących kroków:

1. Jeżeli kolejka ma co najmniej dwa elementy oraz $j \geq \lceil p(i_1, i_2) \rceil$, to usuwamy z przodu kolejki i_1 , gdyż od tego momentu lepsze będą fragmenty o początku i_2 .
2. Jeżeli kolejka ma wciąż co najmniej dwa elementy, to sprawdzamy, czy $\lceil p(i_{m-1}, i_m) \rceil \geq \lceil p(i_m, j) \rceil$. Jeżeli tak, to fragmenty o początku i_m są zdominowane przez fragmenty o początkach i_{m-1} lub j , usuwamy więc i_m z końca kolejki i powtarzamy krok 2.
3. Dodajemy j na koniec kolejki.
4. Obliczamy $d[j, l]$, korzystając ze wzoru $(*)$, ale możemy to już teraz zrobić w czasie $O(1)$, gdyż wiemy, że maksimum jest osiągnięte przy $i = i_1$, gdzie i_1 jest aktualnym elementem z przodu kolejki.

W ten sposób otrzymaliśmy rozwiązanie o złożoności czasowej $O(nk)$.

Jakub PAWLEWICZ

Bitcoin: złoto XXI wieku

Łukasz MAZUREK*



Przelew bitcoinów w dowolne miejsce na świecie kosztuje około 20 gr, zajmuje około 10 minut i nie wymaga zakładania żadnego konta. Bitcoin można łatwo kupić na giełdach, a nawet gdziekolwiek w bankomatach. Można je też *wydobyć* jako *górnika*.

Skąd się bierze wartość pojedynczego bitcoina? Terminy *wydobywanie* i *górnika* (używane w dalszej części artykułu) sugerują podobieństwo do złota. Podobnie jak w przypadku tego szlachetnego kruszcu bitcoiny trudno się wydobywa, a ich zasoby na świecie są ograniczone. Te cechy zupełnie wystarczają – z punktu widzenia ekonomii – do umówienia się, że Bitcoin jest pełnoprawnym środkiem płatniczym. (Choć tak naprawdę odzwierciedla on nic więcej, jak tylko dowód na wykonanie pewnej znacznej pracy obliczeniowej.)

Wbrew powszechnej opinii użytkownicy Bitcoina nie są anonimowi. Wręcz przeciwnie! Ten system jest w pełni transparentny – każdy ma wgląd w historię wszystkich transakcji i może dokładnie prześledzić przepływ gotówki w sieci.

Wraz z opublikowaniem nowego bloku w sieci pojawia się 12,5 nowych bitcoinów przeznaczonych na nagrodę dla górnika, który go wydobyl (ta kwota maleje dwukrotnie co około 3 lata, przez co łączna ilość bitcoinów jest ograniczona). Poza tą nagrodą zwycięzca otrzymuje również wszystkie opłaty transakcyjne z tego bloku, co stanowi motywację, aby górnicy uwzględniali w swoich blokach wszystkie transakcje krążące po sieci, a nie publikowali np. bloków z pustą listą transakcji.

Czym jest Bitcoin? Najkrótsza odpowiedź na to pytanie brzmi: *kryptowalutą*. Ale nie w takim sensie *krypto-*, jak w słowie *kryptoreklama*. Pierwszy człon tego terminu pochodzi od kryptologii, czyli nauki kojarzącej nam się głównie z szyframi i maszyną szyfrującą Enigma używaną przez Niemców podczas wojny. To właśnie twierdzenia i konstrukcje z tej dziedziny stoją za funkcjonowaniem i bezpieczeństwem Bitcoina.

Pomysły na wprowadzenie cyfrowej alternatywy dla tradycyjnych walut sięgają lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku. Jednak dopiero w 2009 roku Satoshiemu Nakamoto udało się stworzyć system, który przyciągnął miliony użytkowników wykonujących dziennie 100 000 transakcji o łącznej wartości przekraczającej 100 milionów dolarów. Co takiego zdecydowało o tym, że zaufaliśmy Bitcoinowi? Czy naprawdę potrzebowaliśmy kryptowaluty? Przecież bezpieczeństwo tradycyjnych systemów bankowych też opiera się na kryptologii – ze stroną internetową banku łączymy się połączeniem szyfrowanym, dostęp do konta jest zabezpieczony hasłem, karty płatnicze mają chip, który uniemożliwia ich skopiowanie. . . Czyż nasze pieniądze nie są bezpieczne? Oczywiście, że są. Pod warunkiem, że bank nie postanowi np. zabrać nam części oszczędności lub ograniczyć możliwości wypłaty, jak to niedawno miało miejsce w wyniku kryzysu na Cyprze i w Grecji. Gdyby walutą obowiązującą w tych krajach był bitcoin, do takich sytuacji nie mogłoby dojść. O sukcesie Bitcoina zdecydowało wcale nie to, że transakcje są tanie i szybkie, ale przede wszystkim to, że jest to pierwsza waluta całkowicie zdecentralizowana, tj. pozbawiona centralnego emitenta, który mógłby np. dodrukowywać pieniądze, kontrolować nasze konta, czy w inny sposób wpływać na działanie systemu.

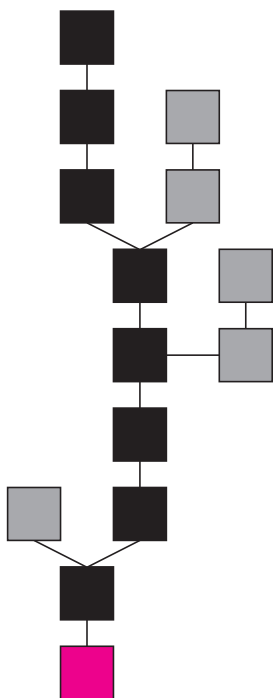
Skoro nikt tego interesu nie pilnuje, to jakim cudem to wszystko działa i do tego jeszcze jest bezpieczne? Otóż to nie jest do końca tak, że Bitcoina nikt nie kontroluje. Należałoby raczej powiedzieć, że Bitcoina kontrolują wszyscy użytkownicy (dokładniej: wszyscy użytkownicy, którzy są *górnikami*, ale o tym za chwilę). I właśnie to rozproszenie odpowiedzialności pomiędzy użytkowników sprawia, że możemy czuć się bezpiecznie. Upraszczając sprawę, można powiedzieć, że aby z Bitcoinem stało się coś złego, musiałaby się zmówić ponad połowa jego użytkowników. Na szczęście taki scenariusz wydaje się mało prawdopodobny – większość z nich ma swój interes w tym, aby system działał prawidłowo.

Jak dokładnie działa Bitcoin? Spróbujmy odtworzyć rozumowanie Satoshiego Nakamoto, które doprowadziło go do skonstruowania tego systemu.

W cyfrowej walucie posiadanie pieniędzy odzwierciedlone jest przez znajomość pewnego ciągu zer i jedynek. Taki ciąg można łatwo skopiować – jak więc zapobiec sytuacji, w której pewna moneta zostałaby wydana dwa razy? W Bitcoinie problem ten jest rozwiązany przez jedną powszechnie dostępną księgę transakcyjną, w której zapisane są kolejno wszystkie transakcje, które zostały wykonane od początku istnienia systemu. I tu dochodzimy do sedna, czyli do pytania, jak utrzymać funkcjonowanie takiej księgi, nie powołując w tym celu centralnej instytucji za to odpowiedzialnej? Tym właśnie zajmują się *górnicy*.

Aby zostać górnikiem, wystarczy mieć komputer z wystarczającą ilością miejsca na przechowanie lokalnej kopii księgi transakcyjnej. Księga ta ma strukturę *łańcucha bloków* i aktualnie składa się z około 400 000 bloków transakcji i zajmuje około 60 GB. Wydobywanie bitcoinów polega na rozwiązywaniu pewnej zagadki matematycznej związanej z transakcjami, które pojawiły się w sieci od czasu opublikowania ostatniego bloku. Na tego, kto pierwszy rozwiąże zagadkę, czeka niemała nagroda – w latach 2016–2019 ma ona wynosić 12,5 bitcoina, czyli około 20 000 zł. Aby odebrać nagrodę, zwycięzca *publikuje wydobyty blok*, tzn. rozsyła do całej sieci nowy blok zawierający: rozwiązanie

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Zgodnie z protokołem Bitcoina parametr m jest co dwa tygodnie dostosowywany do aktualnej łącznej mocy obliczeniowej wszystkich górników, tak aby wydobycie nowego bloku zajmowało całej sieci średnio około 10 minut.



Rozwiązanie zadania F 906.

Bańkę stanowi sferyczna, cienka błonka wody z mydłem. Błonka ta ma dwie powierzchnie – wewnętrzną i zewnętrzną. Zaniedbując grubość błonki i przyjmując, że promienie obu sfer są jednakowe, znajdujemy ich całkowitą powierzchnię $S = 2 \cdot 4\pi R^2 = 8\pi R^2$. Biorąc pod uwagę, że przed powstaniem bańki powierzchnia wody mydlanej, z której bańka powstała, była zanedbywalnie mała, można przyjąć, że powyższy wzór wyraża zmianę (przyrost) powierzchni wody mydlanej. Powiększenie powierzchni cieczy o ΔS wiąże się ze wzrostem energii powierzchniowej o ΔE , zgodnie ze wzorem $\Delta E = \sigma \cdot \Delta S$. Wykonywana przy nadmuchiowaniu bańki praca jest zużywana właśnie na powiększenie energii powierzchniowej, czyli $A = 8\pi R^2 \sigma$. Podstawiając wartości, otrzymujemy $A = 2,5 \cdot 10^{-3}$ J, czyli 2,5 mJ.

zagadki, listę nowych transakcji w sieci oraz specjalną transakcję przelewającą wydobyte bitcoiny na swoje konto. Następnie każdy z górników sprawdza, czy rozwiązanie zagadki podane przez zwycięzcę jest prawidłowe, po czym wydłuża swoją kopię łańcucha bloków o blok zwycięzcy.

W tym momencie uważnego Czytelnika może zaniepokoić założenie, że wszyscy górnicy bezwarunkowo akceptują nowy blok (o ile tylko zwycięzca nie oszukał z rozwiązaniem zagadki) i tym samym akceptują wypłatę nagrody dla zwycięzcy. Nietrudno wyobrazić sobie złośliwego górnika, który nie zamierza godzić się z wypłatą nagrody komu innemu. Taki górnik może postanowić, że nie uzna ostatniego wydobytego bloku i będzie kontynuował rozwiązywanie starej zagadki, tj. będzie próbował dobudować swój blok do przedostatniego bloku z łańcucha uznawanego przez resztę sieci i tym samym doprowadzić do rozgałęzienia łańcucha. Jednak w Bitcoinie nie mogą istnieć równoległe dwie wersje wydarzeń – w przypadku rozgałęzienia łańcucha za poprawną uznawana jest zawsze dłuższa z gałęzi. Zatem, aby złośliwy górnik mógł wykorzystać nagrodę za swój blok, musiałby sam zbudować dłuższy łańcuch niż cała reszta uczciwych górników pracujących razem. Dlatego na początku artykułu pisałem, że *musiałaby się zmówić ponad połowa użytkowników*. Z tego względu każdemu górnikowi opłaca się akceptować wszystkie bloki publikowane przez konkurencję i zawsze pracować na najdłuższym znanym łańcuchu.

Zagadka, którą rozwiązują górnicy, brzmi następująco:

*Mając dane: B – ostatni opublikowany blok oraz L – listę transakcji, które pojawiły się w sieci od czasu opublikowania bloku B , znajdź takie x , że $H(B, L, x) < 2^m$, gdzie H to pewna (znana) funkcja haszująca, która zwraca wartość całkowitą z przedziału $[0, 2^n - 1]$ z rozkładem jednostajnym, a m to pewna liczba mniejsza od n zwana **trudnością**.*

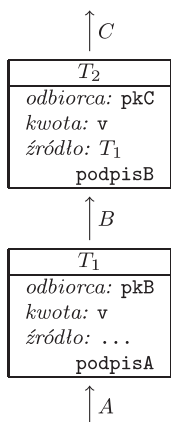
Funkcja H zachowuje się losowo – górnicy sprawdzają więc kolejno różne wartości x w nadziei, że trafią na wynik funkcji mniejszy niż 2^m . Zauważmy, że im mniejsze m , tym zagadka jest trudniejsza (prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie wynosi $2^m/2^n$), dlatego zmieniając m , można regulować czas, jaki jest potrzebny, aby ktoś w sieci ją rozwiązał. Wygląda na łatwy sposób zarobienia pieniędzy? Nasz komputer coś sobie liczy – tak naprawdę rzuca kostką i sprawdza, czy trafił – i jak trafi, to wygrywa. 20 000 zł do wygrania co 10 minut, taka loteria. Trzeba jednak pamiętać, że moc obliczeniowa zwykłego komputera jest około 10^{11} razy mniejsza niż moc całej sieci Bitcoina, więc szansa, że to akurat my wydobydziemy najbliższy blok, jest niesłychanie mała. Dlatego do wydobywania bitcoinów wykorzystuje się specjalnie do tego celu stworzone urządzenia, tzw. *koparki bitcoinów*, które osiągnęły o wiele większą moc obliczeniową od zwykłych komputerów. Poza tym górnicy łączą swoje siły, pracując w *kopalniach* – wspólnie rozwiązują tę samą zagadkę, a ewentualną wygraną dzielą się proporcjonalnie do swojego wkładu w wykonaną pracę.

Jaki to ma związek z kryptologią? Rolę funkcji H pełni w Bitcoinie znana funkcja haszująca SHA-256. Kryptolodzy wierzą (choć nikt tego nie udowodnił), że funkcja ta zachowuje się na tyle losowo, że nie jesteśmy w stanie przewidzieć, dla jakich argumentów jej wartość będzie mniejsza od 2^m , a dla jakich większa. Nawet znajomość wartości tej funkcji obliczonych wcześniej dla milionów różnych argumentów w żaden sposób nie ułatwia nam odpowiedzi na pytanie, jaka będzie wartość dla kolejnego argumentu. Dlatego wierzymy, że nie ma *sprytniejszych* użytkowników, którzy by lepiej zgadywali rozwiązania zagadki, i prawdopodobieństwo wygranej jest zawsze proporcjonalne do ilości wykonanej pracy, bez względu na to, w jakiej kolejności testujemy kolejne wartości x .

Kolejnym elementem Bitcoina, w którym nie obyłyby się bez kryptologii, są transakcje. Transakcja w Bitcoinie pełni rolę przelewu kwoty v między użytkownikami A i B . Spodziewalibyśmy się więc, że opis transakcji będzie wyglądał mniej więcej tak: $\{\text{nadawca: } A, \text{ odbiorca: } B, \text{ kwota: } v\}$.

W rzeczywistości sytuacja jest trochę bardziej skomplikowana – każdy użytkownik posiada swój tajny klucz prywatny oraz odpowiadający mu klucz

Jedyne dane powiązane z użytkownikiem Bitcoina to jego identyfikator – losowo wyglądający ciąg 34 liter i cyfr. Dlatego często mówi się o anonimowości Bitcoina, choć lepszym określeniem byłaby *pseudonimowość* – użytkownicy występują pod pseudonimami, nikt nie zna ich prawdziwych danych osobowych, jednak ich zachowanie jest w pełni jawne.



Rozwiązanie zadania M 1496.
Zauważmy, że każda z liczb $1, \dots, 2016$ jest wielokrotnością co najwyżej jednej z liczb a_1, \dots, a_n . Jednocześnie wśród liczb $1, \dots, 2016$ dokładnie $\lfloor \frac{2016}{a_i} \rfloor$ jest wielokrotnością liczby a_i . Stąd otrzymujemy

$$\left\lfloor \frac{2016}{a_1} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2016}{a_n} \right\rfloor \leq 2016.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby x prawdziwa jest nierówność $x - 1 < \lfloor x \rfloor$, więc

$$\left(\frac{2016}{a_1} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{2016}{a_n} - 1 \right) < 2016.$$

Dzieląc obie strony nierówności przez 2016 i przenosząc część wyrazów na prawą stronę, otrzymujemy tezę.

publiczny, który jednocześnie pełni rolę identyfikatora użytkownika. Są to klucze systemu cyfrowego podpisu ECDSA, który jest wykorzystywany do podpisywania i weryfikowania transakcji. I tak oto w miejsce odbiorcy mamy *klucz publiczny* odbiorcy pkB , a zamiast nadawcy mamy *źródło* wskazujące na inną transakcję, z której pochodzą środki nadawcy. Dodatkowo każda transakcja jest podpisana przez nadawcę (*podpisA*) przy użyciu jego klucza prywatnego.

Aby to sobie zobrazować, o Bitcoinie należy myśleć jak o sieci, w której transakcje stanowią węzły, a użytkownicy to połączenia pomiędzy nimi, nie na odwrót. Aby użytkownik B mógł zapłacić użytkownikowi C kwotę v , w sieci musi istnieć (niewydana) transakcja T_1 o kwocie v zaadresowana do B . Jeśli tylko taka transakcja istnieje, B może ją wydać, tworząc transakcję T_2 , wpisując pkC (klucz publiczny użytkownika C) w pole odbiorcy i podpisując ją swoim podpisem. Taka transakcja jest następnie wysyłana do górników, którzy ją weryfikują, sprawdzając, czy *podpisB* na transakcji T_2 odpowiada kluczowi publicznemu pkB na transakcji T_1 . Bezpieczeństwo algorytmu ECDSA gwarantuje nam, że transakcja zaadresowana do B nie zostanie wydana przez nikogo innego niż on sam.

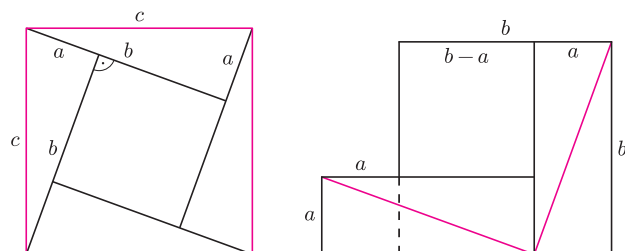
Oczywiście, gdyby przedstawiony przeze mnie powyżej uproszczony opis był w pełni zgodny z rzeczywistością, Bitcoin byłby niesłychanie niepraktyczny – wszystkie transakcje musiałyby mieć tę samą wartość (jaką?). W rzeczywistości bitcoiny można w prosty sposób rozmieniać – każda transakcja może mieć kilku odbiorców i dzielić swoją wartość w dowolny sposób pomiędzy nich. Zatem chcąc wysłać użytkownikowi C tylko część kwoty v , użytkownik B może podać samego siebie jako drugiego odbiorcę transakcji T_2 i w ten sposób wziąć sobie resztę. Kwoty z mniejszych transakcji można też łączyć w większe, używając transakcji z kilkoma źródłami i w ten sposób wydać naraz kilka spośród swoich transakcji. Użytkownicy mogą więc tworzyć transakcje o dowolnej wartości, a majątność użytkownika określona jest przez sumę niewydatych i zaadresowanych do niego transakcji w sieci.

Z powyższego opisu można by wywnioskować, że Bitcoin służy jedynie do przelewania pieniędzy z jednego konta na drugie. Tymczasem jego możliwości są o wiele większe! Zamiast odbiorcy każda transakcja może mieć w sobie warunek (napisany w specjalnym języku programowania), który musi być spełniony, aby transakcja była poprawna. Można np. opublikować transakcję, którą może wydać pierwszy użytkownik, który poda rozkład na czynniki pierwsze jakiejś dużej liczby i w ten sposób stworzyć konkurs, który sam się rozstrzyga i sam wręcza nagrody. Można też o wiele więcej, ale to już temat na osobny artykuł.

Kwadraty

Jarosław GÓRNICKI*

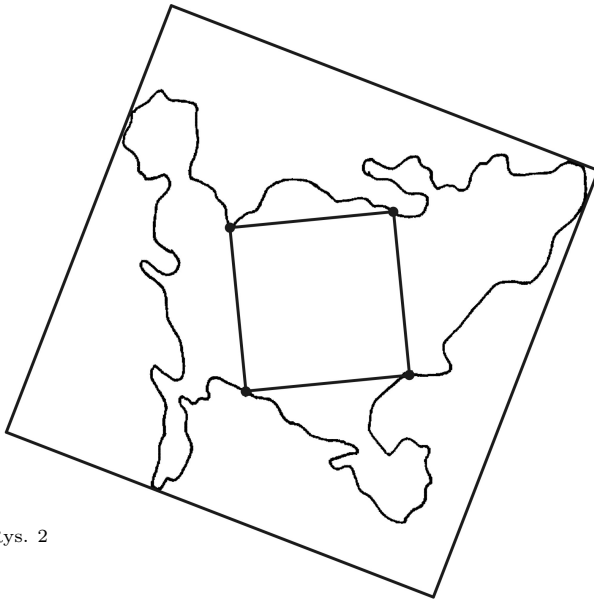
Euklides w *Elementach* pisał: „... kwadrat jest tym, co równoboczne i prostokątne...”. Oto kilka niebanalnych obserwacji, w których kwadrat jest jednym z bohaterów.



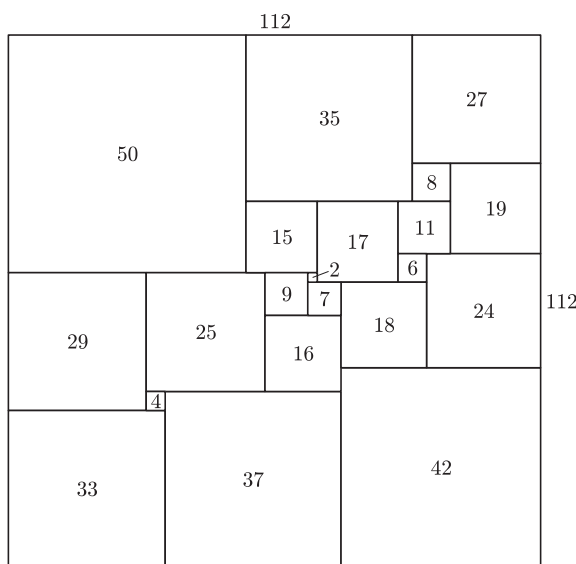
Rys. 1

- (1) Badanie związków miarowych w kwadracie doprowadziło Pitagorejczyków (między innymi Hippasusa z Metapontu, V w. p.n.e.) do odkrycia, że $\sqrt{2}$, czyli długość przekątnej kwadratu jednostkowego nie jest ułamkiem zwykłym, a w konsekwencji do wyróżnienia liczb niewymiernych.
- (2) Indyjski matematyk Bhāskara II (XII w.) w traktacie *Siddhānta Shiromani* (*Korona nauki*) podał dowód twierdzenia Pitagorasa w postaci rysunku 1 z napisem: Patrz!
- (3) Kwadrat jest ciągłym obrazem odcinka (G. Peano, 1890).

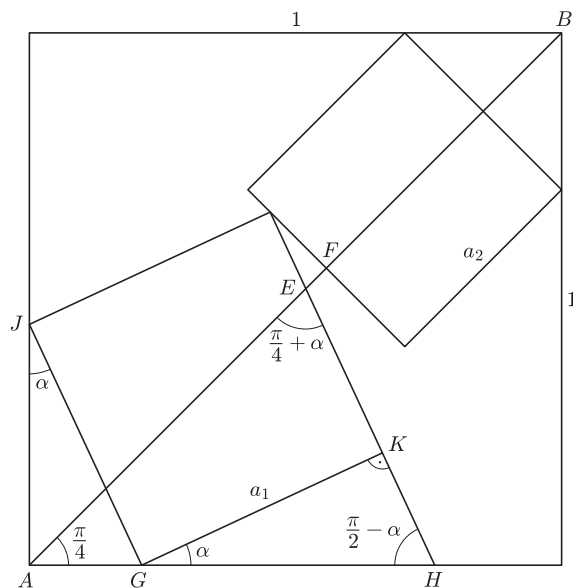
*Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

- (4) Wokół każdej figury (niekoniecznie wypukłej) można opisać kwadrat (rys. 2).
- (5) Na każdej płaskiej krzywej zamkniętej istnieją cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu (L. Sznirelman, 1929, rys. 2).
- (6) Rysunek 3 przedstawia jedyny podział kwadratu na najmniejszą możliwą (21) liczbę różnych kwadratów (A.J.W. Duijvestijn, 1978).

Z kwadratem związanych jest wiele pytań, na które nie znamy odpowiedzi. Prezentację kilku z nich poprzedzimy wykazaniem następującej obserwacji.

- (7) Jeżeli kwadraty o rozłącznych wnętrzach oraz bokach długości a_1, a_2 zawarte są w kwadracie jednostkowym, to $a_1 + a_2 \leq 1$.

Dowód. Przy oznaczeniach z rysunku 4 pokażemy, że $|AE| \geq a_1 \sqrt{2}$. Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkąta AEH ,

$$\frac{|AE|}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{|AH|}{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)},$$

gdzie

$$\begin{aligned} |AG| &= a_1 \sin \alpha \quad (\text{z } \triangle AGJ), \\ |GH| &= \frac{a_1}{\cos \alpha} \quad (\text{z } \triangle KGH), \\ |AH| &= |AG| + |GH| = a_1 \left(\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} |AE| &= a_1 \frac{(\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}) \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)} = \\ &= a_1 \sqrt{2} \frac{\sin \alpha \cos \alpha + 1}{\sin \alpha + \cos \alpha} \geq a_1 \sqrt{2}, \end{aligned}$$

gdyż dla $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$,

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \alpha + 1 - \sin \alpha - \cos \alpha &= \\ &= (1 - \cos \alpha)(1 - \sin \alpha) \geq 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &\leq \frac{|AE|}{\sqrt{2}} + \frac{|BF|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|AE| + |BF|) \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1. \end{aligned}$$

Ponadto istnieje wiele realizacji równości $a_1 + a_2 = 1$.

Rozważmy kwadrat jednostkowy, a w nim $n \geq 2$ kwadratów o rozłącznych wnętrzach i bokach długości a_1, a_2, \dots, a_n .

Problem. Jaka jest wartość funkcji $f(n) = \max \sum_{i=1}^n a_i$ dla poszczególnych wartości $n = 2, 3, \dots$?

Poza wybranymi przypadkami odpowiedzi na to pytanie nie znamy! Z przeprowadzonego rozumowania wiemy już, że $f(2) = 1$.

Obliczmy wartość $f(3)$. Niech a_1, a_2, a_3 będą długościami boków trzech kwadratów o rozłącznych wnętrzach zawartymi w kwadracie jednostkowym. Skoro

$$a_1 + a_2 \leq 1 \quad \text{i} \quad a_1 + a_3 \leq 1 \quad \text{i} \quad a_2 + a_3 \leq 1,$$

więc

$$a_1 + a_2 + a_3 \leq \frac{3}{2}.$$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	

Rys. 5

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Rys. 6

$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$
		$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Rys. 7

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Rys. 8

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

Rys. 9

Ponieważ kwadraty z rysunku 5 realizują równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$, więc $f(3) = \frac{3}{2}$.

Obliczając wartość $f(2^2)$, pokażemy rozumowanie ogólniejsze. Z nierówności Cauchy'ego:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right),$$

przy $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ mamy oszacowanie $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{n}$, czyli

$$(*) \quad f(n) \leq \sqrt{n}.$$

Wynik ten w połączeniu z podziałem kwadratu jednostkowego na $n = k^2$ przystających kwadratów zapewnia, że $f(k^2) = k$. Zatem,

$$f(2^2) = 2, \quad f(3^2) = 3, \quad f(4^2) = 4, \quad \text{itd.}$$

Pokażemy teraz oszacowanie funkcji $f(n)$ od dołu,

$$(**) \quad \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq f(n),$$

gdzie symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x .

Dowód. Zauważmy, że funkcja $f(n)$ jest niemalejąca. Oznacza to, że nierówność $n \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$ implikuje nierówność

$$f(n) \geq f(\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2).$$

Gdy podzielimy kwadrat jednostkowy na $\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$ przystających kwadratów, każdy o boku długości $\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ i obliczymy sumę długości ich boków $\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, to otrzymamy nierówność

$$f(\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2) \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor,$$

która w połączeniu z poprzednią nierównością daje oczekiwane oszacowanie.

W 1932 roku Pál Erdős (jako 19-letni student matematyki na Uniwersytecie w Budapeszcie) wyraził przypuszczenie, które do dziś nie zostało rozstrzygnięte.

Hipoteza Erdősa. Dla każdej liczby naturalnej k , $f(k^2 + 1) = k$.

W 1995 roku (po ponad sześćdziesięciu latach) Pál Erdős i Alexander Soifer uzyskali następujący rezultat.

Twierdzenie. Dla każdej liczby naturalnej n postaci $n = k^2 + m$, gdzie $0 \leq m \leq 2k$ prawdziwe są oszacowania:

- (a) jeżeli $m = 2t + 1$, gdzie $0 \leq t < k$, to $f(n) \geq k + \frac{t}{k}$,
 (b) jeżeli $m = 2t$, gdzie $0 \leq t \leq k$, to $f(n) \geq k + \frac{t}{k+1}$.

Dla małych n jest to konsekwencją elementarnych ilustracji. Niech $n = 5$. Wtedy oszacowanie $f(5) \geq 2$ wynika z rozmieszczenia kwadratów na rysunku 6. Dla $n = 6$ oszacowanie $f(6) \geq \frac{7}{3}$ jest konsekwencją sumy długości boków kwadratów przedstawionych na rysunku 7. Oszacowanie dla $n = 7$ w postaci $f(7) \geq \frac{5}{2}$ ilustrują kwadraty z rysunku 8. Sytuację dla $n = 8$ i oszacowanie $f(8) \geq \frac{8}{3}$ przedstawia rysunek 9.

Pozostaje wykazać, że $f(5) = 2$, $f(6) = \frac{7}{3}$, $f(7) = \frac{5}{2}$, $f(8) = \frac{8}{3}$, itd., lub wskazać przykłady, że wartości funkcji f mogą być większe, ale dotychczas nikt nie napisał, jak to zrobić. Można również badać ogólniejszy problem: dla jakich n zachodzi $f(n+1) = f(n)$?



LIX Olimpiada Astronomiczna

Laureaci

- I. **Zofia Kaczmarek**, II klasa Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu
- II. **Mateusz Bronikowski**, III klasa I LO im. Powstańców Śląskich w Rybniku
- III. **Michał Wójcik**, II klasa III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie
- IV. ex aequo **Patryk Rachwał**, II klasa III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu
- IV. ex aequo **Cyryl Waśkiewicz**, III klasa XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- VI. **Bartosz Dzieciół**, II klasa XIII Liceum Ogólnokształcącego w Szczecinie.

Finałiści

- **Mateusz Ambroźkiewicz**, III klasa IV LO im. Krz. Kamila Baczyńskiego w Olkuszu
- **Jakub Bilski**, III klasa I Liceum Ogólnokształcącego w Radzynie Podl.
- **Joachim Borowicz**, III klasa LO im. Powstańców Wielkopolskich w Środzie Wielkop.
- **Dawid Borys**, II klasa V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- **Tomasz Chady**, II klasa XIII Liceum Ogólnokształcącego w Szczecinie
- **Jacek Gębala**, III klasa I LO im. Mikołaja Kopernika w Bielsku-Białej
- **Łukasz Kalina**, III klasa V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- **Michał Kołodziej**, III klasa I Liceum Ogólnokształcącego w Radzynie Podl.
- **Mateusz Kukuryka**, II klasa III LO im. Unii Lubelskiej w Lublinie
- **Lidia Lappo**, II klasa III LO im. Unii Lubelskiej w Lublinie
- **Katarzyna Mikulska**, II klasa III LO im. Unii Lubelskiej w Lublinie
- **Zbigniew Przygoda**, II klasa XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
- **Jan Rajchel**, III klasa I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie
- **Błażej Rozwoda**, II klasa V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
- **Mateusz Winny**, III klasa II LO im. Andrzeja F. Modrzewskiego w Rybniku

Strona internetowa
Olimpiady Astronomicznej:
<http://www.planetarium.edu.pl/oa.htm>

XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 13299 uczniów z 1221 szkół, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 1151 uczniów z 501 szkół, a do zawodów stopnia trzeciego – 194 uczniów z 99 szkół. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów postanowił przyznać 76 osobom z 51 szkół tytuł laureata pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy:

Laureaci I stopnia

Maciej Kacper Dziuba, Jan Wojciech Fornal,
Stanisław Piotr Hauke, Maciej Wojciech Małowidzki,
Tomasz Ślusarczyk

Laureaci II stopnia

Patryk Stanisław Barłowski, Jakub Jerzy Bazyluk,
Jan Fabrowski, Jakub Famulski, Kamil Kajetan Galewski,
Radosław Jakub Girul, Grzegorz Gruza, Mikołaj Grzebieluch,
Maria Hiacynta Horodecka, Krzysztof Jerzy Jankowski,
Jakub Kamiński, Katarzyna Dobrawa Kępińska,
Tomasz Kielbasa, Wojciech Kolesiński, Bartłomiej Lewandowski,
Roman Madej, Aleksandra Martyniuk,
Zuzanna Gabriela Matuszewska, Mateusz Jakub Nowak,
Iwo Pilecki-Silva, Michał Szumielewicz, Tuan Anh Tran,
Piotr Jacek Tyburski, Łukasz Wasilewski,
Antoni Maciej Wiśniewski, Joanna Maria Wojciechowska,
Jakub Wornbard, Michał Bartłomiej Woźny, Radosław Żak

Laureaci III stopnia

Adam Bac, Adam Stanisław Barański,
Mikołaj Tymon Bardos, Szymon Blida, Jagoda Maria Bracha,
Dominik Bysiewicz, Bartłomiej Cieślarski, Witold Drzewakowski,
Wojciech Duda, Natalia Magdalena Dziadosz,
Piotr Krzysztof Filipiak, Sławomir Mariusz Fudalej,
Mieszko Jakub Grodzicki, Michał Stanisław Grudzień,
Dieu Hoa Ha, Iga Rozalia Janik, Jakub Jasiński,
Justyna Joanna Jaworska, Igor Kamiński, Szymon Karpiński,
Aleksander Adam Katan, Aleksandra Łucja Kowalska,
Mikołaj Adam Kozakiewicz, Piotr Łukasz Kubaty,
Marcelina Marjankowska, Maria Mierzejewska,
Paweł Krzysztof Moćko, Franciszek Stanisław Nowak,
Jędrzej Olkowski, Łukasz Marek Orski, Małgorzata Teresa Róg,
Radzim Tomasz Sendyka, Krzysztof Sikora,
Maksymilian Maciej Sikorski, Daniel Błażej Sokulski,
Jakub Daniel Sola, Dawid Sula, Piotr Sypuła,
Rafał Stanisław Szulc, Michał Umiński,
Ewa Maria Wagner, Kacper Zieniuk



Komitet Główny OMG pragnie serdecznie podziękować Fundacji mBanku, Instytutowi Matematycznemu PAN, Szkole Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II w Warszawie oraz Politechnice Warszawskiej za wsparcie w organizacji Olimpiady, a także Fundacji mBanku, Panu Franciszkowi Hutten-Czapkiemu oraz redakcji czasopisma Delta za ufundowanie nagród dla laureatów OMG.

Zadania oraz pełną wersję komunikatu
można znaleźć na stronie www.omg.edu.pl.



LXVII Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1171 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 617 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 113 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 8 kwietnia br. postanowił przyznać 46 osobom tytuł laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego, czwartego i piątego stopnia. Otrzymali je następujący zawodnicy (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):



Nagrody stopnia pierwszego

Piotr Ambroszczyk (36) – II LO

im. Marii Skłodowskiej-Curie w Końskich

Radomił Baran (36) – LO im. Jana Pawła II Sióstr
Prezentek w Rzeszowie

Grzegorz Dłużewski (36) – Zespół Szkół Uniwersytetu
Mikołaja Kopernika Gimnazjum i Liceum Akademickie
w Toruniu

Adam Klukowski (36) – XIV LO im. Stanisława Staszica
w Warszawie

Mateusz Kobak (36) – LO im. Jana Pawła II Sióstr
Prezentek w Rzeszowie

Jakub Ochnik (36) – LO w Kolegium Świętej Rodziny
w Łomiankach

Paweł Piwek (36) – LO im. św. Jadwigi Królowej w Kielcach

Nagroda stopnia drugiego

Marcin Massalski (32) – I LO im. Mikołaja Kopernika
w Łodzi

Nagrody stopnia trzeciego

Bartłomiej Bollin (30) – Zespół Szkół Uniwersytetu
Mikołaja Kopernika Gimnazjum i Liceum Akademickie
w Toruniu

Maciej Dziuba (30) – Gimnazjum nr 1 w Końskich

Wojciech Klemens (30) – V LO w Bielsku-Białej

Adrian Koźluk (30) – XIII LO w Szczecinie

Jan Lebioda (30) – XIV LO im. Stanisława Staszica
w Warszawie

Michał Łupiński (30) – I LO im. Tadeusza Kościuszki
w Łomży

Piotr Pawlak (30) – Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna
I i II stopnia im. Feliksa Nowowiejskiego w Gdańsku

Wojciech Przybyszewski (30) – LO im. Bolesława Prusa
w Skierniewicach

Leszek Sołdan (30) – XIV LO im. Stanisława Staszica
w Warszawie

Szymon Stolarczyk (30) – II LO
im. Cypriana Kamila Norwida w Ostrołęce

Jan Tabaszewski (30) – XIV LO im. Stanisława Staszica
w Warszawie

Wojciech Wawrów (30) – LO św. Marii Magdaleny
w Poznaniu

Wojciech Mitros (29) – XIII LO w Szczecinie

Tomasz Przybyłowski (29) – Zespół Szkół Uniwersytetu
Mikołaja Kopernika Gimnazjum i Liceum Akademickie
w Toruniu

Mariusz Trela (29) – V LO im. Augusta Witkowskiego
w Krakowie

Filip Gawron (28) – III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

Nagrody stopnia czwartego

Marta Mościcka (26) – V LO w Bielsku-Białej

Szymon Zwara (26) – Zespół Szkół Uniwersytetu
Mikołaja Kopernika Gimnazjum i Liceum Akademickie
w Toruniu

Jan Fornal (25) – Gimnazjum nr 9 z Oddziałami
Dwujęzycznymi im. św. Królowej Jadwigi w Rzeszowie

Nagrody stopnia piątego

Jakub Brojacz (24) – VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie
w Katowicach

Damian Burczyk (24) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi
im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

Paweł Burzyński (24) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi
im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

Marcin Korona (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica
w Warszawie

Wiktoria Kośny (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica
w Warszawie

Jakub Kubacki (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica
w Warszawie

Jarosław Kwiecień (24) – LO Nr XIV im. Polonii Belgijskiej
we Wrocławiu

Piotr Naumowicz (24) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi
im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

Jakub Perlin (24) – XIV LO im. Stanisława Staszica
w Warszawie

Michał Pychtin (24) – XIII LO w Szczecinie

Paweł Sawicki (24) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi
im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

Michał Szachniewicz (24) – LO nr III im. Adama Mickiewicza
we Wrocławiu

Tomasz Urbański (24) – I LO im. Bolesława Chrobrego
w Piotrkowie Trybunalskim

Artur Zubilewicz (24) – V LO im. Augusta Witkowskiego
w Krakowie

Grzegorz Ciesielski (23) – LO nr III im. Adama Mickiewicza
we Wrocławiu

Radek Emanuel Kusek (23) – XIV LO im. Stanisława Staszica
w Warszawie

Juliusz Pham (23) – III LO z Oddziałami Dwujęzycznymi
im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni

Philip Smolenski-Jensen (23) – XIII LO w Szczecinie

Jakub Węgrecki (23) – III LO im. Adama Mickiewicza
w Tarnowie

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali finalistom w przygotowaniach do zawodów.

Zadania oraz pełną wersję komunikatu można znaleźć na stronie www.om.edu.pl.



LXV Olimpiada Fizyczna

W dniach 1–5 kwietnia br. odbył się w Warszawie finał LXV Olimpiady Fizycznej. Do tegorocznych zawodów trzeciego stopnia zakwalifikowało się 69 zawodników. W sobotę 2 kwietnia zawodnicy w dwóch turach rozwiązywali zadanie doświadczalne, polegające w zasadzie na wyznaczaniu kombinacji stałych fizycznych hc/k_B za pomocą żarówki, płyty CD i fotodiody. W przeciwieństwie do lat poprzednich zadanie doświadczalne okazało się stosunkowo łatwe i wielu uczestników finału przedstawiło przynajmniej częściowo zadowalające rozwiązania, niekiedy nawet prostsze niż to zaproponowane przez organizatorów.

W niedzielę 3 kwietnia zawodnicy zmierzili się z zadaniami teoretycznymi. Pierwsze z nich polegało na analizie ruchu upuszczonego ciężarka na elastycznej nici. Choć metody potrzebne do rozwiązania tego zadania były zupełnie elementarne, ogromną trudność sprawiła zawodnikom niezbędna separacja skal czasowych i zauważenie, że do analizy rozciągania nici pozostałe aspekty ruchu można pominąć.

W drugim zadaniu należało zbadać częstość dźwięku emitowanego przez poruszające się po okręgu źródło i odbieranego przez nieruchomy mikrofon. I to zadanie można było rozwiązać elementarnymi metodami, większość uczestników starała się jednak zapisać kluczowy element rozwiązania w postaci trudnej do obliczenia całki.

Trzecie zadanie polegało na określeniu momentu siły elektrycznej obracającej silnik elektryczny składający się z czterech dysków, których kolejne sektory podłączone były do różnych biegunów napięcia. Jakkolwiek wielu rozwiązujących rozpoznało w tym silniku układ połączonych kondensatorów o zmiennej pojemności, to tylko nieliczni zauważyli, że w bilansie energii należy uwzględnić pracę wykonywaną przez źródło napięcia.

Redaktorzy zadań finałowych Olimpiady Fizycznej starają się zawsze, by rozwiązania składały się z elementarnych kroków niewykraczających poza omawiany w szkole zakres materiału, ale wymagających „pogłótkowania” i uświadomienia sobie istoty fizycznej rozważanego problemu. W tym roku elementarność tych kroków okazała się, zwłaszcza w zadaniach teoretycznych, nie lada wyzwaniem dla finalistów, którzy często starali się używać – z różnym powodzeniem – zaawansowanych metod do analizy prostych problemów. Treści zadań wraz ze wzorcowymi rozwiązaniami można znaleźć na stronie Komitetu Głównego OF www.kgof.edu.pl.

Laureatami LXV Olimpiady Fizycznej zostali
(w kolejności zajętych miejsc):

- Mateusz Raczyński**
XIII LO w Szczecinie
- Stanisław Kurdziałek**
I LO im. S. Staszica w Lublinie
- Adam Kucz**
II LO im. A. Frycza Modrzewskiego w Rybniku
- Marcin Koźbiał**
XXVII LO im. T. Czackiego w Warszawie
- Bartosz Markowicz**
IV LO im. T. Kościuszki w Toruniu
- Juliusz Neuman**
Publiczne LO Politechniki Łódzkiej w Łodzi
- Michał Pestka**
III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
- Rafał Ernest Ćwiek**
ZSL im. Bolesława Chrobrego w Leżajsku
- Rafał Bistrón**
V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie
- Błażej Rozwoda**
V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie
- Paweł Piotr Czyż**
XIV LO im. S. Staszica w Warszawie
- Karol Niczyj**
LO im. S. Banacha w Żaganiu
- Paweł Żakieta**
III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni
- Maksymilian Marzec**
XIII LO w Szczecinie
- Michał Szachniewicz**
III LO im. A. Mickiewicza we Wrocławiu
- Andrzej Oreszczuk**
VI LO im. J. Kochanowskiego w Radomiu
- Mateusz Goślinowski**
XIII LO w Szczecinie

Nagrody dla nauczycieli zostały ufundowane przez Hamamatsu, Labis, Polskie Towarzystwo Fizyczne oraz osoby prywatne.



XXIII Olimpiada Informatyczna

W dniach 12–16 kwietnia 2016 r. w Warszawie odbyły się zawody III stopnia XXIII Olimpiady Informatycznej. Zostało do nich zakwalifikowanych 96 zawodników. W ciągu dwóch dni zawodów finałowych zawodnicy mieli do rozwiązania w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Komitet Główny przyznał tytuły laureata I, II i III miejsca zawodnikom, którzy w zawodach finałowych uzyskali, odpowiednio, co najmniej 500, 400 i 250 punktów, i wyróżnił zawodników, którzy w finale uzyskali co najmniej 200 punktów. Poniżej publikujemy listę tych zawodników (w nawiasach liczba zdobytych punktów oraz szkoła). Lista wszystkich finalistów jest dostępna na <http://oi.edu.pl>.



laureaci I miejsca

1. **Jarosław Kwiecień** (591, Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław)
2. **Mateusz Radecki** (584, VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego, Radom)
3. **Paweł Burzyński** (538, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
4. **Juliusz Pham** (533, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia)
5. **Bartłomiej Karasek** (519, Zespół Szkół nr 1, Grodzisk Maz.)
6. **Mariusz Trela** (516, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego, Kraków)
7. **Maciej Sypetkowski** (513, I Liceum Ogólnokształcące im. Władysława Jagiełły, Krasnystaw)

laureaci II miejsca

8. **Stanisław Szcześniak** (470, XIV LO, Warszawa)
9. **Franciszek Budrowski** (462, I LO, Białystok)
10. **Piotr Kowalewski** (458, III LO, Gdynia)
11. **Łukasz Kondraciuk** (457, IV LO, Rzeszów)
12. **Jan Tabaszewski** (447, XIV LO, Warszawa)
13. **Michał Tepper** (434, ZSO nr 6, Bydgoszcz)
14. **Tomasz Kościuszko** (431, XIV LO, Warszawa)
15. **Michał Górniak** (428, I LO, Legnica)
16. **Piotr Grabowski** (419, I LO, Lublin)
17. **Jakub Boguta** (416, I LO, Lublin)

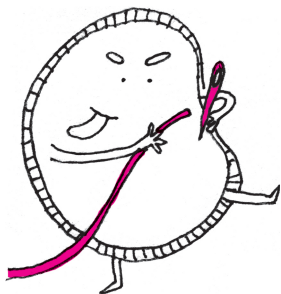
laureaci III miejsca

18. **Stanisław Strzelecki** (385, XIV LO, Warszawa)
19. **Anadi Agrawal** (375, LO nr XIV, Wrocław)
20. **Marek Żochowski** (374, III LO, Gdynia)
21. **Anna Białokozowicz** (366, I LO, Białystok)
22. **Kacper Kluk** (357, III LO, Gdynia)
23. **Rafał Łyżwa** (344, VI LO, Radom)
23. **Kacper Walentynowicz** (344, III LO, Gdynia)
25. **Piotr Pawlak** (338, Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna I i II stopnia, Gdańsk)
26. **Jan Lebioda** (328, XIV LO, Warszawa)
27. **Piotr Borowski** (316, I LO, Lublin)
28. **Tomasz Grzeńkiewicz** (311, XIV LO, Warszawa)

29. **Mateusz Gienieczko** (309, III LO, Gdynia)
30. **Mateusz Hazy** (308, LO nr XIV, Wrocław)
31. **Cyryl Waśkiewicz** (304, XIV LO, Warszawa)
32. **Mateusz Szpyrka** (303, V LO, Kraków)
33. **Tomasz Nowak** (296, XIV LO, Warszawa)
34. **Jan Olkowski** (292, XIV LO, Warszawa)
35. **Konrad Staniszewski** (288, VI LO, Radom)
36. **Maciej Nadolski** (284, III LO, Gdynia)
37. **Piotr Kuczko** (280, I LO, Białystok)
38. **Krzysztof Potępa** (279, V LO, Kraków)
39. **Jakub Bartmiński** (273, XIV LO, Warszawa)
40. **Agnieszka Dudek** (270, LO nr XIV, Wrocław)
41. **Adam Pawłowski** (268, VIII LO, Poznań)
42. **Łukasz Janeczko** (266, V LO, Kraków)
43. **Michał Niciejewski** (258, XIII LO, Szczecin)
44. **Kamil Ćwintal** (253, ZSO, Ożarów)
45. **Igor Dolecki** (251, XIV LO, Warszawa)
46. **Michał Siennicki** (250, XIV LO, Warszawa)

finaliści z wyróżnieniem

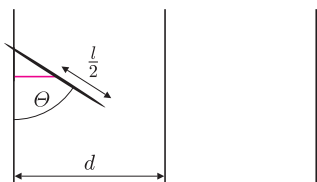
- Jakub Zadrożny (248, LO nr III, Wrocław)
Krzysztof Piesiewicz (247, VIII LO, Warszawa)
Artur Puzio (245, XIV LO, Warszawa)
Kamil Piechowiak (242, VIII LO, Poznań)
Rafał Pragacz (242, ZS Sióstr Nazaretanek, Kielce)
Iwona Kotlarska (237, XIV LO, Warszawa)
Piotr Bujakowski (232, V LO, Kraków)
Jakub Obuchowski (232, I LO, Białystok)
Alicja Chaszczewicz (226, LO nr XIV, Wrocław)
Tomasz Ponitka (226, LO nr XIV, Wrocław)
Tomasz Kanas (220, III LO, Gdynia)
Mateusz Maciej Masłowski (215, Gimnazjum nr 24, Gdynia)
Krzysztof Małysa (214, XIII LO, Szczecin)
Bartosz Rudzki (214, LO nr XIV, Wrocław)
Bartłomiej Wrona (211, XXVII LO, Warszawa)
Mateusz Orda (206, LO nr III, Wrocław)
Marek Skiba (206, Prywatne Gimnazjum, Lublin)
Wojciech Gołaszewski (205, LO nr XIV, Wrocław)
Michał Łopata (205, I LO, Białystok)
Julia Majkowska (205, LO nr XIV, Wrocław)
Konstanty Subbotko (205, XIV LO, Warszawa)
Paweł Anikiel (204, III LO, Gdynia)
Grzegorz Eugeniusz Uriasz (200, I LO, Krosno)



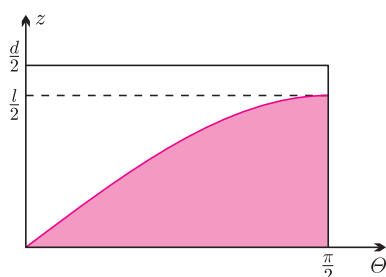
Kluska w uchu wielbłąda albo arytmetyka moralna

Krzysztof REJMER

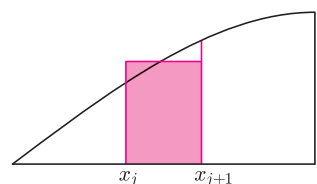
Powiada Ewangelia: *Łatwiej jest wielbłądowi przejść przez ucho igielne, niż bogatemu wejść do królestwa niebieskiego*. Lingwiści, i nie tylko oni, próbują znaleźć jakieś sensowne wyjaśnienie tych słów. Na przykład Cyryl Aleksandryjski twierdził, że jest to językowe nieporozumienie, a Jezus miał w rzeczywistości na myśli nie wielbłąda, lecz linę. Oba te wyrazy mogły być pomyłone z powodu zachodzącego w języku greckim procesu nazwanego itacyzmem. Polegał on na zamianie litery η na literę ι ($\kappa\acute{\alpha}\mu\eta\lambda\omicron\varsigma$ to wielbłąd, natomiast $\kappa\acute{\alpha}\mu\iota\lambda\omicron\varsigma$ to lina). Jest to tym bardziej prawdopodobne, że aramejskie słowo *gamla* oznaczało zarówno samego wielbłąda, jak i wykonaną z jego sierści linę. Jak to często bywa, winny jest niedouczony interpretator.



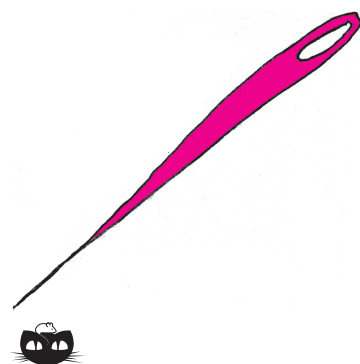
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rozwiązanie zadania M 1495. Rozważmy wielomian

$$w(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) - (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n).$$

Wartość $w(b_j)$ jest równa iloczynowi c liczb wpisanych w j -tą kolumnę. Stąd $w(b_1) = \dots = w(b_n) = c$. Ponieważ stopień wielomianu w jest mniejszy niż n , otrzymujemy, że jest to wielomian stale równy c .

W takim razie mamy

$$c = w(-a_i) = (-1)^{n+1}(a_i + b_1) \dots (a_i + b_n),$$

a stąd iloczyn liczb wpisanych w i -ty wiersz jest równy $(-1)^{n+1} \cdot c$ niezależnie od i .

Z podobną grą słów mamy do czynienia w pewnym ciekawym zagadnieniu dotyczącym rachunku prawdopodobieństwa. Aby je omówić, zaczniemy od rzeczy powszechnie znanej, czyli od igły Buffona, opisanej przezeń w 1777 roku w *Szkicu o arytmetyce moralnej*. Rzucamy igłą o długości l na płaszczyznę podzieloną równoległymi liniami, przy czym odległość d między sąsiednimi liniami spełnia warunek $d \geq l$. Niech z oznacza odległość igły od najbliższej linii, natomiast Θ mniejszy z kątów, jaki igła tworzy z tą linią. Możliwe wartości z i Θ leżą w przedziałach, odpowiednio, $[0, \frac{d}{2}]$ i $[0, \frac{\pi}{2}]$. Przyjmujemy, że z i Θ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach jednostajnych. Długość rzutu igły na kierunek prostopadły do linii jest równa $l \sin \Theta$. Jeżeli środek igły jest odległy od najbliższej linii o mniej niż $\frac{1}{2} l \sin \Theta$ (rys. 1), to igła przecina linię. Prawdopodobieństwo przecięcia linii jest więc równe stosunkowi pola S pod sinusoidą $\frac{1}{2} l \sin \Theta$ i pola prostokąta o bokach $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{d}{2}$ (rys. 2).

Pole S możemy obliczyć, dzieląc odcinek $[0, \frac{\pi}{2}]$ na N małych odcinków. Niech $x_j = \frac{j\pi}{2N}$, $j = 0, \dots, N$, będą końcami kolejnych odcinków. Wtedy S przybliżamy jako

$$\begin{aligned} S &\approx \sum_{j=0}^{N-1} \frac{l}{2} \sin\left(\frac{x_{j+1} + x_j}{2}\right) \cdot (x_{j+1} - x_j) = \\ &= \frac{l}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \sin\left(\frac{x_{j+1} + x_j}{2}\right) \sin\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{2}\right) \cdot \frac{x_{j+1} - x_j}{\sin\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{2}\right)} = \\ &= \frac{l}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (\cos x_j - \cos x_{j+1}) \cdot \frac{\frac{x_{j+1} - x_j}{2}}{\sin\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{2}\right)} = \\ &= \frac{l}{2} \frac{\pi}{4N} \sum_{j=0}^{N-1} (\cos x_j - \cos x_{j+1}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{l}{2} \end{aligned}$$

Szukane prawdopodobieństwo jest równe $P = \frac{2l}{\pi d}$, a w szczególności dla $l = d$ otrzymujemy $P = \frac{2}{\pi}$. Wynik ten pozwala „zmierzyć” wartość liczby π . Nie trzeba rzucać prawdziwą igłą, wystarczy „doświadczenie komputerowe”. Jeśli posłużymy się definicją prawdopodobieństwa podaną przez Laplace’a, to dla $l = d$ mamy

$$\pi \simeq 2 \frac{N}{x},$$

gdzie N to liczba rzutów, a x to liczba przecięć. Ponieważ przyjęliśmy (arbitralnie?) jednostajność obu rozkładów, można też twierdzić, że w rzeczywistości nie tyle wyznaczamy wartość π , ile testujemy to założenie.

Wszystkim, których zdumiewa obecność liczby π w zadaniu dotyczącym rachunku prawdopodobieństwa, Hugo Steinhaus wyjaśniał w charakterystycznym dla siebie stylu, że jest to ilustracja powiedzenia *fortuna kołem się toczy*. Jednak w rzeczywistości to nie powinno dziwić. Liczba π jest zdefiniowana jako stosunek długości okręgu do jego średnicy. Zauważmy, że wszystkie możliwe położenia

jednego końca igły względem drugiego tworzą okrąg, którego promień jest długością tej igły. A zatem jesteśmy w domu.



A teraz zrobimy z liny ewangelicznego wielbłąda. A raczej z igły Buffona uczynimy matematyczną linę albo kluskę. Podamy rozwiązanie podobnego zagadnienia, którego autorem jest Joseph-Émile Barbier. Ta wersja problemu igły Buffona (ang. *Buffon's needle*) nosi żartobliwą nazwę *kluski Buffona* (ang. *Buffon's noodle*).

W przypadku $l \leq d$, który tu rozważamy, możliwe jest co najwyżej jedno przecięcie igły z linią. Wprowadzimy nową zmienną losową przyjmującą wartość 1, gdy igła przecina linię, i 0, gdy igła nie przecina linii. Obliczmy wartość średnią tej zmiennej. Jest ona równa

$$\mu_1 = 1 \cdot P + 0 \cdot (1 - P) = P.$$

Widzimy, że jest to prawdopodobieństwo przecięcia linii przez igłę. Wyrażenie po prawej stronie powyższego równania jest zarazem średnią liczbą przecięć, μ_1 . Zastąpimy teraz igłę przez łamaną złożoną z n odcinków. Niech x_1, \dots, x_n będą liczbami przecięć linii przez te odcinki, natomiast x ich sumą, czyli liczbą przecięć linii przez łamaną. Wielkości x_i nie są niezależnymi zmiennymi losowymi, ale to bez znaczenia, bo średnia liczba przecięć linii przez łamaną i tak jest sumą średnich liczb przecięć linii przez odcinki

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i \rangle.$$

Przejdziemy teraz z łamaną do granicznej krzywej gładkiej (czyli naszej kluski) o ustalonej długości, zwiększając do nieskończoności liczbę odcinków łamanej. Średnia liczba przecięć kluski jest proporcjonalna do jej długości l i wynosi tyle samo co dla igły Buffona:

$$\mu_1(l) = \frac{2l}{\pi d}.$$

Swoją drogą, Barbier udowodnił w rzeczywistości coś więcej, bo nazwane jego imieniem twierdzenie, które mówi, że dla dowolnej zamkniętej krzywej o stałej szerokości stosunek jej długości do jej średnicy zawsze jest taki sam i równy π , niezależnie od kształtu tej krzywej.

Rozwiązanie zagadnienia Buffona wielokrotnie testowano eksperymentalnie. Wspomniemy tu o jednym tylko wyniku, uzyskanym w 1901 roku przez włoskiego matematyka Mario Lazzariniego, który rzucił 3408 razy igłą o stosunku długości do szerokości paska równym $5/6$. W tym przypadku $\pi \approx \frac{5}{3} \frac{N}{x}$. Lazzarini uzyskał robiący wrażenie rezultat o błędzie mniejszym od $3 \cdot 10^{-7}$; było to przybliżenie $\pi \approx \frac{355}{113}$. Podejrzenie wzbudził jednak fakt, że powyższe przybliżenie znane jest od dawna jako najlepsze wymierne przybliżenie π , jeśli ograniczyć się do liczb co najwyżej pięciocyfrowych. Jeśli spełniony jest warunek $x = \frac{113}{213} N$, to otrzymamy właśnie owo wspomniane najlepsze przybliżenie. Łatwo tego dokonać. Wystarczy wybrać liczbę n będącą wielokrotnością liczby 213, a wtedy x jest liczbą całkowitą. Liczba $3408 = 16 \cdot 213$ jest taką wielokrotnością. Dziś uważa się wynik Lazzariniego za oszustwo (co jest przecież rzeczą niemoralną) albo raczej za wyrafinowany żart (a to już zupełnie inna sprawa).

W tytule oryginalnej pracy Buffona występuje nazwa *arytmetyka moralna*. Pojęcie to wywodzi się z chętnie praktykowanej przez Anglosasów (a zwalczonej przez myślicieli chrześcijańskich) filozofii użyteczności (Bentham), która uczy, że o moralnej wartości czynu świadczą jedynie jego skutki. Stąd, podejmując decyzje moralne, jesteśmy zmuszeni dokonywać swoistego rachunku użyteczności, czyli arytmetyki albo buchalterii moralnej, i szacować miarę pozytywnych oraz negatywnych skutków naszych czynów. Propozycja rozstrzygnięcia konfliktu wartości i określenia moralnego obowiązku w oparciu o ową buchalterię moralną opiera się na (naiwnym z dzisiejszego punktu widzenia) założeniu, że możliwe jest odkrycie jakiejś wspólnej miary dla wszystkich ludzkich wartości i że taki uniwersalny zbiór niewykluczających się wzajemnie wartości istnieje.

Ewangelista, być może, powiedziałby, że miarą jest ucho igielne...

Uzasadnienie wzoru Barbiera.

Dla łamanej złożonej z dwóch odcinków o długościach a i b średnia liczba przecięć jest równa

$$\mu_1(a + b) = \mu_1(a) + \mu_1(b),$$

gdzie $\mu_1(l)$ jest średnią liczbą przecięć w funkcji długości (odpowiednio łamanej lub odcinka). Wynika stąd, że dla dowolnej liczby naturalnej n

$$\mu_1(na) = n\mu_1(a),$$

oraz dla dowolnych liczb naturalnych n i m

$$\begin{aligned} n\mu_1(a) &= \mu_1(na) = \mu_1\left(m \frac{n}{m} a\right) \\ &= m\mu_1\left(\frac{n}{m} a\right). \end{aligned}$$

W przypadku odcinka łamanej μ_1 jest funkcją ciągłą jego długości a . A zatem dla dowolnej liczby wymiernej, a przez to i dla dowolnej liczby rzeczywistej

$$\mu_1(ra) = r\mu_1(a),$$

a stąd

$$\mu_1(a) = ca, \quad \text{gdzie } c = \mu_1(1).$$

Wyznamy teraz wartość c . Posłużymy się kluską zwiniętą w okrąg o średnicy d . W tej sytuacji zawsze istnieją dwa przecięcia. Mamy więc

$$2 = \mu_1(d\pi) = cd\pi,$$

a stąd

$$c = \frac{2}{\pi d},$$

co zgadza się z rachunkiem dla igły Buffona.

Więcej o twierdzeniu Barbiera można przeczytać np. w książce Jarosława Górnickiego *Okruchy matematyki*.

Trzy karty o paradoksie Monty'ego Halla nieco inaczej

Na stole leżą, ułożone w losowej kolejności koszulkami do góry, trzy karty: As, Król i Dama. Jeżeli gracz odgadnie prawidłowo położenie Asa, wygrywa dużą nagrodę. Gracz wskazał kartę, nie obejrzał jej, i wtedy prowadzący grę mówi: *Chwileczkę. Odkryj jedną z dwóch pozostałych kart, a ty się zastanów, czy chcesz zmienić swoją kartę na kartę, która pozostała nieodkryta.* Prowadzący grę zna położenie kart i zawsze odkrywa kartę różną od Asa. Jeżeli ma do wyboru Króla albo Damę, pokazuje Króla z prawdopodobieństwem p , a Damę z prawdopodobieństwem $1 - p$, gdzie $0 \leq p \leq 1$ (np. można wyobrazić sobie sytuację, gdy prowadzący grę bardzo lubi Króla – wtedy $p = 1$). Następnie odkrywa kartę i jest nią Król.

Oblicz prawdopodobieństwo sukcesu gracza, który zmieni swój pierwotny wybór.

Często spotykamy takie rozumowania:

- 1) Zostały dwie karty, As i Dama. Jedną z nich ma prowadzący grę, a drugą gracz. Jest więc wszystko jedno, czy gracz zmieni swój wybór czy nie, prawdopodobieństwo wygranej jest równe $1/2$.
- 2) Prawdopodobieństwo tego, że gracz pierwotnie wskazał Asa, jest równe $1/3$ i pokazanie Króla nic nie zmienia. Stąd wynika, że prawdopodobieństwo sukcesu gracza, który zmieni swój wybór, jest równe $2/3$.

Są to dwa różne rozumowania, które znacznie upraszczają problem. Oba pomijają informację o odkrytej karcie,

ignorują preferencje prowadzącego grę i prowadzą do dwóch różnych wyników.

Aby rozwiązać ten problem, zbudujemy model probabilistyczny dla tego doświadczenia.

Mamy cztery możliwości, które przedstawiamy w tabeli.

Oznaczmy przez A zdarzenie losowe polegające na tym, że gracz nie wskazał Asa i osiągnie sukces po zmianie swojego pierwotnego wyboru, i przez K zdarzenie losowe polegające na tym, że prowadzący grę odkryje Króla.

Mamy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, czyli

$$P(A|K) = \frac{P(A \cap K)}{P(K)}.$$

Z pierwszego wiersza tabeli mamy $P(A \cap K) = 1/3$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że prowadzący odkryje Króla, jest równe $P(K) = \frac{1}{3} + \frac{p}{3} = \frac{1+p}{3}$, czyli sumie prawdopodobieństw z pierwszego i trzeciego wiersza.

Stąd $P(A|K) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+p}{3}} = \frac{1}{1+p}$; zatem $\frac{1}{2} \leq P(A|K) \leq 1$.

Prawdopodobieństwo wygranej gracza przy zamianie kart jest nie mniejsze od $1/2$.

Gdy $p = 1$ (prowadzący bardzo lubi Króla), to $P(A|K) = 1/2$; gdy $p = 0$ (prowadzący bardzo lubi Damę i odkrył Króla, czyli gracz ma Damę), to $P(A|K) = 1$. Gdy $p = 1/2$, mamy $P(A|K) = 2/3$; przypadek ten oznacza, że prowadzący grę – w sytuacji, gdy ma do wyboru Króla albo Damę – wybiera kartę losowo.

	karta wskazana przez gracza	karty, które pozostały dla prowadzącego grę	karty odkryte przez prowadzącego grę	prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń opisanych w trzeciej i czwartej kolumnie
1	D	A, K	K	$(1/3) \cdot 1$
2	K	A, D	D	$(1/3) \cdot 1$
3 ₁	A	K, D	K	$(1/3) \cdot p = p/3$
3 ₂	A	K, D	D	$(1/3) \cdot (1 - p) = (1 - p)/3$

Edward STACHOWSKI



Zadania

Przygotował Michał NAWROCKI

F 905. Ile wynosi energia kinetyczna E_k elektronu poruszającego się po okręgu o promieniu $r = 4 \cdot 10^{-2}$ m w polu magnetycznym o indukcji $B = 5 \cdot 10^{-2}$ T? Masa spoczynkowa elektronu to $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Rozwiązanie na str. 3

F 906. Jaką pracę A przeciw siłom napięcia powierzchniowego należy wykonać, aby nadmuchać bańkę mydlaną o promieniu $R = 5$ cm? Współczynnik napięcia powierzchniowego σ dla wody z mydłem wynosi około $40 \cdot 10^{-3}$ N/m.

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Urszula PASTWA

M 1495. Mając dane parami różne liczby a_1, a_2, \dots, a_n i b_1, b_2, \dots, b_n , tworzymy tabelę $n \times n$, wpisując w i -tym wierszu i j -tej kolumnie liczbę $a_i + b_j$. Wykazać, że jeśli iloczyn liczb wpisanych w każdą kolumnę jest jednakowy, to również iloczyn liczb wpisanych w każdy wiersz jest jednakowy.

Rozwiązanie na str. 15

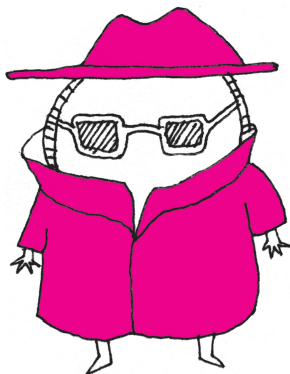
M 1496. Każda z liczb całkowitych a_1, \dots, a_n jest mniejsza od 2016, a najmniejsza wspólna wielokrotność dowolnych dwóch z tych liczb jest większa od 2016. Wykazać, że

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{n}{2016}.$$

Rozwiązanie na str. 8

M 1497. W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 96° . Wewnątrz trójkąta leży taki punkt D , że $\sphericalangle DAB = 18^\circ$ i $\sphericalangle DBA = 30^\circ$. Wyznaczyć miarę kąta ACD .

Rozwiązanie na str. 5



4chan – typ internetowego forum (anglojęzycznego), klon japońskiego Futaba Channel. Uruchomiony w październiku 2003 roku przez nastolatka Christophera Poole'a, ps. Moot. Pierwotnie o tematyce mangi oraz anime.



Rys. 1

Szyfr Cezara – jedna z najstarszych metod szyfrowania używana w I w p.n.e. przez Juliusza Cezara. Szyfrowanie polega na zamianie każdej litery tekstu na inną literę tego samego alfabetu, oddaloną o pewną stałą liczbę znaków.



Rys. 2

Szyfr książkowy polega na zamianie każdej litery tekstu na cztery współrzędne: pierwsza – numer strony w danej książce, druga – numer linijki na stronie, trzecia – numer wyrazu w linijce, czwarta – numer litery w wyrazie.

Szyfry i kody zagadek Cykady 3301

Aleksandra NOWAK*

Czym jest Cykada 3301? Jest to tajemnicza organizacja, która trzykrotnie (w roku 2012, 2013, 2014) dała o sobie znać, publikując w Internecie cykle ukrytych łamigłówek. Zostały one okrzyknięte przez *Washington Post* „najbardziej skomplikowanymi i tajemniczymi zagadkami w dobie Internetu”. Są to zagadki, w których rozwiązanie jednej prowadzi do następnej. Łamigłówki Cykady zamieszczane były na stronach internetowych, na Twitterze, forach dyskusyjnych. Ukryte były w różnych plikach graficznych, w tym nawiązujących do obrazów sławnych artystów, w tekstach powieści, poematach, manuskryptach, plikach muzycznych. W różnych miastach na świecie (między innymi w Moskwie, Chicago, Los Angeles, Paryżu, Seulu, Warszawie) można było znaleźć plakaty przedstawiające cykadę (logo organizacji) oraz kod QR, po którego zeskanowaniu natrafiało się na kolejną zagadkę. Na rozwiązanie każdego cyklu był jeden miesiąc.

Intencją Cykady prawdopodobnie była rekrutacja wybitnych indywidualności, osób o wysokiej erudycji, wykazujących się ponadprzeciętnymi zdolnościami i wiedzą z różnych dziedzin nauki, ale przede wszystkim z zakresu kryptologii. Kto „rekrutował” oraz jakie propozycje złożono tym, którzy rozwiązyli wszystkie zagadki cyklu, nie wiadomo. Są jedynie spekulacje. Mogą to być agencje wywiadowcze (takie jak CIA czy MI6), grupa aktywistów internetowych Anonymous, a może po prostu jest to gra internetowa. Odpowiedź na drugą część pytania również nie jest jasna. Nie wiadomo, co stało się z osobami, które rozwiązały Cykadę. Wiadomo, że w końcowym etapie cyklu najwybitniejsi dostawali indywidualne zagadki oraz że ci, którzy podzielili się nimi na forum Internetu, zostawali wyeliminowani. Spróbujmy przejść choć przez kawałek cykadowej ścieżki.

Zagadka 1. Początek Cykady 3301 sięga 5 stycznia 2012 roku, wtedy to na forum internetowym 4chan pojawiła się wiadomość (rys. 1). Faktyczny komunikat został zaszyfrowany w tle obrazu tzw. metodą najmniej znaczącego bitu (najbardziej popularna metoda stosowana w steganografii). Ludzkie oko widzi biały tekst na czarnym tle, które jednak nie jest jednokolorowe. Niektóre piksele są w kolorze bardzo zbliżonym do czerni i tworzą poniższy tekst (można go otrzymać, używając np. programu *Stegdetect*).

TIBERIVS CLAVDIVS CAESAR says “lxxtj33m2mqkyv2gsq3q=w]O2ntk”

Komunikat nie jest jasny, wystąpienie słowa CAESAR sugeruje zastosowanie szyfru Cezara. I faktycznie, po konwersji tekstu na kod ASCII i użyciu wspomnianego szyfru wiadomość okazała się być adresem strony internetowej.

<http://i.imgur.com/m9sYK.jpg>

Zagadka 2. Na stronie znajdował się obraz przedstawiający kaczkę (rys. 2). Znowu należało użyć steganografii. Na program *Outguess*, badający obraz pod kątem ukrytych w nim informacji, naprowadzały słowa „guess” i „out” wpisane nad kaczką. Rozwiązaniem tej zagadki był tekst: *Here is a book code. To find the book, and more information, go to <http://www.reddit.com/r/a2e7j6ic78h0j/> oraz 76 linii znaków postaci 1:20, 2:3, 3:5, 4:20, 5:5, 6:53... i podpis *Good luck. 3301.* To był szyfr książkowy.*

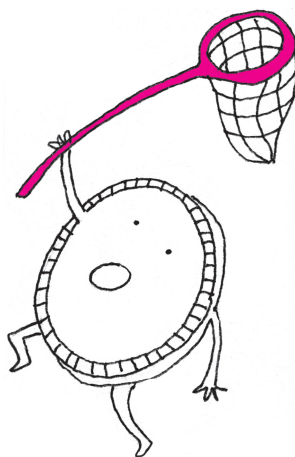
Zagadka 3. Można by się spodziewać na owej stronie tekstu książki. Zamiast niego ukazały się nieskładne ciągi liter. Jeśli w ogóle był to tekst, to zakodowany. Uwagę zwracały kropki i kreski w nagłówku strony. Jak się okazało, były to cyfry w systemie numerycznym Majów. Po rozkodowaniu okazały się podobne do skróconego adresu URL wyświetlonej strony. Najprawdopodobniej był to klucz do rozkodowania wierszy książki. Tylko jak go użyć?

Kolejne zagadki Cykady były ukryte w najróżniejszych miejscach. Rozwiązaniem jednej z nich był numer telefonu. Po połączeniu z tym numerem głos w słuchawce powtarzał adres strony internetowej. Na stronie pojawiał się zegar

*uczennica VIII LO w Katowicach



TOR (*The Onion Router*) – wirtualna sieć komputerowa, która zapewnia użytkownikom zupełnie anonimowe serfowanie po internecie, daje dostęp do tzw. darknetu – zakamarków, które nie dają się indeksować wyszukiwarkom.



Artykuły MP można znaleźć na stronie www.mp.uph.edu.pl

W drugim numerze MP możemy przeczytać o perspektywie według Strzebińskiego, twierdzeniu o powracaniu i pewnych zagadkach mechaniki statystycznej. Odnajdziemy też matematyczne inspiracje w szaradziarstwie, poznamy związki szeregów liczbowych z liczbą π oraz dowiemy się, jak pokazać, że coś ma elementarny dowód, nie pokazując tego dowodu. Przejdziemy matematycznymi mostami między matematyką a sztuką i przeczytamy recenzję książki Edwarda Frenkla pod intrygującym tytułem „Miłość i matematyka”.

[1] OKM w Mordach i Szkoła Matematyki Poglądowej – informacje, Marek Kordos, www.msn.uph.edu.pl/smp/

odmierzający czas do 9 stycznia 2012 do godziny 17.00. Po tej godzinie pojawiały się ciągi cyfr (zaszyfrowane współrzędne 14 różnych miast). Tymi miastami były między innymi: Seul, Phoenix, Sydney, Paryż, Miami oraz Warszawa. W fizycznych lokalizacjach wskazanych w zagadce zostały umieszczone plakaty z wizerunkiem Cykady (nawiązującej do powieści Thomasa Harrisa „Milczenie owiec”) oraz z kodem QR. Kod ten kierował na adres w sieci TOR. Pierwsi, którzy tam dotarli, dostali kolejne testy. Spóźnialscy zostali wyeliminowani z gry. Strona zniknęła po odwiedzeniu przez pewną liczbę użytkowników.

Można zapytać, skąd wiadomo, że zagadki były zamieszczone przez jedną osobę, czy organizację. Otóż każda opublikowana łamigłówka zawierała podpis PGP, co pozwalało jednoznacznie określić jej autentyczność. Gdy rozwiązałam trzy zagadki Cykady, pomyślałam, że warto podzielić się nimi na szerszym forum i tak powstała praca na Ogólnopolski Sejmik Matematyków. Na tym nie zakończyłam przygody z Cykadą 3301. Dalej się zastanawiam, jaki ruch wykonać, aby znaleźć rozwiązanie i dotrzeć do kolejnej tajemnicy.

Czasopismo „Matematyka Poglądowa”

Matematyka Poglądowa stanowi kontynuację zeszytów *Matematyka–Społeczeństwo–Nauczanie*, które towarzyszyły Szkołom Matematyki Poglądowej od samego początku (od ponad ćwierć wieku). Artykuły to zazwyczaj relacje z odczytów na Szkołach, ale nie tylko. Można tam również znaleźć recenzje książek (rzecz jasna, poświęconych matematyce) oraz różne perełki, jak, na przykład, wykład habilitacyjny Riemanna, którego pierwsze polskie tłumaczenie ukazało się właśnie w *MSN*.

Nie byłoby jednak *MSN* ani *MP* bez Ośrodka Kultury Matematycznej, nieformalnej organizacji powołanej do życia w Siedlcach w grudniu 1987 roku przez matematyków, naukowców, pracowników uczelni z 11 ośrodków w całym kraju. *Postanowiono animować ruch na rzecz tego, by matematyka nie kryła się za formalizmami, nie odstraszała laików, aby była prezentowana ze wskazaniem jej miejsca w całokształcie cywilizacji i kultury, aby jej rozwój był relacjonowany w powiązaniu z wydarzeniami historii powszechnej* [1]. W tym celu matematycy powinni jednak spoglądać szerzej niż tylko na skrawek nauki, którym się zajmują. Z kolei do tego niezbędna jest komunikacja między naukowcami (nie tylko matematykami). To zaś jest możliwe tylko, jeżeli mówią wspólnym językiem. Jest jeszcze kwestia umiejętnego przedstawienia matematyki społeczeństwu. Krócej rzecz ujmując, konieczna jest *kultura matematyczna*.

Jedną z form działalności OKM są wspomniane wcześniej Szkoły Matematyki Poglądowej. Zazwyczaj Szkoły składają się z 24 trwających 45 minut wykładów poświęconych określonej tematyce (np. „Elementarne, ale niebanalne”, „Przestrzeń”, „Porządek”, „Wbrew intuicji”). O związkach matematyki, nie tylko tak oczywistych jak z fizyką czy biologią, podczas Szkół mówili (i mówić będą) specjaliści z dziedzin dalekich od matematyki, takich jak historia, muzyka, socjologia.

Towarzyszący Szkołom od dwóch lat rocznik *Matematyka Poglądowa* różni się od wydawanego wcześniej *MSN* po pierwsze tym, że wychodzi raz do roku, a po drugie, w przeciwieństwie do *MSN*, jest pismem kolorowym. Kolory nie są użyte tylko po to, by przyciągnąć oko czytelnika, wynika to także z faktu, że występują one powszechnie w matematyce. To właśnie taka kolorowa matematyka jest tematem kolejnej, LIV Szkoły, która odbędzie się w sierpniu 2016 roku.

Agnieszka PRUSIŃSKA

Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach, Instytut Matematyki i Fizyki

Serdecznie zapraszamy

wszystkich zainteresowanych

do uczestnictwa

w Drugiej Międzynarodowej Szkołe Kosmologicznej,

która odbędzie się

w dniach 11–24.07.2016

w Kielcach.

Wykłady prowadzić będą cenieni i znani naukowcy z całego świata, m.in. z Francji, Ukrainy, Włoch, Holandii, Wielkiej Brytanii i Polski.

Celem szkoły jest usystematyzowanie wiedzy na temat kosmologii teoretycznej i obserwacyjnej oraz zapoznanie uczestników z najnowszymi wynikami badań naukowych w dziedzinie kosmologii. Szkoła przeznaczona jest zarówno dla studentów studiów magisterskich i doktoranckich, jak i młodych naukowców zainteresowanych tą dziedziną nauki. W programie znajdują się wykłady teoretyczne oraz warsztaty praktyczne. Strona internetowa szkoły:

www.cosmology-school.ujk.edu.pl

Skutek i przyczyna

Felietonista jednej z gazet zauważył, jak bardzo na publikacjach waży brytyjski sposób narracji: nie pisze się „ogrzewałem roztwór”, ale „roztwór był ogrzewany”. Ma to pomagać osiągnięciu przez czytelnika wrażenia obiektywizmu. Są w historii odkryć naukowych pewne węzłowe momenty, które mnie zawsze interesowały, a o których nie pisze się w sposób otwarty w publikacjach naukowych.

Zatem interesuje mnie moment okrzyku odkrywcy: *eureka* i co po nim następuje. Każdy doświadczalnik takie momenty przeżywał, nawet jeżeli dotyczyły one decyzji, czy roztwór ogrzać, czy nie, i taki moment, proszę Państwa, to jest po prostu moment szczęścia w pracy zawodowej.

Ostatnio uczestniczyłam w pracy jury, które po rozmowach z dwudziestoma bardzo młodymi badaczami miało wyłonić tych najlepszych. Swoje badania prowadzili, będąc jeszcze w szkole. Jeden z nich, poszukując przyczyn pewnego zjawiska i odrzucając po kolei kilka – wreszcie znalazł czynnik, który ze zjawiskiem korelował. Zapytałam go wtedy, co czuł w momencie swojego ODKRYCIA, i poczułam z uczniem wielką wspólnotę, widząc błysk w oku i szybką, entuzjastyczną odpowiedź. Być może to było najważniejsze moje wrażenie z tych dwudziestu rozmów.

Ta sama praca pobudziła mnie także do dalszych rozmyślań o drogach, którymi chodzą odkrycia korelacji. Jedno z najważniejszych w moich wspomnieniach dotyczy do hipotezy słynnego amerykańskiego wirusologa, Petera Duesberga. Działo się to w końcu lat 80. ubiegłego wieku. Mój ówczesny szef naukowy, profesor David Shugar, otrzymał z ważnego pisma, w którym był recenzentem, stustronicową pracę Duesberga, w której ów wywodził tezę, iż wirus HIV nie jest przyczyną AIDS, a towarzyszy tej chorobie „przy okazji” osłabienia organizmu. Shugar przekazywał tę publikację wielu współpracownikom, prosząc o uwagi. Był to czas, w którym „wszyscy” zgadzali się z przyczynową rolą HIV i praca Duesberga, idąc pod prąd poglądów „wszystkich”, mogła być bardzo ważna i przełomowa. Po kilku tygodniach Shugar zdecydował, że będzie popierał jej druk. Pamiętam, że była niezwykle logiczna i przemawiała także do mnie.

Choć wystąpienie sporadycznych przypadków AIDS udokumentowano przed 1970 rokiem, to rozprzestrzenienie zaczęło być zauważalne w końcu lat 70. W 1980 roku AIDS zdiagnozowano na pięciu kontynentach i oceniono liczbę zakażonych na 100–300 tysięcy.

Co postulował Duesberg? Warto przypomnieć, że szybko wzrastająca liczba chorych stanowiła ponurą groźbę dla przeżywalności dużej części populacji. Duesberg wskazywał na znaczącą korelację liczby zachorowań ze zwiększeniem użycia narkotyków, rozpasaniem seksualnym, zastosowaniem pierwszego leku jeszcze nieleczącego, charakterem zakażeń przez retrowirusy (materiał genetyczny to RNA, nie DNA). Uważał, że HIV pojawia się jako pasażer już rozwijającego się AIDS.

Praca Duesberga zmusiła wirusologów na całym świecie do dokładniejszego przyjrzenia się wynikom badań i przebiegu terapii. Doprowadziła do liczbowo wielkich, idących w dziesiątki tysięcy, badań szczegółowych przyczyn choroby. Zastrzeżenia Duesberga zostały obalone: tylko infekcje HIV są stałą przyczyną AIDS, której to chorobie sprzyjają, ale nie powodują, czynniki opisywane przez Duesberga. Hipoteza Duesberga odegrała bardzo ważną rolę zarówno w poznaniu sposobów i dróg zakażenia, jak i w poszukiwaniu skutecznych leków. W latach 1985–2013 AIDS zaraziło się na świecie około 78 mln osób, z czego około 39 mln zmarło; w 2014 roku z powodu AIDS zmarło 1,2 mln ludzi. Dziś, przekonuje medycyna, AIDS stało się chorobą chroniczną, z którą, właściwie leczoną, można przez wiele lat żyć.

Praca ucznia, o której wspomniałam, też może budzić podobne wątpliwości. Nim uznamy, że ma rację i że warto dalej iść w postulowanym przez niego kierunku, trzeba dodatkowo zbadać dokładniej wzajemną zależność zjawiska i czynnika mu towarzyszącego. Czy ten ostatni jest przyczyną czy skutkiem? Błysk w oku odkrywcy wcale nie musi zgasnąć. Może go ta praca nauczyć jednak na całe życie, że warto dokładnie przemyśleć swoje wyniki, że warto o nich rozmawiać z osobami „z boku”, że korelacja nie jest dowodem i że przyroda stawia nam wiele pytań i zagadek, na które nie od razu znajdziemy odpowiedź.

Magdalena FIKUS

Z wyczuciem, czyli po ludzku?

Użyty w tytule rzeczownik ma bardzo wiele znaczeń. W szczególności może odnosić się do umiejętności heurystycznego rozwiązywania problemów, czy też do kinestetycznej perfekcji ruchów. Możliwe, że to, między innymi, dzięki wykształceniu tych zdolności, pozwalających np. na skuteczny rzut kamieniem (bumerangiem?), człowiek osiągnął przewagę ewolucyjną.

Okazuje się, że taką przewagę nadal utrzymujemy, ale tym razem nad najefektywniejszymi algorytmami.

Przewaga ta zaczęła być ostatnio wykorzystywana do poprawy symulacji kwantowych [1]. Konkretnie chodzi o dobranie jak najlepszego sposobu przenoszenia pojedynczego atomu między dwoma węzłami sieci optycznej za pomocą tzw. optycznej pęsety (ang. *optical tweezer*) – silnie zogniskowanego promienia lasera, którym można przesuwac atomy. Jest to jedno z kluczowych wyzwań przy konstrukcji komputera kwantowego z uwięzionych w sieci optycznej atomów. Problem polega na tym, że trzeba to robić bardzo szybko, żeby zdążyć przed dekoherencją, ale znowu nie nazbyt gwałtownie, żeby atomy się za bardzo nie rozmywały (kwantowo).

Znalezione za pomocą symulacji najlepsze strategie pewnego przeniesienia (z prawdopodobieństwem powyżej 0,99) dawały czasy nie lepsze niż 0,24 jednostki (która, w przypadku atomów rubidu 87, odpowiada 39 ms).

Udział ludzi stał się możliwy dzięki specjalnie przygotowanej grze komputerowej *Quantum Moves* [2], w której wyzwaniem jest zadanie nazwane *BringHomeWater* [1] polegające na przeniesieniu zebranego w minimum potencjału płynu (kwadratu funkcji falowej) w określone miejsce, z jak najmniejszym „rozchlapaniem”. Potencjał jest wyobrażony za pomocą linii na ekranie. Za pomocą kursora można przemieszczać jego minimum (optyczną pęsetę) i regulować głębokość tego minimum (intensywność lasera), a kwadrat funkcji falowej zachowuje się jak wizualizowany płyn ograniczony od dołu linią potencjału. Dla ludzi czas został spowolniony czynnikiem 30 000.

Okazuje się, że najlepsze wyniki ludzi są lepsze niż najlepsze wyniki algorytmów. Po prostu szybko uczymy się intuicyjnie reagować na to, co widzimy. Jeszcze lepsze osiągi daje wspomóżenie ludzkiego wyczucia wielokrotnymi modyfikacjami zarejestrowanego ruchu w poszukiwaniu najlepszego rozwiązania bliskiego znalezionemu przez człowieka. Tą metodą udało się skrócić czas ponad dwukrotnie.

W opiniach na temat omawianych wyników pojawiła się sugestia o udokumentowanej w ten sposób przewadze człowieka nad komputerem. Jest tylko jeden szkopał. *Quantum Moves*, w odróżnieniu od podobnie użytecznych zabaw np. w odgadywanie struktury białek (*Foldit*) czy RNA (*EteRNA*) jest grą (w ostatecznym rozrachunku) zręcznościową.

To może jeszcze lepsze byłyby w tym koty albo foki?

Lokalny realizm po kompresji

Lokalny realizm, którego oczywistość przywoływali Einstein, Podolski i Rosen w swoim słynnym paradoksie (EPR) w celu zakwestionowania przewidywań mechaniki kwantowej, nie wytrzymał doświadczalnych prób wykazujących łamanie wynikających z niego nierówności zaproponowanych (kilkadziesiąt lat później) przez Bella.

Jeżeli widać korelację między rozdzielonymi przestrzennie zdarzeniami, to lokalny realizm wymusza konkluzję, że to rozdzielenie jest tylko pozorne. Np. odnajdując w bagażu tylko lewy kapeć, od razu wiem, że w domu został prawy, ale tak było od momentu zamknięcia walizki! Natomiast zgodnie z mechaniką kwantową mogę np. przygotować tzw. singletowy stan splątany dwóch ortogonalnych qubitów, o których nic więcej (poza ortogonalnością) nie wiadomo. Jednak w momencie pomiaru jednego, natychmiast wiem jaki jest ten drugi. Żeby qubity odróżnić od kapci, trzeba je mierzyć w innej bazie, niż zostały przygotowane. Np. jeżeli początkowo były to polaryzacje fotonów: pionowa i pozioma, to należy je rejestrować za pomocą polaryzatorów przekreślonych o pewien (różny od $\frac{\pi}{2}$) kąt względem pionu, żeby pojedynczy wynik nie był z góry znany. Wtedy średni poziom korelacji między pomiarami będzie łamał nierówności Bella (o których można myśleć jak o nierównościach trójkąta). Wynik jest w takim przypadku rezultatem analizy statystycznej wielu pojedynczych pomiarów.

Okazuje się, że można to zrobić inaczej: odwołując się do złożoności Kołmogorowa ciągów wyników x i y . Złożoności tej, jako odpowiadającej najkrótszej sekwencji działań uniwersalnej maszyny Turinga generującej dany ciąg, zazwyczaj nie daje się obliczyć. Można ją jednak ograniczyć od góry przez długość $C(x)$ skompresowanego ciągu x , bo im większy stopień korelacji, tym krótszy zapis po kompresji.

W ten sposób można zdefiniować $NCD(x, y)$ (ang. *Normalized Compression Distance*), czyli „znormalizowaną odległość kompresyjną” dwóch ciągów x i y (w tym przypadku są to binarne ciągi pomiarów każdego qubitu z kolejnych par) w poniższy sposób

$$NCD(x, y) = \frac{C(x, y) - \min\{C(x), C(y)\}}{\max\{C(x), C(y)\}},$$

gdzie $C(x, y)$ jest skompresowaną długością połączonych ciągów x i y . Pomysł ten został pomyślnie przetestowany [3] z udziałem dwóch polskich fizyków. Stosowna nierówność okazała się być łamana.

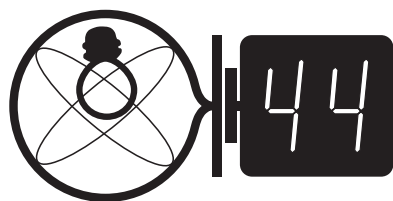
Piotr ZALEWSKI

[1] J.J.W.H. Sorensen, M.K. Pedersen, M. Munch, P. Haikka, J.H. Jensen, T. Planke, M.G. Andreasen, M. Gajdacz, K. Molmer, A. Lieberoth i J.F. Sherson; *Exploring the quantum speed limit with computer games*; *Nature* **532** (2016) 210; doi:10.1038/nature17620.

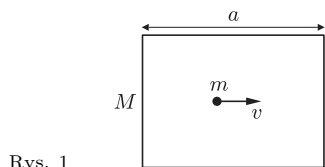
[2] <https://www.scienceathome.org/games/quantum-moves/game>.

[3] Hou Shun Poh, M. Markiewicz, P. Kurzyński, A. Cere, D. Kaszlikowski i Ch. Kurtsiefer; *Probing the quantum—classical boundary with compression software*; *New J. Phys.* **18** (2016) 035011; doi:10.1088/1367-2630/18/3/035011.

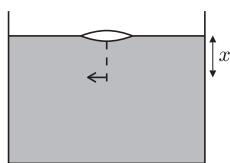
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2016



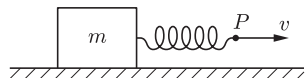
Rys. 1



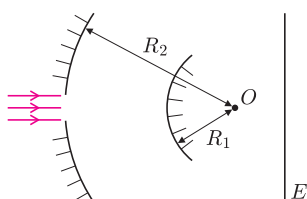
Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 606 ($WT = 2,2$), 607 ($WT = 2,5$), 608 ($WT = 1,4$) i 609 ($WT = 3$) z numerów 11–12/2015

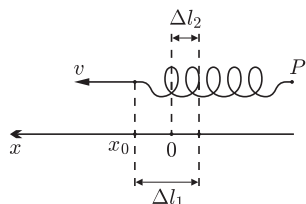
Tomasz Wietecha	Tarnów	47,50
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Michał Koźlik	Gliwice	33,88
Marian Lupieżowicz	Gliwice	33,32
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikieliewicz	Brodnica	22,22
Jan Zambrzycki	Białystok	17,14



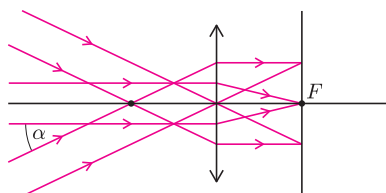
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 620, 621

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

620. W chwili początkowej prostokątna ramka o masie M spoczywa na powierzchni poziomej, a mała kulka o masie m porusza się z prędkością v wewnątrz ramki, równoległe do boku o długości a (rys. 1). Kulka zderza się sprężysto ze środkami krótszych boków ramki. Znaleźć czas pomiędzy kolejnymi zderzeniami z tym samym bokiem ramki. Nie ma tarcia.

621. Dwuwypukła soczewka o promieniach krzywizny R , wykonana ze szkła o współczynniku załamania n_s , zanurzona jest jedną stroną w wodzie (rys. 2). Mały przedmiot znajduje się w wodzie na osi optycznej soczewki, w odległości x od soczewki. Wysokość przedmiotu wynosi h . W soczewce powstaje obraz pozorny. Jakie jest jego powiększenie liniowe? Współczynnik załamania wody jest równy n_w .

Rozwiązania zadań z numeru 2/2016

Przypominamy treść zadań:

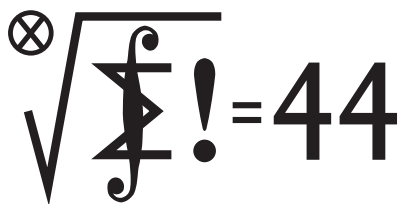
612. Na poziomej powierzchni spoczywa klocek o masie m , do którego doczepiono nieważką sprężynę o współczynniku sprężystości k . W pewnej chwili wolny koniec sprężyny zaczęto ciągnąć tak, że poruszała się on ze stałą poziomą prędkością v . Jaką drogę przebędzie klocek do momentu, w którym osiągnie on prędkość v ? Współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego między klockiem a podłożem wynoszą odpowiednio μ_s i μ_k , przy czym $\mu_s > \mu_k$.

613. Za pomocą układu koncentrycznych zwierciadeł otrzymano na ekranie ostry obraz Słońca. Promienie krzywizny zwierciadeł wynoszą $R_1 = 12$ cm i $R_2 = 30$ cm. Jaka jest ogniskowa cieniekiej soczewki, za pomocą której można otrzymać obraz Słońca o takiej samej wielkości?

612. Klocek ruszy z miejsca, gdy rozciągnięcie sprężyny osiągnie wartość $\Delta l_1 = \mu_s mg/k$ i przyjmijmy tę chwilę za początkową. W układzie odniesienia związanym ze swobodnym końcem P sprężyny klocek zacznie oddalać się ruchem harmonicznym od położenia równowagi ($x = 0$ na rys. 5), gdzie wydłużenie sprężyny wynosi $\Delta l_2 = \mu_k mg/k$. W chwili początkowej prędkość klocka wynosi v , a jego odległość od położenia równowagi jest równa $x_0 = \Delta l_1 - \Delta l_2 = (\mu_s - \mu_k)mg/k$. Z zasady zachowania energii maksymalna odległość klocka od położenia równowagi wynosi $A = \sqrt{mv^2/k + m^2g^2(\mu_s - \mu_k)^2/k^2}$. W tym położeniu prędkość klocka względem podłoża osiągnie wartość v . Ruch klocka do chwili, gdy oddali się na maksymalną odległość A , opisuje wzór $x = A \sin(\omega t + \varphi)$, gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$. Z warunku początkowego $x(0) = x_0$ otrzymujemy przesunięcie fazowe $\sin \varphi = x_0/A$. Czas t_A , po którym odległość od położenia równowagi osiągnie wartość A , dostajemy ze wzoru $\omega t_A + \varphi = \pi/2$. Odległość klocka od położenia początkowego w układzie związanym z końcem sprężyny równa jest $A - x_0$. Szukana droga przebyta przez klocek w układzie związanym z podłożem wynosi $s = vt_A - (A - x_0)$.

613. Z każdego punktu Słońca na soczewkę albo zwierciadło pada wiązka promieni równoległych. Wiązki wychodzące z różnych punktów nie są równoległe do siebie (rys. 6). Obraz Słońca powstaje w płaszczyźnie ogniskowej soczewki albo zwierciadła, a jego promień wynosi $f \tan \alpha \approx f\alpha$, gdzie α jest promieniem kątowym Słońca widzianego z Ziemi, a f ogniskową soczewki albo zwierciadła. Obraz pozorny Słońca w zwierciadle wypukłym o ogniskowej $f_1 = -R_1/2$ ma promień $h = |f_1|\alpha$, jest przedmiotem dla zwierciadła wklęsłego o ogniskowej $f_2 = R_2/2$ i znajduje się w odległości od niego równej $x_2 = R_2 - R_1/2$. Obraz, który powstaje w zwierciadle wklęsłym, oddalony jest od niego o $y_2 = \frac{R_2(2R_2 - R_1)}{2(R_2 - R_1)}$. Powiększenie tego obrazu wynosi $\frac{H}{h} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{R_2}{R_2 - R_1}$, zatem jego promień to $H = \frac{R_2}{R_2 - R_1}|f_1|\alpha$. Szukana ogniskowa soczewki wynosi $f = \frac{H}{\alpha} = \frac{R_1 R_2}{2(R_2 - R_1)}$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
709 ($WT = 1,06$) i 710 ($WT = 3,44$)
z numeru 11/2015

Jerzy Cisło	Wrocław	46,98
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	41,40
Stanisław Bednarek	Łódź	39,91
Janusz Fiett	Warszawa	38,97
Marek Gałecki	USA	37,76
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Paweł Kubit	Kraków	36,17
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	34,72

Jerzy Cisło oto i za czterech Weteranów
stanie! Dwanaście okrążeń – to nie jakieś
byleco. Życzymy wielu dalszych rund!
To nieprzerwane zainteresowanie naszą
zabawą – ze strony matematyka tej klasy
– cenimy ogromnie.

715. Można przyjąć, że $A < B$. Wskażemy indukcyjną konstrukcję ciągu zbiorów $X_n = \{x_n, y_n, z_n\}$ ($x_n < y_n < z_n$) o wymaganych własnościach. Zacniemy od trójki $x_0 = 0, y_0 = A, z_0 = A + B$. Załóżmy, że zbiory X_0, \dots, X_{n-1} zostały już określone. Wówczas definiujemy x_n jako najmniejszą liczbę naturalną jeszcze niewykorzystaną (tzn. nieobecną w zbiorze $X_0 \cup \dots \cup X_{n-1}$) – to już gwarantuje, że w wyniku całej konstrukcji wszystkie liczby naturalne zostaną użyte oraz że ciąg (x_n) będzie rosnący.

Aby dokończyć określenie zbioru X_n (gdy X_0, \dots, X_{n-1} już mamy), patrzymy na liczbę $x_n + A$. Jeżeli jest ona jeszcze niewykorzystana, przyjmujemy ją jako y_n . Jeżeli jest wykorzystana, bierzemy jako y_n liczbę $x_n + B$; i z konieczności przyjmujemy $z_n = x_n + A + B$ (tak więc jedna z różnic $y_n - x_n, z_n - y_n$ będzie równa A , a druga B). Tak określona liczba z_n jest większa od liczb z_0, \dots, z_{n-1} , więc nie została wcześniej wykorzystana.

Pozostaje uzasadnić, że w przypadku, gdy liczba $x_n + A$ została już wykorzystana, wówczas liczba $x_n + B$ pozostała niewykorzystana (i może być użyta jako y_n). Przypuśćmy, że liczba $x_n + B$ znalazła się w którymś zbiorze X_k o numerze $k < n$. Skoro $x_n > x_k$, to $x_n + B > x_k + B \geq y_k$; musiałyby zajść równości $x_n + B = z_k$. Ale $z_k = x_k + A + B$, więc mielibyśmy $x_n = x_k + A$. Liczba x_n , niewykorzystana aż do n -tego kroku konstrukcji, tym bardziej nie była jeszcze wykorzystana w momencie konstrukcji zbioru X_k , więc na mocy przyjętego algorytmu powinna była zostać użyta jako y_k .

Uzyskana sprzeczność dowodzi niesłuszności przypuszczenia, że $x_n + B \in X_0 \cup \dots \cup X_{n-1}$, i uzasadnia poprawność określenia y_n ; powstały zbiór

Zadania z matematyki nr 723, 724

Redaguje Marcin E. KUCZMA

723. Czy każdy ściśle rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych ma wyraz, będący jednocześnie pewnym wyrazem ciągu Fibonacciego (F_n)?
($F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$)

724. Dowieść, że liczby zespolone a, b, c spełniają równanie

$$|a + b - c| + |b + c - a| + |c + a - b| = |a| + |b| + |c|$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają równanie

$$|a + b - c| + |b + c - a| + |c + a - b| = |a + b + c|.$$

Zadanie 724 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2016

Przypominamy treść zadań:

715. Dane są dwie różne liczby całkowite dodatnie A, B . Wykazać, że zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych może być przedstawiony jako suma rozłącznych zbiorów trójelementowych, przy czym w każdym z tych zbiorów liczba środkowa (co do wielkości) różni się od jednej z dwóch pozostałych liczb o A , zaś od drugiej o B .

716. Dowieść, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\sqrt{a^2b + ab^2 - abc} + \sqrt{b^2c + bc^2 - abc} + \sqrt{c^2a + ca^2 - abc} > \frac{1}{2}(a + b + c)\sqrt{a + b + c}.$$

Czy współczynnik $1/2$ (po prawej stronie) może być zastąpiony przez liczbę większą?

$X_n = \{x_n, y_n, z_n\}$ jest rozłączny ze zbiorami X_0, \dots, X_{n-1} .

716. Przyjmijmy $a = y + z, b = z + x, c = x + y$; $s = x + y + z = (a + b + c)/2$. Oczywiście x, y, z to długości fragmentów boków od wierzchołków do punktów styczności z okręgiem wpisanym. Oznaczając przez I, r środek i promień okręgu wpisanego, mamy zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa $|AI|^2 = x^2 + r^2, |BI|^2 = y^2 + r^2, |CI|^2 = z^2 + r^2$.

Lewa strona zadanej nierówności jest sumą trzech składników. Przekształcamy wyrażenie pod pierwiastkiem w pierwszym składniku:

$$(1) \quad ab(a + b - c) = (x + z)(y + z) \cdot 2z = 2xyz + 2sz^2.$$

Pole trójkąta wyraża się wzorami $S = \sqrt{sxyz}$ (wzór Herona) oraz $S = sr$; stąd $xyz = sr^2$. Kontynuujemy przekształcenie (1):

$$2xyz + 2sz^2 = 2sr^2 + 2sz^2 = 2s \cdot |CI|^2.$$

Analogicznie wyrażają się pozostałe dwa składniki. Dowodzona nierówność przybiera postać

$$\sqrt{2s \cdot |CI|^2} + \sqrt{2s \cdot |AI|^2} + \sqrt{2s \cdot |BI|^2} > \frac{1}{2} \cdot 2s \cdot \sqrt{2s};$$

po uproszczeniu:

$$(2) \quad |CI| + |AI| + |BI| > s$$

– co jest banalną prawdą, skoro $|CI| > z, |AI| > x, |BI| > y$.

Biorąc trójkąt, w którym najmniejszy kąt jest bliski zeru, uzyskujemy w nierówności (2) stosunek lewej do prawej strony dowolnie bliski jedności (trójkąt niewiele różni się od odcinka, a obie strony (2) są bliskie długości owego odcinka). Stąd wniosek, że stała $1/2$ (w oryginalnej nierówności) jest optymalna.

Prosto z nieba: Skąd wziął się Księżyc?

Na tytułowe pytanie planetolodzy odpowiadają najczęściej, podając listę najlepszych teorii: **1)** Księżyc był kiedyś częścią Ziemi, ale w pewnym momencie na wczesnym etapie życia Układu Słonecznego nastąpiło spontaniczne oddzielenie (przypuszczalnie w rejonie Oceanu Spokojnego); **2)** Księżyc powstał gdzieś indziej i został przechwycony przez Ziemię; **3)** Ziemia i Księżyc powstały w obecnej konfiguracji, w tym samym momencie z pierwotnej mgławicy; **4)** oddziaływanie Ziemi z planetozymalami (skondensowanymi kawałkami materii protoplanetarnej) dostarczyło materiału do budowy Księżyca; **5)** uderzenie protoplanety wielkości Marsa doprowadziło do wyrzucenia części ziemskiej materii, z której później powstał Księżyc.

Ostatnią możliwość badał niedawno zespół geochemików z UCLA. Stwierdzają oni, że Księżyc powstał podczas gwałtownego zderzenia Ziemi z protoplanetą wielkości Marsa nazwaną Theia, mniej więcej 100 milionów lat po powstaniu Ziemi (około 4,5 miliarda lat temu). Co różni to badanie od przeprowadzanych wcześniej? Podstawowym źródłem wiedzy o początkach Ziemi i Księżyca jest ich skład chemiczny, np. zawartość różnych

izotopów tlenu (^{16}O , ^{17}O i ^{18}O). Każda z planet ma własną, charakterystyczną dla niej zawartość tych izotopów. Jeśli zatem zawartości w próbkach ziemskich i księżycowych nie zgadzają się, stanowi to podstawę do przypuszczenia, że skały te powstały w różnych miejscach i warunkach. Zespół z UCLA zbadal siedem próbek skał przywiezionych z Księżyca przez astronautów misji Apollo 12, 15 i 17 oraz sześć próbek skał wulkanicznych skorupy ziemskiej, lecz nie stwierdzono różnic we względnej zawartości różnych izotopów, np. $^{17}\text{O}/^{16}\text{O}$. Jeśli przyjąć teorię zderzenia Ziemi z mniejszą protoplanetą, oznacza to, że zderzenie było czołowe (w przeciwieństwie do niecentralnego „otarcia się” dwóch mijających się planet) – co za tym idzie, materia Thei została wymieszana z ziemską i istnieje obecnie na Ziemi i Księżycu w równych proporcjach. Hipoteza zderzenia jest również ciekawa z punktu widzenia obecności wody na młodej Ziemi – czy podczas zderzenia woda została usunięta, a po pewnym czasie bogate w wodę asteroidy spadły z powrotem na Ziemię? W tym celu prowadzi się porównawcze badania pokrytej kraterami Ziemi i Marsa, który w swojej historii uniknął wielkich bombardowań.

Michał BEJGER

Niebo w czerwcu

Czerwiec, pomimo najkrótszych nocy w roku, jest dobrym miesiącem do obserwacji spadających gwiazd. Rojem, na którym warto skupić uwagę, są Bootydy Czerwcowe, których radiant znajduje się w gwiazdozbiornie Wolarza (RA: 14,9h, Dec: +48°). Aktywność tego roju przypada na 22 VI–2 VII, a jego maksimum wypada 27 VI. Bootydy charakteryzują się zmienną i nieregularną aktywnością wynoszącą zazwyczaj około 100 meteorów na godzinę. Jednak warto pamiętać, że w latach 1916 i 1922 deszcze Bootydów były bardzo obfite, a w 1927 roku ich aktywność wyniosła aż 300 obiektów na godzinę. Niestety, po 1933 roku rój wyraźnie osłabł. Bootydy są nadzwyczaj powolnymi meteorami, z prędkościami około 18 km/s. Są związane z kometą 7P/Pons-Winnecke. Kolejnym rojem, który można obserwować w czerwcu, są omega Skorpionidy, których aktywność wypada 23 V–15 VI z maksimum 4 VI. Ich radiant znajduje się w gwiazdozbiornie Skorpiona na współrzędnych RA: 16,2h, Dec: -22°. Rój ten znany był już w starożytnej Grecji, a charakteryzuje się jasnymi, powolnymi (prędkość 23 km/s), żółtopomarańczowymi meteorami. Aktywność omega Skorpionidów jest zmienna i dość niska, wynosi około 5 meteorów na godzinę. Rojem widocznym w drugiej połowie czerwca są Lirydy Czerwcowe, dostępne 11–21 VI, z maksimum przypadającym na 16 VI. Rój ten położony w gwiazdozbiornie Lutni ma swój radiant na współrzędnych RA: 18,5h, Dec: +35°. Lirydy Czerwcowe są także rojem nieregularnym i zmiennym, z aktywnością wynoszącą około 5 meteorów na godzinę, które poruszają się z prędkościami około 31 km/s.

Czerwcowe noce warto również wykorzystać na obserwacje planetoid. Ze względu na now Księżyca, przypadający 5 VI,

obserwacje lepiej zaplanować na pierwszą połowę miesiąca. Chociaż te małe ciała Układu Słonecznego stanowią wdzięczne obiekty do obserwacji, to jest to zadanie dla posiadaczy lornetek, lunetek i małych teleskopów, którzy lubią prowadzić obserwacje z terenów mało „zanieczyszczonych” światłem, gdyż najjaśniejsze planetoidy dostępne w czerwcu będą mieć jasności z zakresu 9–10^m. Dobrym celem do obserwacji będzie siódma w kolejności odkrycia – planetoida (7) Iris, której jasność w okolicach nowiu to 9,5^m. Obiekt, którego nazwa wzięła się od posłanki bogów greckich, znajdziemy na tle gwiazdozbiornu Wężownika. Kolejną wartą uwagi małą planetką jest (8) Flora (także w okolicach Wężownika; jasność 9,4^m); jej nazwa pochodzi z mitologii rzymskiej i opisuje wiosenną boginię zieleni i kwiatów. Kolejną wartą uwagi planetoidą z Głównego Pasa Planetoid (czyli mającą orbitę między Marsem a Jowiszem) jest (516) Amherstia, której jasność w pierwszej połowie czerwca wyniesie około 10,6^m i znaleźć ją będzie można na tle gwiazdozbiornu Węgielnicy położonej pomiędzy gwiazdozbiornami Skorpiona i Centaura. W drugiej połowie czerwca obserwacje planetoid będą zdecydowanie trudniejsze. Przeszkadzać będzie Księżyc, którego pełnia przypada 20 VI. Dodatkowo, tej samej nocy, czyli 20 VI rozpoczyna się astronomiczne lato, zatem długość dnia przekroczy 16 godzin i na obserwacje nie pozostanie wiele czasu. Jednak dla chcących prowadzić wtedy obserwacje proponujemy planetoidy: (354) Eleonora, której jasność 24 VI wyniesie 10,7^m (również na tle gwiazdozbiornu Wężownika), a także (704) Interamnia z jasnością 10,4^m przypadającą 19 VI; szukać jej można między gwiazdozbiornami Wężownika i Strzelca.

Karolina BĄKOWSKA



Boki trójkąta

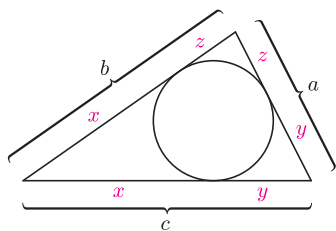
Joanna JASZUŃSKA

Jeśli w nierówności, którą chcemy uzasadnić, występują długości boków a, b, c pewnego trójkąta, często przydaje się *podstawienie Ravięgo*: $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, gdzie $x, y, z > 0$. Takie liczby x, y, z zawsze istnieją, są to bowiem długości odcinków stycznych do okręgu wpisanego w trójkąt (rysunek).

Nierówność średnich dla liczb $s, t > 0$:

$$\sqrt{\frac{s^2 + t^2}{2}} \geq \frac{s + t}{2} \geq \sqrt{st} \geq \frac{2}{1/s + 1/t}.$$

Średnie te to kolejno: kwadratowa (K), arytmetyczna (A), geometryczna (G) i harmoniczna (H).



Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wykaż, że:

- $\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c} + \frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{a-b+c} + \frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{a+b-c} \geq a+b+c.$
- $\frac{1}{-a+b+c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$
- $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \sqrt{-a+b+c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{a+b-c}.$
- $abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$
- $2(ab+bc+ca) > a^2 + b^2 + c^2.$
- $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$
- Wykaż, że jeśli $x, y, z > 0$, to $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$

Autorem nierówności 4 jest Alessandro Padoa, natomiast nierówność 7 to nierówność Alfreda Nesbitta.

Rozwiązania

We wszystkich rozwiązaniach stosujemy podstawienie:

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y.$$

Wówczas $-a + b + c = 2x$, $a - b + c = 2y$, $a + b - c = 2z$.

R1. Należy dowieść, że

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geq x + y + z.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geq G$ mamy

$$\frac{\frac{yz}{x} + \frac{xy}{z}}{2} \geq \sqrt{yz}, \quad \frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} \geq \sqrt{yx}, \quad \frac{\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{2} \geq \sqrt{zy},$$

co po dodaniu stronami kończy dowód. \square

R2. Należy wykazać, że

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \geq \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geq H$ mamy

$$\frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{4} \geq \frac{1}{y+z}, \quad \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}}{4} \geq \frac{1}{z+x}, \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{4} \geq \frac{1}{x+y},$$

co po dodaniu stronami daje tezę. \square

R3. Należy udowodnić, że

$$\sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} \geq \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z}.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $K \geq A$ mamy

$$\begin{aligned} \sqrt{y+z} &\geq \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{z}}{2}, \\ \sqrt{z+x} &\geq \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{z} + \sqrt{x}}{2}, \\ \sqrt{x+y} &\geq \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}, \end{aligned}$$

co po dodaniu stronami kończy dowód. \square

R4. Należy pokazać, że

$$(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geq G$ mamy

$$y+z \geq 2\sqrt{yz}, \quad z+x \geq 2\sqrt{zx}, \quad x+y \geq 2\sqrt{xy},$$

co po wymnożeniu stronami daje tezę. \square

R5. Należy dowieść, że

$$\begin{aligned} 2((y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)) &> \\ &> (y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2. \end{aligned}$$

Równoważnie,

$$4(xy + yz + zx) > 0,$$

co jest prawdą, bo $x, y, z > 0$. \square

R6. Należy uzasadnić, że

$$\frac{y+z}{2x+y+z} + \frac{z+x}{x+2y+z} + \frac{x+y}{x+y+2z} < 2.$$

Zmniejszenie mianownika zwiększa wartość ułamka, więc

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{2x+y+z} + \frac{z+x}{x+2y+z} + \frac{x+y}{x+y+2z} &< \\ < \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{z+y+z} + \frac{x+y}{x+y+z} &= 2. \quad \square \end{aligned}$$

R7. Należy wykazać, że

$$\frac{-a+b+c}{a} + \frac{a-b+c}{b} + \frac{a+b-c}{c} \geq 3.$$

Z nierówności pomiędzy średnimi $A \geq G$ mamy

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \quad \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2, \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2,$$

co po dodaniu stronami i odjęciu 3 daje tezę. \square

Zadania 2 i 7 pochodzą odpowiednio z XLV i z VIII Olimpiady Matematycznej.