



tel. 22 648 10 34 fax 22 648 10 392

Nagrodę Dziekanów
za najlepszy artykuł w roku akademickim 2014/15 otrzymał
Lech Falandysz
za tekst *Wycieczka na Marsa* zamieszczony w numerze 8/2015.




W następnym numerze odpowiemy na pytanie:



czy Ziemia

jest płaska?

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (502)

Kondensat Bosego–Einsteina <i>Kazimierz Rzażewski</i>	str. 1
Neutrino na biegunie <i>Paweł Przewłocki</i>	str. 4
<i>Delta</i> i fizyka cząstek elementarnych (III): Skąd wiemy to, co wiemy <i>Piotr Chankowski</i>	str. 6
Informatyczny kącik olimpijski (91): Kolorowanie cyklu <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.11
Zacieniony biegun <i>Filip Czerwiński,</i> <i>Marlena Maćkowiak,</i> <i>Antoni Nuszkiwicz,</i> <i>Kacper Raciborski,</i> <i>Paweł Suchomski,</i> <i>Paweł Szczypkowski,</i> <i>Jan Białowicz,</i> <i>Piotr Podlaski</i>	str.12
Niezależność zdarzeń w modelu klasycznym <i>Edward Stachowski</i>	str.13
Wielka struktura w wielkich przebiegach <i>Agnieszka Pollo</i>	str.14
Matematyka jest jedna: Magia liczb <i>Tomasz Kobos</i>	str.16
 Zadania	str.19
 O pożytkach z lodu w wiaderku (II) <i>Magdalena Fikus</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Poprzeczka w podczerwieni	str.24
Niebo w marcu	str.24
 $w - k + s = 2$ <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Tomasz Kazana, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nacz., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nacz., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem T_EX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2016 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.


Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

 Warsaw Center
of Mathematics
and Computer Science

wcmcs.edu.pl

Kondensat Bosego–Einsteina

Kazimierz RZAŻEWSKI*

W temperaturze pokojowej gaz, zbiór atomów czy cząsteczek, a także powietrze, którym oddychamy, z powodzeniem można sobie wyobrazić jako rój małych obiektów, niemal doskonałych punktów materialnych, poruszających się z prędkościami rzędu kilku kilometrów na godzinę i od czasu do czasu zderzających się zupełnie jak kule bilardowe. Oczywiście, różne atomy poruszają się w gazie z różnymi prędkościami. Odpowiedni rozkład prawdopodobieństwa występowania prędkości znamy jako rozkład Maxwella. Typowa, lub lepiej, średnia prędkość atomów maleje wraz z obniżaniem temperatury gazu proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego z temperatury bezwzględnej. Tak, w wielkim uproszczeniu, wyobrażamy sobie gaz w stosunkowo wysokich temperaturach. Co się stanie, gdy zaczniemy gaz chłodzić, zmniejszając znacząco prędkości atomów?

Od czasów Louisa de Broglie'a wiemy, że z każdym poruszającym się obiektem mikroskopowym związana jest tak zwana fala materii. Długość tej fali λ rośnie wraz ze zmniejszającą się prędkością V :

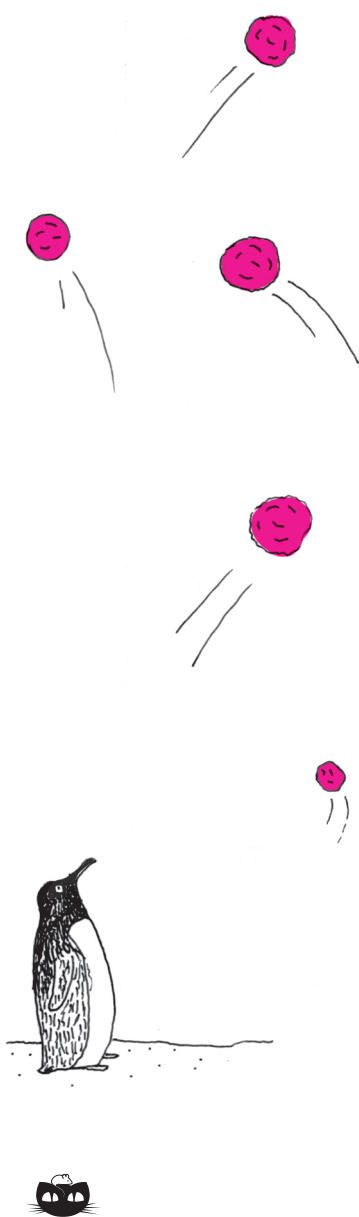
$$\lambda = \frac{h}{mV}.$$

Oczywiście, występujące w tym wzorze h to słynna, zdobiąca okładkę, stała Plancka. Jeśli uda się schłodzić gaz do tak niskich temperatur, że owa długość fali de Broglie'a osiągnie wielkość porównywalną z typowymi odległościami pomiędzy atomami, to własności falowe atomów staną się ważniejsze niż to, że każdy z nich można traktować jako niewielką kulkę. Gaz stanie się jedną wielką falą materii. To właśnie istota przemiany fazowej do stanu zwanego kondensatem Bosego–Einsteina.

Nie każda substancja może podlegać takiej przemianie. Musi się ona składać z atomów będących bozonami, a nie fermionami. Bozonami zaś są te obojętne atomy, których jądra atomowe zawierają parzystą liczbę neutronów. Jak to rozumieć? Jądra atomowe składają się z dodatnio naładowanych protonów i obojętnych elektrycznie neutronów. Wokół jąder krążą ujemnie naładowane elektrony. Oczywiście, w obojętnej atomie elektronów jest tyle samo co protonów w jądrze. Wszystkie składniki atomów to fermiony, to znaczy cząstki o połówkowym spinie, czyli wewnętrznym momencie pędu. Spiny poszczególnych składników dodają się lub odejmują, więc wypadkowy spin elektronów i protonów jest zawsze całkowitą wielokrotnością elementarnego spinu (równego tej samej stałej Plancka podzielonej przez 2π). Zatem o ostatecznym wypadkowym spinie atomu decyduje parzystość liczby neutronów w jądrze; dla parzystej liczby neutronów atom ma spin całkowity, a wtedy jest bozonem. To bardzo ciekawe, bo zwykle makroskopowe własności substancji zależą od powłok elektronowych. Jądro atomowe jest jakieś sto tysięcy razy mniejsze niż cały atom i w normalnych warunkach temperatury i ciśnienia zderzające się atomy nie zbliżają swoich centrów na odległości porównywalne z rozmiarami jąder. Tymczasem makroskopowe własności bardzo zimnych gazów istotnie zależą od wypadkowego spinu!

W tym momencie pojawiają się dwa zagadnienia.

Zderzenia i straty. Skoro warunek przemiany fazowej to porównywalność długości fali materii i średniej odległości pomiędzy atomami, to zamiast (oprócz) chłodzenia wydłużającego długość tej fali może należałoby zmniejszyć typowe odległości pomiędzy atomami, zwiększając gęstość gazu. Tu jednak pojawia się ciekawe ograniczenie. Bardzo zimny gaz atomowy powinien się najpierw skroplić, a potem zestalić. Aby zapoczątkować te procesy, niezbędne jest jednoczesne zderzenie trzech atomów. Gdy zderzą się dwa, to zasada zachowania energii nie pozwala im się zlepzić, bo zlepek – cząsteczka zwana dimerem – ma energię ujemną (jest związana), a dwa nadlatujące atomy mają energię kinetyczną, która, oczywiście, jest dodatnia. Zderzenie trzech atomów pozwala pokonać tę trudność. Dwa atomy mogą się zlepzić, a nadmiar energii może zostać wyniesiony przez trzeci atom. Szansa zderzeń trójciałowych gwałtownie rośnie z gęstością gazu. Zatem gęstość musi być ograniczona, aby gaz się nie skroplił i nie zestalił. W praktyce doświadczenia z kondensatem wykonuje się w rozrzedzonym gazie o gęstości rzędu 10^{14} atomów/cm³, czyli pięć rzędów mniejszej niż gęstość powietrza, którym oddychamy. Odpowiadająca



Rozwiązanie zadania F 899. Granica możliwej do osiągnięcia dokładności pomiaru położenia wynika z zasady nieoznaczoności Heisenberga: $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, gdzie Δx i Δp to odpowiednio dokładność pomiaru współrzędnej x i pędu p w kierunku x , a $\hbar = 1,0545 \dots \cdot 10^{-34}$ Js jest stałą Plancka h podzieloną przez $2\pi = 6,2831 \dots$.

Długość λ fali de Broglie'a cząstki o pędzie p wynosi $\lambda = h/p$. Mamy więc

$$\frac{\Delta x}{\lambda} \geq \frac{p}{4\pi \Delta p}.$$

Dla cząstki swobodnej energia kinetyczna to $E = p^2/(2m)$, gdzie m oznacza masę cząstki. Stąd w przybliżeniu mamy

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\Delta p}{p}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{\Delta x}{\lambda} \geq \frac{E}{2\pi \Delta E} \approx 1592.$$

*Centrum Fizyki Teoretycznej PAN



Rozwiązanie zadania M 1486.

Liczba $n - m$ dzieli liczby względnie pierwsze $n^7 - m^7$ i $n^3 - m^3$. W takim razie $n - m = 1$, a stąd

$$n^2 - m^2 = (n - m)(n + m) = n + m = 2m + 1$$

oraz

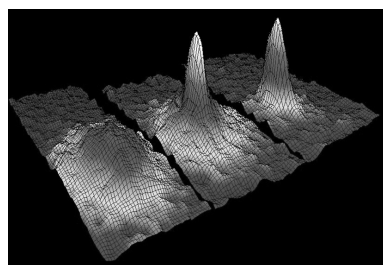
$$\begin{aligned} n^3 - m^3 &= (n - m)(n^2 + nm + m^2) = \\ &= (m + 1)^2 + (m + 1)m + m^2 = \\ &= 3m^2 + 3m + 1. \end{aligned}$$

Korzystając z własności największego wspólnego dzielnika, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{NWD}(n^2 - m^2, n^3 - m^3) &= \\ = \text{NWD}(2m + 1, 3m^2 + 3m + 1) &= \\ = \text{NWD}(2m + 1, 3m^2 + 3m + 1 - m(2m + 1)) &= \\ = \text{NWD}(2m + 1, m^2 + 2m + 1). \end{aligned}$$

Każdy dzielnik pierwszy liczby $m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$ jest również dzielnikiem liczby $m + 1$, a więc także $2m + 2$. W takim razie nie może dzielić liczby $2m + 1$. Stąd

$$\text{NWD}(n^2 - m^2, n^3 - m^3) = 1.$$

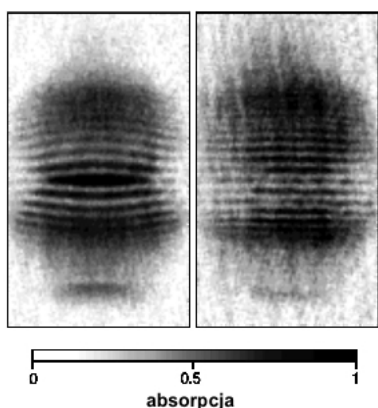


Zdjęcie pierwszego kondensatu atomów rubidu z laboratorium Carla Wiemana i Erica Cornella. Czerwiec 1995, JILA, Boulder, Colorado, USA.

tej gęstości temperatura krytyczna jest mniejsza niż jeden mikrokelwin, czyli mniejsza niż jedna milionowa stopnia powyżej zera bezwzględnego.

Chłodzenie i pułapkowanie obojętnych atomów. Rozwinięcie metod chłodzenia i pułapkowania obojętnych atomów jest trudniejsze niż elektrycznie naładowanych jonów, na które można działać polem elektrycznym. Zatem nic dziwnego, że niezbędne do wystąpienia tej przemiany warunki udało się wytworzyć dopiero w 1995 roku, 70 lat po teoretycznym odkryciu samej przemiany przez Alberta Einsteina, zainspirowanego wcześniej pracą hinduskiego fizyka Satyendry Bosego. Do opanowania przemiany gazu w stan skondensowany niezbędny był niezwykle rozwój technik pułapkowania i spowalniania (chłodzenia) atomów. Za te osiągnięcia przyznano w 1997 roku Nagrodę Nobla. Otrzymali ją Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji i William D. Phillips. Oczywiście, bardzo zimnego gazu nie można po prostu trzymać w zamkniętym naczyniu. Nie sposób doprowadzić jego ścianek do tak niskich temperatur, więc schładzany gaz, odbijając się od nich, ponownie by się ogrzewał. W większości doświadczeń do pułapkowania wolno poruszających się atomów wykorzystuje się pola magnetyczne oraz to, że chłodzone atomy mają niezerowy moment magnetyczny – są maleńkimi magnesami. W takiej magnetycznej pułapce zimny atom oscyluje, zderzając się od czasu do czasu z innymi atomami. Do spowalniania wykorzystuje się światło lasera. Atom chętnie pochłania fotony o odpowiednio dobranej częstotliwości, zwanej częstotliwością rezonansową. Pochłaniając, doznaje jednocześnie odrzutu, przejmuje pęd absorbowanego fotonu – tak jak bramkarz łapiący pędzącą piłkę. Jeśli zjawisko tego pochłonięcia zdarzy się, gdy fotony nadbiegają na spotkanie zbliżającego się atomu, to pochłonięciu fotonu towarzyszy pożądane zmniejszenie jego prędkości. Ale, jak powiedzieliśmy, atomy oscylują, zatem trzeba jeszcze sprawić, aby atomy poruszające się w tę samą stronę co światło nie chciały absorbować fotonów, bo wtedy pochłonięciu fotonu towarzyszy niepożądane przyspieszenie atomu. Taką asymetrię procesu pochłaniania umożliwia zjawisko Dopplera. W przypadku fal akustycznych spotykamy się z nim w życiu codziennym, słysząc różnicę wysokości dźwięku zbliżającej się lub oddalającej się karetki pogotowia ratunkowego. Podobnie się dzieje z rezonansową częstotliwością poruszającego się atomu. Odstrojenie częstotliwości stosowanego światła od rezonansu dla spoczywającego atomu w stronę niższych częstotliwości – fizycy mówią „ku czerwieni” – powoduje, że procesy absorpcji zachodzą głównie, gdy atom biegnie naprzeciw padającej wiązki. Czytelnik Uważny w tym momencie powie: przecież wzbudzony atom po chwili wyemituje foton, powracając do stanu podstawowego, by być gotowym na następny akt pochłonięcia. Wypromieniowany foton wynosi ze sobą swój pęd i z prawa zachowania wynika, że atom, jak strzelec w momencie oddania strzału, doznaje odrzutu. To dzieje się jednak w przypadkowym kierunku i słabo wpływa na ogólny przebieg zjawiska. Ogranicza jednak minimalną, osiąganą tym sposobem temperaturę. W procesie chłodzenia dopplerowskiego uzyskuje się opóźnienia około 100 000 razy większe niż przyspieszenie ziemskie. Jednak ta minimalna temperatura to zdecydowanie więcej niż jeden mikrokelwin. Nie wystarcza to do uzyskania kondensatu. Zwykle następuje końcowy etap chłodzenia obrazowo zwany chłodzeniem przez odparowanie. Bierze się to z analogii do gorącej kawy w kubku, która chłodzi się, bo najszybsze cząsteczki są w stanie opuścić ciecz i poszybować daleko, obniżając średnią energię pozostałej w kubku kawy. W przypadku gazu ten rodzaj chłodzenia polega na umożliwieniu najszybszym atomom ucieczki z pułapki. Ich stan wewnętrzny – kierunek momentu magnetycznego – zostaje tak zmieniony, że albo w ogóle nie czują pułapki, albo wręcz są z niej wypychane. Ważne, że te pozostałe ciągle się zderzają, szybko wyrównując temperaturę. W procesie chłodzenia przez parowanie tracimy atomy, jednocześnie obniżając temperaturę. Chodzi jednak o to, by coś w pułapce pozostało. Udało się to wiosną 1995 roku w instytucie JILA w Boulder (Colorado) dwu ściśle współpracującym ze sobą grupom kierowanym przez Carla Wiemana i Erica Cornella. Już w 2001 roku otrzymali oni za to osiągnięcie Nagrodę Nobla. Podzielili ją z Wolfgangiem Ketterle, Niemcem ze słynnego MIT, który kilka tygodni później też wytworzył kondensat. W JILA skondensowano rubid o liczbie masowej 87, a w MIT sód o liczbie masowej 23. Obok zamieszczamy zdjęcie pierwszego w historii kondensatu. Było tam około 2000 atomów. Aby sfotografować taką maleńką chmurkę, należało wówczas wyłączyć pola magnetyczne tworzące pułapkę, pozwalając chmurze rozprężyć się. Taką większą chmurę oświetla się wówczas silnym impulsem światła laserowego. Po przejściu przez chmurę światło pada na matrycę kamery CCD. Można obrazowo powiedzieć, że chmura rzuca cień. Im na drodze promienia więcej atomów, tym większa absorpcja, a zatem ciemniej.

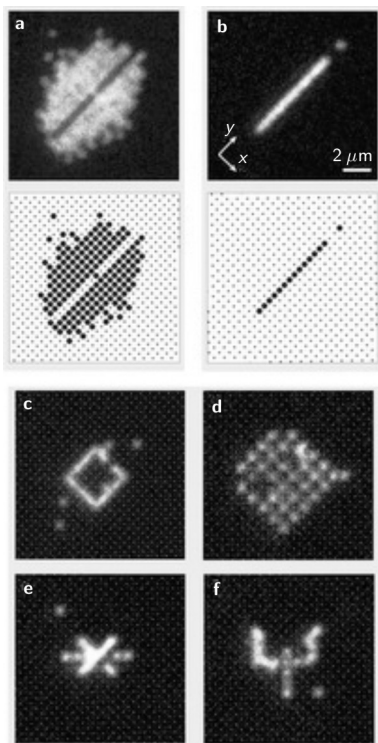
Po rozprężeniu gazu rozkład gęstości odzwierciedla rozkład prędkości atomów w pułapce. Z lewej widzimy szeroki rozkład dobrze opisywany wzorem Maxwella obowiązującym dla klasycznego gazu. Pojawiający się w niższych temperaturach stromy wierzchołek w centrum, odpowiadający bardzo małym prędkościom, to właśnie kondensat. Te atomy poruszają się w pułapce z prędkościami rzędu milimetra na sekundę. Po prawej stronie mamy już tylko samotny wierzchołek – to właśnie kondensat. W środku temperatura nieco wyższa, ale już poniżej krytycznej. Mamy trochę kondensatu i trochę chmury termicznej. Stan skondensowany gazu to, jak powiedzieliśmy, makroskopowa manifestacja kwantowych, falowych własności atomów. Jeśli kondensat to mocna fala materii, to dwie takie fale powinny interferować zupełnie jak fale na wodzie, dźwięk czy światło. Pierwsze piękne doświadczenie wykazujące interferencję dwu kondensatów wykonał już w 1996 roku Wolfgang Ketterle. Dwa niezależnie przygotowane kondensaty zostały jednocześnie pozbawione swoich pułapek. Rozprężając się, dwie chmury nałożyły się na siebie i objawiły piękny, klasyczny obraz interferencyjny, który widzimy na zdjęciu obok. Prawdziwe „linie papilarne” fizyki kwantowej.



„Linie papilarne” kwantowej fizyki gazu. Interferencja dwóch rozprężających się kondensatów Bosego–Einsteina obserwowana w 1996 roku przez Wolfganga Ketterlego w MIT.

Co się dzieje? Od 1995 roku upłynęło 20 lat. W tym czasie badania gazów kwantowych rozwinęły się niesłychanie. Co roku powstają tysiące doświadczalnych i teoretycznych prac na ten temat. Nie sposób je tu streścić. W kilku punktach zasygnalizuję tu najciekawsze, moim zdaniem, kierunki badań:

1. Skondensowano atomy wielu różnych pierwiastków. Udało się wytworzyć także kondensaty molekularne.
2. Udało się schłodzić także gazy fermionowe do temperatur, w których pojawiają się własności kwantowe. Być może najciekawsze jest tu zaobserwowanie par Coopera dwu przyciągających się fermionów o przeciwnych spinach.
3. Przedmiotem licznych prac doświadczalnych i teoretycznych są charakterystyczne defekty w kondensacie, takie jak wiry i solitony. Wiry każdy sobie pewnie wyobraża. To małe kwantowe tornada. Solitony zaś to dobrze zlokalizowane zaburzenia poruszające się w kondensacie przez stosunkowo długi czas bez widocznego rozplywania się.
4. Zarówno zimne fermiony, jak i bozony można umieścić w oczkach sieci optycznej. Taką sieć tworzy optyczna fala stojąca – rezultat interferencji przeciwbieżnych wiązek światła laserowego. W zależności od liczby par takich wiązek mamy do czynienia z jedno-, dwu- lub trójwymiarowymi układami regularnie rozłożonych w przestrzeni małych pułapek na atomy.
5. Atomy w takiej sieci stanowią niezwykle dogodną doświadczalną realizację sieciowych modeli teoretycznych od lat rozważanych przez fizyków zajmujących się fizyką materii skondensowanej. Mając w doświadczeniach dostęp do kontroli parametrów modelu, można pomierzyć wielkości fizyczne, których teoretycy nie są w stanie wyznaczyć z powodu złożoności obliczeń. Mówimy tu o „kwantowych symulatorach”, czyli realizacji marzeń Richarda Feynmana o budowie swoistego analogowego komputera kwantowego.
6. Szczególnym osiągnięciem było wytworzenie tak zwanej fazy Motta, stanu bozonów, w którym w każdym oczku sieci znajduje się dokładnie jeden atom.
7. Doskonalenie metod obrazowania osiągnęło zdolność rozdzielczą pozwalającą fotografować pojedyncze atomy w sieci. Obok przedstawiamy takie zdjęcie z laboratorium I. Blocha z Monachium.
8. Skondensowane początkowo atomy alkaliczne oddziaływały głównie siłami van der Waalsa, które są krótkozasięgowe. Ich zasięg jest wielokrotnie mniejszy niż typowe odległości pomiędzy atomami. Atomy o większym momencie magnetycznym, czyli kolejno skondensowane: chrom, erb i wreszcie dysproz, to znacznie silniejsze magnesyki. Oddziaływanie takich magnesyków, czyli dipoli magnetycznych, ma stosunkowo duży zasięg. Energia takiego oddziaływania maleje z sześcianem odległości, a sama siła zależy od kierunków (nie jest izotropowa). To niezwykle wzbogaca fizykę gazów kwantowych.
9. Inny aspekt to możliwość wzbudzania niektórych atomów kondensatu do tak zwanych stanów Rydberga. Atomy w tym stanie mają olbrzymie rozmiary – wewnątrz orbit elektronów mieszczą się tysiące atomów kondensatu. Być może uda się zobaczyć odcisnięty w kondensacie kształt funkcji falowej elektronu na takiej orbicie.



Adresowanie i fotografowanie pojedynczych atomów w sieci optycznej. Immanuel Bloch, Monachium.

Tu czas przerwać. Można by jeszcze długo wymieniać. Każdy z punktów należałoby następnie rozwinąć w osobny spory artykuł. Dodam tylko, że w punkcie 9 przemyciłem jedno z naszych niedawnych spostrzeżeń.



*Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Neutrino na biegunie

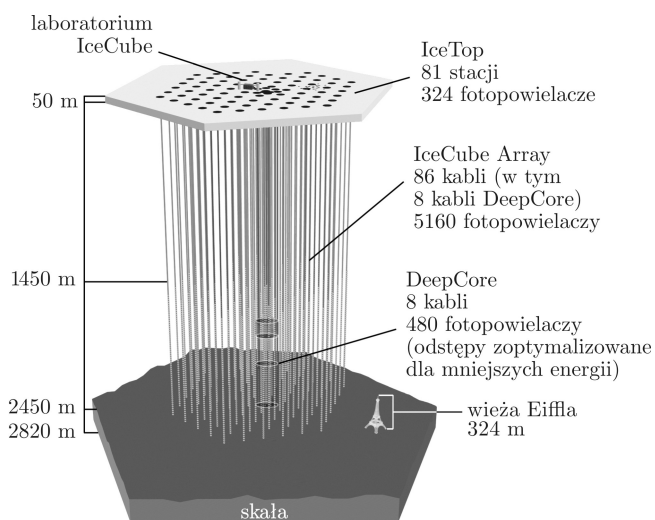
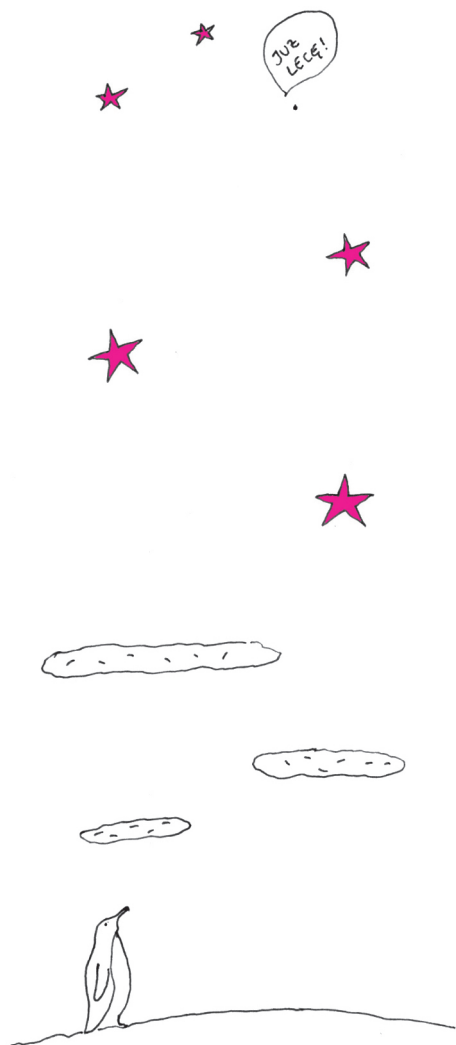
Paweł PRZEWŁOCKI*

Czy kiedykolwiek byliście na biegunie południowym? Bezkresny śnieg, średnia temperatura sięgająca -50°C , silny zimny wiatr, pół roku całkowitej ciemności (i pół ciągłego światła, bo słońce wschodzi i zachodzi tam raz na rok!). Kto chciałby przebywać w takich warunkach? Co mogłoby spowodować, żeby ktoś z własnej woli poświęcił kilka miesięcy swojego życia, aby spędzić je w tak nieprzyjaznym środowisku?

Pewnie się już domyślacie – chodzi o naukę. Tak, Antarktyda jest niezwykle atrakcyjnym miejscem do przeprowadzania różnorodnych badań naukowych. Na Antarktydzie prowadzonych jest wiele pomiarów związanych z biologią, glaciologią, geologią, oceanografią, chemią czy klimatologią. Niewielu ludzi jednak wie, że również fizycy neutrino zainteresowani są najzimniejszym ziemskim kontynentem. Dzieje się to z dosyć nietypowej przyczyny – otóż antarktyczna czapa lodowa jest fantastycznym materiałem, w którym można zbudować gigantyczny detektor neutrino zdolny rejestrować neutrino o niezwykle wysokich energiach.

Czemu to jest interesujące? Neutrino to wyjątkowe cząstki elementarne. Nie mają ładunku elektrycznego, niezwykle słabo oddziałują z materią, prawie nie mają masy. Dzięki temu potrafią nieniekłopotliwie przebywać kosmiczne odległości, nie podlegając prawie żadnym siłom, które mogłyby zaburzyć ich lot. Są takimi małymi kosmicznymi posłańcami, którzy, bez przeszkód przelatując przez gwiazdy i galaktyki, przynoszą nam informację z dalekich zakątków wszechświata. Jest to sytuacja dosyć wyjątkowa. Inne dostępne nam narzędzia obserwacji kosmosu – takie jak rejestracja światła, czyli fotonów, a także innych cząstek, np. protonów – mimo że dostarczają wielu obserwacji, obciążone są wadą związaną z tym, że cząstki będące źródłem informacji oddziałują wielokrotnie po drodze, napotykając np. gaz międzygwiazdowy. Zmienia to kierunek ich ruchu albo powoduje, że gubią się po drodze. Cząstki naładowane elektrycznie, takie jak protony czy elektrony, podlegają też działaniom pól magnetycznych, zmieniających ich tor lotu. Wszystko to rozmywa i niszczy informacje, na których odczytaniu tak bardzo nam zależy. Neutrino mają tu więc niesłychaną przewagę, jest jednak z nimi inny problem – bardzo trudno je wykryć, a jeśli już zostaną złapane, to niezwykle trudno rozpoznać, skąd przychodzą. Mamy bowiem do czynienia nie tylko z neutrino kosmicznymi, ale także pochodzącymi z wyższych warstw atmosfery, Słońca, a nawet wnętrza Ziemi. Cząstki te produkowane są także w wielkich ilościach jako produkt uboczny rozpadów radioaktywnych w reaktorach jądrowych. Jeśli jednak będziemy w stanie pokonać te przeszkody, czyli schwytać i zidentyfikować neutrino z dalekich galaktyk, czeka nas szansa na zapoczątkowanie nowego działu fizyki – astronomii neutrino.

Grupa prawie 300 fizyków z 12 krajów postanowiła w tym celu wykorzystać antarktyczny lód. Co ma on nam do zaoferowania? Jest niesłychanie przezroczysty i jednorodny – oczywiście jeśli zejdziemy odpowiednio głęboko pod powierzchnię. Neutrino bardzo rzadko oddziałują – ale jeśli już nastąpi interakcja z jądrami atomów składających się na H_2O , to w jej efekcie powstaną cząstki naładowane, najczęściej elektrony bądź ich ciężsi bracia – miony. Te cząstki podróżują przez lód i powodują emisję światła, tzw. promieniowania Czerenkowa. Gdybyśmy tylko mogli wstawić czujniki wychytujące światło z lodu, moglibyśmy rejestrować oddziaływanie naszych kosmicznych posłańców i na tej podstawie rekonstruować ich własności, np. energię bądź kierunek, z którego nadeszły.



Schemat detektora IceCube. Źródło: IceCube Collaboration.



Z przyjemnością informujemy,
że w tym roku odbędą się

VI Niezależne Mistrzostwa w Analizie Danych NOMAD

Jest to wydarzenie organizowane przez Koło Naukowe Statystyki Matematycznej **Gauss** działające przy Politechnice Wrocławskiej i przeznaczone jest dla studentów i uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Konkurs skierowany jest przede wszystkim do osób szczególnie zainteresowanych statystyką i informatyką lub pragnących poszerzać i zdobywać wiedzę.

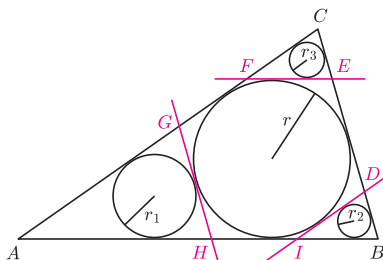
Jeśli jesteś zainteresowany, nie zwlekaj!
Odwiedź naszą stronę internetową

nomad.im.pwr.wroc.pl

i poznaj szczegóły.



Rozwiązanie zadania M 1487.



Niech r_1, r_2, r_3 oznaczają odpowiednio promienie okręgów wpisanych w trójkąty AHG, BDI i CFE , a P_1, P_2, P_3 – obwody tych trójkątów. Ponadto niech P oznacza obwód trójkąta ABC .

Z równości odcinków stycznych do okręgu poprowadzonych z jednego punktu (zastosowanej trzykrotnie do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz punktów D, E, F) otrzymujemy

$$DE + FG + HI = EF + GH + ID.$$

Po dodaniu

$$AG + AH + BI + BD + CE + CF$$

do obu stron równości dostajemy

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

Z podobieństwa każdego z małych trójkątów do trójkąta ABC wynika, że dla $i = 1, 2, 3$ zachodzi równość

$$\frac{P_i}{P} = \frac{r_i}{r}.$$

W takim razie

$$r = r \cdot \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P} = r_1 + r_2 + r_3.$$

Tak właśnie postąpili naukowcy z eksperymentu IceCube, czyli KostkaLodu. Kilometr sześcienny lodu (jest to więc bardziej Kość niż Kostka) na biegunie południowym wyposażyli w fotopowielacze – detektory fotonów. Żeby umieścić je pod powierzchnią, stworzyli z nich łańcuchy – każdy z nich składa się z 60 fotopowielaczy połączonych kablem. Wprowadzali je w głąb czapy lodowej, rozpuszczając ją wcześniej w pionowych wąskich kanałach gorącym strumieniem wody. Jest to niezwykle skomplikowana operacja – najgłębiej położone fotopowielacze trafiają na głębokość 2,5 km! Po takiej operacji lód błyskawicznie zamraża – detektory już od tego momentu są nie do ruszenia – a naukowcy dysponują sygnałami emitowanymi przez nie, przesyłanymi za pomocą kabli. Takich łańcuchów zatopiono 86, każdy w odległości 125 m od sąsiednich. Dzięki temu eksperyment podgląda zdarzenia, które mają miejsce w ogromnej bryle lodu – co zwiększa szanse na zaobserwowanie neutrin (im większa objętość obserwowanej materii, tym więcej oddziaływań w niej zajdzie), ale też umożliwia rejestrację zdarzeń pochodzących od neutrin o niezwykle wysokich energiach. Dlaczego? Cząstki naładowane produkowane w zderzeniach neutrin z materią mają energię podobną do energii neutrin. Gdy mamy do czynienia z bardzo wysokimi energiami, obszar, w którym taka cząstka emituje światło Czerenkowa, jest olbrzymi – traci ona bowiem swą energię wskutek procesu jonizacji, a im większa energia, tym więcej czasu (i przestrzeni) potrzeba, aby wytracić całą energię. W przypadku IceCube możemy liczyć na rejestrację przypadków o niedostępnych dotąd energiach rzędu wielu PeV (petaelektronowoltów). Światło z takiego zdarzenia zablśnie w obszarze całego detektora, a więc będzie rejestrowane w całym kilometrze sześciennym lodu!

Wysokie energie są bardzo interesujące, bo niewiele jest źródeł zdolnych emitować tak energetyczne neutrina. Jednym z nich są aktywne centra galaktyk (*active galactic nuclei*, AGN), niezwykle silne kosmiczne źródła promieniowania działające jak wielkie naturalne przyspieszacze cząstek. Astrofizycy przewidują, że niektóre galaktyki mają w swych centrach czarne dziury, ściągające grawitacyjnie otaczającą je materię, która, opadając spiralnie, tworzy dysk akrecyjny. Takie obracające się obiekty emitują często duże liczby cząstek naładowanych w formie strumieni (dżetów). Teorie przewidują, że ich energie mogą być bardzo wysokie. Część z tych cząstek rozpada się na neutrina, a te bez przeszkód mogą dolecieć na Ziemię i dać nam wgląd w procesy rozgrywane się w odległych galaktykach. Energie takich neutrin są jednocześnie wystarczająco wysokie, abyśmy mogli w naszym detektorze obserwować pojedyncze oddziaływania – gdyby były niższe, zginęłyby w natłoku oddziaływań neutrin atmosferycznych, których dla energii typu MeV czy GeV jest nieporównanie więcej (i nie dalibyśmy rady ich odróżnić).

Detektor IceCube zaczął działać w 2010 roku. W dotychczas przeanalizowanych danych zaobserwował 37 oddziaływań wysokoenergetycznych neutrin, w tym 3 o najwyższych energiach (naukowcy tak je polubili, że nadali im imiona popularnych bohaterów Ulicy Sezamkowej: Ernie, Bert i Big Bird). Niektóre z nich z pewnością pochodzą spoza naszej Galaktyki. Uczestnicy eksperymentu wykonali mapę nieba z naniesionymi kierunkami, z których pochodziły zarejestrowane neutrina, w nadziei na identyfikację obiektów astronomicznych, z których pochodzą. Okazało się jednak, że na razie neutrin tych jest za mało, aby potwierdzić hipotezę, iż pochodzą one ze źródeł punktowych.

To jednak dopiero początek. Wraz z upływem czasu mamy nadzieję zbierać dużo więcej danych i zidentyfikować źródła kosmicznych neutrin o wielkich energiach. Będzie to niesamowicie cenny wkład w znajomość procesów fizycznych rozgrywających się we wszechświecie. Eksperyment będzie także ulepszany, aby mógł rejestrować zarówno neutrina o jeszcze wyższych niż dotychczas energiach, jak i takich, które dotąd były zbyt małe, aby IceCube mógł je zauważyć.

Trzymajmy więc kciuki za ten piękny eksperyment, aby obserwował jak najwięcej zdarzeń. Dla zwykłych ludzi to możliwość obserwacji w działaniu bardzo egzotycznego – zarówno naukowo, jak i geograficznie – naukowego urządzenia. A dla fizyków neutrin – okazja, by wyjechać na Antarktydę!



Delta i fizyka cząstek elementarnych (III): Skąd wiemy to, co wiemy

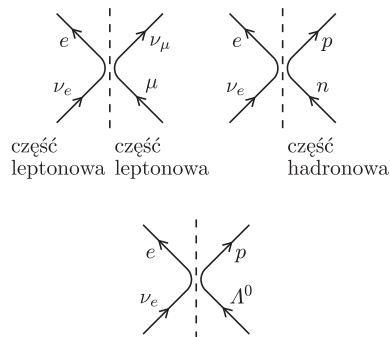
Piotr CHANKOWSKI*

Model Standardowy powstał jako synteza początkowo luźno powiązanych ze sobą badań nad oddziaływaniami słabymi i silnymi. Historia jego powstania jest przede wszystkim historią idei teoretycznych. Same bowiem badania doświadczalne i nagromadzone fakty, jakkolwiek absolutnie niezbędne jako wskazówki i testy koncepcji, nigdy nie mogą doprowadzić do sformułowania teorii o charakterze fundamentalnym.

Relację z wydarzeń, które doprowadziły do sformułowania Modelu Standardowego, podzielę na dwie części. W niniejszym odcinku omówię okres od lat trzydziestych XX wieku do powstania *Delty*, a za miesiąc przypomnę wydarzenia, których *Delta* była bezpośrednim świadkiem. Na początku odkryto (głównie w promieniowaniu kosmicznym; Δ_{91}^{10} , Δ_{03}^4) wiele nowych cząstek, takich jak miony μ^\pm i mezony π^\pm i π^0 (Δ_{76}^{12} , Δ_{80}^4 , Δ_{00}^5). Zarówno μ^\pm , jak i π^\pm rozpadały się wskutek oddziaływań słabych, o czym świadczyły stosunkowo długie ich czasy życia. Wkrótce też zaczęto odkrywać cząstki dziwne, które dość łatwo produkowały się parami w zderzeniach wysokoenergetycznych hadronów, ale rozpadały się powoli, mając czasy życia świadczące, że również za te rozpady odpowiedzialne są oddziaływania słabe. Aby wyjaśnić, dlaczego cząstki te (K , Σ , Λ^0 , ...) nie rozpadają się wskutek oddziaływań silnych, K. Nishijima i M. Gell-Mann nadali im liczbę kwantową zwaną dziwnością S (Δ_{74}^1 , Δ_{90}^7) i wprowadzili zasadę, że dziwność jest zachowana w oddziaływaniach silnych i elektromagnetycznych, ale nie w oddziaływaniach słabych.

Pisząc Δ_{XY}^n , odwołujemy się do numeru n *Delty* z roku 19XY lub 20XY. Pełna lista przywoływanych artykułów jest na stronie www.deltami.edu.pl.

Jądrowe rozpady β są to samorzutnie zachodzące przemiany
 $J(A, Z) \rightarrow J(A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}_e$,
 $J(A, Z) \rightarrow J(A, Z - 1) + e^+ + \nu_e$,
gdzie $J(A, Z)$ oznacza jądro o liczbie masowej A i porządkowej Z .
W zależności od całkowitego spinu pary leptonów wyróżnia się przemiany β typu Fermiego (spin pary zerowy),
np. $^{14}\text{O}_8 \rightarrow ^{14}\text{N}_7 e^+ \nu_e$ i Gamowa-Tellera (spin pary równy 1),
np. $^6\text{He}_2 \rightarrow ^6\text{Li}_3 e^- \bar{\nu}_e$.



Oddziaływania elementarne teorii Fermiego-Feynmana-Gell-Manna.

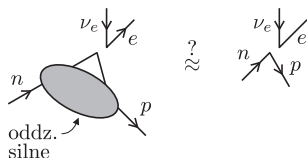
Słynne twierdzenie E. Noether (Δ_{88}^{12} , Δ_{95}^{12}) wiąże symetrie z prawami zachowania. Np. w mechanice symetrii względem przesunięć w przestrzeni odpowiada zachowanie pędu, a symetrii względem obrotów wokół trzech osi (trzem generatorom obrotów) – stałość w czasie trzech składowych wektora momentu pędu. Z symetriami równań kwantowej teorii pola, również tymi odpowiadającymi obrotom w abstrakcyjnych przestrzeniach pół, także wiążą się wielkości zachowane (zwane „ładunkami”) – po jednej na każdy generator symetrii. Wielkości te jako operatory są dane przez całki z tzw. prądów Noether.

W tym czasie teoria oddziaływań elektromagnetycznych była już dobrze opracowana. Jej początkowe trudności zostały przewyżczone dzięki pracom J.S. Schwingera, R.P. Feynmana, S.-I. Tomonagi i F. Dysona (pierwsi trzej otrzymali wspólnie Nagrodę Nobla w roku 1965), którzy sformułowali procedurę jej renormalizacji, czyli spójny sposób usuwania nieskończoności występujących w obliczeniach wychodzących poza najprostsze przybliżenie. Procedura ta zawodziła jednak w przypadku zaproponowanej przez E. Fermiego, jeszcze w roku 1934, teorii jądrowych rozpadów β powodowanych przez oddziaływania słabe. Choć bardzo dobrze opisywała ona większość takich rozpadów, była jednak nierenormalizowalna. Oznaczało to m.in., że przy opisie słabych reakcji cząstek o energiach rzędu kilkuset GeV stosowane przybliżenie da prawdopodobieństwa reakcji większe od jedności. Odkrycie rozpadających się wskutek oddziaływań słabych cząstek μ^\pm , π^\pm i cząstek dziwnych, konieczność uwzględnienia tzw. rozpadów β typu Gamowa-Tellera, a zwłaszcza odkrycie niezachowania parzystości, tj. łamania symetrii względem odbicia lustrzanego, w rozpadach β (Δ_{87}^{10} , Δ_{95}^{12}) wymusiło modyfikację teorii Fermiego. Ulepszoną jej wersję, uwzględniającą (w zasadzie) także niezachowanie parzystości w słabych procesach nieleptonowych (odkryte jako występowanie rozpadów K^+ na dwa oraz na trzy piony, Δ_{95}^{12}), zaproponowali w roku 1957 Feynman i Gell-Mann. W ich wersji teorii struktura chiralna części leptonowej elementarnego oddziaływania miała już taką samą postać jak w Modelu Standardowym. Taką samą strukturę chiralną miała też część hadronowa oddziaływania, tyle że wyrażona była ona przez pola barionów takich jak p , n , Λ^0 .

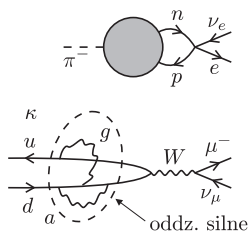
Sposób, w jaki nowa wersja teorii Fermiego uwzględniała procesy słabe, takie jak $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$, wymagał przyjęcia, że z jakiegoś powodu oddziaływania silne niemal nie wpływają na amplitudy procesów słabych z udziałem hadronów. Na przykład, rozpad $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ wymaga obliczenia dwóch amplitud \mathcal{A}_V i \mathcal{A}_A ; teoria Fermiego-Feynmana-Gell-Manna (FFG) przy pominięciu wpływu oddziaływań silnych dawała $\mathcal{A}_V = \mathcal{A}_A = 1$ (z dokładnością do nieistotnego dla naszej dyskusji wspólnego mnożnika), podczas gdy zgodność z danymi wymagała $\mathcal{A}_V \approx 1$ i $\mathcal{A}_A \approx 1,25$. Feynman i Gell-Mann wysunęli więc hipotezę, że amplitudy \mathcal{A}_V i \mathcal{A}_A są w istocie wyznaczone przez symetrie oddziaływań silnych, tj. że część hadronowa oddziaływania słabego powinna być wyrażona nie tyle przez pola fizycznych

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

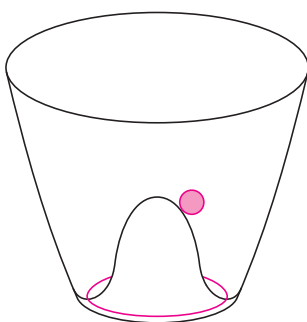
Oprócz bycia przyczyną grupowania się hadronów w multiplety cząstek o niemal takich samych masach, symetria izospinowa $SU(2)_V$ narzuca także pewne związki na amplitudy prawdopodobieństwa różnych procesów, np. $\mathcal{A}(pp \rightarrow \pi^+d) = \sqrt{2}\mathcal{A}(pn \rightarrow \pi^0d)$, gdzie d oznacza deuteron. Dzięki teorii grup, aby otrzymać ten wynik, nie trzeba rozwiązywać ani nawet znać równań teorii oddziaływań silnych! – wystarczy założenie, że są one $SU(2)_V$ niezmiennicze.



Zagadka teorii FFG.
 $\mathcal{A}(n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e) = (\mathcal{A}_V - \mathcal{A}_A) \cdot \mathcal{A}_{\text{lept.}}$



Rozpad $\pi^+ \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ według teorii FFG i według Modelu Standardowego.



Mechaniczny analog potencjału pola skalarnego powodującego spontaniczne naruszenie symetrii. Stanem równowagi kulki (w przypadku pola – stanem podstawowym) jest położenie w którymś z tworzących cały okrąg minimów.

hadronów, takich jak p, n, Λ^0 itp., co przez pewne wyrażenia (operatory) będące tzw. prądami Noether symetrii oddziaływań silnych. W owym czasie wiadomo było, że oddziaływania silne muszą być niezmiennicze względem symetrii $SU(2)_V$ izospinu (wspomnianej już w poprzednim odcinku), o czym świadczyło dobrze już wtedy znane grupowanie się wszystkich znanych naonczas hadronów i jąder atomowych w multiplety tej grupy. Symetria izospinowa w istocie tłumaczyła, dlaczego $\mathcal{A}_V = 1$, ale na pierwszy rzut oka nie widać było symetrii, która mogłaby zapewnić $\mathcal{A}_A = 1$. Razem z symetrią $SU(2)_V$ musiałyby one mieć charakter symetrii chiralnej $SU(2)_L \times SU(2)_R$, ale teoria, w której równaniach występują jawnie wyrazy grające rolę mas nukleonów, takiej symetrii wykazywać nie może.

Feynman i Gell-Mann zauważyli także, że struktura oddziaływań ich teorii miała taką postać, że mogłaby ona być naturalnym przybliżeniem jakiejś ogólniejszej teorii, w której oddziaływania słabe przenoszone byłyby przez bardzo masywne bozony pośredniczące o spinie $1\hbar$. Zastąpienie punktowego oddziaływania z teorii FFG przez takie oddziaływanie wymienne byłoby krokiem w kierunku renormalizowalnej teorii oddziaływań słabych, choć sam ten krok sprawy jeszcze by nie rozwiązywał: teorie, w równaniach których występują bezpośrednio wyrazy nadające masy bozonom o spinie $1\hbar$, są nadal (choć „trochę mniej”) nierenormalizowalne.

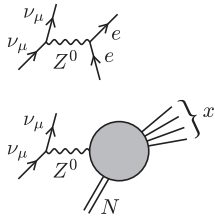
Kluczem do rozwiązania problemu amplitudy \mathcal{A}_A okazały się przeniesione przez Y. Nambu na grunt fizyki cząstek koncepcje z teorii nadprzewodnictwa ($\Delta_{83}^{12}, \Delta_{88}^3, \Delta_{04}^{1i2}$), za opracowanie której Nagrodę Nobla w 1972 roku otrzymali J. Bardeen, L.N. Cooper i J.R. Schrieffer. Zrozumienie jego dynamicznych aspektów (czyli, w uproszczeniu, właśnie spontanicznego naruszenia symetrii) zainspirowało Nambu do rozpatrzenia podobnego mechanizmu w teorii cząstek. Pisząc w skrócie, zauważył on, iż możliwe jest zbudowanie teorii oddziałujących silnie pól nukleonowych, której równania są niezmiennicze względem chiralnej symetrii $SU(2)_L \times SU(2)_R$, tj. zapewniają $\mathcal{A}_V = \mathcal{A}_A = 1$, a równe masy obu nukleonów powstają dynamicznie, wskutek oddziaływań, mimo że odpowiednie człony nie występują jawnie w niezmienniczych względem symetrii chiralnej równaniach teorii. Pokazał też, że tak zbudowana teoria przewiduje istnienie bezmasowych mezonów (utożsamionych przez niego z mezonami π), które są stanami związanymi jej fundamentalnych fermionów.

Drugi ważny w kontekście Modelu Standardowego krok uczynił J. Goldstone, który, rozwijając idee Nambu, zauważył, że znacznie prostszym niż skomplikowana dynamika silnie oddziałujących pól fermionowych sposobem spontanicznego naruszenia symetrii może być wprowadzenie do teorii pola skalarnego, którego potencjał wprowadzie zachowuje symetrię, ale ma tworzące continuum minima dla niezerowej wartości pola. Zaletą tego mechanizmu jest to, że nie wymaga on, by same oddziaływania były silne, co także znacznie upraszcza rachunkową stronę teorii. Na przykład, istnienie bozonów NG (bezmasy cząstek o spinie 0 związanych z naruszonymi spontanicznie symetriami) jest wtedy oczywiste bez złożonych rachunków *à la* Nambu.

Również w pracach Nambu pojawiła się idea, że jeżeli w rzeczywistości symetria chiralna jest jedynie symetrią przybliżoną (tzn. psujące ją człony równań są w jakimś sensie „małe”; zob. odcinek II), to mezony π będą miały masy niezerowe, ale małe w porównaniu z masą nukleonów, a amplituda \mathcal{A}_A będzie bliska, ale niedokładnie równa jedności. Tak więc to w pracach Nambu, za które otrzymał on w roku 2008 Nagrodę Nobla (Δ_{08}^{12}), pojawiła się po raz pierwszy myśl, że mezony π są stanami związanymi punktowych fermionów (których rolę u Nambu odgrywały jeszcze nukleony, a nie kwarki).

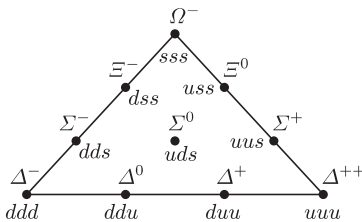
Wreszcie, rozpatrując dynamiczne naruszenie symetrii chiralnej w teoriach, w których fermiony fundamentalne oddziałują za pośrednictwem bozonów o spinie $1\hbar$, Nambu postawił ważne pytanie, czy masa tych bozonów pośredniczących również nie mogłaby być skutkiem samej dynamiki oddziaływań, co pozwoliłoby wyeliminować z równań wyrazy bezpośrednio nadające tym cząstkom masy i stworzyłoby nadzieję na zbudowanie renormalizowalnej teorii z masywnymi bozonami pośredniczącymi o spinie $1\hbar$.

Odpowiedź na pytanie postawione przez Nambu dały wkrótce (w roku 1964) prace F. Englerta i R. Brouta, oraz G.S. Guralnika, C.R. Hagen i T.W.B. Kibble'a. Pokazano w nich, że gdy spontaniczemu naruszeniu ulega symetria cechowania (lokalna, a nie globalna), bozony pośredniczące, niezależnie od konkretnego sposobu spontanicznego jej naruszenia, rzeczywiście stają się masywne, a bozony NG stają się bozonami pośredniczącymi o skrętności równej zero. Do tych samych wniosków doszedł także P.W. Higgs, który ponadto zauważył, że gdy za naruszenie symetrii cechowania jest odpowiedzialny kondensat pola skalarnego, tak jak to proponował Goldstone, musi dodatkowo istnieć masywna cząstka o spinie zero. . . Za te właśnie obserwacje Englert i Higgs otrzymali w roku 2013 Nagrodę Nobla (Δ_{13}^{12}).

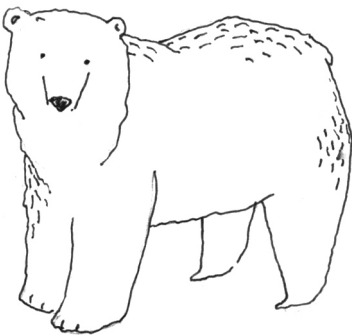


Diagramy procesów zarejestrowanych w komorze Gargamelle.

Historyczne zdjęcie z komory pęcherzykowej Gargamelle jest jednym z kilku zdobiących okładkę Δ_{04}^8 .



Dekuplet grupy $SU(3)_V$ tworzący przez najbliższe bariony.



Oparty na spontanicznym naruszeniu symetrii cechowania sposób nadawania mas bozonom pośredniczącym, zwany dziś w skrócie mechanizmem Higgsa, został w roku 1967 spożytkowany przez S. Weinberga i niezależnie A. Salama do zbudowania zunifikowanej teorii słabych i elektromagnetycznych oddziaływań, na razie tylko leptonów ($\Delta_{75}^6, \Delta_{76}^6$). Wykorzystali oni teorię pól o spinie $1\hbar$ (tzw. teorię Yanga–Millsa, od nazwisk teoretyków, którzy pierwsi ją badali jeszcze w latach pięćdziesiątych XX w.) z grupą cechowania $SU(2)_W \times U(1)_Y$, rozpatrywaną wcześniej przez S. Glashowa. Była to najprostsza grupa, której przekształcenia dawało się zrealizować na polach znanych leptonów (e^-, ν_e oraz μ^-, ν_μ). Jako mechanizm naruszenia symetrii Weinberg wykorzystał spostrzeżenia Goldstone'a, wprowadzając jeden dublet zespolonych pól skalarnych (czyli cztery rzeczywiste pola skalarne). Teoria ta to właśnie omówiony już w odcinkach I i II Model Standardowy, tylko bez kwarków i gluonów. Zastosowanie mechanizmu Higgsa do teorii oddziaływań słabych stanowiło przełom; wcześniej, kierując się sugestiami Nambu, próbowano w analogiczny sposób zbudować teorię oddziaływań silnych. Jak wspominał Weinberg: *zrozumieliśmy, że stosujemy dobre koncepcje do niewłaściwego problemu.*

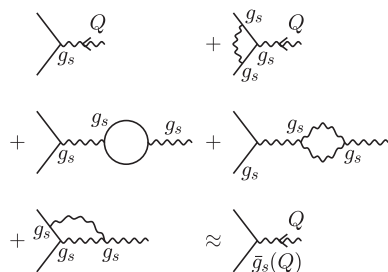
Teoria Salama–Weinberga przez kilka lat pozostawała niedoceniona przez innych teoretyków. Jej status zmienił się jednak diametralnie, gdy w roku 1972 G. 't Hooft (który był wówczas doktorantem) i M. Veltman udowodnili ściśle, że, tak jak przypuszczał Weinberg, jest to teoria renormalizowalna (w roku 1999 otrzymali za swoje badania Nagrodę Nobla, Δ_{00}^1). Gdy zaś w roku 1973 w doświadczeniu przeprowadzonym w CERN-ie, wykorzystującym wiązkę neutronów produkowaną przez synchrotron protonowy PS, zarejestrowano w komorze pęcherzykowej Gargamelle reakcje $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$ i $\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu X$, gdzie N oznacza nukleon, a X dowolny zbiór hadronów, w których oddziaływanie przenosi bozon Z^0 (Δ_{84}^6), teoria Salama i Weinberga została powszechnie zaakceptowana jako najpoważniejsza propozycja unifikacji oddziaływań słabych i elektromagnetycznych (którą już w roku 1957 przewidywał Schwinger).

Rozbudowanie teorii Glashowa, Salama i Weinberga, tak by opisywała także słabe i elektromagnetyczne oddziaływania hadronów, stało się możliwe dzięki koncepcjom z lat sześćdziesiątych, które, poparte odkryciami eksperymentalnymi, doprowadziły do uznania na początku lat siedemdziesiątych chromodynamiki za właściwą teorię oddziaływań silnych.

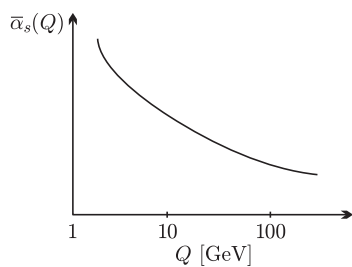
Pierwszym krokiem na tej drodze była wysunięta w roku 1961 przez Gell-Manna i niezależnie Y. Ne'mana hipoteza przybliżonej symetrii $SU(3)_V$ oddziaływań silnych. Stanowiła ona podstawę klasyfikacji znanych hadronów ($\Delta_{77}^6, \Delta_{79}^2, \Delta_{90}^7$) i, jak niegdyś tablica Mendelejewa, pozwoliła przewidzieć istnienie nowych cząstek. Idąc dalej, Gell-Mann przyjął, że w oddziaływaniach hadronów istotną rolę odgrywa też ukryta (zgodnie z sugestiami Nambu) przybliżona symetria $SU(3)_L \times SU(3)_R$ i, uogólniając teorię FFG, przyjął, że hadronowa część oddziaływań słabych jest zbudowana z odpowiednich kombinacji prądów Noether tej właśnie symetrii. Pozwoliło mu to włączyć w tę teorię także oddziaływania słabe odpowiedzialne za rozpady cząstek dziwnych w taki sposób, że obliczając ich amplitudy, można było korzystać z teorii grup bez konieczności korzystania z dynamiki oddziaływań silnych (jego podejście nosiło tajemniczą nazwę „algebry prądów”).

Zgodnie z zasadą Pauliego (Δ_{78}^{10}) stan trzech kwarków u tworzących najbliższy barion Δ^{++} o spinie $3/2$ musi być całkowicie antysymetryczny. Ponieważ orbitalny moment pędu lekkiego barionu powinien być zerowy, stanem tym może być tylko stan $u \uparrow u \uparrow u \uparrow$ (strzałki oznaczają kierunki spinów kwarków), który jest symetryczny. Kolor pozwala uczynić stan antysymetrycznym przez utworzenie kombinacji $u_c u_n u_s + u_s u_c u_n + u_n u_s u_c - u_c u_s u_n - u_n u_c u_s - u_s u_n u_c$.

Od strony koncepcyjnej rozpraszanie głęboko nieelastyczne elektronów na nukleonach jest podobne do słynnego doświadczenia Rutherforda (Δ_{91}^6). Elektron o dużej energii, odchylony pod dużym kątem, wysyła wirtualny foton o bardzo małej długości fali, który dzięki temu ma dużą „zdolność rozdzielczą” – „widzi” więc indywidualne składniki nukleonu.



„Biegająca” (zależna od skali energii Q) stała sprzężenia $\bar{g}_s(Q)$.



Ustalona na podstawie pomiarów

$$\bar{\alpha}_s = \frac{\bar{g}_s^2}{4\pi}$$

zależność biegnącej stałej sprzężenia chromodynamiki od energii.

W języku kwarków pomysł Cabibbo polegał na tym, że kwark u emitując W^+ , może przejść albo w d , albo w s , a czynniki mnożącymi uniwersalną stałą sprzężenia $g_W/\sqrt{2} = e/\sqrt{2} \sin \theta_C$ są odpowiednio $\cos \theta_C$ i $\sin \theta_C$.

Jednak równoprawne potraktowanie przez Gell-Manna oddziaływań słabych zmieniających dziwność i tych, które jej nie zmieniały, prowadziło do trudności – mierzone czasy życia cząstek dziwnych były dłuższe niż przewidywała teoria, co wskazywało, że efektywna stała sprzężenia tych pierwszych oddziaływań jest słabsza niż drugich. Problem ten rozwiązał w roku 1963 N. Cabibbo, postulując, że uniwersalna stała sprzężenia (znana ze słabych reakcji leptonowych) w tych dwóch rodzajach słabych oddziaływań hadronów jest mnożona odpowiednio przez $\sin \theta_C$ i $\cos \theta_C$ (kąt θ_C nazywa się, oczywiście, kątem Cabibbo). Propozycja ta legła u podstaw omówionej już w odcinku I struktury zapachowej oddziaływań słabych.

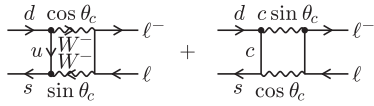
W roku 1964 Gell-Mann i niezależnie G. Zweig zauważyli, że cechy wszystkich hadronów można by wyjaśnić, przyjmując, iż bariony są zbudowane z trzech tworzących podstawowy multiplet grupy $SU(3)_V$ rodzajów (zapachów) kwarków, a mezony z par, jakie można utworzyć z trzech kwarków i trzech antykwarków. Kwarki te, oznaczane dziś u , d i s , musiały mieć ładunki elektryczne $+\frac{2}{3}e$, $-\frac{1}{3}e$, $-\frac{1}{3}e$, przy czym pierwsze dwa o dziwności $S = 0$ tworzą izospinowy dublet, a trzeci będący izosingletem ma dziwność $S = -1$. Kolor, jako dodatkowa cecha kwarków, został wprowadzony przez O.W. Greenberga jeszcze w tym samym roku, by uzgodnić kwarkową budowę hadronów z zakazem Pauliego.

Hipoteza istnienia kwarków, z początku bardzo kontrowersyjna, uzyskała spektakularne potwierdzenie w przeprowadzonym w laboratorium SLAC w Stanford w końcu lat sześćdziesiątych XX wieku eksperymencie (nagrodzonym w roku 1990 Nagrodą Nobla) polegającym na tzw. głęboko nieelastycznym rozpraszaniu elektronów na nukleonach. Eksperyment ten (zob. Δ_{77}^7 , Δ_{85}^4 , Δ_{85}^7), zinterpretowany przez J. Bjorkena i Feynmana, pokazał, że nukleony rzeczywiście są zbudowane z punktowych składników (które Feynman nazywał partonami) oraz że wzajemne oddziaływania kwarków na bardzo małych odległościach (tj. przy dużych przekazach pędu od rozpraszanego elektronu do nukleonu) są bardzo słabe. Mierząc charakterystyki głęboko nieelastycznego rozpraszania na nukleonach elektronów i neutronów mionowych ν_μ (których wiązki były produkowane przez PS w CERN-ie), dość szybko ustalono, że partony oddziałujące z wirtualnym fotonem mają spin $\hbar/2$ oraz liczbę barionową równą $1/3$, i utożsamiono je z kwarkami. Dalsze badania wykazały, że kwarki nie niosą całego pędu nukleonu – muszą więc w nim występować także jakieś elektrycznie obojętne składniki.

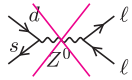
Dzięki wcześniejszym pracom (m.in. D.J. Grossa, C.G. Callana) wiedziano już wtedy, że słabnięcie wzajemnych oddziaływań kwarków na małych odległościach można by wyjaśnić przez malenie wraz ze wzrostem energii tzw. biegnącej stałej sprzężenia teorii opisującej ich oddziaływania. Wszystkie kawałki układanki zaczęły wskakiwać na swoje miejsce, gdy w końcu roku 1972 Gross ze swoim (mającym polskie korzenie) doktorantem F. Wilczkiem oraz niezależnie H.D. Politzer (laureaci Nagrody Nobla w roku 2004, Δ_{04}^{12}) pokazali, że jedynymi kwantowymi teoriami pola mającymi tę właściwość są teorie, w których kwarki oddziałują z bozonami cechowania nieabelowych grup (inaczej, grup nieprzemiennych, takich jak $SU(3)_c$, czy $SU(2)$, ale nie jak $U(1)_{EM}$ elektrodynamiki) cechowania. Teorie takie fachowo nazywa się *asymptotycznie swobodnymi*. Naturalne więc było utożsamienie grupy cechowania z grupą $SU(3)_c$ koloru i tym samym ośmiu bozonów cechowania z elektrycznie obojętymi składnikami hadronów. Początkowo nie było jasne, czy kolorowa symetria cechowania jest symetrią ścisłą, czy też jest ona, tak jak symetria cechowania modelu Salama i Weinberga, spontanicznie naruszona. Za drugą możliwością zdawało się przemawiać istnienie masywnych mezonów o spinie $1\hbar$, ale po przeanalizowaniu różnych trudności, z jakimi musiałoby się to wiązać, Gross, Wilczek i Politzer zasugerowali, że symetria kolorowa musi być ścisła. Wskazali przy tym na to, że będący „odwrotną stroną medalu” asymptotycznej swobody wzrost siły wzajemnego oddziaływania kwarków wraz z ich oddalaniem się może być przyczyną ich uwięzienia w hadronach (Δ_{91}^9) i wysunęli hipotezę (do dziś nieudowodnioną, Δ_{00}^{12}), że jako swobodne cząstki można rejestrować w detektorach tylko „białe”, tj. będące singletami grupy koloru, cząstki (były wprawdzie doniesienia o zarejestrowaniu cząstek mających ułamkowe ładunki, Δ_{74}^4 , ale były one nieprawdziwe).

Zaakceptowanie chromodynamiki jako poprawnej teorii oddziaływań silnych umożliwiło niemal natychmiastowe włączenie w schemat Weinberga, Salama i Glashowa słabych oddziaływań kwarków. Ponieważ chromodynamika dawała proste objaśnienie pochodzenia globalnych symetrii $SU(2)_L \times SU(2)_R$ i $SU(3)_L \times SU(3)_R$ i ich przybliżonego charakteru (zob. odcinek II), było jasne, dzięki koncepcjom Feynmana, Gell-Manna i Cabibbo, że bozony pośredniczące muszą sprzęgać się do kwarków i że chiralna struktura tych oddziaływań rządzi się takimi samymi zasadami, jak analogiczne sprzężenia leptonów.

Mechanizm GIM.

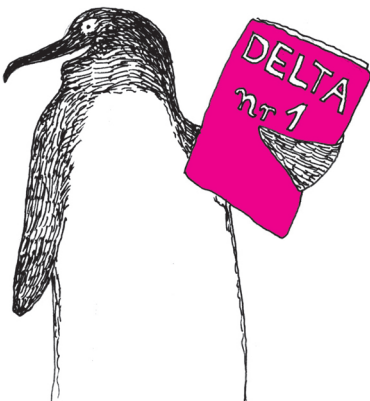


Gdyby masy kwarków u i c były jednakowe, oba pokazane przyczynki do amplitudy $\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \ell^+ \ell^-)$ znosiłyby się całkowicie. Ponieważ $m_c \gg m_u$, $\mathcal{A}(K^0 \rightarrow \ell^+ \ell^-) \sim g_W^4 (m_c^2/M_W^2) \sin 2\theta_C$. Struktura Modelu Standardowego nie prowadzi do diagramu.



Mówimy, że w pierwszym przybliżeniu nie istnieją prądy neutralne zmieniające zapach kwarków. Są one generowane w kolejnych przybliżeniach przez diagramy z wymianami W^\pm (takie jak wyżej), ale odpowiednie amplitudy są dodatkowo tłumione przez mechanizm GIM.

To, że neutrino powstające w rozpadach $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ nie jest tożsame z neutrinem znanym z jądrowych rozpadów β , wykazali eksperymentalnie L. Lederman, M. Schwartz i J. Steinberger w roku 1960 (Δ_{89}^2). Z kolei to, że π^+ rozpada się niemal zawsze na $\mu^+ \nu_\mu$, a nie na parę $e^+ \nu_e$, jest potwierdzeniem tego, że cząstka pośrednicząca w oddziaływaniu słabym ma spin $1\hbar$.



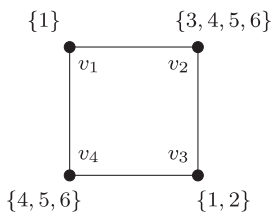
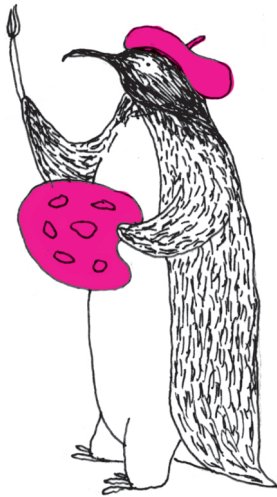
Jeszcze przed tymi teoretycznymi osiągnięciami zauważono, że teoria słabych oddziaływań FFG-Cabibbo przewiduje zbyt szybki, sprzeczny z danymi, rozpad neutralnego kaonu (cząstki dziwnej) na dwa naładowane leptony (e^+e^- lub $\mu^+\mu^-$). Rozwiązanie tego problemu zaproponowane przez Glashowa, J. Iliopoulosa i L. Maianiego (w roku 1970) po zaakceptowaniu kwarków sprowadzało się do hipotezy, że istnieje czwarty kwark c , nazwany *powabnym*, o ładunku $+\frac{2}{3}e$ i że, emitując W^+ , może on przejść albo w s , albo w d ze względnymi amplitudami mnożonymi przez $-\sin\theta_C$ i $\cos\theta_C$. Ten mechanizm redukcji amplitudy rozpadu $K^0 \rightarrow \ell^+\ell^-$, będącego przykładem procesu rzadkiego, jest nazywany mechanizmem GIM. Mechanizm ten przenosi się do pełnego, sześciokwarkowego Modelu Standardowego, a rolę relacji $\cos\theta_C \sin\theta_C - \sin\theta_C \cos\theta_C = 0$ pełni wtedy relacja unitarności macierzy CKM (zob. odcinek I). To właśnie mechanizm GIM sprawia, że Model Standardowy tak dobrze ilościowo opisuje procesy rzadkie (zob. np. Δ_{98}^3).

Bodaj najbardziej nieoczekiwanym wydarzeniem lat sześćdziesiątych XX wieku było odkrycie w 1964 roku niezachowywania parzystości kombinowanej CP, tj. łamanie w pewnych reakcjach symetrii polegającej na odbiciu lustrzanym połączonym z zamianą cząstek na antycząstki ($\Delta_{81}^3, \Delta_{89}^4$). Efekt ten zaobserwowano jako zachodzący bardzo rzadko (około dwa razy na tysiąc innych rozpadów) rozpad długożyciowego neutralnego kaonu K_L (cząstki dziwnej, Δ_{78}^5) na dwa piony. Odkrycie niezachowania CP było szokiem i traktowano je z początku jak skazę na doskonałości praw fizyki. Jednakże trzy lata później A. Sacharow zauważył, że niezachowywanie symetrii CP, liczby barionowej (co, jak wspominałem w odcinku II, jest uwzględnione w Modelu Standardowym) oraz dodatkowo brak równowagi termodynamicznej na pewnym etapie ewolucji wszechświata są koniecznymi warunkami dynamicznego wytworzenia obserwowanej we wszechświecie znacznej przewagi materii nad antymaterią. Gdyby któryś z tych trzech warunków nie był spełniony, cała materia uległaby anihilacji w trakcie ewolucji wszechświata i pozostałoby jedynie stygnące z czasem promieniowanie reliktywne (Δ_{06}^{12}). Praca Sacharowa, gdy już została doceniona, zmieniła radykalnie nastawienie do niezachowania CP: uznane zostało ono za konieczny warunek powstania we wszechświecie obserwowanych struktur, a co za tym idzie także życia (Δ_{02}^{12}).

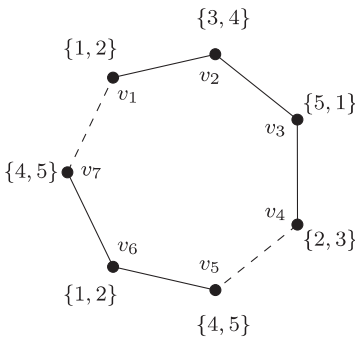
Powstał zatem problem uwzględnienia łamania CP w uzupełnionej o QCD i elektroślabe oddziaływania kwarków teorii Weinberga–Salama (próby takie podejmowano, oczywiście, już wcześniej, jeszcze na gruncie teorii FFG-Cabibbo). Analizę tego problemu przedstawili w roku 1973 dwaj japońscy teoretycy M. Kobayashi i T. Maskawa. Wynikało z niej, że w tej teorii jest to możliwe tylko pod warunkiem, że dopuści się istnienie sześciu kwarków! Śmiałość (względnie stopień desperacji) tego pomysłu musi być oczywisty: w roku 1973 znane były doświadczalnie tylko trzy kwarki (tworzące zaledwie półtoję rodziny), istnienie czwartego kwarka było wprawdzie bardzo prawdopodobne – cztery kwarki były niezbędne dla mechanizmu GIM i znakomicie pasowały do czterech znanych ówczesnie leptonów ($e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu$), ale wprowadzenie jeszcze dwu nowych kwarków z miejsca psuło tę cieszącą oko każdego teoretyka kwarkowo-leptonową odpowiedniość! Pomysł okazał się jednak słuszny, a Kobayashi i Maskawa otrzymali Nagrodę Nobla w 2008 roku (Δ_{08}^{12}).

W naszej wędrówce przez historię idei dotarliśmy do roku 1974, w którym ukazał się pierwszy numer *Delty*. O tym, co zdarzyło się w fizyce cząstek od tego czasu, napiszemy w następnym odcinku.

$$K = \max \{w_i + w_{i+1} \mid i = 1, \dots, n\}$$



Rys. 1. Przykład dla cyklu o $n = 4$ wierzchołkach i zapotrzebowaniach na kolory $w_1 = 1, w_2 = 4, w_3 = 2, w_4 = 3$. Do pokolorowania go wystarczy $K = 6$ różnych kolorów.



Rys. 2. Przykład dla $n = 7$ wierzchołków, z których każdy potrzebuje dwóch kolorów ($w_i = 2$). Zgodnie z algorytmem potrzebujemy $K' = \max\{4, \lceil \frac{14}{3} \rceil\} = 5$ kolorów. Ponieważ $k = 2$, więc wierzchołki v_1, v_2, v_3, v_4 kolorujemy cyklicznie, a wierzchołki v_5, v_6, v_7 zgodnie z parzystością.

Informatyczny kącik olimpijski (91): Kolorowanie cyklu

Zagadnienie kolorowania cyklu niejednokrotnie pojawiało się na konkursach programistycznych, m.in. na Mistrzostwach Europy Środkowej w Programowaniu Zespołowym (zadanie *Beijing Guards* z roku 2004), czy też Mistrzostwach Polski w Programowaniu Zespołowym (zadanie *Słoneczna wyspa* z roku 2010). Dany jest cykl o n wierzchołkach v_1, \dots, v_n , którym trzeba tak przyporządkować kolory, by:

- (1) wierzchołek v_i dostał dokładnie w_i różnych kolorów;
- (2) każda para sąsiadujących wierzchołków dostała rozłączne zestawy kolorów;
- (3) liczba użytych różnych kolorów była jak najmniejsza.

Zadanie to ma bardzo proste rozwiązanie w przypadku cyklu o długości parzystej. Do pokolorowania pary sąsiadujących wierzchołków v_i i v_{i+1} potrzebujemy $w_i + w_{i+1}$ różnych kolorów (zakładamy dla uproszczenia, że $w_{n+1} = w_1$). Zatem w sumie potrzebujemy ich co najmniej

$$K = \max\{w_i + w_{i+1} \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Okazuje się, że tyle różnych kolorów wystarczy. Jeśli oznaczymy te kolory kolejnymi liczbami naturalnymi $1, 2, \dots, K$, to wierzchołkom o numerach parzystych możemy przyporządkować początkowe kolory z listy, a wierzchołkom o numerach nieparzystych – kolory z końca listy. Innymi słowy, wierzchołek i -ty dostanie kolory $\{1, 2, \dots, w_i\}$, jeśli i jest nieparzyste, lub kolory $\{K - w_i + 1, \dots, K\}$, jeśli i jest parzyste (patrz rysunek 1). Zauważmy, że powyższy algorytm działa nie tylko dla cyklu o długości parzystej, ale również dla ścieżek, drzew i w ogólności dla dowolnych grafów dwudzielnych.

W przypadku cyklu o długości nieparzystej $n = 2m + 1$ powyższe rozwiązanie nie działa. Już dla $n = 3$ widzimy, że potrzebne jest $w_1 + w_2 + w_3$ różnych kolorów. W ogólnym przypadku musimy sumarycznie wykonać $W = \sum_{i=1}^n w_i$ przydziałów kolorów. Ponieważ największy zbiór niezależny na cyklu (tzn. zbiór wierzchołków niepołączonych krawędziami) ma rozmiar m , więc każdy kolor przydzielimy do co najwyżej m wierzchołków. Potrzebować więc będziemy co najmniej $\lceil \frac{W}{m} \rceil$ różnych kolorów. Okazuje się, że wystarczająca liczba kolorów to

$$K' = \max \left\{ K, \left\lceil \frac{W}{m} \right\rceil \right\}.$$

Niech k będzie taką najmniejszą liczbą, że $\sum_{i=1}^{2k+1} w_i \leq kK'$. Liczba ta istnieje, bo w szczególności nierówność powyższa jest spełniona dla $k = m$. Podzielimy teraz wierzchołki cyklu na dwie grupy, które będziemy kolorować na dwa różne sposoby (patrz przykład na rysunku 2). Wierzchołki v_1, v_2, \dots, v_{2k} kolorujemy cyklicznie, tzn. po kolei nadając im kolory z listy

$$1, 2, \dots, K', 1, 2, \dots, K', 1, 2, \dots, K', \dots$$

Natomiast wierzchołki v_{2k+1}, \dots, v_n kolorujemy, używając metody dla cyklu długości parzystej, tzn. wierzchołkom nieparzystym przyporządkowujemy kolory $\{K' - w_i + 1, \dots, K'\}$, a wierzchołkom parzystym kolory $\{1, 2, \dots, w_i\}$.

Pozostaje wykazać, że końce krawędzi łączących te dwie grupy wierzchołków są pokolorowane poprawnie. Dla krawędzi $v_1 v_n$ jest prosto: wierzchołek v_1 używa kolorów $\{1, \dots, w_1\}$, a wierzchołek v_n kolorów $\{K' - w_n + 1, \dots, K'\}$, wiemy też, że $K' \geq w_1 + w_n$. Dowód dla krawędzi $v_{2k} v_{2k+1}$ jest trudniejszy. Ponieważ

$$(k-1)K' < \sum_{i=1}^{2k-1} w_i \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{2k+1} w_i \leq kK',$$

więc wierzchołkowi v_{2k} zostaną przypisane kolory ze *spójnego* przedziału liczb naturalnych $\{\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + w_{2k}\}$, gdzie $\alpha = (\sum_{i=1}^{2k-1} w_i) \bmod K'$. Ponadto spełnione jest $\alpha + w_{2k} + w_{2k+1} \leq K'$, więc żaden kolor z tego przedziału nie jest kolorem ze zbioru kolorów $\{K' - w_{2k+1} + 1, \dots, K'\}$ przypisanych do v_{2k+1} .

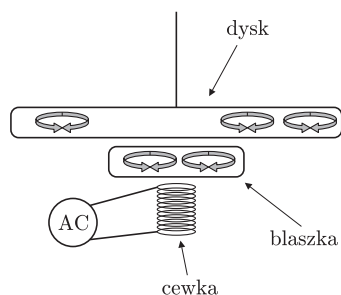
Powyższy algorytm wyznaczający kolorowanie cyklu ma złożoność czasową $O(n)$.

Tomasz IDZIASZEK

Zacieniony biegun

Filip CZERMIŃSKI, Marlena MAĆKOWIAK,
Antoni NUSZKIEWICZ, Kacper RACIBORSKI,
Paweł SUCHOMSKI, Paweł SZCZYPKOWSKI,
Jan BIHAŁOWICZ, Piotr PODLASKI

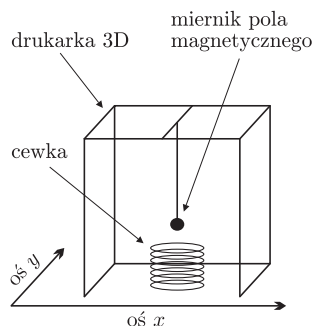
Jeżeli zamocowany obrotowo na osi krążek z nieferromagnetycznego metalu umieścimy nad elektromagnesem zasilanym prądem zmiennym, krążek będzie odpychany, ale nie zacznie się obracać. Jeśli jednak między elektromagnes a krążek częściowo wprowadzimy blaszkę z nieferromagnetycznego metalu, spowodujemy obroty krążka (rys. 1). Dlaczego tak jest? Jakie parametry mają wpływ na to zjawisko? Spróbowaliśmy odpowiedzieć na te pytania, wykonując serię doświadczeń.



Rys. 1

Dlaczego się kręci?

Na początek musieliśmy jednak stworzyć model teoretyczny rozważanego zjawiska. Cewka zasilana prądem zmiennym wytwarza wokół siebie zmienne pole magnetyczne indukujące prąd w przewodniku. Z tego powodu w dysku oraz blaszce powstają prądy nazywane wirowymi, płynące po zamkniętych pętlach. W tym samym momencie płyną one w obu przewodnikach w tym samym kierunku, więc powodują wzajemne przyciąganie się krążka i blaszki przysłaniającej. Przysłona ma dodatkowe działanie: zacienia ona dysk przed działaniem pola pochodzącego od cewki. Jeżeli przysłonę wsuniemy tak, że zasłoni ona tylko część dysku i prądy wirowe będą rozmieszczone nierównomiernie, to powstanie niezrównoważony moment siły i dysk zacznie się obracać.



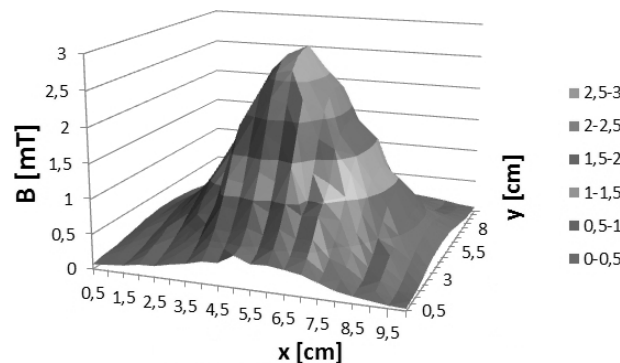
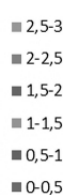
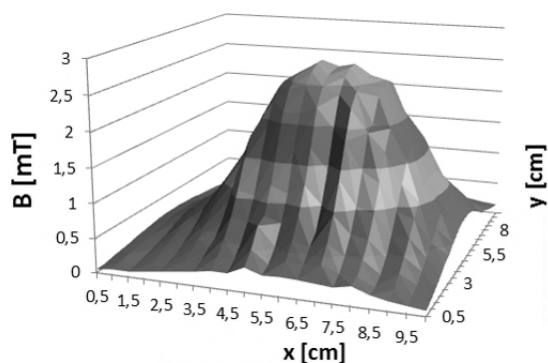
Rys. 2. Układ doświadczalny

Układy doświadczalne

Aby móc szczegółowo zbadać nasz dysk, zbudowaliśmy układ doświadczalny przedstawiony na rysunku 2. Użyliśmy w nim drukarki 3D, by precyzyjnie manipulować miernikiem pola magnetycznego. Dzięki temu układowi mogliśmy wykonywać mapy pola magnetycznego nad cewką.

Pomiary pola magnetycznego

Wspomniane zostało, że blaszka wygasza działanie pola pochodzącego od cewki, jakby rzucając cień na dysk. Użyliśmy naszego układu doświadczalnego do sprawdzenia skali tego zjawiska. Wykonaliśmy mapę pola nad cewką, a następnie powtórzyliśmy tę czynność, tym razem wsuwając do połowy nad cewkę blaszkę z nieferromagnetyka.

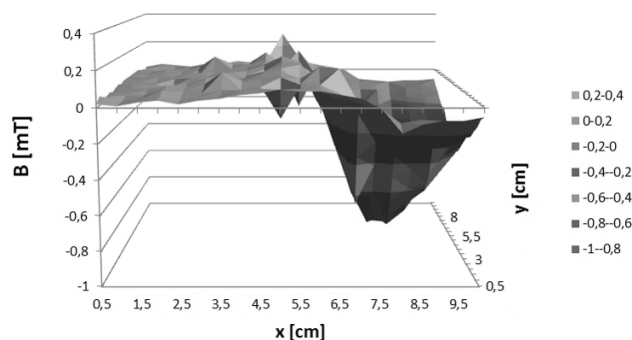


Pomiar pola magnetycznego bez blaszki i z blaszką wsuniętą z prawej strony

Blaszka wsunięta z prawej strony rzeczywiście zmniejszyła wartość pola magnetycznego.

Aby efekt był bardziej widoczny, odjęliśmy otrzymane wyniki i otrzymaliśmy mapę zmiany pola magnetycznego po wsunięciu przesłony z prawej strony.

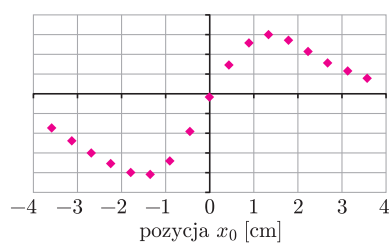
Zmiana jest wyraźnie zauważalna.



Z naszych obliczeń wynika, że blaszka zmniejszyła wartość pola nad sobą o 32%.

Symulacja jakościowa

Aby móc przewidzieć wpływ położenia przysłony na obrót dysku, opracowaliśmy jakościową symulację komputerową. Skorzystaliśmy z naszych badań pola nad cewką oraz przedstawionego wyżej, uproszczonego opisu oddziaływania między prądami wirowymi na dysku i blaszce. Wiedząc, jakie pole magnetyczne występuje w określonym miejscu dysku przy określonym położeniu przysłony, mogliśmy przewidzieć względną zmianę momentu siły, jaka działa na dysk w zależności od położenia przysłony. Rysunek 3 przedstawia przykładowy wynik symulacji.



Rys. 3. Na osi poziomej odległość przysłony od środka dysku, na pionowej moment siły.

Wyniki naszej symulacji komputerowej okazały się bardzo podobne do wyników doświadczalnych.

Podsumowanie

Wiemy już teraz, dlaczego dysk się kręci, możemy też zbadać wpływ rozmaitych parametrów układu na jego obrót. Z naszych badań wynikają następujące zależności:

- kierunek obrotu dysku zależy od tego, z której strony dysku wsuniemy przysłonę;
- zmiana położenia blaszki, zarówno wsunięcie, jak przesunięcie w bok, zmienia częstotliwość obrotów dysku;
- częstotliwość obrotów dysku jest proporcjonalna do przewodności materiału przysłony;
- moment siły działający na krążek jest tym większy, im większe jest natężenie prądu płynącego przez cewkę;
- częstotliwość obrotów dysku zależy od częstotliwości prądu na cewce.



**Uniwersytet
Młodych Wynalazców**



INNOWACYJNA
GOSPODARKA
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ
ROZWOJU REGIONALNEGO



Niezależność zdarzeń w modelu klasycznym

W teorii prawdopodobieństwa mówimy o modelu klasycznym, gdy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem skończonym i wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne. W modelu klasycznym dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ są niezależne, gdy $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Zdarzenie losowe A będziemy nazywali nietrywialnym, gdy $0 < P(A) < 1$.

Rozważmy model klasyczny, w którym $|\Omega| = n > 1$ i takie zdarzenie losowe $B \subset \Omega$, że $|B| = k > 0$.

Czytelnikowi sugerujemy przeprowadzenie dowodu (np. metodą nie wprost) następującego faktu: jeżeli $NWD(k, n) = 1$, tzn. liczby k oraz n są względnie pierwsze, to nie istnieje nietrywialne zdarzenie losowe A , które jest niezależne z B .

Z tego faktu wynika wniosek: jeżeli $|\Omega| = n$ jest liczbą pierwszą, to nie istnieją dwa zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$, które są nietrywialne i niezależne.

Czyżby grający w amerykańską ruletkę o 37 polach o tym nie wiedzieli?

Edward STACHOWSKI

Wielka struktura w wielkich przeglądkach

Agnieszka POLLO*

Większość obiektów, które widzimy na niebie gołym okiem albo za pomocą niewielkich amatorskich teleskopów, należy do naszej Galaktyki – Drogi Mlecznej. Jasny pas, widoczny na niebie w ciemną noc, to jej dysk – zalicza się ona bowiem do kategorii galaktyk dyskowych, a ściślej – spiralnych, najprawdopodobniej z poprzeczką.

Gigantyczna gąbka. Wszechświat pełen jest galaktyk mniej lub bardziej do naszej podobnych. Najbliższą naszą dużą sąsiadką jest galaktyka w Andromedzie – spiralna, podobna do Drogi Mlecznej, chociaż trochę od niej większa. Wraz z kilkudziesięcioma galaktykami karłowatymi te dwa duże układy tworzą tzw. Grupę Lokalną. Obłoki Magellana, które przez lata uchodziły za satelitki Drogi Mlecznej, to najbardziej znane spośród małych galaktyk. Są one widoczne gołym okiem – chociaż, niestety, tylko z półkuli południowej. Ostatnie pomiary ich prędkości własnych wydają się jednak wskazywać, że nie okrążają one naszej Galaktyki, lecz mijają ją w drodze przez wszechświat.

Grupa Lokalna jest bardzo skromnym zgrupowaniem galaktyk. Bogate gromady, jakich wiele we wszechświecie, liczą sobie wiele tysięcy jasnych i słabych galaktyk. Wiemy dziś jednak, że struktura wielkoskalowa wszechświata jest znacznie bardziej skomplikowana i znacznie bogatsza: gromady galaktyk siedzą w węzłach kosmicznej sieci, składającej się też z olbrzymich pustek, otaczających je ścian i filamentów, którymi galaktyki spływają w kierunku gromad. Tę olbrzymią trójwymiarową sieć czasem przyrównuje się do gigantycznej gąbki.

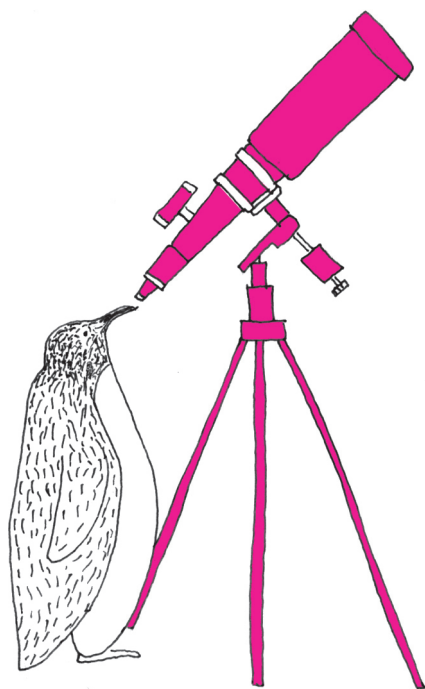
Ciemne i jasne. W tym szaleństwie struktur jest jednakże metoda. Symulacje komputerowe i rachunki teoretyczne pokazują, że dzisiejszą strukturę wielkoskalową wszechświata możemy wywieść w prostej linii od niewielkich zaburzeń gęstości materii, która niemal jednorodnie wypełniała wszechświat 400 000 lat po jego powstaniu. Wystarczy tylko jeden mechanizm, żeby te niewielkie zagęszczenia rozrosły się i rozbudowały do dzisiejszej struktury wielkoskalowej. Tym mechanizmem jest grawitacja, a ściślej – tzw. niestabilność grawitacyjna.

Zidentyfikowanie grawitacji jako siły sprawczej rozwoju struktur we wszechświecie nie zapewnia nam jeszcze dokładnej rekonstrukcji struktury wielkoskalowej i wszystkich czynników, jakie ją kształtują. Przede wszystkim – materii, której jest o wiele za mało, żeby ukształtować strukturę obecnie obserwowaną. Dopiero uwzględnienie obecności większych ilości dodatkowej, tzw. ciemnej materii zapewnia dostatecznie silne pole grawitacyjne. I to zresztą nie wystarcza, żeby wyjaśnić, dlaczego, jak pokazują bardzo głębokie przeglądy, struktura wielkoskalowa pojawiła się we wszechświecie we wczesnych etapach jego istnienia. Ten problem z kolei daje się rozwikłać, gdy przyjmiemy do wiadomości istnienie ciemnej energii. . .

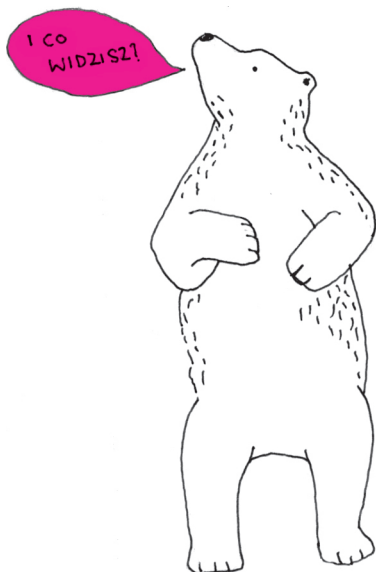
Mimo że zwykła świecąca materia i zbudowane z niej galaktyki zawierają zaledwie niewielki ułamek kosmicznego bilansu energii i materii, to jednak możemy za ich pomocą badać struktury utworzone i uformowane głównie przez „ciemne składowe” wszechświata. Ale nawet odtworzenie rozkładu galaktyk w różnych kosmicznych epokach to wielkie – logistyczne i naukowe – wyzwanie.

Niebo, czyli dwa wymiary. Z praktycznego punktu widzenia przeglądy nieba najprościej podzielić na dwie kategorie: dwu- i trójwymiarowe. Przeglądy dwuwymiarowe to po prostu katalogi położenia na niebie, zawierające też zazwyczaj informację o jasnościach: wiemy, gdzie takiego źródła szukać na niebie, ale nie jesteśmy w stanie nic powiedzieć o jego odległości od nas, a w każdym razie nie od razu. Takie przeglądy tworzy się względnie tanio i prosto (stopień względności jest tu, naturalnie, bardzo duży) – wystarczy obserwować dany fragment nieba odpowiednio długo w odpowiednich długościach fal. . . W praktyce nie jest to, oczywiście, takie łatwe – obserwacje w wielu zakresach fal, jak średnia czy daleka podczerwień, mikrofałe, promienie rentgenowskie czy ultrafiolet, wymagają wysłania satelitów w przestrzeń wokółziemską. Nawet w zakresie optycznym poświęcenie długiego czasu pracy teleskopu na obserwacje jednego fragmentu nieba jest uznawane za zbyt kosztowne.

Struktura w 3D. Jeśli chcemy do położenia na niebie dołożyć odległość, sprawa robi się jeszcze trudniejsza: musimy przeprowadzić pomiary spektroskopowe. Za pomocą spektroskopu dla każdego obiektu musimy otrzymać pasek widma, który pozwoli nam na zidentyfikowanie linii widmowych.



Zaburzenia gęstości materii możemy zaobserwować w postaci niewielkich różnic temperatury nieba, obserwowanego w mikrofalach – tzw. mikrofalowego promieniowania tła; jego najnowszych pomiarów dostarczył nam w 2015 roku satelita Planck.



*Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie i Narodowe Centrum Badań Jądrowych w Warszawie



Rozwiązanie zadania F 900.

Niech odległość między szczelinami wynosi d . Wówczas kolejne prążki interferencyjne pojawiają się pod kątami α_n spełniającymi warunek $n\lambda = d \sin \alpha_n$, gdzie n jest rzędem prążka, $\lambda = h/p$ długością fali de Broglie'a, h jest stałą Plancka, a $p = mv$ pędem molekuly o masie m . Rozrzut prędkości prowadzi do poszerzenia prążków. Obserwacja prążków rzędu n wymaga, by prążki „nie zachodziły na siebie”, czyli (dla niedużych kątów sinus jest funkcją rosnącą): $(n+1)\lambda_- > n\lambda_+$, gdzie $\lambda_- = h/(p - \Delta p)$ i $\lambda_+ = h/(p + \Delta p)$ oznaczają górną i dolną granicę przedziału długości fal de Broglie'a wiązki. Ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta v}{v} < \frac{1}{2n+1}.$$

Za przesunięcie widma ku czerwieni może też odpowiadać po prostu ruch galaktyki w przestrzeni, który powoduje „zwykły” efekt Dopplera; w przypadku odległych galaktyk jego wpływ na widmo jest znacznie mniejszy.



Rozwiązanie zadania M 1488. Tak!

Warunek dany w zadaniu możemy przedstawić w postaci

$$n_1^2 - n_1(n_2n_3 + n_2n_4 + n_3n_4) + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 - n_2n_3n_4 = 0.$$

Jeśli pewna czwórka liczb (n_1, n_2, n_3, n_4) spełnia to równanie, to na mocy wzorów Viète'a spełnia je również czwórka (N_1, n_2, n_3, n_4) , gdzie

$$n_1 + N_1 = n_2n_3 + n_2n_4 + n_3n_4.$$

W takim razie z dowolnego rozwiązania (n_1, n_2, n_3, n_4) możemy uzyskać inne rozwiązanie (N_1, n_2, n_3, n_4) , gdzie $N_1 = n_2n_3 + n_2n_4 + n_3n_4 - n_1$. Jeśli założymy, że $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$, to otrzymamy $N_1 > n_4$. Otrzymałoby więc nową czwórkę liczb spełniającą równanie, przy czym minimalny element czwórki został zmieniony na element największy.

Zaczynając od czwórki $(1, 1, 1, 1)$ i wykonując wielokrotnie analogiczną operację, uzyskamy szukane rozwiązanie.

Różne typy galaktyk mają swoje charakterystyczne linie widmowe. Galaktyki eliptyczne składają się głównie ze starych gwiazd – nie ma w nich pyłu ani gazu, z którego mogłyby powstawać nowe gwiazdy. Dlatego widma galaktyk eliptycznych, podobnie jak widma gwiazd, charakteryzują się obecnością linii absorpcyjnych – są bowiem po prostu złożeniem wielu widm gwiazdowych, w których dominują właśnie linie absorpcyjne. Linie te powstają, kiedy promieniowanie wyprodukowane we wnętrzu gwiazdy przechodzi przez jej atmosferę i jest przez nią pochłaniane. Galaktyki spiralne z kolei zawierają nie tylko różne pokolenia zarówno starych, jak i młodych gwiazd, ale też duże zasoby gazu i pyłu. Dlatego poza liniami absorpcyjnymi w ich widmach znajdujemy linie emisyjne – rezultat wzbudzenia atomów gazu międzygwiazdowego przez promieniowanie młodych gwiazd.

Widma różnych typów galaktyk odznaczają się zatem obecnością różnych linii – wodoru, tlenu, ale też sodu, krzemu, węgla, a nawet neonu. Mają charakterystyczne kształty i charakterystyczne zestawy linii, po których doświadczony obserwator może je rozpoznać. Te serie linii w przypadku każdej galaktyki obserwujemy jednak w trochę innych długościach fal. Za ten efekt odpowiada kosmologiczne przesunięcie ku czerwieni – wraz z rozszerzaniem się wszechświata rosną odległości między nami a każdą z obserwowanych galaktyk i długość wysłanych przez nie kiedyś fal elektromagnetycznych ulega wydłużeniu. Przesunięcie widma ku czerwieni pozwala nam określić, jak daleko od nas znajduje się obserwowany obiekt i jak dawno temu jego światło zostało wysłane. Oznacza to, że badając odległe galaktyki, patrzymy jednocześnie w głąb kosmosu i w przeszłość.

Mając odległość – trzeci wymiar – możemy już rekonstruować kosmiczną sieć z dużą dokładnością. Pomiar spektroskopowy wymaga jednak więcej czasu niż dwuwymiarowe, fotometryczne – musimy rozłożyć światło na składowe, co oznacza, że potrzebujemy więcej fotonów, a więc i dłuższych czasów obserwacji. W dodatku nie możemy obserwować wszystkich obiektów w polu widzenia. Nawet największe multispektroskopy, zdolne do zmierzenia kilkuset widm jednocześnie, muszą „zarezerwować” dla każdego z badanych obiektów miejsce na CCD na jego pasek widma. W rezultacie tworzenie katalogów trójwymiarowych to żmudna i długotrwała praca.

Są metody na obejście problemu – w katalogach dwuwymiarowych wyznacza się tzw. fotometryczne przesunięcia ku czerwieni, na podstawie przybliżonego kształtu, jaki wyłania się z pomiarów jasności w wielu zakresach długości fal. Ta metoda jest jednak znacznie mniej dokładna od spektroskopowej.

12 mld lat wielkich struktur. Największym istniejącym przeglądem współczesnego wszechświata jest Sloan Digital Sky Survey – SDSS. Pokrywa jedną trzecią nieba i zawiera pomiary dla ponad trzech milionów obiektów. Wyłania się z niego wyraźna trójwymiarowa struktura wszechświata wokół nas – w promieniu co najmniej trzech miliardów lat świetlnych.

Jednak według kosmologicznych standardów trzy miliardy lat świetlnych to właściwie nasze kosmiczne podwórko – a trzy miliardy lat temu to niemal jak wczoraj. Tymczasem zrozumienie, jak wielkoskalowa struktura się rozwijała, wymaga sięgnięcia znacznie dalej w przeszłość.

Największym istniejącym przeglądem galaktyk sprzed 8 mld lat jest przegląd VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS), w którym bierze udział także zespół polskich astronomów. Obejmuje pomiary blisko 100 000 widm galaktyk, które układają się w wyraźną trójwymiarową sieć, już wtedy zadziwiająco podobną do tej, którą znamy z lokalnych przeglądów.

A jeszcze dalej? Im dalej, tym trudniej – galaktyki są słabsze, pomiary widm znacznie trudniejsze. VIMOS Ultra Deep Survey, największy obecnie przegląd spektroskopowy wszechświata sprzed 12 mld lat, liczy sobie zaledwie (albo aż) około 10 000 galaktyk. Ale i tam, mniej niż dwa miliardy lat po narodzinach wszechświata, galaktyki wydają się układać już w skomplikowane struktury.

Z każdym pomiarem przekonujemy się, że scenariusz, w którym kluczową rolę w rozwoju struktury wielkoskalowej odgrywa grawitacja, wydaje się sprawdzać. Ale żeby dobrze zrozumieć szczegóły tego procesu – będziemy potrzebować kolejnych, jeszcze większych i bogatszych przeglądów.

Matematyka jest jedna: Magia liczb

Tomasz KOBOS*

*doktorant, Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński



Dotarliśmy do ostatniej części cyklu, w którym prezentujemy wybrane przykłady zaskakujących relacji pomiędzy różnymi, pozornie bardzo odległymi, obszarami matematyki. Nie wypada jednak zakończyć bez poświęcenia należytej uwagi dziedzinie teorii liczb. Jak bowiem matematyka nazywana jest często królową nauk, tak o teorii liczb mówi się często jako o królowej matematyki. A królowa ma, oczywiście, wielu służących.

Mówiąc już całkiem poważnie, proste i eleganckie w sformułowaniu problemy teorii liczb przyciągają uwagę matematyków już od tysięcy lat. Nie trzeba dodawać, iż nierzadko te pozornie proste pytania w rzeczywistości okazują się niezwykle głębokie i wymagające wielu lat wyteżonej pracy tęgich umysłów matematycznych. Powstały całkiem nowe dziedziny, których rozwój był inspirowany uzyskaniem postępu w pewnych otwartych problemach teorii liczb. W ramach przykładów możemy wymienić algebraiczną teorię liczb, geometrię algebraiczną czy analityczną teorię liczb. Właśnie ta ostatnia stanowi temat przewodni artykułu.

Termin „analityczna teoria liczb” może brzmieć dosyć groźnie. I rzeczywiście – jest to trudny i zaawansowany dział matematyki, który po dziś dzień jest ciągle intensywnie rozwijany. Z góry jednak uspokajamy, że cały artykuł oparty jest na elementarnych przykładach i nie wymaga żadnej specjalistycznej wiedzy. Potrzebne będą jedynie podstawowe informacje dotyczące granic ciągów i zbieżności szeregów. W ostatnim z zadań wykorzystamy również podstawowe własności liczb zespolonych. Cała ta wiedza mieści się w programie I roku studiów i korzystając z materiałów pomocniczych, można ją w razie czego bardzo szybko uzupełnić. Okazuje się, że nawet tak podstawowe narzędzia analizy otwierają całkiem nowe możliwości w zakresie rozwiązywania problemów teorii liczb.

Metody analityczne służą często do badania teorioliczbowych własności wielomianów o współczynnikach całkowitych. Mogą być pomocne w scharakteryzowaniu wielomianów o pewnych naturalnych własnościach. Tego typu charakteryzacja stanowi treść pierwszego z zadań, pochodzącego z II etapu polskiej Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 1. Trójmian kwadratowy $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia następujący warunek: dla dowolnej liczby całkowitej x liczba $P(x)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Dowiść, że wielomian $P(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

Rozwiązanie. Niech

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ oraz $a \neq 0$. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ niech x_n będzie taką liczbą naturalną, że $P(n) = x_n^2$. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ma dwie istotne własności. Po pierwsze, jest to ciąg liczb całkowitych. Po drugie, na podstawie definicji jesteśmy w stanie określić jego tempo wzrostu. Cała sztuczka polega teraz na tym, aby z ciągiem $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ związać inny ciąg liczb całkowitych, który okaże się zbieżny. Wówczas otrzymamy naprawdę potężną dawkę informacji – zbieżny ciąg liczb całkowitych musi być przecież od pewnego miejsca stały! Jak więc znaleźć taki ciąg? Możemy myśleć w ten sposób: skoro kwadrat liczby x_n „zachowuje się” kwadratowo (jest wartością wielomianu kwadratowego), to ciąg x_n powinien „zachowywać się” liniowo. To nasuwa pomysł zbadania różnicy $x_{n+1} - x_n$. Jest to

rzeczywiście dobry kierunek, gdyż możemy zauważyć, że

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \\ &= \frac{(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) - (an^2 + bn + c)}{\sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} + \sqrt{an^2 + bn + c}} = \\ &= \frac{2an + a + b}{\sqrt{an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)} + \sqrt{an^2 + bn + c}} = \\ &= \frac{2a + \frac{a+b}{n}}{\sqrt{a + \frac{2a+b}{n} + \frac{a+b+c}{n^2}} + \sqrt{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}}. \end{aligned}$$

Przechodząc z n do nieskończoności, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \frac{2a}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \sqrt{a}.$$

Wykazaliśmy w ten sposób, iż ciąg liczb całkowitych $(x_{n+1} - x_n)_{n \geq 1}$ jest zbieżny. Musi być to zatem ciąg od pewnego miejsca stały i jego granica jest, oczywiście, liczbą całkowitą. Innymi słowy, istnieją takie liczby naturalne k, N , że $a = k^2$ oraz $x_{n+1} = x_n + k$ dla $n \geq N$. W szczególności

$$x_n = x_{n-1} + k = x_{n-2} + 2k = \dots = x_N + (n - N)k,$$

dla dowolnego $n \geq N$. Tym samym dla dowolnego $n \geq N$

spełniona jest równość

$$P(n) = x_n^2 = (x_N + (n - N)k)^2.$$

Ponieważ wartości wielomianów $P(x)$ oraz $(x_N + (x - N)k)^2$ pokrywają się dla nieskończenie wielu argumentów, wielomiany te są równe. Wykazaliśmy w ten sposób, że $P(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu i dowód jest zakończony.

Kolejny przykład jest zaskakującym zastosowaniem słynnego faktu analizy matematycznej: szereg harmoniczny, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ kolejnych odwrotności liczb naturalnych, jest rozbieżny.

Zadanie 2. Dane są liczby całkowite a, b większe od 1. Udowodnić, że istnieje pewna wielokrotność liczby a , która zapisana w systemie pozycyjnym o podstawie b zawiera każdą z cyfr $0, 1, 2, \dots, b - 1$.

Rozwiązanie. Rozwiązanie będzie przebiegać w sposób niekonstruktywny. Zamiast wskazywać konkretną wielokrotność liczby a , która ma żadaną własność, założymy, że teza zadania nie jest prawdziwa i dojdziemy do sprzeczności. Ponieważ szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ odwrotności kolejnych liczb naturalnych jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na}$ odwrotności wielokrotności liczby a . Niech S oznacza zbiór liczb naturalnych n , które w zapisie pozycyjnym o podstawie b nie zawierają choćby jednej z b możliwych cyfr. Jeżeli teza zadania nie jest prawdziwa, to zbiór S zawiera wszystkie wielokrotności liczby a , a więc w szczególności szereg $\sum_{x \in S} \frac{1}{x}$ jest rozbieżny. Udowodnimy, że ten szereg jest zbieżny, uzyskując w ten sposób sprzeczność, która w efekcie zakończy rozwiązanie zadania.

Ustalmy dowolną cyfrę ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$. Łatwo zauważyć, że wystarczy udowodnić, iż szereg odwrotności tych liczb, które nie zawierają w swoim zapisie właśnie tej ustalonej cyfry, jest zbieżny. Zauważmy dalej, że liczb o n cyfrach w zapisie o podstawie b , które nie zawierają pewnej ustalonej cyfry, jest co najwyżej $(b - 1)^n$ – bowiem każdą z cyfr możemy wybrać na co najwyżej $b - 1$ sposobów. Co więcej, liczba o n cyfrach jest nie mniejsza niż b^{n-1} . Jej odwrotność nie przekracza więc $\frac{1}{b^{n-1}}$. Ponieważ liczb n -cyfrowych niezawierających ustalonej cyfry jest co najwyżej $(b - 1)^n$, ich suma odwrotności jest zatem nie większa niż $\frac{(b-1)^n}{b^{n-1}}$. Sumując po wszystkich n , otrzymujemy, iż szereg odwrotności liczb naturalnych, które nie zawierają pewnej ustalonej cyfry, nie przekracza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b-1)^n}{b^{n-1}} = b \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b-1}{b}\right)^n = (b-1)b < \infty,$$

gdzie ostatnia z równości wynika bezpośrednio ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego. Powyższy szereg jest więc zbieżny i dowód jest zakończony.

Kolejne zadanie dotyczy klasycznego twierdzenia Schura o wielomianach o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 3 (Twierdzenie Schura). Dany jest niestały wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p istnieje taka liczba naturalna n , że p dzieli $P(n)$.

Rozwiązanie. Dla dowodu nie wprost założymy, że istnieje jedynie skończenie wiele liczb pierwszych p o takiej własności. Niech będą to liczby p_1, p_2, \dots, p_k . Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $P(n)$ pojawiają się tylko pewne z liczb p_i dla $i = 1, 2, \dots, k$. Innymi słowy, $P(n) = cp_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz $c \in \{1, -1\}$.

Ustalmy liczbę rzeczywistą $r > 0$ i zauważmy, że

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0} \frac{1}{p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \dots p_k^{r\alpha_k}} = \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i^r} + \frac{1}{p_i^{2r}} + \dots\right) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^r}{p_i^r - 1},$$

przy czym sumowanie odbywa się po całkowitych α_i . Pierwsza z równości wynika z bezpośredniego wymnożenia wszystkich nawiasów i z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze – liczba $p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \dots p_k^{r\alpha_k}$ pojawi się tylko jako efekt wymnożenia α_i -go składnika z i -go czynnika iloczynu. Druga z równości to, oczywiście, bezpośrednie zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego. Widzimy więc w szczególności, że szereg

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0} \frac{1}{p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \dots p_k^{r\alpha_k}}$$

jest zbieżny dla dowolnej liczby rzeczywistej $r > 0$.

Niech zatem $r = \frac{1}{2m}$, gdzie $m \geq 1$ jest stopniem wielomianu P . Dla odpowiednio dużych n prawdziwa jest wówczas nierówność

$$|P(n)|^r = \sqrt[2m]{|P(n)|} \leq n,$$

gdź po podniesieniu obu stron nierówności do potęgi $2m$ sprowadza się ona do $|P(n)| \leq n^{2m}$, a wielomian x^{2m} jest wielomianem wyższego stopnia niż $P(x)$. W szczególności

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|P(n)|^r} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Z drugiej jednak strony każda liczba $|P(n)|^r$ jest postaci $p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \dots p_k^{r\alpha_k}$. Co więcej, dowolna liczba postaci $p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \dots p_k^{r\alpha_k}$ jest równa co najwyżej $2m$ liczbom $|P(n)|$ – wielomian P nie jest stały, a więc każdą wartość przyjmuje co najwyżej m razy, tak samo jak wielomian $-P$. A zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|P(n)|^r} \leq 2m \left(\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0} \frac{1}{p_1^{r\alpha_1} p_2^{r\alpha_2} \dots p_k^{r\alpha_k}} \right) < \infty.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Istnieje wiele dowodów twierdzenia Schura. Zachęcamy gorąco Czytelnika do próby odnalezienia innego – dowód zaprezentowany powyżej jest bardzo niecodzienny, ale da się przeprowadzić bardziej nasuwające się rozumowanie, które prowadzi do konkluzji twierdzenia.

Powyższy dowód ma jednak istotną zaletę: w rzeczywistości wynika z niego znacznie więcej. Zauważmy bowiem, że dla dowolnego ciągu liczb całkowitych dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ można zapytać o to, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p , takich, że $p | a_n$ dla pewnego $n \geq 1$. Nie jest tak, oczywiście, dla każdego ciągu: wystarczy wziąć ciąg stały albo ciąg $a_n = 2^n$. Jeżeli jednak założymy dodatkowo, że istnieje taka liczba naturalna N , że każda liczba naturalna jest wartością ciągu a_n dla co najwyżej N indeksów n , oraz że wyrazy ciągu rosną w tempie nie szybszym niż wielomianowym – czyli, że istnieje taki wielomian $P(x)$, że $a_n \leq P(n)$ dla odpowiednio dużych n , to powyższe rozumowanie gwarantuje nieskończony zbiór liczb pierwszych, z których każda dzieli pewien wyraz ciągu. Przedstawiony argument daje więc pozytywną odpowiedź w bardzo szerokiej klasie ciągów.

Ostatnie z zadań należy do podobnej kategorii co zadanie pierwsze. Dotyczy ono charakteryzacji unormowanych wielomianów o współczynnikach całkowitych, które osiągają każdą z potęg liczby 2 dla argumentów całkowitych. Główny pomysł rozwiązania również jest zbliżony, lecz zrealizowanie go w szczegółach wymaga większego zaangażowania.

Zadanie 4. Dany jest unormowany wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, który spełnia następujący warunek: dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n istnieje taka liczba całkowita dodatnia x , że $P(x) = 2^n$. Udowodnić, że wielomian P jest wielomianem liniowym.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez m stopień wielomianu P . Naszym celem jest wykazanie równości $m = 1$. Z treści zadania wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$ istnieje taka liczba całkowita x_n , że $P(x_n) = 2^n$. Podobnie jak w zadaniu pierwszym, możemy próbować wykorzystać ten warunek, aby związać z ciągiem $(x_n)_{n \geq 1}$ inny ciąg liczb całkowitych, który okaże się zbieżny, a więc od pewnego miejsca stały. Przeprowadzimy najpierw czysto heurystyczne rozumowanie, które pomoże nam znaleźć kandydata na tego typu ciąg. Ponieważ wielomian P jest unormowany i stopnia m , możemy myśleć, że dla dużych wartości x wartość $P(x)$ „zachowuje się” jak x^m . Skoro tak, to aby zachodziła równość $P(x_n) = 2^n$, wyraz x_n powinien „zachowywać się” jak $2^{\frac{n}{m}}$. Zauważmy jednak, że $2^{\frac{n+m}{m}} - 2 \cdot 2^{\frac{n}{m}} = 0$, co sugeruje, że dobrym kandydatem może być ciąg $(x_{n+m} - 2x_n)_{n \geq 1}$. Okazuje się, że tak jest w istocie – udowodnimy, że jest to ciąg zbieżny.

W pierwszej kolejności dowiedzimy nieco słabszej własności: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+m}}{x_n} = 2$. Zauważmy najpierw, że ciąg x_n dąży, oczywiście, do nieskończoności. Ponieważ współczynnik w P przy x^m jest równy 1, to dostajemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(x_n)}{x_n^m} = 1$. Tym samym

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+m}^m}{x_n^m} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+m}^m}{P(x_{n+m})} \cdot \frac{P(x_n)}{x_n^m} \cdot \frac{P(x_{n+m})}{P(x_n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(x_{n+m})}{P(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+m}}{2^n} = 2^m, \end{aligned}$$

a stąd, oczywiście, mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+m}}{x_n} = 2$. Ciąg $\frac{x_{n+m}}{x_n}$ niekoniecznie jest ciągiem liczb całkowitych, a więc jego zbieżność nie daje jeszcze nam bezpośrednio istotnych korzyści. Jest to jednak pomocny krok pośredni.

Zapiszmy bowiem wielomian $P(x)$ w postaci

$$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

dla pewnych liczb całkowitych a_0, a_1, \dots, a_{m-1} . Z równości $P(x_{n+m}) = 2^{n+m} = 2^m P(x_n)$ otrzymujemy

$$x_{n+m}^m - 2^m x_n^m = - \sum_{i=0}^{m-1} a_i (x_{n+m}^i - 2^m x_n^i).$$

Ze wzoru na różnicę m -tych potęg mamy ponadto

$$x_{n+m}^m - 2^m x_n^m = (x_{n+m} - 2x_n) \left(\sum_{i=0}^{m-1} 2^i x_n^i x_{n+m}^{m-i-1} \right),$$

co w połączeniu daje nam zależność

$$\begin{aligned} x_{n+m} - 2x_n &= - \frac{\sum_{i=0}^{m-1} a_i (x_{n+m}^i - 2^m x_n^i)}{\sum_{i=0}^{m-1} 2^i x_n^i x_{n+m}^{m-i-1}} = \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{m-1} a_i \left(\left(\frac{x_{n+m}}{2x_n} \right)^i \frac{1}{(2x_n)^{m-i-1}} - 2 \right)}{\sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{x_{n+m}}{2x_n} \right)^{m-i-1}}. \end{aligned}$$

Przechodząc z n do nieskończoności w powyższej równości i korzystając z wcześniej udowodnionego faktu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+m}}{2x_n} = 1$, otrzymujemy zatem zbieżność ciągu $x_{n+m} - 2x_n$. Jest to ciąg liczb całkowitych, a więc istnieje liczba naturalna N oraz liczba całkowita A , dla których $x_{n+m} - 2x_n = A$, gdy $n \geq N$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że dla odpowiednio dużych n prawdziwa jest równość $P(2x_n + A) = 2^m P(x_n)$. To jednak oznacza, iż wielomian $P(2x + A) - 2^m P(x)$ ma nieskończenie wiele pierwiastków, a więc jest wielomianem zerowym. Czyli dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest równość $P(2x + A) = 2^m P(x)$.

Wychodząc od teorioliczbowego warunku danego w treści zadania, udało nam się zatem dotrzeć do czysto algebraicznej zależności, którą spełnia wielomian $P(x)$. Aby doprowadzić rozwiązanie do końca, posłużymy się liczbami zespolonymi. Jak wiadomo, każdy wielomian ma tyle pierwiastków zespolonych, ile wynosi jego stopień. Niech z_0 będzie zatem dowolnym zespolonym pierwiastkiem wielomianu P . Wówczas

$$0 = 2^m P(z_0) = P(2z_0 + A),$$

skąd wynika, że $2z_0 + A$ jest również pierwiastkiem wielomianu P . Kontynuując w ten sposób, widzimy, że pierwiastkiem wielomianu P są również liczby $4z_0 + 3A, 8z_0 + 7A, 16z_0 + 15A, \dots$. Wielomian P nie jest jednak wielomianem zerowym, a więc liczby w tym ciągu muszą od pewnego miejsca zacząć się powtarzać. To zaś oznacza, że dla pewnych liczb naturalnych $k > l$ mamy

$$2^k z_0 + (2^k - 1)A = 2^l z_0 + (2^l - 1)A,$$

co z kolei można przekształcić do postaci

$$(2^k - 2^l)z_0 = -(2^k - 2^l)A,$$

a stąd, oczywiście, $z_0 = -A$.

Dowiedliśmy zatem, iż każdy pierwiastek wielomianu $P(x)$ jest równy $-A$. Skoro wielomian $P(x)$ jest unormowany, to w takim razie $P(x) = (x + A)^m$. W tym momencie teza zadania staje się ewidentna:

$$(x_1 + A)^m = P(x_1) = 2.$$

Liczba 2 jest m -tą potęgą liczby całkowitej tylko dla $m = 1$. Wielomian $P(x)$ jest więc wielomianem liniowym i rozwiązanie jest zakończone.

W ten sposób dotarliśmy do końca cyklu. Żywimy nadzieję, że ukazał on korzyści płynące z zachowania otwartości umysłu na niecodzienne pomysły. Podobnie jak odwagi do podążania niekoniecznie najbardziej narzucającą się drogą. Któż bowiem wie, co ciekawego może nas na niej spotkać?

Metody, które Czytelnik miał okazję spotkać w powyższych przykładach, może wykorzystywać w dwóch zadaniach do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. Liczby całkowite a i b spełniają następujący warunek: dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba $a \cdot 2^n + b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnić, że $a = 0$.

Podpowiedź. Niech x_n będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że $a \cdot 2^n + b = x_n^2$. Rozważ ciąg $(2x_n - x_{n+2})_{n \geq 1}$.

Zadanie 6. Dany jest rosnący ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ liczb całkowitych, który spełnia warunek $a_n \leq 1000n$. Wykazać, że w ciągu istnieje nieskończenie wiele wyrazów, które w zapisie dziesiętnym mają co najmniej 2015 kolejnych cyfr równych 1.

Podpowiedź. Niech S będzie zbiorem liczb, które w zapisie dziesiętnym nie mają ciągu 2015 kolejnych cyfr równych 1. Udowodnij, że szereg $\sum_{x \in S} \frac{1}{x}$ jest zbieżny. Oszacuj w tym celu od góry liczbę liczb n cyfrowych w zbiorze S .



Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

M 1486. Dane są takie liczby całkowite dodatnie $n > m$, że liczby $n^7 - m^7$ oraz $n^3 - m^3$ są względnie pierwsze. Wykaż, że liczby $n^2 - m^2$ i $n^3 - m^3$ są również względnie pierwsze.

Rozwiązanie na str. 2

M 1487. W trójkąt ABC wpisany jest okrąg o promieniu r . Proste styczne do okręgu i równoległe do boków trójkąta odcinają od niego trzy trójkąty. Wykaż, że suma promieni okręgów wpisanych w te trzy trójkąty jest równa r .

Rozwiązanie na str. 5

M 1488. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby naturalne n_1, n_2, n_3, n_4 , wszystkie większe od 2016, spełniające równanie

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2 n_4 + n_1 n_3 n_4 + n_2 n_3 n_4.$$

Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 899. Bezpośredni pomiar energii kinetycznej poruszającego się swobodnie elektronu dał wynik $E = (1000 \pm 0,1)$ eV – tzn. pomiar wykonano z dokładnością do $\Delta E = 0,1$ eV. Wyznacz stosunek dokładności określenia położenia (współrzędnej x w kierunku ruchu) elektronu do długości jego fali de Broglie'a bezpośrednio po tym pomiarze.

Rozwiązanie na str. 1

F 900. Do wykonania doświadczenia Younga z molekułami – tj. obserwacji prążków interferencyjnych po przejściu wiązki przez układ równoległych, równoodległych szczelin – potrzebna jest odpowiednio przygotowana wiązka molekuł. Powinna to być wiązka identycznych molekuł poruszających się równoległe w kierunku układu szczelin z jednakowymi prędkościami. Jak duży jest dopuszczalny rozrzut Δv prędkości molekuł w wiązce, jeśli chcemy zaobserwować wyraźne prążki do rzędu n ?

Rozrzut Δv prędkości v w wiązce o średniej prędkości v_0 określają nierówności $v_0 - \Delta v < v < v_0 + \Delta v$.

Rozwiązanie na str. 15



$$n_3 - n_1$$

$$n_1 - n_2$$

$$n_2 > n_1$$

Przypominamy, że jak co roku
w dniach **14 – 20 marca 2016 roku**

w **Dąbrowie Górniczej,**
Cieszynie,
Żywcu,
Olkuszu
i **Krakowie**

odbędzie się, tym razem już

XII Edycja Festiwalu Nauki

organizowanego przez

Wyższą Szkołę Biznesu
i **Urząd Miejski**
w **Dąbrowie Górniczej.**

Zapraszamy.

O pożytkach z lodu w wiaderku (II)

Czytelniców *Delty*, a także Redaktorów, zapytałam, czy mogę napisać, w kolejnym numerze, dalszy ciąg historii *Panazkubelkiemlodu* (*Delta* 2/2016). Redakcja pozwoliła, zatem zaczynam od krótkiego streszczenia części pierwszej. W 1972 roku na Uniwersytecie Stanforda powstała publikacja, w której opisano postępowanie umożliwiające „sklejanie” DNA różnego pochodzenia, a warunkiem powodzenia było uzyskanie tych różnych DNA w wyniku działania tego samego enzymu restrykcyjnego. Enzym, o którym mowa, nazywa się Eco RI i działa na DNA wtedy, gdy znajduje się tam sekwencja nukleotydów GAATTC. Ściśle rzecz biorąc, tylko wtedy. Oznacza to, iż jeśli w cząsteczce DNA takiej sekwencji enzym nie odnajdzie, to nie zadziała, choćbyśmy gorąco go do tego namawiali. Bardzo szybko ludzie odkryli, że enzymów restrykcyjnych (zawsze w bakteriach) jest mnóstwo, każdy działa na inną sekwencję nukleotydów i, dobierając ich kolejność, możemy, nadal precyzyjnie, uzyskiwać różne fragmenty DNA. Przed 1972 rokiem, także w Stanford, znaleziono inny enzym, ligazę, który wykonywał reakcję odwrotną – sklejał różne fragmenty DNA (uzyskane za pomocą tego samego enzymu restrykcyjnego).

Wyprodukowanie różnych enzymów restrykcyjnych i ligazy może być komercyjnie interesujące – zwalnia tych, z szalonymi pomysłami łączenia DNA konia i psa, z trudu preparowania narzędzi: enzymów restrykcyjnych i innych preparatów koniecznych do realizacji szalonych pomysłów. To właśnie zrobił *Panazkubelkiemlodu*, i udał się do laboratoriów, w których, jak był pewien, znajdzie nabywców na swoje preparaty. Był to strzał w dziesiątkę, tym bardziej cenny, że pierwszy!

Niestety, nie umiem sobie przypomnieć, jak się dziś nazywa ta wspaniała firma *Panazkubelkiemlodu*. Wydaje mi się, że zaczyna się na B. Ale w laptopowych zapiskach kolegi biotechnologa znajduje się ponad 20 różnych firm tego rodzaju, wszystkie na B. Co oznacza, że w przeglądarkach można ich znaleźć tysiące (zaczynających się na różne litery) i mają z czego żyć. Produkują nie tylko setki preparatów enzymatycznych, ale od ponad 20 lat coś, co po angielsku nazywa się *kit*. Zestaw. To jest zestaw już gotowych odczynników, często gotowych mieszanin odczynników biologicznych, które należy mieć, w odpowiedniej kolejności zmieszać, aby uzyskać odpowiedni, oczekiwany wynik. Kity mogą służyć do dzielenia DNA, łączenia i rozdzielania różnych fragmentów DNA, sekwencjonowania DNA, syntetyzowania DNA, frakcjonowania DNA itd., cokolwiek chcielibyśmy temu DNA uczynić.

Pojawiają się natychmiast problemy.

- Trzeba wiedzieć, co się chce dzięki kitowi osiągnąć. Nie da się tego robić bezmyślnie.
- Trzeba mieć na takie zakupy pieniądze. Jednostkowe koszty nie są bardzo duże, ale przyzwoita lodówka inżyniera genetycznego (tak, to właśnie oni!) zawiera dziesiątki takich preparatów, a ich czas życia jest ograniczony.
- No i znowu trzeba myśleć, gdy uzyska się wynik końcowy. Często opracowuje go program komputerowy, który trzeba do swojej myśli dostosować.
- Trzeba się śpieszyć, także z publikacją, bo rzadko nie czujemy na karku oddechu tych, co mieli podobny pomysł. Wiąże się to z coraz częstszą potrzebą pracy w dużych (ponad 100 osób) interdyscyplinarnych zespołach. Tak jest szybciej, wydajniej i wiarygodniej. Ale kto potem dostanie Nagrodę Nobla?

Przed możliwymi negatywnymi skutkami inżynierii genetycznej ostrzegali w 1973 roku wybitni uczeni amerykańscy, nim jeszcze zaczęły to robić media i przerażeni laicy. Był wśród nich późniejszy noblista, Paul Berg. Z satysfakcją odnajduję jego nazwisko na całkiem aktualnym apelu uczonych o ostrożność w potencjalnym zastosowaniu metody CRISPR (*Science*, 2015) do modyfikacji genomu ludzkiego. Tyle, że z przecieków naukowych (są i takie) wynika, iż już za takie zadania zabrali się uczeni chińscy.

Magdalena FIKUS

Przesłanki

Angielskie słowo *evidence* ma bardzo wiele znaczeń. Wśród jego tłumaczeń trudno znaleźć odcień (znaczeniowy) odpowiadający jego wykorzystywaniu przy omawianiu wyników poszukiwania nieznanymi wcześniej efektów w ramach nauk ścisłych.

Żywiące się sensacją media odczytują ten termin jako (co najmniej) odkrycie (które, dodatkowo, opisywane jest jako przełomowe, epokowe itp.).

W połowie stycznia media ogłosiły odkrycie dziewiątej planety Układu Słonecznego ochrzczonej, bardzo oryginalnie, „dziewiątą planetą” przez autorów publikacji [1]. Taka interpretacja była przesadzona przynajmniej w tym sensie, że istnienie planety w naszym układzie ogłaszano do tej pory wtedy, kiedy komuś udało się ją zobaczyć. Nastąpiło to dotąd dwa razy (Uran, Neptun), przynajmniej jeżeli chodzi o obiekty, które nadal są uznawane za planety. Ta nowa miałaby mieć masę rzędu 10 mas Ziemi i być na ekscentrycznej orbicie o półosi dochodzącej do tysiąca jednostek astronomicznych, czyli kilka razy dalej od Słońca, niż znajduje się obecnie sonda Voyager 1 (najodleglejszy obiekt wysłany przez człowieka). Jej okres obiegu wynosiłby około 20 tysięcy lat, a prędkość kątowna byłaby rzędu minuty łuku na rok. W przypadku jej obserwacji rejestrowalibyśmy jej pozycję sprzed około π dni, przy czym parametry potencjalnej orbity są tylko przybliżone oraz nic nie wiadomo o aktualnej pozycji tego obiektu na niej. Nawet jeżeli planeta ta istnieje, to jej znalezienie łatwe nie będzie (jeżeli nie istnieje, to może być tylko trudniej).

Jakie są przesłanki na korzyść tej hipotezy?

Najodleglejsze znane duże składniki pasa Kuipera (jest ich kilka) mają zastanawiająco podobne parametry orbit. Długość węzła wstępującego (długość ekliptyczna miejsca, w którym obiekt przechodzi na północną stronę płaszczyzny ekliptyki) grupuje się wokół $\Omega = 113^\circ \pm 13^\circ$. Argument perycentrum (kąt między kierunkami od Słońca do węzła wstępującego i do peryhelium) grupuje się wokół $\omega = 318^\circ \pm 8^\circ$, długość peryhelium (kąt złożony) wokół $\bar{\omega} = \Omega + \omega = 71^\circ \pm 16^\circ$. Dodatkowo ekscentryczność orbit wynosi ponad 0,8, inklinacja około dwudziestu kilku stopni, odległość peryhelium ponad 40, a długość półosi ponad 250 jednostek astronomicznych.

Okazuje się, że tak uzgodniony ruch może być wyjaśniony właśnie przez zaproponowanie istnienia planety o podanych wyżej przybliżonych parametrach. Jej orbita powinna mieć podobne nachylenie względem płaszczyzny ekliptyki (inklinację), ale z przeciwnie skierowanym wektorem peryhelium. Najciekawsze jest jednak to, że symulacje wskazujące na jej istnienie przewidują coś więcej niż obserwowane (mało prawdopodobne, gdyby było przypadkowe) podobieństwo orbit dalekich obiektów pasa Kuipera. Ta sama dynamika powinna spowodować wyrzucenie odpowiedniej liczby obiektów na bardzo wydłużone orbity o płaszczyznach o bardzo dużej inklinacji. I takie obiekty rzeczywiście są znane, a parametry ich orbit były zagadką nie łączoną do tej

pory z opisanym wyżej grupowaniem się. Hipoteza ma jeszcze kilka potencjalnie sprawdzalnych przewidywań.

Przytoczone przesłanki (pełniejszy obraz wymaga wnikliwego przestudiowania publikacji [1]) silnie przemawiają za istnieniem (nie)odkrytej dziewiątej planety. Jeden z autorów przyczynił się do zdegradowania układu Pluton-Charon do roli planety karłowatej. Żartobliwie traktuje propozycję uzupełnienia listy pełnoprawnych planet jako rodzaj zadośćuczynienia. Dodaje, że wraz z taką planetą nasz układ stałby się bardziej typowy, gdyż najczęściej znajdowane planety pozasłoneczne mają masy o wartościach pośrednich między masami Ziemi i Neptuna, a taki obiekt nie był dotąd w Układzie Słonecznym znany.

Z podobną, choć jednocześnie diametralnie różną sytuacją mamy do czynienia od grudnia zeszłego roku w LHC. W ramach omówienia wyników eksperymentów ATLAS i CMS zbierających dane przy podwyższonej energii zderzeń protonów 13 TeV ujawniono, że w danych ATLAS-a widać przesłankę o produkcji nowej cząstki, tzw. stanu rezonansowego o masie około $750 \text{ GeV}/c^2$ rozpadającego się na dwa fotony. W dodatku CMS (który zebrał o jedną trzecią mniej przypadków ze względu na niespodziewane problemy z filtrowaniem ciekłego helu niezbędnego do chłodzenia jego magnesu) widzi pewną nadwyżkę dla tej samej masy dwufotonowego stanu końcowego.

Teoretycy rzucili się do wyjaśniania tego sygnału jak dziki w zołędzie. Pierwsze publikacje ukazały się symultanicznie (znaczy – były przecieki). Jest ich już kilkaset, niektóre mają ponad sto cytowań. Wszyscy jednak narzekają, że ten sygnał do niczego nie pasuje bez dodawania „epicykli”. Jakby nie macerować teoretycznych scenariuszy, to powinno temu towarzyszyć coś dodatkowego, czego nie obserwujemy.

Wygląda na to, że albo jest to naprawdę epokowe odkrycie (coś zupełnie niespodziewanego), albo fluktuacja statystyczna, którą zasypie tegoroczny cykl zbierania danych. Ma on największy od lat potencjał odkrywczy, bo oczekiwane jest zebranie danych w ilości (rzędu wielkości większej niż w roku 2015) wystarczającej do obserwacji tego, co można po „bieganiu” przy energii 13 TeV oczekiwać od głównego nurtu teorii wykraczających poza Model Standardowy. A jest to ostatnie podniesienie energii w przewidywalnej przyszłości. Oczywiście, mamy w zanadrzu całe spektrum scenariuszy, które wymagają zebrania o rzędy wielkości większej ilości danych, ale bayesowskie prawdopodobieństwo odkrycia będzie z czasem malało (choć prawdopodobieństwo warunkowe, czyli pod warunkiem, że dotąd niczego nie odkryto, pozostanie na najwyższym poziomie).

Czas pokaże, czy któraś z opisanych przesłanek stanie się prawdziwym odkryciem.

Piotr ZALEWSKI

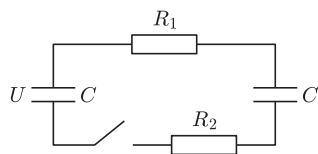
[1] K. Batygin oraz M.E. Brown; *Evidence for a distant giant planet in the solar system*, The Astronomical Journal **151** 22.

Skrót regulaminu

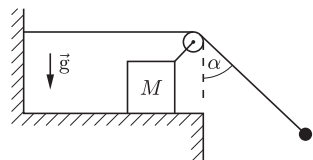
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



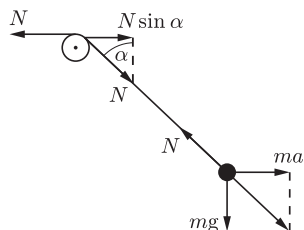
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2016



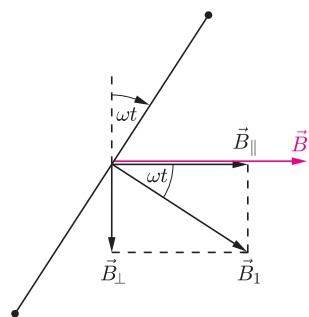
Rys. 1



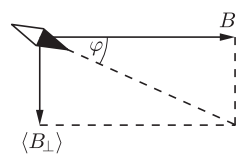
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z fizyki nr 614, 615

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

614. Znaleźć ilość ciepła, jaka wydzielili się na każdym z oporników po zamknięciu klucza (rys. 1). Jeden z kondensatorów naładowany był początkowo do napięcia U , drugi nie był naładowany. Pojemności kondensatorów są jednakowe i równe C , wartości oporów wynoszą R_1 i R_2 .

615. Stosunek liczby zwojów w uzwojeniu wtórnym transformatora do liczby zwojów w uzwojeniu pierwotnym wynosi $n = 2$. Gdy do uzwojenia pierwotnego przyłożono napięcie przemiennie o amplitudzie $U_1 = 100$ V, amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym wynosiła $U_2 = 197$ V. Jaka będzie amplituda napięcia na otwartym uzwojeniu wtórnym, gdy rdzeń transformatora zastąpimy rdzeniem o tych samych wymiarach, ale wykonanym z materiału o przenikalności magnetycznej $k = 10$ razy mniejszej niż w pierwszym przypadku? Rozpraszanie strumienia magnetycznego oraz straty w rdzeniu możemy zaniedbać.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2015

Przypominamy treść zadań:

606. Klocek o masie M , do którego przymocowany jest nieważki, nieruchomy bloczek, może ślizgać się po poziomej powierzchni (rys. 2). Przez bloczek przerzucona jest nić, której jeden koniec jest poziomy i przymocowany do ściany, a na drugim końcu zawieszony jest ciężarek. W chwili początkowej ciężarek odchyłono od pionu o kąt α i puszczono. Znaleźć masę ciężarka, jeśli kąt odchylenia nici od pionu nie zmienia się podczas ruchu klocka. Tarcie zaniedbujemy.

607. Cienki miedziany pierścień o promieniu r może obracać się wokół pionowej osi, pokrywającej się z jego średnicą. W środku pierścienia umieszczono małą igiełkę magnetyczną, która może swobodnie obracać się wokół tej samej osi. Gdy pierścień jest nieruchomy, igiełka ustawia się wzdłuż składowej poziomej pola magnetycznego Ziemi B . Pierścień wprowadzono w bardzo szybki ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową ω . O jaki kąt odchyliła się igiełka od swego początkowego ustawienia? Opór pierścienia wynosi R .

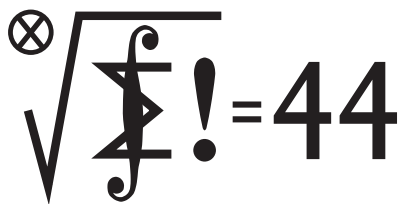
606. Równanie ruchu klocka ma postać: $Ma = N(1 - \sin \alpha)$, gdzie a jest przyspieszeniem klocka, a N siłą naprężenia nici. W układzie związanym z klockiem ciężarek porusza się z przyspieszeniem a wzdłuż prostej, która tworzy z pionem kąt α , pod działaniem sił przedstawionych na rysunku 3. Jego równanie ruchu ma postać: $ma = m\sqrt{a^2 + g^2} - N$. Zachodzi związek: $\tan \alpha = a/g$. Rozwiązując przedstawione równania, otrzymujemy masę ciężarka: $m = \frac{M \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)^2}$.

607. Podczas obrotu pierścienia zmienia się strumień pola magnetycznego Ziemi przez jego powierzchnię i w chwili t wynosi $\Phi = \pi r^2 B \cos \omega t$. W pierścieniu powstaje prąd indukcyjny o natężeniu $I = \frac{\pi r^2 B \omega}{R} \sin \omega t$. Prąd ten wytwarza pole magnetyczne, którego wektor indukcji w środku pierścienia jest prostopadły do płaszczyzny pierścienia, obraca się razem z pierścieniem i ma wartość $B_1 = \mu_0 \frac{I}{2r} = \mu_0 \frac{\pi r B \omega}{2R} \sin \omega t$. Igiełka magnetyczna ustawi się wzdłuż wypadkowego, uśrednionego w czasie pola magnetycznego. Aby je wyznaczyć, rozkładamy wektor B_1 na składowe – równoległą i prostopadłą do wektora B (rys. 4). Składowe mają wartości

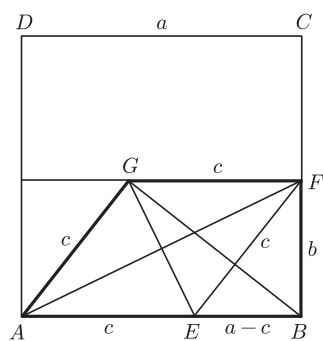
$$B_{\parallel} = B_1 \cos \omega t = \frac{\mu_0 \pi r B \omega}{4R} \sin 2\omega t, \quad B_{\perp} = B_1 \sin \omega t = \frac{\mu_0 \pi r B \omega}{4R} (1 - \cos 2\omega t).$$

Po uśrednieniu po czasie składowa równoległa znika, wartość średnia składowej prostopadłej wynosi $\langle B_{\perp} \rangle = \frac{\mu_0 \pi r B \omega}{4R}$. Igiełka magnetyczna odchyliła się od pierwotnego kierunku o kąt φ (rys. 5), gdzie $\tan \varphi = \frac{\langle B_{\perp} \rangle}{B} = \frac{\mu_0 \pi r \omega}{4R}$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2016



Zadania z matematyki nr 717, 718

Redaguje Marcin E. KUCZMA

717. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|\sphericalangle BCA| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$. Odcinek CD (o końcu $D \in AB$) jest dwusieczną kąta BCA . Punkt S jest środkiem okręgu, stycznego zewnętrznie do okręgów opisanych na trójkątach ACD i BCD oraz stycznego do półprostej CA^- . Udowodnić, że proste AB i CS są prostopadłe.

718. Dowiedź, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d zachodzi równość

$$[a, b, c, d] = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{(a, b, c, d)} \cdot \frac{(a, b, c) \cdot (a, b, d) \cdot (a, c, d) \cdot (b, c, d)}{(a, b) \cdot (a, c) \cdot (a, d) \cdot (b, c) \cdot (b, d) \cdot (c, d)}.$$

Nawias kwadratowy oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność, zaś nawias okrągły – największy wspólny dzielnik liczb ujętych w ów nawias.

Zadanie 718 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2015

Przypominamy treść zadań:

709. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ leżą (odpowiednio) takie punkty E i F , zaś wewnątrz tego kwadratu znajduje się taki punkt G , że $FG \perp BC$, $EF \perp BG$, $EG \perp AF$, $BG \perp AG$. Sporządzony odrębnie rysunek sugeruje, że trapez $ABFG$ pokrywa około 40% powierzchni kwadratu $ABCD$. Czy jest to równość dokładna?

710. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = a_n + \ln a_n$; wyraz początkowy a_0 jest dowolną liczbą większą od 1. Udowodnić, że ciąg (a_n) jest asymptotycznie równy ciągowi (b_n) o wyrazach $b_n = n \ln n$; to znaczy, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$.

709. Nie – ale niewiele brakuje. Oznaczmy: $|AB| = a$, $|BF| = b$, $|AE| = c$. Z podanych warunków wynika, że czworokąt $AEFG$ jest równoległobokiem o przekątnych prostopadłych, czyli rombem. Trójkąty EBF i AGB są podobne. Stąd $|EB| : |EF| = |AG| : |AB|$, czyli $(a - c)/c = c/a$. Z tego równania wyznaczamy $c = a(\sqrt{5} - 1)/2$. Z trójkąta prostokątnego EBF dostajemy $b^2 = c^2 - (a - c)^2 = a^2(\sqrt{5} - 2)$. Pole trapezu $ABFG$ wynosi $b(a + c)/2 = ka^2$, gdzie $k = \sqrt{\sqrt{5} - 2}(\sqrt{5} + 1)/4 \in (0,39; 0,40)$.

710. Będziemy korzystać – podobnie, jak w rozwiązaniach zadań 654 i 662 (*Delta* 5/2013, 9/2013) – z twierdzenia Stolza, które mówi, że jeśli (y_n) jest ciągiem rosnącym do nieskończoności, wówczas równość

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

zachodzi dla każdego ciągu (x_n) , dla którego granica po prawej stronie istnieje. Ponieważ $b_n = n \ln n \rightarrow \infty$ rosnąco, twierdzenie ma szansę zadziałać – warto zająć się ciągiem o wyrazach c_n/d_n , gdzie

$$c_n = a_{n+1} - a_n = \ln a_n, \\ d_n = b_{n+1} - b_n = \lambda_n + \ln(n+1), \quad \lambda_n := n \ln \frac{n+1}{n}.$$

Jeśli wykażemy, że $c_n/d_n \rightarrow 1$, wzór (1) (dla $x_n = a_n$, $y_n = b_n$) da wynik $a_n/b_n \rightarrow 1$ i zakończy rozwiązanie.

Ponownie użyjemy twierdzenia (1) (dla $x_n = c_n$, $y_n = d_n$); ciąg $\lambda_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący, więc $d_n \rightarrow \infty$ rosnąco. Chcemy dowieść, że liczba 1 jest granicą ciągu o wyrazach

$$(2) \quad \frac{c_{n+1} - c_n}{d_{n+1} - d_n} = \frac{\ln(a_n + c_n) - \ln a_n}{(\lambda_{n+1} + \ln(n+2)) - (\lambda_n + \ln(n+1))} = \\ = \frac{\ln\left(1 + \frac{c_n}{a_n}\right)}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}.$$

Wszystkie liczby a_n są większe od 1 (oczywista indukcja); ich logarytmy są dodatnie, wobec czego ciąg (a_n) jest rosnący – ma zatem granicę (skończoną lub nie). Granica skończona musiałaby być liczbą $g > 1$, spełniającą równanie $g + \ln g = g$, co nie jest możliwe. Tak więc $a_n \rightarrow \infty$; co za tym idzie, $c_n/a_n = (\ln a_n)/a_n \rightarrow 0$. Korzystając

ze znanej relacji granicznej $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, możemy teraz napisać

$$\ln\left(1 + \frac{c_n}{a_n}\right) = \gamma_n \cdot \frac{c_n}{a_n}, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \delta_n \cdot \frac{1}{n+1},$$

gdzie $\gamma_n \rightarrow 1$, $\delta_n \rightarrow 1$, i przepisać wyrażenie (2) w postaci

$$(3) \quad \frac{c_{n+1} - c_n}{d_{n+1} - d_n} = \frac{\gamma_n}{(n+1)(\lambda_{n+1} - \lambda_n) + \delta_n} \cdot \frac{(n+1)c_n}{a_n}.$$

Z nieco bardziej subtelnej relacji granicznej $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ (przy $t \rightarrow 0$) możemy wywnioskować, że

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ = -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

a stąd $(n+1)(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \rightarrow 0$. Zatem cały pierwszy czynnik iloczynu po prawej stronie wzoru (3) dąży do 1. Pozostaje dowieść, że drugi czynnik też – czyli że

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n/c_n}{n+1} = 1.$$

Jeszcze raz skorzystamy ze wzoru Stolza (1), tym razem biorąc $x_n = a_n/c_n$, $y_n = n+1$. Granica po lewej stronie (4) będzie równa granicy $\lim(x_{n+1} - x_n)$, jeśli ta ostatnia istnieje. Skoro $c_{n+1} = c_n + \ln(1 + (c_n/a_n)) = c_n(1 + \gamma_n/a_n)$, zatem

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n + c_n}{c_n(1 + \gamma_n/a_n)} - \frac{a_n}{c_n} = \\ = \frac{1 - \gamma_n/c_n}{1 + \gamma_n/a_n} \rightarrow 1$$

(bo $\gamma_n \rightarrow 1$, $a_n \rightarrow \infty$, $c_n \rightarrow \infty$). To dowodzi słuszności tezy (4), więc i tezy zadania.

Prosto z nieba: Poprzeczka w podczerwieni

Każde dziecko wie, że nasza Galaktyka jest galaktyką spiralną, podobną do pobliskiej M31, czyli Wielkiej Mgławicy w Andromedzie. Według systemu klasyfikacji galaktyk zaproponowanego w 1936 roku przez Edwina Hubble'a, który bierze przede wszystkim pod uwagę kształt, nasza Galaktyka jest obiektem spiralnym z wieloma ramionami i centralną „poprzeczką” (typ Sb, czyli *spiral-barred*). Kształt danej galaktyki jest związany z populacjami i wiekiem gwiazd, które ją tworzą, na przykład płaskie galaktyki spiralne są względnie młode i zawierają wiele regionów gwiazdotwórczych, a galaktyki eliptyczne składają się głównie ze starych gwiazd. Z powodu naszego położenia w dysku Galaktyki, określenie jej kształtu „z wewnątrz” jest zadaniem trudniejszym, niż się na pierwszy rzut oka wydaje. Astronomowie gromadzą tę wiedzę poprzez pracowite obserwacje gwiazdowego otoczenia Układu Słonecznego i analizę ruchu gwiazd. Istnienie poprzeczki w centralnym zgrubieniu Galaktyki (w miejscu, w którym spotykają się ramiona spiralne) było hipotezą do połowy ubiegłego dziesięciolecia, i dopiero bardzo dobre obserwacje teleskopu Spitzera udowodniły, że poprzeczka jest nawet większa, niż uprzednio przypuszczano. Projektem zajmującym się wyłącznie badaniem Galaktyki jest przegląd VVV (*Vista Variables in the Via Lactea*). VVV obserwuje centralne części Galaktyki w promieniowaniu podczerwonym. Stanowi on przedsięwzięcie Europejskiego Obserwatorium Południowego (ESO), używające

teleskopu VISTA (*Visible and Infrared Survey Telescope for Astronomy* w Obserwatorium Paranal w Chile).

Polska jest członkiem ESO od 2014 roku – oznacza to, że polscy astronomowie mają dostęp do najlepszych na świecie instrumentów obserwacyjnych astronomii naziemnej.

Jednym z niedawnych odkryć jest obserwacja młodej populacji gwiazd zmiennych, które wchodzi w skład poprzednio nieznanego składnika centralnego zgrubienia. Zespół VVV wykonywał obserwacje gwiazd pulsujących typu δ Cephei (klasycznych cefeid), które świetnie nadają się do pomiaru odległości, ponieważ zmiana ich jasności jest funkcją okresu pulsacji. Wśród 655 gwiazd znaleziono 35, których wiek oszacowano na mniej niż 100 milionów lat, przy czym najmłodsza ma jedynie 25 milionów lat. Odkrycie oznacza, że w samym centrum Galaktyki znajdują się obszary, w których wciąż powstają nowe gwiazdy. Pomiary odległości do cefeid umożliwiły natomiast określenie ich rozmieszczenia w przestrzeni – gwiazdy tworzą cienki dysk umieszczony wzdłuż głównego zgrubienia. Ta subtelna struktura została zauważona dopiero teraz, ponieważ centrum Galaktyki spowite jest gęstymi chmurami pyłowymi, które pochłaniają promieniowanie – VISTA ma dostatecznie dobrą rozdzielczość w podczerwieni i odpowiednio duże pole widzenia, by z sukcesem badać ten niezwykle ciekawy fragment naszego kosmicznego otoczenia.

Michał BEJGER

Niebo w marcu

Tegoroczny marzec to miesiąc obfitujący w zaćmienia, choć dostępne tylko dla miłośników dalekich podróży. Podczas naszej nocy z 8 na 9 marca mieszkańcy wschodniej Azji, północno-zachodniej Australii oraz północnej Oceanii będą obserwować zaćmienie Słońca. Kto zatem chciałby uczestniczyć w tym wydarzeniu, powinien szukać biletów lotniczych na Borneo lub Sumatrę. W tym miesiącu (23 III) wystąpi również zaćmienie Księżyca. Niestety także w tym przypadku, u nas niewidoczne. Zobaczą je mieszkańcy obu Ameryk, Azji i Australii. Na stronie <http://www.timeanddate.com> można znaleźć dokładne obszary, na których moglibyśmy podziwiać zaćmienie Słońca lub Księżyca.

Dla osób lubiących obserwacje planet polecamy szczególnie pierwszą połowę miesiąca, czyli okolice nowiu Księżyca (9 III). Jeśli natomiast pogoda dopisze przez cały miesiąc, będzie można wykonać obserwacje lub astrofotografie bliskich spotkań pięciu planet Układu Słonecznego z Księżcem. Na początku miesiąca, 2 III, Saturn ($0,5^m$) znajdzie się 4° od Księżyca – najkorzystniej obserwować to nad ranem. Należy patrzeć w kierunku południowym, między gwiazdozbiorami Wężownika, Strzelca i Skorpiona. Już 7 III Wenus ($-3,9^m$) będzie równie blisko Księżyca. Mimo iż jest tak jasna, również polecam obserwowanie jej tuż przed wschodem Słońca, na wschodnim niebie, na tle gwiazdozbioru Wodnika. Kolejną planetą, którą można

podziwiać w pobliżu Księżyca, jest Uran, który 11 III zbliży się na odległość $1,9^\circ$ do naszego naturalnego satelity. Przedostatnia planeta Układu Słonecznego będzie miała wtedy jasność $5,9^m$, zatem do jej obserwacji warto wykorzystać lornetkę lub przenieść się na tereny dalekie od miasta. Urana zobaczymy w godzinach wieczornych, spoglądając w kierunku zachodnim w okolice gwiazdozbiorów Wieloryba, Barana i Ryb.

W noc poprzedzającą pełnię, czyli 22 III, Jowisz znajdzie się 2° od Księżyca. Tego jasno świecącego ($-2,5^m$) gazowego olbrzyma obserwować będzie można przez całą noc w okolicach gwiazdozbiorów Panny, Lwa i Sekstansu. Pod koniec miesiąca (28 III) Mars znajdzie się 4° w kierunku południowym od Księżyca. Wyraźnie czerwoną planetę o jasności $0,2^m$ ujrzymy w gwiazdozbiorze Skorpiona – najlepiej obserwować ją w drugiej połowie nocy. Kto przegapił obserwacje Saturna z powodu np. złej pogody, będzie mieć na to okazję ponownie 29 III, kiedy to znów nastąpi druga koniunkcja Księżyca–Saturn (separacja 3°).

Planując obserwacje warto pamiętać o zmianie czasu z zimowego na letni, która nastąpi w nocy 26/27 III. Choć noce staną się coraz krótsze, 20 III rozpoczynamy astronomiczną wiosnę, zatem cieplejsza pogoda umożliwi obserwacje również tym, których odstrasza długie i mroźne zimowe noce.

Karolina BĄKOWSKA



$$w - k + s = 2$$

Joanna JASZUŃSKA

Oznaczmy przez w, k, s liczby odpowiednio wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu. W każdym wierzchołku schodzą się co najmniej trzy końce krawędzi i każda krawędź ma dwa końce, zatem $2k \geq 3w$. Podobnie każda ściana ma co najmniej trzy boki, a każda krawędź należy do dwóch ścian, więc $2k \geq 3s$. Ponadto jeśli wielościan jest wypukły, zachodzi *wzór Eulera*: $w - k + s = 2$.

Wzór ten zachodzi również dla spójnych grafów planarnych (więcej o tym w *deltoidzie* 8/2011). Na stronie <http://www.ics.uci.edu/~epstein/junkyard/euler> spisano 20 jego dowodów.

Można wykazać, że jeśli dodatnie liczby całkowite w, k, s spełniają powyższe trzy warunki oraz $w \geq 4$, to istnieje wielościan wypukły o w wierzchołkach, k krawędziach i s ścianach. Dowód tego i podobnych faktów opisano w *Delcie* 8/2015.

1. Czy istnieje wielościan o 333 ścianach, z których każda jest trójkątem?
2. Czy istnieje wielościan o 7 krawędziach?
3. Czy istnieje wielościan wypukły mający k krawędzi oraz płaszczyzna nie przechodząca przez żaden z jego wierzchołków i przecinająca r krawędzi, przy czym $3r > 2k$?
4. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym $wks = 3^9$?
5. Udowodnij, że w każdym wielościanie wypukłym $2w - s \geq 4$, $2s - w \geq 4$, $3w - k \geq 6$ oraz $3k - w \geq 6$.

6. Pewien wielościan wypukły ma w wierzchołków. Oblicz sumę kątów płaskich wszystkich jego ścian.
7. Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma ścianę trójkątną lub naroże trójścienne.
8. Wykaż, że w każdym wielościanie wypukłym suma liczby ścian trójkątnych i liczby naroży trójściennych jest większa lub równa 8.
9. Krawiec ma worek płaskich pięciokątów foremnych o boku 1 oraz worek płaskich sześciokątów foremnych o boku 1. Jakie wielościany wypukłe może z nich uszyć?
10. Jakie istnieją wielościany foremne wypukłe?

Rozwiązania

R1. Jeśli każda ściana jest trójkątem, to zachodzi równość $2k = 3s = 3 \cdot 333$, co jest niemożliwe. \square

R2. Ponieważ $2k \geq 3w$, wielościan o 7 krawędziach miałby najwyżej 4 wierzchołki, a więc najwyżej 6 krawędzi – sprzeczność. \square

R3. Jeśli płaszczyzna przecina r krawędzi, to przekrój ma r boków i płaszczyzna ta przecina także r różnych ścian (bo wielościan jest wypukły). Stąd $s \geq r$, więc $2k \geq 3s \geq 3r$, zatem niemożliwe, by $3r > 2k$. \square

R4. Jeśli wks jest liczbą nieparzystą, to liczby w, k, s są nieparzyste, a więc niemożliwe, by $w - k + s = 2$. \square

R5. Na mocy wzoru Eulera oraz nierówności $2k \geq 3s$ uzyskujemy $2w - s = 2 \cdot (2 + k - s) - s = 4 + 2k - 3s \geq 4$. Pozostałych nierówności dowodzimy analogicznie. \square

R6. Niech k_i oznacza liczbę krawędzi ściany i dla $i = 1, 2, \dots, s$, wówczas $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 2k$. Suma kątów płaskich ścian wielościanu równa jest

$$\sum_{i=1}^s ((k_i - 2) \cdot 180^\circ) = \left(\sum_{i=1}^s k_i - 2s \right) \cdot 180^\circ = (2k - 2s) \cdot 180^\circ = (k - s) \cdot 360^\circ = (w - 2) \cdot 360^\circ. \square$$

R7. Jeśli nie ma, to $2k \geq 4s$ oraz $2k \geq 4w$, zatem $2 = w - k + s \leq \frac{k}{2} - k + \frac{k}{2} = 0$, sprzeczność. \square

R8. Oznaczmy przez s_i liczbę ścian i -kątnych, a przez w_i liczbę naroży i -ściennych ($i \geq 3$).

Wtedy $s = s_3 + s_4 + s_5 + \dots$, $w = w_3 + w_4 + w_5 + \dots$, $2k = 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \dots$ oraz $2k = 3w_3 + 4w_4 + 5w_5 + \dots$

Stąd

$$\begin{aligned} w_3 + s_3 &\geq w_3 + s_3 + 3w_3 + 4(w_4 + w_5 + \dots) - 2k + \\ &\quad + 3s_3 + 4(s_4 + s_5 + \dots) - 2k = \\ &= 4(w_3 + w_4 + w_5 + \dots) - 4k + 4(s_3 + s_4 + s_5 + \dots) = \\ &= 4(w - k + s) = 8. \end{aligned}$$

R9. Jeśli wielościan ma p ścian pięciokątnych i q sześciokątnych, to $s = p + q$ oraz $2k = 5p + 6q$. Wielokąty są foremne, zatem w każdym wierzchołku schodzą się po trzy. Stąd $2k = 3w$, czyli $3w = 5p + 6q$, a więc

$$\begin{aligned} 2 = w - k + s &= \frac{5p + 6q}{3} - \frac{5p + 6q}{2} + p + q = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (10p + 12q - 15p - 18q + 6p + 6q) = \frac{p}{6}. \end{aligned}$$

Zatem $p = 12$ – wielościan ma 12 ścian pięciokątnych.

Pozostawiamy Czytelnikom uzasadnienie, że krawiec może uszyć tylko dwunastościany foremne i piłki nożne. \square

R10. Szukamy wielościanów wypukłych zbudowanych z n -kątnów foremnych, po p w każdym wierzchołku. Oznacza to, że $2k = ns$ oraz $2k = pw$. Wobec tego

$$2 = w - k + s = \frac{2k}{p} - k + \frac{2k}{n}, \text{ czyli } \frac{1}{2} + \frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n},$$

przy czym $n, p \geq 3$. Równanie to ma pięć rozwiązań.

Składają one pięć wielościanów foremnych: dla $(n, p) = (3, 3)$ czworościan, $(4, 3)$ – sześcian, $(3, 4)$ – ośmiościan, $(5, 3)$ – dwunastościan i $(3, 5)$ – dwudziestościan. Powyższe rozumowanie wskazuje, że więcej ich być nie może. \square

Zadania domowe

11. Czy istnieje wielościan wypukły o czworokątnych ścianach i o 25 krawędziach?
12. Wykaż, że każdy wielościan wypukły ma wierzchołek o mniej niż 6 krawędziach oraz ścianę o mniej niż 6 bokach.

Zadanie 3 pochodzi z XLIX Olimpiady Matematycznej, a zadanie 6 z Ligi Zadaniowej Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.