


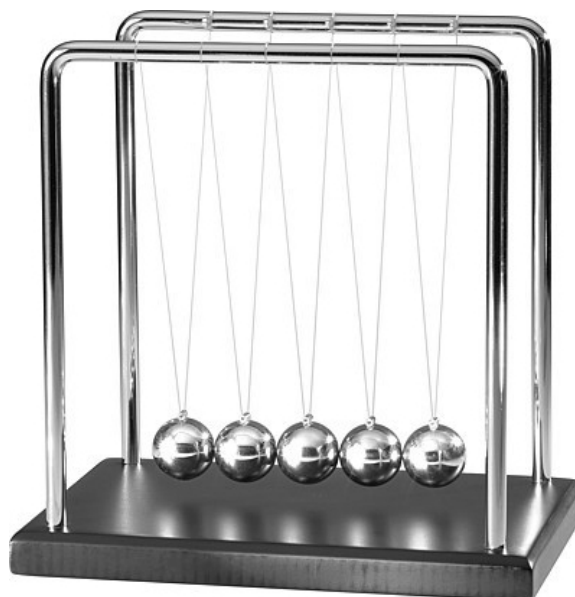


SPIS TREŚCI NUMERU 4 (503)

O grupie warkoczy <i>Bronisław Wajnryb</i>	str. 1
Pierwsze cyfry <i>Maciej Paják</i>	str. 4
Szczepić czy nie szczepić? Oto jest pytanie... <i>Urszula Forys</i>	str. 6
 Moje 50 lat biologii molekularnej <i>Małgorzata Fikus</i>	str. 8
<i>Delta</i> i fizyka cząstek elementarnych (IV): Czego bezpośrednim świadkiem była <i>Delta</i> <i>Piotr Chankowski</i>	str. 9
Na tropie liczb grawowych <i>Kamila Bojar</i>	str.12
Czy Ziemia jest płaska? <i>Michał Miśkiewicz</i>	str.14
Kombinatoryka ekstremalna i przesuwanie zbiorów <i>Damian Orlef</i>	str.15
Bestiariusz informatyczny (2) <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.17
Analiza na kostce dyskretnej <i>Krzysztof Oleszkiewicz,</i> <i>Łukasz Rajkowski</i>	str.18
Prawdopodobieństwo i podzielność <i>Edward Stachowski</i>	str.19
 Zadania	str.19
Informatyczny kącik olimpijski (92): Wielomian <i>Paweł Burzyński</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Rekordowe pulsary	str.24
Niebo w kwietniu	str.24
 Dwusieczne <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

W następnym numerze polecamy



wahadło Newtona

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Tomasz Kazana, Krystyna Kordos – sek. red., Marek Kordos – red. nacz., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nacz., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2016 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

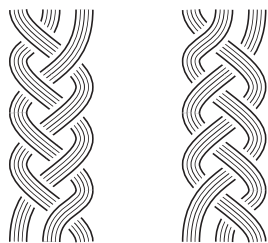
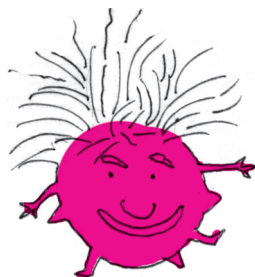
Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

O grupie warkoczy

Bronisław WAJNRYB*



Rys. 1. Warkocz „normalny” i odwrotny.

Grupa warkoczy była rozważana po raz pierwszy przez Adolfa Hurwitza w roku 1885, jednak nie pod tą nazwą; w grupie rozważanej przez Hurwitza trudno było dopatrzeć się warkoczy. Nazwę wprowadził Emil Artin w roku 1925, bo w jego interpretacji elementy grupy kojarzą się z warkoczami. Przypomnę, jak się je zaplata. Dzielimy włosy, z których chcemy zapleść warkocz, na trzy pasma równej grubości. Nazwijmy je: pasmo lewe, środkowe i prawe. Zaplatamy lewe pasmo na środkowe. Pasma zmieniają kolejność: lewe pasmo staje się środkowym, środkowe staje się lewym. Następnie zaplatamy prawe pasmo na środkowe, potem lewe na środkowe, i tak dalej. Gdy zbliżamy się do końca długości włosów, związujemy wszystkie trzy pasma razem sznurkiem, gumką, spinką lub wstążką z kokardką. Taki warkocz jest prosty do zaplecenia, estetyczny i trwały, zachowuje swój wygląd.

Można też zaplatać warkocz odwrotnie: pasmo środkowe na lewe, potem środkowe na prawe, potem środkowe na lewe, i tak dalej. Rezultat wygląda bardzo podobnie, ale jeśli zaczniemy zaplatać warkocz „normalnie” a potem, powiedzmy po położeniu lewego pasma na środkowe, będziemy kontynuować zaplataniem „odwrotnym” (pasmo środkowe na lewe, potem środkowe na prawe i tak dalej), to w pewnym momencie okaże się, że wszystko się rozplotło i mamy z powrotem trzy równoległe pasma, od których zaczęliśmy.

Warkocze matematyczne, o których mówił Artin, mogą się składać z wielu pasm. Każde z nich zastępujemy jednym włosem, zwanym *nicią*, który ma grubość równą zero. Ponadto, dla łatwiejszej interpretacji, będziemy warkocze zaplatać poziomo, jak Pippi Pończoszanka. Zdefiniuję teraz owe matematyczne obiekty. Ustalmy prostokątny układ współrzędnych w przestrzeni. Oś OX jest pozioma, skierowana z lewa na prawo i określa ona kierunek warkocza. Często piszemy t zamiast x i tak też będziemy postępować tutaj. Oś OY też leży w płaszczyźnie poziomej i jest skierowana „w głąb kartki”, a oś OZ jest skierowana do góry.

Warkocz o n niciach jest to wspólny wykres n funkcji ciągłych określonych na pewnym przedziale $[a, b]$, $f_1, f_2, \dots, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, spełniających dwa warunki:

- ich wykresy się nie przecinają, czyli dla każdego t z przedziału $[a, b]$ mamy $f_i(t) \neq f_j(t)$ dla $i \neq j$,
- zbiory ich wartości na początku i na końcu przedziału są takie same, czyli, bardziej formalnie, istnieje taka permutacja τ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, że $f_i(b) = f_{\tau(i)}(a)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

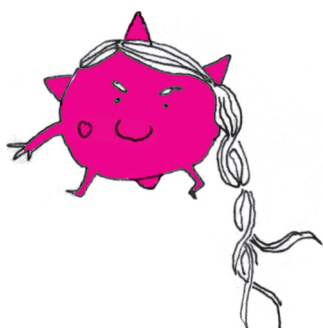
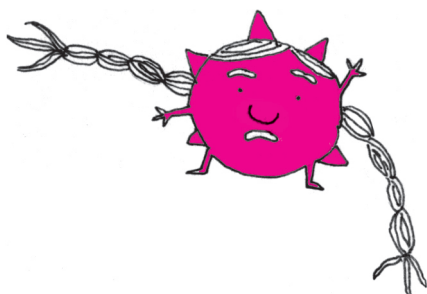
Wykres funkcji f_i to i -ta nić naszego warkocza. Dla wygody dalszego opisu przyjmijmy oznaczenie $P_i = f_i(a)$ i wybierzemy początki nici P_1, P_2, \dots, P_n na osi OZ ponumerowane od dołu do góry. Teraz kolejne nici leżą jedna nad drugą i gdy się zaplatają (krzyżują), mówimy, że dolna leży przed górną (patrząc „od nas”) lub za górną.

Warkocz będziemy oznaczać małą literą bez indeksu. Powiemy teraz, kiedy dwa warkocze $f = (f_1, \dots, f_n)$ i $g = (g_1, \dots, g_n)$ uważamy za takie same (równoważne, izotopijne), co będziemy oznaczać jako $f \sim g$. Najpierw dwa proste przypadki.

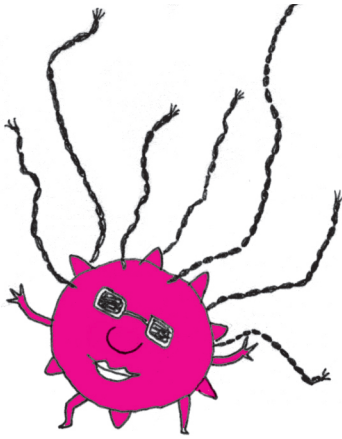
1. Przesunięcie: $g_i(t) = f_i(t - c)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Warkocz g jest określony na przedziale $[a + c, b + c]$ i jego wykres jest taki, jak wykres warkocza f , tylko przesunięty w lewo lub w prawo.
2. Zaplecenie gęściejsze lub rzadsze: $g_i(t) = f_i(ct)$, $c > 0$, dla $i = 1, 2, \dots, n$. Warkocz g jest określony na przedziale $[a/c, b/c]$ i jest zapleciony podobnie jak f , ale gęściej (jeśli $c > 1$) lub rzadziej (jeśli $c < 1$).

Ogólnie warkocze uznamy za równoważne, jeśli istnieje między nimi *izotopia*. Cóż to takiego? Jeśli funkcje f_i są określone na $[a, b]$, a g_i są określone na $[d, e]$, łączącą je izotopią nazwiemy funkcje ciągle dwóch zmiennych $F_1(t, s), \dots, F_n(t, s)$ określone na trapezie, którego dolna podstawa to $\{(t, 0) : t \in [a, b]\}$, a górna to $\{(t, 1) : t \in [d, e]\}$, spełniające następujący warunek: dla każdego ustalonego s funkcje tworzą warkocz, przy tym $F_i(t, 0) = f_i(t)$, a $F_i(t, 1) = g_i(t)$. Izotopia jest więc ciągłą rodziną warkoczy, łączącą warkocz f z warkoczem g .

*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska



Intuicyjnie, jeśli warkocze nie są zaplecione zbyt gęsto i nie są zbyt długie, to można złapać za lewe końce warkocza lewą ręką i za prawe końce warkocza prawą ręką, i potrząsnąć. Jeśli warkocze są równoważne, to po potrząśnięciu powinny wyglądać identycznie.

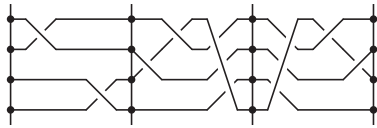


Warkocze można w naturalny sposób dodawać. Jeśli warkocz f jest określony na przedziale $[a, b]$, a warkocz g jest określony na przedziale $[b, c]$, to zbiór końców nici pierwszego warkocza pokrywa się ze zbiorem początków nici drugiego warkocza, więc można je odpowiednio połączyć i otrzymać jeden warkocz $f \cdot g$. Jeśli oznaczymy nowy warkocz przez h , to będzie on określony na przedziale $[a, c]$ przez funkcje

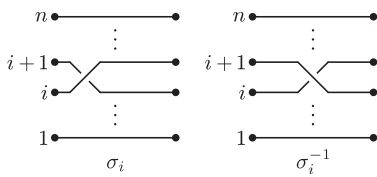
$$h_i(t) = \begin{cases} f_i(t) & \text{dla } t \in [a, b], \\ g_{\tau(i)}(t) & \text{dla } t \in [b, c], \end{cases}$$

gdzie τ jest permutacją odpowiadającą warkoczowi f . Jeśli przedziały określoności warkoczy nie łączą się na końcach, to można drugi warkocz odpowiednio przesunąć i dopiero wtedy połączyć warkocze.

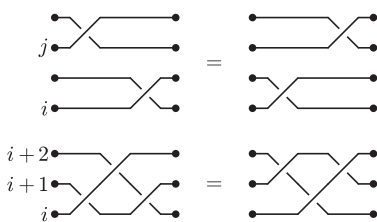
Tak określone działanie jest łączne, czyli $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$. Ponadto nietrudno wykazać, że jeśli $f \sim g$ i $h \sim k$, to $f \cdot h \sim g \cdot k$, więc działanie łączenia warkoczy jest określone (i łączne) na klasach równoważności warkoczy. Jego elementem neutralnym jest warkocz stały $\iota = (f_1, \dots, f_n)$ (a właściwie jego klasa równoważności), gdzie $f_i(t) = P_i$ dla każdego t z przedziału $[a, b]$. Wspomniałem we wstępie, że dołączenie do warkocza „normalnego” warkocza zaplecionego odwrotnie daje warkocz stały. Ogólnie, warkocz odwrotny do warkocza f otrzymujemy przez odbicie symetryczne warkocza f względem płaszczyzny OYZ . W ten sposób wykazaliśmy, że klasy równoważności warkoczy tworzą grupę ze względu na działanie łączenia warkoczy. Tę grupę nazywamy grupą warkoczy o n niciach i oznaczamy B_n (po angielsku *braid group*).



Rys. 2. Dodawanie warkoczy. Trzeci warkocz jest odwrotny do drugiego.



Rys. 3. Generatory grupy B_n .



Rys. 4. Relacje w B_n .

Dalej nie będę odróżniał klasy równoważności warkocza od jej reprezentanta, zwanego czasem warkoczem geometrycznym, i będę oba nazywał warkoczem. Z kontekstu będzie jasno wynikało, w którym ze znaczeń używam tego pojęcia.

Weźmy dowolny warkocz i rozważmy jego rzut na płaszczyznę OXZ , czyli „płaszczyznę kartki”. Powiemy, że dwie nici *krzyżują się*, jeśli krzyżują się ich rzuty na płaszczyznę OXZ . Może się zdarzyć, że rzuty trzech nici spotykają się w jednym punkcie lub że rzuty dwóch nici pokrywają się na pewnym odcinku, ale po izotopii (potrząśnięciu) możemy założyć, że liczba skrzyżowań jest skończona, przez każde skrzyżowanie przechodzą tylko dwie nici i dwa różne skrzyżowania mają różne współrzędne t . Wtedy albo nie ma skrzyżowań i warkocz jest prosty (równy ι), albo można podzielić przedział $[a, b]$ na krótkie przedziały tak, że w każdym z nich jest tylko jedno skrzyżowanie. Oznacza to, że nasz (dowolny) warkocz jest złożeniem warkoczy typu σ_i i σ_i^{-1} , przedstawionych na rysunku 3. Innymi słowy, warkocze σ_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, są *generatorami* grupy B_n . Między tymi generatorami zachodzą relacje

$$(*) \quad \begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i &= \sigma_j \sigma_i \sigma_j, & |i - j| = 1, \end{aligned}$$

przedstawione na rysunku 4. Okazuje się, że wszystkie relacje między generatorami σ_i wynikają z relacji (*). Twierdzenie to zostało udowodnione niezależnie przez Artina i Bohnenblusta w 1947 roku.

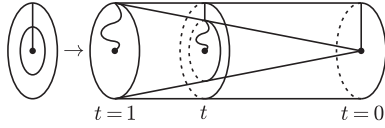
* * *

Grupa warkoczy jest ściśle związana z teorią węzłów i pojawia się też w bardzo wielu innych dziedzinach matematyki: w topologii, teorii grup, teorii algebr, geometrii algebraicznej, w algebrach von Neumanna, a oprócz tego w fizyce i mechanice statystycznej. Po Artinie ważne prace o grupie warkoczy pisali laureaci medalu Fieldsa: Pierre Deligne, William Thurston i Vaughan Jones. Opiszę teraz pokrótce inne, równoważne definicje tej grupy.

1. Grupa (rozważana przez) Hurwitza. Ustalamy n punktów P_1, P_2, \dots, P_n wewnątrz domkniętego koła D na płaszczyźnie. Rozważmy klasy izotopii homeomorfizmów koła D na siebie, które są identycznością na brzegu koła i permutują punkty P_1, P_2, \dots, P_n . Homeomorfizmy są równoważne (izotopijne), jeśli są połączone ciągłą rodziną takich homeomorfizmów. Złożenie

homeomorfizmów zachowuje klasy równoważności i otrzymujemy grupę klas izotopii homeomorfizmów izomorficzną z grupą warkoczy. Jak wygląda ten izomorfizm, podpowiada następujący lemat.

Lemat 1 (Alexander). *Jeśli $h : D \rightarrow D$ jest takim homeomorfizmem koła o środku 0, że $h(0) = 0$ i h jest tożsamością na brzegu koła, to istnieje taka izotopia $h_t : D \rightarrow D$, $t \in [0, 1]$, że $h_0(x) = x$, $h_t(0) = 0$, $h_1(x) = h(x)$ i h_t jest tożsamością na brzegu koła.*



Rys. 5. Lemat Alexandra.

Dowód. Możemy założyć, że D jest kołem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej

$$D = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Wtedy szukana rodzina homeomorfizmów może być zadana wzorem

$$h_t(re^{i\theta}) = \begin{cases} re^{i\theta}, & t \leq r \leq 1, \\ t \cdot h\left(\frac{r}{t}e^{i\theta}\right), & 0 \leq r \leq t. \end{cases}$$

□

Podczas izotopii h_t punkty $h_t(P_1), h_t(P_2), \dots, h_t(P_n)$ poruszają się wewnątrz dysku, nie spotykając się, i funkcje $f_i(t) = h_t(P_i)$ określają nici warkocza odpowiadającego homeomorfizmowi h . Klasa równoważności warkocza zależy tylko od klasy izotopii h .

2. Gdy dany jest warkocz $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, to dla każdego $t \in [a, b]$ określa on zbiór n różnych punktów $f_1(t), \dots, f_n(t)$ na płaszczyźnie; dla $t = a$ i dla $t = b$ jest to ten sam zbiór. Można więc powiedzieć, że warkocz to zamknięta droga w przestrzeni n -elementowych nieuporządkowanych podzbiorów płaszczyzny (przestrzeni konfiguracyjnej n punktów w płaszczyźnie), oznaczanej $C_n(\mathbb{R}^2)$. Zatem grupa warkoczy B_n to grupa podstawowa $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2))$.

3. Zamiast o \mathbb{R}^2 można mówić o płaszczyźnie \mathbb{C} liczb zespolonych. Zbiorowi n -elementowemu liczb zespolonych $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ jednoznacznie odpowiada wielomian unormowany $f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$ o różnych pierwiastkach zespolonych. Grupę B_n można więc też interpretować jako grupę podstawową przestrzeni wielomianów unormowanych stopnia n o współczynnikach zespolonych, bez pierwiastków wielokrotnych. Zauważmy, że wielomian jest określony przez n swoich współczynników. Ponadto dla wielomianów bez pierwiastków wielokrotnych wyróżnik Δ , który jest wielomianem od współczynników, jest różny od zera. Jeśli zatem oznaczymy $H = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) : \Delta(a_0, \dots, a_{n-1}) = 0\}$, to $B_n = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H)$.

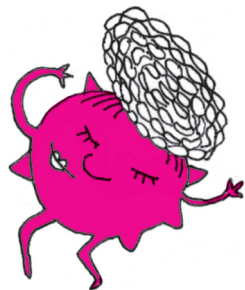
4. Ostatnia interpretacja grupy warkoczy należy znów do Artina. Zamiast wyróżnić punkty P_1, P_2, \dots, P_n w dysku D możemy je z niego wyrzucić. Wtedy mówimy o grupie podstawowej $\pi_1(D \setminus \{P_1, P_2, \dots, P_n\}, P_0) = F_n$ z punktem bazowym P_0 na brzegu dysku D . Homeomorfizm h indukuje automorfizm grupy F_n , która jest grupą wolną o generatorach x_1, \dots, x_n przedstawionych na rysunku 6.

Lemat 2 (Artin). *Homomorfizm $\phi : F_n \rightarrow F_n$ jest indukowany przez homeomorfizm $h : D \rightarrow D$ (który jest warkoczem i w szczególności jest automorfizmem) wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ i dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\phi(x_k)$ jest sprzężone z pewnym x_j , czyli $\phi(x_k) = A_k x_j A_k^{-1}$.*

Stąd grupa B_n jest izomorficzna z powyższą podgrupą automorfizmów grupy wolnej.

W roku 2001 Daan Krammer i Stephen Bigelow udowodnili (osobno), że grupa B_n jest grupą liniową, izomorficzną z pewną podgrupą multiplikatywnej grupy macierzy. Był to otwarty problem przez wiele lat. Z tego twierdzenia wynika bardzo wiele ważnych własności grupy B_n , ale większość była już znana przed jego udowodnieniem.

Na koniec chciałbym przytoczyć jeden otwarty problem, który można łatwo sformułować. Warkocz nazywamy *dodatnim* , jeśli można go zapisać jako iloczyn dodatnich generatorów (same σ_i bez σ_i^{-1}). Warkocz jest *półdodatni* , jeśli można go zapisać jako iloczyn elementów sprzężonych z dodatnimi generatorami. Należy znaleźć algorytm, który sprawdza, czy warkocz jest półdodatni. Wiadomo, że istnieje rozwiązanie dla warkoczy o trzech niciach, podane przez S. Orevkova. Może Tobie, Czytelniku, uda się znaleźć rozwiązanie dla większej liczby nici?

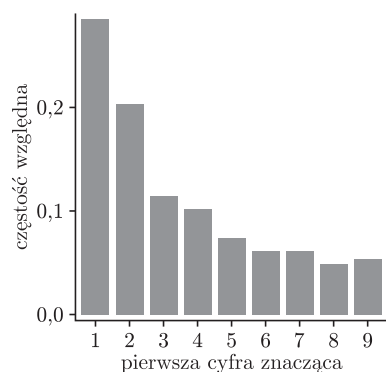


Rys. 6. Warkocze jako automorfizmy grupy wolnej.

Pierwsze cyfry

Maciej PAJĄK*

Pierwsza cyfra znacząca to w pozycyjnym systemie zapisu pierwsza od lewej cyfra liczby niebędąca zerem. Przykładowo dla 234 jest to 2, a dla 0,75 to 7.



Rys. 1. Rozkład częstości pierwszych cyfr znaczących powierzchni wszystkich krajów świata.

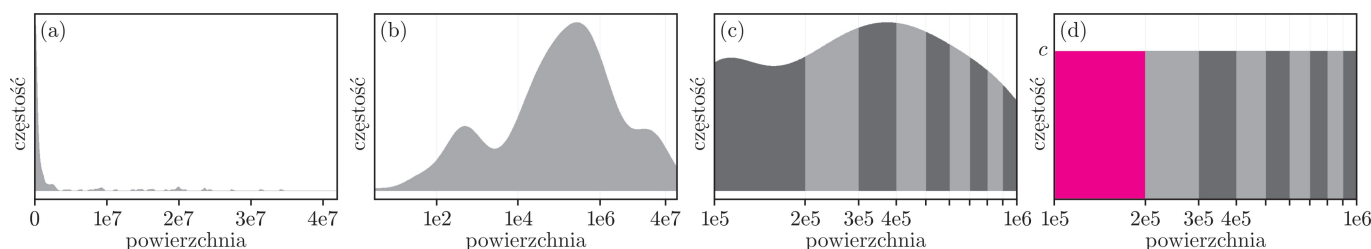
Rozważmy następujący problem: gromadzimy powierzchnie wszystkich krajów wyrażone w kilometrach kwadratowych i patrzymy tylko na pierwsze cyfry znaczące tych wartości. Otrzymamy listę liczb z zakresu od 1 do 9 włącznie; pytanie brzmi, jakie są częstości ich występowania w tym zbiorze?

W dobie powszechnego i otwartego dostępu do informacji nietrudno sprawdzić to samemu; jeżeli umieścimy częstości na wykresie, będzie on przypominać rysunek 1.

Czy regularny kształt tego wykresu to tylko ciekawy przypadek, czy jesteśmy na tropie ogólnej zależności (którą najchętniej opisalibyśmy wzorem)? Uważny Czytelnik zapewne spostrzegł, że formułując problem, poczyniliśmy pewne założenie, mianowicie chcieliśmy, żeby powierzchnie krajów były wyrażone w kilometrach kwadratowych. Jednak nie wszystkie kraje na świecie używają systemu metrycznego – czy kształt rozkładu zmieni się, jeżeli wyrazimy je w milach kwadratowych lub stopach kwadratowych? Co będzie, jeżeli spojrzymy na ludność zamiast na powierzchnię, albo historyczne wartości ludności?

Wreszcie, czy musimy ograniczać się do danych geograficznych? Absolutnie nie! Spójrzmy więc na pierwsze 1000 wyrazów ciągu Fibonacciego, liczby (niebędące datami bądź liczbami porządkowymi, numerami stron, itd.) pojawiające się w dowolnym wydaniu *Financial Timesa* albo w dowolnej pracy naukowej z dużą ilością danych liczbowych.

Pozostawię to tutaj jako ćwiczenie z wyszukiwania informacji dla chętnych, ale zdradzę, że wynik (oczywiście w przybliżeniu) jest zawsze taki sam.



Rys. 2. Rozkład częstości powierzchni krajów (a) w skali liniowej, (b) w skali logarytmicznej na osi X, (c) pojedynczy rząd wielkości z (b), (d) przybliżenie, liczby w zakolorowanym obszarze zaczynają się od 1.

Aby zrozumieć, co się dzieje, musimy odwołać się do rozkładu całych liczb (rysunek 2), ale zamiast mało informatywnej skali liniowej (a) na osi poziomej użyjemy skali logarytmicznej (b). Patrząc tylko na jeden rząd wielkości, tj. wartości pomiędzy dwiema kolejnymi potęgami dziesiątki (c) (liczby w kolejnych obszarach rozpoczynają się od 1, 2, i tak dalej), widzimy, że te obszary stają się coraz mniejsze.

Jeśli założymy, że wśród liczb wewnątrz jednego rzędu wielkości ten rozkład nakreślony w skali logarytmicznej na osi poziomej jest w przybliżeniu stały (d), to pole zakolorowanego obszaru będzie równe: $c \cdot (\log_{10} 2 - \log_{10} 1)$, a ogólnie, dla dowolnej cyfry początkowej n będzie to

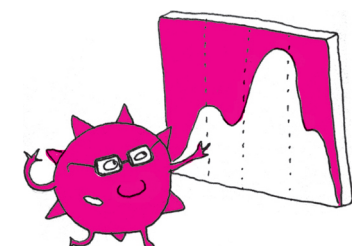
$$c \cdot (\log_{10}(n+1) - \log_{10}(n)) = c \cdot \log_{10} \left(\frac{n+1}{n} \right),$$

czyli względna częstość cyfry początkowej n to po prostu

$$\log_{10} \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

Ta sama prawidłowość zachodzi dla wielu rodzajów zbiorów liczb (m.in. tych wymienionych powyżej), jednak łatwo przywołać przykłady, dla których nie zachodzi, np. wzrost, masa ciała ludzi.

Aby wyjaśnić, co wyróżnia wymienione klasy danych liczbowych, musimy odwołać się z powrotem do rysunku 2(b). Po pierwsze, aby nasze przybliżone obliczenia były uzasadnione, dane muszą obejmować kilka kolejnych rzędów wielkości, w praktyce co najmniej 3–4, co wyklucza m.in. wzrost i masę ciała. Ponadto,

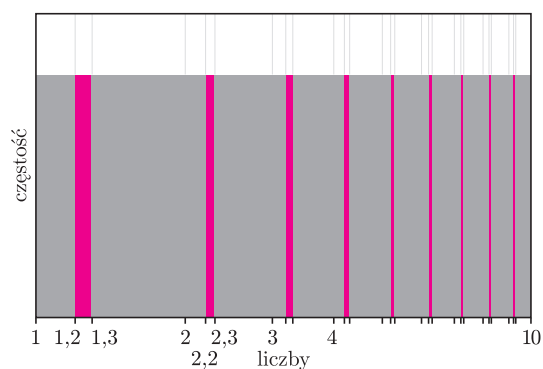


*School of Informatics, University of Edinburgh

ponieważ zmiana jednostki (np. z kilometrów kwadratowych na mile kwadratowe, jak w przykładzie z powierzchniami) jest niczym innym jak mnożeniem wszystkich wartości przez stałą, rozkład częstości na skali logarytmicznej zachowuje swój kształt i przesuwa się w lewo lub w prawo. Jeżeli na początku rozkład nie obejmował wystarczająco wielu rzędów wielkości bądź nie był wystarczająco „płaski” na skali logarytmicznej, przeliczenie jednostki sprawi, że proporcje wielkości zakolorowanych obszarów ulegną zmianie, tym samym zmieniając kształt rozkładu częstości pierwszych cyfr.

Opisana prawidłowość jest nazywana prawem Benforda, mimo że Frank Benford nie był pierwszą osobą, która zauważyła to zjawisko. Pierwszy był Simon Newcomb, znany również ze swojej pracy w dziedzinach fizyki, astronomii i ekonomii, który w roku 1881 zauważył, że w tablicach logarytmicznych w bibliotece strony z liczbami zaczynającymi się od 1 były bardziej zużyte od tych z liczbami zaczynającymi się od 2, itd. Odkrycie popadło w zapomnienie aż do roku 1938, kiedy Frank Benford, inżynier i fizyk pracujący dla General Electric, opublikował swoje obserwacje poparte przykładami wielu różnych zbiorów liczbowych spełniających zależność, m.in. tych wartości geograficznych, od których rozpoczęliśmy nasze rozważania.

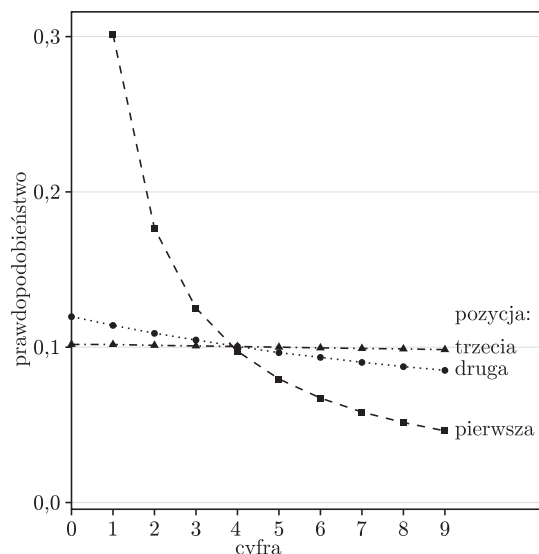
Tablice logarytmiczne to narzędzie, które ułatwiało wykonywanie skomplikowanych obliczeń wykorzystujących mnożenie, potęgowanie, itd. przed upowszechnieniem kalkulatorów; dla każdej liczby można było odnaleźć przybliżoną wartość jej logarytmu.



Rys. 3. Fragment przybliżonego rozkładu częstości liczb spełniających prawo Benforda na skali logarytmicznej.

Szukając możliwych uogólnień tego zjawiska, zastanówmy się, czy dla wartości liczbowych, których pierwsze cyfry zachowują się zgodnie z rozkładem Benforda, da się coś powiedzieć o drugich i kolejnych cyfrach tych liczb. Otóż tak, spójrzmy na rysunek 3, podobny do rysunku 2(d), ale z innymi zakolorowanymi obszarami.

Podobnie jak wyznaczaliśmy obszary obejmujące liczby zaczynające się od 1, możemy wyznaczyć obszary, w których znajdują się liczby zaczynające się od 12, 22, 32, itd., czyli wszystkie, w których drugą cyfrą znaczącą jest 2. Jeżeli oznaczymy dowolny ciąg cyfr jako *, dowolną pojedynczą cyfrę jako ? i prawdopodobieństwo tego, że liczba zaczyna się od ciągu dwóch cyfr a i b jako $P(ab*)$, to podobnie jak poprzednio, biorąc pod uwagę powierzchnię obszaru obejmującego liczby rozpoczynające się od 12, możemy określić



Rys. 4. Prawdopodobieństwo wystąpienia danej cyfry na kolejnych pozycjach liczby ze zbioru spełniającego prawo Benforda.

$$P(12*) = \log_{10} \left(\frac{13}{12} \right),$$

czyli – sumując po wszystkich możliwych pierwszych cyfrach – mamy

$$P(?2*) = \sum_{x=1}^9 P(x2*) = \sum_{x=1}^9 \log_{10} \left(\frac{10x + 2}{10x + 3} \right).$$

Wzór ogólny dla drugiej cyfry znaczącej n przybiera następującą formę:

$$P(?n*) = \sum_{x=1}^9 \log_{10} \left(\frac{10x + n}{10x + n + 1} \right).$$

Idąc dalej, możemy łatwo otrzymać wzór na prawdopodobieństwo k -tej cyfry równej n ; nietrudno zauważyć, że przy rosnącym numerze cyfry (k) rozkład prawdopodobieństwa bardzo szybko staje się nierozróżnialny od rozkładu równomiernego (rysunek 4).

Prawo Benforda można też uogólnić na inne systemy liczbowe, we wzorach zamieniamy wtedy podstawę logarytmu i wszelkie dziesiątki na podstawę systemu liczbowego, którego używamy. Liczby spełniające zależność w jednym systemie liczbowym będą ją dalej spełniać po zamianie podstawy.

O prawie Benforda pisaliśmy w *Delcie* 3 i 12/2010.

T. Hill, *Base invariance implies Benford's law*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 887–895.

T. Hill, *A statistical derivation of the significant-digit law*, Statistical Sci. 10 (1996), 354–363.

Na koniec, zainteresowanym dowodem, tudzież formalnym wyjaśnieniem tego empirycznego zjawiska, polecam serię artykułów Theodore'a P. Hilla. W tych publikacjach autor opisuje, jak generowanie liczb losowych ze zbioru wielu różnych losowych rozkładów prawdopodobieństw w naturalny sposób prowadzi do rozkładu Benforda dla ich kolejnych cyfr znaczących.

Szczepić czy nie szczepić? Oto jest pytanie...

Urszula FORYŚ*

Czarna śmierć – jedna z największych epidemii, która w XIV w. przyczyniła się do śmierci około 30% ludności Europy. Uważa się, że była to epidemia dżumy, która do Europy dotarła z Chin.

Hiszpanka – pandemia grypy w latach 1918–1919, najbardziej śmiertelna w przeliczeniu na jednostkę czasu epidemia zanotowana w historii. Na kongresie epidemiologicznym w 1998 roku stwierdzono, że zmarło wtedy 100 mln ludzi, a liczbę zachorowań szacuje się na 500 mln, czyli około 1/3 światowej populacji. Liczba ofiar tej epidemii znacznie przewyższa liczbę ofiar I wojny światowej.

Pierwszego szczepienia krowianką dokonał angielski lekarz Edward Jenner w 1796 roku, co otworzyło drogę do szerokiego stosowania szczepień w zapobieganiu różnym chorobom.

William Ogilvy Kermack (1898–1970), szkocki matematyk i chemik.

Anderson Gray McKendrick (1876–1943), szkocki lekarz i epidemiolog, pionier epidemiologii matematycznej.



Rozwiązanie zadania M 1489.

Każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci $10^n - 10^m$ dla $1 \leq m < n \leq 2016$ na co najwyżej jeden sposób. Stąd szukamy liczby takich par (n, m) , dla których liczba $10^n - 10^m = 10^m \cdot (10^{n-m} - 1)$ jest podzielna przez 1001. Jest to równoważne podzielności $10^{n-m} - 1$ przez 1001.

Ponieważ 10^k daje z dzielenia przez 1001 resztę 10, 100, -1 , -10 , -100 lub 1 dla k dającego z dzielenia przez 6 odpowiednio resztę 1, 2, 3, 4, 5 lub 0, to otrzymujemy równoważność warunku z zadania z podzielnością liczby $n - m$ przez 6. W takim razie liczby n i m muszą dawać taką samą resztę z dzielenia przez 6.

Podzielmy liczby naturalne od 1 do 2016 na sześć podzbiorów ze względu na resztę z dzielenia przez 6 (każdy zawierający 336 elementów). Aby wybrać liczby n i m , wybieramy jeden z podzbiorów, a z niego dwa elementy. Stąd szukana w zadaniu liczba to $6 \cdot \binom{336}{2}$.

*Zakład Biomatematyki i Teorii Gier, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

1. Wprowadzenie. Prawie co roku w sezonie grypowym w mediach pojawia się temat szczepień. Omawiane są różne aspekty, podawane argumenty za i przeciw szczepieniom, często obserwujemy więcej emocji niż racjonalizmu. Epidemie, a w szczególności pandemie, stanowią przedmiot badań od wielu lat ze względu na swój znaczący wpływ na rozwój populacji ludzkiej. Zarówno w starożytności, jak i w średniowieczu, a także już w czasach współczesnych różnego typu choroby, takie jak dżuma, tyfus, cholera, grypa, dziesiątkowały mieszkańców naszego globu. Dobrze znamy określenia *czarna śmierć* czy *hiszpanka*, a objawy tzw. plagi ateńskiej, jednej z największych epidemii w starożytności, przedstawił grecki historyk Tukidydes z Aten w dziele swego życia zatytułowanym *Wojna peloponeska*. Monografia ta poświęcona została opisowi przebiegu wojny pomiędzy Spartą a Atenami oraz ich sprzymierzeńcami, która miała miejsce w latach 431–404 p.n.e. Ze względu na obiektywizm podejścia stanowi ona kamień milowy na drodze do naukowego sposobu przedstawiania historii, a jej kilka stron zawiera opis objawów i skutków zarazy, która zdziesiątkowała mieszkańców Aten w latach 430–428 p.n.e. Jednym z ważnych aspektów tej choroby, na które zwrócił uwagę Tukidydes, było uodpornienie, gdyż osoby, które zachorowały i wyzdrowiały, nie chorowały powtórnie. Właśnie tego typu chorób dotyczy problem szczepień, który omówimy z matematycznego punktu widzenia. Prawdopodobnie pierwszy model matematyczny rozprzestrzeniania się epidemii i wpływu szczepienia rozważał Jacob Bernoulli, którego dzisiaj znamy głównie dzięki rozkładowi Bernoulliego. Bernoulli wykorzystał nieliniowe równania różniczkowe ze współczynnikami charakteryzującymi właściwości choroby zakaźnej i opisał wpływ szczepienia *krowianką* (wirusem choroby bydła domowego i świń) na rozprzestrzenianie się ospy. W tym artykule bazujemy na klasycznych pracach dotyczących modelowania epidemii autorstwa Kermacka i McKendricka, które stały się podstawą modeli typu SIR.

2. Model matematyczny typu SIR. Model matematyczny, na którym oprzemy nasze rozważania dotyczące szczepień, należy do klasy modeli typu SIR. Co to znaczy? Skrót SIR wziął się z angielskich nazw grup, na które dzielimy populację w przypadku pojawienia się choroby zakaźnej, po przebyciu której nabywamy odporność. W związku z tym w populacji wyróżniamy 3 grupy: osoby podatne (S od ang. *susceptible*), osoby chore (I od ang. *infected*) oraz osoby odporne (R od ang. *resistant*). Osoba podatna to taka, która do tej pory nie zetknęła się z daną chorobą, a osoba odporna to taka, która na daną chorobę już nie zachoruje. Przejścia pomiędzy tymi grupami odzwierciedla schemat

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R,$$

przy czym zakładamy, że choroba rozprzestrzenia się przez bezpośredni kontakt pomiędzy osobą zdrową i chorą. Jeśli dojdzie do takiego kontaktu, niektóre osoby z grupy S przechodzą do I, a ile takich osób będzie, to zależy od różnych czynników, które umownie określimy jako zakaźność danej choroby. Po przebyciu choroby dana osoba uodparnia się, zatem przechodzi do grupy R. Aby uprościć opis matematyczny, zakładamy, że liczebność populacji nie zmienia się, więc możemy zaniedbać naturalne procesy rozrodczości i śmiertelności. Dodatkowo zakładamy, że liczebność ta jest dostatecznie duża i możemy zaniedbać rozmieszczenie przestrzenne. Mamy zatem opisać tempo zmian liczebności grup S, I, R w czasie, a skoro całkowita liczebność N nie zmienia się, wystarczy znać procentowy wkład tych grup w całą populację.

Niech więc $S(t)$, $I(t)$ i $R(t)$ oznaczają, odpowiednio, proporcję osób podatnych, chorych i odpornych w populacji. Wnioskujemy stąd, że w dowolnej chwili t musi zachodzić $S(t) + I(t) + R(t) = 1$. W szczególności zależność ta powinna być spełniona dla warunku początkowego S_0 , I_0 i R_0 , przy czym przy pierwszym pojawieniu się choroby nie ma osób, które są na nią odporne, więc można założyć $R_0 = 0$ i wtedy $S_0 + I_0 = 1$. Jeśli w chwili początkowej pojawia się $I_0 N$ osób chorych, to choroba zaczyna się rozprzestrzeniać w populacji.

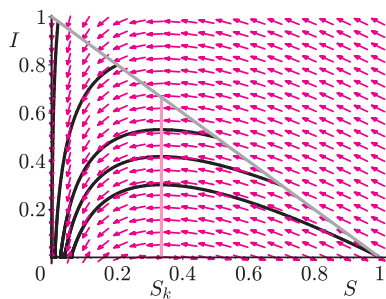


Rozwiązanie zadania F 902.

Prędkość spadającej piłeczki w momencie uderzenia w nieruchomą raketkę wynosi

$v = \sqrt{2gH}$, gdzie g to przyspieszenie ziemskie. Po odbiciu piłeczka uzyskuje prędkość $0,8v$. Niech teraz raketka w momencie odbicia piłeczki porusza się ku górze z prędkością V . W układzie współrzędnych, związanym z raketką, piłeczka ma w momencie zderzenia prędkość $v + V$. Po zderzeniu jej prędkość w tym układzie odniesienia wyniesie $0,8(v + V)$, czyli w nieruchomym układzie odniesienia będzie miała prędkość $0,8(V + v) + V$. Ponieważ po podbiciu piłeczka ma się wzniesić na taką wysokość, z jakiej spadła, to musi być spełniona zależność $0,8(v + V) + V = v$, a stąd

$$V = v/9 = \sqrt{2gH}/9 \approx 0,47 \text{ m/s.}$$



Na obrazku widzimy pole wektorowe odpowiadające prawej stronie układu (*) dla $\gamma < \beta$ – wtedy wartość krytyczna $S_k = \frac{\gamma}{\beta} = \alpha$ leży w rozpatrywanym przez nas obszarze $S + I \leq 1$. Po ograniczeniu prostymi $S = 0$, $I = 0$ oraz $S + I = 1$ dostajemy tzw. portret fazowy układu, na którym rozwiązania są zobrazowane jako funkcje $I = I(S)$, a wpływ czasu wskazują strzałki pola wektorowego. Wartość maksymalna funkcji $I(S)$ jest przyjmowana dla $S = \alpha$.

Dodatkowo z układu (*) wynika, że

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\alpha}{S(t)}, \quad \text{gdzie } \alpha = \frac{\gamma}{\beta},$$

a stąd możemy wyznaczyć zależność

$$S(t) + I(t) - \alpha \ln S(t) = S_0 + I_0 - \alpha \ln S_0$$

i dla $S(t) = \alpha$ otrzymać

$$I_{\max} = 1 - \alpha + \alpha \ln \frac{\alpha}{S_0}.$$

Wirus polio wywołuje chorobę Heinego–Medina, zwaną też polio. Kontynent amerykański uznano za wolny od tej choroby w 1994 roku.

Tempo zmian w czasie proporcji liczby osób podatnych zależy od $S(t)I(t)N$, gdyż liczba możliwych spotkań jednej osoby zdrowej z osobą chorą zwiększa się wraz z rosnącą liczbą osób chorych, jak i na odwrót – jeden chory spotyka tym więcej podatnych, im większa jest liczebność grupy S . Mamy więc $\dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t)$, gdzie $\dot{S}(t)$ oznacza pochodną $S(t)$ względem czasu, czyli tempo zmian wielkości grupy S w czasie, a współczynnik β opisuje zakaźność choroby; mówi nam, jak szybko choroba się rozprzestrzenia w czasie. Wszystkie osoby, które zachorowały, przechodzą z grupy S do I . Jednocześnie obserwujemy proces zdrowienia, który powoduje, że po przebyciu choroby dana osoba przenosi się do grupy R . Dostajemy stąd równanie $\dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$, gdzie γ nazywamy współczynnikiem zdrowienia i $\gamma = 1/T$, a T oznacza średni czas trwania choroby. Ponieważ wszystkie osoby, które wyzdrowiały, przechodzą do grupy R , to $\dot{R}(t) = \gamma I(t)$. Ostatecznie otrzymujemy układ trzech równań różniczkowych opisujących zmiany zachodzące w każdej z grup; układ ten nazywamy modelem Kermacka–McKendricka

$$\dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t), \quad \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \quad \dot{R}(t) = \gamma I(t).$$

Zauważmy, że dodając te trzy równania stronami, mamy $\dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) = 0$, zatem faktycznie suma proporcji grup nie zmienia się w czasie – mówimy o takim układzie, że jest zachowawczy. Stąd, znając $S(t)$ i $I(t)$, możemy wyznaczyć $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$, co oznacza, że wystarczy badać układ dwóch równań

$$(*) \quad \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t), \quad \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t),$$

przy założeniu $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $S(t) + I(t) \leq 1$.

Jeśli na danym obszarze pojawia się jakaś choroba zakaźna (opisana w modelu parametrami β i γ), to staramy się odpowiedzieć na kluczowe pytania – czy przy danych początkowych wartościach S_0 i I_0 choroba będzie się rozprzestrzeniać, a jeśli tak, to jak przebiegnie rozwój epidemii w czasie i kiedy ona zaniknie? Zauważmy, że z pierwszego równania układu (*) mamy $\dot{S}(t) < 0$ dla $S(t)I(t) > 0$, więc liczebność grupy S zawsze maleje, o ile tylko występują w populacji zarówno osoby podatne, jak i chore. Stąd także $S(t) < S_0$. Z kolei $\dot{I}(t) = I(t)(\beta S(t) - \gamma) < 0$, jeśli $S(t) < \frac{\gamma}{\beta}$. Wnioskujemy ostatecznie, że dla $S_0 < S_k = \frac{\gamma}{\beta}$ epidemia się nie pojawia, gdyż liczebność grupy I maleje w czasie. Jeśli natomiast I początkowo rośnie, to możemy wyznaczyć maksymalną wartość $I(t)$. W punkcie maksymalnym zachodzi $\dot{I}(t) = 0$, czyli maksimum jest osiągnięte, gdy $S(t) = \frac{\gamma}{\beta}$.

3. Szczepienia. Jednym z kluczowych parametrów każdej choroby zakaźnej jest tzw. podstawowy współczynnik odnowienia, który w modelu Kermacka–McKendricka definiujemy jako

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}.$$

Liczba \mathcal{R}_0 mówi nam, ile wtórnych zachorowań przypada na jedną chorą osobę wprowadzoną do danej populacji. Stąd, oczywiście, progowa wartość to 1; jeśli $\mathcal{R}_0 > 1$, to epidemia się rozwija, a dla nierówności przeciwnej zanika. Jeden z możliwych sposobów obniżenia \mathcal{R}_0 opiera się na zmniejszeniu liczebności grupy S . Szczepienia stanowią powszechną metodę służącą do tego celu i okazały się najpierw skuteczne w walce z ospą, a potem także z innymi chorobami. Dzięki nim w USA liczba przypadków odry zmalała z 894 134 w 1941 roku do 135 w 1997 roku, a liczba przypadków *polio* spadła z 21 269 w 1952 roku do ostatniego zachorowania w 1979 roku. Podobnie wygląda redukcja przypadków występowania innych chorób dziecięcych. Szczepienia nie tylko uodparniają pojedyncze osoby, ale także chronią całą populację, gdyż utrzymują \mathcal{R}_0 poniżej poziomu, który pozwalałby na zainicjowanie epidemii. Nazywamy to „odpornością zbiorową”. Interes społeczny wsparty matematyką jednoznacznie wskazuje odpowiedź na postawione w tytule pytanie: tak, szczepić. Rozstrzygnięcia zaś indywidualnej decyzji o szczepieniu, stwarzającym jednak pewne (choć niewielkie) ryzyko, należy szukać poza matematyką – pozostaje mi wierzyć, że i w tym przypadku będzie to: tak!

Moje 50 lat biologii molekularnej

prywatne podsumowanie mojego biochemicznego życia

życie na

ży 66



W trakcie mojego życia badania naukowe w biochemii ulegały ważnym transformacjom. W połowie lat 50. (ubiegłego, tak, tak) stulecia można było być pojedynczym badaczem. No, może we dwójkę – taką pracę zaproponował mi mój mistrz – David Shugar.

Miałyśmy, z równie niedoświadczoną koleżanką, Ewą, wypreparować DNA z trzech różnych organizmów: cielęcina, pszenicy i śledzia. Te DNA różniły się drobnymi chemicznymi modyfikacjami. Szef nie powiedział nam, do czego potem się te DNA przydadzą. Zdobyłyśmy surowce, chyba nie jeździliśmy nad morze, ale na pewno poszłyśmy do rzeźni. Całą preparatykę trzeba było wykonywać w chłodni (4°C). Przez kilka miesięcy! Włożyłyśmy na stałe waciki i ciepłe buty. Po drodze wykończyłyśmy jedyną dostępną chłodzoną, dużą wirówkę. Ja, na całe życie, dorobiłam się choroby nazywanej „zapaleniem miedniczek” (nerkowych). Wyszło dużo tych preparatów, wyglądały jak długie, połyskliwe nici. Szef w międzyczasie chyba stracił pomysł, bo nigdy do niczego nie zostały użyte.

Tyle jeżeli chodzi o epokę samotnych odkrywców.

Potem zostałam z samomianowania biologiem molekularnym. Przez kilka lat zajmowałam się – elegancko można by to nazwać – badaniem cech fizycznych pochodnych kwasów nukleinowych. Ale naprawdę polegało to na mierzeniu widm ultrafioletowych wielu, wielu substancji wsypywanych przez tego samego szefa z małych probówek do mojej, jeszcze mniejszej probóweczki. I w wielkich słojach rozdzielałam te substancje techniką chromatografii bibułowej. Brzmi tajemniczo, ale był to kawałek bibuły podwieszanej na nitkach, przyczepionych do słoja plasteliną i na dole zanurzonej w różnych cieczach – naukowo: solwentach. Po południu zawieszanych, rano wyjmowanych. Bibuła była firmy Whatman. Z importu!

Zrobiłam doktorat, potem habilitację (badałam własności polinukleotydów, ich widma w ultrafiolecie w różnych temperaturach).

Oczywiście, biologia molekularna w Polsce jest nadal rozwijana przez młodych, dobrze wykształconych ludzi, znających obce języki, pracujących czasem miesiącami za granicą, współpracujących z wielkimi zespołami tematycznymi. Mam dla nich wielkie uznanie. Tylko – proszę spojrzeć na tytuł – nie o tym piszę. Moje pokolenie zrobiło swoje i odeszło.

Mniej więcej w tych czasach na świecie doszło do rewolucji genowej, nazwanej powstaniem inżynierii genetycznej.

Praca w pojedynkę chyba nie bardzo w tej dziedzinie była możliwa. Były lata 80. Ludzie nauczyli się określać budowę chemiczną DNA (sekwencjonować). Coraz lepiej rozumieli, że od wiedzy o budowie genów i genomów zaczyna się wielki nowy świat biologii, medycyny, biotechnologii, farmacji, rolnictwa... wszystkiego, w czym biorą udział żywe istoty. Wymyślali więc coraz to inne aparaty, urządzenia i programy informatyczne, żeby dane o genach jak najszybciej stawały się użyteczne.

Na świecie do tej dziedziny napłynęły i dalej napływały coraz większe pieniądze. Nauka rozrastała się w sensie akademickim i korporacyjnym. Skończyła się era pracy małych zespołów. Już nie tylko pod pracami fizyków, ale i biologów widniały podpisy setek (!!!) autorów.

Co w tej sytuacji działo się w tych naukach w Polsce? Początkowo wydawało się nam, że możemy nadażyć. Tylko jak? TAKICH pieniędzy przyznawanych na naukę w Polsce nie było, nie można było też więcej pracować, bo „oni” pracowali jeszcze więcej i w jeszcze większych zespołach.

Staliśmy się państwem naprawdę europejskim i bez europejskich funduszy było trudno pracować. Przedtem badacz nawet średniego wymiaru nie myślał, skąd płyną pieniądze. W państwowym instytucie dbali o to dyrektorzy i kierownicy problemów węzłowych. Nie będę opisywać, co to znaczy, ale fundusze na te spektrofotometry i bibuły Whatmana były. Zaczynając doświadczenia z zakresu inżynierii genetycznej, byliśmy, w kalendarzu, o 6 lat spóźnieni. Już po roku – o 10 lat. A potem przestaliśmy się porównywać.

W roku 1996 rzuciliśmy hasło „popularyzacja nauki” i zrobiliśmy, w trzy osoby, pierwszy Festiwal Nauki w Polsce. To oznaczało opisywanie tego, co inni za granicą zrobili w dziedzinach, które kiedyś były naszymi doświadczeniami. A w Festiwalu, oczywiście, było jeszcze kilkadziesiąt osób, naszych wspaniałych kolegów, którzy do festiwalu się zgłosili i przygotowali różne imprezy. Potem nazwano to „iwentami”. A na naszej stronie www.festiwalnauki.edu.pl do dziś widnieje to samo hasło, wyłonione w wyniku konkursu:

Brak inwestycji w naukę to inwestycja w ignorancję.

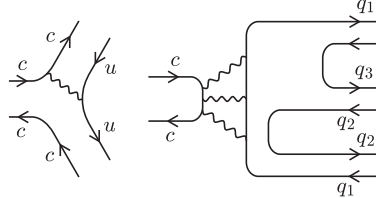
Magdalena FIKUS

Delta i fizyka cząstek elementarnych (IV): Czego bezpośrednim świadkiem była Delta

Piotr CHANKOWSKI*

Pisząc Δ_{XY}^n , odwołujemy się do numeru n *Delty* z roku 19XY lub 20XY. Pełna lista przywoływanych artykułów jest na stronie www.deltami.edu.pl.

Wyjątkowo długi czas życia mezonu J/ψ można jakościowo zrozumieć, analizując schematyczne diagramy reprezentujące możliwe mechanizmy rozpadu układu $c\bar{c}$. Są one dwóch rodzajów:



Fenomenologiczna reguła Okubo-Zweiga-Iizuki (OZI) mówi, że zachodzące pod wpływem oddziaływań silnych rozpady reprezentowane przez diagram drugiego rodzaju, w których stan końcowy i początkowy nie są połączone ani jedną ciągłą linią kwarkową, są tłumione (tzn. ich amplitudy są znacznie mniejsze) w porównaniu z rozpadami odpowiadającymi pierwszemu diagramowi. Ponieważ struktura kolorowa uniemożliwia przejście pary $q\bar{q}$ w pojedynczy (wirtualny) gluon, a stan dwu gluonów nie może mieć całkowitego momentu pędu równego $1\hbar$ (tzw. twierdzenie Landaua-Yanga), amplitudy $\mathcal{A}(II)$ odpowiadające diagramom drugiego typu są z konieczności mnożone przez $(\bar{\alpha}_s)^p$ z $p \geq 3$, podczas gdy diagramy pierwszego rodzaju dają $\mathcal{A}(I) \propto \bar{\alpha}_s$. W połączeniu z $\bar{\alpha}_s \equiv \bar{g}_s^2/4\pi < 1$ ($1/4\pi$ jest typowym czynnikiem pochodzącym z diagramów Feynmana), obserwacja ta uzasadnia jakościowo na gruncie chromodynamiki regułę OZI. W przypadku rozpadów cząstki ϕ ($M_\phi = 1,2$ GeV) będącej stanem związanym kwarków s i \bar{s} pierwszy diagram odpowiada rozpadom ϕ na dwa kaony $K^+ = u\bar{s}$ i $K^- = s\bar{u}$ lub $K^0\bar{K}^0$, a drugi rozpad ϕ na $\pi\rho$ (i następnie $\rho \rightarrow \pi\pi$) lub bezpośrednio na trzy mezony π , które rzeczywiście zachodzą znacznie rzadziej. W przypadku J/ψ pierwszy diagram odpowiadałby rozpadom na mezony $D^+ = c\bar{d}$ i $D^- = d\bar{c}$ lub $D^0\bar{D}^0$, które są zabronione przez zasadę zachowania energii ($M_{J/\psi} < 2M_D$) i możliwe są tylko rozpady silne odpowiadające drugiemu diagramowi przy czym, ponieważ tu $Q \sim 1,5$ GeV, odpowiednia wartość $\bar{\alpha}_s(Q)$ jest mniejsza (asymptotyczna swoboda! – zob. odcinek II) niż w przypadku rozpadów ϕ . (Rozpady elektromagnetyczne, np. $J/\psi \rightarrow \ell^+\ell^-$ są z kolei tłumione przez małą wartość stałej sprzężenia e , a słabe rozpady J/ψ są oczywiście jeszcze mniej prawdopodobne.)

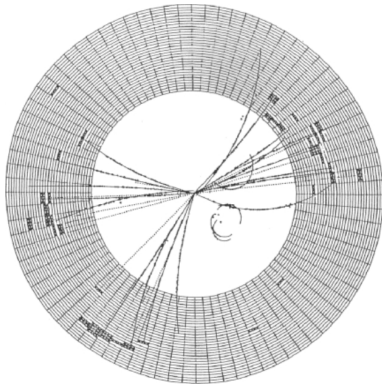
O tym, jak odkrywa się nowe cząstki, badając rozkład masy niezmienniczej produktów zderzeń pisaliśmy w Δ_{99}^5 , Δ_{12}^5 i Δ_{14}^1 .

Fizyka wysokich energii powitała narodziny *Delty* spektakularnymi wydarzeniami. Najpierw, w listopadzie 1974 roku, w USA, w laboratoriach w SLAC i w Brookhaven odkryto (niemal) niezależnie mezon J/ψ o spinie $1\hbar$, masie około 3,1 GeV i bardzo długim w porównaniu z typowymi rezonansami hadronowymi czasie życia. Odkrycia tego dokonały zespoły B. Richtera i S.C.C. Tinga (spór o pierwszeństwo załagodziła przyznana w roku 1977 obu kierownikom zespołów Nagroda Nobla; Δ_{77}^7). Po trwającym jakiś czas szoku (ówczesną atmosferę oddają artykuły w Δ_{75}^6) mezon J/ψ został zinterpretowany jako przewidziany już wcześniej przez teoretyków stan związany kwarków c i \bar{c} : parę miesięcy przed tym odkryciem M.K. Gaillard, B.W. Lee i J. Rosner, traktując serio pomysł mechanizmu GIM (zob. odcinek III), przeanalizowali dokładnie konsekwencje istnienia czwartego kwarka i , wykorzystując istniejące dane, oszacowali jego masę na około 1,5 GeV, a także (podobnie jak niezależnie T. Appelquist i H. Politzer) przewidzieli istnienie jego stanów związanych, takich jak $c\bar{c}$.

Odkrycia w SLAC dokonano, mierząc przekrój czynny reakcji $e^+e^- \rightarrow$ hadrony (czyli w praktyce liczbę takich reakcji zachodzących w jednostce czasu) w akceleratorze SPEAR, w Brookhaven zaś, badając rozkład masy niezmienniczej par e^+e^- powstających podczas rozpraszania protonów na tarczy berylowej (reakcja $p\text{Be} \rightarrow e^+e^- +$ cokolwiek). Oba typy eksperymentów, które spowodowały tę „rewolucję listopadową”, przyniosły jeszcze dalsze istotne wyniki. Dokładne „przezesanie” zakresu nieco wyższych energii zderzających się par e^+e^- w kilku działających na świecie akceleratorach tego typu pozwoliło wkrótce odkryć całą rodzinę cząstek podobnych do J/ψ , ale o większych masach (czyli stanów wzbudzonych układu $c\bar{c}$, analogicznych do stanów wzbudzonych atomu wodoru lub pozytonium; Δ_{89}^3). Nieco później w SLAC, CERN-ie i Fermilabie odkryto także hadrony D zbudowane z kwarka c i lekkich kwarków (Δ_{76}^8). Rok później, ponownie w SPEAR w SLAC, odkryty został przez M. Perla (Nagroda Nobla w roku 1995, Δ_{96}^3) trzeci naładowany lepton τ^- (i τ^+) o masie ok. 1,78 GeV, który był zwiastunem trzeciej rodziny fundamentalnych fermionów materii. W roku 1977 zaś, grupa L. Ledermana, wykonując w Fermilabie eksperyment $p\text{H} \rightarrow \mu^+\mu^- +$ cokolwiek, tego samego typu co wcześniej grupa Tinga, zaobserwowała dwa wyraźne maksima w rozkładzie masy niezmienniczej pary $\mu^+\mu^-$ świadczące o formowaniu się długożyciowego rezonansu, nazwanego Υ (upsilon) o masie ok. 9,46 GeV i drugiego nieco cięższego rezonansu Υ' . Były to właśnie stany związane piątego kwarka b i jego antykwarka (Δ_{79}^2). Odkrycie to zostało potwierdzone w akceleratorze DORIS w Hamburgu. Podobnie jak w 1976 roku „przezesanie” większego zakresu energii w akceleratorach zderzających elektrony z pozytonami ujawniło istnienie kilku stanów wzbudzonych układu $b\bar{b}$, z czego stan Υ''' o masie 10,58 GeV, odkryty w akceleratorze CESR w Cornell (USA) i rozpadający się niemal wyłącznie na pary mezonów pięknych $B^0\bar{B}^0$ lub B^+B^- stanowi dziś najwydajniejsze źródło takich par umożliwiających badanie fizyki zapachu. (Pierwszy ciężki hadron „piękny” Λ_b^0 , tj. zawierający pojedynczy kwark b , odkryto w CERN-ie w roku 1991; Δ_{92}^4 .) Tak więc w ciągu zaledwie pięciu lat desperacka propozycja Kobayashiego i Maskawy istnienia trzeciej rodziny fundamentalnych fermionów przybrała realny kształt!

Badanie reakcji $e^+e^- \rightarrow$ hadrony pozwoliło także potwierdzić w inny sposób niż *à la* Rutherford (Δ_{91}^6) realność kwarków ($\Delta_{85}^7/\Delta_{98}^7$). Już w latach 1970–71 teoretycy przewidzieli, że skutkiem bardzo słabego wzajemnego oddziaływania kwarków na małych odległościach i jego gwałtownego wzrostu na odległościach dużych, kwark i jego antykwark, powstające w procesie anihilacji pary e^+e^- , powinny utworzyć dobrze skolimowane (tym lepiej, im wyższa jest energia zderzających się elektronów i pozytonów) strugi hadronów rozbiegające się w przeciwnych kierunkach. Strugi takie dziś nazywa się dżetami. Pierwsze ślady dwudżetowej struktury produktów anihilacji e^+e^- udało się zaobserwować już w roku 1975 w akceleratorze SPEAR w SLAC; „czysty” dowód uzyskano jednak dopiero w roku 1979 w Hamburgu przy użyciu akceleratora PETRA o wyższej energii. Statystyczny rozkład kierunku dżetów (w stosunku do osi zderzenia e^+ z e^-), odzwierciedlający rozkład kierunku rozlotu pierwotnej pary $q\bar{q}$, pozwolił potwierdzić, że kwarki mają spin równy $\hbar/2$. Przy wyższych energiach anihilujących leptonów wzrasta prawdopodobieństwo tego, że powstały kwark lub antykwark wyemituje gluon – zamiast dwóch dżetów powstają wtedy trzy wyraźnie rozdzielone strugi hadronów. Także i takie trzydżetowe przypadki

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



Typowy ślad przypadku trójdźetowego zarejestrowany przez detektor JADE przy akceleratorze PETRA. Źródło: P. Söding, Eur. Phys. J. H 35 (1), 3-28 (2010).

O tym, dlaczego buduje się wielkie akceleratory – Δ_{89}^6 . O metodach rejestrowania różnych produktów wysokoenergetycznych reakcji – Δ_{00}^5 i Δ_{03}^9 .

Na temat statystycznej wiarygodności odkrycia W^\pm i Z^0 i wcześniejszych odkryć w świetle dzisiejszych standardów pisaliśmy w Δ_{15}^3 .

Technika gromadzenia i spowalniania antyprotonów była w następnych latach rozwijana w CERN-ie i doprowadziła m.in. do wyprodukowania w 1995 r. po raz pierwszy atomów antywodoru, czyli stanów związanych \bar{p} i e^+ (Δ_{02}^{12}). O antimaterii w promieniowaniu kosmicznym i jej roli we Wszechświecie zob. także Δ_{80}^{10} i Δ_{84}^7 .

Warto sobie uświadomić, że opisany w odcinku II mechanizm spontanicznego naruszenia symetrii chiralnej $SU(2)_L \times SU(2)_R$ chromodynamiki kwantowej, po włączeniu tej teorii w pełny Model Standardowy, również przyczynia się do spontanicznego naruszenia symetrii cechowania $SU(2)_W \times U(1)_Y$, ale gdyby było to jedyne źródło tego naruszenia, masy W^\pm i Z^0 byłyby rzędu zaledwie kilkudziesięciu MeV.



(przewidziane teoretycznie w roku 1976) udało się zarejestrować za pomocą akceleratora PETRA w roku 1979. Ich występowanie było bezpośrednim dowodem istnienia gluonów, a rozkład kątowy dżetów potwierdził, że gluony mają spin $1\hbar$. Badanie takich reakcji pozwoliło także wyznaczyć wartość biegnącej stałej sprzężenia $\bar{g}_s(Q)$ oddziaływań silnych przy energii $Q \sim 30$ GeV.

Trzeba tu także wspomnieć, że ślady powstawania dżetów w postaci obfitej produkcji cząstek z dużym pędem poprzecznym p_T (względem osi zderzenia), potwierdzające oczekiwania teoretyków, zaobserwowano już w uruchomionym w roku 1971 pierwszym na świecie, zderzaczu protonowo-protonowym (energia zderzeń 27 GeV + 27 GeV) ISR w CERN-ie (zob. Δ_{74}^2).

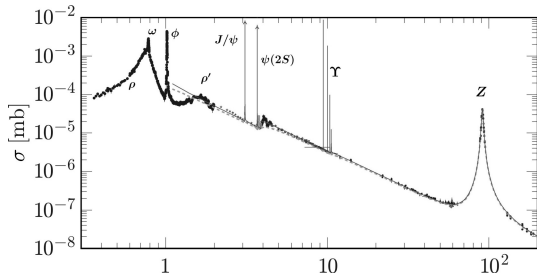
Kolejnym krokiem na drodze do potwierdzenia struktury teorii oddziaływań słabych i elektromagnetycznych musiała być bezpośrednia rejestracja bozonów W^\pm i Z^0 . Oszacowania teoretyczne wskazywały, że bozony te muszą być bardzo ciężkie, dużo cięższe niż wszystkie znane już wtedy cząstki. Aby się do nich „dobrać”, konieczne było zbudowanie nowego akceleratora. Akcelerator taki, nazwany SPS, mogący przyspieszać protony do energii 400 GeV, a w modzie $S\bar{p}pS$ zderzający przeciwbieżne wiązki protonów i antyprotonów o energii 270 GeV każda, został uruchomiony w CERN-ie w roku 1981. Pierwszym osiągnięciem SPS było zarejestrowanie przez detektor UA2 dżetów hadronowych powstających, gdy kwark z protonu i antykwark z antyprotonu zderzają się „czołowo”. Potwierdziło to dobre zrozumienie teoretyczne procesów zachodzących w zderzeniach wysokoenergetycznych hadronów i upewniło wszystkich, że jeśli tylko bozony pośredniczące naprawdę istnieją i nie są zbyt ciężkie, zostaną zarejestrowane. Tak się też rzeczywiście stało: w roku 1983 dwa zespoły, UA1 i UA2, ogłosiły zarejestrowanie kilku przypadków zderzeń, w wyniku których powstawał izolowany wysokoenergetyczny lepton o dużym pędzie poprzecznym (w stosunku do kierunku wiązek) oraz tzw. brakująca energia, tak jak powinno się dziać w procesach $u\bar{d} \rightarrow W^+ \rightarrow e^+\nu_e$ i $\bar{u}d \rightarrow W^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e$ (neutrino umyka z detektora, unosząc ową brakującą energię). Masa W^+ okazała się rzeczywiście duża: 80,4 GeV. Pół roku później odkryto w podobny sposób również bozon Z^0 o masie 91,2 GeV (Δ_{84}^6). *Spiritus movens* całego przedsięwzięcia, C. Rubbia, otrzymał w roku 1985 Nagrodę Nobla (za pomysł poradczenia sobie z niełatwym zadaniem gromadzenia dostatecznej liczby antyprotonów; Nagrodę Nobla otrzymał również inżynier S. van der Meer). Twórcy teorii oddziaływań elektroslabych, Glashow, Weinberg i Salam, otrzymali Nagrodę Nobla w roku 1979, jeszcze przed odkryciem W^\pm i Z^0 .

Uruchamiając $S\bar{p}pS$, miano także nadzieję na odkrycie kwarka t , którego istnienie było konieczne do wewnętrznej spójności Modelu Standardowego. Jednak odkrycie w roku 1987 znacznego mieszania (czyli oscylacji) neutralnych mezonów B^0 i \bar{B}^0 analogicznego do mieszania $K^0 - \bar{K}^0$ (Δ_{89}^4 , Δ_{78}^5), interpretowane w ramach Modelu Standardowego, oznaczało, że kwark t jest prawdopodobnie na to zbyt ciężki, i zadanie jego znalezienia przejął ukończony w roku 1983 w Fermilabie akcelerator zwany Tevatronem; wykorzystując nadprzewodzące elektromagnesy, zderzał on protony z antyprotonami z energią 900 GeV + 900 GeV = 1,8 TeV.

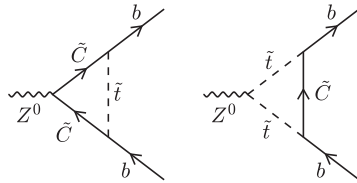
Odkrycie bozonów W^\pm i Z^0 było kamieniem milowym w rozwoju fizyki wysokich energii. Potwierdziło ono bowiem, że u podstaw oddziaływań cząstek leży jednolita struktura teorii z cechowaniem, a różnice w charakterze oddziaływań słabych i elektromagnetycznych są konsekwencją spontanicznego naruszenia części grupy symetrii cechowania (zob. odcinek II). Trzeba tu od razu zaznaczyć, że odkrycie to nie oznaczało potwierdzenia całej opisanej tu wcześniej struktury Modelu Standardowego: pociągające za sobą masywność W^\pm i Z^0 naruszenie symetrii $SU(2)_W \times U(1)_Y$ mogło bowiem być spowodowane kondensatem elementarnego pola skalarowego (tak jak w teorii Weinberga), ale mogło też być (jak w teoriach Nambu) powodowane wewnętrzną dynamiką jakichś nieznanymi silnymi oddziaływań. Tak więc po odkryciu W^\pm i Z^0 następnym oczywistym celem stało się zbadanie mechanizmu naruszenia symetrii $SU(2)_W \times U(1)_Y$. Po drodze należało jednak najpierw przebadać dokładnie odkryte cząstki.

Aby zrealizować ten cel, CERN (zob. Δ_{74}^2 , Δ_{89}^6 , Δ_{96}^6 , Δ_{04}^8) złamał swoją tradycję budowania akceleratorów protonowych i postawił na zderzenia elektronów z pozytonami. Wielki akcelerator LEP przyspieszający przeciwbieżne wiązki e^- i e^+ , którego podziemny tunel ma 27 km obwodu, został ukończony w roku 1989 (w tym samym tunelu umieszczony został działający obecnie akcelerator LHC). W czterech punktach tunelu swoje detektory zainstalowały grupy: ALEPH, DELPHI, OPAL i L3. Celem pierwszej fazy tego eksperymentu, w której energia wiązek wynosiła po około 45 GeV, było rejestrowanie reakcji $e^-e^+ \rightarrow Z^0 \rightarrow$ cokolwiek, umożliwiając

dokładne zbadanie właściwości Z^0 (Δ_{94}^6). Analogiczny, choć nieco na mniejszą skalę zakrojony eksperyment ze zderzeniami przyspieszanych w akceleratorze liniowym elektronów i pozytonów, został równoległe uruchomiony w SLAC (Δ_{89}^{10}).

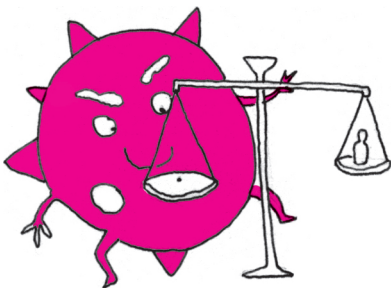


Zależność przekroju czynnego $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrony})$ od energii \sqrt{s} pary e^+e^- . Widoczne są pikki odpowiadające rodzinie stanów związanych $c\bar{c}$ ($J/\psi, \psi, \dots$), rodzinie cząstek Υ oraz duży pik odpowiadający powstawaniu bozonu Z^0 (czas życia $\tau_Z = 2,6 \cdot 10^{-25}$ s). Obliczona na podstawie teorii szerokość tego maksimum zależy silnie od liczby N_ν lekkich neutrin. Zgodność z danymi wymaga przyjęcia, że $N_\nu = 3$.



Występujące w supersymetrycznych wariantach Modelu Standardowego dodatkowe diagramy Feynmana dające poprawki do rozpadu $Z^0 \rightarrow b\bar{b}$ (\tilde{t} oznacza bezspinowego superpartnera kwarku t , a \tilde{C} - superpartnera o spinie $\hbar/2$ bozonu W). Utrzymujące się przez pewien czas spore odstępstwo otrzymanej z pomiarów szerokości tego rozpadu od wartości przewidywanej na podstawie Modelu Standardowego było w latach 1995-6 źródłem nadziei, że jest to pierwszy oczekiwany sygnał istnienia cząstek supersymetrycznych.

Jako ostatnią z cząstek tworzących trzy rodziny fundamentalnych fermionów odkryto neutrino ν_τ ; miało to miejsce w 2000 roku w przeprowadzonym w Fermilabie eksperymencie DONUT.



Pomiary wykonane przez zespoły ALEPH, DELPHI, OPAL i L3 (i SLD w SLAC) były tak precyzyjne, że przy ich interpretacji trzeba było uwzględniać wpływ naprężeń skorupy ziemskiej na rurę akceleratora (Δ_{94}^6) i „błądzące” w ziemi prądy generowane przez przejeżdżające w pobliżu pociągi TGV (Δ_{96}^6). Pomiary te umożliwiły dokładne testowanie Modelu Standardowego jako teorii kwantowej: w teoretycznych obliczeniach mierzonych wielkości konieczne było uwzględnianie tzw. poprawek pętlowych, które zależą od nieznanych jeszcze wtedy mas kwarka t i bozonu Higgsa h^0 , co pozwalało nakładać na te nieznanne masy ograniczenia przez porównywanie rachunków teoretycznych z danymi (Δ_{00}^1). Innym ważnym wynikiem uzyskanym dzięki LEP było ustalenie, że istnieją tylko trzy bezmasowe (lub bardzo lekkie) neutrino ($\Delta_{90}^{11}, \Delta_{98}^9$).

Uruchamiając LEP, liczono także na odkrycie kwarka t (Δ_{89}^6), lub bozonu Higgsa h^0 (mimo, że mechanizm naruszenia symetrii $SU(2)_W \times U(1)_Y$ mógł być inny, fizycy, zwłaszcza doświadczalni, szybko oswoili się z myślą, że jest nim kondensat pola skalarnego). Nieskrywane były też nadzieje na odkrycie tzw. „nowej fizyki”, tj. cząstek nieprzewidywanych przez Model Standardowy; w szczególności silne było oczekiwanie zarejestrowania sygnałów supersymetrii (zob. $\Delta_{85}^{12}, \Delta_{00}^5, \Delta_{07}^2$ i odcinek VI). Cząstki przewidywane przez supersymetryczną wersję Modelu Standardowego (lub jej warianty) mogłyby, gdyby istniały i były dostatecznie lekkie, ujawnić się bezpośrednio (czyli zostać wyprodukowane w zderzeniach e^+e^-) lub przez przyczynki wnoszone przez nie (poprzez zawierające te cząstki w pętach diagramy Feynmana) do obliczanych amplitud mierzonych procesów. Nic takiego jednak się nie wydarzyło...

Pod koniec roku 1994 w Tevatronie odkryto wreszcie kwark t . Okazał się on najcięższą ze znanych cząstek: waży bowiem 173 GeV! (Nie mógł zatem zostać wyprodukowany w LEP-ie.) Żyje na tyle krótko, że rozpada się, zanim mogłyby uformować się zawierające go hadrony.

Ustalenie masy kwarka t pozwoliło wyeliminować z rachunków teoretycznych jeden nieznaną parametr i tym samym ustalić, że bozon Higgsa, jeśli Model Standardowy jest właściwą teorią, musi być lekki ($M_h < 180$ GeV). Spotęgowało to nadzieje na odkrycie go w drugiej (trwającej od 1997 roku) fazie działania LEP-u, gdy energie obu wiązek podwyższono do około 100 GeV. Wyższa energia zderzeń e^-e^+ umożliwiła też po raz pierwszy bezpośrednią produkcję par W^+W^- i częściowe zbadanie sprzężeń $W^+W^-Z^0, W^+W^-\gamma$ przewidywanych przez teorię (zob. odc. I). Zaostrzone też zostały dolne ograniczenia na masy potencjalnych nowych cząstek przewidywanych np. przez teorie supersymetryczne. Tuż przed zamknięciem LEP pojawiły się sygnały bezpośredniej produkcji czegoś, co mogło być bozonem Higgsa (Δ_{01}^1). Program LEP musiał jednak zostać zakończony z powodu konieczności rozpoczęcia budowy LHC...

Z ważnych wydarzeń końca XX wieku należy odnotować rozpoczęcie w roku 1990 i zarzucenie (wskutek nieprzyznania dalszych funduszy przez Kongres USA) budowy Nadprzewodzącego Super Akceleratora (SSC), który miał przyspieszać przeciwbieżne wiązki protonów do fantastycznych energii 20 TeV (czyli energia zderzeń miała wynosić 40 TeV!). Gdyby został on zbudowany, akcelerator LHC nie byłby potrzebny...

Bardzo ważnym urządzeniem stał się uruchomiony w roku 1992 w DESY w Hamburgu akcelerator HERA, jako jedyny na świecie zderzający przeciwbieżne wiązki protonów (870 GeV) i elektronów (30 GeV). Przeprowadzone za jego pomocą eksperymenty typu głęboko nieelastycznego rozpraszania pozwoliły dokładnie poznać strukturę protonu (czyli wyznaczyć tzw. funkcje struktury protonu w sposób fenomenologiczny parametryzujące rozkład w jego wnętrzu kwarków i gluonów oraz ich pędów) i dostarczyły danych niezbędnych do ilościowego opisu zderzeń protonów w LHC. Akcelerator HERA zakończył pracę w 2007 roku, ale zebrane w nim unikalne dane jeszcze długo będą przedmiotem analiz dostarczających informacji o wewnętrznej budowie protonu.

W okresie pomiędzy zamknięciem akceleratora LEP, a uruchomieniem w roku 2009 LHC, fizykę wysokich energii zdominowały dwa kierunki badań. Pierwszym było wszechstronne badanie fizyki zapachu, w szczególności procesów rzadkich i naruszających zachowanie CP. Drugim była fizyka neutrin. O tym napiszę w następnym odcinku.



Rozwiązanie zadania M 1490.
Wśród liczb dziesięciocyfrowych jest

$$\left\lfloor \frac{10^{10} - 10^9}{17} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9 \cdot 10^9}{17} \right\rfloor > 5 \cdot 10^8$$

wielokrotności liczby 17. Podzielmy je na grupy – w jednej grupie znajdują się liczby złożone z jednakowych cyfr.

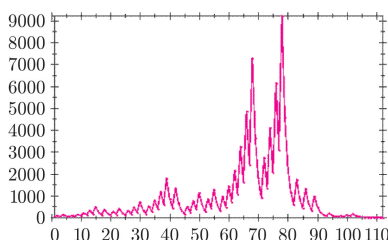
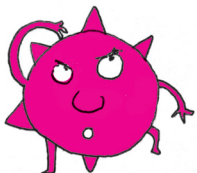
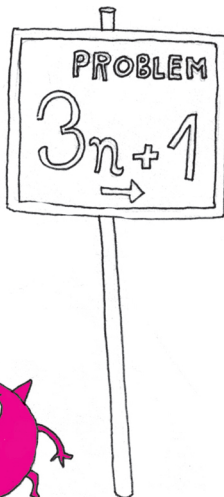
Grupy odpowiadają rozwiązaniom równania $n_0 + n_1 + \dots + n_9 = 10$ w liczbach naturalnych – liczby n_k można zinterpretować jako liczby wystąpień cyfry k w każdym elemencie danej grupy. Rozwiązania takiego równania jest

$$\binom{19}{9} < 10^5.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta co najmniej jedna grupa zawiera co najmniej

$$\frac{5 \cdot 10^8}{10^5} = 5 \cdot 10^3$$

elementów.



Rys. 1. Ilustracja ciągu Collatza dla $c_1 = 27$; pierwszy wyraz równy 1 to c_{112} .

Na tropie liczb gradowych

*Kamila BOJAR**

W matematycznym świecie od zawsze znajdowało się mnóstwo tajemniczek czekających na odkrycie. Tak zawyłych i zdradzieckich, że tylko szaleńcy mogli w ogóle wyobrazić sobie ich istnienie. Tymi szaleńcami byli nieustraszeni matematycy, którzy już od stuleci (jeżeli nie tysiącleci) szukają, rozwiązują i wyjaśniają zagadki, które większość ludzi już dawno uznawała za beznadziejne przypadki (lub są one tak abstrakcyjne, że w żaden sposób nieosiągalne). Mimo trudu i znoju wciąż pozostało mnóstwo do odkrycia. O istnieniu wielu przeszkód zapewne dopiero się dowiemy, lecz znane są takie, nad którymi zażarte prace, by je pokonać, wciąż trwają. Jednym z nich jest problem Collatza, zwany także problemem $3n + 1$ lub $3x + 1$. Sformułował go najprawdopodobniej niemiecki matematyk Lothar Collatz. Bierze się pod uwagę również kilku innych potencjalnych autorów, między innymi Bryana Thwaitesa, który ogłosił, że to on wpadł na ten problem około dwadzieścia lat przed jego opublikowaniem (czyli równoległe do Collatza). Czy mówił prawdę? Może to kolejna zagadka ukryta w naszym problemie? On sam zaś chowa się przed nami, zmieniając swoją nazwę. Zagadnienie jest znane również jako: problem Ulama, problem Kakutaniego, problem z Syracuse, problem Hasse'a oraz problem Thwaitesa. Zainteresowanie nim znacznie wzrosło, kiedy ustanowiono nagrodę dla wytrwałego poszukiwacza, który znajdzie rozwiązanie albo chociaż się do niego zbliży (bez precyzyjnego określenia, na czym owo zbliżenie ma polegać). Ta zachęta nie wyciągnęła jednak badaczy ze ślepego zaułka. Mimo starań wielu matematyków zagadnienie wciąż pozostało nierozstrzygnięte. Powstało nawet przekonanie, że problem musiał zostać stworzony przez matematycznych wrogów w celu odciągnięcia ich od naprawdę potrzebnych i ważnych spraw. Poszukiwania porzucił nawet jeden z najsłynniejszych matematyków Paul Erdős, określając zagadnienie słowami: „beznadziejne, absolutnie beznadziejne” oraz „być może matematyka nie jest jeszcze gotowa na takie problemy”. Te słowa ostudziły zapał wielu poszukiwaczy, ale nie wszystkich, bo skoro matematyka nie jest jeszcze gotowa na takie problemy, to dlaczego by nie pomóc jej stać się gotową?

Problem jest dość prosto sformułowany, a mianowicie dotyczy ciągu tworzonego według rekurencyjnej zasady:

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}c_n, & \text{gdy } c_n \text{ jest parzyste,} \\ 3c_n + 1, & \text{gdy } c_n \text{ jest nieparzyste,} \end{cases}$$

gdzie $c_1 \in \mathbb{N}$. Po wybraniu kilku przykładowych pierwszych wyrazów otrzymujemy poniższe ciągi:

7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1...

11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1...

15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1...

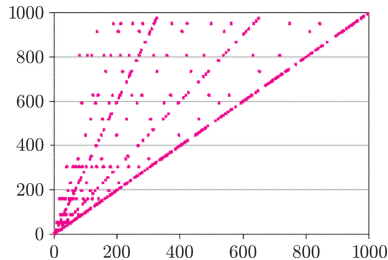
Każdy z powyższych ciągów wpada w pętlę 4, 2, 1, 4, 2, 1... Wiadomo już, że wszystkie ciągi o wyrazie początkowym mniejszym niż $5,764 \cdot 10^{18}$ kończą się tą właśnie sekwencją. Meritum problemu polega na tym, że nie jest znany żaden dowód na to, że ta pętla będzie kończyła ciąg dla każdej liczby początkowej.

Na rysunku 1 można zaobserwować naturę ciągu, od której wzięła się nazwa *liczby gradowe*. Chodzi o podobieństwo zachowania się liczb w ciągu do kryształków lodu podróżujących w chmurze gradowej. Kawałki lodu wędrują z góry na dół i z powrotem niesione przez burzliwe wiatry, zbierając przy tym masę. W końcu przekracza ona poziom krytyczny, siła wiatru przegrywa z grawitacją i kryształki lodu spadają na ziemię w postaci gradu.

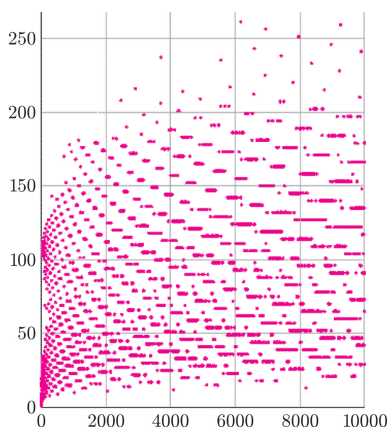
*Zespół Szkół Ponadgimnazjalnych w Szprotawie, uczennica LO

Jak widzimy, podobnie dzieje się z wyrazami ciągu, które rosną, maleją, rosną, aż ostatecznie spadają do jedynki.

Matematycy próbowali już na najróżniejsze sposoby odnaleźć rozwiązanie. Podążali wieloma drogami, szlakami i tropami. Niestety, większość zawędrowała w ślepią uliczkę, pozostawiając problem bez odpowiedzi. Ciekawą rzeczą, mogącą przybliżyć do rozwiązania, jest poznanie podstawowych własności ciągu, na przykład zależności jego wartości maksymalnej od jego wartości początkowej.



Rys. 2. Wartości maksymalne ciągów dla pierwszych wyrazów mniejszych od 1000.

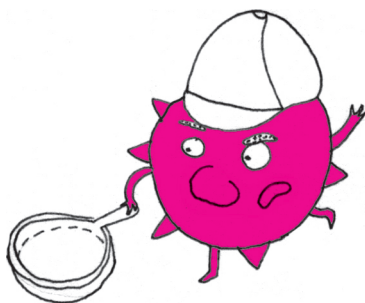


Rys. 3. Długości ciągów dla wyrazów początkowych mniejszych niż 10 000 (sama liczba początkowa nie została wliczona do długości).

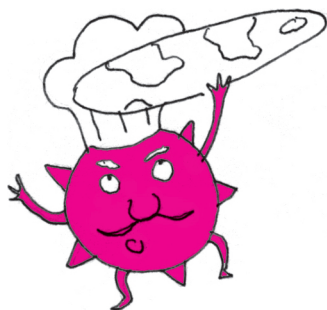
Maksima układają się wzdłuż linii poziomych i skośnych. Linie poziome biorą się stąd, że maksima lubią się powtarzać. Na przykład ciąg $7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$ ma maksimum 52. Nie jest to maksimum tylko dla liczby początkowej 7, ale także dla liczb 22, 11, 34, 17, 52. Kto wie, może dla każdego maksimum da się przydzielić choćby jedną linię skośną (to znaczy taką, na której znajdują się maksima nieskończenie wielu ciągów) czy poziomą (maksimum wystarczająco wielu ciągów)?

Kolejną własnością są długości ciągu (aż do pojawienia się w ciągu wartości 1). Mimo braku uporządkowania (w każdym razie na pierwszy rzut oka), inaczej niż w przypadku wartości maksymalnych, można odczytać choćby kilka własności. Jedną z takich ciekawostek są rekordziści.

Na przykład: najmniejszą liczbą początkową tworzącą ciąg o długości przekraczającej sto jest 27 (długość to 112), liczbą początkową dającą największą długość ciągu w przedziale od 1 do 100 jest 97 (długość 119), w przedziale od 1 do 100 000 liczba 77 031 (351), zaś w przedziale od 1 do 1 000 000 liczba 837 799 (525). Można szukać takich ciągów, dla których długość ciągu przekracza wartość początkową. W ciągu występują też ciekawe powtórzenia, na przykład w przedziale od 1 do 100 występuje aż 6 trzelementowych zbiorów kolejnych liczb początkowych dających taką samą długość. Są to $\{28, 29, 30\}$ (19), $\{36, 37, 38\}$ (22), $\{44, 45, 46\}$ (17), $\{49, 50, 51\}$ (25), $\{65, 66, 67\}$ (28) oraz $\{68, 69, 70\}$ (15). Jeśli prześledzić ciągi o wartości początkowej do 102, zobaczymy pierwszy taki zbiór pięcioelementowy $\{98, 99, 100, 101, 102\}$ (26). Kolejnym zbiorem pięcioelementowym jest $\{130, 131, 132, 133, 134\}$ (29). W danej funkcji można także znaleźć wiele innych powtórzeń: czteroelementowe $\{314, 315, 316, 317\}$ (38), sześcioelementowe $\{386, 387, 388, 389, 390, 391\}$ (121). Wśród liczb mniejszych od 10 000 000 można znaleźć 65 kolejnych liczb początkowych dających taką samą długość ciągu. Są to $\{5\,772\,712, 5\,772\,713, \dots, 5\,772\,776\}$ (215) oraz $\{9\,170\,858, 9\,170\,859, \dots, 9\,170\,922\}$ (226).



Pozostają pytania: po co zajmować się takimi problemami? Dlaczego nasi poszukiwacze tak chcą odnaleźć rozwiązanie? Już wiele razy w historii zdarzało się, że matematycy zajmowali się jakimś zagadnieniem z czystej ciekawości, bez praktycznego celu, a dopiero po latach znajdowano dla niego zastosowanie. Stało się tak, między innymi, z liczbami pierwszymi. Choć są też takie obszary matematyki, które jak na razie zastosowań dla siebie nie znalazły (i raczej się na to nie zapowiada). Innym powodem szukania rozwiązania jest to, że błądzenie po ciemku zmusza matematyków do wysiłku, do treningu i rozwoju, a w konsekwencji do rozwoju całej matematyki, ponieważ w trakcie takich poszukiwań powstają nowe podejścia i narzędzia, które mogą być użyte w zupełnie innych obszarach. Właśnie dlatego takie poszukiwania warto prowadzić. To kolejne naukowe zagadnienie, w którym na początku prac trzeba zadać sobie pytanie, nie „Co my z nim zrobimy?”, ale „Co ono zrobi z nami?”. Dlatego jeszcze raz szczerze zachęcam do rozpoczęcia własnych poszukiwań.



plaski niewypukły i niewklęsły, niemający wyniosłości i wgłębień; stanowiący płaszczyznę, równy (Słownik języka polskiego PWN)

Czy Ziemia jest płaska?

Michał MIŚKIEWICZ*

Pozwolę sobie podtrzymać Czytelnika w napięciu i tytułowe pytanie tymczasem zostawię bez odpowiedzi. Zacznę za to od refleksji, czym jest *plaskość*.

Każdy rozsądny człowiek za prototyp płaskiej powierzchni uzna fragment płaszczyzny, na przykład w postaci kartki papieru leżącej na stole. A jeśli taką kartkę wygiąć w kształt walca, czy nadal jest ona płaska? Tutaj zdania mogą być podzielone. Większość z nas uzna, że nie, i całkiem słusznie, bo takie znaczenie ma w codziennym języku słowo *plaski*. Warto jednak zauważyć, że w myśl takiej definicji świat powierzchni płaskich jest bardzo ubogi – ogranicza się do jednej jedynej płaszczyzny.

W matematyce funkcjonuje alternatywna definicja, która opiera się wyłącznie na wewnętrznych własnościach danej powierzchni, a nie na tym, jak ową powierzchnię ułożymy w przestrzeni czy wygniemy. Przez *geometrię wewnętrzną* powierzchni rozumiemy ogół takich własności – wszystkie wyniki pomiarów długości krzywych leżących na tej powierzchni. Dwie powierzchnie nazwiemy izometrycznymi, jeśli istnieje między nimi *izometria*, to jest ciągle przekształcenie zachowujące wszystkie powyższe wielkości. Ostatecznie, powierzchnię uznamy za *plaską*, jeśli da się ją podzielić na fragmenty, z których każdy jest izometryczny z fragmentem płaszczyzny.

Przejdźmy do przykładów. Pierwszym przykładem izometrii jest właśnie wspomniane wcześniej wygięcie kartki. Istotnie, dowolna krzywa narysowana na kartce po wygięciu ma tę samą długość, co i przedtem. Widzimy więc, że w myśl naszej definicji zgięta kartka jest izometryczna z wyprostowaną, w szczególności nadal jest płaska.

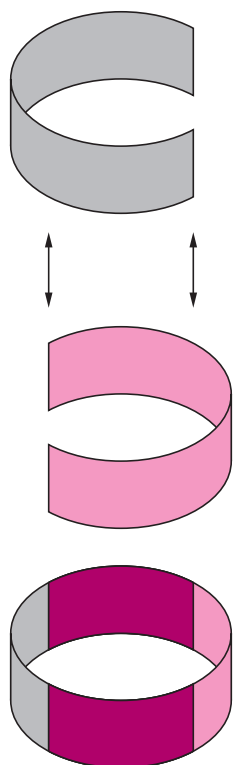
Podobnie jest z powierzchnią boczną walca. Nie jest ona co prawda izometryczna z fragmentem płaszczyzny (dlaczego?), składa się jednak z dwóch fragmentów, z których każdy daje się wyprostować (rysunek 1). W związku z tym powierzchnia boczna walca jest płaska, podobnie sprawa ma się też z powierzchnią boczną stożka.

Spróbujmy teraz odpowiedzieć na pytanie zadane w tytule. Dla uproszczenia przyjmijmy, że powierzchnia Ziemi ma kształt sfery i zapytajmy: czy sfera jest płaska? Zauważmy, że problem jest istotnie trudniejszy niż dotychczasowe rozważania – by wykazać, że powierzchnia jest płaska, wystarczy wskazać odpowiednie przekształcenie lub przekształcenia. Jeśli natomiast chcemy zaprzeczyć płaskości, musimy się upewnić, że żadne takie przekształcenie nie istnieje. W tym celu zazwyczaj wprowadza się *niezmienniki*. W naszym przypadku będzie to... wzór na długość okręgu.

Aby wyznaczyć taki wzór, możemy posługiwać się wyłącznie pojęciami geometrii wewnętrznej. Na początek zauważmy, że możemy określić odległość między dwoma punktami A, B powierzchni S jako kres dolny (w rozważanych tu przypadkach zawsze będzie to minimum) długości krzywych o początku w A i końcu w B zawartych w S .

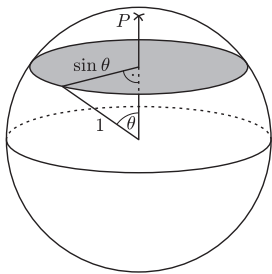
Dla płaszczyzny takie minimum jest osiągane dla odcinka AB , więc zdefiniowana właśnie odległość pokrywa się ze standardową. Natomiast na sferze krzywą o minimalnej długości jest łuk AB okręgu wielkiego (czyli okręgu otrzymanego jako przekrój sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek). Przykładowo na sferze o promieniu R odległość między dwoma punktami antypodycznymi jest długością połowy równika, a więc wynosi πR , podczas gdy standardowa odległość w przestrzeni to $2R$.

Nie będzie zaskoczeniem, jeśli okrąg o środku P i promieniu r (oznaczany jako $S(P, r)$) zdefiniujemy jako zbiór wszystkich punktów powierzchni odległych od punktu P o r . Przez $|S(P, r)|$ oznaczmy długość tej krzywej. Oczywiście, na płaszczyźnie długość ta wyraża się wzorem $2\pi r$. A jak jest na sferze o promieniu R ? Zauważmy, że dowolny okrąg o promieniu większym od πR

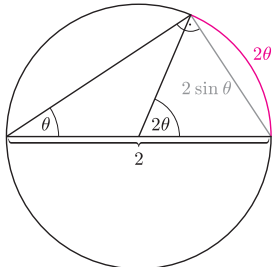


Rys. 1

*doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 2



Rys. 3

okazuje się zbiorem pustym, nie ma więc co mówić o jego długości. Natomiast okrąg o promieniu $\frac{\pi}{2}R$ jest okręgiem wielkim, toteż ma długość $2\pi R$. Widzimy w szczególności, że zdefiniowane właśnie okręgi na sferze są w przestrzeni jednocześnie okręgami w zwykłym sensie – dla uniknięcia nieporozumień w drugim przypadku będziemy mówić o okręgu *euklidesowym*, z *euklidesowym* środkiem i promieniem.

Dla ustalenia uwagi za punkt P przyjmijmy biegun północny sfery i ustalmy promień sfery równy 1. Wówczas okrąg $S(P, \theta)$ jest równoleżnikiem odpowiadającym szerokości geograficznej $\frac{\pi}{2} - \theta$ (kąty mierzymy tu w radianach). Jak pokazuje rysunek 2, ma on euklidesowy promień równy $\sin \theta$. W ten sposób otrzymujemy wzór na długość okręgu

$$|S(P, \theta)| = 2\pi \sin \theta.$$

Wiemy, że na płaszczyźnie byłoby to $2\pi\theta$. Porównanie długości łuku i cięciwy na rysunku 3 pokazuje, że $\sin \theta < \theta$, a więc okręgi na sferze są krótsze od ich odpowiedników na płaszczyźnie. Gdyby pewne otoczenie punktu P na sferze było izometryczne z fragmentem płaszczyzny, to te dwa wzory musiałyby się pokrywać, przynajmniej dla odpowiednio małych wartości θ .

W ten sposób możemy z ulgą skonstatować, że Ziemia nie jest płaska.

Kombinatoryka ekstremalna i przesuwanie zbiorów

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

*Damian ORLEF**

Najogólniej mówiąc, kombinatoryka ekstremalna zajmuje się pytaniami o to, jaki jest rozmiar największego (lub najmniejszego) możliwego zbioru obiektów danego typu, spełniającego pewien zadany warunek i jak takie ekstremalne przypadki wyglądają. Wiele z nich dotyczy rodzin zbiorów, jak np.

Pytanie 1. Jaka jest największa rodzina podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, której każde dwa elementy mają niepuste przecięcie?

Rodzina spełniająca ten warunek nazywać będziemy *przecinającą się*. Oznaczmy dla wygody $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. Nietrudno wskazać przykład sporej rodziny przecinającej się: dla dowolnego $a \in [n]$ spełnia ten warunek rodzina wszystkich podzbiorów $[n]$, które zawierają a , składająca się z 2^{n-1} zbiorów. Więcej już nie uzyskamy, o czym przekonamy się, ustawiając wszystkie podzbiory zbioru $[n]$ w 2^{n-1} par postaci $\{A, [n] \setminus A\}$. Dowolna rodzina przecinająca się zawiera co najwyżej jeden zbiór z każdej pary, więc jej licznosc nie przekracza 2^{n-1} , co chcieliśmy wykazać.

Po tej udanej rozgrzewce rozważmy podobny problem dla rodzin *r-jednorodnych*, tzn. składających się tylko ze zbiorów ustalonej mocy $r \in [n]$.

Pytanie 2. Jaka jest największa *r-jednorodna*, przecinająca się rodzina podzbiorów zbioru $[n]$?

Taką rodzinę będziemy nazywać w skrócie *(r, n)-rodziną*. Dla $r > n/2$ widać, że nawet rodzina wszystkich *r*-elementowych podzbiorów zbioru $[n]$ jest *(r, n)-rodziną*, więc w dalszym ciągu zakładamy, że $1 \leq r \leq n/2$.

Modyfikując wcześniejszy przykład, możemy wskazać *(r, n)-rodzinę* wszystkich *r*-elementowych podzbiorów $[n]$ zawierających pewną ustaloną liczbę $a \in [n]$; rodzina ta liczy będzie $\binom{n-1}{r-1}$ elementów. Podobnie jak wcześniej, więcej się nie da, ale dowód maksymalności jest teraz bardziej wymagający. My skorzystamy z ciekawej i bardzo użytecznej techniki *przesuwania* (ang. *shifting*) rodziny zbiorów, która ograniczy nasz problem do dość wygodnych rodzin.

O co chodzi w przesuwaniu? Zakładamy, że dana jest pewna rodzina \mathcal{F} podzbiorów $[n]$. Dla dowolnej pary liczb $1 \leq i < j \leq n$ określamy operację s_{ij} na zbiorach $A \in \mathcal{F}$ jako „podmianę” liczby j na i , o ile jest to możliwe i o ile prowadzi do powstania zbioru spoza \mathcal{F} . Bardziej precyzyjnie

$$s_{ij}(A) = \begin{cases} (A \setminus \{j\}) \cup \{i\}, & \text{jeśli } j \in A, i \notin A \text{ oraz } (A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \notin \mathcal{F}, \\ A, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wybór podzbioru $[n]$ zawierającego a jest równoważny wyborowi pozostałych elementów, czyli dowolnego podzbioru zbioru $[n] \setminus \{a\}$.

Nie odpowiedzieliśmy jednak na pytanie o to, jak wyglądają wszystkie przecinające się rodziny podzbiorów $[n]$, które osiągają 2^{n-1} elementów. Te przedstawione nie są jedyne.

Wybieramy $(r-1)$ elementów zbioru $A \setminus \{a\}$ spośród $(n-1)$ elementów zbioru $[n] \setminus \{a\}$.

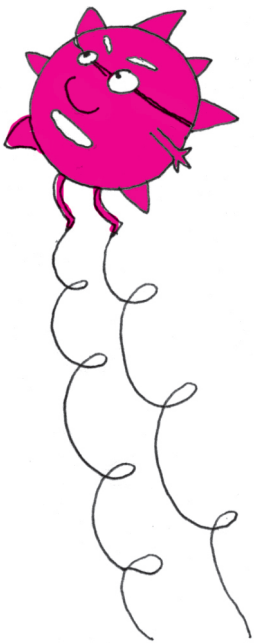
Widać, że definicja $s_{ij}(A)$ zależy nie tylko od A , ale też od rodziny \mathcal{F} , którą rozważamy, więc lepiej byłoby pisać $s_{ij}^{\mathcal{F}}(A)$ zamiast $s_{ij}(A)$, ale na szczęście i tak nie napotkamy na kłopoty w oznaczeniach.



Rozwiązanie zadania F 901.

Opierając się na analizie wymiarowej, możemy napisać, że dla sprężyn o jednakowym kształcie $k \text{ [N/m]} = Ca \text{ [m]} \cdot E \text{ [N/m}^2\text{]}$, gdzie C – stała bezwymiarowa, a – któryś z geometrycznych rozmiarów sprężyny, E – moduł Younga. Wyobraźmy sobie trzecią sprężynę o średnicy 9 mm i długości 3 cm wykonaną z drutu o średnicy 0,6 mm. Miałyby ona współczynnik sprężystości trzy razy większy od sprężyny pierwszej, to znaczy $3 \cdot 14 \text{ N/m} = 42 \text{ N/m}$. Równocześnie współczynnik sprężystości trzeciej i drugiej sprężyny pozostają w stosunku 3/7. Stąd otrzymujemy, że współczynnik sprężystości drugiej sprężyny wynosi 18 N/m.

(Rozważając zależność współczynnika sprężystości od długości sprężyny, zauważmy, że, na przykład, szeregowe połączenie n jednakowych sprężyn, każda o współczynniku sprężystości k , daje sprężynę o współczynniku sprężystości k/n .)



Jeśli $r < n/2$, to zdefiniowane wcześniej rodziny są jedynymi (r, n) -rodzinami o $\binom{n-1}{r-1}$ elementach. Jeśli $r = n/2$ i $r > 1$, to możliwości jest już więcej.

Stosując ją, zastępujemy pewne wystąpienia liczby j w zbiorach rodziny \mathcal{F} wystąpieniami mniejszej liczby i , nie zmieniając mocy modyfikowanych zbiorów. Sprawdzając kilka prostych przypadków, można też zauważyć, że operacja s_{ij} jest różnowartościowa na \mathcal{F} , a zatem wynik jej zastosowania do wszystkich zbiorów rodziny, tzn. rodzina $s_{ij}(\mathcal{F}) := \{s_{ij}(A) : A \in \mathcal{F}\}$, liczy sobie tyle samo elementów co \mathcal{F} . Nazwijmy wagą zbioru $A \subseteq [n]$ sumę jego elementów, zaś wagą rodziny \mathcal{F} – sumę wag zbiorów należących do \mathcal{F} . Zauważmy, że waga $s_{ij}(\mathcal{F})$ jest nie większa od wagi \mathcal{F} , a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s_{ij}(A) = A$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$. Najciekawsze jednak jest to, że jeśli \mathcal{F} jest rodziną przecinającą się, to jest nią również $s_{ij}(\mathcal{F})$. Ponieważ jednak niniejszy artykuł i tak jest bogato udekorowany matematycznymi formułami, techniczny (aczkolwiek) dowód tego faktu pozostawiam Czytelnikowi Dociekliwemu jako ćwiczenie.

Potrzebne nam będzie jeszcze jedno pojęcie – rodzinę \mathcal{F} nazwiemy *przesuniętą*, jeżeli dla każdego $1 \leq i < j \leq n$ zachodzi $s_{ij}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, co oznacza tak naprawdę, że $s_{ij}(A) = A$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$, bo rodziny \mathcal{F} i $s_{ij}(\mathcal{F})$ mają taką samą wagę. Równoważnie, rodzina \mathcal{F} jest przesunięta, jeśli dla każdego $1 \leq i < j \leq n$ oraz każdego zbioru $A \in \mathcal{F}$, z warunków $j \in A$, $i \notin A$ wynika, że $(A \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{F}$. W zbiorach z przesuniętej rodziny \mathcal{F} można podmieniać większe liczby na mniejsze, otrzymując dalej zbiory z \mathcal{F} .

Rozważmy teraz dowolną rodzinę \mathcal{F} i jeśli istnieją $1 \leq i < j \leq n$ takie, że $s_{ij}(\mathcal{F}) \neq \mathcal{F}$, to zastąpmy \mathcal{F} przez $s_{ij}(\mathcal{F})$ i powtarzajmy tę procedurę, dopóki jest to możliwe. Kiedyś musi się ona zakończyć z uwagi na zmniejszającą się wagę rozważanej rodziny, a zatem z każdej rodziny \mathcal{F} możemy, stosując skończenie wiele operacji postaci s_{ij} , otrzymać rodzinę przesuniętą \mathcal{F}' .

Możemy teraz uzasadnić odpowiedź na pytanie 2. Wykażemy przez indukcję względem n , że jeśli $1 \leq r \leq n/2$ oraz \mathcal{F} jest (r, n) -rodziną, to $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{r-1}$.

Bazę indukcji stanowi przypadek $n = 2$, w którym sprawa jest oczywista. Przejdźmy do dowodu kroku indukcyjnego: niech $1 \leq r \leq n/2$ oraz \mathcal{F} będzie (r, n) -rodziną. Jeśli $r = 1$, to łatwo zobaczyć, że $|\mathcal{F}| \leq 1 = \binom{n-1}{r-1}$. Jeśli zaś $r = n/2$, to możemy powtórzyć rozumowanie użyte przy okazji pytania 1 i podzielić r -elementowe podzbiory $[n]$ na pary postaci $\{A, [n] \setminus A\}$. Do każdej z nich należy co najwyżej jeden element rodziny \mathcal{F} , więc $|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{2} \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}$.

Pozostaje przypadek $1 < r < n/2$. Rodzinę \mathcal{F} możemy operacjami s_{ij} przekształcić do rodziny \mathcal{F}' , która jest przesunięta, a także, z uwagi na własności zachowywane przez s_{ij} , jest (r, n) -rodziną i liczy tyle samo elementów, co \mathcal{F} . Sprowadziliśmy zatem problem do rodzin przesuniętych. Próbując zredukować problem do podzbiorów $[n-1]$, rozważmy rodziny $\mathcal{F}'_0 := \{A \in \mathcal{F}' : n \notin A\}$ oraz $\mathcal{F}'_1 := \{A \setminus \{n\} : A \in \mathcal{F}', n \in A\}$.

\mathcal{F}'_0 jest z założenia $(r, n-1)$ -rodziną oraz $1 \leq r \leq (n-1)/2$, więc na mocy założenia indukcyjnego, $|\mathcal{F}'_0| \leq \binom{n-2}{r-1}$.

Z kolei \mathcal{F}'_1 jest $(r-1)$ -jednorodną rodziną podzbiorów $[n-1]$, a także $1 \leq (r-1) \leq (n-1)/2$. Sprawdźmy, że jest też rodziną przecinającą się, aby móc skorzystać z założenia indukcyjnego. Przypuśćmy nie wprost, że pewne $A, B \in \mathcal{F}'_1$ są rozłączne. Ponieważ $|A \cup B| = |A| + |B| = 2r - 2 \leq n - 2$, więc istnieje $k \in [n-1] \setminus (A \cup B)$. Do przesuniętej rodziny \mathcal{F}' należą zbiory $A_1 := A \cup \{n\}$, $B_1 := B \cup \{n\}$, więc należy również do niej $(A_1 \setminus \{n\}) \cup \{k\} = A \cup \{k\}$. Widać teraz, że $A \cup \{k\}$ i $B \cup \{n\}$ są rozłącznymi elementami przecinającej się rodziny \mathcal{F}' , czyli mamy sprzeczność. Z założenia indukcyjnego dostajemy więc $|\mathcal{F}'_1| \leq \binom{n-2}{r-2}$.

Podsumowując, $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}'_0| + |\mathcal{F}'_1| \leq \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2} = \binom{n-1}{r-1}$, co kończy dowód kroku indukcyjnego i rozwiązanie problemu.

Dość naturalny pomysł na krok indukcyjny mógł zadziałać dopiero po przejściu do rodziny przesuniętej. Otrzymany rezultat znany jest jako twierdzenie Erdősa–Ko–Rado, a przyjrzelśmy się właśnie jego pierwszemu dowodowi. Na tym się jednak kariera techniki przesuwania w kombinatoryce nie skończyła. Udało się dzięki niej rozwiązać wiele problemów i wciąż jest ona z powodzeniem stosowana.

Bestiariusz informatyczny (2)

W drugim odcinku bestiariusza przedstawimy popularne akronimy związane z sieciami komputerowymi. Sieci mogą być lokalne lub rozległe: **LAN**, **WAN** (*Local* lub *Wide Area Network*), a największą i najbardziej znaną jest, oczywiście, Internet. Jego początki sięgają lat 60. XX wieku, kiedy to z inicjatywy Departamentu Obrony USA powstała pierwsza rozproszona sieć **ARPANET** (*Advanced Research Projects Agency NETwork*).

Sieć to wiele komputerów połączonych infrastrukturą telekomunikacyjną i przesyłających między sobą informacje zgodnie ze ściśle określonymi protokołami komunikacyjnymi. Najważniejsze z nich to protokół adresowania **IP** (*Internet Protocol*) oraz protokół ustanawiania niezawodnych połączeń **TCP** (*Transmission Control Protocol*). Ponadto część komputerów udostępnia za pomocą sieci usługi internetowe, tj. poczta elektroniczna czy wymiana plików **P2P** (*Peer-to-Peer*).

Niektórzy autorzy akronimów postanowili użyć tylko jednej litery alfabetu. Przykładem jest **PPP** (*Point-to-Point Protocol*) – protokół sieciowy używany przy bezpośrednim połączeniu dwóch komputerów w sieci. Jednak najslawniejszy taki akronim to oczywiście **WWW** (*World Wide Web*), czyli nazwa usługi, z której korzystają przeglądarki internetowe. I choć może nie zdajemy sobie z tego sprawy, gdyż w języku polskim wymawiamy go wdzięcznie jako *wu-wu-wu*, to w języku angielskim nie jest już tak prosto i trzeba się męczyć z *dabljū-dabljū-dabljū*. Douglas Adams zauważył, że jest to jedyna znana mu rzecz, dla której wymówienie jej skróconej nazwy trwa trzy razy dłużej niż pełnej.

Przeglądarki internetowe korzystają z protokołu **HTTP** (*HyperText Transfer Protocol*), służącego do przesyłania dokumentów hipertekstowych, z których składają się „strony internetowe”. Dokumenty te pisane są w specjalnym języku znaczników **HTML** (*HyperText Markup Language*), który w połączeniu z **CSS** (*Cascading Style Sheets*) umożliwia zarówno semantyczny, jak i prezentacyjny opis przesyłanych informacji. Każdy dokument ma identyfikujący go adres **URL** (*Uniform Resource Locator*), a dzięki usłudze **DNS** (*Domain Name System*) możliwa jest zamiana występującej w nim nazwy domeny na odpowiadający jej adres IP serwera, na którym dokumenty są zlokalizowane.

Poufność transmisji danych zapewnia nam protokół **SSL** (*Secure Socket Layer*), który użyty w przeglądarce daje **HTTPS** (*HTTP over SSL*). Korzysta on z algorytmu klucza publicznego, np. **RSA** (*Rivest-Shamir-Adleman*), aby wymienić klucz symetryczny, którym następnie szyfruje całą komunikację pomiędzy przeglądarką a serwerem. Szyfrowanie stosowane jest również w sieciach bezprzewodowych **WPA** (*Wi-Fi Protected Access*) oraz w wirtualnych sieciach prywatnych **VPN** (*Virtual Private Network*).

Ale to tylko czubek góry lodowej – protokołów sieciowych jest całe mnóstwo. Jak choćby **DHCP** (*Dynamic Host Configuration Protocol*) pozwalający na dynamiczne przydzielanie komputerom adresów IP, **ICMP** (*Internet Control Message Protocol*) umożliwiający diagnostykę sieci, **BGP** (*Border Gateway Protocol*) służący do wymiany informacji na temat tras, którymi wędrują dane, **FTP** (*File Transfer Protocol*) służący do przesyłania plików, **SMTP** (*Simple Mail Transfer Protocol*) służący do przekazywania poczty elektronicznej, czy też **SSH** (*Secure SHell*) pozwalający na bezpieczne łączenie się ze zdalnym komputerem. Ich techniczne szczegóły opisane są w zbiorze dokumentów o nazwie **RFC** (*Request For Comments*).

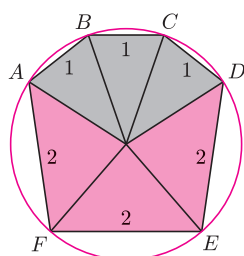
Oczywiście, aby korzystać z dobrodziejstw sieci, musimy się do niej podłączyć za pośrednictwem dostawcy usług internetowych **ISP** (*Internet Service Provider*). Takie podłączenie może być zrealizowane za pomocą cyfrowej sieci telefonicznej **ISDN** (*Integrated Services Digital Network*) lub **ADSL** (*Asymmetric Digital Subscriber Line*). Prędkość połączenia mierzymy w bitach (nie bajtach!) na sekundę **BPS** (*Bits Per Second*).

Wraz ze wzrostem liczby komputerów zaczęła się kurczyć liczba dostępnych 32-bitowych adresów zdefiniowanych w czwartej wersji protokołu IP. Jedną z metod przeciwdziałania temu niedoborowi jest **NAT** (*Network Address Translation*), pozwalająca na podłączenie całej sieci lokalnej do jednego adresu IP. I choć szósta wersja protokołu IP definiuje adresy 128-bitowe, to na jej powszechne przyjęcie musimy jeszcze poczekać.

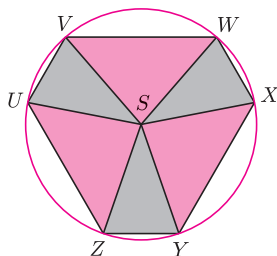
Tomasz IDZIASZEK



Rozwiązanie zadania M 1491.



„Potnijmy” sześciokąt wzdłuż odcinków łączących jego wierzchołki ze środkiem okręgu opisanego i z otrzymanych sześciu trójkątów „ułożmy” nowy sześciokąt UVWXYZ, jak na rysunku.



Okręgi opisane na obu sześciokątach mają jednakowe promienie.

Niech S oznacza środek okręgu opisanego na sześciokącie UVWXYZ. Z przystawienia czworokątów UVWS, XWVS, WXYS, ZYXS, YZUS i VUZS wiemy, że kąty wewnętrzne sześciokąta są przystające, mają więc po 120° . Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta UVW otrzymujemy $UV = \sqrt{7}$. Trójkąt SUW jest trójkątem równoramiennym o kącie 120° w wierzchołku S . Stąd możemy obliczyć szukany promień,

równy $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Analiza na kostce dyskretnej

Krzysztof OLESZKIEWICZ*, Łukasz RAJKOWSKI*

Kostką dyskretną wymiaru n nazywamy $\{-1, 1\}^n$, czyli zbiór wierzchołków kostki $[-1, 1]^n$, stanowiącej n -wymiarowy odpowiednik sześcianu. Rozważmy na niej działanie mnożenia po współrzędnych,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n).$$

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnych wierzchołków kostki u, v, w :

- $u \cdot v$ również jest wierzchołkiem kostki oraz $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$,
- $u \cdot (1, 1, \dots, 1) = (1, 1, \dots, 1) \cdot u = u$, czyli $(1, 1, \dots, 1)$ jest „wierzchołkiem neutralnym” przedstawionego działania,
- $u \cdot u = (1, 1, \dots, 1)$, zatem dla każdego wierzchołka istnieje „wierzchołek odwrotny”, czyli... on sam,
- $u \cdot v = v \cdot u$, w związku z czym badane działanie jest *przemienne*.

Przedstawione własności czynią z kostki dyskretnej z mnożeniem po współrzędnych *grupę przemianową*. Na skończonych (a także, ogólniej, lokalnie zwartych) grupach przemianowych można uprawiać analizę harmoniczną – jak zaraz zobaczymy, na kostce dyskretnej wystarczy do tego bardzo elementarny język.

Przyporządkujemy każdemu z wierzchołków liczbę rzeczywistą. Możemy oczywiście zrobić to na wiele różnych sposobów i każde takie przyporządkowanie jest niczym innym, jak *funkcją* określoną na kostce dyskretnej. Mając do dyspozycji dwie takie funkcje, f i g , wprowadźmy ich *iloczyn skalarny*, czyli sumę iloczynów wartości tych funkcji, rozciągającą się po wszystkich 2^n wierzchołkach:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \{-1, 1\}^n} f(x)g(x).$$

Każdy wierzchołek ma n współrzędnych, więc dla każdego $A \subseteq [n]$ możemy rozpatryć funkcję, która wierzchołkowi przyporządkowuje iloczyn współrzędnych o wskaźnikach ze zbioru A , tzn. funkcję

$$w_A(x) = \prod_{i \in A} x_i.$$

Przyjmujemy ponadto $w_\emptyset \equiv 1$. Oczywiście, funkcji tych jest dokładnie tyle co podzbiorów $[n]$, czyli 2^n . Dla $A \neq \emptyset$ mamy

$$(1) \quad \sum_{x \in \{-1, 1\}^n} w_A(x) = 0.$$

Aby się o tym przekonać, wybierzmy dowolną liczbę $k \in A$ i zauważmy, że

$$w_A(x_1, \dots, x_{k-1}, -1, x_{k+1}, \dots, x_n) = -w_A(x_1, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

zatem składniki sumy (1) można pogrupować w „anulujące się” pary. Dla dowolnych $A, B \subseteq [n]$ i dowolnego wierzchołka x mamy też

$$(2) \quad w_A(x)w_B(x) = \prod_{i \in A} x_i \prod_{i \in B} x_i = \prod_{i \in A \setminus B} x_i \prod_{i \in A \cap B} x_i^2 \prod_{i \in B \setminus A} x_i = \prod_{i \in A \setminus B} x_i \prod_{i \in B \setminus A} x_i = \prod_{i \in A \div B} x_i = w_{A \div B}(x),$$

gdzie $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Równości (1) oraz (2) pozwalają łatwo sprawdzić, że jeśli $A \neq B$, to $\langle w_A, w_B \rangle = 0$, a $\langle w_A, w_A \rangle = 2^n$. Funkcje w_A dla $A \in [n]$ tworzą zatem *układ ortogonalny*. Nietrudno udowodnić, że jest to układ zupełny, tzn. *każdą* funkcję $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ można *w dokładnie jeden* sposób przedstawić w postaci sumy $\sum_{A \subseteq [n]} a_A w_A$, gdzie $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, zaś $(a_A)_{A \subseteq [n]}$ są współczynnikami rzeczywistymi. Sumy takie, zwane rozwinięciami Fouriera–Walsha, pełnią na kostce dyskretnej rolę zbliżoną do tej, którą w klasycznej analizie harmonicznej odgrywają rozwinięcia funkcji okresowych w trygonometryczne szeregi Fouriera, tj. szeregi postaci $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$. Nicco więcej na ten temat można przeczytać w [1].

*Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

- [1] K. Oleszkiewicz, *O pewnym zastosowaniu analizy harmonicznej w rachunku prawdopodobieństwa*, *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie* 27 (2001), 44–45 (dostępne on-line).
- [2] J. Jendrej, K. Oleszkiewicz i J. O. Wojtaszczyk, *On some extensions of the FKN theorem*, ma niebawem ukazać się w ogólnodostępnym internetowym czasopiśmie *Theory of Computing*.

Wśród funkcji określonych na kostce dyskretnej szczególnie zainteresowanie budzą w ostatnich latach funkcje przyjmujące tylko wartości -1 i 1 . Każdą funkcję $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$ można bowiem naturalnie utożsamiać z podzbiorem $f^{-1}(1)$ zbioru wszystkich podzbiorów zbioru $[n]$. To jednoznaczne przyporządkowanie przydaje się w badaniu zagadnień kombinatorycznych, natomiast z punktu widzenia informatyki teoretycznej ciekawsze jest rozumienie f jako procedury, która z n bitów danych wejściowych (*input*) tworzy jeden bit wyniku, co odpowiada rozmaitym procesom decyzyjnym czy klasyfikacyjnym. O przydatności tego typu rozważań pisał w *Delcie* 4/2015 Andrzej Dąbrowski. Badaniem funkcji $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$, które bliskie są funkcjom afinicznym, zajmujemy się również na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW ([2]).

Prawdopodobieństwo i podzielność

Wybieramy jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ tak, że prawdopodobieństwo wyboru liczby m z tego zbioru jest równe $p_m \geq 0$ i $\sum_{m=1}^{m=n} p_m = 1$.

Określamy dla $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ zdarzenia losowe A_k , polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez k .

Rozważmy następujący problem:

Dla jakich $n \geq 2$ można określić liczby p_m tak, aby dla wszystkich k było $P(A_k) = \frac{1}{k}$?

Wydaje się, że jest to możliwe dla bardzo wielu n . Można jednak to zrobić tylko dla $n \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Dla $n = 2$ mamy $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}$.

Dla $n = 3$ mamy $p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = \frac{1}{3}$.

Dla $n = 4$ mamy $p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{3}, p_4 = \frac{1}{4}$.

Dla $n = 6$ mamy $p_1 = \frac{2}{15}, p_2 = \frac{1}{12}, p_3 = \frac{1}{6}, p_4 = \frac{1}{4}, p_5 = \frac{1}{5}, p_6 = \frac{1}{6}$.

Zachęcam Czytelnika do kontynuacji próby określenia liczb p_m dla $n = 5$: $p_5 = \frac{1}{5}, p_4 = \frac{1}{4}, \dots$

Edward STACHOWSKI



Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

M 1489. Znaleźć liczbę wielokrotności 1001, które można zapisać w postaci $10^n - 10^m$, gdzie n oraz m są liczbami całkowitymi spełniającymi $1 \leq m < n \leq 2016$.

Rozwiązanie na str. 6

M 1490. Udowodnić, że istnieje 5000 liczb 10-cyfrowych podzielnych przez 17, takich że każdą z nich można otrzymać z dowolnej z pozostałych poprzez zmianę kolejności cyfr.

Rozwiązanie na str. 12

M 1491. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg. Oblicz promień tego okręgu, wiedząc, że $AB = BC = CD = 1$ oraz $DE = EF = FA = 2$.

Rozwiązanie na str. 17

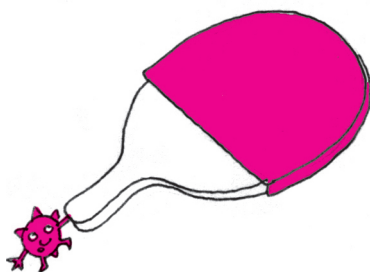
Przygotował Michał NAWROCKI

F 901. Dane są dwie sprężyny, wykonane z takiego samego materiału, każda składająca się z jednakowych, następujących po sobie zwojów. Średnice sprężyn wynoszą odpowiednio 3 i 9 mm, ich długości 1 i 7 cm, a średnica drutu, z którego są wykonane, to 0,2 i 0,6 mm. Współczynnik sprężystości pierwszej sprężyny wynosi $k = 14$ N/m. Ile wynosi współczynnik sprężystości drugiej sprężyny?

Rozwiązanie na str. 16

F 902. Piłeczka pingpongowa opuszczona bez prędkości początkowej z wysokości H na nieruchomą raketkę odbija się na wysokość $0,64H$. Chłopiec podbija periodycznie taką piłeczkę pionowo do góry tak, że po każdym uderzeniu wznosi się ona na wysokość $h = 0,9$ m powyżej raketki. Z jaką prędkością raketka porusza się ku górze w momencie uderzenia? Przyjmujemy, że masa raketki jest dużo większa od masy piłeczki.

Rozwiązanie na str. 7



Informatyczny kącik olimpijski (92): Wielomian

W tym miesiącu omówię zadanie *Wielomian*, które pojawiło się na finale Potyczek Algorytmicznych w 2005 roku.

Dany jest wielomian W stopnia (co najwyżej) n , zdefiniowany poprzez jego wartości w punktach $0, 1, 2, \dots, n$. Naszym zadaniem jest wyznaczenie wartości tego wielomianu w punkcie $n + 1$.

Oznaczmy współczynniki wielomianu W przez ciąg liczb a_0, a_1, \dots, a_n , gdzie a_i oznacza współczynnik przy x^i . Najprostszym sposobem rozwiązania tego zadania jest wyznaczenie współczynników wielomianu W , rozwiązując następujący układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_0 = W(0) \\ a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = W(1) \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \dots + 2^n a_n = W(2) \\ \vdots \\ a_0 + na_1 + n^2 a_2 + \dots + n^n a_n = W(n) \end{cases}$$

Można to zrealizować za pomocą metody eliminacji Gaussa. Niestety, ten algorytm jest zbyt powolny, ponieważ wykonuje on $O(n^3)$ operacji na liczbach, które mogą rosnąć wykładniczo. Metodę tę można jednak znacznie przyspieszyć, wykorzystując fakt, że znamy wartości wielomianu W w punktach będących kolejnymi liczbami naturalnymi.

Lemat 1. *Istnieje wielomian W' stopnia co najwyżej $n - 1$, taki że $W'(k) = W(k + 1) - W(k)$ dla $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.*

Dowód. Skoro funkcje $W(x)$ oraz $W(x + 1)$ są wielomianami, to również funkcja $W(x + 1) - W(x)$ jest wielomianem. Współczynnik wielomianu $W(x)$, przy x^n , wynosi a_n . Natomiast dla wielomianu $W(x + 1)$ mamy:

$$a_n(x + 1)^n = a_n \left(\binom{n}{n} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \dots + \binom{n}{1} x + \binom{n}{0} \right).$$

Skoro $\binom{n}{n} = 1$, to współczynnik przy x^n wielomianu $W(x + 1)$ także jest równy a_n . Z tego wynika, że współczynnik przy x^n wielomianu $W(x + 1) - W(x)$ jest równy $a_n - a_n = 0$. \square

Korzystając z lematu 1, możemy zredukować stopień wielomianu W , uzyskując problem równoważny. Aby to zrobić, zdefiniujemy ciąg wielomianów P_0, \dots, P_n , taki że $P_n = W$ oraz $P_{i-1}(j) = P_i(j + 1) - P_i(j)$ dla $0 < i \leq n$ oraz $0 \leq j \leq i$. Powstały w ten sposób wielomian P_0 ma stopień 0, zatem $P_0(1) = P_0(0)$. Znając wartość wielomianu P_0 w kolejnym punkcie, możemy obliczyć wartości $P_i(i + 1)$ dla $0 < i \leq n$ bezpośrednio z definicji ciągu wielomianów P . Obliczając nowe wartości kolejnych wielomianów, za każdym razem do poprzednio otrzymanej wartości dodajemy $P_i(i)$, zatem:

$$W(n + 1) = \sum_{i=0}^n P_i(i).$$

Spróbujmy teraz zapisać $W(n + 1)$ w zależności od wartości $W(0), \dots, W(n)$. Skoro jedynymi operacjami, jakie

wykonujemy, są dodawanie i odejmowanie, to wszystkie otrzymane liczby będą liniowo zależne od wartości wielomianu W . Możemy, korzystając z definicji ciągu wielomianów P , zapisać:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(j) &= W(j + 1) - W(j), \\ P_{n-2}(j) &= W(j + 2) - 2 \cdot W(j + 1) + W(j), \end{aligned}$$

oraz w ogólności:

$$P_i(j) = \sum_{k=j}^{n-i+j} (-1)^{n-i+j-k} \binom{n-i}{k-j} W(k).$$

Zachęcam Czytelnika, aby sprawdził poprawność tego wzoru i spróbował go udowodnić za pomocą indukcji matematycznej. Po wstawieniu tej równości do wzoru otrzymanego w poprzednim akapicie dostajemy:

$$\begin{aligned} W(n + 1) &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n (-1)^{n-k} \binom{n-i}{k-i} W(k) = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=n-k}^n (-1)^{n-k} \binom{i}{n-k} W(k). \end{aligned}$$

Lemat 2. *Prawdziwa jest tożsamość*

$$\sum_{i=j}^n \binom{i}{j} = \binom{n+1}{j+1}.$$

Dowód. Udowodnimy ją za pomocą indukcji względem n . Dla $n = j$ mamy

$$\sum_{i=j}^j \binom{i}{j} = 1 = \binom{j+1}{j+1}.$$

W kroku indukcyjnym korzystamy z tożsamości:

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^{n+1} \binom{i}{j} &= \sum_{i=j}^n \binom{i}{j} + \binom{n+1}{j} = \\ &= \binom{n+1}{j+1} + \binom{n+1}{j} = \binom{n+2}{j+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Na podstawie lematu 2 otrzymujemy dla $j = n - k$:

$$\begin{aligned} W(n + 1) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+1}{n-k+1} W(k) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} W(k). \end{aligned}$$

Dzięki tożsamości

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{\binom{n+1}{k}(n-k+1)}{k+1}$$

możemy obliczyć powyższą sumę, wykonując liniową ilość operacji na liczbach całkowitych.

Wartości składników tej sumy mogą być bardzo duże, więc dodatkową trudność w tym zadaniu są operacje na dużych liczbach. Na szczęście potrzebujemy jedynie wykonywać sumowanie dużych liczb oraz mnożenie i dzielenie dużych liczb przez małe. Obie te operacje można łatwo zrealizować w czasie liniowym względem długości liczby. Zatem ostatecznie otrzymujemy złożoność czasową $O(n^2)$.

Paweł BURZYŃSKI

Pierwsza bezpośrednia detekcja fal grawitacyjnych

Czternastego września 2015 roku dwa detektory LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*) w Stanach Zjednoczonych (L1 w Livingston w stanie Luizjana i H1 w Hanford w stanie Waszyngton) zarejestrowały po raz pierwszy w historii fale grawitacyjne, czyli zaburzenia czasoprzestrzeni przewidziane przez Einsteina w 1916 roku. Fale powstały w wyniku zapadnięcia się układu podwójnego gwiazdowych czarnych dziur i powstania jednej, masywniejszej i szybko rotującej czarnej dziury. Oznacza to potwierdzenie przewidywań ogólnej teorii względności oraz stanowi bezpośrednią obserwację czarnych dziur i układów podwójnych czarnych dziur. Co najważniejsze, a podniosły ton jest tu akurat na miejscu, obserwacja ta otwiera zupełnie nowe okno obserwacyjne na Wszechświat. Praca opisująca odkrycie została przyjęta do druku przez *Physical Review Letters* [1] jeszcze przed publicznym ogłoszeniem odkrycia 11 lutego 2016 roku.

Odkrycie raportują wspólnie amerykański zespół LIGO i europejski Virgo, które od 2007 roku współdzielą się danymi i wspólnie je analizują. Pechowo, ale zgodnie z planem rozbudowy i poprawiania czułości, detektor Virgo, położony koło Pizy we Włoszech, nie uczestniczył w obserwacjach. Dołączy w połowie roku, tworząc z instrumentami LIGO trójkę najczulszych detektorów fal grawitacyjnych i zapewniając niezbędną w tej dziedzinie obserwacyjnej możliwość triangulacji źródeł na niebie (o czym za chwilę). Duży wkład pracy włożyli natomiast analitycy danych z projektu Virgo, w tym Polacy z grupy Virgo-POLGRAW, wśród nich niżej podpisany. Sygnał oznaczony GW150914 i zarejestrowany na początku kampanii obserwacyjnej O1 (w zasadzie jeszcze podczas rozruchu nazwanego ER8 – *Engineering Run 8*) jest na tyle silny – stosunek sygnał-szum równy 24 – i widoczny w obu detektorach naraz (z odpowiednim przesunięciem czasowym wynoszącym 7 ms), że od początku było wiadomo, iż coś jest na rzeczy. Oszacowanie prawdopodobieństwa fałszywego alarmu odpowiada wystąpieniu sygnału o podobnej istotności raz na 200 tys. lat, co jest równoważne poziomowi istotności większemu od $5,1\sigma$.

Parametry układu zostały obliczone przez dopasowanie do danych najlepszego modelu przy użyciu metod filtru dopasowanego. Model-filtr składa się z dwóch części: analitycznego, postnewtonowskiego opisu relatywistycznego układu podwójnego oraz numerycznych wyników symulacji zderzenia się czarnych dziur. Po korelacji z danymi najlepiej dopasowany model to układ podwójny czarnych dziur o masach 29 i 36 mas Słońca, który pojawił się w paśmie czułości detektora przy częstotliwości około 30 Hz. Zaobserwowano 8 orbit układu podwójnego (sygnał o rosnącej częstotliwości i amplitudzie zwany „ćwierkiem”), po którym przy częstotliwości 150 Hz nastąpiło połączenie dwóch czarnych dziur w jedną (ang. *merger*, zlanie się układu) i końcowy *ringdown* (wypromieniowanie niesymetryczności horyzontu

i powstanie czarnej dziury Kerr’a). Parametry nowo powstałej czarnej dziury oszacowano na 62 masy Słońca, a moment pędu na 0,67 wartości krytycznej. Zderzenie zaszło w odległości 400 Mpc (1,3 miliarda lat świetlnych), czyli miliard trzysta milionów lat temu, ponieważ fale podróżują z prędkością światła. Orbitowanie, zlewanie się i ringdown trwały w sumie jedynie 0,2 s, a końcowa prędkość orbitalna składników przekraczała połowę prędkości światła. W trakcie całego zjawiska 3 masy Słońca zostały zamienione w energię fal grawitacyjnych. W momencie maksymalnej „jasności” moc wypromieniowywana w falach była równa $3,6 \cdot 10^{49}$ W, co odpowiada około 200 $M_{\odot}c^2/s$ (dla porównania, błyski γ to parę rzędów wielkości mniej: 10^{44} W). W tym momencie GW150914 był wielokrotnie „jaśniejszy” od całego obserwowalnego Wszechświata w emisji elektromagnetycznej (przy założeniu 10^{11} galaktyk, z których każda składa się z 10^{11} gwiazd podobnych do Słońca, które, jak wiadomo, emituje $4 \cdot 10^{26}$ W). Lokalizacja zjawiska na niebie jest obarczona dużym błędem: 600 stopni kwadratowych z wiarygodnością 90%. To z powodu obserwacji tylko przez dwa detektory naraz – uzyskuje się wtedy koło na sferze niebieskiej reprezentujące możliwe położenie obiektu. Dodatkowe uwzględnienie polaryzacji fal pozwala na częściowe ograniczenie prawdopodobnego obszaru, ale dopiero trzeci detektor (Virgo) da zadowalającą precyzję kilku stopni kwadratowych. Co prawda, nikt nie spodziewał się błysku elektromagnetycznego z tego zdarzenia, ale gdyby takowy został zaobserwowany, byłoby jeszcze ciekawiej.

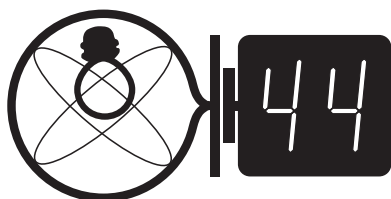
Oprócz zastanawiania się, ile będzie z tego odkrycia Nagród Nobla (niektórzy mówią nawet o dwóch – za rejestrację fal oraz za dowód na istnienie czarnych dziur) astrofizycy przyzwyczajają się do myśli o zupełnie nowej dziedzinie badań. Możliwości kolejnych przełomów jest mnóstwo: pierwsza obserwacja błysku elektromagnetycznego i grawitacyjnego z tego samego obiektu pozwoliłaby np. na określenie odległości na dwa niezależne sposoby – z jasności obiektu i „jasności” (amplitudy) fali grawitacyjnej. Specjaliści od procesów gwiazdotwórczych i populacji gwiazd zacierają ręce: czarne dziury w sygnale GW150914 są dużo masywniejsze niż te znane z naszej Galaktyki, co oznacza, że obserwując w przyszłości podobne obiekty będzie można nałożyć ograniczenia na różne słabo poznane etapy ewolucji gwiazd. Już teraz wiadomo, że masywne gwiazdy, mogące stworzyć układ GW150914, musiały powstać w regionie o niskiej metaliczności. Pierwsza obserwacja demonstruje także możliwości testowania alternatywnych teorii grawitacji – udało się np. poprawić ograniczenia na masę grawitonu, hipotetycznego bozonu przenoszącego oddziaływania grawitacyjne, pochodzące z obserwacji relatywistycznych układów z pulsarami.

Michał BEJGER

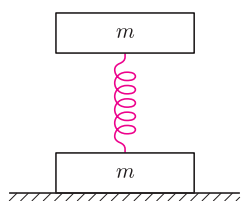
[1] The LIGO Scientific Collaboration, The Virgo Collaboration, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *PRL* **116**, 061102 (2016).

Skrót regulaminu

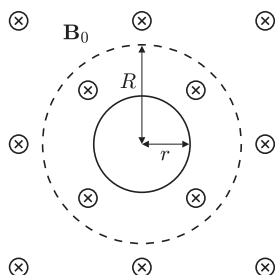
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



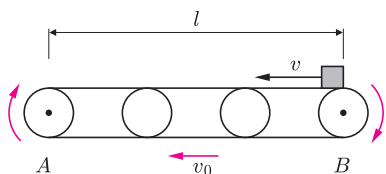
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2016



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

609. Ciecz jednorodna wrze, gdy ciśnienie pary nasyconej w pęcherzykach, tworzących się w całej objętości cieczy, równe jest ciśnieniu zewnętrznemu – w rozważanym przypadku atmosferycznemu (dodatkowe ciśnienie wewnątrz pęcherzyka związane z napięciem powierzchniowym i ciśnieniem hydrostatycznym można zaniedbać). Przy wrzeniu „granicznym” w pęcherzykach na granicy wody i CCl_4 znajduje się nasycona para wodna oraz nasycona para czterochloru węgla, przy czym suma ich ciśnień cząstkowych równa jest ciśnieniu atmosferycznemu p_a . Stąd ciśnienie pary nasyconej CCl_4 wynosi $p_2 = p_a - p_1$.

Zadania z fizyki nr 616, 617

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

616. Układ złożony z dwóch jednakowych płytek o masach m połączonych nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości k znajduje się w stanie równowagi (rys. 1). Górną płytkę naciśnięto tak, że opuściła się ona o x , a następnie puszczono. Na jaką maksymalną wysokość podniósł się środek masy układu?

617. Na zewnątrz powierzchni walcowej o promieniu r wartość wektora indukcji pola magnetycznego rośnie liniowo w czasie: $B_0 = at$. Linie pola magnetycznego są równoległe do osi walca (rys. 2). Jak musi zmieniać się w czasie wartość jednorodnego pola magnetycznego wewnątrz tej powierzchni, aby elektron poruszał się po okręgu o promieniu $R > r$? W chwili $t = 0$ elektron spoczywa.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2015

Przypominamy treść zadań:

608. Taśma transportera o długości l porusza się z prędkością v_0 . Z jaką prędkością v względem Ziemi należy popchnąć mały klocek z końca transportera przeciwnie do ruchu taśmy, aby ilość ciepła wydzielona w wyniku tarcia klocka o taśmę była największa? Jaka jest wartość tego ciepła, jeżeli współczynnik tarcia wynosi μ i spełniony jest warunek $v_0^2 < 2\mu gl$.

609. W szklance znajdują się dwie niemieszające się cieczy: czterochlorek węgla CCl_4 i woda. Pod ciśnieniem normalnym CCl_4 wrze w temperaturze $76,7^\circ\text{C}$. W wyniku równomiernego ogrzewania szklanki w kąpeli wodnej, w temperaturze $65,5^\circ$ rozpoczyna się wrzenie na granicy rozdziału cieczy. Jaki jest stosunek mas czterochloru węgla i wody, które wykipią w określonym czasie przy takim „granicznym” wrzeniu? Ciśnienie pary nasyconej wody w temperaturze $65,5^\circ$ wynosi $p_1 = 25,6$ kPa.

608. Ilość wydzielonego ciepła będzie największa, gdy klocek przebędzie maksymalną drogę względem taśmy transportera. Klocek musi dotrzeć do końca transportera z zerową prędkością względem Ziemi. Jego prędkość początkową v otrzymujemy z zależności $\frac{mv^2}{2} = \mu mgl$, gdzie m jest masą klocka. Stąd $v = \sqrt{2\mu gl}$. Po zatrzymaniu klocek zaczyna poruszać się z przyspieszeniem μg w kierunku ruchu taśmy. Prędkość taśmy osiągnie po czasie $\frac{v_0}{\mu g}$, gdy przebędzie względem Ziemi drogę

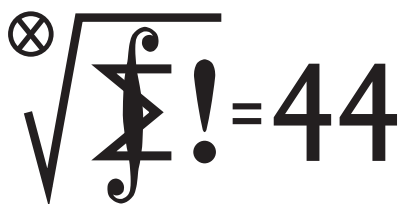
$l_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}$. Ponieważ spełniony jest warunek $v_0^2 < 2\mu gl$, klocek osiągnie prędkość v_0 względem Ziemi, czyli zatrzyma się względem taśmy, zanim spadnie z transportera. Energia kinetyczna klocka w układzie związanym z taśmą transportera od chwili startu do chwili zatrzymania maleje o wielkość $|\Delta E_k| = \frac{m(v_0 + v)^2}{2}$ i tyle wynosi maksymalne ciepło wydzielone w układzie: $Q = \frac{m(v_0 + \sqrt{2\mu gl})^2}{2}$.

W czasie wrzenia pęcherzyki unoszą się w górę, dochodzą do powierzchni cieczy i pękają. Zatem stosunek mas czterochloru węgla i wody, które wyparują w określonym czasie, równy jest stosunkowi gęstości par tych substancji $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$. Korzystając z równania Clapeyrona $\rho = \frac{p\mu}{RT}$, gdzie μ jest masą molową substancji, otrzymujemy:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{p_2\mu_2}{p_1\mu_1} \approx 25.$$

Czterochlorek węgla podczas wrzenia „granicznego” paruje około 25 razy szybciej niż woda.

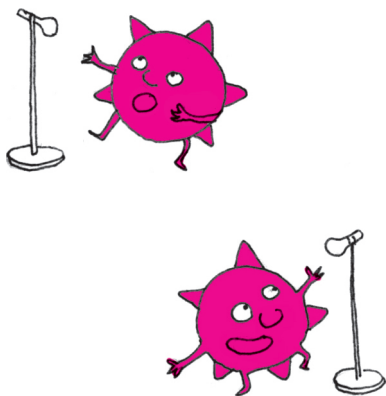
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2016

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 705 ($WT = 1,87$) i 706 ($WT = 2,26$) z numeru 9/2015

Paweł Najman	Kraków	42,85
Jerzy Cisło	Wrocław	39,13
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	38,86
Jędrzej Garnek	Poznań	37,64
Janusz Fiett	Warszawa	36,20
Stanisław Bednarek	Łódź	35,50
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	33,77
Paweł Kubit	Kraków	32,98



Zadania z matematyki nr 719, 720

Redaguje Marcin E. KUCZMA

719. Czternaścioro ludzi prezentowało swoje umiejętności w serii występów; w pojedynczym występie mogła uczestniczyć dowolna liczba osób. Było to siedem par małżeńskich – ale małżonkowie nigdy nie wystąpili razem. Za to każda inna para osób (dowolnej płci) uczestniczyła jednocześnie w dokładnie jednym występie. Wiadomo ponadto, że pewna osoba uczestniczyła w dokładnie dwóch występach. Jaka jest minimalna liczba występów, przy której te warunki mogły być spełnione?

720. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 1$ znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą s taką, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$(x-1)^{2n} + (x+1)^{2n} \leq 2(x^2+s)^n.$$

Zadanie 720 (inspirowane zadaniami 194 i 702) zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2015

Przypominamy treść zadań:

711. Czy istnieje nieskończony ciąg x_1, x_2, x_3, \dots o wyrazach całkowitych dodatnich, w którym każda dodatnia liczba całkowita występuje dokładnie raz, przy czym dla każdego n suma $x_1 + \dots + x_n$ jest podzielna przez n ?

712. Liczby rzeczywiste a, b spełniają równania:

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0, \quad b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0.$$

Obliczyć wartość sumy $a + b$.

711. Istnieją takie ciągi. Jedną z możliwych konstrukcji:

Przyjmujemy $x_1 = 1$. Będziemy przedłużać zdefiniowany odcinek ciągu, dołączając po dwa wyrazy.

Ustalmy liczbę parzystą $n \geq 2$ i przyjmijmy, że wyrazy x_1, \dots, x_{n-1} są już określone. Najmniejsza dodatnia liczba całkowita, różna od x_1, \dots, x_{n-1} , będzie wyrazem x_{n+1} (to gwarantuje, że w budowanym ciągu znajdują się wszystkie liczby całkowite dodatnie).

Określamy wyraz x_n wzorem

$$x_n = k_n n(n+1) + nx_{n+1} - (x_1 + \dots + x_{n-1}),$$

gdzie k_n jest liczbą całkowitą tak dobraną, by uzyskana liczba x_n była dodatnia oraz różna od liczb x_1, \dots, x_{n-1} i różna od x_{n+1} (powstający ciąg będzie więc miał wszystkie wyrazy różne). Przy tym

$$x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n = n(k_n n + k_n + x_{n+1}),$$

$$x_1 + \dots + x_n + x_{n+1} = n(k_n n + k_n + x_{n+1}) + x_{n+1} = (n+1)(k_n n + x_{n+1}).$$

Wymagane warunki podzielności są spełnione. Indukcyjnie powstaje ciąg nieskończony (x_n) , jakiego szukamy.

712. Zapiszmy liczby a, b jako $a = 1 + x, b = 1 + y$. Wówczas

$$a^3 - 3a^2 + 5a = x^3 + 2x + 3, \quad b^3 - 3b^2 + 5b = y^3 + 2y + 3,$$

a zadane równania przybierają postać

$$x^3 + 2x = 14, \quad y^3 + 2y = -14.$$

Po dodaniu stronami:

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2 + 2) = 0.$$

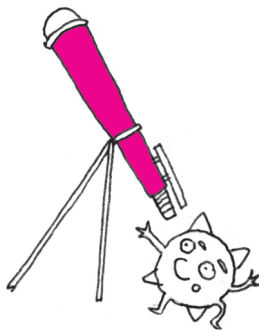
Czynnik w drugim nawiasie jest liczbą dodatnią, wobec czego $x + y = 0$. To daje odpowiedź: $a + b = 2$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 602 ($WT = 1,78$), 603 ($WT = 3,28$), 604 ($WT = 1,5$) i 605 ($WT = 2,2$) z numerów 9–10/2015

Tomasz Wietecha	Tarnów	38,40
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Michał Koźlik	Gliwice	30,96
Marian Łupieżowiec	Gliwice	30,42
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikieliewicz	Brodnica	22,22
Jan Zambrzycki	Białystok	16,22
Krzysztof Magiera	Łosiów	15,90
Karol Łukanowski	Niemcz	11,97



Obszarem H II nazywa się rozległe i rzadkie chmury częściowo zjonizowanego gazu, w których niedawno formowały się gwiazdy.



Prosto z nieba: Rekordowe pulsary

Pulsary są znane astronomom od prawie 50 lat. Odkrycia (w 1967 roku) dokonali radioastronomowie, przypadkowo rejestrując promieniowanie powstające w magnetosferze małej, gęstej gwiazdy obracającej się wokół swej osi; pulsary można porównać do kosmicznych latarni morskich. Do dziś skatalogowano około 2000 pulsarów, przeważnie emitujących promieniowanie radiowe, ale znamy także obiekty świecące w paśmie widzialnym i twardym promieniowaniu X i γ . Domena wysokich częstotliwości była do niedawna astrofizyczną *terra incognita*. Przed misją satelity NASA Fermi znano jedynie 7 pulsarów γ . Obecnie ta liczba zwiększyła się do ponad 160, można więc mówić o specyficznej populacji tych gwiazd. Niektóre z nich są widoczne tylko w najtwardszym promieniowaniu! Dziś piszemy o niedawnym odkryciu przez Fermiego rekordowo jasnego i na dodatek pierwszego pulsara γ poza naszą Galaktyką.

Pulsar PSR J0540-6919 znajduje się w zewnętrznej części mgławicy Tarantula (zwanej również 30 Doradus), obszaru H II wchodzącego w skład Wielkiego Obłoku Magellana. Mgławica Tarantula jest znana m.in. z tego, że to w jej okolicy wybuchła supernowa 1987A, najbliższa do tej pory supernowa obserwowana przez teleskopy. Nowo odkryty pulsar jest odpowiedzialny za mniej więcej połowę emitowanego z kierunku mgławicy Tarantuli twardego promieniowania γ . PSR J0540-6919 świeci w γ około 20 razy mocniej niż poprzedni rekordzista, pulsar w mgławicy Krab (PSR B0531+21), natomiast ich jasność w innych częstotliwościach fal (radio, optycznych i rentgenowskich) jest na podobnym poziomie. Te różnice są niezwykle ciekawe dla badaczy pulsarów. Wiek PSR J0540-6919 szacuje się na około 1700 lat, jest on zatem nieco tylko starszy niż pulsar w Krabie, którego narodziny były obserwowane w 1054 roku przez chińskich astronomów. W obszarze gwiazdotwórczym mgławicy Tarantula znajduje się także drugi energetyczny pulsar: PSR J0537-6910, odkryty parę lat temu przez misję NASA Einstein/Rossi X-ray Timing Explorer (RXTE). Jest on rekordzistą częstotliwości pulsacji wśród młodych pulsarów: obraca się 62 razy na sekundę. Zrozumienie różnic w zachowaniu się tych młodych, a jednak dość wyraźnie różniących się obiektów, jest kluczowe do poznania szczegółów ekstremalnych procesów zachodzących w magnetosferach tych gwiazd i szczegółów ich narodzin.

Michał BEJGER

Niebo w kwietniu

Kwiecień to miesiąc, w którym zdecydowanie warto skupić się na obserwacjach rojów meteorów. Dla łowców spadających gwiazd dostępne będą zarówno roje bardzo aktywne, jak i takie, przy obserwacjach których trzeba będzie się wykazać cierpliwością oraz spostrzegawczością.

W drugiej połowie kwietnia warto obserwować znane i lubiane Lirydy. Rój ten znany był już w starożytnych Chinach (687 rok p.n.e.), a charakteryzuje się białymi meteorami bez smug. Lirydy związane są z kometą C/Thatchera (1861 G1), a ich aktywność to około 18 meteorów na godzinę, ale dochodzi nawet do 90. Warto też pamiętać, iż w latach 1803 i 1922 odnotowano deszcze, w których liczba zaobserwowanych meteorów przekroczyła 1800 obiektów na godzinę. Szczytu aktywności Lirydów można się spodziewać w trakcie nocy 22–23 kwietnia, a rój ten ma radiant w okolicach Węgi w gwiazdozbiornie Lutni. Najlepsze warunki do obserwacji będą w drugiej połowie nocy, nad południowo-wschodnim horyzontem. W obserwacjach może jednak przeszkadzać Księżyc, gdyż 22 IV przypada pełnia.

Kolejnym rojem, któremu warto poświęcić czas, są Pi Puppidy, które również można obserwować w drugiej połowie kwietnia. Rój charakteryzuje się aktywnością dochodzącą do 40 obiektów na godzinę, jednak jego aktywność określa się jako zmienną i nieregularną. Pi Puppidy są związane z kometą 26P/Grigg-Skjellerup.

Maksimum aktywności roju wypada 22 IV, a jego radiant położony jest na obszarze gwiazdozbioru Ruffy.

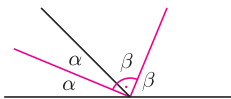
Kto lubi wyzwania, powinien spróbować obserwacji lub astrofotografii meteorów z roju Alfa Bootydy, który jest dostępny do obserwacji od połowy kwietnia do połowy maja, a jego radiant znajduje się na wschód od Arktura, na obszarze gwiazdozbioru Wolarza. Obfitość roju to zaledwie 2 meteory na godzinę, jest to zatem cel dla najwytrwalszych miłośników spadających gwiazd.

Tegoroczne kwietniowe noce warto też wykorzystać na obserwacje zbliżeń i zakryć planetek i gwiazd przez Księżyc. 9 IV w okolicach gwiazdozbioru Wieloryba na zachodnim niebie, tuż po zachodzie Słońca, będzie można znaleźć planetoidę Westę w towarzystwie naszego naturalnego satelity. Jasność Westy to około $8,4^m$, zatem jest to cel dla obserwatorów wyposażonych w lornetki i małe lunetki. Kolejnym obiektem do obserwacji jest Aldebaran będący najjaśniejszą gwiazdą z gwiazdozbioru Byka, który 10 IV będzie położony w bliskim sąsiedztwie Księżycy. Aldebarana szukajmy, patrząc w kierunku zachodnim nad horyzontem. Ta podwójna gwiazda, mająca jasność około $0,85^m$, widoczna będzie w godzinach wieczornych. W trakcie nocy dojdzie do zakrycia Aldebarana przez Księżyc, jednak zjawiska tego nie będzie można obserwować z terenu Polski.

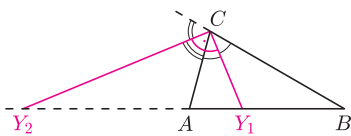
Karolina BĄKOWSKA

Dla kąta wklęsłego dwusieczna to zbiór punktów wewnątrz kąta równo odległych od przedłużeń jego ramion.

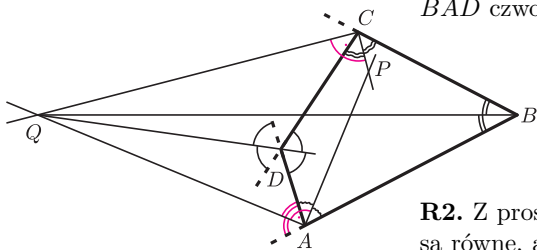
Pozostawiam Czytelnikom nietrudne uzasadnienie równoważności podanych dwóch definicji oraz dowód twierdzenia o dwusiecznej.



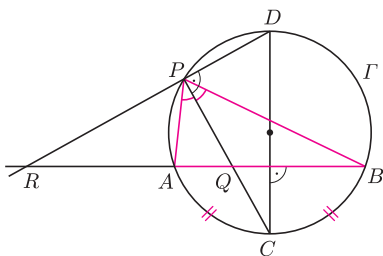
Rys. 1. $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$.



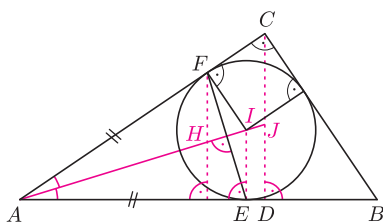
Rys. 2. Dwusieczna może być wewnętrzna lub zewnętrzna.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5. $HF \parallel EI \parallel DC \perp AB$.

Zadanie 1 pochodzi z LXIV Olimpiady Matematycznej, a zadanie 3 z LXVI OM.

Skoro dwusieczna to półprosta dzieląca kąt na dwa równe kąty, to dlaczego dwusieczne kątów wewnętrznych każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie? Otóż dla kąta wypukłego dwusieczna to także zbiór punktów wewnątrz tego kąta równo odległych od obydwu jego ramion. Punkt przecięcia dwóch dwusiecznych trójkąta jest więc tak samo odległy od każdej z prostych zawierających jego boki, stąd leży też na trzeciej dwusiecznej i jest środkiem okręgu wpisanego.

Fakt. Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe (rys. 1).

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta $ABCD$, a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q na zewnątrz czworokąta. Udowodnij, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

Twierdzenie o dwusiecznej. W trójkącie ABC punkt Y należący do prostej AB jest spodkiem dwusiecznej kąta przy wierzchołku C wtedy i tylko wtedy, gdy $CA/CB = YA/YB$ (rys. 2).

2. Odcinek CD jest średnicą okręgu Γ , a cięciwa AB jest prostopadła do tej średnicy. Punkt P należy do krótszego łuku AD okręgu Γ . Proste PC i PD przecinają prostą AB odpowiednio w punktach Q i R . Wykaż, że $QA/QB = RA/RB$.

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C , a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Wykaż, że ortocentrum trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

Rozwiązania

R1. Jeśli kąt PAQ jest prosty, to AQ jest dwusieczną kąta przyległego do kąta BAD czworokąta (rys. 3). Z kolei aby dowieść, że kąt PCQ jest prosty, wystarczy wykazać, że CQ jest dwusieczną kąta przyległego do kąta BCD czworokąta.

Oznaczmy przez (Q, XY) odległość punktu Q od prostej XY . Zachodzą równości $(Q, CD) = (Q, DA) = (Q, AB) = (Q, BC)$ oraz $Q \notin CP$, co kończy dowód. \square

R2. Z prostopadłości cięciwy AB do średnicy CD wynika, że krótsze łuki CA i CB są równe, a więc półprosta PC jest dwusieczną kąta wpisanego APB (rys. 4). Kąt CPD jest wpisany w okrąg i oparty na średnicy, zatem $PC \perp PD$, czyli półprosta PR jest z kolei dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku P trójkąta APB . Z twierdzenia o dwusiecznej $QA/QB = PA/PB = RA/RB$. \square

R3. Oznaczmy przez H ortocentrum trójkąta AEF , przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC , a przez J punkt przecięcia prostych AI i CD (rys. 5). Ponieważ $AE = AF$, więc półprosta AH jest dwusieczną kąta CAD i do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że półprosta CH jest dwusieczną kąta ACD .

Kąt ACB jest prosty, więc punkty C, F, I i punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem BC tworzą kwadrat. Stąd $FC = FI = EI$.

Korzystając kolejno z twierdzenia Talesa dla $HF \parallel JC$, równości odcinków, twierdzenia Talesa dla $EI \parallel DJ$ i twierdzenia o dwusiecznej, uzyskujemy

$$\frac{HA}{HJ} = \frac{FA}{FC} = \frac{EA}{EI} = \frac{DA}{DJ} = \frac{CA}{CJ}.$$

Stąd na mocy twierdzenia o dwusiecznej CH jest dwusieczną kąta ACJ . \square

Zadania domowe

4. Udowodnij, że środek okręgu wpisanego w trójkąt jest ortocentrum trójkąta utworzonego przez środki okręgów dopisanych.

5. Wyznacz środek ciężkości obwodu trójkąta (czyli trójkątnej drucianej ramki).

6. W trójkącie ABC punkty D i E są spodkami dwusiecznych kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B . Punkt F jest spodkiem dwusiecznej zewnętrznej kąta przy wierzchołku C . Wykaż, że punkty D, E, F są współliniowe.

Wskazówka: twierdzenie Menelaosa, opisanie m.in. w *deltoidzie* 3/2011.